

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА Дойти ДО САМОЙ СУТИ!

НАСТОЛЬНАЯ КНИГА

для углубленного
изучения физики
в средней школе

Абитуриентам

Участникам
олимпиад

Учителям физики

Всем, кто хочет
понять физику
и научиться решать
стандартные
и нестандартные
задачи!

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ



URSS

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА

ДОЙТИ ДО САМОЙ СУТИ!

Настольная книга
для углубленного изучения
физики в средней школе

Электромагнетизм

Научный редактор
кандидат физико-математических наук
Н. С. Алексеева



URSS
МОСКВА

**Дельцов Виктор Павлович,
Дельцов Василий Викторович**

Физика: дойти до самой сути! Настольная книга для углубленного изучения физики в средней школе. Электромагнетизм: Учебное пособие / Науч. ред. Н. С. Алексеева.
М.: ЛЕНАНД, 2017. — 240 с.

Настоящее издание представляет собой уникальное учебное пособие по основам современной физики для средней школы. Оно предназначено для школьников, углубленно изучающих физику, а также для абитуриентов. Пособие может использоваться в качестве настольной книги для учителей физики, ибо в нем есть всё — от определений физических величин и формулировок законов до математических выводов достаточно сложных вопросов; от несложных примеров до олимпиадных задач, многие из которых решены.

Настоящая книга — это плод 40-летнего преподавания физики в классах основного и физико-математического профилей. Многие в существовавших ранее и нынешних учебниках авторов не устраивает, поэтому они пытаются растолковать трудные и спорные моменты сами, исключить двойные и тройные толкования одного и того же. Впервые в школьном учебнике авторы разработали методику изложения фазы колебаний и циклической частоты методом векторных диаграмм, который широко применяется при изучении механических и электромагнитных колебаний в вузах и инженерной практике, но в школе до сих пор излагался чисто формально, что затрудняло понимание учащимися этих важных тем.

Теоретический материал изложен на глубоком научном уровне с единым подходом к формулировкам, конкретно и чётко, что существенно сокращает расстояние от теории до практики (решения задач) и избавляет учащихся от необходимости впоследствии пересчитывать в вузах.

По ходу изложения теоретического материала постоянно разбирается большое количество задач, это помогает ещё глубже понять теорию. А это необходимо, чтобы ещё успешнее решать другие стандартные и нестандартные задачи, и не только по физике, ибо развитый мозг в одной области знаний может легко переключаться на решение задач других областей.

Цель авторов — помочь учащимся усвоить правильно физические понятия и законы, иллюстрируя их проявление на примерах, и научиться переводить нестандартные задачи в стандартный вид и решать их уже как простые задачи.

Представленный курс уникален по глубине, полноте и систематичности изложения теоретического и практического материала. Книга написана практикующим учителем физики, подготовившим десятки призеров Всероссийской олимпиады, в соавторстве с его сыном, магистром МФТИ, который, будучи школьником, три года подряд становился призером и победителем заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике. Весь материал в пособии преподнесен так, чтобы раскрыть физическую сущность происходящих явлений и чтобы от теории до практики решения задач был всего один шаг.

Рецензенты: учитель высшей категории *С. Н. Калякина*;
заслуженный учитель Чувашской Республики *А. С. Чугунова*

ООО «ЛЕНАНД», 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

Формат 60×90/16. Печ. л. 15. Зак. № 3347.

Отпечатано в ООО «Печатное дело». 142300, МО, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

ISBN 978–5–9710–3785–9


© ЛЕНАНД, 2017

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете:
	http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45


Оглавление

Используемые обозначения физических величин.....	6
--	---


Глава 1. Магнитное поле..... 7


§ 1. Первоначальные сведения о магнитных явлениях.....	7
§ 2. Магнитная индукция.....	11
§ 3. Закон Ампера.....	14
§ 4. Линии магнитной индукции.....	16
§ 5. Магнитный поток.....	19
§ 6. Магнитная проницаемость. Магнитные свойства вещества.....	22
§ 7. Объяснение парамагнетизма и диамагнетизма.....	25
§ 8. Ферромагнетики.....	26
§ 9. Закон Био–Савара–Лапласа.....	30
§ 10. Закон Био–Савара–Лапласа для прямого тока.....	33
§ 11. Магнитное поле соленоида. Индуктивность соленоида.....	34
§ 12. Напряжённость магнитного поля.....	35
§ 13. Взаимодействие параллельных токов.....	36
§ 14. Сила Лоренца.....	38
§ 15. Движение заряженных частиц в магнитном поле.....	41
 Упражнения.....	48


Глава 2. Электромагнитная индукция..... 55


§ 16. Открытие явления электромагнитной индукции.....	55
§ 17. Правило Ленца.....	56
§ 18. Закон электромагнитной индукции.....	58
§ 19. ЭДС индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле.....	59
§ 20. Вихревое электрическое поле.....	64
§ 21. Обобщённая сила Лоренца.....	66
§ 22. Самоиндукция.....	67
§ 23. Энергия магнитного поля.....	69
§ 24. Индукционные токи в массивных проводниках.....	70
§ 25. Электродинамический микрофон и громкоговоритель.....	72
§ 26. Магнитная запись информации.....	72
 Упражнения.....	80


Глава 3. Машины постоянного тока..... 86

§ 27. Устройство машин постоянного тока.....	86
§ 28. Электрический генератор постоянного тока.....	87
§ 29. Типы и КПД генераторов постоянного тока.....	91
§ 30. Электродвигатели постоянного тока.....	93
§ 31. Примеры решения задач.....	95
 Упражнения.....	99

Глава 4. Электрические измерения.....	102
§ 32. Электроизмерительные приборы и электрические измерения	102
§ 33. Электроизмерительные приборы магнитоэлектрической системы	103
§ 34. Электроизмерительные приборы электромагнитной системы	105
§ 35. Электродинамические и ферродинамические электроизмерительные приборы.....	107
§ 36. Индукционные и вибрационные электроизмерительные приборы.....	109
§ 37. Измерение неэлектрических величин электрическими методами	111
 Упражнения	115

Глава 5. Электромагнитные колебания	118
§ 38. Открытие и наблюдение электромагнитных колебаний	118
§ 39. Процессы, происходящие в электрическом колебательном контуре при свободных колебаниях.....	120
§ 40. Свободные механические колебания.....	122
§ 41. Описание гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре	125
§ 42. Примеры решения задач.....	129
 Упражнения	136

Глава 6. Переменный электрический ток.....	146
§ 43. Принцип генерации переменного тока.....	146
§ 44. Действующие значения силы тока и напряжения. Активное сопротивление в цепи переменного тока	148
§ 45. Конденсатор в цепи переменного тока.....	153
§ 46. Катушка индуктивности в цепи переменного тока.....	156
§ 47. Закон Ома для участка цепи переменного тока.....	159
§ 48. Последовательное соединение элементов в цепи переменного тока.....	160
§ 49. Параллельное соединение элементов в цепи переменного тока	164
§ 50. Мощность в цепи переменного тока.....	166
§ 51. Резонанс в цепи переменного тока	169
§ 52. Добротность контура. Волновое сопротивление.....	173
§ 53. Трансформатор.....	174
§ 54. Генератор высокочастотных электромагнитных колебаний	178
 Упражнения	181

Глава 7. Трёхфазный ток	191
§ 55. Трёхфазный ток.....	191
§ 56. Устройство и принцип действия трёхфазного генератора	192
§ 57. Соединение нагрузок звездой.....	194
§ 58. Соединение нагрузок треугольником	198
§ 59. Асинхронный трёхфазный двигатель	199
§ 60. Мощность трёхфазного тока.....	202
§ 61. Трёхфазный трансформатор	203
§ 62. Производство, передача и использование электроэнергии.....	204
 Упражнения	208

Глава 8. Экспериментальные задания.....	211
§ 63. Электромагнитные колебания	211
§ 64. Исследование «чёрных ящиков» на переменном токе.....	213
 Глава 9. Задачи российских физических олимпиад	219
§ 65. Магнитное поле.....	219
§ 66. Электромагнитная индукция	221
§ 67. Машины постоянного тока	225
§ 68. Электромагнитные колебания	226
§ 69. Переменный электрический ток.....	231
 Приложение. Основные формулы	234

Используемые обозначения физических величин

Физическая величина	Условное обозначение	Единица измерения
Электрический заряд	q	Кл (кулон)
Элементарный заряд	$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл	Кл (кулон)
Напряженность электрического поля	E	Н/Кл; В/м
Сила электрического взаимодействия	F	Н
Электрический потенциал	φ	В (вольт)
Разность потенциалов	$\varphi_n - \varphi_k$	В (вольт)
Диэлектрическая проницаемость	ϵ (эпсилон)	безразмерная
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$	Ф/м
Коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$	Н·м ² /Кл ²
Емкость	C	Ф (фарад)
Энергия электрического поля	W	Дж (джоуль)
Объемная плотность энергии поля	w	Дж/м ³
Работа электрического поля	A_z	Дж (джоуль)
Работа сторонних сил источника	$A_{ст}$	Дж (джоуль)
Работа электрического тока	A_t	Дж (джоуль)
Количество теплоты	Q	Дж (джоуль)
Мощность	P	Вт (ватт)
Сила тока	I	А (ампер)
Плотность электрического тока	j (йота)	А/м ²
ЭДС источника	\mathcal{E}	В (вольт)
Электрическое напряжение	U	В (вольт)
Внутреннее сопротивление источника	r	Ом (ом)
Электрическое сопротивление	R	Ом (ом)
Удельное сопротивление	ρ	Ом·м
Температурный коэффициент сопротивления	α	1/К; 1/°C
Электропроводность (проводимость)	Λ	См (сименс)
Удельная электропроводность	λ	См/м
Подвижность иона	b	м ² /(В·с)
Магнитный момент	P_m	А·м ²
Магнитный поток	Φ	Вб (вебер)
Магнитная индукция	B	Тл (тесла)
Напряженность магнитного поля	H	А/м
Магнитная проницаемость	μ	безразмерная
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Н/А ²
Индуктивность	L	Гн (генри)
Концентрация ионов, молекул	n	штук/м ³ ; м ⁻³
Электрохимический эквивалент	k	кг/Кл
Валентность иона	z	безразмерная
Постоянная Авогадро	$N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23}$	моль ⁻¹
Постоянная Фарадея	$F = N_A \cdot e \approx 96485,3$	Кл/моль
Молярная масса вещества	M	кг/моль
Молярная ионная масса	M_i	кг/моль
Сдвиг фаз	φ_c	рад (радиан); ° (градус)
Коэффициент мощности	$\cos \varphi_c$	%; безразмерная

Глава 1. Магнитное поле

Воображение важнее, чем знание. Знания ограничены, тогда как воображение охватывает целый мир, стимулирует прогресс, порождая эволюцию.

Альберт Эйнштейн

§ 1. Первоначальные сведения о магнитных явлениях

Первые сведения о магнетизме появились ещё до нашей эры. Трудно сказать, о чем люди узнали раньше, о свойствах наэлектризованных тел или о таинственном магнетизме.

В древней Греции и Риме о магнитах писали Фалес, Эмпедокл, Платон, Тит Лукреций Кар. Они знали, что некоторые минералы, обнаруженные в Малой Азии, обладают способностью притягиваться друг к другу, а также притягивать и удерживать кусочки железа.

Разные народы эту способность называли по-разному: китайцы называли её чу-ши; греки – адамас и каламита, геркулесов камень; французы – айман; индусы – Тхумбака; египтяне – кость Ора; немцы – магнесс и зигельштейн; англичане – лоудстоун. Большинство этих названий означало «любящий». Так поэтически у разных народов называлась способность магнита притягивать, «любить» железо.

В старинных легендах содержатся упоминания об использовании магнитов в компасах. Множество легенд сложено о чудесных свойствах магнита. Ему приписывалась способность останавливать кровь, вызывать меланхолию, привлекать женщин и др.

В 1600 г. в трактате «Новая физиология о магните, магнитных силах и великом магните – Земле» Гильберт описал более 600 опытов магнитных и электрических явлений и построил первые теории электричества и магнетизма. Он установил, что магнит всегда имеет два полюса – северный и южный и, перепиливая магнит, никогда нельзя получить магнит с одним полюсом; что одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются; что железные предметы под влиянием магнита приобретают магнитные свойства (магнитная индукция); обнаружил явление усиления природного магнетизма с помощью железной арматуры.



Ганс Христиан
Эрстед (1777–1851)



Уильям Гильберт
(1544–1603)

Намагнитив большой железный шар и изучив его свойства с помощью магнитной стрелки, Гильберт пришел к выводу, что его свойства соответствуют магнитным свойствам Земли, т.е. что Земля является большим магнитом. Исходя из этого, он объяснил отклонение магнитной стрелки.

После Гильберта учение о магнетизме развивалось медленно. И только через 200 лет в 1820 г. секретарь Датского королевского общества Г. Х. Эрстед продемонстрировал публике фундаментальное открытие, называемое *опытом Эрстеда*.

Эрстед поместил над магнитной стрелкой прямолинейный провод (рис. 1), расположенный параллельно магнитной стрелке. Стрелка могла свободно вращаться вокруг вертикальной оси. При пропускании по проводу электрического тока стрелка отклонялась в сторону и устанавливалась перпендикулярно проводу. При изменении направления тока стрелка поворачивалась на 180° . То же самое происходило, когда провод переносился вниз и располагался под стрелкой. На этом опыте впервые была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

Свою работу он написал на четырех страницах на латинском языке и разослал в разные страны.

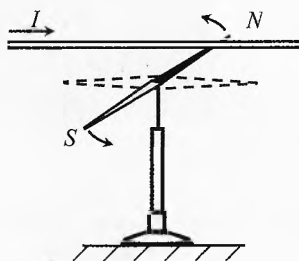


Рис. 1. Провод с током над магнитной стрелкой



Доминик Франсуа Араго (1786–1853)



Андре Мари Ампер (1775–1836)

Французский физик Д. Ф. Араго, ознакомившись с этой работой, сделал сообщение на заседание Парижской Академии наук, в котором резюмировал: «Господа, происходит переворот!»

С того памятного заседания французский физик Андре Мари Ампер усиленно занялся электричеством и магнетизмом. С 28 октября по 26 декабря 1820 г. он сделал 10 сообщений в Парижской Академии наук.

В результате этих опытов Ампер установил в 1820 г. закон взаимодействия электрических токов (Закон Ампера). Он показал также, что свойства постоянных магнитов могут быть объяснены, если предположить, что в молекулах намагниченных тел циркулируют электрические токи (молекулярные токи).

Таким образом, согласно Амперу, все магнитные явления сводятся к взаимодействию токов, а магнитных зарядов не существует.

Поскольку магниты и проводники с токами взаимодействуют на расстоянии, то должен существовать посредник, передающий эти взаимодействия. Поэтому аналогично с понятием электрического поля было введено понятие *магнитного поля*.

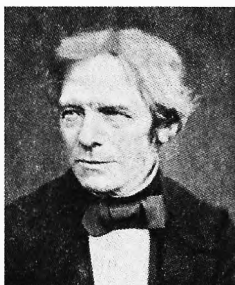
Его свойства аналогичны свойствам электрического поля только с некоторыми особенностями.

1. Если электрическое поле существует вокруг заряженных частиц, то магнитное поле существует вокруг движущихся заряженных частиц, токов, постоянных магнитов.
2. Магнитное поле действует на любые движущиеся заряженные частицы некоторой силой.
3. Магнитное поле, как и электрическое, обладает энергией и может совершать работу.
4. Магнитное поле изменяет свойства веществ: тела намагничиваются, имеет место магнитоупругость, то есть изменение размеров и формы кристаллического тела при намагничивании.

Кулон первым количественно изучал магнетизм, он измерял силу взаимодействия магнитных полюсов. По аналогии с электрическим зарядом он ввёл понятие магнитных зарядов, он получил закон, аналогичный закону Кулона для электрически заряженных частиц. Но его теория оказалась неверна, т.к. магнитных зарядов не существует.



Шарль Огюстен
Кулон (1736–1806)



Майкл Фарадей
(1791–1867)



Альберт Эйнштейн
(1879–1955)

Итак, опыт Эрстеда показал, что электричество как бы порождает магнетизм. И многие ученые после 1820 г. поставили себе задачу попытаться найти обратное явление – превратить магнетизм в электричество. В 1821 г. эту задачу поставил перед собой величайший физик экспериментатор-самоучка Майкл Фарадей. За 10 лет он провел 9 тысяч опытов и в августе 1831 г. открыл «волшебное явление»: возникновение электрического тока в замкнутом проводнике при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур проводника. Он подробно изучил это явление и установил **закон электромагнитной индукции**.

Электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре, равна по модулю скорости изменения полного магнитного потока через контур проводника.

Фарадей ввёл в физику понятие поля, а в 1845 г. употребил термин магнитное поле. И уже в 1852 г. он отчетливо сформулировал свою концепцию поля. По мне-

нию А. Эйнштейна, идея поля была самой оригинальной идеей Фарадея и самым важным открытием со времён Ньютона. У Ньютона и других ученых пространство выступает как пассивноеместилище тел и электрических зарядов. У Фарадея же пространство участвует в явлениях. Эйнштейн писал: «Надо иметь могучий дар научного предвидения, чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между этими зарядами и частицами». Для описания электрических и магнитных явлений Фарадей ввёл представления об электрических и магнитных силовых линиях, которые он, правда, считал реально существующими (что естественно неверно). Фарадей является создателем учения об электромагнитном поле.

Электромагнитное поле — это отличный от вещества вид материи, с помощью которого осуществляется взаимодействие между заряженными частицами.

Мы пока не знаем структуру электромагнитного поля. Но чётко представляем, что это действительно материя. Ведь свободное электромагнитное поле, т.е. электромагнитные волны, движутся со скоростью света. Ничто ведь не может двигаться с какой-то скоростью.

Электрическое и магнитное поле не являются отдельными видами материи. Это различные формы проявления одного и того же вида материи — электромагнитного поля.

Если заряженное тело неподвижно в нашей системе отсчёта, то его электромагнитное поле проявляется только как электрическое.

Если же заряженное тело движется в нашей системе отсчёта, то приборы нашей системы обнаруживают и электрическое, и магнитное поле от этой частицы.

Дальнейший вклад в теорию электромагнитного поля внёс английский физик Джеймс Клерк Максвелл, по сути, являясь её основным создателем. Теорию электромагнитного поля он сформулировал в форме восьми уравнений (уравнения Максвелла), выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений. Первые дифференциальные уравнения были записаны Максвеллом в 1855–1856 гг.

В своей теории электромагнитного поля он использовал новое понятие — ток смещения (1861 г.), дал определение электромагнитного поля (1864 г.) и в 1865 г. предсказал новый важный эффект: существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение в пространстве со скоростью света. Последнее дало ему основание считать (1865 г.) свет одним из видов электромагнитного излучения и раскрыть связь между оптическими и электромагнитными явлениями. Сформулируем два основных положения теории Максвелла:



Джеймс Клерк
Максвелл (1831–1879)

1. Явление электромагнитной индукции (открытое Фарадеем): при всяком изменении магнитного поля в окружающем пространстве возникает вихревое электрическое поле.

2. Явление магнитоэлектрической индукции (предсказанное Максвеллом из соображений симметрии явлений в природе): при всяком изменении электрического поля в окружающем пространстве возникает вихревое магнитное поле.

§ 2. Магнитная индукция

Для количественной оценки силового влияния магнитного поля на движущиеся заряды (электрические токи, магниты) вводится физическая величина — *магнитная индукция* (или *вектор магнитной индукции*).

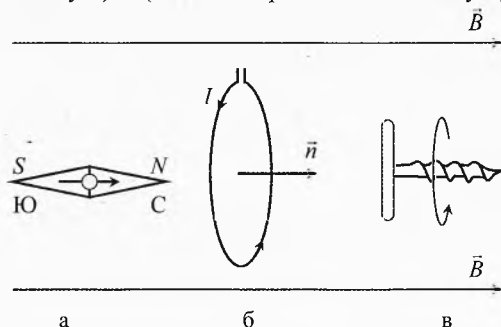


Рис. 2. Магнитная стрелка, контур с током, правый винт

Магнитное действие на заряды и токи всегда направлено определённым образом. За направление магнитной индукции принято направление, в котором «смотрит» северный конец свободно установившейся магнитной стрелки (рис. 2а).

Но с помощью чего исследовать магнитное поле? * При введении понятия «напряжённость электрического поля» мы исследовали электрическое поле с помощью пробных зарядов, а магнитных зарядов не существует!? Магнитное поле удобно исследовать при помощи контура с током.

Если к контуру подводится ток при помощи близко расположенных проводов (рис. 3а) или проводов с бифилярной намоткой (рис. 3б), то внешнее магнитное поле действует только на контур $ABCD$ и не влияет на подводящие провода.

Поместим такой контур площадью S и силой тока I в магнитное поле (рис. 2б). Оно будет дейст-

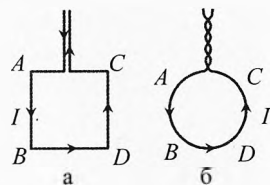


Рис. 3. Контур с током

* На начальном этапе Био и Савар исследовали магнитное поле различных проводников с током магнитной стрелкой. Оценивали магнитное поле по частоте колебаний магнитной стрелки.

водить на контур ориентирующим образом (как на магнитную стрелку), а именно расположит его плоскость перпендикулярно вектору магнитной индукции.

Магнитная индукция в данной точке направлена как нормаль к контуру, взятая в соответствии с **правилom правого буравчика** (винта, штопора).

Если рукоятку правого буравчика вращать по направлению тока в свободно установившемся контуре, то поступательное движение буравчика совпадет с направлением магнитной индукции в этой точке (рис. 2в).

Магнитный момент контура. Если повернуть контур от равновесного положения, то со стороны магнитного поля начнёт действовать момент силы, стремящейся вернуть контур в равновесное состояние. Чем больше сила тока в контуре, тем больше влияет на него магнитное поле, причём в прямой пропорциональной зависимости. И чем больше площадь контура, тем сильнее на него действие магнитного поля, причём тоже в прямой пропорциональной зависимости.

Для того чтобы характеризовать способность контура с током реагировать на внешнее магнитное поле, вводится векторная величина магнитный момент контура \vec{P}_m , модуль которого равен произведению силы тока на площадь контура.

Направление магнитного момента контура определяется также по правилу правого буравчика: если рукоятку правого буравчика вращать по направлению тока в контуре, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением магнитного момента контура (рис. 4).

Пусть \vec{n} – единичный вектор, символизирующий направление нужной нормали к поверхности контура. Тогда

$$\vec{P}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}, \quad [P_m] = A \cdot m^2.$$

Модуль магнитного момента:

$$P_m = I \cdot S.$$

Единицей измерения магнитного момента контура – ампер, умноженный на метр в квадрате.

Чтобы более точно измерять магнитную индукцию поля, нужно брать контур малой площади, но тогда он будет слабо «чувствовать» магнитное поле. Однако можно взять многовитковый плоский контур с числом витков N . В таком случае даже при малой площади он будет достаточно чувствительным. Его магнитный момент при этом будет равен

$$P_m = I \cdot (S_1 + S_2 + \dots + S_N) = I \cdot S,$$

где $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$. Причём все витки должны быть намотаны в одну сторону.

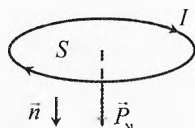


Рис. 4. Магнитный момент контура

Магнитный момент контура с током – векторная величина, характеризующая магнитные свойства контура с электрическим током. Значение магнитного момента плоского контура равно произведению силы тока в контуре на суммарную площадь всех его витков.

Способ измерения модуля магнитной индукции. Пусть в данной области пространства имеется электромагнитное поле. Получим формулу для вычисления модуля магнитной индукции в любой точке.

Поместим в некоторую точку контур с током, магнитный момент которого \vec{P}_m . Под действием поля контур развернётся в устойчивое положение. Нормаль к контуру, взятая в соответствии с правилом правого винта, укажет направление магнитной индукции в этой точке. Теперь развернем контур на 90° так, чтобы со стороны поля на него стал действовать максимальный вращающий момент M_{\max} (рис. 5).

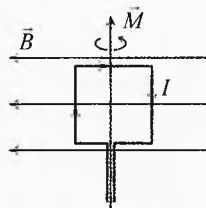


Рис. 5. Вращающий момент на контур

Запишем значение магнитного момента P_{m1} и соответствующее ему значение максимального момента сил $M_{\max 1}$. Затем изменим магнитный момент контура (например, увеличим или уменьшим значение силы тока) и вновь измерим магнитный момент и максимальный момент силы в той же точке. Проведя такие опыты несколько раз, обнаружим, что чем больше магнитный момент контура, тем сильнее поле стремится повернуть контур. А отношение максимального момента силы к магнитному моменту контура будет одинаковым для всех опытов в данной точке:

$$\frac{M_{\max 1}}{P_{m1}} = \frac{M_{\max 2}}{P_{m2}} = \frac{M_{\max 3}}{P_{m3}} = \dots = \frac{M_{\max}}{P_m}.$$

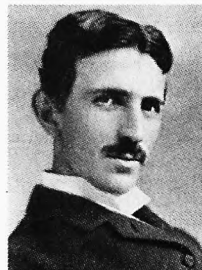
То есть оно не зависит от значения магнитного момента контура, с помощью которого исследуется магнитное поле, а зависит только от поля. Те точки, в которых поле сильнее, это отношение больше. Поэтому модуль магнитной индукции естественно определить этим отношением:

$$B = \frac{M_{\max}}{P_m} \quad \text{или} \quad B = \frac{M_{\max}}{I \cdot S}.$$

Единица измерения магнитной индукции – Тесла – названа в честь сербского электротехника Н. Тесла, который изобрел электрический счётчик, частотомер, высокочастотный трансформатор и др.:

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Нм}}{1 \text{ А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Если магнитная индукция равна 1 Тл, то это означает, что магнитное поле в данной точке столь сильно, что на



Никола Тесла
(1856–1943)

контур с магнитным моментом $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ оно действует максимальным моментом силы, равным $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Следует отметить, что это довольно сильное магнитное поле. Например, максимальное значение поля на поверхности Земли составляет всего $7 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$, а между полюсами школьного дугообразного магнита $1 \div 10 \text{ мТл}$.

Формулу для магнитной индукции можно записать и в векторном виде:

$$\vec{B} = \frac{M_{\max}}{P_m} \cdot \vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор, указывающий направление магнитной индукции, совпадающий с направлением, в котором смотрит северный конец свободно установившейся магнитной стрелки.

Магнитная индукция – векторная величина, характеризующая силовое влияние магнитной составляющей электромагнитного поля на заряженные частицы. Модуль магнитной индукции равен отношению максимального момента силы, приложенного в данной точке со стороны поля на контур с током, к магнитному моменту контура.

Направление магнитной индукции в данной точке совпадает с направлением, в котором смотрит северный конец свободно установившейся магнитной стрелки.

Второй вариант определения направления магнитной индукции.

Направление магнитной индукции совпадает с направлением нормали к свободно расположенному контуру с током, взятой в соответствии с правилом правого буравчика.

§ 3. Закон Ампера

После знаменитого опыта Эрстеда Ампер разработал теорию и практику магнетизма. В частности он установил, что два параллельных провода притягиваются друг к другу, если токи в них текут в одном направлении (рис. 6а), и отталкиваются, когда токи направлены противоположно (рис. 6б). Этот эксперимент легко продемонстрировать, взяв в качестве проводов две полоски фольги длиной 50–80 см. Если их расположить на расстоянии 3–5 см и пропустить ток 5–10 А, то эффект взаимодействия хорошо наблюдается. Ампер ввёл понятие элемент тока.

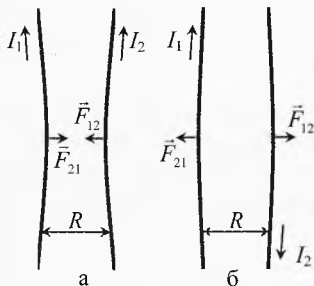


Рис. 6. Взаимодействие проводников с током

Элемент тока $I \cdot \vec{\delta l}$ – это векторная величина, численно равная произведению силы тока I в малом отрезке проводника с током на длину этого отрезка δl и направленная по направлению тока.

Элемент тока в магнитном поле аналогичен точечному заряду в электрическом поле. Меняя форму и взаимное расположение проводников, Ампер установил **закон Ампера**.

Сила взаимодействия двух элементов тока $I_1 \cdot \vec{\delta l}_1$ и $I_2 \cdot \vec{\delta l}_2$ прямо пропорциональна произведению элементов токов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

В среде с магнитной проницаемостью μ для параллельно расположенных элементов тока закон Ампера имеет вид:

$$F_A = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 \delta l_1 \cdot I_2 \delta l_2}{R^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная.

Закон Ампера для взаимодействия элементов токов аналогичен закону Кулона.

Законом Ампера называется также закон, определяющий силу, с которой магнитное поле действует на малый отрезок проводника с током (элемент тока).

Сила, действующая на элемент тока, равна векторному произведению элемента тока на магнитную индукцию поля:

$$\vec{F}_A = I \cdot [\vec{\delta l} \cdot \vec{B}].$$

Сформулируем **закон Ампера** в скалярной форме.

Значение магнитной **силы Ампера** \vec{F}_A , действующей на элемент тока $I \cdot \vec{\delta l}$ со стороны магнитного поля, равно произведению магнитной индукции B , силы тока I , длины проводника δl и синуса угла между магнитной индукцией и направлением тока:

$$F_A = B \cdot I \cdot \delta l \cdot \sin \alpha.$$

Направление силы Ампера определяется по **правилу левой руки** (рис. 7).

Если пальцы **левой руки** направлены по току, в ладонь входят магнитные линии, то отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы, с которой магнитное поле действует на элемент поля.

Направление силы можно определить и по правилу векторного произведения: если смотреть из конца \vec{F}_A , то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{\delta l}$ ко второму \vec{B} должен происходить против часовой стрелки.

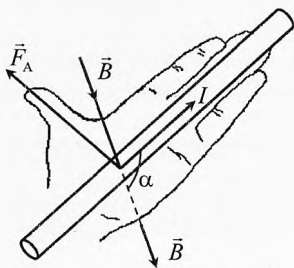


Рис. 7. Правило левой руки

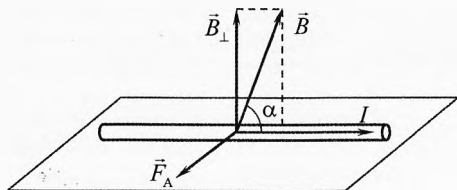


Рис. 8. Нормальная составляющая магнитной индукции

Произведение значения магнитной индукции B на $\sin\alpha$ есть нормальная составляющая магнитной индукции к элементу тока $B_{\perp} = B \cdot \sin\alpha$. В таком случае сила Ампера (рис. 8):

$$F_A = B_{\perp} \cdot I \cdot \delta l$$

На проводник с током действует только перпендикулярная направлению тока составляющая магнитной индукции.

Если проводник перпендикулярен магнитной индукции, то сила Ампера будет максимально возможной

$$F_A = B \cdot I \cdot \delta l \quad \text{при } \alpha = 90^\circ.$$

Если проводник параллелен магнитной индукции (рис. 9), то согласно закону Ампера магнитное поле на него действовать не будет ($\sin\alpha = 0$).

$$F_A = 0 \quad \text{при } \alpha = 0^\circ \text{ или } \alpha = 180^\circ.$$

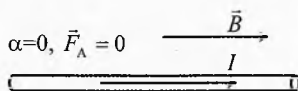


Рис. 9. Поле не действует на параллельный ему проводник

Обращаем внимание на то, что сила Ампера всегда перпендикулярна и магнитной индукции и элементу тока.

§ 4. Линии магнитной индукции

Для наглядного представления магнитного поля вводятся магнитные линии или линии магнитной индукции.

Линии магнитной индукции – геометрическое место точек, касательные к которым совпадают с направлением магнитной индукции в соответствующих точках.

Поскольку касательная в данной точке имеет два направления, то выбирают направление, в котором «смотрит» северный конец свободно установившейся маленькой магнитной стрелки, помещенной в эту точку.

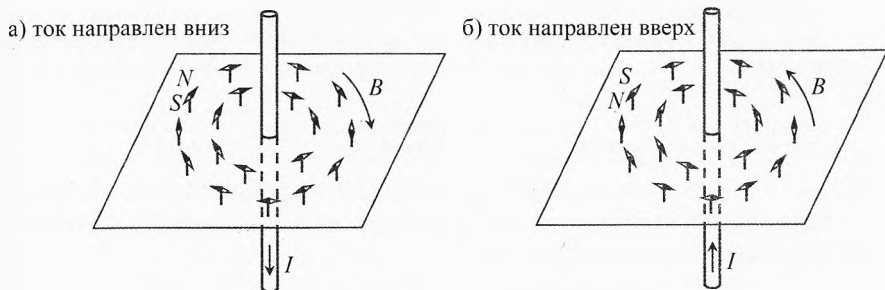


Рис. 10. Магнитное поле от тока прямого провода

О значении магнитной индукции можно судить по густоте линий. В тех точках, где линии расположены гуще, магнитная индукция больше.

На рис. 10 представлена связь между направлением тока в прямолинейном проводнике и направлением линий магнитного поля, создаваемого этим током. Тёмная часть стрелки символизирует северный полюс, а светлая — южный.

Направление тока и магнитной индукции поля связаны **правилом правого буравчика**.

Если правый буравчик ввинчивать по направлению тока, то направление вращения рукоятки совпадет с направлением магнитных линий (рис. 11).

Если мы возьмём соленоид (катушку с током), то направление магнитных линий тоже можно определить с помощью правила буравчика. Если рукоятку правого буравчика вращать по направлению тока в катушке, то внутри неё магнитная индукция будет направлена по направлению поступательного движения буравчика.

Заметим, что во всех случаях магнитные линии замкнуты сами на себя. Пересечение линий невозможно. Это означало бы, что в одной точке магнитная индукция имела бы два направления.

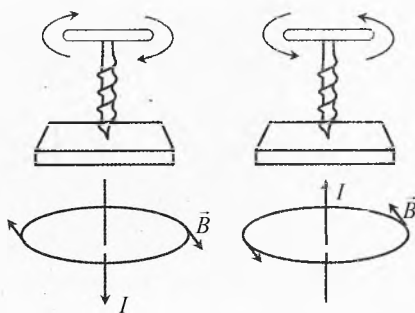


Рис. 11. Правило правого буравчика

Магнитная индукция является *псевдовектором*. В отличие от обычных векторов, сила, скорость, ускорение и др., направление которых определяется процессом, существует немало векторов, направление которых можно выбрать в одну сторону

или противоположную ей. Чтобы направление таких величин определялось однозначно, используют дополнительную договоренность, например, правило правого буравчика. Такие векторные величины называют *псевдовекторами*. К ним относятся момент силы, угловая скорость, магнитная индукция и др. Ведь за направление магнитной индукции можно было принять и противоположное направление, но на нашей планете по договоренности принято правило правого винта. Вполне возможно, что разумные обитатели других планет выбрали противоположное направление.

Картину магнитных линий легко увидеть с помощью мелких железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно малым магнитным стрелкам. Картины плоских сечений линий магнитного поля, полученные при различном числе витков соленоида с помощью опилок, представлены на рис. 12.

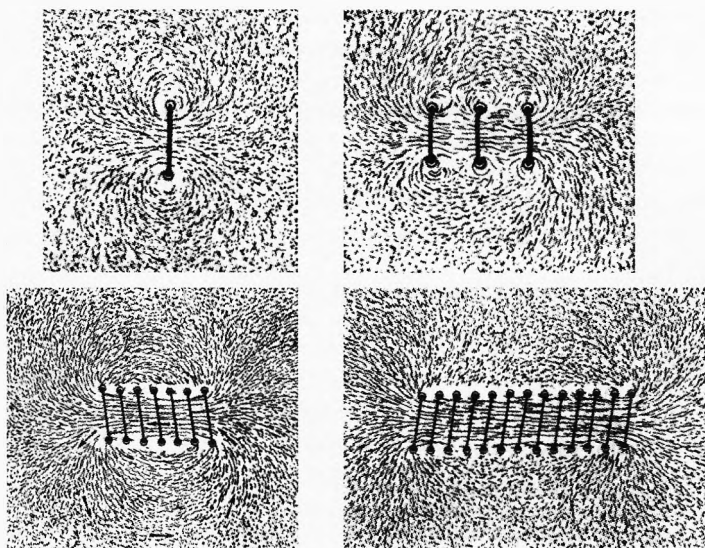


Рис. 12. Картина магнитных линий соленоида, полученная с помощью опилок

Обратим внимание, что в случае длинного соленоида магнитные линии внутри него параллельны, т.е. их густота по всему сечению одинакова. Значит, *магнитная индукция одинакова в любой точке соленоида вдали от его краёв*. Такое поле называют *однородным*. Очевидно, вблизи краев и вне соленоида поле неоднородно.

На рис. 13 представлены картины линий магнитного поля длинного намагниченного железного цилиндра и длинного соленоида. Концы обмотки соленоида подключаются к полюсам источника. Стрелки на обмотке соленоида показывают направление тока.

Магнитные линии выходят из северного полюса магнита и входят в южный. Внутри магнита они не прерываются (показаны пунктиром).

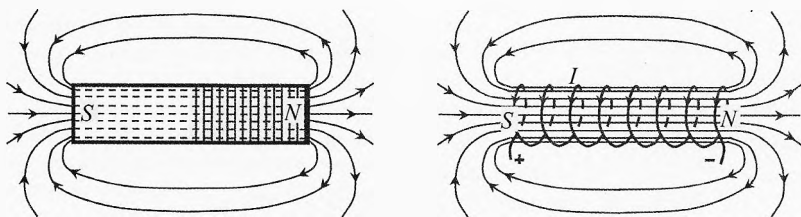


Рис. 13. Магнитное поле намагниченного цилиндра и соленоида

Точно такая же картина магнитной индукции наблюдается в соленоиде. Поэтому можно сказать, что длинный соленоид эквивалентен длинному цилиндрическому намагниченному железному цилиндру. Они эквивалентны в плане распределения индукции магнитного поля внутри и вне них.

Обращаем внимание, что линии магнитной индукции не являются материальными объектами, а есть лишь геометрическое место точек, позволяющее наглядно представить картину магнитного поля в пространстве.

§ 5. Магнитный поток

Магнитный поток. Для того чтобы оценивать количественно магнитное поле, пронизывающее некоторую поверхность, вводится скалярная величина поток вектора магнитной индукции или короче – магнитный поток.

Мы уже отмечали, что по густоте магнитных линий можно оценивать интенсивность магнитного поля. Чем гуще расположены магнитные линии, тем больше в соответствующей точке магнитная индукция, определяющая интенсивность поля. Условимся через единицу плоской поверхности, перпендикулярной магнитной индукции, проводить линии в количестве, численно равном значению магнитной индукции в данном месте, т.е.

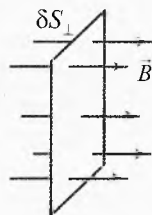


Рис. 14. Магнитный поток

$$B = \frac{\delta\Phi}{\delta S_{\perp}}, \quad (1)$$

где δS_{\perp} – площадь элемента поверхности, перпендикулярного к линиям магнитной индукции – это столь малая площадь, что магнитная индукция практически одинакова во всех её точках; $\delta\Phi$ – число линий, пронизывающих эту поверхность (рис. 14).

Если значение магнитной индукции мало, то на рисунке на каждый квадратный метр можно проводить кратное магнитной индукции число линий (в 10, 100, 1000 и т.д. раз).

Из (1) следует, что

$$\delta\Phi = B \cdot \delta S_{\perp}.$$

Если нормаль \vec{n} к площадке составляет угол α с вектором магнитной индукции (рис. 15), то эффективное число линий пересекающих элемент поверхности δS :

$$\delta\Phi = B \cdot \delta S \cdot \cos\alpha.$$

Эта формула, наглядно определяющая число линий магнитной индукции, пронизывающих элемент поверхности δS , в то же время определяет физическую величину – магнитный поток

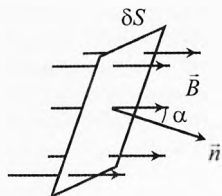


Рис. 15. Эффективный магнитный поток

Магнитный поток – скалярная величина, характеризующая магнитное поле, пронизывающее контур. Магнитный поток равен произведению площади плоского контура, магнитной индукции и косинуса угла между магнитной индукцией и нормалью к поверхности контура:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

или

$$\Phi = B_{\perp} \cdot S$$

$$[\Phi] = 1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

При этом поток максимален, если магнитная индукция перпендикулярна поверхности:

$$\Phi = B \cdot S \quad \text{при } \alpha = 90^\circ.$$

Единица измерения магнитного потока – Вебер.

Вебер равен магнитному потоку, проходящему через элемент плоской поверхности площадью $S = 1 \text{ м}^2$, установленный перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля $B = 1 \text{ Тл}$.

Если магнитные линии выходят из данной поверхности, то угол между векторами \vec{B} и \vec{n} острый, а поток будет положительным. Поэтому ясно, что выходящий из поверхности поток линий положителен, а входящий – отрицателен, т.к. в последнем случае угол α тупой и $\cos\alpha < 0$.



Вильгельм Эдуард Вебер
(1804–1891)

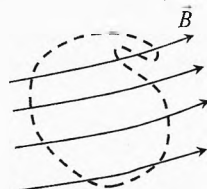


Рис. 16. Поток через замкнутую поверхность равен нулю

Магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю, ибо сколько магнитных линий входит в неё, столько и выходит (рис. 16).

Теорема Остроградского–Гаусса для магнитного поля. Покажем на частном примере прямого тока, что магнитный поток через соосную цилиндрическую замкнутую поверхность, в которой находится часть прямого провода с током, равен нулю.

Пусть по прямому бесконечно длинному проводу течёт ток, сила тока равна I . Вокруг него концентрически расположены магнитные линии в плоскостях перпендикулярных оси провода (рис. 17). В качестве замкнутой поверхности возьмём поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого равен r , высотой h , а ось совпадает с осью проводника. Магнитные линии не пересекают ни боковой поверхности цилиндра, поскольку они расположены вдоль боковой поверхности цилиндра, ни его оснований, т.к. они перпендикулярны оси провода. Следовательно, поток магнитных линий через этот цилиндр равен нулю.

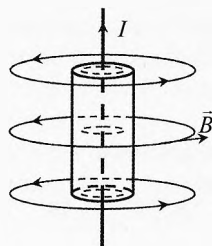


Рис. 17. Поток через замкнутую поверхность равен нулю

Мы проиллюстрировали на частном примере *теорему Остроградского-Гаусса* для магнитного поля.

Магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\boxed{\int_S d\Phi = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\int_S B_{\perp} \cdot dS = 0}$$

Эта теорема является следствием того, что в природе нет магнитных зарядов, и линии магнитной индукции любого магнитного поля представляют собой замкнутые кривые. Доказательство этой теоремы выходит за пределы нашего курса.

Как мы знаем, в электростатическом поле линии напряжённости начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных. В магнитном же поле линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, потому что нет магнитных зарядов, и линиям не на чем начинаться и заканчиваться.

На практике большое значение имеют магнитные потоки, пронизывающие проводящие контуры.

Если контур состоит из одного витка, то пронизывающий его магнитный поток, созданный внешним источником, равен

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Если же контур состоит из нескольких витков, то полный магнитный поток Φ , пронизывающий его:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N.$$

Если каждый виток пронизывается одинаковым магнитным потоком, т.е. $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_N$, то полный магнитный поток, пронизывающий многовитковый контур с числом витков N :

$$\Phi = \Phi_1 \cdot N.$$

Собственный магнитный поток (потокосцепление). Если по проводящему контуру, состоящему из одного витка, течёт электрический ток, то этот контур будет окружен собственным магнитным потоком Φ_{cl} (рис. 18).

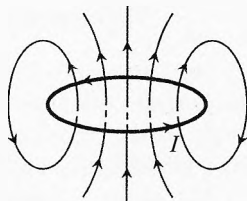


Рис. 18. Собственный магнитный поток

Если же контур состоит из N витков, то в этом случае полный собственный магнитный поток (иногда называемый *потокосцеплением*) внутри контура:

$$\Phi_c = \Phi_{c1} + \Phi_{c2} + \dots + \Phi_{cN}.$$

Если при этом каждый виток пронизывается одинаковым собственным магнитным потоком, т.е. $\Phi_{c1} = \Phi_{c2} = \dots = \Phi_{cN}$, то

$$\Phi_c = \Phi_{c1}N.$$

Опыт показывает, что полный собственный магнитный поток в очень широких пределах пропорционален силе тока в контуре:

$$\Phi_c = L \cdot I,$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* контура.

Индуктивность (или коэффициент самоиндукции) характеризует магнитные свойства контура. Индуктивность контура численно равна полному собственному магнитному потоку, созданному током 1 А в данном контуре.

Единица измерения индуктивности в СИ – генри. Название дано в честь американского физика Джозефа Генри:

$$1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}}.$$

1 Гн – индуктивность контура, в котором при силе тока 1 А создаётся полный собственный магнитный поток (потокосцепление) 1 Вб. Индуктивность контура зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств среды.

§ 6. Магнитная проницаемость.

Магнитные свойства вещества

При изучении электростатики мы выяснили, что любое вещество ослабляет взаимодействие между заряженной частицей и электрическим полем, а также между заряженными частицами по сравнению с вакуумом. Степень этого ослабления характеризуется диэлектрической проницаемостью среды.

Магнитные взаимодействия тоже зависят от наличия среды. Для того чтобы характеризовать степень влияния среды на магнитное поле, вводится безразмерная скалярная величина – магнитная проницаемость μ .



Джозеф Генри
(1797–1878)

Магнитная проницаемость изотропного материала (одинакового по магнитным свойствам во всех направлениях) – безразмерная скалярная величина, характеризующая степень влияния данного материала на магнитное поле. Она равна отношению магнитной индукции в материале к магнитной индукции в вакууме в соответствующих точках от одного и того же источника магнитного поля:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

Итак, в однородной среде магнитная индукция равна

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (2)$$

Эта формула справедлива только для модели однородной среды, заполняющей всё пространство, или для случаев особой симметрии тела, например, для однородного стрижня внутри длинной катушки с током.

Если же форма тела произвольная, то при внесении его в магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 индукция \vec{B} внутри вещества не будет определяться формулой (2). Зависимость \vec{B}_0 и \vec{B} будет гораздо сложнее. Она будет определяться формой тела и его ориентацией по отношению к вектору \vec{B}_0 . Другими словами, если мы возьмём тело из вещества, табличное значение магнитной проницаемости которого равно μ , и поместим это тело в магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 , то магнитная индукция, скорее всего, изменится не в μ раз. Более того, направления векторов \vec{B}_0 и \vec{B} при этом могут не совпадать.

Таблица 1. Значение магнитной проницаемости μ для некоторых парамагнитных и диамагнитных веществ.

Диамагнитные вещества	μ	Парамагнитные вещества	μ
Водород (газообразный)	0,999937	Азот (газообразный)	1,000013
Вода	0,999991	Воздух (газообразный)	1,000038
Стекло	0,999987	Кислород (газообразный)	1,000017
Цинк	0,999991	Эбонит	1,000014
Серебро	0,999981	Алюминий	1,000023
Золото	0,999963	Вольфрам	1,000175
Медь	0,999912	Платина	1,000253
Висмут	0,999824	Кислород (жидкий)	1,0034

По магнитным свойствам все вещества делятся на три группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

*У **диамагнетиков** магнитная проницаемость близка к единице, но немного меньше, то есть к диамагнетикам относятся вещества, в небольшой степени ослабляющие магнитное поле.*

Например, магнитная проницаемость воды $\mu = 0,99999$ отличается от единицы всего на 10^{-5} . Как видно из таблицы, наибольшее отличие от единицы у металла висмута $\mu = 0,999824$, т.е. магнитное поле в висмуте ослабляется наиболее значительно.

К диамагнетикам, кроме указанных в таблице, относятся сера, ртуть, хлор, инертные газы и практически все органические соединения. Поэтому ясно, что тело человека тоже является диамагнетиком. Диамагнетиком является пламя главным образом за счёт углекислого газа. Поэтому пламя свечи или спички выталкивается, если его поместить между полюсами сильного магнита. Магнитная проницаемость диамагнетиков практически не зависит от температуры и индукции \vec{B}_0 намагничивающего поля.

*Магнитная проницаемость **парамагнетиков** тоже близка к единице, но, в отличие от диамагнетиков, она чуть больше единицы, то есть к парамагнетикам относятся вещества, в небольшой степени усиливающие магнитное поле.*

Как видно из таблицы, у азота магнитная проницаемость больше единицы на $1,3 \cdot 10^{-5}$. Эта разница всего в полтора раза больше по модулю, чем у слабых диамагнетиков воды и цинка. Наибольшее отличие магнитной проницаемости от единицы у жидкого кислорода. Она составляет 0,34%.

То есть парамагнитный эффект в целом несколько больше диамагнитного. К парамагнетикам относятся многие элементы: натрий, калий, марганец, а также различные растворы электролитов. С повышением температуры магнитная проницаемость парамагнетиков уменьшается.

*К **ферромагнетикам** относятся вещества, у которых магнитная проницаемость составляет десятки, сотни и даже тысячи единиц при небольших значениях \vec{B}_0 намагничивающего поля.*

При больших значениях магнитной индукции \vec{B}_0 наступает насыщение, магнитная проницаемость, уменьшаясь, стремится к единице при возрастании намагничивающего поля \vec{B}_0 .

Ферромагнетиками являются лишь некоторые твёрдые тела. Ферромагнетизм – свойство не отдельных атомов железа (или других веществ), а свойство образца в целом.

К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель и некоторые сплавы – электротехнические стали, пермаллой, пермендюр, альнико, инвар

и др. Ферромагнитные свойства материалов проявляются не выше определённой для каждого вещества температуры, называемой *точкой Кюри*, по имени открывшего это явление французского учёного Пьера Кюри. При достижении температуры (точки) Кюри ферромагнитные свойства вещества пропадают, и оно становится парамагнетиком.

При внесении образца в магнитное поле молекулярные токи в частицах вещества ориентируются определённым образом. Тело оказывается намагниченным, т.е. оно создаёт собственное магнитное поле. При этом внешнее магнитное поле действует на тело с определённой силой. Эта сила является результирующей всех элементарных сил, приложенных к каждой молекуле.

По значению этой силы можно измерить значение магнитной проницаемости μ . При этом можно использовать образцы небольших размеров. Зависимость магнитной проницаемости от силы действующей на образец сложна. Но качественно влияние, например, ферромагнитного сердечника наблюдать несложно.

Поместим маленькую катушку на гибких проводах рядом с большой катушкой и подключим каждую к источникам тока (рис. 19). При этом маленькая катушка отклонится от вертикали (притянется или оттолкнется). Если теперь в большую катушку внести железный сердечник, то при тех же токах в катушках маленькая катушка отклонится в ту же сторону на значительно больший угол. Значит, (ненамагниченный ранее) сердечник намагничивается в большой катушке, создаёт собственное магнитное поле, и вместе с полем тока большой катушки сильнее притягивает или отталкивает маленькую катушку.



Пьер Кюри
(1859–1906)

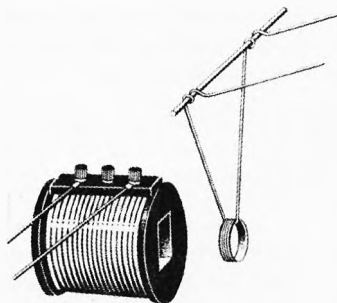


Рис. 19. Взаимодействие катушек с током

§ 7. Объяснение парамагнетизма и диамагнетизма

Различие пара- и диамагнитных свойств веществ обусловлено различием магнитных свойств их атомов.

Парамагнетизм. Если поместить плоский контур с током в магнитное поле, то он повернется и, в конечном счёте, установится так, что его магнитный момент будет сонаправлен с индукцией \vec{B}_0 внешнего магнитного поля (рис. 20).

В каждом атоме вокруг ядра вращаются отрицательно заряженные частицы – электроны. Поэтому у каждого электрона атома есть некоторый орбитальный магнитный момент. Два электрона, вращающиеся в противоположных направлениях,

дают суммарный магнитный момент, равный их алгебраической сумме, то есть равный разности их модулей.

В парамагнетиках суммарный орбитальный магнитный момент молекулы (атома) не равен нулю, поэтому молекулы таких веществ представляют собой элементарные магниты.

Если такое вещество поместить во внешнее магнитное поле, то орбитальные магнитные моменты молекул стремятся ориентироваться вдоль магнитной индукции \vec{B}_0 внешнего поля и немного усиливают его. Тепловое движение молекул нарушает ориентацию молекул, и усиление будет не максимально возможным.

Чем ниже температура, тем больше значение магнитной проницаемости парамагнетика и тем больше будет усиление внешнего поля. В очень сильных внешних магнитных полях достигается насыщение при соответствующих температурах. Это происходит, когда магнитные моменты \vec{P}_m всех молекул сонаправлены с магнитной индукцией \vec{B}_0 внешнего поля, то есть $\vec{P}_m \uparrow \vec{B}_0$. Если убрать внешнее намагничивающее поле, то тепловое хаотическое движение молекул расстроит ориентацию магнитных моментов молекул, поэтому остаточная намагниченность в парамагнетиках не наблюдается.

Диамагнетизм.

В диамагнетиках суммарный магнитный момент молекулы (атома) равен нулю, то есть магнитные моменты электронов в каждой молекуле диамагнетика взаимно компенсируются.

Понятно, что при отсутствии внешнего магнитного поля свое поле диамагнетик не создаёт. Если поместить диамагнетик в нарастающее внешнее магнитное поле, то в атомах и молекулах возникают индукционные токи. Согласно правилу Ленца, ориентация и скорость движения электронов изменяется таким образом, чтобы препятствовать появлению внешнего магнитного поля. Поэтому результирующая индукция \vec{B} при наличии диамагнетика меньше, чем без него \vec{B}_0 . Новые значения момента импульса и магнитного момента молекул будут сохраняться до тех пор, пока внешнее намагничивающее поле \vec{B}_0 не исчезнет.

Диамагнетизм присущ всем веществам, но проявляется у тех веществ, молекулы которых не создают собственные орбитальные магнитные моменты. У парамагнитных веществ диамагнитный эффект не заметен на фоне парамагнитного.

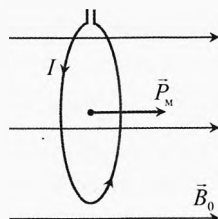


Рис. 20. Разворот контура с током по внешнему магнитному полю

§ 8. Ферромагнетики

Намагниченность. Магнитное состояние ферромагнетика удобно характеризовать векторной величиной, называемой намагниченностью.

Намагниченность – векторная величина, характеризующая магнитное состояние ферромагнетика. Намагниченность определяется как магнитный момент единицы объёма вещества:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}}{V}, \quad [J] = \frac{A \cdot M^2}{M^3} = \frac{A}{M}.$$

Намагниченность измеряется в А/м.

Намагниченность характеризует часть магнитной индукции, которая создана молекулярными токами сердечника.

Пусть магнитная индукция в соленоиде, созданная его током, равна \vec{B}_0 . Поместим в этот соленоид длинный однородный стальной стержень – сердечник (рис. 21). При наличии сердечника магнитная индукция в тех же точках (внутри сердечника) стала равна:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (3)$$

Намагниченность \vec{J} сердечника равна разности между индукцией \vec{B} магнитного поля внутри стержня и индукцией \vec{B}_0 внешнего магнитного поля в тех же точках, но без сердечника, делённой на магнитную постоянную:

$$\vec{J} = \frac{\vec{B} - \vec{B}_0}{\mu_0}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) видно, что в случае изотропной среды:

$$\vec{J} = \frac{(\mu - 1)\vec{B}_0}{\mu_0}.$$

Кривая намагниченности. Зависимость намагниченности \vec{J} от индукции \vec{B}_0 намагничивающего поля изображена на рис. 22. Обратим внимание на разный масштаб по осям, отличающийся в 1000 раз. По оси абсцисс B_0 измеряется в мТл, а по оси ординат намагниченность измеряется в Тл.

При отсутствии начальной намагниченности стержня и малых значениях индукции B_0 намагничивающего поля намагниченность J растёт прямо пропорционально индукции B_0 внешнего поля. При увеличении внешнего поля линейность нарушается, и рост намагниченности с увеличением B_0 становится всё меньше и меньше, и, наконец, наступает насыщение, когда с ростом B_0 намагниченность J остаётся неизменной.

Это объясняется следующим образом. Когда из расплава кристаллизуется ферромагнетик, то одновременно зарождается много кристалликов. Магнитный момент атомов ферромагнетика обусловлен не орбитальным моментом, а магнитным моментом непарного электрона. Электроны вращаются не только вокруг ядра, но и вокруг самих себя, причём собственный магнитный момент электрона

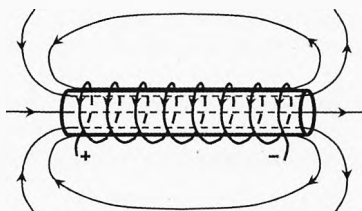


Рис. 21. Сердечник в длинном соленоиде

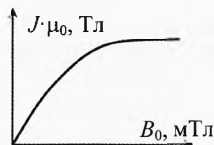


Рис. 22. Кривая намагниченности

значительно больше орбитального. Собственный момент импульса электрона называется спином. Направление магнитного момента и спина электрона совпадают.

Домены. Итак, вокруг каждого центра кристаллизации образуется кристаллик, называемый *доменом*. В каждом домене спины и магнитные моменты ориентированы одинаково. Поэтому домен представляет собой маленький постоянный магнит размером от сотых долей мм до десятых долей мм.

Однако разные домены ориентированы относительно друг друга случайным образом. Когда кристаллизация заканчивается, оказывается, что кристалл в целом не имеет заметного магнитного поля.

Если поместить стальной стержень, состоящий из огромного числа доменов, в сильное намагничивающее поле \vec{B}_0 , то они будут разворачиваться так, чтобы их магнитные моменты были сонаправлены с магнитной индукцией \vec{B}_0 внешнего поля. При некотором значении внешнего поля все домены будут уже развернуты как надо, и образец перейдет в состояние насыщения. При дальнейшем увеличении внешнего поля намагниченность образца остается неизменной. Для каждого ферромагнетика кривая зависимости намагниченности \vec{J} от намагничивающего поля \vec{B}_0 индивидуальна и в первую очередь зависит от химического состава материала и процентного соотношения химических элементов, входящих в состав образца.

Петля магнитного гистерезиса. Если после достижения магнитного насыщения образца (точка *a* на рис. 23) уменьшать намагничивающее поле \vec{B}_0 , то намагниченность образца \vec{J} тоже будет уменьшаться (участок *a-b*), но значительно медленнее, чем при нарастании на участке *0-a*. Имеет место запаздывание, или *гистерезис* (от греч. *hystêresis* – отставание, запаздывание). И когда внешнее поле уменьшится до нуля $\vec{B}_{0h} = 0$, в образце всё ещё останется намагниченность J_h . Образец становится постоянным магнитом.



Александр
Григорьевич
Столетов (1839–1896)

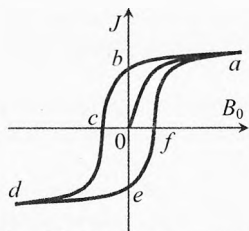


Рис. 23. Петля магнитного гистерезиса

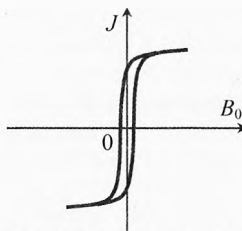


Рис. 24. Петля магнитно-мягкого материала

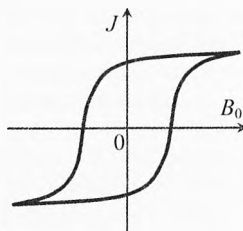


Рис. 25. Петля магнитно-жесткого материала

* Обратим внимание на то, что мы описываем механическими моделями квантовые процессы. Поэтому наши пояснения по такой модели весьма приблизительны. Про электрон можно сказать точнее: «как бы электрон как бы вращается вокруг себя».

Если изменить направление намагничивающего поля \vec{B}_0 , то образец будет продолжать размагничиваться и при значении внешнего поля \vec{B}_{0c} , называемого *коэрцитивной силой* (от лат. *coercitio* – удерживание), образец полностью размагничивается. Если продолжать увеличивать намагничивающее поле в обратном направлении, то образец снова начнёт намагничиваться, только полюса у него поменяются. В точке d снова, как и в точке a , будет наблюдаться магнитное насыщение.

Если теперь уменьшать намагничивающее поле до нуля, то кривая намагничивания пройдет участок $d-e$. Если вновь начать намагничивать образец в первоначальном направлении, то кривая пойдет по пути $e-f-a$.

Получившаяся фигура $a-b-c-d-e-f-a$ называется *петлёй магнитного гистерезиса*.

Первые подробные исследования намагничивания ферромагнитных материалов были произведены выдающимся русским физиком А. Г. Столетовым.

Форма петли магнитного гистерезиса служит важнейшей магнитной характеристикой материала. Различают магнито-мягкие и магнито-жёсткие материалы.

У магнито-мягких материалов петля гистерезиса узкая (рис. 24), а у магнито-жёстких – широкая (рис. 25). К магнито-мягким материалам относится отождённое, а затем медленно охлажденное железо, некоторые сорта стали, сплав никеля с железом (70% Ni и 30% Fe), называемый пермаллоем. У пермаллоя особенно узкая петля гистерезиса. У магнито-мягких материалов мала коэрцитивная сила и остаточная намагниченность.

На перемагничивание затрачивается энергия. Поскольку у магнито-мягких материалов на перемагничивание затрачивается малая энергия, то в устройствах, где происходит частое перемагничивание, используют железо и магнито-мягкие сорта стали (трансформаторная сталь): сердечники трансформаторов, генераторов, электродвигателей и т.п.

К магнито-жёстким относятся некоторые сорта стали и многие сплавы. У них большая остаточная намагниченность и коэрцитивная сила. Магнито-твёрдые материалы применяются для изготовления постоянных магнитов. Особенно широкая петля гистерезиса у сплава альнико-5. Остаточная намагниченность достигает 1,25 Тл! Это примерно в 30 000 раз больше магнитной индукции на поверхности Земли. Этот сплав содержит пять компонентов: 51% Fe, 8% Al, 14% Ni, 24% Co, 3% Cu. Трудно представить, сколько опытов пришлось провести, чтобы получить такой замечательный материал для магнитов!

Постоянные магниты в первую очередь применяются в приборах магнито-электрической системы: динамиках, телефонах, звукозаписывающих устройствах, магнитных компасах, лечебных магнитных поясах и т.д.

Ферриты – это ферромагнитные материалы, не проводящие электрического тока. Они состоят из соединений оксидов железа с оксидами других веществ. Магнитный железняк – первый из ферритов известный людям.

Ферриты замечательны тем, что, обладая магнитными свойствами, они являются изоляторами. Поэтому при их перемагничивании не возникают вихревые токи, поэтому потери на перемагничивание минимальны.

Это особенно важно в радиоэлектронной аппаратуре, работающей в области очень высоких (миллионы Гц) и сверхвысоких частот (ГГц), где металлические сердечники вообще непригодны. Из ферритов делают сердечники высокочастотных трансформаторов, магнитные антенны для радиоприемников.

§ 9. Закон Био–Савара–Лапласа

В 1820 г. после фундаментальных опытов Г.Х. Эрстеда французские физики Жан Батист Био и Феликс Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе прямолинейным или круговым током, катушкой с током и др. На основании многочисленных опытов они сделали выводы: во всех случаях индукция магнитного поля электрического тока прямо пропорциональна силе тока; значение магнитной индукции в некоторой точке зависит от формы и размеров проводника с током, а также от положения этой точки относительно проводника с током.

В случае длинного прямого проводника с током магнитная индукция пропорциональна отношению силы тока к расстоянию от данной точки до проводника:

$$B \propto \frac{I}{r}$$

Они получили закономерность и в некоторых других случаях. Но общего закона, позволяющего определить магнитную индукцию в любой точке поля, созданного током, текущим по проводу любой конфигурации, не смогли. Этой задачей по их просьбе занялся выдающийся французский математик, астроном и физик Пьер Симон Лаплас. Лапласу в это время шёл 72 год жизни.



Жан Батист Био
(1774–1862)



Феликс Савар
(1791–1841)



Пьер Симон Лаплас
(1749–1827)

Ознакомившись с работой Био и Савара, он учёл векторный характер магнитной индукции и выдвинул важную гипотезу о том, что магнитная индукция \vec{B} в каждой точке, созданная магнитным полем любого проводника с током, представляет собой векторную сумму индукций $\delta\vec{B}$ элементарных магнитных полей, созданных каждым элементом тока $I \cdot \delta\vec{l}$ этого проводника. Тем самым Лаплас предположил, что при наложении магнитных полей имеет место принцип суперпозиции, т.е. принцип независимости действия полей (как и в случае электрического поля):

$$\vec{B} = \delta\vec{B}_1 + \delta\vec{B}_2 + \dots + \delta\vec{B}_N,$$

где $\delta \vec{B}_1$ – магнитная индукция, созданная первым элементом тока, N количество участков, на которое размечен весь провод.

Лаплас обобщил результат экспериментов в виде дифференциального закона, позволяющего вычислить магнитную индукцию, созданную элементом тока, который называется законом Био–Савара–Лапласа (рис. 26):

$$\delta B = k \cdot \frac{I \cdot \delta l \cdot \sin \alpha}{r^2},$$

где I – сила тока в проводнике, δl – длина элемента тока, r – расстояние от элемента тока до некоторой точки A , в которой вычисляется магнитная индукция $\delta \vec{B}$, α – угол между элементом тока $I \delta \vec{l}$ и \vec{r} ; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц и магнитных свойств среды. В СИ $k = \frac{\mu \mu_0}{4\pi}$, где μ – магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная.

Направление $\delta \vec{B}$ можно определить по правилу правого винта. Если закручивать винт так, чтобы он двигался по направлению тока, то направление его вращения покажет направление вектора $\delta \vec{B}$. Вектор $\delta \vec{B}$ перпендикулярен векторам $I \delta \vec{l}$ и \vec{r} .

Таким образом, в СИ закон **Био–Савара–Лапласа** принимает вид:

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu \mu_0 I \cdot \delta l \cdot \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

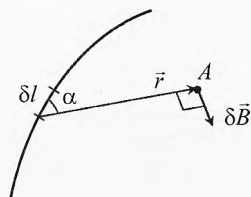


Рис. 26. Магнитная индукция от элемента тока

Магнитная индукция $\delta \vec{B}$, созданная в точке элементом тока $I \cdot \delta \vec{l}$, прямо пропорциональна магнитной проницаемости среды μ , значению элемента тока $I \delta l$, синусу угла α между направлением элемента тока и радиус-вектора \vec{r} , проведенного от элемента тока до данной точки, и обратно пропорциональна квадрату радиус-вектора.

В векторном виде закон Био–Савара–Лапласа выглядит следующим образом:

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu \mu_0 I \cdot [\delta \vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3},$$

где $[\delta \vec{l} \cdot \vec{r}]$ – векторное произведение элемента длины проводника $\delta \vec{l}$ и радиус-вектора \vec{r} . В результате получается вектор магнитной индукции $\delta \vec{B}$, созданный элементом тока $I \delta \vec{l}$, перпендикулярный плоскости, в которой находятся векторы \vec{r} и $\delta \vec{l}$.

Сведения из математики о векторном произведении. Векторное произведение двух произвольных векторов \vec{a} и \vec{b} записывается так:

$$\vec{c} = [\vec{a} \vec{b}] \text{ или } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Модуль векторного произведения:

$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Направление вектора \vec{c} перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы \vec{a} и \vec{b} . Если смотреть из конца вектора \vec{c} , то поворот от \vec{a} к \vec{b} должен происходить по кратчайшему углу против часовой стрелки (рис. 27).

Векторное произведение двух векторов широко применяется в физике, поэтому его нужно знать.

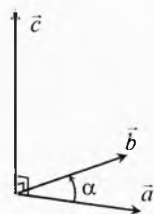


Рис. 27. Векторное произведение

Пример 1. По кольцевому контуру радиусом $R = 7$ см, состоящему из $Z = 50$ витков, находящемуся в воздухе, протекает ток $I = 10$ А. Вычислить магнитную индукцию в центре контура.

Решение. Поскольку все витки одинаковы и находятся рядом в одной плоскости, то магнитная индукция в центре контура будет равна арифметической сумме индукций, созданных всеми витками:

$$B = B_1 \cdot Z.$$

Найдём магнитную индукцию B_1 , созданную одним витком (рис. 28). Разобьём виток на большое число N элементов, каждый из которых можно считать практически прямолинейным. Для одного участка в соответствии с законом Био–Савара–Лапласа запишем:

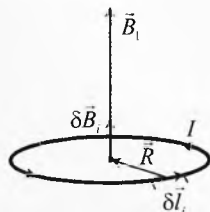


Рис. 28. Магнитная индукция в центре кольца

$$\delta B_i = \frac{\mu \mu_0 I \cdot \delta l_i \cdot \sin \alpha}{4\pi R^2},$$

где $\alpha = 90^\circ$ – угол между векторами $\delta \vec{l}_i$ и \vec{R} , ибо радиус перпендикулярен дуге окружности. Напомним, что вектор \vec{R} в законе Био–Савара–Лапласа направлен от элемента тока к точке, в которой надо определить индукцию.

Согласно принципу суперпозиции магнитная индукция, созданная в центре одним витком, равна сумме индукций всех N участков этого витка:

$$B_1 = \sum_{i=1}^N \delta B_i = \sum_{i=1}^N \frac{\mu \mu_0 I \cdot \delta l_i \cdot \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot \sum_{i=1}^N \delta l_i,$$

Поскольку $\sum_{i=1}^N \delta l_i = 2\pi R$ – длина витка, то
$$B_1 = \frac{\mu \mu_0 I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu \mu_0 I}{2R},$$

где $\mu \approx 1$ – для воздуха.

Значит, магнитная индукция в центре кольцевого контура, состоящего из Z витков, равна:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R} \cdot Z; \quad B = 4,49 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} \approx 4,5 \text{ мТл.} \quad \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Магнитная индукция в центре контура равна 4,5 мТл и направлена перпендикулярно плоскости контура.

§ 10. Закон Био–Савара–Лапласа для прямого тока

Вычислим магнитную индукцию в среде проницаемостью μ , созданную тонким проводом с током I на расстоянии R от него.

Разобьём весь провод на большое число участков длиной δl (рис. 29). Все элементы тока $I\delta l$ в искомой точке A создают магнитную индукцию, направленную одинаково. В нашем случае перпендикулярно плоскости OAK от нас (согласно правилу правого винта). Поэтому результирующее значение магнитной индукции равно арифметической сумме магнитных индукций от всех элементов тока.

$$B = \sum \delta B. \quad (5)$$

Для произвольного элемента тока $I\delta l$ запишем:

$$\delta B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot \delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (6)$$

где $\alpha \equiv \angle CKA$ – угол между направлением тока и вектором, соединяющим элемент тока с искомой точкой A .

Из $\triangle CKD$ видно, что

$$\delta l \cdot \sin \alpha = CD. \quad (7)$$

Из $\triangle DCA$ видно, что

$$CD = r \cdot \delta \alpha. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим: $\delta l \cdot \sin \alpha = r \cdot \delta \alpha$.

Тогда из (6) получим:

$$\delta B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot r \cdot \delta \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 I \cdot \delta \alpha}{4\pi r}.$$

Учитывая, что $r \cdot \sin \alpha = R$, получим:

$$\delta B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot \delta \alpha \cdot \sin \alpha}{4\pi R}.$$

Подставляя это в (5), получим:

$$B = \sum \frac{\mu\mu_0 I \cdot \delta \alpha \cdot \sin \alpha}{4\pi R}.$$

Вынесем постоянные за знак суммы:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \sum \sin \alpha \cdot \delta \alpha.$$

Переходя от суммирования к предельно точному суммированию, т.е. интегрированию, запишем:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (9)$$

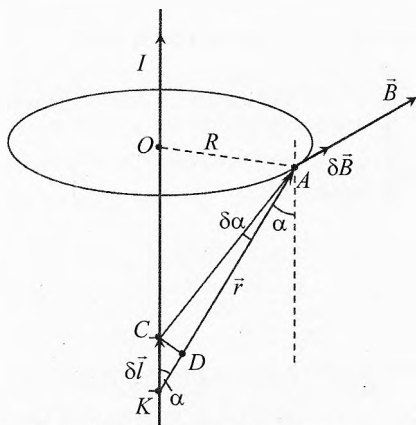


Рис. 29. Магнитная индукция прямого провода

Это табличный интеграл $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2$.

В нашем случае для бесконечно длинного проводника элементы тока берутся от «-» бесконечности, где $\alpha_1 = 0$, до «+» бесконечности, где $\alpha_2 = 180^\circ$:

$$\int_{0^\circ}^{180^\circ} \sin \alpha d\alpha = \cos 0^\circ - \cos 180^\circ = 2.$$

Подставив в этот результат в (9), получим ответ.

Магнитная индукция тонкого бесконечно длинного провода с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Мы получили частный случай закона Био–Савара–Лапласа для прямого бесконечного провода. Из этой формулы видно, что магнитная индукция от прямого тока пропорциональна отношению силы тока к расстоянию R от провода до точки, в которой измеряется магнитная индукция, что путём экспериментов обнаружили Био и Савар. Магнитная индукция также прямо пропорциональна магнитной проницаемости среды.

В случае провода конечной длины с граничными значениями углов α_1 и α_2 магнитная индукция, созданная этим проводом, равна (рис. 30):

$$B_{12} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

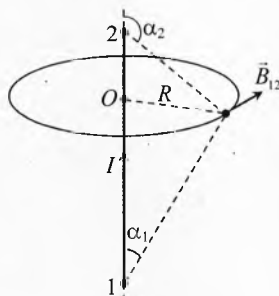


Рис. 30. Прямой провод конечной длины

§ 11. Магнитное поле соленоида.

Индуктивность соленоида

На практике большое значение имеют катушки индуктивности, называемые соленоидами (от греч. *solen* – трубка, *eidos* – вид), то есть трубковидные. Соленоиды бывают короткие и длинные. В соленоидах на цилиндрическую поверхность наматывается изолированный проводник. Соленоиды бывают однослойные и многослойные.

Магнитное поле внутри длинного соленоида при плотной равномерной намотке витков однородно и только у его краев в два раза меньше, чем внутри. Можно показать, что внутри длинного соленоида магнитная индукция равна

$$B = \mu\mu_0 \cdot n \cdot I,$$

где μ – магнитная проницаемость среды; μ_0 – магнитная постоянная; I – сила тока в соленоиде; $n = \frac{N}{l}$ – густота намотки витков, N – число витков в катушке, l – длина соленоида.

Вычислим индуктивность длинного соленоида. Пусть по нему течёт ток I . Полный собственный магнитный поток, который создаёт этот ток в соленоиде:

$$\Phi_c = L \cdot I, \quad (10)$$

где L – индуктивность соленоида.

С другой стороны полный магнитный поток по определению: $\Phi_c = BS \cdot N$.

Поскольку магнитная индукция почти по всей длине соленоида одинакова и равна $B = \mu\mu_0 \cdot n \cdot I$, то

$$\Phi_c = \mu\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot S \cdot N. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим:

$$L = \mu\mu_0 \cdot n \cdot S \cdot N.$$

Учитывая, что $N = n \cdot l$, получим:

$$L = \mu\mu_0 \cdot n^2 \cdot S \cdot l.$$

Но $S \cdot l = V$ – объём соленоида. Поэтому окончательно получим:

$$L = \mu\mu_0 \cdot n^2 \cdot V.$$

Индуктивность длинного соленоида пропорциональна магнитной проницаемости среды μ , квадрату густоты намотки витков и объёму соленоида.

§ 12. Напряжённость магнитного поля

Для силового описания магнитного поля наряду с магнитной индукции \vec{B} , которая является общей характеристикой магнитного поля независимо от того, как создается магнитное поле: намагниченным телом или проводником с током, широко используется физическая величина напряжённость магнитного поля \vec{H} .

Напряжённость магнитного поля – это векторная величина, характеризующая магнитное поле, обусловленное электрическим током, без учета влияния среды.

В Международной системе единиц СИ напряжённость магнитного поля \vec{H} в вакууме равна отношению магнитной индукции поля \vec{B} к магнитной постоянной:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная.

В случае изотропной среды с магнитной проницаемостью μ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

В общем случае напряжённость магнитного поля \vec{H} равна разности вектора магнитной индукции поля \vec{B} , делённого на μ_0 , и вектора намагниченности поля \vec{J} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

Формулы для вычисления напряжённости магнитного поля выглядят проще, чем для магнитной индукции. Приведём некоторые из них.

Закон Био–Савара–Лапласа

$$\delta H = \frac{I \delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Напряжённость магнитного поля прямого тока

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Напряжённость магнитного поля внутри катушки с током

$$H = n \cdot I,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – густота намотки витков.

Единица измерения напряжённости магнитного поля в СИ:

$$[H] = \text{А/м}.$$

В системе единиц СГС напряжённость измеряется в эрстедах:

$$1 \text{ Э} = \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{А}}{\text{м}} = 79,5775 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Кстати, в этой же системе единиц СГС магнитная индукция измеряется в гауссах (Г) в честь создателя этой системы единиц

$$1 \text{ Г} = 10^{-4} \text{ Тл} \text{ или } 1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Г}.$$

§ 13. Взаимодействие параллельных токов

Пусть на расстоянии R друг от друга находятся два бесконечно длинных параллельно расположенных проводника (рис. 31). Пусть в первом сила тока равна I_1 , и ток течёт вверх, а во втором сила тока – I_2 , и ток течёт вниз. Магнитная индукция, созданная первым током в том месте, где находится второй провод, направлена от нас (согласно правилу правого винта). На любой отрезок второго провода со стороны магнитного поля \vec{B}_1 первого провода будет действовать сила направо по рисунку (в соответствии с правилом левой руки), отталкивающая второй провод от первого:

$$F_{12} = B_1 I_2 \cdot \delta l \cdot \sin \alpha_1.$$

Аналогично магнитное поле \vec{B}_2 , созданное током второго провода, будет действовать на любой участок первого проводника силой, согласно закону Ампера:

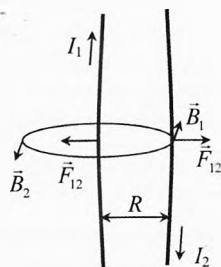


Рис. 31. Взаимодействие параллельных токов

$$F_{21} = B_2 I_1 \cdot \delta l \cdot \sin \alpha_2.$$

Из рисунка видно, что магнитная индукция перпендикулярна направлению тока. Значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$.

Вычислим модуль силы, с которой магнитное поле первого тока действует на участок δl второго провода с током I_2 :

$$F_{12} = B_1 I_2 \delta l; \quad B_1 = \frac{\mu \mu_0 I_1}{2\pi R}; \quad \Rightarrow \quad F_{12} = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2 \delta l}{2\pi R}.$$

Формула для силы оказалась симметричной относительно силы тока в проводниках. Мы получили с вами подтверждение третьего закона Ньютона: какой бы ни была сила тока в каждом из двух параллельных проводов, для одинаковых по длине участков провода силы взаимодействия будут одинаковы по модулю и противоположно направлены.

Эта формула для вычисления силы взаимодействия двух параллельных проводников взята за основу для определения главной единицы электрический величин – единицы силы тока – ампер (А).

Вычислим, с какой силой будут взаимодействовать параллельные, тонкие, бесконечно длинные провода, находящиеся в вакууме ($\mu = 1$), на расстоянии $R = 1$ м друг от друга на каждый метр длины провода, если по каждому из них течёт одинаковый ток $I_1 = I_2 = 1$ А:

$$F = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}}{2\pi \cdot 1 \text{ м}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Как видно, эта сила очень маленькая. Поэтому для наблюдения взаимодействия двух проводников с током в условиях школьного кабинета физики приходится брать в качестве проводов полоски тонкой алюминиевой фольги и пропускать по ней токи силой 5–10 А. При этом расстояние между полосками не должно превышать 5–10 см.

Перефразируем полученный результат так, чтобы сформулировать способ измерения единицы силы тока (ампер).

Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по каждому из двух параллельных проводников бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Для определения единицы силы тока можно было бы воспользоваться любым из трёх действий электрического тока – тепловым, химическим, пондеромоторным.

* Пондеромоторные силы в электродинамике – силы, действующие на тела в электрических и магнитных полях. Термин пондеромоторной силы введен (от лат.

Для определения единицы силы тока выбрали пондермоторное (электромагнитное) взаимодействие, т.к. силовое взаимодействие токов по закону Ампера $F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 \delta l}{2\pi R}$ позволяет установить единицу силы тока с наибольшей точностью.

За основную единицу силы тока принят *ампер*, так как его значение удобно для практических целей.

При воспроизведении единицы силы тока (ампера) измеряется сила взаимодействия проводников конечных размеров. Для этого применяются проводники такой формы, для которых можно с достаточной точностью рассчитать силу взаимодействия по закону Ампера.

Эталонная установка для измерения сил взаимодействия проводников называется *токовыми весами*.

Воспроизведение, хранение и передача ампера (1 А) производится посредством Государственного первичного эталона ампера России.

Относительная погрешность воспроизведения единицы силы тока Государственного первичного эталона ампера не превышает 10^{-5} или 0,001%.

§ 14. Сила Лоренца

Проведём такой эксперимент. К концам толстого проводника длиной l прикрепим тонкие гибкие изолированные провода и подвесим их на штативе (рис. 32). Нижний провод AB расположим горизонтально и поместим его между полюсами дугообразного магнита. Соединив концы проводов с полюсами источника тока, увидим, что проводник AB вместе с тонкими подводящими проволоками отклонится на некоторый угол, т.к. на него подействует сила Ампера со стороны поля магнита в направлении, определяемом правилом левой руки.

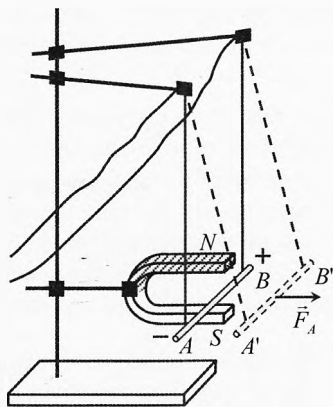


Рис. 32. Сила Ампера

Возникает вопрос, почему проводник сдвигается, когда по нему пропускают ток? Ответ: потому что на проводник подействовала сила со стороны поля. А на какие элементы в проводнике действует магнитное поле? Опыт

pondus, род. падеж *ponderis* – вес, тяжесть и *motor* – приводящий в движение) во времена, когда наряду с весомыми телами признавалось существование невесомых субстанций (эфир, теплород, электрическая жидкость и т.п.). В современной лексиконе термин пондеромоторной силы можно заменить термином электромагнитной, а пондеромоторное действие тока – электромагнитным действием.

показывает, что магнитное поле действует только на движущиеся заряженные частицы, например, на поток электронов в электронно-лучевой трубке. В металлическом же проводнике как мы знаем ионы «закреплены» в узлах кристаллической решетки, а свободно может двигаться только часть электронов (валентных). Значит, на каждый валентный электрон, участвующий при протекании тока действует сила. Электроны получают поперечный импульс и воздействуют на ионы кристаллической решетки. Их совокупное действие приводит к отклонению проводника.

Сила, действующая на одну движущуюся заряженную частицу в нашем случае на электрон, называется *силой Лоренца*:

$$F_{\text{л}} = \frac{F_{\text{А}}}{N}, \quad (12)$$

где N – число свободных заряженных частиц в проводе длиной l , находящемся в магнитном поле.

Согласно закону Ампера:

$$F_{\text{А}} = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha. \quad (13)$$

Сила тока в проводнике:

$$I = q_0 n v S, \quad (14)$$

где n – концентрация свободно заряженных частиц в проводе;

q_0 – модуль заряда частицы (в нашем случае $q_0 = e$);

S – площадь сечения провода;

v – скорость дрейфа частиц.

Число свободных заряженных частиц в проводе:

$$N = nV = nSl. \quad (15)$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$F = \frac{I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha}{N}. \quad (16)$$

Поставим (14) и (15) в (16):
$$F_{\text{л}} = \frac{q_0 n v S l B \sin \alpha}{n S l}.$$

Откуда следует окончательное выражение для силы Лоренца:

$$F_{\text{л}} = q_0 v B \sin \alpha,$$

где α – угол между направлением скорости частицы \vec{v} и направлением магнитной индукции \vec{B} .

Это выражение для силы, приложенной к заряженной частице со стороны магнитного поля, впервые получил замечательный нидерландский физик Х. А. Лоренц. Введя в учение об электричестве атомистику, в 1880–1909 гг.



Хендрик Антон
Лоренц (1853–1928)

он создал классическую электронную теорию электрических, магнитных и оптических свойств вещества и электромагнитных явлений, базирующихся на анализе движений дискретных заряженных частиц. На основе электронной теории он объяснил целый ряд физических фактов и явлений и предсказал ещё неизвестные факты.

Проанализируем формулу для силы Лоренца.

Если частица не движется, то магнитное поле на неё не действует:

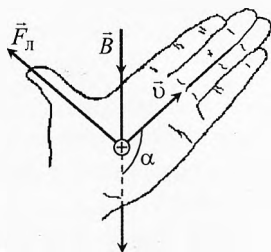
$$v = 0, \quad \Rightarrow \quad F_L = 0.$$

Если скорость заряженной частицы направлена по одной линии с вектором магнитной индукции, то поле на эту частицу тоже не действует:

$$\alpha = 0^\circ \text{ или } \alpha = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad F_L = 0.$$

Направление силы Лоренца, как и силы Ампера, определяется по правилу левой руки (рис. 33).

Персты **левой руки** направляются по скорости, магнитные линии должны входить в ладонь, а отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Лоренца в случае движения положительно заряженной частицы.



Если движется отрицательная заряженная частица, то на неё будет действовать сила в противоположном направлении.

Рис. 33. Правило левой руки

Сила Лоренца – сила, действующая на одну движущуюся заряженную частицу. Модуль силы Лоренца равен произведению заряда частицы, её скорости, индукции магнитного поля и синуса угла между ними. Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки.

Учитывая, что $B \cdot \sin \alpha = B_\perp$ – нормальная к скорости проекция магнитной индукции, получим (рис. 34):

$$F_L = q_0 v B_\perp.$$

Магнитное поле действует на заряженную частицу только перпендикулярной к скорости составляющей магнитной индукции.

Учитывая, что $v \cdot \sin \alpha = v_\perp$ – нормальная к вектору магнитной индукции проекция скорости частицы; в этом случае (рис. 35):

$$F_L = q_0 v_\perp B.$$

Магнитное поле действует только на нормальную к вектору магнитной индукции, составляющую скорости частицы.

При решении задач последнее выражение для силы Лоренца, пожалуй, применяется наиболее часто.

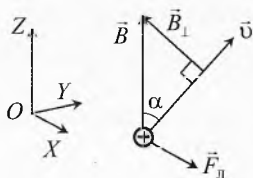


Рис. 34. Сила Лоренца действует только перпендикулярной составляющей магнитного поля

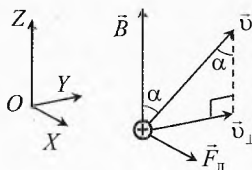


Рис. 35. Сила Лоренца действует только на перпендикулярную полю составляющую скорости

§ 15. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Пусть заряженная частица влетает в магнитное поле*, так что вектор её скорости перпендикулярен вектору магнитной индукции ($\alpha = 90^\circ$). На неё будет действовать сила Лоренца (рис. 36):

$$F_L = qvB \cdot \sin \alpha = qvB.$$

Согласно второму закону Ньютона частица будет двигаться с ускорением:

$$a = \frac{F_L}{m}.$$

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, то она будет создавать частице только центростремительное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{m} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB}}.$$

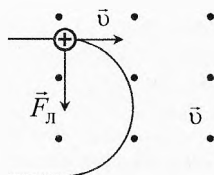


Рис. 36. Движение заряженной частицы по окружности в однородном магнитном поле

Итак, радиус вращения заряженной частицы в однородном магнитном поле прямо пропорционален импульсу частицы и обратно пропорционален её заряду и магнитной индукции.

* Жирные точки на рисунке означают, что магнитная индукция \vec{B} направлена перпендикулярно плоскости рисунка на нас (мы видим острие стрелки). Если же на рисунке магнитная индукция изображена крестиками, значит она направлена от нас, то есть мы видим хвост стрелки: \times .

Пролетев половину окружности, заряженная частица вылетит из пространства, занятого магнитным полем с такой же по модулю, но противоположно направленной скоростью. Таким образом, магнитное поле стремится выталкивать заряженные частицы, влетающие в него.

Если же в начальный момент частица находилась в однородном магнитном поле, и её скорость была направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, то она будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{mv}{qB}$.

Тогда период вращения заряженной частицы в однородном поле:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Как видно, период вращения заряженной частицы в магнитном поле зависит только от значения магнитной индукции и отношения заряда частицы к её массе. Таким образом, все частицы одного сорта, точнее с одинаковым отношением заряда к массе, например, все электроны или протоны, независимо от их скорости будут вращаться с одинаковым периодом.

Теперь рассмотрим движение заряженной частицы в магнитном поле, если её скорость составляет угол α с вектором магнитной индукции (рис. 37). В этом случае магнитное поле будет действовать только на нормальную составляющую скорости частицы, и в плоскости XOY , перпендикулярной вектору \vec{B} , частица будет вращаться.

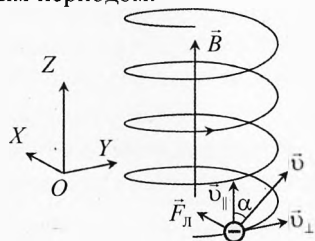


Рис. 37. Движение заряженной частицы по спирали

$$ma_n = F_L; \quad a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R}; \quad F_L = qvB \sin \alpha = qBv_{\perp}.$$

$$\text{Тогда} \quad m \frac{v_{\perp}^2}{R} = qBv_{\perp}, \Rightarrow R = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Оказывается, **радиус вращения** зависит ещё от синуса угла α : чем меньше угол α между магнитной индукцией и скоростью частицы, тем меньше радиус вращения.

$$\text{Найдём теперь период вращения} \quad T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$$

Подставляя выражение для R , получим:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Оказывается, что **период вращения** частицы не зависит от угла между магнитной индукцией и скоростью частицы.

Кроме вращения, в данном случае частица ещё будет равномерно двигаться вдоль магнитной линии со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$. Заряженная частица будет двигаться по винтовой траектории вокруг линий магнитной индукции. Пройденный ею путь по оси Z легко вычислить $l = v \cdot t \cdot \cos \alpha$. Расстояние, которое она проходит по оси Z вдоль магнитной линии за один период, называется шагом винта:

$$h = v \cos \alpha \cdot T = v \cos \alpha \cdot \frac{2\pi m}{qB}.$$

Окончательно **шаг винта**:

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Сравнивая его с радиусом вращения частицы $R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$, получим:

$$h = \frac{2\pi R}{\tan \alpha}.$$

Солнечный ветер в магнитном поле Земли. Особенности движения заряженных частиц в магнитном поле удивительным образом используются Природой для защиты всего живого на Земле. Действительно, электроны, протоны и другие заряженные частицы выбрасываются Солнцем во все стороны с большими скоростями. Они составляют «солнечный ветер», часть которого подлетает к Земле. В магнитном поле Земли на расстояниях от 500 км до 60000 км эти частицы огибают Землю, двигаясь к магнитным полюсам, и описывают спирали вокруг магнитных линий. При этом неоднородное магнитное поле стремится вытолкнуть их подальше от полюсов, поэтому они разворачиваются и движутся обратно (рис. 38). В экваториальной зоне уже довольно далеко от поверхности Земли, где магнитное поле значительно слабее, они продолжают движение к другому магнитному полюсу Земли, навиваясь вокруг магнитных линий, и снова выталкиваются. Таким образом, космические частицы совершают колебания от одного полюса до другого за время порядка нескольких секунд. Эта область пространства называется радиационным поясом Земли. Лишь в полярных областях небольшая часть этих частиц попадает в верхние слои атмосферы, вызывает полярное сияние и поглощается атмосферой. В случае очень большой активности Солнца, когда солнечный ветер значительно усиливается, возникают магнитные бури в атмосфере Земли. В этом случае поляр-

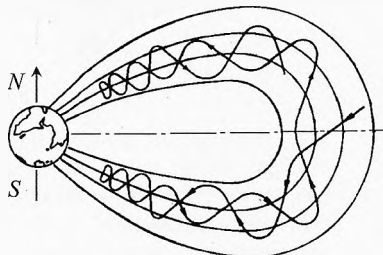


Рис. 38 Магнитное поле Земли выталкивает заряженные частицы

ное сияние можно наблюдать и в средних широтах. При этом также нарушается радиосвязь.

Циклотрон. Циклотрон – это ускоритель заряженных протонов и ионов. Частицы ускоряются в вакуумном зазоре между двумя пустотелыми металлическими электродами специальной формы – дуантами (рис. 39а). Дуанты находятся между полюсами постоянного электромагнита. Под действием магнитного поля ионы движутся по дуге окружности. К дуантам подводится переменное электрическое поле частотой, равной частоте вращения частицы. К моменту времени, когда частица подлетит к зазору между дуантами, электрическое поле должно стать ускоряющим для неё. Пролетая зазор и получив дополнительный импульс, частица в течение полпериода обращения летит во втором дуанте и вновь подлетает к зазору между дуантами. К этому моменту электрическое поле опять изменит направление и частица вновь получит ускоряющий импульс и т.д.

Пока частица летит внутри (металлического) дуанта, электрическое поле на неё не действует. Поскольку с увеличением радиуса вращения (рис. 39б) период остается прежним, то осуществлять ускорение частиц в циклотроне относительно несложно. В необходимом месте устанавливается отклоняющее выходное устройство и мишень, в которую попадают разогнанные частицы. Рядом также располагают регистрирующие датчики.

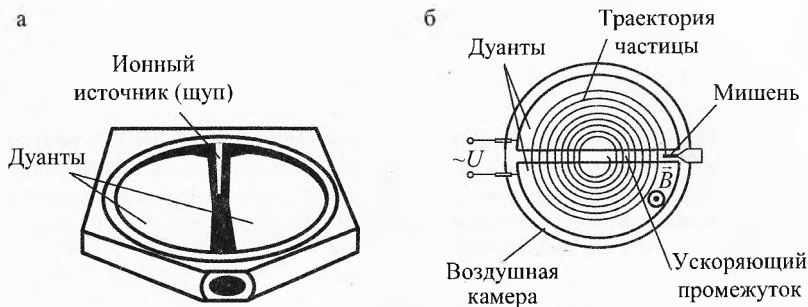


Рис. 39. Циклотрон

Циклотроны используются для ускорения ионов до скоростей порядка 10^5 км/с. Чтобы ускорить частицы до скоростей близких, к скорости света, необходимо учесть релятивистский эффект замедления набора скорости частицами при субсветовых скоростях. Для этой цели используют другие ускорители: фазотроны, синхротроны, синхрофазотроны.

✎ **Пример 2. Равномерное движение ионов в скрещенных электрическом и магнитном полях.** Пусть имеется электрическое поле напряжённостью \vec{E} и перпендикулярное ему магнитное поле индукцией \vec{B} . С какой скоростью должен лететь: а) положительный ион; б) отрицательный ион; в) электрон, чтобы его скорость оставалась постоянной?

→ **Решение.** На рис. 40 напряжённость электрического поля направлена вверх и вектор магнитной индукции к нам. Если движется положительный ион, то электрическое поле на него действует вверх $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Для того, чтобы ион двигался с

неизменной скоростью, результирующая сила, приложенная к нему, должна быть равна нулю. Значит, силу \vec{F}_e должна уравновесить сила Лоренца \vec{F}_L . Естественно, что по рисунку она должна быть направлена вниз.

По правилу левой руки, зная направление \vec{B} и \vec{F}_L , найдём, что скорость частицы должна быть направлена вправо по рисунку.

$$F_L = qvB, \text{ т.к. } \vec{F}_L + \vec{F}_e = 0, \text{ то } qvB = qE \Rightarrow v = \frac{E}{B}.$$

Итак, положительный ион будет двигаться с постоянной скоростью в скрещенных под прямым углом электрическом и магнитном полях, если модуль его скорости равен отношению модуля напряжённости к модулю магнитной индукции. Поворот от вектора \vec{E} до вектора скорости \vec{v} по часовой стрелке должен составлять 90° .

Если ион будет с такой же скоростью двигаться в обратном направлении, то электрическая и магнитная силы будут сонаправлены (вверх по рисунку) и движение будет криволинейным и неравномерным.

Обращаем внимание, что скорость отрицательного иона и электрона должна быть такой же и по модулю, и направлению. Она также не зависит от массы и заряда частицы. ←

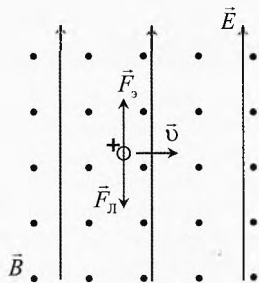


Рис. 40. *Равномерное движение ионов в скрещенных электрическом и магнитном полях*

Пример 3. Электрон на экваторе. Оценить, где и с какой скоростью свободные электроны вблизи поверхности Земли будут двигаться прямолинейно.

→ **Решение.** Электромагнитное поле Земли имеет магнитную и электрическую составляющие. Электрон будет двигаться с постоянной скоростью, если сумма сил, приложенных к нему со стороны электрического и магнитного полей, окажется равной нулю (рис. 41). Это возможно, когда $\vec{B} \perp \vec{E}$. Из справочника (например, «Физические величины» М. Энергоатомиздат, 1991, стр.

1196) находим, что вертикальная составляющая напряжённости электрического поля Земли почти всегда значительно превосходит её горизонтальную составляющую, направлена к центру Земли и равна вблизи поверхности $E = 130$ В/м. Значит, для нашей задачи надо выбирать место, где магнитная индукция Земли направлена горизонтально. В том же справочнике (стр. 1186–1187) находим, что этому требованию удовлетворяет, например, экваториальная Африка, где $B \approx 3,2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Поскольку магнитные линии направлены в сторону севера, а электрическое поле направлено к поверхности Земли, то электрон должен лететь с запада на восток



Рис. 41. *Электрон на экваторе*

$$F_3 - F_{\text{Л}} = 0, \text{ где } F_3 = eE, \quad F_{\text{Л}} = e\upsilon B \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{E}{B}; \quad \upsilon = 4 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 4000 \text{ км/с.}$$

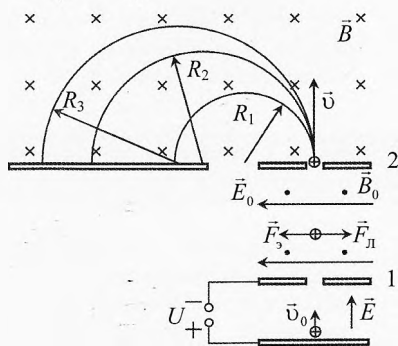
Итак, в районе земного экватора, вблизи его поверхности, при спокойной геомагнитной обстановке электрон может двигаться равномерно с запада на восток со скоростью 4 Мм/с. ◀

✎ **Пример 4. Масс-спектрометр.** С помощью масс-спектрометра решается одна из важнейших научных задач – определение массы элементов, а точнее отношения заряда иона к его массе. Опишите каким образом.

→ **Решение.** Поскольку заряды ионов дискретны, причём дискретность эта строго выполняется в любой части Вселенной, а именно заряд частицы может принимать следующие значения: $0, \pm e, \pm 2e, \dots$ где e – элементарный заряд, то, определив отношение заряда к массе, легко узнать массу иона. Схема масс-спектрометра изображена на рис. 42. Атомы исследуемого вещества ионизируются и разгоняются в электрическом поле \vec{E} , проходя ускоряющую разность потенциалов U . Согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} + qU = \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2qU}{m}},$$

где υ_0 – начальная скорость ионов, которая может варьироваться у разных ионов, но она значительно меньше скорости υ , получаемой в результате разгона в электрическом поле. Тем не менее, создав между диафрагмами 1 и 2 взаимно перпендикулярные электрическое \vec{E}_0 и магнитное \vec{B}_0 поля можно отсепарировать (отделить) частицы с определённой скоростью. Через диафрагму 2 пройдут только ионы со скоростью $\upsilon = \frac{E_0}{B_0}$. Остальные отклонятся



влево или вправо.

Рис. 42. Масс-спектрометр

За диафрагмой 2 создаётся магнитное поле \vec{B} , перпендикулярное скорости $\vec{\upsilon}$. Ионы будут описывать полуокружности, радиус которых равен

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}.$$

Следовательно, при постоянном поле \vec{B} и скорости $\vec{\upsilon}$ отсепарированных частиц отношение заряда к массе будет зависеть только от радиуса траектории R , который легко измерить:

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{\upsilon}{BR}}. \quad \leftarrow$$

Пример 5. Раскрутка иона, движущегося в магнитном поле, с помощью параллельного электрического поля. Положительно заряженная частица движется по окружности с радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле индукцией $B = 0,1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается электрическое поле напряжённостью $E = 100$ В/м. Вычислить промежуток времени, в течение которого должно действовать электрическое поле, чтобы кинетическая энергия частицы возросла а) в $n_1 = 2$ раза; б) в $n_2 = 10$ раз.

Решение. До включения электрического поля частица вращалась в магнитном поле со скоростью v_0 :

$$m a_n = F_{\text{л}}; \quad \frac{mv_0^2}{R} = qv_0 B \Rightarrow v_0 = \frac{qBR}{m}. \quad (17)$$

При включении электрического поля на ион действует сила $\vec{F}_э = q\vec{E}$. На составляющую скорости по оси Z магнитное поле не влияет, т.к. \vec{v}_z параллельно \vec{B} . В плоскости XOY ион будет вращаться с тем же радиусом, как и до включения электрического поля, параллельного магнитному полю. По оси Z ион будет равноускоренно подниматься, его траектория превратится из окружности в спираль со всё более возрастающим шагом (рис. 43). Кинетическая энергия иона в целом будем возрастать. Из теоремы Пифагора следует:

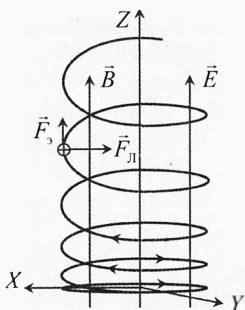


Рис. 43. Раскрутка иона по спирали

$$v^2 = v_0^2 + v_z^2 \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}. \quad (18)$$

По 2-му закону Ньютона ускорение иона по оси Z : $a_z = \frac{F_z}{m} = \frac{qE}{m}$.

Тогда его скорость по оси Z через время t : $v_z = a_z t = \frac{qE}{m} t$,

где t – время с момента включения поля.

Подставляя в (18), получим:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{qE}{m} t \right)^2. \quad (19)$$

По условию задачи кинетическая энергия увеличилась в n раз (за счёт работы электрического поля): $\frac{mv^2}{2} = n \cdot \frac{mv_0^2}{2}$.

Подставляя в (19), получим: $(n-1) \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{qE}{m} t \right)^2$, $t = \frac{mv_0}{qE} \sqrt{n-1}$.

С учетом (17), получим: $t = \frac{BR}{E} \sqrt{n-1}$.

Проверим размерность: $[t] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м В/м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Вт}} = \text{с}$.

а) при $n_1 = 2$: $t = \frac{BR}{E}$, $t = 10$ (мкс); б) при $n_2 = 10$: $t = \frac{3BR}{E}$, $t = 30$ (мкс). ✓

✓ **Ответ.** Кинетическая энергия вырастет в 2 раза за 10 мкс, в 10 раз за 30 мкс.



Упражнения

1 По горизонтально расположенному проводнику длиной 20 см и массой 4 г течёт ток 10 А. Найти индукцию магнитного поля, в которое нужно поместить проводник, чтобы сила тяжести уравнивалась силой Ампера. Сделать чертёж.

2 Между полюсами магнита на двух тонких вертикальных проводниках подвешен горизонтальный линейный проводник массой $m = 10$ г, длиной $l = 20$ см. Индукция однородного магнитного поля направлена вертикально и равна 0,25 Тл. Весь проводник находится в магнитном поле. На какой угол α от вертикали отклонятся невесомые проводники, поддерживающие проводник, если по нему пропустить ток силой $I = 2$ А?

3 Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0,3$ м друг от друга. На них лежит стержень перпендикулярно рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля для того, чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускать ток $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0,2$. Масса стержня $m = 0,5$ кг.

4 Протон описал окружность радиусом $R = 10$ см в магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Найти скорость и период его вращения.

5 С какой скоростью будет лететь электрон по прямой во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях?

6 В масс-спектрографе (рис. 44) заряженная частица ускоряется на участке LK электрическим полем и, попав в магнитное поле с индукцией B , описывает окружность радиусом R . Вывести формулу для расчёта удельного заряда частицы q/m , если ускоряющее напряжение равно U , а начальную скорость частицы считать равной нулю.

7 Определить магнитную индукцию в точке O , созданную током I , текущим по бесконечно длинному тонкому проводу с петлей в форме полуокружности радиусом R (рис. 45).

8 Вычислить магнитную индукцию в точке O прямоугольника, стороны которого изготовлены из тонкого провода и по ним течёт ток I , если известны расстояния R_1, R_2, R_3 и R_4 до каждой из сторон прямоугольника (рис. 46).

9 В проводящем кольце радиуса $R = 0,4$ м течёт постоянный ток $I = 10$ А. Найти магнитную индукцию на оси кольца на расстоянии $h = 0,3$ м от центра кольца.

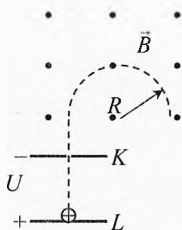


Рис. 44. Масс-спектрограф

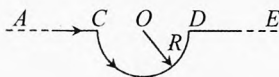


Рис. 45. Магнитная индукция в центре петли

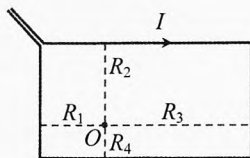


Рис. 46. Магнитная индукция в точке O

10 Заряженная частица попадает в среду, где на неё действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь $S_0 = 10$ см. Если в среде имеется магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, то она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $S_1 = 6$ см от точки входа. На каком расстоянии S_2 от точки входа в среду остановится частица, если поле будет в два раза меньше? Какой путь пройдет частица во втором l_1 и третьем l_2 случаях?

11 На наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения μ находится небольшая шайба массы m , на которую помещён положительный заряд q (рис. 47). Индукция магнитного поля \vec{B} перпендикулярна наклонной плоскости. Определить величину и направление установившейся скорости шайбы.

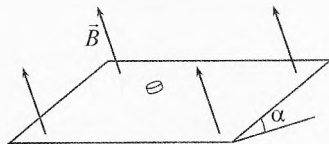


Рис. 47. Установившаяся скорость шайбы

12 Маленький шарик массой m с зарядом $q > 0$ начинает двигаться из состояния покоя в однородных магнитном и гравитационном полях. Индукция магнитного поля равна B и направлена параллельно поверхности Земли, причём $q\epsilon B \gg mg$, где c – скорость света в вакууме. На какое расстояние, и в каком направлении шарик сместится от первоначального положения через достаточно большое время τ ? Каково математическое условие достаточно большого τ ? Шарик в течение всего времени τ не достигает поверхности Земли.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $B = mg/(I \cdot l) = 20$ мТл.

2 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{I \cdot B \cdot l}{mg} = 1, \alpha = 45^\circ.$

3 $B = \mu mg/(I \cdot l) = 66$ мТл.

4 $m \cdot \frac{v^2}{R} = e\upsilon B; \Rightarrow \upsilon = \frac{eBR}{m} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}. T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{eB} = 3,6 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$

5 $F_{\text{л}} = F_z; F_{\text{л}} = e\upsilon B, F_z = eE; \Rightarrow \upsilon = E/B.$

6 $\frac{m\upsilon^2}{2} = qU; m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = q\upsilon B; \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2U}{R^2 B^2}.$

7 Прямолинейные участки AC и DE не создают поля в точке O , так как линия $ACDE$ проходит через эту точку. Поле создаётся только полуокружностью CD . Согласно закону Био–Савара–Лапласа произвольный элемент тока $I \cdot \Delta l$ на этой полуокружности создаёт в точке O магнитную индукцию $\Delta B = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \cdot \sin \alpha}{4\pi R^2}$, где

$\alpha = 90^\circ$ – угол между радиусом и элементом тока. Поскольку провод расположен в одной плоскости, то магнитная индукция от всех элементов тока будет направлена одинаково (от плоскости рисунка на нас) и складывается арифметически:

$$B = \sum \Delta B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot \sum \Delta l = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot \pi R = \frac{\mu\mu_0 I}{4R}.$$

8 Магнитная индукция, созданная всеми четырьмя кусками проводов с током, согласно принципу суперпозиции, равна $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$. Поскольку контур лежит в одной плоскости, то \vec{B}_1 , \vec{B}_2 , \vec{B}_3 и \vec{B}_4 сонаправлены, значит: $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Из закона Био–Савара–Лапласа для прямого тока конечной длины, получим (рис. 48):

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R_1} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2);$$

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R_2} (\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4);$$

$$B_3 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R_3} (\cos\alpha_5 - \cos\alpha_6);$$

$$B_4 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R_4} (\cos\alpha_7 - \cos\alpha_8);$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{R_1} + \frac{\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4}{R_2} + \frac{\cos\alpha_5 - \cos\alpha_6}{R_3} + \frac{\cos\alpha_7 - \cos\alpha_8}{R_4} \right).$$

В частности, если точка O находится по середине квадрата, то $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 45^\circ$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8 = 135^\circ$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, $B = \frac{\sqrt{2} \mu\mu_0 I}{\pi R}$.

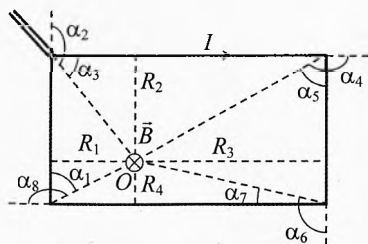


Рис. 48. Индукция в точке O

9 Разобьём кольцо на маленькие участки длиной Δl (рис. 49). Согласно закону Био–Савара–Лапласа элемент тока $I \cdot \Delta l$ создаёт магнитную индукцию $\Delta B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \Delta l \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2}$, где \vec{r} – радиус-вектор от элемента тока до точки наблюдения,

$\alpha = 90^\circ$ – угол между направлением элемента тока и радиус-вектором \vec{r} . Учитывая, что $r^2 = R^2 + h^2$, получим:

$$\Delta B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \Delta l}{4\pi(R^2 + h^2)}.$$

Компоненты $\Delta \vec{B}_x$, $\Delta \vec{B}_y$, перпендикулярные OA , симметричны от противоположных элементов тока и компенсируют друг друга. Поэтому магнитная индукция направлена по оси X :

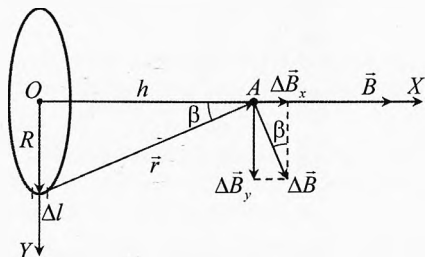


Рис. 49. Магнитная индукция в точке A

$$B = \sum \Delta B_x = \sum \Delta B \cdot \sin\beta, \quad \text{где } \sin\beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

$$\text{Значит, } B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \sum \Delta l}{4\pi(R^2 + h^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot 2\pi R \cdot R}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

$$\text{В качестве среды возьмём воздух } (\mu \approx 1): B = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 0,4^2}{2(0,4^2 + 0,3^2)^{3/2}} = 8 \text{ мТл}.$$

10 На частицу в среде при наличии магнитного поля действуют две взаимно перпендикулярные силы (рис. 50), сила сопротивления, направленная противо-

ложно скорости, $\vec{F}_c = -\beta\vec{v} = -\beta \cdot \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$ и сила Лоренца, перпендикулярная скорости

$F_L = qBv = qB \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{S}$ – малое перемещение частицы за время Δt .

Сила сопротивления создаёт касательное ускорение частицы, тормозя её движение. Согласно II закону Ньютона касательное ускорение частицы

$$m\vec{a}_t = \vec{F}_c, \Rightarrow \vec{a}_t = -\frac{\beta\vec{v}}{m}.$$

Поскольку скорость с течением времени уменьшается, то касательное ускорение тоже уменьшается.

Сила Лоренца создаёт частице центростремительное ускорение:

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_L, \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = qBv, \quad R = \frac{mv}{qB}.$$

То есть радиус кривизны траектории уменьшается с уменьшением скорости. Таким образом, под действием этих двух сил частица движется по закручивающейся спирали. Так как сила Лоренца не влияет на модуль скорости, то независимо от значения магнитной индукции во всех случаях частица пройдет одинаковый путь $l_1 = l_2 = S_0$.

Учитывая, что обе силы прямо пропорциональны скорости и перпендикулярны друг другу, для малого перемещения запишем закон изменения импульса:

$$m\Delta\vec{v} = \vec{F}_c \cdot \Delta t + \vec{F}_L \cdot \Delta t \quad \text{или} \quad m \cdot |\Delta v| = \sqrt{(\beta \cdot \Delta S)^2 + (qB \cdot \Delta S)^2} \Rightarrow$$

$$m \cdot |\Delta v| = \Delta S \cdot \sqrt{\beta^2 + (qB)^2}.$$

Поскольку последнее соотношение справедливо на любом участке пути, вплоть до остановки, то, экстраполируя его на всё время движения, получим:

$$mv_0 = S \cdot \sqrt{\beta^2 + (qB)^2}.$$

Запишем последнее уравнение для всех трёх случаев движения:

$$mv_0 = \beta S_0, \quad mv_0 = S_1 \cdot \sqrt{\beta^2 + (qB)^2}, \quad mv_0 = S_2 \cdot \sqrt{\beta^2 + (qB/2)^2}.$$

Решая их совместно, получим: $S_2 = \frac{S_1}{\sqrt{1 + 3(S_1/S_0)^2}} = 8,3 \text{ см.}$

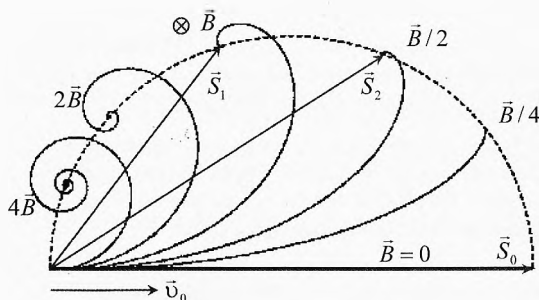


Рис. 51. Траектории частицы при разных значениях магнитной индукции

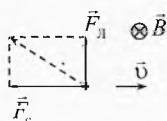


Рис. 50. Силы, действующие на частицу

На рис. 51 представлены траектории частицы при разных значениях индукции магнитного поля \vec{B} . Можно показать, что все точки остановки лежат на полуокружности диаметром S_0 .

11 В начале шайба начнёт движение вниз по наклонной плоскости по оси X : $ma_0 = F_{\tau} \sin \alpha - F_{\text{тр}}$, где $F_{\tau} = mg$ – сила тяжести, $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$ – сила трения, $N = mg \cos \alpha$ – нормальная составляющая силы реакции опоры. Значит, $ma_0 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$. Ясно, что движение возможно при $\tan \alpha > \mu$. С появлением у шайбы скорости, на неё начнёт действовать сила Лоренца. В установившемся режиме ($v = \text{const}$) сумма сил, приложенных к шайбе, будет равна нулю (рис. 52):

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{Л}} = 0.$$

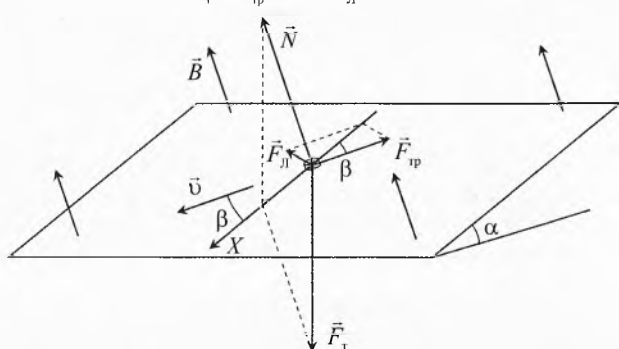


Рис. 52. Движение шайбы по наклонной плоскости в магнитном поле

При этом сила Лоренца и сила трения должны уравновесить составляющую силы тяжести на наклонную плоскость. Поскольку сила трения направлена всегда противоположно скорости движения, а сила Лоренца – перпендикулярно ей, то $\vec{F}_{\text{тр}} \perp \vec{F}_{\text{Л}}$. По теореме Пифагора получим: $(mg \sin \alpha)^2 = F_{\text{тр}}^2 + F_{\text{Л}}^2$. Подставляя выражения для силы трения $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ и силы Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$, получим:

$$(mg \sin \alpha)^2 = (\mu mg \cos \alpha)^2 + (qvB)^2;$$

$$\Rightarrow qvB = \sqrt{(mg \sin \alpha)^2 - (\mu mg \cos \alpha)^2}, \quad v = \frac{mg}{qB} \sqrt{(\sin \alpha)^2 - (\mu \cos \alpha)^2};$$

Найдём угол β , который составляет скорость с осью X :

$$\tan \beta = F_{\text{Л}} / F_{\text{тр}} = qvB / (\mu mg \cos \alpha).$$

Подставляя сюда значение скорости v , получим: $\tan \beta = \sqrt{(tg \alpha / \mu)^2 - 1}$.

12 Согласно II закону Ньютона, $m\vec{a} = \vec{F}_{\tau} + \vec{F}_{\text{Л}}$.

Направим ось X горизонтально, а ось Y – вертикально вниз. Пусть магнитная индукция будет направлена от нас. Запишем II закон Ньютона в проекциях на оси X и Y для произвольного момента времени (рис. 53):

$$ma_x = F_{\text{Л}x}, \quad ma_y = F_{\tau} + F_{\text{Л}y}.$$

где $F_{\tau} = mg$ – сила тяжести, $F_{\text{Л}} = qvB$ – сила Лоренца

Проекции силы Лоренца по осям X и Y :

$$F_{\text{Л}x} = F_{\text{Л}} \cos \beta = qvB \cos \beta = qvB \cos \beta,$$

$$F_{\text{Л}y} = -F_{\text{Л}} \sin \beta = -qvB \sin \beta = -qvB \sin \beta.$$

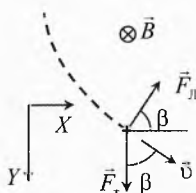


Рис. 53. Силы, действующие на частицу

Из рисунка видно, что проекция силы Лоренца на ось X и скорости на ось Y имеют одинаковые знаки, а проекция силы Лоренца на ось Y и скорости на ось X имеют разные знаки. Подставляя значения сил в оба уравнения, получим:

$$ma_x = qBv_y, \quad ma_y = mg - qBv_x$$

Учитывая, что $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ и $v_y = \frac{dy}{dt}$, решим первое дифференциальное уравнение:

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = qB \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{или} \quad m \cdot dv_x = qB \cdot dy.$$

Проинтегрируем последнее уравнение от начала ($y = 0, v = 0$), до произвольного момента времени:

$$m \cdot \int_0^{v_x} dv_x = qB \cdot \int_0^y dy \Rightarrow m \cdot v_x = qB \cdot y \Rightarrow v_x = \frac{qBy}{m}.$$

Учитывая этот результат, решим второе дифференциальное уравнение:

$$ma_y = mg - qB \left(\frac{qBy}{m} \right) \Rightarrow a_y = g - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 y.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду: $a_y = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \left(y - g \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \right).$

Введём обозначение (сместим начало оси Y): $y_1 = y - g \left(\frac{m}{qB} \right)^2.$

Учитывая, что $a_y = a_{y_1}$, получим: $a_{y_1} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 y_1.$

Получилось уравнение гармонических колебаний по оси Y со смещенным началом координат. Циклическая частота и период колебаний:

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Решением этого уравнения является синусоидальная зависимость:

$$y_1 = -A \cdot \cos \omega t, \quad \Rightarrow \quad y = g \left(\frac{m}{qB} \right)^2 - A \cdot \cos \omega t.$$

Подставляя начальные условия ($t = 0, y = 0$) в последнее уравнение найдём амплитуду вертикальных колебаний: $0 = g \left(\frac{m}{qB} \right)^2 - A \cdot \cos 0 \Rightarrow A = g \left(\frac{m}{qB} \right)^2.$

Подставим значение амплитуды A в уравнение зависимости $y(t)$:

$$y = g \left(\frac{m}{qB} \right)^2 \cdot (1 - \cos \omega t) \quad \text{или} \quad y = \frac{g}{\omega^2} \cdot (1 - \cos \omega t).$$

Учитывая, что $v_x = \frac{qB}{m} \cdot y = \omega \cdot y$, получим: $v_x = \frac{g}{\omega} \cdot (1 - \cos \omega t).$

Проинтегрируем последнее уравнение по времени:

$$x = \int_0^t v_x \cdot dt = \frac{g}{\omega} \left(\int_0^t dt - \int_0^t \cos(\omega t) dt \right) = \frac{g}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

Итак, уравнения движения частицы по осям X и Y :

$$x = \frac{g}{\omega^2}(\omega t - \sin \omega t), \quad y = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos \omega t), \quad \text{где } \omega = \frac{qB}{m}.$$

Траекторией движения частицы является перевёрнутая циклоида (аналогичная, например, зеркальному отражению траектории точки на протекторе велосипедного колеса при постоянной скорости движения).

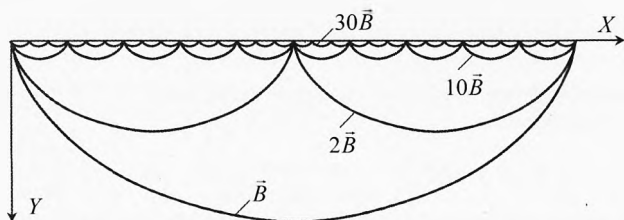


Рис. 54. траектории частицы при различных значениях \vec{B}

При $\tau \gg T$ частица сместится, в основном, по оси X на $l \approx x \approx \frac{g\tau}{\omega} = \frac{mg\tau}{qB}$.

На рис. 54 представлены траектории частицы при различных значениях магнитной индукции \vec{B} .

Глава 2. Электромагнитная индукция

Самое важное – не переживать обо всём. Находясь в таком стрессовом бизнесе как у меня, как никогда понимаешь, что нужно всегда сохранять спокойствие.

Павел Дуров
(основатель социальной сети «ВКонтакте»)

§ 16. Открытие явления электромагнитной индукции

В 1820 году Г. Х. Эрстед обнаружил, что вокруг проводника с током существует магнитное поле, то есть он открыл, что с помощью электричества можно получить магнетизм. Ученые задались вопросом, а нельзя ли с помощью магнетизма получить электричество? Многими экспериментаторами выполнялись различные опыты с целью обнаружить превращение магнетизма в электричество. Наконец 29 августа 1831 г. счастье улыбнулось физику-самоучке М. Фарадею. За 10 лет он провел 9 тысяч опытов, которые, позволили ему открыть «волшебное явление». Вот описание первого опыта, приведшего к положительному результату: «На широкую деревянную катушку была намотана медная проволока длиной 203 фута*, и между витками её намотана проволока такой же длины, но изолированная от первой хлопчатобумажной нитью. Одна из этих спиралей была соединена с гальванометром, а другая – с сильной батареей, состоящей из 100 пар пластин... При замыкании цепи удалось заметить внезапное, но чрезвычайно слабое действие на гальванометр, и то же самое замечалось при прекращении тока. При непрерывном же прохождении тока через одну из спиралей не удавалось отметить ни действия на гальванометр, ни вообще какого-либо индукционного действия на другую спираль...»

Таким образом, явление электромагнитной индукции вначале было открыто в неподвижных относительно друг друга проводниках, когда при изменении силы тока (а значит магнитного поля) в одной катушке обнаруживались импульсы тока в другой катушке, соединённой с гальванометром.

Затем с помощью опытов Фарадей показал, что в катушке, соединённой с гальванометром, ток возникает при приближении или удалении другой катушки, по которой идёт ток.

Фарадей был знаком с трудами Ампера и понимал, что магнит – это совокупность токов, циркулирующих в молекулах.

* фут (ступня) – англ. мера длины, равна 30,48 см.

17 октября 1831 г. был зарегистрирован ток в катушке во время вдвигания (или выдвигания) постоянного магнита. В течение месяца Фарадей открыл опытным путём все существенные особенности явления электромагнитной индукции.

Сформулируем *явление электромагнитной индукции*.

Любое изменение магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, вызывает появление индукционного тока в контуре.

§ 17. Правило Ленца

Нам, россиянам, особенно приятно осознавать, что к открытию «волшебного явления» – электромагнитной индукции, благодаря которому мир получил возможность повсеместного использования электроэнергии, прямое отношение имеет русский физик, член Петербургской академии наук Э. Х. Ленц.

Ленц родился в Дерпте (ныне Тарту, Эстония), учился в Дерптском университете. В 1836 г. возглавил кафедру физики и физической географии Петербургского университета, с 1840 г. – декан физико-математического факультета, с 1863 г. – ректор. Ленц преподавал также в морском корпусе (1835–1841), Михайловской артиллерийской академии (1848–1861) и Педагогическом университете (1851–1859).



Эмилий
Христианович
Ленц (1804–1865)



Джеймс Прескотт
Джоуль (1818–1889)



Борис Семенович
Якоби (1801–1874)

Основные работы Ленца – в области электромагнетизма. В 1833 г. он установил правило определения направления индукционного тока (закон Ленца), а в 1842 г. независимо от Дж. Джоуля – закон теплового действия электрического тока (закон Джоуля–Ленца). Совместно с Борисом Семеновичем Якоби впервые разработал методы расчёта электромагнитов в электрических машинах. Он открыл обратимость электрических машин, изучал зависимость сопротивления металлов от температуры. Им выполнены работы по геофизике. В 1823–1826 гг. принимал участие в кругосветном путешествии на шлюпке «Предприятие», осуществил важные географические исследования. Его учениками были М. П. Авенариус, Р. Э. Ленц, Ф. И. Шведов, А. И. Савельев и др.

Сформулируем закон Ленца (или *правило Ленца*).

Индукционный ток в контуре всегда направлен так, что своим магнитным полем внутри контура препятствует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.

Рассмотрим на примерах правило Ленца.

Возьмём катушку из изолированного тонкого провода. Подвесим её на длинных изолированных проводах. Подсоединим к катушке гальванометр, и будем подносить к ней постоянный магнит (рис. 1а). Внешний магнитный поток, пронизывающий поверхность контура будет возрастать. Катушка в этот момент будет отталкиваться от магнита. Она представляет собой электромагнит. Поскольку она отталкивается от магнита, то её поле внутри направлено против поля магнита, то есть ток в ней направлен так, что северный полюс электромагнита (катушки) расположится ближе к северному полюсу подводимого магнита.

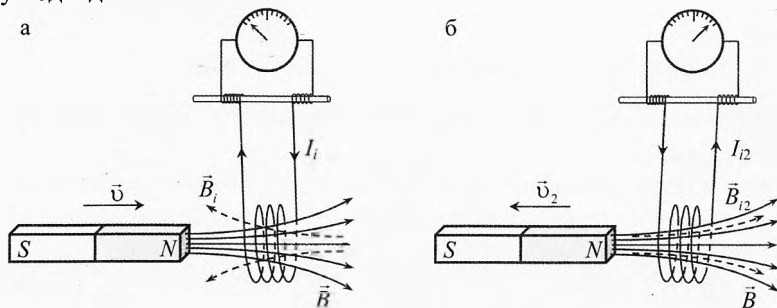


Рис. 1. Ток в катушке и её отклонение при движении магнита

По направлению тока в гальванометре, используя правило правого винта, обнаружим, что магнитная индукция \vec{B}_i индукционного тока внутри катушки направлена против магнитной индукции \vec{B} приближающегося магнита: $\vec{B}_i \uparrow \downarrow \vec{B}$.

Гальванометр при этом обнаруживает наличие тока.

Пусть магнит находится внутри катушки и катушка свободно висит вертикально. Ток в гальванометре отсутствует. Начнем уносить магнит из катушки (рис. 1б). Мы заметим, что в катушке снова появится ток, но теперь она тянется за магнитом. Значит, направление тока в ней поменялось и со стороны северного полюса уносимого магнита будет южный полюс электромагнита (катушки с индукционным током). По правилу

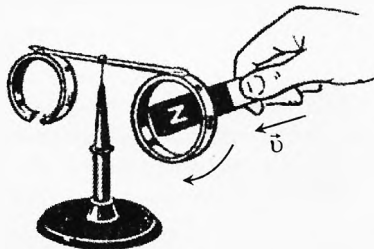


Рис. 2. От магнита отталкивается только замкнутое кольцо

правого винта видно, что магнитное поле индукционного тока внутри катушки \vec{B}_{i2} совпадает с направлением магнитной индукции \vec{B} магнита: $\vec{B}_{i2} \uparrow \vec{B}$.

Замечательной демонстрацией явления электромагнитной индукции и правила Ленца является коромысло Максвелла (прибор для демонстрации правила Ленца).

Оно представляет собой два алюминиевых кольца, причём одно из них с поперечным разрезом (рис. 2). Эти кольца соединены алюминиевой планкой с гнездом посередине, в которое вставляется наконечник подставки.

Если в целое кольцо вносить магнит любым полюсом, то коромысло старается удалиться от магнита. Если остановить коромысло и магнит, а затем начать удалять магнит, то коромысло начнёт поворачивать вдогонку за магнитом в соответствии с правилом Ленца. Если же вносить (или выносить) магнит в разрезанное кольцо, то коромысло не сдвигается потому, что индукционный ток не возникает в незамкнутом контуре.

§ 18. Закон электромагнитной индукции

Продолжим опыты с катушкой, подключённой к гальванометру, и постоянным магнитом.

Почему в цепи возникает ток, когда магнит движется относительно катушки? При этом не важно, двигать магнит относительно катушки или катушку относительно магнита в лабораторной системе координат.

Ток возникает потому, что возникает ЭДС индукции из-за изменения магнитного потока, пронизывающего контур. При этом сила тока зависит от характера движения магнита и сопротивления контура.

На опыте убедимся, что при медленном движении магнита относительно катушки стрелка гальванометра отклоняется значительно меньше, чем при быстром. Значит, ЭДС индукции в контуре пропорциональна скорости изменения внешнего магнитного потока в ней. Как можно убедиться на опыте, ЭДС индукции равна скорости изменения полного магнитного потока через контур, взятого с обратным знаком

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Знак « \rightarrow » напоминает о правиле Ленца: индукционный ток имеет такое направление, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало изменению магнитного потока.

Учет правила Ленца в законе электромагнитной индукции позволяет определять не только модуль ЭДС индукции, но и направление, в котором ЭДС индукции стремится двигать положительно заряженные частицы (электрический ток).

Рассмотрим так называемое правило знаков для ЭДС индукции и силы индукционного тока, наведённого с помощью изменения магнитного потока в контуре.

Принято считать ЭДС индукции \mathcal{E}_i и индукционный ток I_i положительными, если магнитное поле индукционного тока сонаправлено с внешним магнитным полем внутри контура, то есть $\vec{B}_i \uparrow \vec{B}$.

ЭДС индукции и сила индукционного тока считаются отрицательными, если магнитная индукция индукционного тока внутри контура \vec{B}_i направлена против магнитной индукции \vec{B} внешнего магнитного поля, вызывающего индукционный ток, то есть $\mathcal{E}_i < 0$ и $I_i < 0$, если $\vec{B}_i \updownarrow \vec{B}$.

Из наших опытов следует (рис. 1), что $\mathcal{E}_i > 0$, когда внешний магнитный поток внутри контура уменьшается, при этом \vec{B}_i сонаправлено с \vec{B} , то есть если $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0$, то $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Если же внешний магнитный поток возрастает $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$, то магнитное поле \vec{B}_i индукционного тока направлено против внешнего поля \vec{B} внутри контура, значит $\mathcal{E}_i < 0$, то есть вновь $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Итак, закон электромагнитной индукции Фарадея.

ЭДС индукции, возникающая в проводящем контуре, равна скорости изменения полного магнитного потока в контуре, взятого с обратным знаком:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

§ 19. ЭДС индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле

Возьмём проводящий контур $AGCD$ (рис. 3). Пусть сторона AG длиной l движется со скоростью \vec{v} . Угол между магнитной индукцией \vec{B} и скоростью \vec{v} равен β , а между магнитной индукцией и нормалью к контуру $\alpha = 90^\circ - \beta$.

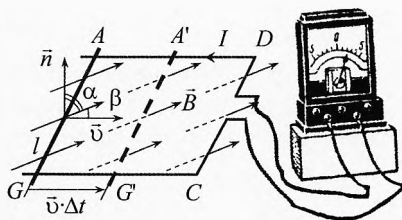


Рис. 3. Расчёт ЭДС индукции в контуре

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС индукции, возникающей в контуре, равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

где $\Phi = BS \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos(90^\circ - \beta) = B \cdot S \cdot \sin \beta$ – магнитный поток, пронизывающий контур.

Тогда при изменении площади контура на ΔS поток изменится на

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta S \cdot \sin \beta, \quad (2)$$

где

$$\Delta S = S_{A'GCD} - S_{AGCD} = -l \cdot v \Delta t. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим: $\Delta\Phi = -B \cdot l \cdot v \Delta t \cdot \sin \beta$.

Подставляя это в (1), получим выражение для ЭДС индукции:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = B l v \sin \beta} \quad \text{или} \quad \boxed{\mathcal{E}_i = B_{\perp} l v},$$

где $B_{\perp} = B \sin \beta$ – перпендикулярная к контуру составляющая внешнего магнитного поля.

В нашем случае ЭДС получилась положительной, т.к. магнитный поток в контуре уменьшается. Согласно правилу Ленца ток возникнет такого направления, что внутри контура магнитная индукция \vec{B}_i , обусловленная индукционным током, направлена вверх, как и перпендикулярная к контуру составляющая внешнего магнитного поля, то есть $\vec{B}_i \uparrow \vec{B}_{\perp}$.

По правилу правого винта (связь между направлением тока в контуре и направлением магнитной индукции \vec{B}_i , созданной этим током) ток в контуре пойдёт против часовой стрелки.

Реально роль источника тока здесь выполняет движущийся проводник. А в источнике ток движется благодаря сторонним силам от «–» к «+». Значит, в точке A «–», а в точке G «+» источника.

Роль потребителя сопротивлением R при этом выполняют гальванометр и провода $GCD A$.

С точки зрения закона Ома, ЭДС в этом случае тоже будет положительной, то есть она будет совершать положительную работу по переносу зарядов в цепи. Для закона Ома ЭДС индукции \mathcal{E} обозначим без индекса:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где r – сопротивление провода AG (внутреннее сопротивление источника).

Если бы провод AG двигался в обратную сторону, то возникающая ЭДС была бы, с точки зрения закона электромагнитной индукции, отрицательна ($\vec{B}_i \uparrow \vec{B}_{\perp}$), то есть:

$$\mathcal{E}_i = -B \cdot l \cdot v \cdot \sin \beta \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_i = -B_{\perp} \cdot l \cdot v.$$

Но, с точки зрения закона Ома, ЭДС будет положительной и в этом случае, ибо благодаря ЭДС совершается положительная работа и выделяется столько же тепла, сколько и в первом случае, только ток идёт в обратном направлении:

$$I = \frac{B_{\perp} \cdot l \cdot v}{R + r},$$

Рассмотрим расчёт ЭДС индукции, возникающей в проводнике, движущемся в магнитном поле, из других соображений (с позиции силы). На свободные заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца

$$F_L = q_0 B v \cdot \sin \beta = q_0 B_{\perp} v.$$

Согласно правилу левой руки, на положительные заряды сила Лоренца будет действовать в направлении от A к G . Но в металлическом проводе положительные ионы не могут сдвигаться. Двигаться будут электроны в направлении от G к A . Но это равносильно движению положительных зарядов от A к G . Таким образом, «-» будет в точке A , а «+» в точке G .

Согласно определению ЭДС, возникающая на участке AG под действием сторонней силы (силы Лоренца), равна отношению работы по переносу заряда на участке AG к значению переносимого заряда

$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{ст}}}{q_0}.$$

Работа силы Лоренца:

$$A_{\text{ст}} = F_L \cdot l = q_0 \cdot B_{\perp} v \cdot l.$$

Тогда ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = \frac{q_0 B_{\perp} v l}{q_0} = B_{\perp} v l \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_i = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \beta.$$

Это совпадает с выражением для ЭДС, полученной из закона электромагнитной индукции.

✎ **Пример 1.** Вычислить мощность внешней силы, которая должна обеспечить равномерное движение провода длиной l , скользящего без трения по проводящим направляющим в магнитном поле индукцией \vec{B} , направленной под углом β к скорости провода (рис. 4).

➔ **Решение.** Требуется вычислить мощность внешней силы, благодаря которой возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \beta$. Благодаря этой ЭДС в контуре пойдёт ток

$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$. На движущийся с током провод-

ник действует сила Ампера $F_A = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \beta$, которая направлена, согласно правилу левой руки, противоположно скорости \vec{v} провода. Она будет тормозить движение провода. Чтобы провод двигался, нужно приложить стороннюю силу $F_{\text{ст}}$,

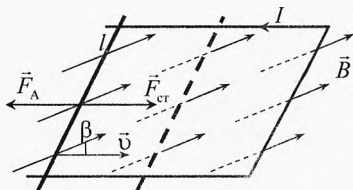


Рис. 4. Мощность ЭДС равна мощности внешней силы

которая уравнивает тормозящее действие силы Ампера, то есть $\vec{F}_{\text{ст}} = -\vec{F}_A$.
 $F_{\text{ст}} = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \beta$. Мощность этой силы $N_{\text{ст}} = F_{\text{ст}} \cdot v = B I \cdot l \cdot v \cdot \sin \beta$.

Электрическая мощность, вырабатываемая ЭДС индукции контура:

$$P_i = I \cdot \mathcal{E}_i = I \cdot B l \cdot v \cdot \sin \beta.$$

Оказалось, что мощность внешней силы, поддерживающей постоянную скорость провода, движущегося в магнитном поле без трения, равна электрической мощности возникающей ЭДС. Другими словами, мы наблюдаем здесь проявление закона сохранения энергии. Механическая энергия внешних сил превращается в электрическую. А куда девается вырабатываемая при этом электрическая энергия? Она превращается во внутреннюю энергию (в джоулево тепло в нашем случае).

Если при скольжении по направляющим провод трётся, то для поддержания такой же скорости внешняя сила должна быть больше на значение силы трения: $F_{\text{ст}} = F_A + F_{\text{тр}}$. Тогда работа внешних сил будет тратиться на джоулево тепло и на нагрев проволоки трением. ←

✎ **Пример 2.** По двум направляющим сверхпроводникам, соединённым резистором $R = 0,10$ Ом, составляющим угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, скользит проводник AG сопротивлением $r = 0,05$ Ом в вертикальном поле индукцией $B = 0,3$ Тл. Расстояние AG между направляющими равно $l = 40$ см. Коэффициент трения скольжения равен $\mu = 0,28$. Масса проводника $m = 10$ г. Определить установившуюся скорость.

✎ **Решение.** На проводник AG действует сила тяжести \vec{F}_T , нормальная сила реакции опоры \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила Ампера \vec{F}_A (рис. 5). Под действием тяжести проводник начинает скользить вниз. Магнитный поток через контур $AGCD$ возрастает.

Согласно закону электромагнитной индукции в контуре $AGCD$ возникает ЭДС индукции и индукционный ток, направленный по часовой стрелке (от A к G на участке AG в соответствии с правилом Ленца).

Сила Ампера, приложенная к проводнику AG , направлена горизонтально в соответствии с правилом левой руки

$$F_A = B \cdot I \cdot l.$$

По закону Ома,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad \text{где } \mathcal{E} = B \cdot v \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

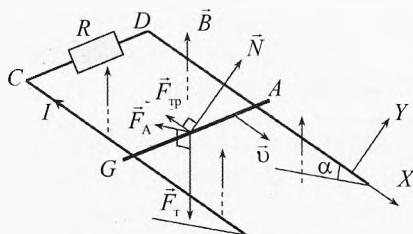


Рис. 5. Движение с установившейся скоростью

Значит, сила Ампера: $F_A = \frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R + r}$.

Скорость проводника AG будет возрастать, пока сумма всех сил не станет равной нулю:

$$\vec{F}_r + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_A = 0.$$

Выберем ось OX вдоль наклонной плоскости, а ось OY перпендикулярно ей. Тогда

по OX : $F_r \sin \alpha - F_{тр} - F_A \cos \alpha = 0$,

по OY : $N - F_r \cos \alpha - F_A \sin \alpha = 0$.

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, $F_r = mg$, получим:

$$F_{тр} = \mu mg \cos \alpha + \mu F_A \sin \alpha;$$

$$mg \sin \alpha - (\mu mg \cos \alpha + \mu F_A \sin \alpha) - F_A \cos \alpha = 0;$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Подставляя выражение для силы Ампера, получим:

$$\frac{B^2 l^2 v \cos \alpha}{R + r} = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \Rightarrow v = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(R + r)}{B^2 l^2 (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha}.$$

Итак, установившаяся скорость:

$$v = \frac{mg(\tan \alpha - \mu)(R + r)}{B^2 l^2 (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}; \quad v = \frac{0,01 \cdot 9,8(0,577 - 0,28)(0,1 + 0,05)}{0,3^2 0,4^2 (0,28 \cdot 0,5 + 0,866)} = 30 \text{ см/с}.$$

Из ответа видно, что проводник начнёт двигаться, если $\tan \alpha > \mu$. ←

✎ **Пример 3.** Магнитная индукция \vec{B} однородного поля перпендикулярна плоскости медного кольца ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$), средний диаметр которого $D = 0,20 \text{ м}$. Толщина провода $d = 2,0 \text{ мм}$. С какой скоростью должна изменяться со временем магнитная индукция \vec{B} , чтобы индукционный ток в кольце равнялся $I = 10 \text{ А}$?

→ **Решение.** Пусть магнитное поле усиливается с течением времени, то есть $\frac{\Delta B}{\Delta t} > 0$.

Тогда, согласно правилу Ленца, магнитная индукция \vec{B}_i индукционного тока внутри кольца будет направлена против магнитной индукции \vec{B} внешнего поля. Согласно правилу правого винта, обнаружим, что ток в кольце будет идти против часовой стрелки (рис. 6). Согласно закону Ома, сила тока

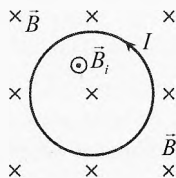


Рис. 6. Нарастание внешнего поля

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (4)$$

где $\mathcal{E} = |\mathcal{E}_i| = \left| -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t}$ – ЭДС индукции, возникающая в кольце за счёт изменяющегося потока внешнего поля \vec{B} .

Учитывая, что площадь кольца $S = \pi D^2/4$, получим:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\pi D^2}{4}. \quad (5)$$

Так как площадь сечения провода $S_{\text{пр}} = \pi d^2/4$, а его длина $l = \pi D$, то сопротивление кольца:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S_{\text{пр}}} = \rho \cdot \frac{\pi D}{\pi d^2/4} = \frac{4D\rho}{d^2}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим: $I = \frac{\pi D^2 d^2}{4 \cdot 4D\rho} \frac{\Delta B}{\Delta t}$.

Тогда магнитная индукция должна изменяться со скоростью:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{16\rho I}{\pi D d^2}; \quad \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10}{3,14 \cdot 0,2 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2} \approx 1,1 \text{ (Тл/с)}.$$

§ 20. Вихревое электрическое поле

Какая сила заставляет свободные заряженные частицы (электроны) двигаться направленно в кольце? Ведь магнитное поле не действует на неподвижные заряженные частицы.

В примерах 1 и 2 часть контура $AGCD$, сторона AG , движется в магнитном поле. На каждый электрон действует сила Лоренца. В результате возникает ЭДС индукции на участке AG , которая заставляет двигаться электроны по всему контуру.

В последнем же примере контур неподвижен, поэтому сила Лоренца не возникает.

В этом случае говорят, что возникает вихревое (или индукционное) электрическое поле \vec{E}_v , силовые линии которого, в отличие от электростатического поля, не начинаются на положительных и не заканчиваются на отрицательных зарядах, а замкнуты сами на себя. Это электрическое поле называют вихревым.

Работа вихревого поля по замкнутому контуру, в отличие от работы электростатического поля, не равна нулю.

Это вихревое электрическое поле заставляет двигаться свободные заряженные частицы.

Работа вихревого электрического поля при переносе единичного положительного заряда по замкнутому контуру равна ЭДС индукции в этом контуре.

Рассмотрим магнитное поле, созданное электромагнитом (рис. 7). Пусть северный полюс электромагнита расположен сверху. Тогда линии напряжённости вихревого электрического поля \vec{E}_v , в случае цилиндрического сердечника электромагнита, будут представлять собой окружности с центром на оси сердечника электромагнита. Если магнитная индукция возрастает $\frac{\Delta B}{\Delta t} > 0$, то, в соответствии с правилом Ленца и правилом правого винта, линии вихревого электрического поля будут направлены против часовой стрелки (при взгляде со стороны северного полюса электромагнита).

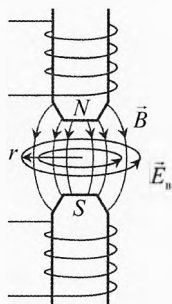


Рис. 7. Вихревое электрическое поле

Действительно, расположим вдоль силовой линии замкнутый проводник. Согласно закону электромагнитной индукции, в нём возникнет ЭДС индукции, пойдёт ток такого направления, что своим магнитным полем будет препятствовать изменению (в нашем случае нарастанию) внешнего магнитного поля. Таким образом, магнитная индукция \vec{B} направлена вниз и возрастает, а магнитная индукция \vec{B}_i индукционного тока будет направлена против \vec{B} , то есть $\vec{B}_i \uparrow \downarrow \vec{B}$. Тогда, согласно правилу правого винта, индукционный ток пойдёт против часовой стрелки.

Если же магнитная индукция \vec{B} , созданная электромагнитом, будет убывать $\frac{\Delta B}{\Delta t} < 0$, то напряжённость вихревого электрического поля \vec{E}_v изменит своё направление. И если снова поместить замкнутый проводящий контур в зазор между полюсами электромагнита, то индукционный ток пойдёт в этом случае по часовой стрелке.

Получим связь между ЭДС индукции, возникающей в контуре, расположенном вдоль линии вихревого электрического поля, и напряжённостью вихревого электрического поля \vec{E}_v .

ЭДС индукции в контуре равна отношению работы A_v вихревого электрического поля при переносе заряда q по замкнутому контуру радиуса r :

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{A_v}{q}, \quad A_v = F_v \cdot l = E_v q \cdot 2\pi r \Rightarrow |\mathcal{E}_i| = E_v \cdot 2\pi r \Rightarrow E_v = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2\pi r}.$$

Учитывая, что $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, получим: $E_v = \frac{1}{2\pi r} \cdot \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$

Так как площадь контура $S = \pi r^2$, то изменение потока равно
 $\Delta\Phi = \Delta B \cdot S = \Delta B \cdot \pi r^2$.

Тогда напряжённость вихревого электрического поля прямо пропорциональна радиусу контура и скорости изменения магнитной индукции:

$$E_v = \frac{\pi r^2}{2\pi r} \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| \Rightarrow E_v = \frac{r}{2} \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|.$$

Если магнитное поле сосредоточено в основном в пределах кольца радиуса r_0 (рис. 8), а напряжённость вихревого поля E_v нужно найти на большем расстоянии ($r > r_0$), то

$$\Delta\Phi = \Delta B \cdot S_0 = \Delta B \cdot \pi r_0^2, \text{ тогда } E_v = \frac{r_0^2}{2r} \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|.$$

То есть напряжённость электрического поля убывает обратно пропорционально расстоянию r от электромагнита.

Из рассмотренного выше видно, что суть явления электромагнитной индукции в том, что при всяком изменении магнитного поля в пространстве возникает вихревое электрическое поле.

Если в этом месте расположить замкнутый проводящий контур, то в нём возбуждается ЭДС и пойдёт электрический ток. То есть наличие проводящего контура позволяет обнаружить, что здесь появилось вихревое электрическое поле. Дадим более общую формулировку явления электромагнитной индукции:

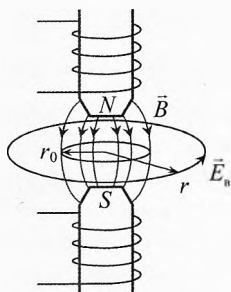


Рис. 8. Вихревое электрическое поле

При всяком изменении магнитного поля в данной области пространства возникает вихревое электрическое поле.

§ 21. Обобщённая сила Лоренца

У читателя может возникнуть недоумение. Если мы двигаем проводящий контур относительно магнита, то в нём возникает ЭДС индукции благодаря силе Лоренца. Если же мы двигаем магнит относительно контура, то возникает вихревое электрическое поле и сила со стороны этого поля заставляет двигаться эти заряды. Но, по сути, происходит одно и то же – контур движется относительно магнита, и возникающая ЭДС вычисляется по одному и тому же закону электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Причины называются разные, но результат и закон, описывающий процесс, один.

Что же происходит на самом деле, каков реальный механизм?

На самом деле существует особый, отличный от вещества, вид материи – электромагнитное поле, структура которого ещё изучена недостаточно. Мы можем сказать, как устроены молекулы, атомы. Но мы не можем сказать, из чего и как устроено электромагнитное поле. Хотя этот вопрос интенсивно и успешно изучается во многих странах.

В меру наших знаний мы описываем различные явления. Мы знаем, что электромагнитное поле, представляя собой нечто единое, тем не менее может проявлять себя по-разному. Самое общее деление его в связи с исторически сложившейся традицией – на две составляющие: электрическое поле и магнитное поле.

Действие электромагнитного поля на заряженную частицу представляют как результат действия двух сил от двух полей, электрического и магнитного:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_э + \vec{F}_м,$$

где \vec{F}_0 – обобщённая сила Лоренца;

$\vec{F}_э$ – электрическая составляющая силы Лоренца;

$\vec{F}_м$ – магнитная составляющая силы Лоренца.

Когда говорят просто «сила Лоренца», то обычно имеют в виду магнитную составляющую силы Лоренца.

Электромагнитное поле никогда не исчезает при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую, но могут меняться обе составляющие обобщённой силы Лоренца: и магнитная, и электрическая. Иногда одна из них может обратиться в нуль, однако физические явления будут протекать одинаково при одинаковых начальных условиях (принцип относительности).

Обратим внимание ещё раз на то, что не существует электрического поля как особой формы материи. Не существует магнитного поля как особой материи. А существует электромагнитное поле как особый, отличный от вещества, вид материи, который может проявляться в качестве электрического или магнитного полей, или того и другого вместе.

§ 22. Самоиндукция

В опытах 1831 г. Фарадей наблюдал индукционный ток в проводящем контуре (катушке), возникающий за счёт изменения в нём внешнего магнитного поля. В 1832 г. американский ученый Джозеф Генри впервые наблюдал индукционный ток в катушке при увеличении или уменьшении магнитного потока, созданного током, протекающим в той же катушке.

Явление возникновения ЭДС индукции в контуре за счёт изменения собственного магнитного потока, обусловленного током в этом контуре, называется самоиндукцией.

Поскольку полный собственный магнитный поток в контуре определяется выражением $\Phi_c = L \cdot I$, то ЭДС самоиндукции, согласно закону электромагнитной индукции,

$$\mathcal{E}_{ci} = - \frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t} = - \frac{\Delta(L \cdot I)}{\Delta t}.$$

Если индуктивность контура при этом остаётся неизменной: $L = \text{const}$ (не меняется среда и форма контура), то:

$$\mathcal{E}_{ci} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

ЭДС самоиндукции, возникающая в контуре неизменной индуктивности, равна произведению индуктивности контура и скорости изменения силы тока в нём.

Чем быстрее изменяется ток в контуре, тем большая ЭДС самоиндукции возникает в нём. Это особенно ярко проявляется при включении и отключении электрических цепей большой индуктивности.

Формула для ЭДС самоиндукции позволяет дать второе толкование индуктивности:

$$L = \frac{\mathcal{E}_{ci}}{|\Delta I / \Delta t|}, \quad 1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ В}}{1 \text{ А/с}} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}.$$

Индуктивность – это скалярная величина, характеризующая способность контура препятствовать изменению силы тока в нём. Индуктивность контура равна возникающей ЭДС самоиндукции в контуре при скорости изменения силы тока в нём, равной 1 А/с.

Чем больше индуктивность контура, тем больше возникает ЭДС самоиндукции при одной и той же скорости изменения силы тока.

Пример 4. Индуктивность дроссельной катушки в школьном учебном оборудовании с $N = 3600$ витками равна $L = 1$ Гн. Что это значит?

Решение. Это значит, что полный собственный магнитный поток, создаваемый этой катушкой при силе тока 1 А, равен 1 Вб:

$$\Phi_c = L \cdot I, \quad \Phi_c = 1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А} = 1 \text{ Вб}.$$

Тогда средний поток, проходящий через один виток катушки:

$$\Phi_{c1} = \Phi_c / N \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

С другой стороны, это значит, что при скорости изменения силы тока в катушке $\Delta I / \Delta t = 1$ А/с, в ней возникает ЭДС самоиндукции, равная 1 В, которая препятствует изменению силы тока:

$$|\mathcal{E}_{ci}| = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad |\mathcal{E}_{ci}| = 1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А/с} = 1 \text{ В}.$$

Самоиндукцию можно наблюдать, собрав электрическую цепь из источника тока, катушки большой индуктивности L , ключа, реостата и двух одинаковых ламп накаливания (рис. 9).

Замкнём цепь и с помощью реостата добьемся, чтобы обе лампочки светились одинаково. Затем будем периодически замыкать и размыкать ключ K . При замыкании ключа лампочка L_2 , соединённая последовательно с реостатом, начнёт светиться практически сразу после замыкания ключа, а лампочка L_1 , соединённая последовательно с катушкой, начнёт светиться с запаздыванием. Если индуктивность катушки составляет несколько генри, например катушка со стальным сердечником, то запаздывание достигает нескольких секунд.

При размыкании ключа K лампочки будут медленно затухать. С точки зрения закона сохранения энергии, энергия магнитного поля, запасённая в катушке, при размыкании ключа K превращается в энергию света и тепло на лампочках и реостате. ⚡

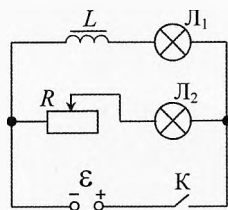


Рис. 9. Наблюдение самоиндукции

§ 23. Энергия магнитного поля

Включим неоновую лампу параллельно катушке в электрическую цепь постоянного тока (рис. 10). При замыкании ключа ток в катушке будет постепенно нарастать до значения $I_L = \mathcal{E}/R_L$, где R_L – активное сопротивление катушки.

Ток в неоновой лампе сопротивлением R_{NE} равен $I_{NE} = \mathcal{E}/R_{NE}$.

Поскольку сопротивление катушки во много раз меньше сопротивления неоновой лампы, то $I_L \gg I_{NE}$.

При размыкании ключа в катушке возникает большая ЭДС самоиндукции, препятствующая уменьшению силы тока в ней. Поэтому сразу после размыкания ключа ток в лампе будет равен току I_L в катушке. При этом будет наблюдаться вспышка лампы. Источником энергии, выделяющейся при этом в электрической цепи, является катушка индуктивности, в которой была запасена энергия магнитного поля.

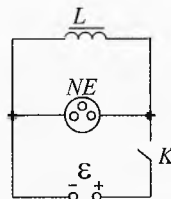


Рис. 10. Катушка запасает энергию

Если же мы включаем в сеть постоянного напряжения какой-либо потребитель электрической энергии, особенно электродвигатель или катушку большой индуктивности, то ток возрастает до рабочего значения не сразу, некоторое время нужно, чтобы «раскрутить электроны» до определённой

скорости. Время установления стационарного режима называется временем релаксации.

Чем больше индуктивность контура и чем больше возрастает сила тока, тем больше должна поработать сеть, чтобы создать энергию магнитного поля тока.

Вычислим энергию, которую запасает магнитное поле контура индуктивности L при увеличении силы тока от 0 до значения I .

Энергия магнитного поля катушки равна работе сторонних сил источника тока против ЭДС самоиндукции контура:

$$W_M = A_{\text{ст}} = -A_{\text{св}} \approx -\sum (\mathcal{E}_{\text{св}} \cdot \Delta q) = -\sum \left(-L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \cdot \Delta q \right) = L \sum \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \Delta I \right).$$

Поскольку сила тока – это скорость протекания заряда: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, то:

$$W_M = L \sum (I \cdot \Delta I).$$

Интегрируя (суммируя предельно точно), получим:

$$W_M = L \int_0^I I \, dI \Rightarrow \boxed{W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}}.$$

Эта формула очень напоминает формулу для кинетической энергии в механике $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Индуктивность контура L характеризует электрическую инертность, то есть способность контура препятствовать изменению тока в нём, подобно тому, как масса является мерой инертности тела. Сила тока характеризует интенсивность протекания заряда через сечение проводника аналогично скорости тела, которая показывает, как (быстро) изменяется положение тела в пространстве.

§ 24. Индукционные токи в массивных проводниках

В 1855 г. французский физик-экспериментатор Жан Бернар Леон Фуко обнаружил нагревание сплошных металлических тел индукционными токами. Поскольку сопротивление металлов очень маленькое, то при изменении магнитного поля в массивных проводниках возникает ЭДС индукции и могут течь вихри электрических токов, названных токами Фуко.

Фуко предложил способ уменьшения этих токов, где они не желательны. Например, сердечники трансформаторов и электродвигателей изготавливаются не сплошными, а в форме тонких пластин, между которыми имеется тонкий слой изоляции. Сердечники располагаются так, чтобы их поверхности были перпендикулярны вектору напряжённости вихревого электрического поля (параллельно вектору магнитной индукции). При этом со-

противление индукционным токам будет максимальным, а значит, потери электроэнергии на нагревание сердечников минимальны.

Токи Фуко нашли широкое применение в индукционных печах, в которых, например, металлолом (или изделия) помещают в электромагнитное поле низкой (обычно 50 Гц), средней (до 10 кГц) или высокой (свыше 10 кГц) частоты. В результате чего в металле индуцируется нагревающий его электрический ток.

Различают канальные индукционные печи, применяемые главным образом в цветной металлургии, и тигельные, используемые обычно для плавки чугуна и стали. Ёмкость печей составляет от нескольких килограммов до сотен тонн. Достоинства индукционных печей: получение очень чистого продукта, высокая скорость нагрева, легкость регулирования мощности нагрева, возможность ведения плавки в защитной среде или в вакууме (для этой цели служат специальные вакуумные печи).



Жан Бернар Леон Фуко (1819–1868)

С 1987 г. индукционные токи используются на кухнях для приготовления пищи на индукционных варочных плитах. Индукционные элементы позволяют очень плавно регулировать мощность. Правда, на такой плите нельзя использовать посуду из цветных металлов и стекла. Изготовители обычно комплектуют такие плиты специальной посудой. Можно пользоваться чугунной и стальной посудой, покрытой темной эмалью. Диаметр кастрюли должен соответствовать зоне нагрева.

На индукционной конфорке вода закипает значительно быстрее, чем на любой другой, в том числе газовой. Индукционная конфорка по скорости готовки пищи приближается к микроволновым печам. Несмотря на высокую мощность, потребление электроэнергии индукционной конфоркой в 2 раза меньше, чем другими электрическими конфорками. Потери при индукционном нагреве составляют около 10 %, у чугунной конфорки («блина») – около 45 %, а у газовой горелки – до 50 %.

Индукционная конфорка устроена таким образом, что нагревает только предметы из магнитного металла диаметром более 12 см. Поэтому случайно упавшая на плиту ложка не будет нагреваться.

Индукционные токи используются в успокоителях стрелок измерительных приборов. Для этого ниже оси стрелки прибора прикрепляют алюминиевую пластинку, движущуюся в зазоре постоянного магнита. Когда пластинка приближается к магниту в ней наводится индукционный ток, который, согласно правилу Ленца, создаёт магнитное поле, направленное против поля магнита, в результате стрелка тормозится. При выходе пластинки из зазора магнита ток в пластинке меняет направление согласно правилу Ленца. Пластинка начинает притягиваться к магниту, и движение стрелки тормозится.

§ 25. Электродинамический микрофон и громкоговоритель

Первыми шагами к созданию современных способов записи и воспроизведения звука было изобретение микрофона и громкоговорителя. Микрофоном называется прибор для преобразования звуковых колебаний в электрические. Изменение давления, происходящее при распространении звуковых волн в воздухе, можно регистрировать с помощью микрофонов различных конструкций.

В электродинамическом микрофоне (рис. 11) имеется тонкая гибкая мембрана 1, к которой приклеена легкая проволочная катушка 2. Катушка расположена в кольцевом зазоре между полюсами постоянного магнита 3. Колебания давления воздуха, возникающие при прохождении звуковой волны, вызывают колебания мембраны микрофона и соединенной с ней проволочной катушки. Колебания катушки в магнитном поле постоянного магнита приводят к возникновению в ней переменной ЭДС индукции. Таким образом в электродинамическом микрофоне происходит преобразование звуковых волн в электрические.

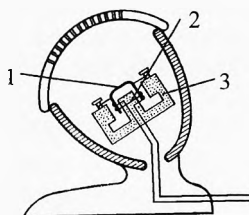


Рис. 11. Микрофон

Для обратного преобразования электрических колебаний в звуковые применяется громкоговоритель (рис. 12). Основными частями электродинамического громкоговорителя (динамика) являются кольцевой постоянный магнит 1, проволочная катушка 2 и диффузор 3, к которому прикреплена катушка. При пропускании через катушку переменного тока звуковой частоты на неё действует со стороны магнитного поля переменная сила Ампера. Под действием этой силы катушка вместе с диффузором совершает колебания, что вызывает изменения давления воздуха, то есть возбуждает звуковые волны.

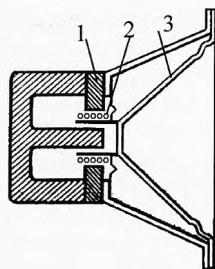


Рис. 12. Динамик

§ 26. Магнитная запись информации

Магнитная лента. Запись и воспроизведение звука. Одним из способов сохранения и последующего воспроизведения звуков — речи и музыки — является магнитная запись. Она основана на свойстве ферромагнетиков сохранять остаточное намагничивание после снятия внешнего поля.

Запись звука в магнитофонах производится на тонкую пластмассовую ленту, покрытую слоем порошка ферромагнитного материала (рис. 13). Колебания воздуха в звуковой волне преобразуются с помощью микрофона М в колебания силы тока в электрической цепи. После усиления этих колебаний с помощью усилителя УЗ переменный ток звуковой частоты поступает в обмотку кольцевого электро-

магнита головки записи ГЗ. При протягивании магнитной ленты около зазора между полюсами кольцевого электромагнита различные участки ленты намагничиваются в соответствии с изменениями силы тока в обмотке. Полоса на ленте, намагниченная в процессе записи, называется дорожкой записи.

Для воспроизведения записи магнитная лента протягивается перед зазором кольцевого электромагнита головки воспроизведения ГВ с той же скоростью, с которой она протягивалась при записи.

При движении намагниченной ленты происходят изменения магнитного поля в зазоре головки воспроизведения и в её обмотке возникает переменная ЭДС индукции.

Переменное напряжение с выхода обмотки головки воспроизведения усиливается с помощью усилителя воспроизведения УВ. Усиленное напряжение звуковой частоты подводится к катушке громкоговорителя Гр. Переменный ток в катушке громкоговорителя вызывает колебания катушки в магнитном поле постоянного магнита. Прикреплённый к катушке диффузор воспроизводит звук.

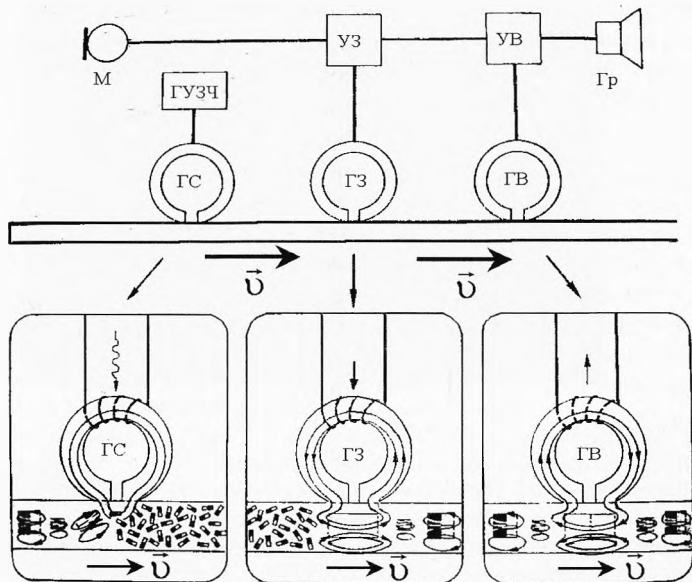


Рис. 13. Чтение и запись на магнитную ленту

Для стирания ненужной записи с ленты служит головка стирания ГС, к обмотке которой подводится переменное напряжение от генератора ультразвуковой частоты ГЗЧ.

В бытовых магнитофонах невысокого класса при записи и воспроизведении обычно используется одна и та же универсальная головка и один усилитель.

Видеозапись. На магнитную ленту может быть записан не только сигнал звуковой частоты, но и видеосигнал.

На единицу длины пленки видеокассеты записывается во много раз больше информации, чем в аудио-магнитофоне. Поэтому видеолента значительно шире аудиоленты, и запись в ней происходит не вдоль, а поперек ленты.

Ленточные накопители. В настоящее время запись на ленточные накопители используется для резервного копирования больших объём информации: баз данных, файловых архивов и т.п. Ёмкость одной кассеты с ленточным накопителем достигает 4 терабайт. Также используются ленточные библиотеки (рис. 14), например, в 2010 году в продаже были доступны модели ленточных библиотек с ёмкостью до 70 петабайт при использовании 70 000 кассет. Минусом ленточных накопителей является низкая скорость доступа из-за необходимости перемотки кассеты. Основным плюсом является низкая стоимость владения единицы информации. Например, согласно расчётам 2008 года издания *Clipper Notes*, для поддержания в постоянном доступе архива размером 6,6 петабайт в течение 5 лет стоимость дисковой системы (RAID-массивов, контроллеров, разветвителей, дисков, питания, охлаждения и пр.) составит 14,7 млн долларов (в том числе стоимость электроэнергии – 550 тыс. долларов), в то время как стоимость ленточной библиотеки менее 700 тыс. долларов (в том числе стоимость электроэнергии всего 304 доллара).



Рис. 14. Большая ленточная библиотека

Дискета (флоппи-диск) – портативный магнитный носитель информации, используемый для многократной записи и хранения данных сравнительно небольшого объёма (рис. 15). Этот вид носителя был особенно распространен в 1970-х – 1990-х годах. В настоящее время используется редко (в качестве хранения ключей шифрования в устаревших, но используемых системах).

Дискета имеет много общего с кассетной лентой. Они изготовлены из пленки, покрытой ферромагнитным материалом (железной окисью), который намагничивается под воздействием постоянного магнитного поля. Их можно многократно очищать от данных и использовать заново. Однако дискета создана в виде диска, а не длинной тонкой ленты.

За двадцать лет развития вместимость дискет увеличилась более чем в 35 раз (с 80 до 2880 кБт). Следует отметить, что фактическая ёмкость дискет зависела от способа их форматирования. Поскольку, кроме самых ранних моделей, практически все флоппи-дискеты не содержали жёстко сформированных дорожек, дорога для

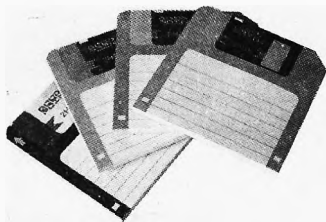


Рис. 15. Дискеты

экспериментов в области более эффективного использования дискеты была открыта для системных программистов. Результатом стало появление множества не совместимых между собою форматов дискет.

Запись и считывание дискет осуществляется с помощью специального устройства – дисковод (англ. *floppy disk drive, FDD*).

В процессе форматирования (разметки диска) магнитный слой на дискете подготавливается для запоминания информации и логически разбивается на дорожки и сектора (рис. 16).

Информация на дискете запоминается путём изменения её намагниченности. Записывающая магнитная головка ориентирует магнитные частицы дискеты в двух различных направлениях, соответствующим логическим «1» и «0».

Двигатель дисковода обеспечивает постоянную скорость вращения вставленной дискеты. Скорость вращения двигателя 5–6 об/с.

С помощью шагового двигателя головки перебегают по радиусу от края диска к его центру дискретными интервалами к месту с требуемой информацией.

Головки чтения/записи расположены с обеих сторон диска. Они вместе двигаются к требуемым данным. Одна головка используется для чтения и записи, в то время как вторая, более широкая, используется, чтобы стирать прежде записанную информацию. В отличие от головок жёсткого диска головки записи/чтения у дисковода не «летят» над поверхностью дискеты, а касаются её.

Контроллер дисковода, представляющий электронную плату с микросхемами, управляет работой всех узлов флоппи-дисковода и содержит почти всю электронику. Он включает и выключает двигатель вращения диска, задерживает его выключение на несколько секунд для ускорения доступа к данным в случае повторного обращения. Контроллер по индексной метке находит нужную дорожку и устанавливает на неё головку чтения/записи.

Винчестер. В 1956 году компания *IBM* положила конец эре перфокарт, представив первый в истории накопитель на магнитных жёстких дисках *IBM 305 Random Access Method of Accounting and Control (RAMAC)*. Накопитель помещался в корпусе размером с два современных холодильника и весил несколько тонн. Объём памяти составлял 5 МБт. Для сравнения – средний объём памяти современного жёсткого диска составляет 500 ГБт, то есть в сто тысяч раз больше.

Накопитель на жёстких магнитных дисках, жёсткий диск, или винчестер, (англ. *Hard Disk Drive, HDD*), – энергонезависимое, перезаписываемое компьютерное запоминающее устройство. Является основным накопителем данных практически во всех современных компьютерах.

Название «винчестер» жёсткий диск получил благодаря фирме *IBM*, которая в 1973 г. выпустила жёсткий диск модели 3340, впервые объединивший в одном неразъёмном корпусе диски и считывающие головки. При его разработке инженеры использовали краткое внутреннее название «30-30», что означало два модуля (в максимальной компоновке) по 30 Мб каждый. Кеннет Хотон, руководитель проекта, по созвучию с обозначением популярного охотничьего ружья «*Winchester 30-30*» предложил назвать этот диск «винчестером».

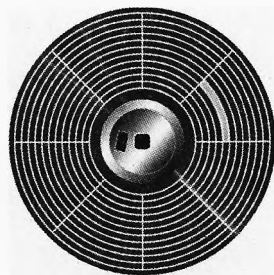


Рис. 16. Разметка диска

В отличие от «гибкого» диска (дискеты), информация в винчестерах записывается на жёсткие (алюминиевые или стеклянные) пластины, покрытые слоем ферромагнитного материала. Считывающие головки в рабочем режиме не касаются поверхности пластин благодаря прослойке воздуха, образуемой при быстром вращении дисков.

Ёмкость современных устройств достигает 1 ТБт и более. Производители ежегодно увеличивают их ёмкость. Так в 2014 году *Western Digital* выпустила первый в мире диск на 10 ТБ с гелием вместо воздуха. Этот диск имеет 7 пластин.

При необходимости получить больший размер используются корзины дисковых накопителей (дисковые массивы), в которых применяется частичное дублирование информации, что позволяет в случае выхода из строя одного жёсткого диска произвести его горячую замену без потери информации и без выключения сервера.

Физический размер почти всех современных винчестеров для персональных компьютеров и серверов равен либо 3,5, либо 2,5 дюймам. Также получили распространение форматы 1,8 дюйма и даже 1,3, 1 и 0,85 дюйма.

В 1999 г. *IBM* представила первый в мире однодюймовый жёсткий диск – знаменитый *Microdrive* (рис. 17).

Время доступа и скорость передачи данных в значительной степени зависят от частоты вращения дисков.

В настоящее время выпускаются винчестеры со следующими стандартными скоростями вращения: 4200 (ноутбуки), 5400 и 7200 (персональные компьютеры), 10 000 и 15 000 об/мин (серверы и высокопроизводительные рабочие станции). Время случайного доступа к данным составляет от 5 до 15 мс.

Одной из распространенных технологий записи информации на винчестер является метод параллельной записи. Информация записывается с помощью маленькой головки, которая, проходя над поверхностью вращающегося диска, намагничивает миллиарды горизонтальных дискретных областей – доменов. Каждый из этих доменов в зависимости от намагниченности является логическим «0» или «1» (бит информации). Увеличение ёмкости дисков приводит к увеличению плотности записи. Домены становятся настолько малы, что остро встает вопрос об их стабильности. Дальнейшее развитие этой технологии под вопросом, многие считают этот метод исчерпавшим себя. Максимально достижимая при использовании данного метода плотность записи составляет около 150 Гбит/дюйм² (23 Гбит/см²).

В 2010 году этот метод был практически вытеснен методом перпендикулярной записи, при котором биты информации сохраняются в вертикальных доменах. Это позволяет использовать более сильные магнитные поля и снизить площадь материала, необходимую для записи 1 бита. Плотность записи при этом методе резко выросла более, чем на 30% уже на первых образцах (на 2009 год – 400 Гбит/дюйм² или 62 Гбит/см²). А теоретический предел для этого метода составляет 1 Тбит на квадратный дюйм.

Жёсткие диски с перпендикулярной записью стали доступны на рынке с 2006 года. Благодаря перпендикулярной записи винчестеры продолжают бить рекорды ёмкости, вмещая уже по 8 и даже 10 Терабайт.

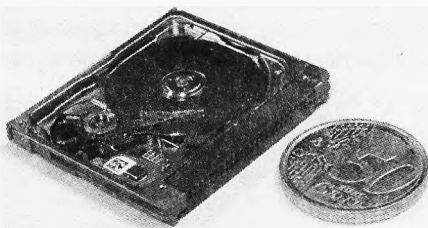


Рис. 17. Микродрайв на 1 дюйм
(фото: Dennis van Zuijlekom / Wikimedia Commons, CC BY-SA 2.0)

На данный момент активно разрабатывается метод тепловой магнитной записи. В этом методе используется точечный подогрев диска, который позволяет головке намагничивать очень мелкие области его поверхности. После того как диск охлаждается, намагниченность «закрепляется».

Жёсткий диск – устройство чрезвычайно хрупкое. Несмотря на старания производителей, они всё ещё подвержены повреждениям в результате ударов и встрясок, последствия которых могут быть весьма трагичными.

Самым распространенным явлением при ударе является шлепок головок. Механизм возникновения следующий: под воздействием перпендикулярной к поверхности дисков составляющей приобретенного ускорения происходит отрыв головок от поверхности.

Последующий возврат, обеспечиваемый упругой конструкцией держателей головки, очень резкий, и головка при возврате ударяет по пластине, выбивая из поверхности микрочастицы (рис. 18).

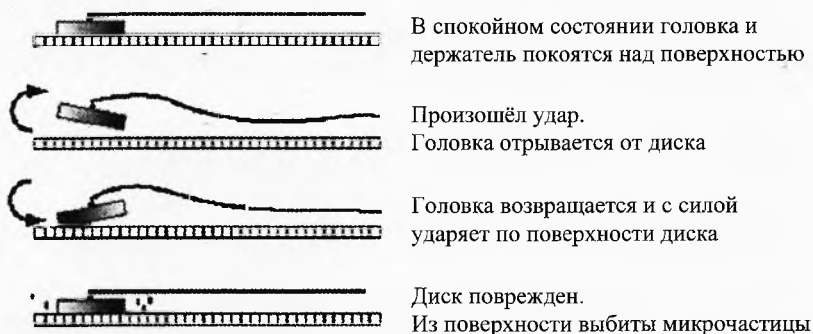


Рис. 18. Удар головки о поверхность диска

В результате такого возврата может повредиться и сама головка. В зависимости от того, где находилась головка в момент удара, последствия могут быть разными. Поверхность с выбитыми частицами просто не используется, если головка осталась цела, а частицы остались локализованными в пределах нерабочей области (их удержанию будут способствовать силы магнитного притяжения). Однако на практике так бывает не часто. Частицы будут распространяться по поверхности, выбивая всё новые и новые, процесс пойдёт лавинообразно. Это приведет к возникновению плохих блоков (*bad block*) в рабочей области (диск «посыпется»). Кроме того, магниторезистивные головки очень чувствительны к температурному режиму, а взаимодействие с такими частицами (оно непременно будет, так как головки парят над диском на крайне малой высоте) будет вызывать нагрев головок, результатом которого станет искажение сигнала и ошибки чтения/записи.

Запись и хранение информации на магнитном носителе производится аналогично записи на ленту или дискету: путём преобразования электрических сигналов в соответствующие им изменения магнитного поля, воздействия его на магнитный носитель и сохранения следов этих воздействий в магнитном материале длительное время, благодаря явлению остаточного магнетизма. Воспроизведение электрических сигналов производится путём обратного преобразования (рис. 19).

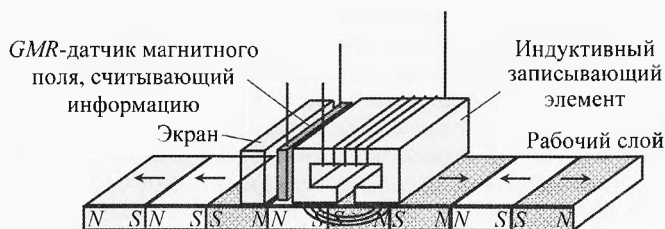


Рис. 19. Запись и считывание данных на жёстком диске

Для магнитной записи используются носители в виде магнитных пластин (дисков). Пластины изготавливаются процессом напыления множественных металлических пленок и защитного слоя покрытия на очень плоскую, бездефектную стеклянную или алюминиевую подложку. Информация размещается в виде концентрических окружностей, называемых дорожками. Чем меньше ширина дорожек и чем ближе они расположены, тем больше информации может быть записано на диск. Уменьшение ширины дорожек возможно только при повышении точности и стабильности позиционирования головок.

Компенсирование ошибок позиционирования, а также удержание магнитных головок над выбранной дорожкой в современных жёстких дисках осуществляется с помощью вспомогательной разметки на поверхности диска (сервосистемы). Сервосистема в том виде, в котором она представлена сейчас, появилась не сразу. В ранних моделях накопителей её не было и позиционирование головок осуществлялось с помощью шагового двигателя.

Шаговый двигатель с помощью направляющей рейки преобразовывал управляющий сигнал в линейное перемещение позиционера с фиксацией головок в заданном положении, обратная связь в данной системе отсутствовала. Шаг перемещения ротора позиционера соответствовал шагу дорожек, т.е. двигатель за один шаг перемещал блок головок записи/чтения на одну дорожку (рис. 20).

Основной недостаток такого подхода заключался в том, что позиции ротора шагового двигателя были фиксированными. Блок головок перемещался на то место, где должна быть дорожка, а не где она есть на самом деле. При нагреве диски расширялись и дорожки смещались относительно своего точного положения на диске на некоторую величину, соответствующую коэффициенту теплового расширения. Фиксированный шаг перемещения позиционера не позволял компенсировать это явление, а отсутствие обратной связи не позволяло контроллеру под-

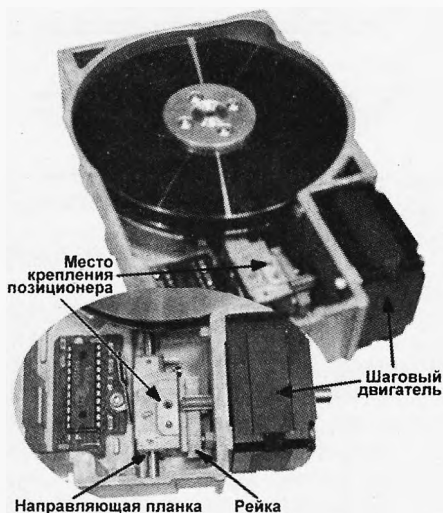


Рис. 20. Позиционирование головок шаговым двигателем

страивать блок головок записи/чтения точно по центру дорожки. Минусом данной системы было также большое время доступа к требуемой дорожке, ведь при считывании данных с внутренних и внешних дорожек пластины блок головок должен с помощью прикрепленной к нему рейки «отщёлкать» максимум шагов шестерни шагового двигателя.

Увеличивающаяся плотность записи требовала увеличения количества дорожек на один сантиметр радиуса рабочей поверхности пластины жёсткого диска, как следствие – уменьшения расстояния между двумя соседними дорожками и сокращения ширины самой дорожки. Поэтому систему позиционирования блока головок на основе шагового двигателя заменила более прогрессивная система позиционирования с соленоидным двигателем (называемым также звуковой катушкой) (рис. 21).

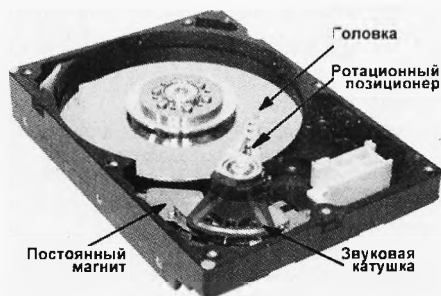


Рис. 21 Позиционирование головки соленоидным двигателем

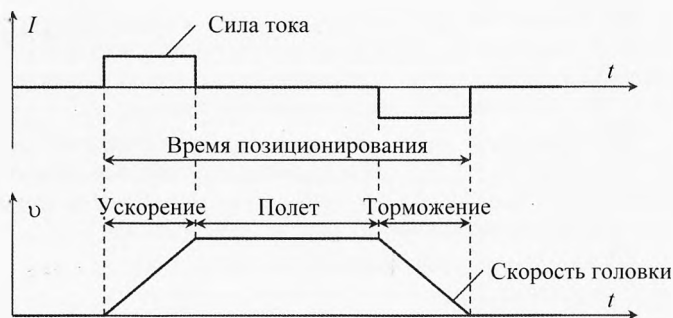


Рис. 22. Позиционирование головки управляющим током

В таком приводе блок головок записи/чтения связан с катушкой индуктивности, помещенной в магнитное поле постоянного магнита. Головки жёстко закреплены на поворотной рамке позиционера вместе со звуковой катушкой, через которую протекает ток. Изменение тока в звуковой катушке приводит к её перемещению относительно жёстко закрепленного магнита, а значит, и к перемещению блока головок. Управляя направлением и значением силы тока через катушку (рис. 22), можно быстро перевести блок головок в любое положение над пластиной жёсткого диска. Замкнутая система обратной связи, отслеживающая положение головки, обеспечивает её точное позиционирование и нахождение в нужной точке. Перемещение блока головок на требуемую позицию оптимизировано по времени. Если отклонение от нужного положения большое, то подаётся большой ток, вызывающий большое ускорение и быстрый полёт блока головок записи/чтения. По мере приближения к нужной точке ток уменьшается, а для компенсации инерции в конце полёта ток меняет направление. При этом происходит торможение.

Упражнения

1 Три одинаковых полосовых магнита падают с одинаковой высоты. При этом один падает свободно, второй проходит сквозь незамкнутый соленоид, третий — сквозь замкнутый. Сравнить время их падения.

2 Квадратный проводящий контур, двигаясь с постоянной скоростью вдоль плоскости рамки, попадает в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости движения (рис. 23). На каком из графиков (рис. 24) правильно показана зависимость ЭДС индукции в рамке от времени?

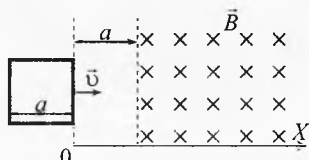


Рис. 23. Металлическая рамка влетает в магнитное поле

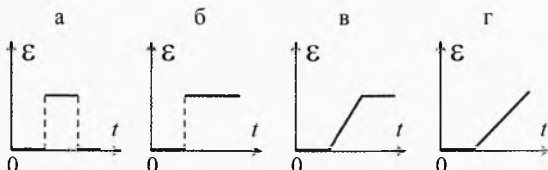


Рис. 24. Варианты зависимости ЭДС от времени

3 Проводящий контур площадью $S = 0,1 \text{ м}^2$ сопротивлением $R = 2,5 \text{ Ом}$ расположен горизонтально в однородном магнитном поле. Проекция магнитной индукции на вертикаль медленно и равномерно убывает от начального значения B_{1z} до $B_{2z} = -2 \text{ Тл}$. За это время по контуру протекает заряд $\Delta q = 0,2 \text{ Кл}$. Определить B_{1z} .

4 Напряжение на катушке, по которой протекает постоянный ток силой $I_0 = 0,1 \text{ А}$, равно $U_0 = 5 \text{ В}$. С момента времени t_0 ток в катушке возрастает с постоянной скоростью $\Delta I / \Delta t = 0,1 \text{ А/с}$. Определить напряжение на катушке через $\tau = 5 \text{ с}$ после момента t_0 . Индуктивность катушки равна $L = 2 \text{ Гн}$.

5 Квадратный проводящий контур $abcd$ со стороной l , двигаясь со скоростью \vec{v} , попадает в область однородного магнитного поля индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости движения (рис. 25). Определить работу силы Ампера, действующей на рамку, за время, когда рамка полностью войдет в область, занятую полем, и затем выйдет из неё. В начальный момент рамка находилась вне поля. Скорость рамки постоянна всё время движения. Сопротивление рамки равно R .

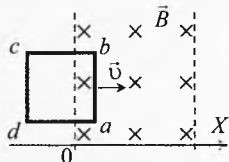


Рис. 25. Определить работу силы Ампера

6 На стоящий северным полюсом вверх полосовой магнит падает проводящее кольцо. Затем магнит переворачивают южным полюсом вверх и повторяют опыт. В каком из случаев возникает ток в кольце?

7 Горизонтально расположенный проводник длиной $l = 1 \text{ м}$ без начальной скорости начинает движение с ускорением $a = 8 \text{ м/с}^2$ в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,5 \text{ Тл}$ направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (рис. 26). На какое расстояние d переместится проводник к моменту, когда ЭДС индукции на концах проводника будет равна $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$?

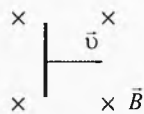


Рис. 26. ЭДС на концах проводника

8 Кусок провода длиной $l = 2$ м складывается вдвое, и его концы замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат так, что плоскость квадрата перпендикулярна горизонтальной составляющей магнитного поля Земли $B_{\text{гор}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Какое количество электричества пройдет через контур, если его сопротивление $R = 1$ Ом?

9 Проводник длиной активной части $l = 1$ м и сопротивлением $R = 2$ Ом находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,1$ Тл (рис. 27). Проводник подключён к источнику, ЭДС которого равна $\mathcal{E} = 1$ В. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Какова сила тока в проводнике, если: 1) проводник покоится; 2) движется вправо со скоростью $v = 4$ м/с; 3) влево со скоростью $v = 4$ м/с?

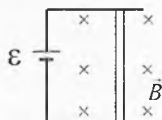


Рис. 27. Сила тока в проводнике

10 Рамка из проводника сопротивлением $R = 0,01$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,05$ Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S = 100$ см². Найти, какое количество электричества протечёт через рамку за время поворота её на угол $\Delta\alpha = 30^\circ$ в трёх случаях: 1) $0^\circ \dots 30^\circ$, 2) $30^\circ \dots 60^\circ$, 3) $60^\circ \dots 90^\circ$ (α – угол между вектором магнитной индукции и нормалью к рамке).

11 Проводник длиной $l = 0,3$ м и сопротивлением $r = 1$ Ом движется по проводящим направляющим со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно линиям поля, магнитная индукция которого равна $B = 0,4$ Тл (рис. 28). Направляющие замкнуты резисторами $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Определить силу тока в движущемся проводнике и резисторах R_1 и R_2 . Какая механическая мощность внешних сил необходима для движения проводника? Трением пренебречь.

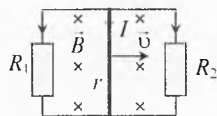


Рис. 28. Сила тока в движущемся проводнике

12 По двум параллельным проводящим стержням, наклонённым под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, соскальзывает без трения горизонтальная проводящая перемычка массой $m = 0,1$ кг и длиной $l = 1$ м. В верхней части стержни замкнуты сопротивлением $R = 2$ Ом. Сопротивлением остальной части пренебречь. Вся система находится в вертикальном, направленном вверх, однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Определить силу тока и скорость установившегося движения.

13 В цепь включены последовательно батарея $\mathcal{E} = 1,2$ В, реостат сопротивлением $R_0 = 1$ Ом и катушка индуктивности $L = 1$ Гн. В цепи протекал постоянный ток I_0 . С некоторого момента сопротивление меняют так, чтобы ток уменьшался с постоянной скоростью $\Delta I/\Delta t = -0,2$ А/с. Каково сопротивление реостата спустя $t = 2$ с после начала изменения тока? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

14 Определить значение ЭДС самоиндукции, возникающей в цепи индуктивностью $L = 25$ мГн при изменении тока в ней по закону $i = (0,3 + 0,4t)$ (А).

15 В вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} , вращается в горизонтальной плоскости стержень

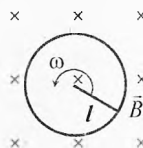


Рис. 29. ЭДС во вращающемся проводнике

жень длиной l с угловой скоростью ω . Ось вращения проходит через конец стержня (рис. 29). Определить возникшую ЭДС индукции.

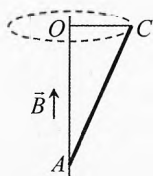


Рис. 30. Разность потенциалов в стержне

16 (МФТИ-2002). Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплён на вертикальном диэлектрическом стержне AO (рис. 30). Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $R = 1$ м. Стержень AC вращается вокруг стержня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня AC равна $\omega = 60$ рад/с. Определить разность потенциалов между точками A и C .

17 (МФТИ-2001). На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая неподвижная проводящая квадратная рамка со стороной a . На рамке симметрично лежит стержень параллельно боковым сторонам рамки на расстоянии $b = a/4$ от одной из сторон. Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ . В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. Какую скорость приобретёт стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0 ? Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь. Трение не учитывать. Масса стержня m .

18 (МФТИ-2006). По двум горизонтальным проводящим рейкам, расстояние между которыми $l = 1$ м, может скользить без трения перемычка, масса которой $m = 50$ г, а омическое сопротивление $r = 0,5$ Ом (рис. 31). Слева и справа концы реек соединены через резисторы сопротивлением $R = 1$ Ом каждый. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0,1$ Тл. Подвижной перемычке сообщают начальную скорость $v_0 = 50$ см/с вдоль реек. Найти зависимость тока через перемычку от её скорости. На какое расстояние сместится перемычка? Сопротивлением реек пренебречь. Перемычка расположена перпендикулярно рейкам.

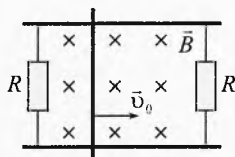


Рис. 31. Торможение перемычки в магнитном поле

19 (МФТИ-2004). В схеме, приведенной на рис. 32, при разомкнутом ключе K конденсатор ёмкостью $C = 20$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 8$ В. Индуктивность катушки $L = 0,2$ Гн, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 3$ В, диод D – идеальный. Определить максимальный ток в цепи после замыкания ключа K . Какое напряжение установится на конденсаторе после замыкания ключа?

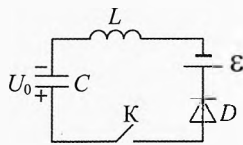


Рис. 32. Максимальный ток и напряжение на конденсаторе

20 Индукция магнитного поля внутри цилиндра радиуса $r_0 = 8$ см возрастает со временем по закону $B = \alpha t^2$ (коэффициент $\alpha = 10^{-4}$ Тл/с²). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Чему равна напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии $r = 0,1$ м от оси цилиндра в момент времени $t = 1$ с?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $t_1 = t_2 < t_3$.

2 Правильная зависимость на рисунке а.

3 $|\mathcal{E}_i| = \frac{S \cdot |B_{z2} - B_{z1}|}{\Delta t}$, $|\mathcal{E}_i| = I \cdot R = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot R$; $\Rightarrow B_{z1} = B_{z2} + \frac{R \Delta q}{S} = 3 \text{ Тл}$.

4 $R = \frac{U_0}{I_0} = 50 \text{ Ом}$, $I = I_0 + \frac{\Delta I}{\Delta t} \cdot \tau = 0,6 \text{ А}$. Напряжение сети (U) затрачивается на выделение тепла ($I \cdot R$) и на увеличение энергии магнитного поля катушки против ЭДС самоиндукции ($L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$). Значит, $U = I \cdot R + L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 30,2 \text{ В}$.

5 ЭДС индукции возникает только при изменении магнитного потока. Сначала магнитный поток равномерно увеличивается, и ЭДС индукции равна $\mathcal{E}_i = B l v$. Значит, сила тока при входе рамки в магнитное поле будет постоянна и

равна $I_1 = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B l v}{R}$. Со стороны поля на сторону ab будет действовать сила Ампера $F_{A1} = B \cdot I_1 \cdot l = \frac{B^2 l^2 v}{R}$, направленная против скорости движения. Работа этой си-

лы отрицательна и равна $A_{F_{A1}} = -F_{A1} \cdot l = -\frac{B^2 l^3 v}{R}$. Точно такая же отрицательная работа будет совершена силой Ампера при выходе рамки из магнитного поля.

Значит суммарная работа силы Ампера: $A_{F_A} = 2A_{F_{A1}} = -\frac{B^2 l^3 v}{R}$.

6 Индукционный ток возникает в обоих случаях.

7 $\mathcal{E} = B l v$, $v = a \cdot t$, $d = \frac{a t^2}{2}$; $\Rightarrow d = \frac{\mathcal{E}^2}{2 a B^2 l^2} = 1 \text{ м}$.

8 $\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$, $\mathcal{E} = I \cdot R = \frac{\Delta q}{\Delta t} R$; $\Rightarrow \Delta q = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{B_{\text{гор}} \cdot S}{R} = \frac{B_{\text{гор}} \cdot (l/4)^2}{R} = 5 \text{ мкКл}$.

9 $I_1 = \mathcal{E}/R = 0,5 \text{ А}$; $I_2 = (\mathcal{E} - B l v)/R = 0,3 \text{ А}$; $I_3 = (\mathcal{E} + B l v)/R = 0,7 \text{ А}$.

10 $q = B S |\cos \alpha_{\text{кон}} - \cos \alpha_{\text{нач}}|/R$; $q_1 = 6,7 \text{ мкКл}$; $q_2 = 18 \text{ мкКл}$; $q_3 = 25 \text{ мкКл}$.

11 $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R_{\text{общ}}} = \frac{B l v}{r + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} = 0,2 \text{ А}$;

$I = I_1 + I_2$, $I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$, $\Rightarrow I_1 = \frac{I \cdot R_2}{(R_1 + R_2)} = 0,133 \text{ А}$; $I_2 = \frac{I \cdot R_1}{(R_1 + R_2)} = 0,067 \text{ А}$.

$N = F_A \cdot v = (I \cdot B \cdot l) \cdot v = 0,12 \text{ Вт}$ или $N = I \cdot \mathcal{E}_i = I \cdot (B \cdot l \cdot v) = 0,12 \text{ Вт}$.

12 $\text{tg} \alpha = \frac{F_A}{F_T}$, $F_A = I \cdot B l$, $F_T = mg$; $\Rightarrow I = \frac{mg}{B l} \cdot \text{tg} \alpha \approx 0,57 \text{ А}$;

$I \cdot R = \mathcal{E}_i$; $\mathcal{E}_i = B l v \cdot \cos \alpha \Rightarrow v = \frac{I \cdot R}{B l \cos \alpha} = \frac{R m g \cdot \text{tg} \alpha}{B^2 l^2 \cos \alpha} = 1,3 \text{ м/с}$.

13 $\mathcal{E} = I_0 R_0$; $I = I_0 + r \Delta I / \Delta t$; $\mathcal{E} - L \Delta I / \Delta t = I \cdot R$; $\Rightarrow R = \frac{\mathcal{E} - L \Delta I / \Delta t}{\mathcal{E} / R_0 + r \Delta I / \Delta t} = 1,75 \text{ Ом}$.

$$14 \quad \mathcal{E}_{ci} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(L \cdot i)}{\Delta t} = -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \cdot i' = -L \cdot 0,4 = -10 \text{ мВ.}$$

$$15 \quad \mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot S_{\perp}}{T} = \frac{B \cdot \pi l^2}{T} = \frac{B \cdot \omega l^2}{2}.$$

16 $|U_{AC}| = \frac{B \cdot \Delta S_{\perp}}{\Delta t}$, $\Delta S_{\perp} = \frac{1}{2} (R \cdot \Delta\varphi) \cdot R$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота стержня относительно оси AO за время Δt . Значит,

$$|U_{AC}| = \frac{B \cdot \Delta\varphi \cdot R^2}{2 \cdot \Delta t} = \frac{B \omega R^2}{2} = 0,3 \text{ В.}$$

17 По I правилу Кирхгофа (рис. 33):

$$I_2 = I + I_1.$$

Для контура $FDNMF$ по II правилу Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_{FDNMF} = R_{DNMF} I_2 + R_{FD} I \quad \text{или} \quad \frac{3a^2}{4} \frac{dB}{dt} = \frac{5\rho a}{2} I_2 + \rho a I. \quad (2) \quad \text{Импульс силы Ампера}$$

Аналогично, для контура $ACDEFA$ по II правилу Кирхгофа (знак «-» поставлен из-за того, что ток в DF течёт против направления обхода контура):

$$\frac{a^2}{4} \frac{dB}{dt} = \frac{3\rho a}{2} I_1 - \rho a I. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), получим: $I = \frac{2a}{31\rho} \frac{dB}{dt}$.

Сила Ампера, действующая на стержень FD : $F_A = I \cdot B \cdot a = \frac{2a^2}{31\rho} \frac{B \cdot dB}{dt}$.

Импульс, который приобретет стержень, равен импульсу силы Ампера:

$$m v = \int_0^{t_0} F_A dt = \frac{2a^2}{31\rho} \int_0^{B_0} B \cdot dB = \frac{2a^2}{31\rho} \cdot \frac{B_0^2}{2} \Rightarrow v = \frac{a^2 B_0^2}{31\rho m}.$$

18 Эквивалентная схема представляет собой источник с ЭДС $\mathcal{E} = B \cdot l \cdot v$ и внутренним сопротивлением r , к которому подключены параллельно два резистора сопротивлением R (рис. 34). Общее сопротивление равно $R_0 = r + R/2$.

Тогда зависимость силы тока через переключку от её скорости:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{B \cdot l \cdot v}{R_0}.$$

Согласно закону сохранения энергии кинетическая энергия переключки ($\delta E_k < 0$) переходит в электрическую энергию ($\delta Q > 0$), которая потом переходит в тепло:

$$E_k + Q = 0, \Rightarrow E'_k + Q' = 0, \Rightarrow \left(\frac{mv^2}{2} \right)' + I^2 R_0 = 0, \Rightarrow m v \frac{dv}{dt} + I^2 R_0 = 0.$$

Подставляя выражение для силы тока, получим:

$$m v \frac{dv}{dt} = -\frac{(B \cdot l \cdot v)^2}{R_0}, \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{m R_0} dt.$$

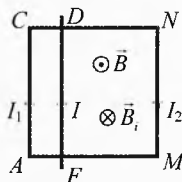


Рис. 33. Импульс силы Ампера

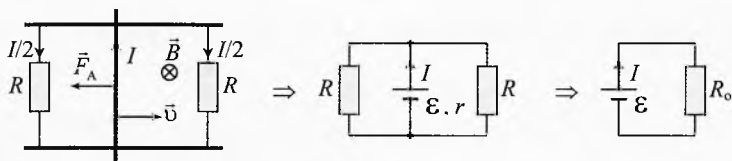


Рис. 34. Эквивалентные схемы

Проинтегрируем (просуммируем) последнее выражение от начала движения до произвольного момента времени:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR_0} \int_0^t dt, \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2}{mR_0} t, \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR_0} t}.$$

Тогда смещение перемычки за всё время движения:

$$x = \int_0^\infty v dt = v_0 \int_0^\infty e^{-\frac{B^2 l^2}{mR_0} t} dt = -\frac{mR_0 v_0}{B^2 l^2} e^{-\frac{B^2 l^2}{mR_0} t} \Big|_0^\infty = \frac{mR_0 v_0}{B^2 l^2}.$$

Подставляя выражение для общего сопротивления, окончательно получим:

$$x = \frac{m(r + R/2)v_0}{B^2 l^2} = 2,5 \text{ м.}$$

Итак, сила тока через перемычку прямо пропорциональна её скорости (с течением времени они убывают по экспоненциальному закону). Перемычка пройдет путь 2,5 м.

19 Сила тока будет максимальной, когда напряжение на катушке будет равно нулю, значит напряжение на конденсаторе в этот момент будет равно \mathcal{E} . По закону сохранения энергии для перехода в состояние с максимальной силой тока (в этом случае работа источника $A_{\text{ист}} = \mathcal{E} \cdot \Delta q < 0$):

$$W_{C0} + A_{\text{ист}} = W_C + W_L,$$

$$\text{или } \frac{CU_0^2}{2} + \mathcal{E}(C\mathcal{E} - CU_0) = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{LI^2_{\text{max}}}{2}, \Rightarrow I_{\text{max}} = (U_0 - \mathcal{E})\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В установившемся режиме сила тока равна нулю, разность потенциалов между нижней и верхней обкладками равна U ($A_{\text{ист}} < 0$), конденсатор поменяет полярность:

$$\frac{CU_0^2}{2} + \mathcal{E}(CU - CU_0) = \frac{CU^2}{2} \Rightarrow U = 2\mathcal{E} - U_0 = -2 \text{ В.}$$

20 Т. к. $r > r_0$, то $E_n = \frac{|\mathcal{E}_l|}{2\pi r} = \frac{\Phi'}{2\pi r} = \frac{\pi r_0^2 \cdot B'}{2\pi r} = \frac{r_0^2 \cdot (\alpha t^2)'}{2r} = \frac{r_0^2 \cdot \alpha t}{r} = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ В/м.}$

Глава 3. Машины постоянного тока

Чтобы удерживать лидерство, надо просто лучше работать. Других рецептов нет. Надо каждый день что-то улучшать.

Аркадий Волож
(основатель компании Яндекс)

§ 27. Устройство машин постоянного тока

Одну и ту же машину постоянного тока можно использовать в качестве генератора или в качестве электродвигателя. Генераторы и двигатели постоянного тока по устройству ничем не отличаются друг от друга и состоят из следующих основных частей: коллектора 1, щёток 2, якоря 3, индуктора 4 и вентилятора 5 (рис. 1).

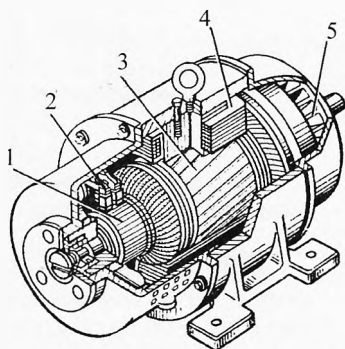


Рис. 1. Машина постоянного тока

Индуктор (англ. inductor, от лат. in-duco – навожу, побуждаю) служит для создания магнитного поля машины и представляет собой постоянный магнит или электромагнит.

В машинах постоянного тока индуктор закреплён неподвижно, то есть он является **статором** (англ. stator, от лат. sto – стою). При электромагнитном возбуждении магнитный поток создаётся обмотками возбуждения, питаемыми постоянным током.

Якорь – часть электрической машины, несущая на себе токовую обмотку.

Якорь состоит из сердечника и обмотки. В машинах постоянного тока якорь вращается, то есть является **ротором** (от лат. rotare – вращать).

Сердечник якоря для уменьшения потерь на вихревые токи набирается из изолированных друг от друга листов стали. В пазы сердечника укладывается тщательно изолированная обмотка. Продольные и поперечные отверстия в сердечнике служат для охлаждения во время работы. Кроме того, якорь обдувается с помощью вентиляционных лопаточек 5.

Если по обмотке якоря пропустить постоянный ток, то при наличии магнитного поля индуктора якорь начнет вращаться; машина будет работать в режиме электродвигателя

В электродвигателе электрическая энергия превращается в механическую.

Если же за счёт внешних сил вращать якорь, то при наличии магнитного поля индуктора в обмотке якоря возбуждается ЭДС индукции; машина будет работать в режиме генератора электрической энергии.

В генераторе электрической энергии механическая энергия (за счёт работы внешних сил) превращается в электрическую благодаря явление электромагнитной индукции.

***Коллектор** (от лат. collector – собиратель) состоит из медных пластинок клинообразного сечения, расположенных на валу якоря.*

Пластинки изолированы друг от друга и от вала миканитом. Внешняя поверхность коллектора цилиндрическая. Коллектор служит для выпрямления переменного тока, возбуждаемого в якоре генератора, а в случае работы в режиме двигателя через коллектор подаётся ток на нужную обмотку якоря, в которой создаётся максимальный вращающий момент.

***Щётки** служат для снятия напряжения с якоря генератора (или подачи тока в якорь двигателя) и изготавливаются в виде прямоугольных брусков из медных или графитовых порошков.*

Щётки размещаются в специальных держателях и имеют скользящие контакты с пластинами коллектора. По мере износа щётки пружина щёткодержателя обеспечивает нужный контакт щётки с коллектором.

§ 28. Электрический генератор постоянного тока

Превращение механической энергии в электрическую. Благодаря явлению электромагнитной индукции вырабатывается почти вся электроэнергия в мире. Основная её доля производится в генераторах переменного тока. Однако на транспорте, в металлургической промышленности, в телефонной связи, для сварки, в некоторых схемах автоматического регулирования и т. д. предпочтительнее использование постоянного тока. В этих случаях для выработки энергии часто используют генераторы постоянного тока – динамо-машины.

Пусть проводник AB длиной l движется со скоростью \vec{v} перпендикулярно вектору магнитной индукции \vec{B} (рис. 2). При этом в проводнике создается ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv$, которая вызывает ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ в контуре, сопротивление которого равно R .

Применяя правило левой руки, обнаружим, что на проводник действует сила Ампера $F_A = B \cdot I \cdot l$, направленная против движения провода. Для того чтобы обеспечить равномерное движение проводу, необходимо в направлении скорости приложить внешнюю (стороннюю) силу, равную по модулю силе Ампера

$$\vec{F}_{\text{ст}} = -\vec{F}_A.$$

При перемещении проводника на расстояние $\Delta x = v \Delta t$ внешняя сила совершит положительную работу:

$$A_{\text{ст}} = F_{\text{ст}} \cdot \Delta x = B \cdot I \cdot l \cdot v \Delta t.$$

Поскольку сила тока — есть скорость протекания заряда $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, то:

$$A_{\text{ст}} = Bl \cdot v \cdot \Delta q, \quad \text{или} \quad A_{\text{ст}} = \mathcal{E}_i \cdot \Delta q.$$

Из последнего уравнения видим, что работа сторонних сил, поддерживающих скорость движения проводника в магнитном поле, равна работе ЭДС индукции в электрической цепи. То есть имеет место превращение механической энергии в электрическую.

Рассмотрим описанный процесс с точки зрения движения заряженных частиц, чтобы выяснить роль силы Лоренца (рис. 3).

При движении со скоростью \vec{v} проводника (а значит и всех заряженных частиц, находящихся в нём) в проводнике возникает ЭДС индукции и ток в контуре силой

$$I = q_0 \cdot n \cdot S \cdot v_d,$$

где \vec{v}_d — скорость дрейфа заряженных частиц в проводнике AB , q_0 — заряд частиц, n — их концентрация, S — площадь сечения проводника.

Поэтому в лабораторной системе отсчёта положительно заряженные частицы движутся не только с проводником со скоростью \vec{v} , но и вдоль провода со скоростью дрейфа \vec{v}_d :

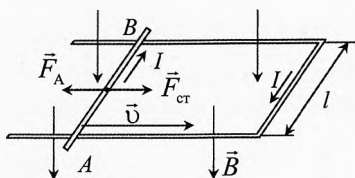


Рис. 2. Превращение механической энергии в электрическую

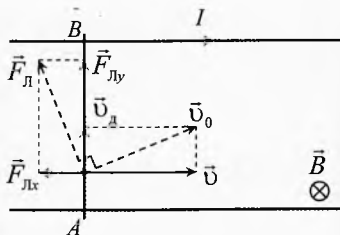


Рис. 3. Роль силы Лоренца в преобразовании работы внешней силы в электрическую энергию

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_d.$$

Значит, на частицу действует сила Лоренца, перпендикулярная полной скорости частицы: $\vec{F}_L \perp \vec{v}_0$. Её можно разложить на две составляющие:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{Ly} + \vec{F}_{Lx},$$

где \vec{F}_{Ly} , направленная вдоль провода AB , совершает положительную работу по разделению зарядов, то есть по созданию ЭДС индукции;

\vec{F}_{Lx} , направленная перпендикулярно проводу (против \vec{v}), совершает такую же отрицательную работу.

Сумма работ этих составляющих равна работе силы Лоренца:

$$A_{Ly} + A_{Lx} = A_L.$$

Но сила Лоренца \vec{F}_L перпендикулярна скорости \vec{v}_0 заряженных частиц в лабораторной системе отсчёта. Значит её работа равна нулю $A_L = 0$. Тогда

$$A_{Ly} + A_{Lx} = 0 \quad \text{или} \quad A_{Lx} = -A_{Ly}.$$

И если отсутствуют внешние силы, то движение провода быстро прекратится из-за тормозящего действия \vec{F}_{Lx} . Для того чтобы в проводе возникла ЭДС индукции внешние (сторонние) силы должны компенсировать тормозящее действие силы \vec{F}_{Lx} :

$$\vec{F}_{ст} = -\vec{F}_{Lx}.$$

Таким образом, электроэнергия фактически вырабатывается за счёт работы сторонней силы, действующей на проводник, а работа силы Лоренца равна нулю!

Машина постоянного тока как электрический генератор. Принцип действия генератора постоянного тока в простейшем варианте нами только что рассмотрен. Он основан на явлении возникновения ЭДС индукции. В промышленных генераторах используется не поступательное движение провода, а равномерное вращение якоря в однородном магнитном поле индуктора. Как и двигатель постоянного тока, генератор состоит из индуктора и якоря, обмотка которого через коллектор и щётки соединяется с внешней цепью.

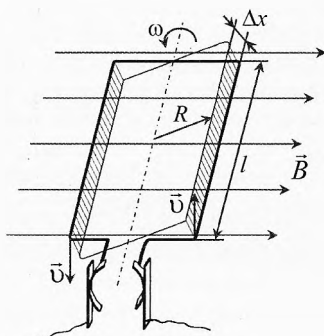


Рис. 4. Электрический генератор

При пропускании постоянного тока через обмотки индуктора между его полюсными наконечниками создаётся магнитное поле. В магнитном поле индуктора вращается якорь (за счёт работы сторонней силы). Якорь имеет

сердечник цилиндрической формы, набранный из изолированных листов стали. Концы обмоток якоря присоединены к пластинам коллектора.

В обмотке якоря при его вращении в магнитном поле индуктора возникает ЭДС индукции. Через скользящие контакты коллектора с внешней электрической цепью соединяются выводы только той обмотки, плоскость которой в данный момент времени расположена параллельно вектору \vec{B} магнитной индукции (рис. 4).

Модуль ЭДС индукции в одной обмотке вращающегося якоря равен:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta \Phi_N}{\Delta t} \right| = N \cdot B \cdot \left| \frac{\Delta S}{\Delta t} \right|, \quad (1)$$

где N – число витков в одной обмотке якоря.

При линейном перемещении проводника на Δx перпендикулярно вектору магнитной индукции \vec{B} эффективная площадь витка, пронизываемая магнитным потоком, увеличится на:

$$\Delta S = 2l\Delta x. \quad (2)$$

При малых значениях угла поворота витка отрезок Δx примерно равен длине дуги радиуса R :

$$\Delta x \approx v \cdot \Delta t = \omega R \cdot \Delta t, \quad (3)$$

где v – скорость движения проводника, ω – угловая скорость вращения якоря. Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\mathcal{E} = 2NBRl\omega.$$

Учитывая, что $S = 2Rl$ есть площадь рамки, а $\Phi_{1\max} = BS = 2BRl$ есть максимальный магнитный поток, пронизывающий один виток обмотки, получим ещё одно важное выражение для ЭДС генератора постоянного тока:

$$\mathcal{E} = N \cdot \Phi_{1\max} \cdot \omega.$$

Учитывая, что полный магнитный поток, пронизывающий обмотку якоря, равен $\Phi_{\max} = N \cdot \Phi_{1\max}$, получим окончательно:

$$\mathcal{E} = \Phi_{\max} \cdot \omega.$$

ЭДС возбуждаемого в генераторе постоянного тока равна произведению угловой скорости якоря и полного максимального магнитного потока, пронизывающего обмотку якоря.

§ 29. Типы и КПД генераторов постоянного тока

Описанный выше генератор постоянного тока с самовозбуждением часто называют динамо-машиной. Например, такая динамо-машина используется на дорожном велосипеде для освещения дороги. В ней якорь вращается от контакта с шиной велосипеда.

В генераторах с параллельным возбуждением в обмотке возбуждения большое число витков. Она подключается параллельно внешней цепи. То есть питание обмоток возбуждения постоянным током осуществляется от самого генератора. Ток якоря I_a в генераторах такого типа равен сумме токов во внешней нагрузке I_n и в цепи возбуждения I_b :

$$I_a = I_n + I_b.$$

Ток в цепи возбуждения составляет 3–5% тока якоря.

В генераторах с параллельным возбуждением ЭДС мало зависит от сопротивления внешней нагрузки. Это очень важно, т. к. потребитель желает, чтобы напряжение в сети было постоянным независимо от того, сколько он включает в сеть лампочек, утюгов...

Значение ЭДС можно легко регулировать изменяя индукцию магнитного поля. Постоянство скорости вращения якоря обеспечивается первичным двигателем, приводящим якорь во вращение. В качестве первичного двигателя может служить тепловая машина, гидротурбина, ветродвигатель и даже человек (в случае велосипедного генератора).

В генераторах с последовательным возбуждением обмотка возбуждения включается последовательно с якорной обмоткой и весь ток якоря проходит через обмотку возбуждения и внешнюю цепь. Обмотка последовательного возбуждения имеет небольшое количество витков из толстого провода. Генераторы с последовательным возбуждением имеют ряд недостатков и поэтому не нашли широкого применения.

В генераторах постоянного тока со смешанным возбуждением имеется параллельная и последовательная обмотка возбуждения. Генераторы со смешанным возбуждением получили широкое применение в практике и стали незаменимыми там, где требуется постоянство напряжения и тока при часто и резко меняющейся нагрузке. По внешнему виду обмотка последовательного возбуждения отличается от обмотки параллельного возбуждения большей толщиной провода и небольшим количеством витков.

Генераторы постоянного тока с постоянным магнитом. Большое распространение получают машины малой мощности с возбуждением от постоянных магнитов. Такие машины постоянного тока называются магнитоэлектрическими. В ряде случаев характеристики этих машин имеют показатели, не уступающие машинам с электромагнитным возбуждением. Машины с постоянными магнитами надежны в работе и хорошо сохраняют первоначальные магнитные характеристики в течение длительного времени. В связи с отсутствием обмотки возбуждения они имеют следующие преимущества: уменьшение расхода цветных металлов, снижение нагрева, веса и габаритов, а также увеличение к. п. д. Их недостатком является невозможность регулировать поток возбуждения.

Важным преимуществом постоянных магнитов является постоянство создаваемого ими магнитного потока, значение которого не зависит от изменения температуры, напряжения и скорости вращения. Особенно большие выгоды от применения постоянных магнитов даёт их использование в микромашинах малых

мощностей. Например, применение постоянных магнитов в машинах мощностью до 10 Вт может в два раза увеличить их КПД и существенно уменьшить габариты. Использование постоянных магнитов в машинах мощностью больше 1 кВт нецелесообразно. Миниатюрные моторчики с грузиком со смещенным центром масс используются для создания вибрации в мобильных устройствах.

Пример 1. Якорь генератора постоянного тока вращается с угловой скоростью $\omega = 20\pi$ рад/с. Чему равно напряжение на выходе генератора, если радиус якоря $R = 4$ см, а число витков в обмотке $N = 75$? Длина стороны рамки $l = 10$ см. Индукция магнитного поля, создаваемого индуктором, равна $B = 0,2$ Тл.

Решение. ЭДС, вырабатываемая генератором, равна

$$\mathcal{E} = \Phi_{\max} \cdot \omega = B \cdot S \cdot N \cdot \omega,$$

где $S = 2R \cdot l$ – площадь одного витка обмотки.

Напряжение на выходе генератора $U = \mathcal{E} - I \cdot r_{\text{я}}$.

Напряжением на якоре $I \cdot r_{\text{я}}$ можно пренебречь по сравнению с вырабатываемой ЭДС, так как $\mathcal{E} \gg I \cdot r_{\text{я}}$. Тогда,

$$U \approx \mathcal{E} = 2R \cdot l \cdot B \cdot \omega \cdot N, \quad U = 2 \cdot 0,04 \cdot 0,10 \cdot 0,2 \cdot 20\pi \cdot 75 = 7,5 \text{ В.} \leftarrow$$

Пример 2. Чему равен максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку динамо-машины с числом витков $N = 100$, если при частоте вращения $\nu = 30$ об/с вырабатывается ЭДС $\mathcal{E} = 6,3$ В? Чему равно значение магнитной индукции в индукторе, если площадь одного витка в обмотке $S = 70$ см²?

Решение. ЭДС, вырабатываемая динамо-машиной, может быть вычислена по формуле

$$\mathcal{E} = \omega \cdot \Phi_{\max} = 2\pi\nu \cdot \Phi_{\max},$$

где $\Phi_{\max} = \Phi_{1\max} \cdot N$ – полный максимальный магнитный поток через все витки обмотки, $\omega = 2\pi\nu$ – угловая скорость вращения вала.

Значит, максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку динамо-

$$\text{машины: } \Phi_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi\nu} = \frac{6,3}{6,28 \cdot 30} = 33 \text{ мВб.}$$

$$\text{Значение магнитной индукции равно } B = \frac{\Phi_{1\max}}{S} = \frac{\Phi_{\max}}{N \cdot S} = 48 \text{ мТл.} \leftarrow$$

Пример 3. Якорь генератора постоянного тока вращается с частотой $\nu = 50$ об/с. Напряжение на выходе генератора равно $\mathcal{E} = 35$ В. Чему равна магнитная индукция в индукторе, если радиус якоря $R = 10$ см, а число витков в обмотке $N = 20$? Длина стороны рамки $l = 25$ см.

Решение. Из выражения для ЭДС генератора постоянного тока $\mathcal{E} = 2NRBl\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$, найдём значение магнитной индукции:

$$B = \frac{\mathcal{E}}{4\pi N R l \nu}; \quad B = \frac{35 \text{ В}}{4 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 0,1 \text{ м} \cdot 0,25 \text{ м} \cdot 50 \text{ с}^{-1}} = 0,11 \text{ Тл.} \leftarrow$$

§ 30. Электродвигатели постоянного тока

Электрическим двигателем называется машина, преобразующая электрическую энергию в механическую. При подключении двигателя к источнику в обмотках якоря и индуктора пойдет ток. Взаимодействие магнитных полей якоря и индуктора приведет якорь во вращение. В любой момент времени к источнику через коллектор и щётки подключена только та обмотка якоря, плоскость которой расположена вдоль магнитных линий.

На две стороны обмотки длиной l каждая, расположенные перпендикулярно линиям магнитной индукции (рис. 5), действует сила Ампера:

$$F_A = B \cdot I \cdot l \cdot N.$$

Тогда вращающий момент пары сил, приложенных к якорю:

$$M = 2F_A \cdot \frac{D}{2} = B \cdot I \cdot l \cdot D \cdot N,$$

где D – диаметр витка, $S = l \cdot D$ – площадь контура обмотки.

$$M = B \cdot I \cdot S \cdot N.$$

Учитывая, что $B \cdot S = \Phi_{l\max}$ – максимальный магнитный поток, создаваемый индуктором в одном витке обмотки, запишем:

$$M = I \cdot \Phi_{l\max} \cdot N.$$

Произведение максимального магнитного потока и числа витков в обмотке есть полный максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку:

$$\Phi_{\max} = \Phi_{l\max} \cdot N.$$

С учетом этого

$$M = I \cdot \Phi_{\max}.$$

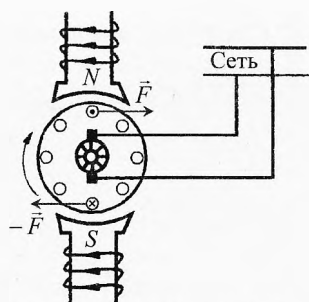


Рис. 5. Электродвигатель

Вращающий момент на валу электродвигателя постоянного тока равен произведению силы тока и полного максимального магнитного потока, пронизывающего обмотку.

Под действием вращающего момента якорь раскручивается. При этом изменяется магнитный поток, пронизывающий контур обмотки. Поэтому в ней возникает ЭДС индукции и индукционный ток, направленный, согласно правилу Ленца, против тока внешнего источника, то есть ЭДС индукции совершает отрицательную работу

$$\mathcal{E}_i = -|\mathcal{E}_i|. \quad (4)$$

Получим формулу для вычисления механической мощности на валу электродвигателя. Трением в узлах двигателя пренебрежём. Для определенности рассмотрим двигатель с последовательным возбуждением. В этом случае ток в якорь, индукторе и внешнем источнике одинаков:

$$I_{\text{я}} = I_{\text{и}} = I.$$

В установившемся режиме равномерного вращения в соответствии с законом Ома получим:

$$I = \frac{U + \mathcal{E}_i}{r_{\text{я}} + r_{\text{и}}},$$

где U – напряжение сети. Учитывая (4), получим:

$$I = \frac{U - |\mathcal{E}_i|}{r_{\text{я}} + r_{\text{и}}} \Rightarrow I(r_{\text{я}} + r_{\text{и}}) = U - |\mathcal{E}_i|.$$

Умножим все члены последнего уравнения на силу тока I :

$$I^2(r_{\text{я}} + r_{\text{и}}) = U \cdot I - |\mathcal{E}_i| \cdot I \Rightarrow U \cdot I = |\mathcal{E}_i| \cdot I + I^2(r_{\text{я}} + r_{\text{и}}). \quad (5)$$

С другой стороны, согласно закону сохранения энергии, электрическая мощность, потребляемая электродвигателем из сети $P_{\text{э}} = U \cdot I$, превращается в двигателе в джоулево тепло $P_{\text{т}} = I^2(r_{\text{я}} + r_{\text{и}})$ и механическую мощность двигателя $P_{\text{мех}}$, то есть

$$P_{\text{э}} = P_{\text{мех}} + P_{\text{т}}. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (5) и (6), мы видим, что механическая мощность электродвигателя постоянного тока равна произведению модуля ЭДС индукции, возникающей в обмотке якоря, и силы тока

$$P_{\text{мех}} = |\mathcal{E}_i| \cdot I.$$

В генераторе мы рассматривали обратный процесс, где за счёт механической работы внешней силы вырабатывается электроэнергия благодаря явлению электромагнитной индукции. В электродвигателе тоже наблюдается явление электромагнитной индукции. ЭДС индукции препятствует прохождению тока и вращению якоря, но за счёт работы источника ток через якорь течёт и двигатель вращается, электрическая энергия при этом превращается в механическую.

КПД электродвигателя постоянного тока. В узлах электродвигателя всегда имеет место трение. Оно создаёт тормозящий момент, и часть мощности теряется на трение $P_{\text{тр}}$. Кроме того, часть энергии, потребляемой двигателем, идёт на выделение джоулева тепла в обмотках якоря $P_{\text{ят}}$ и индуктора $P_{\text{ит}}$.

Запишем закон сохранения энергии для двигателя:

$$P_{\text{э}} = P_{\text{мех}} + P_{\text{ят}} + P_{\text{ит}} + P_{\text{тр}}.$$

КПД двигателя равен отношению механической мощности на валу двигателя к электрической мощности, потребляемой двигателем

$$\boxed{\eta_{\text{дв}} = \frac{P_{\text{мех}}}{P_{\text{э}}}} \quad \text{или} \quad \eta_{\text{дв}} = \frac{P_{\text{э}} - P_{\text{ят}} - P_{\text{ит}} - P_{\text{тр}}}{P_{\text{э}}} \Rightarrow$$

$$\eta_{\text{дв}} = 1 - \frac{P_{\text{ят}} + P_{\text{ит}} + P_{\text{тр}}}{P_{\text{э}}}$$

Современные электрические машины имеют высокий КПД. Так, у машин постоянного тока мощностью 10 кВт КПД составляет 83 – 87%, мощностью 100 кВт – 88 – 93% и мощностью 1000 кВт – 92 – 96%. Лишь малые машины имеют относительно низкие КПД; например, у двигателя постоянного тока мощностью 10 Вт КПД 30 – 40%.

Способы торможения двигателей. При работе электрических машин иногда встречается необходимость тормозить двигатели, а в некоторых случаях и изменять направление их вращения. Помимо торможения при помощи механических тормозов существуют способы электромагнитного торможения. При электромагнитном торможении машина начинает работать в режиме генератора, используя запас кинетической энергии. Этот способ торможения активно используется на транспорте (метро, троллейбус, и т.д.), благодаря чему существенно повышается КПД двигателя.

§ 31. Примеры решения задач

✎ **Пример 4.** Электродвигатель постоянного тока подключен в цепь источника, ЭДС которого $\mathcal{E}_1 = 24$ В и внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Сопротивление обмотки якоря $r_{\text{я}} = 18$ Ом. Якорь вращается с частотой $\nu_1 = 10$ об/с. Сила тока в якоре $I_1 = 0,2$ А. С какой частотой ν_2 должен вращаться тот же двигатель, работая в качестве генератора, чтобы развить ЭДС $\mathcal{E}_2 = 50$ В? Какая сила тока I_2 будет течь при этом в цепи, если его подключить к резистору сопротивлением $R = 80$ Ом? Магнитное поле статора создаётся постоянным магнитом. Трением пренебречь.

→ **Решение.** В первом случае (рис. 6) работа источника расходуется на выработку механической мощности и выделение джоулева тепла в источнике и обмотке якоря. По закону Ома:

$$I_1(r_{\text{я}} + r) = \mathcal{E}_1 - |\mathcal{E}_{\text{я1}}|.$$

Тогда $|\mathcal{E}_{\text{я1}}| = \mathcal{E}_1 - I_1(r_{\text{я}} + r) = 20$ В.

Во втором случае (рис. 7) роль генератора выполняет бывший (в первом случае) электродвигатель, приводимый во вращение неким первичным двигателем. ЭДС \mathcal{E}_2 , вырабатываемая генератором, – ЭДС индукции, возникающая в якоре:

$$\mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_{\text{я2}}| = \Phi_{\text{max}} \cdot \omega_2 = \Phi_{\text{max}} \cdot 2\pi\nu_2.$$

А в первом случае:

$$|\mathcal{E}_{\text{я1}}| = \Phi_{\text{max}} \cdot \omega_1 = \Phi_{\text{max}} \cdot 2\pi\nu_1,$$

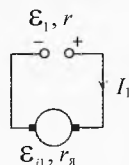


Рис. 6. Электродвигатель

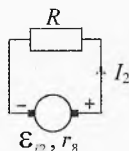


Рис. 7. Генератор

где Φ_{\max} — полный максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку якоря, одинаков в обоих случаях, так как магнитное поле статора создаётся постоянным магнитом.

Сравнивая выражения для ЭДС индукции в обоих случаях, вычислим частоту ν_2 вращения во втором случае:

$$\frac{|\mathcal{E}_{i2}|}{|\mathcal{E}_{i1}|} = \frac{\Phi_{\max} \cdot 2\pi\nu_2}{\Phi_{\max} \cdot 2\pi\nu_1} \Rightarrow \nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{|\mathcal{E}_{i2}|}{|\mathcal{E}_{i1}|} = \nu_1 \cdot \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}, \quad \nu_2 = 25 \text{ об/с.}$$

Для вычисления силы тока I_2 воспользуемся законом Ома для полной неразветвленной цепи: $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R + r_g} = 0,51 \text{ А.}$

Пример 5. Какую ЭДС разовьет генератор постоянного тока, внутреннее сопротивление которого равно $r = 20 \text{ Ом}$, если к нему подключена нагрузка $R_1 = 280 \text{ Ом}$? Механическая мощность, затрачиваемая на вращение ротора, равна $P_{\text{мех1}} = 50 \text{ Вт}$, а потери на трение составляют $\alpha_1 = 4\%$. Какую механическую мощность нужно затратить при сопротивлении цепи, равном $R_2 = 80 \text{ Ом}$, чтобы вращать якорь генератора в 2 раза быстрее? Какой ток будет течь в каждом случае, если потери на трение во втором случае составят $\alpha_2 = 10\%$? Магнитное поле статора создаётся постоянным магнитом.

Решение. Механическая мощность $P_{\text{мех}}$ первичного двигателя тратится на выработку электрической энергии P_3 , которая выделяется в виде тепла на нагрузке и генераторе, и на трение $P_{\text{тр}}$ (рис. 8):

$$P_{\text{мех}} = P_3 + P_{\text{тр}}.$$

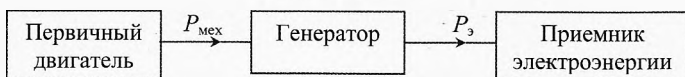


Рис. 8. Преобразование механической энергии в электрическую

По условию $P_{\text{тр}} = \alpha \cdot P_{\text{мех}}$, $P_3 = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}$, значит,

$$P_{\text{мех}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} + \alpha \cdot P_{\text{мех}}. \quad (7)$$

Тогда ЭДС в первом случае:

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{P_{\text{мех1}}(1 - \alpha_1) \cdot (R + r)}, \quad \mathcal{E}_1 = 120 \text{ В.}$$

Сила тока в первом случае (рис. 9):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + r}, \quad I_1 = \frac{120}{280 + 20} = 0,4 \text{ А.}$$

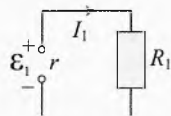


Рис. 9. Генератор с нагрузкой

При более быстром вращении ЭДС \mathcal{E}_2 , вырабатываемая генератором, будет больше. Поскольку магнитное поле создаётся постоянным магнитом ($\Phi_{\max} = \text{const}$), то значение ЭДС зависит только от частоты вращения якоря

($\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \Phi_{\max} \cdot 2\pi\nu$). Частота вращения увеличивается в 2 раза, значит, \mathcal{E}_2 тоже увеличится в 2 раза:

$$\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1 = 240 \text{ В.}$$

Из формулы (7) для второго случая получим:

$$P_{\text{мех2}} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{(R_2 + r)(1 - \alpha_2)} \cdot P_{\text{мех2}} = 640 \text{ Вт.}$$

Сила тока во втором случае: $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + r}$, $I_2 = \frac{240}{80 + 20} = 2,4 \text{ А.}$

Пример 6. (МФТИ-1996). В электродвигателе с последовательным соединением обмоток индуктора и якоря на вал намотана нить, к которой можно подвешивать грузы. Оказалось, что при постоянном напряжении U источника груз массой $m_1 = 1 \text{ кг}$ поднимался со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$, а груз массой $m_2 = 9 \text{ кг}$ с такой же скоростью опускался. Груз какой массы будет висеть неподвижно?

Решение. На рис. 10 изображена установка в разрезе, где D — диаметр обмотки якоря, $D_{\text{в}}$ — диаметр вала, на который наматывается нить.

Общее сопротивление двигателя обозначим через $R = r_{\text{я}} + r_{\text{и}}$.

Механическую мощность для упрощения записи обозначим через N :

$$N \equiv P_{\text{мех}}.$$

В первом случае электрическая мощность, отдаваемая источником, идёт на подъём груза и выделение тепла в обмотках двигателя. Сила тока в этом случае:

$$I_1 = \frac{U - |\mathcal{E}_{\text{я}}|}{R} \quad \text{или} \quad U = |\mathcal{E}_{\text{я}}| + I_1 \cdot R.$$

Умножив последнее уравнение на I_1 , получим:

$$U \cdot I_1 = |\mathcal{E}_{\text{я}}| \cdot I_1 + I_1^2 \cdot R.$$

При отсутствии трения механическая мощность N_1 , расходуемая на поднятие груза, равна произведению силы тока и ЭДС индукции в якоре, противодействующей источнику:

$$N_1 = |\mathcal{E}_{\text{я}}| \cdot I_1,$$

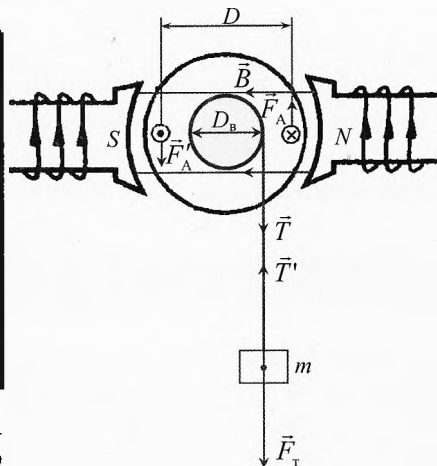


Рис. 10. Сила Ампера уравнивает силу тяжести

Значит,

$$N_1 = I_1(U - I_1 R). \quad (8)$$

Поскольку вращение равномерное, то момент силы ампера уравновешивает момент силы тяжести:

$$2 \cdot F_{A1} \cdot \frac{D}{2} = m_1 g \cdot \frac{D_B}{2}.$$

Во втором случае якорь вращается в обратную сторону (режим генератора), поэтому ЭДС индукции \mathcal{E}_{i2} меняет знак, то есть она будет гнать ток в том же направлении, что и внешний источник, и вся энергия будет выделяться на сопротивлении обмоток двигателя:

$$I_2 = \frac{U + |\mathcal{E}_{i2}|}{R} \quad \text{или} \quad I_2 R = U + |\mathcal{E}_{i2}|.$$

Умножив последнее уравнение на I_2 , получим:

$$I_2^2 R = U \cdot I_2 + |\mathcal{E}_{i2}| \cdot I_2.$$

Но $|\mathcal{E}_{i2}| \cdot I_2 = N_2$ – механическая мощность, получаемая за счёт работы силы тяжести. Тогда

$$I_2^2 R = U \cdot I_2 + N_2. \quad (9)$$

Аналогично первому случаю запишем правило моментов сил

$$2 \cdot F_{A2} \cdot \frac{D}{2} = m_2 g \cdot \frac{D_B}{2}.$$

Сила ампера $F_A = I_{\text{я}} \cdot B \cdot l$ пропорциональна силе тока в якоре и магнитной индукции, но магнитная индукция, в свою очередь, пропорциональна току в индукторе (если сердечник далек от насыщения), то есть $B \sim I_{\text{и}}$. Поскольку при последовательном соединении якоря и индуктора $I_{\text{я}} = I_{\text{и}} = I$, то $F_A = \alpha \cdot I^2$.

Для обоих случаев запишем:

$$\begin{cases} \alpha I_1^2 D = m_1 g \cdot 0,5 D_B; \\ \alpha I_2^2 D = m_2 g \cdot 0,5 D_B. \end{cases} \Rightarrow \frac{I_2^2}{I_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow I_2 = 3 \cdot I_1. \quad (10)$$

Модуль механической мощности равен $N = F_{\text{т}} \cdot v = m g \cdot v$.

Тогда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{m_2 g v}{m_1 g v}, \quad \text{то есть} \quad \frac{N_2}{N_1} = 9. \quad (11)$$

Из (8) и (9) получим:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_2(I_2 R - U)}{I_1(U - I_1 R)}. \quad (12)$$

В третьем случае груз неподвижен, значит, $\mathcal{E}_{i3} = 0$. Тогда, по закону Ома:

$$I_3 = \frac{U}{R}. \quad (13)$$

Решая совместно (10), (11), (12) и (13), получим:

$$9 = \frac{3I_1(3I_1 \cdot \frac{U}{I_3} - U)}{I_1(U - I_1 \cdot \frac{U}{I_3})}, \Rightarrow 9 = \frac{3(3I_1 - I_3)}{(I_3 - I_1)}, \Rightarrow I_3 = 1,5I_1.$$

Запишем для третьего случая правило моментов сил:

$$2 \cdot F_{A3} \cdot \frac{D}{2} = m_3 g \cdot \frac{D_B}{2}.$$

Учитывая, что $F_{A3} = \alpha I_3^2$, получим: $\alpha I_3^2 \cdot D = m_3 g \cdot 0,5 D_B$.

Разделим последнее уравнение на аналогичное для первого случая ($\alpha I_1^2 D = m_1 g \cdot 0,5 D_B$):

$$\frac{\alpha I_3^2 D}{\alpha I_1^2 D} = \frac{m_3 g \cdot 0,5 D_B}{m_1 g \cdot 0,5 D_B} \Rightarrow m_3 = \frac{I_3^2}{I_1^2} \cdot m_1 = 2,25 m_1.$$

✓ **Ответ.** Груз массой 2,25 кг будет висеть неподвижно, если сердечник индуктора далек от насыщения, т.е. если во всех случаях магнитная индукция пропорциональна силе тока в индукторе $B \sim I_{\text{и}}$.



Упражнения

1 Электродвигатели трамвайных вагонов работают при напряжении $U = 550$ В. С какой скоростью движется трамвай, если двигатели создают силу тяги $F = 3,6$ кН при силе тока $I = 112$ А? КПД электродвигателя $\eta = 70\%$.

2 Трамвай массой $m = 22,5$ т идёт сначала по горизонтальному пути, а затем в гору (уклон $\alpha = 0,03$ рад). В первом случае сила тока $I_1 = 60$ А, во втором — $I_2 = 118$ А. Найти скорости v_1 и v_2 трамвая, если коэффициент трения качения $\mu = 0,01$, напряжение в линии $U = 500$ В. КПД двигателя равен 75%. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3 Электромотор включён в сеть постоянного тока напряжением $U = 220$ В. Сопротивление обмотки мотора $R = 2$ Ом. Сила потребляемого тока $I = 10$ А. Найти потребляемую мощность и КПД мотора.

4 Электромотор питается от сети напряжением $U = 24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по его обмотке тока $I = 8$ А, если известно, что при полном затормаживании якоря по цепи идёт ток $I_0 = 16$ А?

5 Почему электродвигатель может сгореть, если застопорить его?

6 Частота вращения ротора электродвигателя постоянного тока с постоянным магнитом, включённого в цепь батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом равна $v_1 = 10$ об/с, при этом сила тока в цепи равна $I = 0,2$ А. Какую ЭДС разовьёт тот же двигатель, работая в качестве динамо-машины с частотой $v_2 = 1200$ об/мин?

7 Какую максимальную частоту может развить электродвигатель постоянного тока с постоянным магнитом, включённый в цепь с ЭДС \mathcal{E} при полном со-

противлении цепи R , если, работая в качестве динамо-машины, он развивает ЭДС \mathcal{E}_0 при частоте ν_0 ? Момент силы трения на оси двигателя равен $M_{\text{тр}}$.

8 Какую ЭДС развивает динамо-машина постоянного тока с постоянным магнитом, если при общем сопротивлении цепи $R_1 = 300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $P_{\text{мех1}} = 50$ Вт, а потери на трение составляют 4% по мощности? Какую мощность для поддержания той же частоты необходимо затрачивать при общем сопротивлении цепи $R_2 = 60$ Ом?

9 Один конец провода трамвайной линии находится под постоянным напряжением U относительно земли. На каком расстоянии от этого конца линии находится трамвай, снабженный двумя одинаковыми двигателями, и с какой скоростью он движется, если при последовательном включении его двигателей ток в линии равен I_1 , при параллельном – I_2 , а скорость трамвая при таком переключении не изменяется? Сила трения $F_{\text{тр}}$, сопротивление единицы длины провода ρ , сопротивление обмотки двигателя R .

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $P_3 = I \cdot U$; $N = F \cdot v$; $\eta = N/P_3$; $\Rightarrow v = \eta \cdot U \cdot I / F = 12$ м/с.

2 $v_1 = \frac{\eta I_1 U}{\mu mg} \approx 10$ м/с; $v_2 = \frac{\eta I_2 U}{mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} \approx 5$ м/с.

3 $P_3 = U \cdot I = 2,2$ кВт; $P_{\text{мех}} = P_3 - I^2 \cdot R = 2$ кВт; $\eta = P_{\text{мех}}/P_3 = 91\%$.

4 $P_3 = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепл}}$, $P_3 = U \cdot I$, $P_{\text{тепл}} = I^2 \cdot R$, $R = U/I_0$; $\Rightarrow P_{\text{мех}} = (U \cdot I - I^2 \cdot U/I_0) = 96$ Вт.

5 При остановке ротора в цепи потечёт ток, значительно превышающий номинальный, из-за того, что будет отсутствовать ЭДС индукции.

6 $I = \frac{\mathcal{E} - |\mathcal{E}_n|}{R}$. ЭДС индукции, возбуждаемой в роторе, равна $|\mathcal{E}_i| = \Phi_{\text{макс}} \cdot \omega$,

где $\Phi_{\text{макс}}$ – полный максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку ротора (одинаков для обоих случаев, поскольку магнитное поле создаётся постоянным магнитом), $\omega = 2\pi\nu$ – угловая скорость вращения ротора. Поэтому

$$|\mathcal{E}_n| = \Phi_{\text{макс}} \cdot 2\pi\nu_1, |\mathcal{E}_{i2}| = \Phi_{\text{макс}} \cdot 2\pi\nu_2. \text{ Значит, } |\mathcal{E}_{i2}| = \frac{|\mathcal{E}_n| \cdot \nu_2}{\nu_1} = \frac{(\mathcal{E} - I \cdot R) \cdot \nu_2}{\nu_1} = 40 \text{ В.}$$

7 ЭДС возбуждаемая в генераторе постоянного тока равна произведению угловой скорости якоря ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$) и максимального магнитного потока, пронизывающего обмотку якоря:

$$\mathcal{E}_0 = \Phi_{\text{макс}} \cdot 2\pi\nu_0. \quad (1)$$

При работе машины в режиме двигателя ЭДС индукции, возникающая в обмотках ротора, препятствует прохождению тока:

$$I \cdot R = \mathcal{E} - |\mathcal{E}_i| \quad \text{или} \quad I \cdot R = \mathcal{E} - \Phi_{\text{макс}} \cdot 2\pi\nu. \quad (2)$$

Ротор двигателя вращается с максимальной частотой в режиме холостого хода, то есть при отсутствии полезной механической нагрузки. Значит, работа источника идёт на выделение тепла на активном сопротивлении R цепи и преодоление силы трения:

$$P_3 = P_R + P_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad \mathcal{E} \cdot I = I^2 R + M_{\text{тр}} \cdot 2\pi\nu, \quad (3)$$

Решая совместно (1), (2) и (3), получим ответ: $v = v_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} - \frac{M_{\text{тр}} \cdot 2\pi v_0}{\mathcal{E}_0^2 / R} \right)$.

8 $P_{\text{мех}} = P_3 + P_{\text{тр}}; P_{\text{тр}1} = 0,04 \cdot P_{\text{мех}1} = 2 \text{ Вт},$

$$\Rightarrow P_{31} = 0,96 \cdot P_{\text{мех}1}; P_{31} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1}; \Rightarrow \mathcal{E} = \sqrt{0,96 \cdot P_{\text{мех}1} \cdot R_1} = 120 \text{ В}.$$

ЭДС, возбуждаемая в роторе будет одинакова в обоих случаях: $\mathcal{E} = \Phi_{\text{макс}} \cdot 2\pi v$, ибо двигатель с постоянным магнитом ($\Phi_{\text{макс}} = \text{const}$), а частота вращения одинакова ($v_1 = v_2$). Мощность, затрачиваемая против сил трения, в обоих случаях также будет одинакова, т.к. частота вращения ротора одинакова: $P_{\text{тр}2} = P_{\text{тр}1} = 2 \text{ Вт}$.

Поэтому $P_{\text{мех}2} = P_{32} + P_{\text{тр}2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} + P_{\text{тр}1}; P_{\text{мех}2} = \frac{(120 \text{ В})^2}{60 \text{ Ом}} + 2 \text{ Вт} = 242 \text{ Вт}.$

9 При постоянной скорости движения суммарная двигателей мощность тратится только против силы трения (считаем, что других потерь нет).

Для последовательного соединения двигателей:

$$2 \cdot |\mathcal{E}_1| \cdot I_1 = F_{\text{тр}} \cdot v, \quad U = 2|\mathcal{E}_1| + I_1(\rho \cdot 2l + 2R), \Rightarrow v = \frac{I_1}{F_{\text{тр}}} (U - I_1(\rho \cdot 2l + 2R)).$$

Для параллельного соединения двигателей:

$$2 \cdot |\mathcal{E}_2| \cdot \frac{I_2}{2} = F_{\text{тр}} \cdot v, \quad U = |\mathcal{E}_2| + I_2(\rho \cdot 2l + \frac{R}{2}), \Rightarrow v = \frac{I_2}{F_{\text{тр}}} \left(U - I_2(\rho \cdot 2l + \frac{R}{2}) \right).$$

Сравнивая выражения для скоростей, получим: $l = \frac{U(I_2 - I_1) + 2R \cdot I_1^2 - I_2^2 \cdot \frac{R}{2}}{2\rho(I_2^2 - I_1^2)}.$

Глава 4. Электрические измерения

Хорошо работается, когда любишь свою профессию, с увлечением занимаешься ею.

Юрий Гагарин

§ 32. Электроизмерительные приборы и электрические измерения

Электрический ток характеризуется следующими величинами: электродвижущей силой источника тока, силой тока, плотностью тока, напряжением, мощностью, энергией, частотой и сдвигом фаз между силой тока и напряжением (в переменном токе). Сопротивление, индуктивность и ёмкость, характеризующие электрическую цепь, также относятся к электрическим величинам. Для измерения электрических величин применяются электроизмерительные приборы: амперметры, вольтметры, омметры, ваттметры, счётчики электрической энергии, частотомеры, фазометры, а также фарадометры и приборы для измерения индуктивности.

Электроизмерительный прибор – это техническое устройство, при помощи которого происходит измерение той или иной электрической величины.

Измерить электрическую величину – значит сравнить её с однородной величиной, принятой за единицу этой величины. Электроизмерительные приборы делятся на приборы непосредственной оценки и приборы сравнения. В приборах непосредственной оценки шкала проградуирована в единицах измеряемой величины, которая определяется непосредственно по показанию стрелки на шкале прибора (амперметры, вольтметры, омметры, гальванометры и др.).

Градуирование приборов выполняется с помощью образцовых мер. **Мерами** называются устройства, воспроизводящие единицы измерения.

Например, гиля массой 1 кг является мерой массы, линейка длиной 1 метр – мерой длины, образцовая катушка сопротивлением 1 Ом – мерой сопротивления; мерой электрического напряжения является так называемый нормальный элемент. Образцовые меры сверяются с эталонами.

Эталонами называются образцовые меры, изготовленные с наивысшей точностью, достижимой на данном уровне развития науки и техники.

К приборам сравнения относятся многочисленные компенсаторы и электроизмерительные мосты. Измеряемая ими величина определяется по сравнению с известной однородной величиной – мерой. Например, чашечные весы, мосты для измерения сопротивлений.

Для измерения электрических величин в приборах непосредственной оценки используются физические процессы, создающие вращающий момент и перемещение подвижной части прибора. Вращающий момент может быть создан взаимодействием магнитного поля постоянного магнита и тока в катушке, магнитного поля катушки с током и ферромагнетика, взаимодействием магнитных полей катушек с токами, взаимодействием заряженных тел. В зависимости от природы физического взаимодействия, происходящего в приборах, электроизмерительные приборы разделяются на магнитоэлектрические, электромагнитные, электродинамические, индукционные, электростатические, ферродинамические, термоэлектрические, детекторные, вибрационные.

В зависимости от допустимой при измерении погрешности, обусловленной внутренними свойствами и качеством конструкции прибора, стрелочные электроизмерительные приборы подразделяются на восемь классов точности со следующими приведенными в процентах погрешностями: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4.

Приведенной погрешностью прибора называется отношение максимальной абсолютной погрешности (ошибки) измеряемой величины к верхнему пределу шкалы прибора, выраженное в процентах.

§ 33. Электроизмерительные приборы магнитоэлектрической системы

Магнитоэлектрический прибор, схема устройства которого показана на рис. 1, состоит из постоянного магнита 1, к концам которого прикреплены полюсные наконечники 3 с цилиндрическими выточками. Между полюсными наконечниками находится стальной цилиндр 4, обеспечивающий равномерное радиальное распределение магнитного поля в зазоре между полюсными наконечниками и цилиндром. В зазор между полюсными наконечниками и цилиндром помещается подвижная катушка 7, выполненная в виде рамки на тонком алюминиевом каркасе или без него. Катушка 7 жёстко крепится на двух полуосях или на оси с закрепленной указательной стрелкой 2. Две спиральные пружины 5 служат для подвода тока к катушке и создания противодействующего момента. Одна из спиральных пружин вторым концом через поводок связана с корректором 6, а вторая – с корпусом прибора. Корректор служит для установления стрелки на нулевое деление перед началом измерения.

Работа магнитоэлектрических приборов основана на принципе взаимодействия магнитного поля постоянного магнита и катушки с током.

Вращающий момент катушки с током:

$$M_{\text{вр}} = 2F_A \cdot \frac{D}{2} = B \cdot I \cdot l \cdot N \cdot D,$$

где N – число витков в катушке.

Так как магнитную индукцию B в зазоре, длину l и диаметр D активной части проводника катушки можно считать для данного прибора величинами постоянными, то вращающий момент катушки пропорционален силе тока в ней:

$$M_{\text{вр}} = k_1 \cdot I,$$

При вращении катушки спиральные пружины оказывают противодействующий момент, пропорциональный углу закручивания

$$M_{\text{пр}} = k_2 \cdot \alpha,$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств пружинок; α – угол закручивания пружин (угол поворота стрелки).

Стрелка прибора останавливается при отклонении на определённый угол, соответствующий делению шкалы прибора при равенстве этих моментов, то есть когда

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{вр}}.$$

Следовательно, $k_2 \alpha = k_1 I$ или $\alpha = \frac{k_1}{k_2} \cdot I$.

Обозначив $\frac{k_1}{k_2}$ через k , получим:

$$\alpha = k \cdot I$$

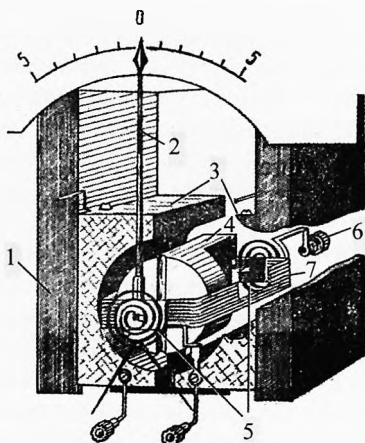


Рис. 1. Магнитоэлектрический прибор

Следовательно, угол поворота стрелки прямо пропорционален значению силы тока в катушке, поэтому шкала прибора будет равномерной.

Успокоителем измерительного механизма магнитоэлектрических приборов является алюминиевый каркас рамки. При колебании катушки в магнитном поле в алюминиевом каркасе будут возбуждаться индукционные токи. Взаимодействие этих токов с магнитным полем постоянного магнита создаёт тормозящий момент, успокаивающий колебание катушки (стрелки).

Магнитоэлектрические приборы имеют ряд положительных качеств: равномерную шкалу, высокую чувствительность, высокий класс точности и малую чувствительность к воздействию внешних магнитных полей.

К недостаткам магнитоэлектрических приборов следует отнести: 1) чувствительность к перегрузке, т. к. ток в подвижную катушку подаётся через тонкие спиральные пружины, которые при перегрузке нагреваются и теряют упругие свойства или перегорают; 2) пригодность только для измерений в цепи постоянного тока.

Для расширения пределов измерения силы тока в магнитоэлектрических амперметрах применяются шунты, а в вольтметрах – дополнительные сопротивления. В сочетании с выпрямителями магнитоэлектрические приборы широко используются и для измерений в цепях переменного тока.

§ 34. Электроизмерительные приборы электромагнитной системы

Электромагнитный прибор (рис. 2) состоит из неподвижной катушки 1, которая включается непосредственно в цепь (катушка может быть либо круглой, внутри которой имеются подвижный и неподвижный сердечники, либо плоской, имеющей узкую щель), сердечника 2 из мягкого железа, эксцентрично (со смещением оси) насаженного на ось 3, на которой также крепится указательная стрелка 6 и спиральная пружина 7. Пружина служит для создания противодействующего момента и возвращения стрелки в начальное положение при отсутствии тока в приборе. Поршень 5, перемещающийся в цилиндре 4, выполняет роль воздушного успокоителя.

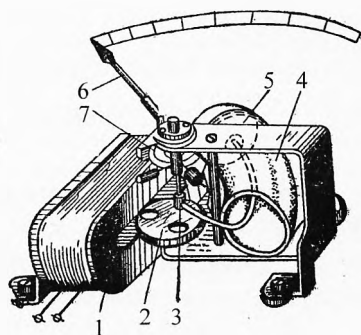


Рис. 2. Электромагнитный прибор

Принцип работы электромагнитных приборов состоит в следующем: ток, проходя по катушке, создаёт магнитное поле. Железный сердечник 2 намагничивается и втягивается в катушку, поворачивая при этом ось, а вместе с ней стрелку и поршень 5 воздушного успокоителя (демпфера).

Принцип работы электромагнитных приборов состоит в следующем: ток, проходя по катушке, создаёт магнитное поле. Железный сердечник 2 намагничивается и втягивается в катушку, поворачивая при этом ось, а вместе с ней стрелку и поршень 5 воздушного успокоителя (демпфера).

Вращающий момент в электромагнитных приборах можно считать пропорциональным квадрату тока в катушке.

Действительно, при введении железного сердечника внутрь катушки с током магнитное поле катушки усиливается, возрастает энергия магнитного поля. Приращение энергии магнитного поля измеряется работой, совершённой по перемещению сердечника, то есть

$$\Delta W = F \cdot \Delta l,$$

где ΔW – приращение энергии магнитного поля, F – сила взаимодействия магнитного поля катушки с током и железного сердечника, Δl – перемещение точки приложения силы, то есть длина дуги, равная $\Delta l = r \cdot \Delta\alpha$, r – расстояние между осью вращения и предполагаемой точкой приложенной силы, $\Delta\alpha$ – угол поворота сердечника.

Если при вводе сердечника индуктивность катушки увеличилась на ΔL , то её энергия увеличилась на

$$\Delta W = \frac{I^2 \Delta L}{2}.$$

Решая совместно все уравнения, получим: $\frac{I^2 \Delta L}{2} = F r \Delta\alpha$.

Тогда вращающий момент равен: $M_{\text{вр}} = F r = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta\alpha}$.

Величина $\frac{\Delta L}{\Delta\alpha}$ представляет собой скорость изменения индуктивности катушки при повороте сердечника, зависящую от взаимного расположения сердечника и катушки, а также от формы самого сердечника. Выбрав соответствующую форму сердечника, можно считать $\frac{\Delta L}{\Delta\alpha}$ величиной постоянной. Следовательно, запишем:

$$M_{\text{вр}} = k_1 I^2.$$

Противодействующий механический момент спиральной пружины

$$M_{\text{пр}} = k_2 \alpha,$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств пружины, α – угол закручивания пружины, то есть угол поворота стрелки.

Стрелка прибора остановится на каком-либо делении шкалы, когда вращающий и противодействующий моменты окажутся равными между собой:

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{вр}}.$$

Следовательно, $k_2 \alpha = k_1 I^2$ или $\alpha = \frac{k_1}{k_2} \cdot I^2$.

Обозначив $\frac{k_1}{k_2}$ через k , получим:

$$\alpha = k \cdot I^2$$

Следовательно, шкала в электромагнитных приборах неравномерная. Подбором формы сердечника несколько исправляется неравномерность шкалы.

Электромагнитные приборы служат для измерения величин как постоянного, так и переменного тока. Приборы с обычным железным сердечником имеют невысокий класс точности и широко используются в качестве щитовых приборов и для технических измерений, не требующих высокой точности.

К достоинствам электромагнитных приборов следует отнести: пригодность для измерений в цепи постоянного и переменного тока; устойчивость к перегрузкам по току, т. к. токонесущая часть (катушка) является неподвижной и может быть изготовлена из толстого провода; простота и достаточная механическая прочность.

Электромагнитные приборы имеют и свои недостатки: неравномерность шкалы; наличие остаточного намагничивания сердечника, влияние внешних магнитных полей на показания прибора.

Для уменьшения влияния внешних магнитных полей электромагнитные приборы делаются экранированными или астатическими.

В экранированных приборах токонесущая и подвижная часть прибора помещается в железный цилиндр, являющийся экраном для внешних магнитных полей.

В астатических приборах имеются две катушки, расположенные друг над другом и повернутые одна относительно другой на 180° , и два железных сердечника, закрепленные эксцентрично на вертикальной оси. При прохождении тока по катушкам последние создают противоположно направленные магнитные поля. Каждый сердечник намагничивается магнитным полем своей катушки и втягивается внутрь неё. На ось действует пара сил, и ось поворачивается. Внешнее магнитное поле усиливает магнитное поле одной катушки и в такой же степени ослабляет магнитное поле другой катушки. Таким образом, результирующий вращающий момент, вызванный внешним магнитным полем, близок к нулю.

§ 35. Электродинамические и ферродинамические электроизмерительные приборы

В электродинамических приборах (рис. 3) имеются две катушки. Одна из них неподвижная, намотанная из толстого изолированного провода, состоит из двух секций 1, последовательно соединенных между собой. Катушка 2 из тонкого изолированного провода крепится на подвижной оси. На этой же оси крепится указательная стрелка 3 с алюминиевой пластинкой 4 электромагнитного успокоителя, а также две изолированные спиральные пружины 5. Работа электродинамических приборов основана на принципе взаимодействия двух катушек с током. При прохождении тока по катушкам подвижная катушка поворачивается так, что её плоскость совпадает с плоскостью неподвижной катушки. Вместе с катушкой поворачивается указательная стрелка.

ка и алюминиевая пластинка электромагнитного успокоителя. Вращающий момент при взаимодействии катушек пропорционален току в них:

$$M_{\text{пр}} = k_1 I_1 I_2,$$

где I_1 — ток в неподвижной катушке, I_2 — ток в подвижной катушке, k_1 — коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции и расположения катушек.

При вращении подвижной катушки спиральные пружины закручиваются и создают противодействующий момент, пропорциональный углу поворота катушки:

$$M_{\text{пр}} = k_2 \alpha.$$

Указательная стрелка устанавливается в положении равновесия, когда вращающий и противодействующий моменты окажутся равными по модулю, то есть при

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{вр}}.$$

Следовательно, $k_2 \alpha = k_1 I_1 I_2$ или $\alpha = \frac{k_1}{k_2} \cdot I_1 I_2$.

Обозначив $\frac{k_1}{k_2}$ через k , получим:

$$\alpha = k \cdot I_1 \cdot I_2.$$

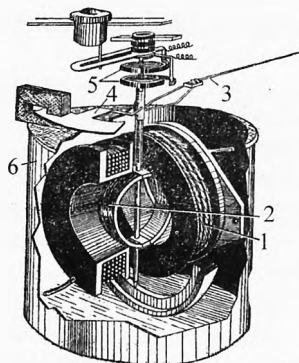


Рис. 3. Электродинамический прибор

Таким образом, угол отклонения указательной стрелки пропорционален произведению токов в подвижной и неподвижной катушках.

Приборы электродинамической системы имеют ряд положительных качеств: они пригодны для измерений в цепи постоянного и переменного тока; обладают высокой точностью, обусловленной отсутствием в токонесущих катушках металлических частей.

К недостаткам приборов электродинамической системы нужно отнести низкую чувствительность; влияние внешних магнитных полей на точность показаний прибора; недопустимость перегрузки, т. к. ток в катушки подводится через тонкие спиральные пружины; неравномерность шкалы (кроме ваттметра).

Для устранения влияния внешних магнитных полей электродинамические приборы изготавливаются экранированными железным цилиндром б или аstaticескими.

Для увеличения чувствительности приборов электродинамической системы неподвижную катушку наматывают на железный сердечник. Такие приборы называются **ферродинамическими**.

§ 36. Индукционные и вибрационные электроизмерительные приборы

Индукционные приборы. Из индукционных приборов широкое применение в практике получил счётчик электрической энергии переменного тока. *Индукционный счётчик* (рис. 4) имеет два электромагнита, между полюсами которых размещен алюминиевый диск 6, насаженный на вертикальную ось. На оси также крепится железная пластинка 2, служащая для устранения самохода, и червяк 5 счётного механизма. Электромагнит 7 имеет обмотку из толстого изолированного провода, которая является токовой обмоткой и включается в цепь последовательно нагрузке. Электромагнит 4 имеет обмотку из тонкого изолированного провода, которая является обмоткой напряжения и включается в цепь параллельно нагрузке.

Токовая обмотка расположена на двух полюсах U-образного сердечника. Переменный магнитный поток, созданный токовой обмоткой, пронизывает алюминиевый диск и возбуждает в нём индукционные токи, которые, взаимодействуя с магнитным полем обмотки напряжения, приводят алюминиевый диск во вращение. Вращающий момент диска пропорционален мощности, потребляемой приемником:

$$M_{\text{вр}} = k_1 P.$$

Для создания противодействующего момента служит постоянный магнит.

При движении алюминиевого диска в поле магнита 3 в диске возбуждаются индукционные токи. Взаимодействие индукционных токов диска с магнитным полем постоянного магнита создаёт тормозящий момент, который пропорционален частоте вращения диска и магнитному потоку поля постоянного магнита:

$$M_{\text{пр}} = k'_2 n \Phi = k_2 n,$$

где n — число оборотов диска в минуту, k_2 — коэффициент пропорциональности, зависящий от значения магнитного потока, то есть

$$k_2 = k'_2 \cdot \Phi.$$

При определённой скорости вращения диска, зависящей от нагрузки, противодействующий момент уравнивает вращающий момент диска:

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{вр}}.$$

Следовательно, $k_1 P = k_2 n$ или $P = \frac{k_2}{k_1} \cdot n$.

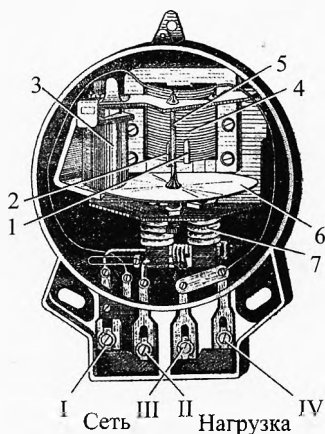


Рис. 4. Индукционный счётчик

Обозначив $\frac{k_1}{k_2}$ через k , получим:

$$P = k \cdot n$$

Таким образом, частота вращения диска пропорциональна мощности, потребляемой нагрузкой.

Произведение мощности и времени даёт энергию. Обозначив энергию через W , получим:

$$W = P \cdot t = k \cdot n \cdot t.$$

Учитывая, что $N = n \cdot t$ – число оборотов диска за время t , получим:

$$W = k \cdot N$$

Итак, число оборотов диска счётчика прямо пропорционально электрической энергии, потребляемой в цепи.

Ось диска связана со счётным механизмом, показания которого соответствуют выраженной в кВт·ч энергии, прошедшей через счётчик.

Энергия, приходящаяся на один оборот диска, называется *постоянной счётчика* и определяется по формуле:

$$k = \frac{W}{N}.$$

При включении счётчика в сеть зажимы I и III подключаются к источнику тока и называются генераторными, а зажимы II и IV – к нагрузке и называются нагрузочными.

Обмотка напряжения счётчика всё время подключена к сети. Увеличение напряжения сети может вызвать вращение диска без подключения нагрузки, то есть самоход счётчика. Он может быть вызван также вибрацией щита, на котором укреплен счётчик. Для устранения самохода нужно пластинку 2 несколько отогнуть. При этом она больше намагничивается полюсной пластинкой I и сильнее к ней притягивается, чем и тормозится вращение диска.

Индукционные счётчики имеют низкую чувствительность и невысокий класс точности с погрешностями 1,0; 2,0; 2,5.

В качестве амперметров и вольтметров индукционные приборы не применяются из-за существенных недостатков: низкой чувствительности, малой точности, зависимости показания от частоты тока, громоздкости конструкции и неудобства в обращении.

К положительным качествам индукционных приборов можно отнести большой вращающий момент, малую чувствительность к внешним магнитным полям, устойчивость к перегрузкам.

Вибрационные приборы. Из вибрационных приборов широкое применение в практике получили герцметры (частотомеры). Схематически вибрационный герцметр представлен на рис. 5а. Герцметр состоит из электромагнита 1, против полюсов которого расположена стальная пластинка 3. Пластинка 3 крепится на профильном стержне 5. В нижней части профильного стержня крепятся плоские пружинки 4, отличающиеся между собой собственной частотой колебаний на 0,5 Гц. Свободные концы плоских пружинок загнуты под прямым углом и покрашены белой краской. Профильный стержень 5 крепится на стальных пружинках 6.

При включении обмоток 2 электромагнита 1 в цепь переменного тока стальная пластинка 3 будет колебаться с частотой переменного тока. С такой же частотой будут колебаться стержень 5 и пружинки 4. Плоская пружинка, у которой собственная частота колебаний совпадает с частотой тока в цепи, придёт в резонанс и будет колебаться с наибольшей амплитудой. С лицевой стороны прибора в горизонтальном окошечке вместо белого квадрата резонансной плоской пружины будет видна серая вертикальная полоска.

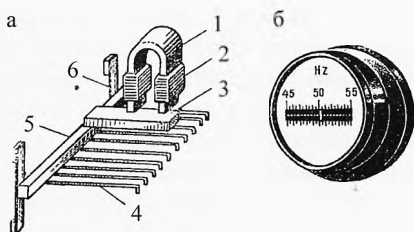


Рис. 5. Герцметр

На лицевой части герцметра (рис. 5б) над каждым белым квадратиком указывается собственная частота колебания пластинки. Таким образом, по собственной частоте пластинки, колеблющейся с наибольшей амплитудой, определяется частота тока в цепи.

§ 37. Измерение неэлектрических величин электрическими методами

Электрический метод измерения неэлектрических величин широко применяется в современном производстве для контроля технологических процессов и автоматического управления.

Измерение неэлектрических величин электрическим методом сводится к тому, что неэлектрическая величина преобразуется в электрическую, измерение которой даёт представление о неэлектрической величине. Устройство для измерения неэлектрических величин электрическим методом состоит из преобразователя и электроизмерительного прибора, шкала которого проградуирована в единицах измеряемой неэлектрической величины. Преобразователи неэлектрических величин в электрические иногда называются датчиками.

По принципу действия все электрические преобразователи (датчики) можно разделить на две группы: параметрические и генераторные.

В параметрических преобразователях неэлектрическая величина изменяет параметры электрической цепи (сопротивление, индуктивность, ёмкость, частоту и т.д.). К параметрическим преобразователям относятся реостатные, угольные, с термосопротивлением, электролитические, магнитоупругие, ёмкостные, фотоэлектрические и др.

В реостатных преобразователях положение ползунка реостата устанавливается путём линейного или углового перемещения (изменением уровня жидкости, давления пара, механической деформацией и т.д.), что ведёт к изменению сопротивления цепи и тока в ней.

Достоинствами реостатных преобразователей являются точность преобразований, простота конструкций и регулировки, возможность питания постоянным и переменным током. Однако наличие скользящих контактов ограничивает срок службы реостатных преобразователей и уменьшает надёжность их работы.

Угольный преобразователь представляет собой столбик из нескольких угольных шайб. Электрическое сопротивление угольного столбика зависит от степени его сжатия. С увеличением давления сопротивление столбика уменьшается. Следовательно, изменение давления на столбик приводит к изменению тока в цепи. Таким образом, с помощью электроизмерительного прибора можно измерить силу, действующую на угольный столбик, вызванную давлением пара, изменением уровня жидкости, деформацией твёрдого тела и т.д. Недостатком угольных преобразователей является зависимость их сопротивления от температуры и наличие гистерезиса (запаздывания).

Преобразователи с термосопротивлением применяются для измерения температуры, скорости потока жидкости и газов, степени разреженности газов и служат газоанализаторами. В них используется свойство металлического проводника изменять своё сопротивление в зависимости от температуры.

Термосопротивления (терморезисторы) изготавливаются из металлов, обладающих большим положительным температурным коэффициентом сопротивления (платина, никель, медь). На практике широко используются полупроводниковые термосопротивления, обладающие большим отрицательным коэффициентом сопротивления. Они называются термисторами. Термисторы по сравнению с терморезисторами более чувствительны и менее инерционны.

В электролитических преобразователях используется зависимость сопротивления электролита от его концентрации. Применяются они для количественного анализа раствора. Для избежания электролиза раствора во время измерения электролитические преобразователи питают переменным током.

В магнитоупругих преобразователях используется магнитоупругий эффект, то есть зависимость магнитной проницаемости ферромагнитных материалов сердечников от механических напряжений, действующих на сердечник. Магнитоупругий преобразователь состоит из трёхстержневого магнитопровода, на среднем стержне которого находится токовая катушка

индуктивности. Сжатие магнитопровода изменяет его намагничивание, а это приводит к изменению индуктивного сопротивления преобразователя. Материалом для магнитоупругих преобразователей являются некоторые сорта пермаллоя и трансформаторная сталь, обладающие наибольшей магнитной чувствительностью к давлению. Магнитоупругие преобразователи используются для измерения статических и переменных нагрузок.

В основу работы **ёмкостных преобразователей** положено изменение электроёмкости датчика под действием измеряемой неэлектрической величины (давления, механического перемещения, угла поворота, влажности и т.д.). Так как ёмкость конденсатора зависит от трёх параметров: площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости среды, то и ёмкостные датчики бывают трёх типов. Ёмкостные датчики обладают очень высокой чувствительностью.

Индуктивные преобразователи состоят из ферромагнитного сердечника и катушки индуктивности. Работа индуктивного преобразователя основана на изменении индуктивности катушки путём перемещения сердечника в ней или изменения воздушного зазора в сердечнике. Индуктивные преобразователи применяются для измерения скорости линейных и угловых перемещений, деформаций. Погрешность индуктивных преобразователей обуславливается в основном нестабильностью амплитуды и частоты переменного тока, питающего преобразователь, и изменением температуры среды.

Дифференциальные индуктивные преобразователи более чувствительны. Они состоят из двух катушек и одного железного сердечника, расположенного симметрично катушкам. Под действием неэлектрической величины сердечник будет перемещаться внутри катушек, что приведет к изменению индуктивности обеих катушек и появлению тока в электроизмерительном приборе. Дифференциальные индуктивные преобразователи широко применяются в мостовых схемах для измерения деформаций и механических перемещений.

В **генераторных преобразователях** неэлектрические величины преобразуются в ЭДС. К генераторным преобразователям относятся: термоэлектрические, пьезоэлектрические, индукционные и фотоэлектрические с внутренним фотоэффектом.

Термоэлектрические преобразователи представляют собой термопару, где разность температур спая и свободных концов создаёт ЭДС. Поддерживая температуру свободных концов постоянной, по значению ЭДС термопары можно судить о температуре спая. Значение ЭДС зависит от пары материалов, из которых изготовлена термопара. Материалом для них служат платина, кремний, сурьма, хромаль, медь, константан, платинородий и др. Термоэлектрические преобразователи дают возможность измерить температуру свыше 2 000°C.

Для измерения температуры электрическим методом служит пирометр (рис. 6), который представляет собой термопару с электроизмерительным магнитоэлектрическим прибором 3. При нагревании спая 1 на свободных концах 2 создаётся ЭДС, пропорциональная разности температур спая и свободных концов. При постоянной температуре свободных концов ЭДС линейно зависит от температуры рабочего спая 1. Шкала электроизмерительного прибора градуируется в градусах. Пирометр с термопарой медь-константан может измерять температуру от -200°C до $+50^{\circ}\text{C}$, а платина-платинородий – до 1600°C . Для предохранения термопары от механических повреждений и вредных действий горячей жидкости, газов и паров её помещают в защитную трубку из латуни, фарфора или шамота.

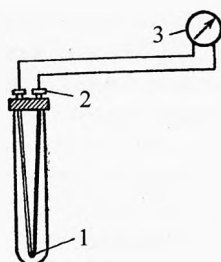


Рис. 6. Пирометр

В пьезоэлектрических преобразователях используется пьезоэлектрический эффект, который состоит в том, что при действии механической силы на кристалл турмалина, кварца, сегнетовой соли и титаната бария в направлении электрической оси на гранях, перпендикулярных направлению действующей силы, появляются электрические заряды, то есть возникает ЭДС. Пьезоэлектрические датчики малоинерционны и применяются для исследования быстроменяющегося давления.

Фотоэлектрические преобразователи бывают двух типов: фотоэлементы с внешним фотоэффектом и фотоэлементы с внутренним фотоэффектом.

Фотоэлемент с внешним фотоэффектом представляет собой стеклянный баллон, покрытый внутри светочувствительным веществом. Внутри баллона создан вакуум. К электроду и светочувствительному веществу подведена от батареи разность потенциалов. Световой поток, падая на светочувствительный слой, выбивает из него электроны. При этом по цепи пойдёт ток. Значение фототока пропорционально световому потоку. Шкала измерительного прибора градуируется в люменах. Вакуумные фотоэлементы практически безынерционны.

Фотоэлементы с внутренним фотоэффектом представляют собой соответствующим образом обработанный полупроводник. При освещении фотоэлемента кванты света освобождают в полупроводнике электроны, которые проходят через запирающий слой и заряжают проводник отрицательно, а сам полупроводник остается заряженным положительно. Значение разности потенциалов зависит от интенсивности светового потока. Следовательно, по разности потенциалов на электродах фотоэлемента можно судить о значении светового потока. Эти преобразователи не нуждаются в источниках тока, они сами являются генераторами.

Таблица 2. Условные обозначения приборов















Название прибора	Обозначение	Название прибора	Обозначение
Амперметр		Киловаттметр	
Миллиамперметр		Ваттметр реактивной мощности	
Микроамперметр		Счётчик киловатт-часов	
Вольтметр		Омметр	
Милливольтметр		Килоомметр	
Ваттметр		Частотомер	

Таблица 3. Условные обозначения систем на шкалах электроизмерительных приборов

Название системы	Обозначение	Название системы	Обозначение
Магнитоэлектрическая		Ферродинамическая	
Электромагнитная		Индукционная	
Электродинамическая		Вибрационная	



Упражнения

1 На многопредельном вольтметре (150, 300, 450 и 600 В) есть надпись — ток 30 мА. Определить сопротивление между зажимами прибора. Начертить схему прибора.

2 Что называется приведенной погрешностью? Как, зная её, определить абсолютную погрешность?

3 Чему равна относительная погрешность измерений амперметра с пределом измерений 5 А, класс точности которого 0,5, если в первом измерении он показал 2 А, а во втором — 4А?

4 Как объяснить, что отклонение стрелки ваттметра пропорционально активной мощности?

5 Сопротивление катушек напряжения двух ваттметров равны по 5 кОм. Но к одной из них подключили добавочное сопротивление 5 кОм. Одинаковую ли мощность покажут оба ваттметра, включенные в одну и ту же сеть? На одинаковое ли число делений отклонятся стрелки ваттметров?

6 Какую мощность показывает однофазный ваттметр с пределами измерений 5 А и 150 В и сопротивлением катушки напряжения 5 кОм, включенный в цепь переменного тока напряжением 220 В, если при дополнительном сопротивлении 5 кОм стрелка ваттметра отклонилась на половину шкалы? Допустимо ли использовать этот ваттметр в таком режиме?

7 Чему равна постоянная счётчика, у которого на лицевой стороне указано 1 кВт·ч – 2500 оборотов?

8 Квартирный счётчик показал месячный ($N = 30$ суток) расход энергии $W = 120$ кВт·ч. Определить потребляемую мощность, силу тока и месячную стоимость электроэнергии при тарифе 3 руб за 1 кВт·ч, если напряжение сети $U = 220$ В, а лампы и остальные приборы включены в среднем по $t_1 = 5$ часов в сутки.

9 Как определить активное сопротивление в цепи переменного тока?

10 Как определить реактивное сопротивление в цепи переменного тока?

11 Как измерить ёмкость конденсатора?

12 Как измерить индуктивность катушки?

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Общее сопротивление прибора (рис. 7): $R = U/I$, $R = 5, 10, 15$ и 20 кОм.

2 Приведенная погрешность прибора равна отношению максимальной абсолютной погрешности (ошибки) измерения к верхнему пределу шкалы прибора, выраженному в процентах: $\varepsilon_{\text{привед}} = \frac{\Delta A}{A_{\text{max}}} \cdot 100\%$. Абсолютная погрешность равна $\Delta A = \frac{\varepsilon_{\text{привед}} \cdot A_{\text{max}}}{100\%}$. Обычно минимальная цена деления шкалы равна максимальной абсолютной погрешности ΔA .

3 Относительная погрешность измерения равна отношению абсолютной погрешности ΔI к истинному значению $I_{\text{ист}}$, которое неизвестно, но, как правило, приблизительно равно среднему измеренному значению A : $\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%$.

Абсолютную погрешность можно найти из класса точности прибора:

$$\Delta I = \frac{I_{\text{max}} \cdot \varepsilon}{100\%} = \frac{5 \text{ А} \cdot 0,5\%}{100\%} = 0,025 \text{ А}.$$

$$\text{Итак, } \varepsilon_1 = \frac{0,025 \text{ А}}{2 \text{ А}} \cdot 100\% \approx 1,3\%, \quad \varepsilon_2 = \frac{0,025 \text{ А}}{4 \text{ А}} \cdot 100\% \approx 0,6\%.$$

Из этого примера видно, что чем ближе значение измеряемой величины A к верхнему пределу шкалы прибора, тем меньше относительная погрешность измерения. Поэтому, если у прибора есть возможность переключения на разные диапазоны, то нужно выбрать такой диапазон, на котором стрелка прибора отклоняется как можно ближе к концу шкалы.

4 В ваттметрах электродинамической системы неподвижная (токовая) катушка включается последовательно нагрузке, а подвижная катушка (катушка напряжения) включается в цепь параллельно нагрузке. Сила тока в подвижной катушке пропорциональна напряжению на нагрузке. Угол поворота подвижной катушки пропорционален магнитной индукции, созданной токовой катушкой, и силе тока в подвижной катушке. То есть угол отклонения пропорционален силе тока и напряжению на нагрузке, то есть пропорционален потребляемой мощности.

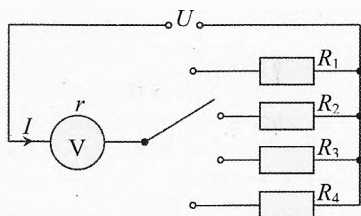


Рис. 7. Сопротивление вольтметра

5 Ваттметр, к которому подключили добавочное сопротивление, покажет в 2 раза меньшую мощность, т.к. по обмотке напряжения пойдет в два раза меньший ток, значит, чувствительность прибора вдвое уменьшится и стрелка отклонится на угол в 2 раза меньший. Если же кроме подключения добавочного сопротивления на прибор поставили новую соответствующую шкалу, то угол отклонения всё равно будет в 2 раза меньше, чем в другом, но оба ваттметра будут показывать одинаковую мощность.

6 Стрелка ваттметра без добавочного сопротивления отклонится до конца шкалы, то есть его показание будет равно максимально возможной мощности 750 Вт, которую может измерить данный прибор. Сила тока в токовой обмотке равна 3,4 А. Тем не менее, обмотка напряжения работает с перегрузкой (220 В вместо номинальных 150 В).

7 Постоянная счётчика равна энергии, проходящей через счётчик за один оборот диска: $k = \frac{W}{N}$, $k = \frac{1 \text{ кВт} \cdot \text{ч}}{2500 \text{ об}} = \frac{1 \text{ кВт} \cdot 3600 \text{ с}}{2500 \text{ об}} = 1,44 \text{ кДж/об.}$

$$\textbf{8} \quad P = \frac{W}{t} = \frac{W}{N \cdot t_1} = 0,8 \text{ кВт}, \quad I = \frac{P}{U} \approx 3,6 \text{ А}; \quad D = W \cdot \text{Тариф} = 360 \text{ руб.}$$

9 Можно фазометром измерить сдвиг фаз φ_c между силой тока и напряжением и найти активное сопротивление цепи: $R = \frac{U}{I \cdot \cos \varphi_c}$, где I и U – действующие значения силы тока и напряжения, измеряемые амперметром и вольтметром.

А можно измерить активную мощность $P_{\text{акт}}$ ваттметром и воспользоваться формулой $P_{\text{акт}} = I^2 \cdot R$, где действующее значение силы тока можно также измерить амперметром. Тогда, $R = \frac{P_{\text{акт}}}{I^2}$.

10 Активное сопротивление R цепи можно найти как в предыдущей задаче. Тогда реактивное сопротивление найдём из соотношения $X = R \cdot \operatorname{tg} \varphi_c$, где $\cos \varphi_c = \frac{U}{I \cdot R}$, φ_c – сдвиг фаз между током и напряжением, I и U – действующие значения силы тока и напряжения, измеряемые амперметром и вольтметром. Решая совместно, найдём реактивное сопротивление X цепи.

11 Ёмкость конденсатора нетрудно вычислить по его сопротивлению переменному току (рис. 8): $X_c = \frac{U}{I}$,

$X_c = \frac{1}{2\pi\nu C}$; $\Rightarrow C = \frac{I}{2\pi\nu U}$, где ν – частота переменного тока, I и U – действующие значения силы тока и напряжения.

12 Индуктивность катушки нетрудно вычислить по её сопротивлению переменному току (рис. 9): $X_L = \frac{U}{I}$, $X_L = 2\pi\nu L$; $\Rightarrow L = \frac{U}{2\pi\nu I}$, где ν – частота переменного тока, I и U – действующие значения силы тока и напряжения.

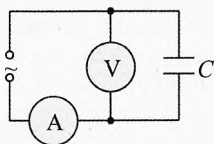


Рис. 8. Ёмкость конденсатора

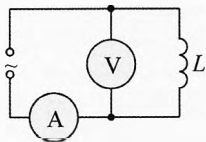


Рис. 9. Индуктивность катушки

Глава 5. Электромагнитные колебания

Тот, кто хочет видеть результаты своего труда немедленно, должен идти в сапожники.

Альберт Эйнштейн

Колебания – это движения, повторяющиеся точно или приблизительно через определённый промежуток времени.

Мы изучили механические колебания в разделе «Механика». Теперь изучим электрические, точнее, электромагнитные колебания, но для краткости будем иногда называть их просто электрическими.

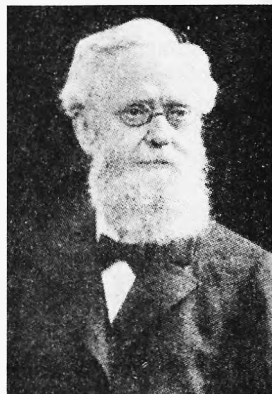
Механические колебания наблюдаются повсюду. Электромагнитные колебания тоже встречаются в природе, например удар молнии. Используемый нами электрический ток, как правило, представляет собой электромагнитные колебания. Но «увидеть», понять, почувствовать и описать электромагнитные колебания не просто.

§ 38. Открытие и наблюдение электромагнитных колебаний

В 1826 г. французский ученый Феликс Савар заметил, что при разрядке конденсатора (лейденской банки) через соленоид стальная игла, помещенная внутрь соленоида, намагничивается иногда противоположно тому, как должно быть, если бы банка постепенно разряжалась до нуля.

В 1842 г. опыты Савара повторил американский ученый югославского происхождения Джозеф Генри и пришёл к выводу, что разряд лейденской банки «не представляется... единичным переносом флюида с одной обкладки банки на другую», и что необходимо допустить существование «главного разряда в одном направлении, а затем несколько отраженных действий назад и вперед», каждое из которых является более слабым, чем предыдущее, продолжающимся до тех пор, пока не наступит равновесие.

Убедительное доказательство колебательного процесса при разряде конденсатора получил в 1860 г. немецкий физик Беренд Вильгельм Феддерсен. Он



Беренд Вильгельм Феддерсен (1832–1918)

наблюдал искровой разряд лейденской банки с помощью быстро вращающегося зеркала. В нём была видна не одна непрерывная светлая полоса от искры, а ряд чередующихся полос, отделённых тёмными промежутками. Фактически это была временная развертка быстрых колебаний.

Наблюдение свободных колебаний. Для наблюдения и исследования электрических колебаний используют электронный осциллограф.

Простейшей системой, в которой могут возникнуть электромагнитные колебания, является электрический колебательный контур, состоящий из соединённых между собой конденсатора и катушки индуктивности (рис. 1).

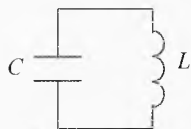


Рис. 1. Колебательный контур

Зарядим конденсатор колебательного контура от источника постоянного напряжения (рис. 2), а затем переведём ключ в положение 2 на катушку индуктивности L , концы которой подключены не только к конденсатору, но и на вывод «Y» осциллографа. При соответствующей частоте развертки по оси «X», которую мы можем подобрать с помощью ручек управления от внутреннего генератора

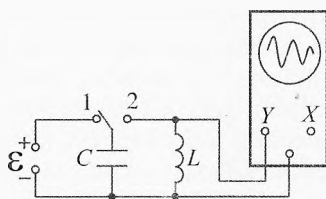


Рис. 2. Наблюдение затухающих колебаний

временной развертки, можно наблюдать затухающую синусоиду, подобную той, которую вычерчивает маятник с песочницей на движущемся листке картона. Электронный осциллограф «рисует», как изменяется разность потенциалов на конденсаторе с течением времени. Оно изменяется периодически и со временем убывает из-за электрического сопротивления цепи. Поскольку периодически изменяется сила тока в катушке и соединительных проводах, значит, меняется магнитное поле в катушке и её окрестностях.

Таким образом, периодические изменения заряда на конденсаторе и тока в катушке, сопровождающиеся изменением электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке, представляют собой **электромагнитные колебания**.

Эти колебания можно назвать *свободными* в том смысле, что внешние источники не влияют на характер протекания тока в контуре. Внешний источник сначала только зарядил конденсатор, а в дальнейшем был отключен. Частота колебаний и амплитуда силы тока определяются параметрами колебательной системы при известном значении полученной от источника энергии.

Но колебания эти не совсем свободны, т.к. трение в системе (электрическое сопротивление) мешает колебаниям и они постепенно затухают. Так что эти колебания можно назвать свободными затухающими. Практически в

любой свободной колебательной системе есть хотя бы небольшое трение. Поэтому любые свободные колебания являются затухающими.

Наблюдение вынужденных колебаний.

Проведём один из опытов Фарадея, демонстрирующий явление электромагнитной индукции (рис. 3).

Подсоединим катушку с медным изолированным проводом к гальванометру и будем периодически вдвигать в неё постоянный магнит и выдвигать. Ясно, что магнит совершает вынужденные механические колебания. При этом в катушке периодически меняется магнитное поле, которое вызывает появление вихревого электрического поля. Вихревое электрическое поле возбуждает ЭДС индукции в катушке и заставляет совершать вынужденные колебания электронов в цепи катушка–провода–гальванометр, то есть по цепи проходит переменный ток. Стрелка гальванометра, совершая вынужденные механические колебания, сигнализирует нам, что ток в цепи периодически изменяется.

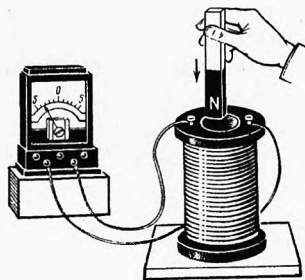


Рис. 3. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – это периодические движения нейтральных тел или заряженных частиц (тел) под действием внешних периодических сил. Вынужденные колебания происходят с частотой изменения вынуждающей внешней силы.

§ 39. Процессы, происходящие в электрическом колебательном контуре при свободных колебаниях

Соберём цепь, представленную на рис. 4. Замкнем ключ на контакт 1. При этом конденсатор C зарядится до напряжения, равного ЭДС источника \mathcal{E} .

Затем переведём ключ в положение 2. В первый момент к катушке индуктивности будет приложена разность потенциалов U , равная ЭДС источника \mathcal{E} (рис. 5а). Электрическое поле конденсатора заставит двигаться электроны по цепи. Однако возникающая в катушке ЭДС самоиндукции препятствует нарастанию тока. Аналогично тому, как растянутая пружина не может сразу придать большую скорость телу массой m , присоединённому к пружине.

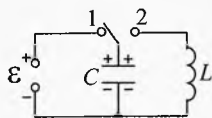


Рис. 4. Свободные колебания

Постепенно ток нарастает благодаря работе электрического поля конденсатора, и энергия электрического поля конденсатора переходит в энер-

гию магнитного поля катушки. Ток будет нарастать до тех пор, пока электрическое поле конденсатора будет заставлять электроны двигаться в начальном направлении. Когда конденсатор полностью разрядится, сила тока в катушке станет максимальной. При отсутствии электрического (омического) сопротивления, в соответствии с законом сохранения энергии:

$$E_{\text{эм}} = E_{\text{мт}};$$

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

По аналогии с горизонтальными свободными колебаниями груза на пружине это соответствует переходу пружины из максимально деформированного (растянутого) состояния в недеформированное, когда вся потенциальная энергия пружины перешла в кинетическую энергию груза (рис. 5б):

$$\frac{kX_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}. \quad (1)$$

Так заканчивается первая четверть периода колебаний тока в контуре. Затем конденсатор начнёт перезаряжаться. Теперь возникающее электрическое поле конденсатора препятствует протеканию тока, и сила тока уменьшается. В катушке возникает ЭДС самоиндукции, которая стремится поддержать убывающий ток. Она работает против электрического поля конденсатора и заставляет его заряжаться до всё большего значения заряда. Наконец, ток уменьшается до нуля, то есть вся энергия магнитного поля перешла в энергию электрического поля конденсатора. Так заканчивается вторая четверть периода колебаний в контуре. В механическом аналоге это соответствует максимальному сжатию пружины (рис. 5в).

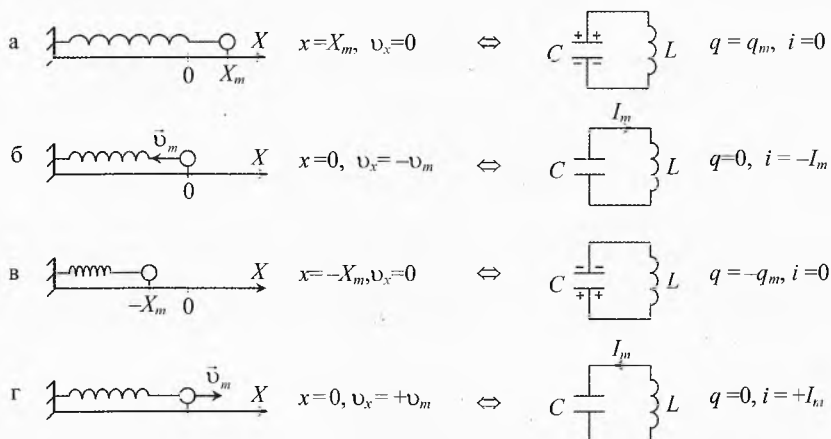


Рис. 5. Аналогия между механическими и электромагнитными колебаниями

Далее конденсатор вновь начнёт разряжаться, только в обратном направлении. В катушке возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая появлению

и нарастанию электрического тока. К концу третьей четверти периода конденсатор полностью разрядится, а его энергия перейдет в энергию магнитного поля катушки (рис. 5г). При этом ток в катушке будет максимальным.

В четвёртой четверти периода конденсатор будет заряжаться за счёт энергии магнитного поля катушки, и к концу периода система вернётся к исходному состоянию (рис. 5а). И всё повторится сначала.

В любой момент времени энергия колебательного контура будет неизменной (при отсутствии излучения и омического сопротивления), она будет складываться из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки:

$$W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}, \quad (2)$$

где q – заряд конденсатора, а i – сила тока в данный момент времени.

§ 40. Свободные механические колебания

Чтобы выяснить, как изменяется с течением времени значение силы тока в катушке, заряда и разности потенциалов на конденсаторе вспомним, как мы описывали механические колебания груза на пружине.

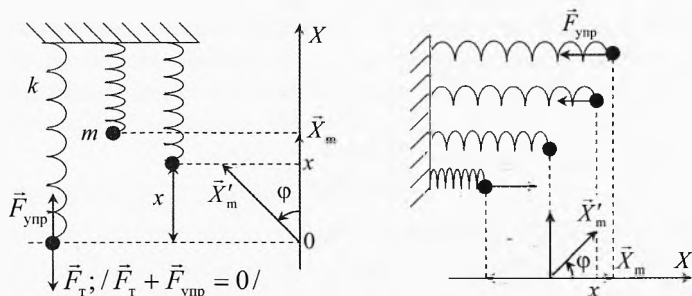


Рис. 6. При вертикальных и горизонтальных колебаниях груза на пружине вектор амплитуды синхронно вращаем с колеблющимся телом

В случае колебаний груза на пружине (рис. 6) сначала записали в соответствии со II законом Ньютона и законом Гука (при вертикальных колебаниях пружинного маятника можно не учитывать изменение потенциальной энергии, обусловленной силой тяжести, если начало отсчёта взять в положении равновесия, то есть при $\vec{F}_{\text{т}} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0$):

$$ma_x = -kx \quad \text{или} \quad a_x = -\frac{k}{m}x. \quad (3)$$

Далее сделали дополнительное построение. Поместили в положение равновесия груза начало вектора, длина которого равна амплитуде \vec{X}_m смещения груза, и договорились вращать его против часовой стрелки синхронно с колеблющимся грузом, то есть так, чтобы смещение груза x в любой момент времени было равно

проекция вектора амплитуды смещения \vec{X}_m на ось OX колебаний груза. Тогда смещение груза в любой момент времени легко вычислить:

$$x = X_m \cdot \cos \varphi, \quad (4)$$

где φ – угол поворота вектора амплитуды смещения от положительного направления оси против часовой стрелки. Каждому значению угла поворота φ соответствует определённое значение x .

Угол поворота φ вектора амплитуды смещения \vec{X}_m , синхронно вращающегося с колеблющимся грузом, называют фазой колебаний.

Фаза измеряется в угловых единицах – радианах или градусах. Если мы будем знать, как изменяется фаза с течением времени, то легко вычислим, где находится груз в любой момент времени по формуле (4).

Но какова зависимость фазы колебаний от времени?

Опыт показывает, что в случае квазиупругих колебаний (когда проекция вращающейся силы прямо пропорциональна смещению груза, взятому с обратным знаком), вектор амплитуды смещения \vec{X}_m должен вращаться с постоянной угловой скоростью ω , то есть

$$\varphi = \omega t. \quad (5)$$

Причём угловая скорость вращения вектора амплитуды смещения определяется параметрами колебательной системы. Например, для груза на пружине

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (3), получим:

$$a_x = -\omega^2 x \quad \text{или} \quad x'' = -\omega^2 x.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое в школе решить непросто. Но его решение получить можем, благодаря тому, что ввели понятие фазы колебаний. Действительно, подставив (5) в (4), получим:

$$x = X_m \cdot \cos \omega t.$$

Теперь легко найти и скорость колеблющегося груза как первую производную координаты x по времени:

$$v_x = x' = -X_m \omega \sin \omega t. \quad (8)$$

Нетрудно заметить, что амплитуда скорости:

$$v_m = X_m \omega, \quad (9)$$

Тогда:

$$v_x = -v_m \sin \omega t \quad \text{или} \quad v_x = v_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (10)$$

Теперь несложно узнать, как изменяется с течением времени кинетическая и потенциальная энергия колебательной системы:

$$E_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mX_m^2\omega^2}{2} \cdot \sin^2 \omega t, \quad (11)$$

$$E_n = \frac{kx^2}{2}.$$

Из (6) следует, что $k = m\omega^2$. С учетом (7) получим:

$$E_n = \frac{m\omega^2 X_m^2}{2} \cdot \cos^2 \omega t. \quad (12)$$

Выразим полную энергию колебательной системы:

$$E = E_k + E_{\text{п}} = \frac{m\omega^2 X_m^2}{2} \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t),$$

$$E = \frac{m\omega^2 X_m^2}{2}. \quad (13)$$

То есть полная энергия системы, совершающей квазиупругие колебания, остаётся неизменной с течением времени. Обратим внимание, что это справедливо для любых колебательных систем, в которых колебания происходят под действием квазиупругих сил.

Из (11), (12) и (13) видно, что кинетическая энергия системы:

$$E_k = E \cdot \sin^2 \omega t \quad \text{или} \quad E_k = E \cdot \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2}, \quad (14)$$

а потенциальная энергия:

$$E_{\text{п}} = E \cdot \cos^2 \omega t \quad \text{или} \quad E_{\text{п}} = E \cdot \frac{(1 + \cos 2\omega t)}{2}. \quad (15)$$

Частота изменения кинетической или потенциальной энергии квазиупругих колебаний в 2 раза больше частоты изменения смещения, скорости, ускорения.

Обратим внимание, что формулы (14) и (15) имеют самый общий вид и справедливы для любых квазиупругих колебаний, которые названы гармоническими, т. е. все изменяющиеся величины смещение, скорость, ускорение изменяются согласованно по одному и тому же синусоидальному закону.

Найдём период квазиупругих колебаний. Одно полное колебание происходит за промежуток времени, называемый периодом $t_1 = T$. За это время вектор амплитуды смещения совершает один оборот, то есть фаза при этом изменяется на $\varphi_1 = 360^\circ$ или 2π радиан. Поскольку $\varphi = \omega t$, то

$$2\pi = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (16)$$

Например, в случае колебаний груза на пружине

$$\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{тогда} \quad T_{\text{пр}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В случае колебаний математического маятника

$$\omega_{\text{м}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{значит} \quad T_{\text{м}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} - \text{формула Гюйгенса.}$$

Выразив ω из (16): $\omega = \frac{2\pi}{T}$, можем записать формулу для фазы колебаний:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t.$$

Наконец, учитывая, что $\frac{1}{T} = \nu$ — частота колебаний, получим:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Каков смысл этой формулы в колебаниях?

ν — частота колебаний; она равна числу колебаний, совершённых за единицу времени.

ω — это циклическая частота, то есть скорость изменения фазы колебаний. Она показывает, на сколько радиан изменяется фаза за одну секунду.

Например, при частоте колебаний 1 Гц, то есть при одном колебании в секунду, фаза изменяется на 2π рад в секунду (вектор амплитуды смещения поворачивается на 2π рад за один оборот). Поэтому понятно, что циклическая частота ω в 2π раз больше частоты ν .

§ 41. Описание гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре

Теперь вернёмся к электрическому колебательному контуру. Как было отмечено выше, при отсутствии тепловых потерь и излучения полная энергия колебательного контура остаётся неизменной и складывается из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2},$$

которые непрерывно изменяются симметрично друг другу. Например, насколько уменьшается энергия электрического поля за малый промежуток времени Δt , настолько же увеличивается за это время энергия магнитного поля.

Получим, как изменяется с течением времени разность потенциалов и заряд на конденсаторе, сила тока в катушке, энергия электрического и магнитного поля.

Продифференцируем по времени формулу для энергии колебательного контура:

$$W' = \left(\frac{q^2}{2C} \right)' + \left(\frac{Li^2}{2} \right)' = \frac{2qq'}{2C} + \frac{L2ii'}{2}.$$

Поскольку в идеальном колебательном контуре полная энергия не изменяется с течением времени ($W = \text{const}$), то производная её равна нулю: $W' = 0$.

Учитывая, что $q' = i$ — мгновенное значение силы тока, а также, что $i' = q''$, после сокращений получим:

$$q'' = -\frac{1}{LC}q.$$

Эта формула такая же по форме, как и дифференциальное уравнение квазиупругих колебаний:

$$x'' = -\omega^2 x.$$

А поскольку одинаковые законы приводят к одинаковым следствиям, то электромагнитные колебания можно тоже представить методом векторных диаграмм, как и квазиупругие механические колебания.

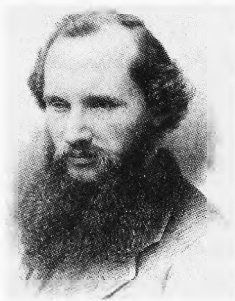
Из двух последних формул видно, что циклическая частота (угловая скорость вращения вектора амплитуды заряда в конденсаторе) в электрическом колебательном контуре вычисляется по формуле:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула для периода свободных электромагнитных колебаний в электрическом колебательном контуре называется *формулой Томсона* по имени английского физика Уильяма Томсона (Кельвина), который вывел её в 1853 г.



Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824–1907)

Аналогично формулам для смещения и проекции скорости квазиупругих колебаний $x = X_m \cos \omega t$ и $v = -v_m \sin \omega t$, где $v_m = X_m \omega$, получим формулы для мгновенного значения заряда на конденсаторе и силы тока в катушке:

$$q = q_m \cos \omega t, \quad i = -I_m \sin \omega t = I_m \cos \omega(t + \frac{\pi}{2})$$

Учитывая, что $u = \frac{q}{C}$, получим зависимость напряжения на конденсаторе от времени:

$$u = \frac{q_m}{C} \cdot \cos \omega t \quad \text{или} \quad u = U_m \cos \omega t$$

Представим векторную диаграмму свободных колебаний в электрическом колебательном контуре и графики изменения заряда на конденсаторе и силы тока в контуре (рис. 7).

В начальный момент, когда конденсатор был максимально заряжен, будем считать заряд положительным.

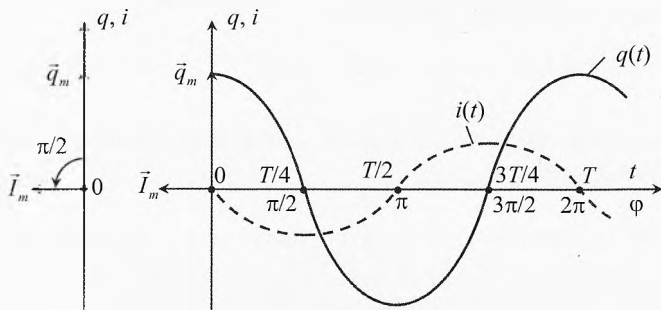


Рис. 7. Диаграмма и графики свободных колебаний

Когда же конденсатор разрядится и начнёт перезаряжаться и положительный заряд будет уже на другой обкладке, тогда заряд конденсатора будем считать отрицательным. Знак заряда в конденсаторе условен, он нужен нам для того, чтобы узнать, на какой обкладке находится в данный момент положительный заряд, а на какой – отрицательный.

Итак, в первой четверти периода заряд положителен ($q > 0$) и при этом он уменьшается ($\Delta q < 0$). По определению, сила тока $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, поэтому $i < 0$.

Из векторной диаграммы видно, что ток по фазе опережает на $\pi/2$ заряд на конденсаторе. Это значит, что сила тока в данный момент уже уменьшилась до нуля, а заряд на конденсаторе максимально положителен и уменьшится до нуля только через четверть периода, при этом фаза колебаний увеличится на $\pi/2$.

Вращая против часовой стрелки пару взаимно перпендикулярных векторов \vec{q}_m и \vec{I}_m , в проекции на ось колебаний получим значение заряда q и силы тока i в контуре в любой момент времени.

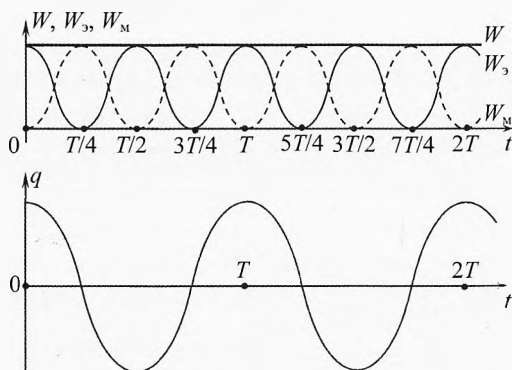


Рис. 8. Частота колебаний энергии вдвое больше, чем у заряда

Легко также построить графики зависимости $q(t)$ и $i(t)$.

Вычислим, как изменяется энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки индуктивности. Учтём, что полная энергия контура равна максимальной энергии конденсатора (в такие моменты энергия магнитного поля равна нулю) и максимальной энергии магнитного поля катушки (в моменты когда конденсатор разряжен):

$$W = W_{\text{эл}} = W_{\text{мг}}, \quad \text{где} \quad W_{\text{эл}} = \frac{q_m^2}{2C}; \quad W_{\text{мг}} = \frac{LI_m^2}{2};$$

$$W_3 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \cos^2 \omega t = W \cdot \cos^2 \omega t;$$

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \cdot \sin^2 \omega t = W \cdot \sin^2 \omega t.$$

Полная энергия контура:

$$W = W_3 + W_m = W \cdot \cos^2 \omega t + W \cdot \sin^2 \omega t = W(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = W.$$

Это соотношение было получено и для механических квазиупругих колебаний.

Обратим внимание на то, что частота изменения энергии электрического и магнитного поля в колебательном контуре в 2 раза больше частоты изменения заряда на конденсаторе или тока в катушке (рис. 8)

$$W_3 = W \cdot \cos^2 \omega t = W \cdot \frac{(1 + \cos 2\omega t)}{2}, \quad W_m = W \cdot \sin^2 \omega t = W \cdot \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2}.$$

Таблица 4. Аналогия между механическими и электрическими величинами при колебательных процессах

Механические величины	Электрические величины
m – масса груза	L – индуктивность катушки
k – жёсткость пружины	$\frac{1}{C}$ – величина, обратная электроёмкости конденсатора
x – растяжение пружины, смещение груза	q – заряд на конденсаторе
$v = \frac{dx}{dt}$ – скорость груза, скорость изменения координаты груза	$i = \frac{dq}{dt}$ – сила тока, скорость изменения заряда на конденсаторе
$a = \frac{dv}{dt} = x''$ – ускорение груза	$i' = \frac{di}{dt} = q''$ – скорость изменения силы тока
$F = m \cdot a$ – ускорение груза прямо пропорционально приложенной силе (второй закон Ньютона)	$u_L = -L i' = -L \frac{di}{dt}$ – напряжение на катушке индуктивности прямо пропорционально скорости изменения силы тока
$F_{\text{упр}} = -k \cdot x$ – сила упругости пропорциональна деформации пружины	$u_C = \frac{1}{C} \cdot q$ – напряжение на конденсаторе пропорционально заряду конденсатора
$a_x = -\frac{k}{m} \cdot x$ – уравнение гармонических колебаний груза на пружине	$q'' = -\frac{1}{LC} \cdot q$ – уравнение гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – циклическая частота и период колебаний	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; T = 2\pi\sqrt{LC}$ – циклическая частота и период колебаний

$E_n = \frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия деформированной пружины	$W_c = \frac{q^2}{2C}$ – энергия электрического поля заряженного конденсатора
$E_k = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия груза	$W_L = \frac{Li^2}{2}$ – энергия магнитного поля в катушке индуктивности
$P = mv$ – импульс груза	$\Phi = Li$ – магнитный поток в катушке индуктивности
Постоянная сила (например, сила тяжести F_T) не влияет на период колебаний, а лишь смещает положение равновесия (в положении равновесия деформация пружины равна $x_0 = F_T / k$)	Постоянное напряжение (например, источник с ЭДС \mathcal{E}) не влияет на период колебаний, а лишь смещает напряжение на конденсаторе (в положении равновесия заряд конденсатора равен $q_0 = C\mathcal{E}$)
$F_c = \beta v$ – сила сопротивления (например, со стороны воздуха)	$U_R = Ri$ – напряжение на активном сопротивлении

§ 42. Примеры решения задач

Пример 1. В схеме, изображённой на рис. 9, в момент времени $t = 0$ замыкают ключ К. Построить качественно графики зависимости силы тока I в цепи и напряжения U , показываемого вольтметром, от времени. Активным сопротивлением катушки пренебречь и считать, что вольтметр идеален и безынерционен, то есть в каждый момент показывает существующее на катушке напряжение.

Решение. При замыкании ключа К на катушке индуктивности появляется напряжение и в цепи начинает нарастать ток. Однако благодаря индуктивности катушки в ней возникает ЭДС самоиндукции, которая, согласно правилу Ленца, препятствует нарастанию тока в цепи. Током, проходящим через вольтметр, пренебрегаем благодаря его идеальности ($R_V \approx \infty$). Постепенно сила тока возрастёт до максимального значения, равного \mathcal{E}/R . По мере нарастания тока скорость его изменения убывает. График $I(t)$ имеет вид, показанный на рис. 10.

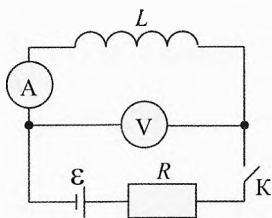


Рис. 9. Схема с катушкой индуктивности

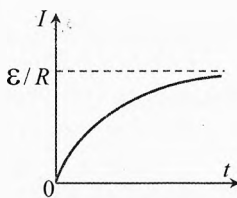


Рис. 10. Нарастание тока в катушке

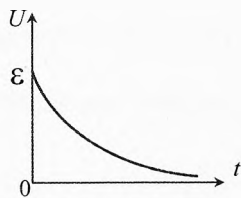


Рис. 11. Уменьшение напряжения в катушке

Напряжение, показываемое вольтметром, наоборот, убывает от первоначального значения, равного ЭДС источника питания, до нуля к моменту, когда ток станет постоянным. При постоянном токе через катушку ЭДС самоиндукции катушки обращается в нуль (рис. 11). Всё напряжение источника будет падать на резисторе R .

Это обстоятельство поясняет, почему скорость нарастания тока убывает со временем: напряжение на концах катушки, равное в каждый момент времени $L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$, убывает со временем. ←

✎ **Пример 2.** В схеме изображённой на рис. 12 в момент времени $t_0 = 0$ размыкают ключ K . Найти зависимость силы тока I в идеальном амперметре, от времени. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

→ **Решение.** Ток, идущий через катушку индуктивности до размыкания ключа K , как было установлено в предыдущей задаче, равен $I_0 = \mathcal{E} / r$. Ток через резистор R до размыкания ключа не идёт.

После размыкания ключа ток в цепи катушка-резистор-амперметр определяется значением ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке индуктивности $\mathcal{E}_{ci} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$. Знак «минус» в

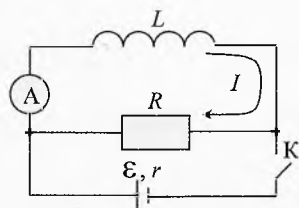


Рис. 12. Катушка в качестве аккумулятора энергии

этой формуле говорит о том, что ЭДС самоиндукции препятствует уменьшению тока. Поскольку после отключения внешнего напряжения ток I через катушку уменьшается ($dI/dt < 0$), то $\mathcal{E}_{ci} > 0$. Индукционный ток, идущий по рассматриваемой цепи обязан своим происхождением энергии магнитного поля катушки индуктивности. Значение этого тока определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{E}_{ci} / R \\ \mathcal{E}_{ci} &= -L \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned} \Rightarrow I = -\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot dt.$$

Интегрируя последнее уравнение $\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$, получим: $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} \cdot t$.

Потенцируя, окончательно получим:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

(17)

График зависимости (17) представлен на рис. 13. Чем больше индуктивность L и меньше сопротивление R , тем медленнее происходит исчезновение тока. Согласно (17) сила тока асимптотически стремится к нулю, так что полное исчезновение тока ($I = 0$) наступает только через бесконечно большое время ($t = \infty$). При $t_1 = L/R$ сила тока ослабевает в $e \approx 2,72$ раза. Однако практически исчезновение тока означает, что сила тока стала достаточно малой, соизмеримой с флуктуационным током, определяемым тепловым движением в проводниках. ➤

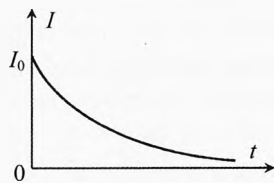


Рис. 13. Уменьшение силы тока в катушке

✎ **Пример 3.** Заряженный до напряжения U_0 конденсатор ёмкости C в момент времени $t_0 = 0$ замыкают ключом K на резистор сопротивлением R (рис. 14). Найти зависимость напряжения на конденсаторе и модуля силы тока в цепи от времени.

➤ **Решение.** После замыкания ключа конденсатор начнёт разряжаться через резистор. Согласно закону Ома

$$I = \frac{U}{R}, \quad (18)$$

где I – модуль силы тока, U – напряжение на конденсаторе в данный момент.

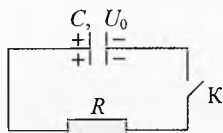


Рис. 14. Разряд конденсатора

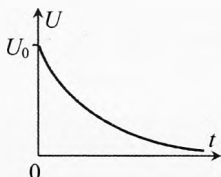


Рис. 15. Уменьшение напряжения на конденсаторе

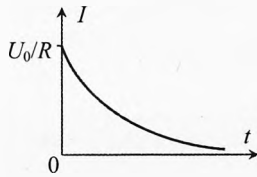


Рис. 16. Уменьшение силы тока в цепи

В начальный момент ток максимален: $I_0 = \frac{U_0}{R}$.

По мере разрядки конденсатора напряжение и ток будут уменьшаться. Значит, заряд на конденсаторе $q = CU$ тоже будет уменьшаться:

$$dq = C \cdot dU, \quad dq < 0. \quad (19)$$

Поэтому для силы тока удобно использовать формулу:

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (20)$$

Решая совместно (18), (19) и (20), получим:

$$-\frac{C \cdot dU}{dt} = \frac{U}{R}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} \cdot dt.$$

Проинтегрируем последнее выражение от начала процесса до произвольного момента времени:

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t dt, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{RC}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}.$$

График зависимости напряжения на конденсаторе при разрядке представлен на рис. 15.

Модуль силы тока $I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$, также как и напряжение, уменьшается по экспоненциальному закону (рис. 16).

За промежуток времени $t_1 = RC$, называемым *характерным временем разрядки конденсатора* (или характерным временем RC -цепочки), напряжение на конденсаторе уменьшится в $e \approx 2,72$ раза. За время $t_2 = 2RC$ в $e^2 \approx 7,4$ раз, а за время $t_3 = 3RC$ – в $e^3 \approx 20$ раз. Конденсатор к этому времени практически разрядится. Например, если $C = 1$ мкФ, $R = 1$ кОм, то $t_1 = 10^{-3}$ с = 1 мс. Значит, напряжение на конденсаторе уменьшится в 20 раз за 3 мс.

Зависимость напряжения при разрядке конденсатора от времени легко наблюдать на опыте. Если в эту цепь параллельно конденсатору включить вольтметр, то после замыкания ключа стрелка вольтметра сначала резко отклонится, а затем медленно начнет смешаться в сторону начала шкалы.

Меняя резисторы и заряжая конденсатор каждый раз до одного и того же напряжения, можно заметить, что чем больше сопротивление резистора и чем больше ёмкость конденсатора, тем медленнее разряжается конденсатор. ←

✎ **Пример 4.** Цепь состоит из последовательно соединённых источника тока с ЭДС \mathcal{E} , резистора сопротивлением R , незаряженного конденсатора ёмкостью C и ключа K (рис. 17). Построить график зависимости силы тока в цепи и напряжения на конденсаторе от времени, начиная с момента замыкания ключа.

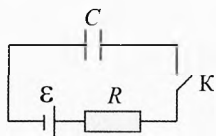


Рис. 17. Зарядка конденсатора

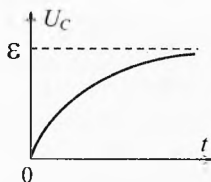


Рис. 18. Нарастание напряжения в конденсаторе

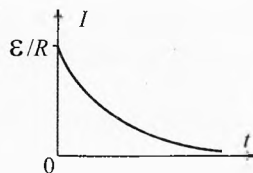


Рис. 19. Падение силы тока в цепи

→ **Решение.** При замыкании ключа K в цепи практически мгновенно возникает ток $I_0 = \mathcal{E}/R$, поскольку индуктивности в цепи нет, а следовательно, отсутствует ЭДС самоиндукции, которая могла бы препятствовать нарастанию тока. Благодаря этому току конденсатор заряжается. По мере увеличения заряда конденсатора растёт напряжение U_C на нём, что приводит к уменьшению тока в цепи: $I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}$.

По определению, сила тока равна $I = \frac{dq}{dt}$

Напряжение на конденсаторе: $U_C = \frac{q}{C}$.

Решая совместно три последних уравнения, получим:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}.$$

Заметим, что $d(q - C\mathcal{E}) = dq$, так как $C\mathcal{E} = \text{const}$. Тогда

$$\frac{d(q - C\mathcal{E})}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}.$$

Проинтегрируем последнее выражение:

$$\int \frac{d(q - C\mathcal{E})}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int dt \quad \text{или} \quad \ln \left(\frac{q - C\mathcal{E}}{q_0 - C\mathcal{E}} \right) = -\frac{t - t_0}{RC}.$$

Изначально конденсатор не заряжен: $t_0 = 0$, $q_0 = 0$.

Тогда $\ln \left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} \right) = -\frac{t}{RC}$ или $\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}}.$

Следовательно, заряд конденсатора со временем возрастает, приближаясь к значению $C\mathcal{E}$:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Напряжение на конденсаторе тоже возрастает до \mathcal{E} (рис. 18):

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Сила тока в цепи убывает со временем (рис. 19):

$$I = q' = C\mathcal{E} \left(0 - \frac{-e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

✎ **Пример 5*.** Цепь, изображённая на рис. 20, состоит из источника ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В, к которому подключены последовательно катушка индуктивности $L = 0,1$ Гн, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ и ключ К. Вначале ключ разомкнут, а конденсатор не заряжен. После замыкания ключа в цепи возникают электромагнитные колебания. Найти максимальную скорость нарастания тока. Чему равна амплитуда силы тока I_m , максимальное напряжение U_m на конденсаторе и период колебаний? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

✎ **Решение.** Сразу после замыкания ключа разность потенциалов на катушке максимальна и равна ЭДС источника. Значит, скорость изменения силы тока максимальна вначале:

$$\mathcal{E} = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}}{L} = 120 \text{ А/с.}$$

Сила тока в катушке будет монотонно возрастать и достигнет максимального значения I_m к тому моменту, когда разность потенциалов на конденсаторе станет равной ЭДС источника. К этому моменту разность потенциалов на катушке уменьшится до нуля.

Согласно закону сохранения энергии работа сторонних сил источника идёт на увеличение энергии магнитного поля катушки (работа против ЭДС самоиндукции) и на зарядку конденсатора (работа против электрического поля конденсатора):

$$\mathcal{E}q = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \quad (21)$$

где q – заряд, прошедший по цепи за это время. Он равен заряду, пришедшему на конденсатор:

$$q = C\mathcal{E}. \quad (22)$$

Подставляя (22) на (21), получим: $I_m = \mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,12 \text{ А.}$

К этому моменту закончится четверть периода колебаний.

Во второй четверти периода, ток будет идти в том же направлении. Сторонние силы источника и ЭДС самоиндукции катушки будут совершать положительную работу, отдавая совместно энергию конденсатору.

Для нахождения максимального напряжения на конденсаторе запишем закон сохранения энергии для первой половины периода (от замыкания ключа до максимальной зарядки конденсатора):

$$A_{\text{ст}} = \Delta W_m + \Delta W_c, \text{ или } \mathcal{E}q_m = 0 + \frac{q_m^2}{2C} \Rightarrow q_m = 2C\mathcal{E}.$$

Максимальное напряжение на конденсаторе:

$$U_m = \frac{q_m}{C} \Rightarrow U_m = 2\mathcal{E} = 24 \text{ В.}$$

В третьей четверти периода конденсатор разряжается. Энергия электрического поля конденсатора переходит в энергию магнитного поля катушки. Поскольку теперь ток идёт против ЭДС источника, то источник совершает отрицательную работу, заряжаясь от конденсатора.

В тот момент, когда напряжение на конденсаторе уменьшится от $2\mathcal{E}$ до \mathcal{E} , ток в катушке вновь достигнет максимального значения (но теперь он течёт в обратном направлении).

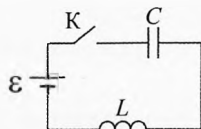


Рис. 20. Колебательный контур с источником

В четвёртой части периода, катушка отдаёт энергию источнику, а конденсатор разряжается до разности потенциалов, равной нулю.

Затем процесс повторится.

Вычислим период колебаний в этом контуре (с источником ЭДС). Запишем закон сохранения энергии для бесконечно малого промежутка времени dt :

$$\delta A_{\text{ср}} = dW_{\text{с}} + dW_{\text{л}} \quad \text{или} \quad \mathcal{E} \cdot dq = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) + d\left(\frac{Li^2}{2}\right),$$

где i и q – мгновенные значения силы тока и заряда.

Раскроем скобки в дифференциалах последнего уравнения:

$$\mathcal{E} \cdot dq = \frac{2q \cdot dq}{2C} + \frac{L \cdot (2i \cdot di)}{2}.$$

Подставляя выражение для заряда ($dq = i \cdot dt$), получим:

$$\mathcal{E} \cdot i \cdot dt = \frac{2q \cdot i \cdot dt}{2C} + \frac{L \cdot (2i \cdot di)}{2} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{di}{dt} = q''$, запишем: $q'' = -\frac{1}{LC} \cdot (q - C\mathcal{E})$.

Произведём замену переменной, обозначив $q_* = q - C\mathcal{E}$. Тогда

$$(q_* + C\mathcal{E})'' = -\frac{1}{LC} q_* \Rightarrow \boxed{q_*'' = -\frac{1}{LC} q_*}.$$

Здесь учтено, что производная от постоянной величины равна нулю:

$$q_*'' = (q - C\mathcal{E})'' \Rightarrow q_*'' = q''.$$

Итак, мы получили уравнение гармонических колебаний, аналогичное уравнению механических колебаний $x'' = -\omega^2 x$.

Следовательно, период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$. А это есть формула Томсона.

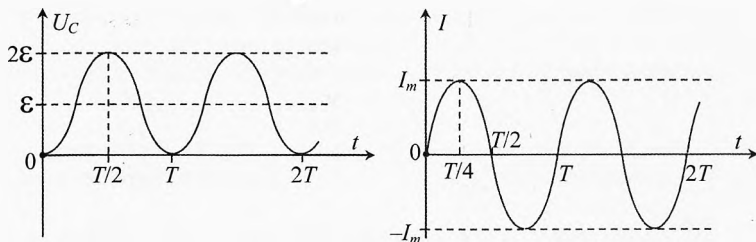


Рис. 21. Зависимость заряда конденсатора и силы тока от времени

Значит, последовательно подключенный источник постоянной ЭДС, не влияет на период колебаний контура, также как постоянная сила не влияет на период квазиупругих механических колебаний.

Найдём теперь зависимость заряда и напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи от времени. Общее решение уравнения гармонических колебаний можно представить в виде

$$q_* = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

где A и φ_0 – некоторые константы, зависящие от начальных условий колебаний.

Так как $q = q_0 + C\varepsilon$, то $q = C\varepsilon + A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

В начальный момент времени (при $t = 0$) конденсатор был не заряжен ($q = 0$):

$$0 = C\varepsilon + A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow A = -\frac{C\varepsilon}{\cos \varphi_0}.$$

Зависимость силы тока от времени можно найти, взяв производную заряда по времени:

$$I = q' = (C\varepsilon + A \cos(\omega t + \varphi_0))' = 0 - A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

В начальный момент времени (при $t = 0$) ток в цепи не шёл ($I = 0$):

$$0 = -A\omega \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0).$$

Значит, $\varphi_0 = 0$. Тогда $A = -\frac{C\varepsilon}{\cos 0} \Rightarrow A = -C\varepsilon$.

Итак, зависимость заряда на конденсаторе от времени: $q = C\varepsilon(1 - \cos \omega t)$.

Зависимость напряжения на конденсаторе от времени: $U_C = \varepsilon(1 - \cos \omega t)$.

Зависимость силы тока от времени (рис. 21): $I = C\varepsilon\omega \sin \omega t$.



Упражнения

1 Зависимость напряжения на клеммах конденсатора в колебательном контуре от времени представлена на рис. 22. Какое преобразование энергии происходит в контуре в промежутке от 6 до 8 мс?

2 Зависимость силы тока в колебательном контуре с антенной от времени представлен на рис. 23. Определить длину электромагнитной волны, излучаемой антенной.

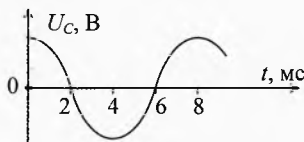


Рис. 22. Напряжение на конденсаторе

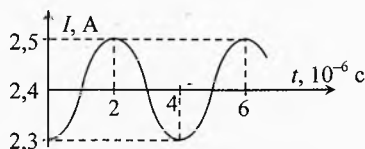


Рис. 23. Найти длину электромагнитной волны

3 Что произойдет с периодом собственных колебаний в колебательном контуре, если его ёмкость увеличить в 3 раза, а индуктивность уменьшить в 3 раза?

4 Колебательный контур состоит из лейденских банок общей ёмкостью $C = 6 \cdot 10^3$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 11$ мкГн. Вычислить частоту свободных электромагнитных колебаний в контуре.

5 При сравнении колебаний пружинного маятника и электрического колебательного контура было установлено, что период колебаний скорости груза пружинного маятника в 4 раза меньше периода колебаний энергии магнитного поля катушки индуктивности в колебательном контуре. Во сколько раз частота колебаний смещения груза пружинного маятника больше частоты колебаний заряда на обкладках конденсатора в колебательном контуре?

6 Заряд конденсатора электрического колебательного контура меняется по закону $q = 10^{-4} \cdot \sin(10^3 \cdot t)$, где все величины выражены в СИ. Ёмкость конденсатора $C = 10$ мкФ. Определить максимальную энергию катушки?

7 В колебательном контуре с частотой собственных колебаний $\nu_1 = 30$ кГц, при замене конденсатора частота стала равна $\nu_2 = 40$ кГц. Какой будет частота колебаний в контуре: а) при параллельном соединении обоих конденсаторов; б) при последовательном соединении?

8 Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из соленоида длиной $l = 3$ см, площадью поперечного сечения $S_1 = 1$ см² и плоского воздушного конденсатора, площадь пластин которого $S_2 = 30$ см² и расстояние между которыми $d = 0,1$ см. Число витков соленоида $N = 1000$.

9 В колебательном контуре сила тока свободных колебаний с течением времени изменяется по закону $i = 0,01 \cdot \cos(1000 \cdot t)$. Ёмкость конденсатора в контуре $C = 10$ мкФ. Найти индуктивность контура и максимальное напряжение на обкладках конденсатора.

10 Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора для момента времени $t = T/8$, если в момент времени $t = 0$ вся энергия была сосредоточена в конденсаторе.

11 Колебательный контур составлен из дросселя индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 10^{-5}$ Ф. В момент, когда напряжение на конденсаторе $u = 1$ В, сила тока в контуре $i = 0,01$ А. Найти максимальную силу тока в контуре.

12 Индуктивность колебательного контура, собственная частота которого $\nu = 1$ МГц, равна $L = 0,2$ Гн. Омическое сопротивление $R = 0,2$ Ом. На сколько процентов уменьшится энергия этого контура за время одного полного колебания? На протяжении одного колебания можно считать, что амплитуда силы тока меняется очень мало.

13 Какова средняя сила взаимодействия в вакууме пластин конденсатора C (рис. 24): а) сразу после замыкания ключа K ; б) после затухания колебаний? Расстояние между пластинами конденсатора d . Начальный заряд конденсатора равен нулю.

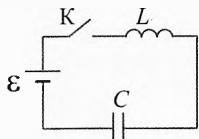


Рис. 24. Найти силу притяжения пластин конденсатора

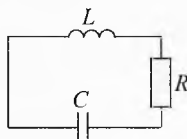


Рис. 25. Поддержание незатухающих колебаний изменением параметров схемы

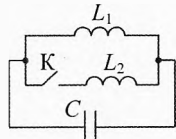


Рис. 26. Подключение второй катушки

14 (МФТИ-2000). Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рис. 25, ёмкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔC ($\Delta C \ll C$) каждый раз, когда напряжение на нём равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔC , если $L = 0,1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф, $R = 30$ Ом.

15 (МФТИ-2000). Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рис. 25, индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить ΔL , если $L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.

16 (МФТИ-2001). При разомкнутом ключе К в LC -контуре (рис. 26) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0 , замыкают ключ К. Определить максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.

17 (МФТИ-2001). Проводник массой m и длиной l подвешен к непроводящему потолку за концы с помощью двух одинаковых пружин жёсткостью k каждая. К верхним концам пружин подсоединён конденсатор ёмкостью C . Вся конструкция висит в однородном магнитном поле индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости конструкции (рис. 27). Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определить скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

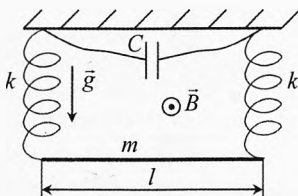


Рис. 27. Электромагнитные колебания

18 (МФТИ-2002). В схеме, изображённой на рис. 28, при разомкнутом ключе К напряжение на конденсаторе ёмкостью C равно 5ε , ЭДС батареи ε . Какой максимальный ток будет течь через катушку индуктивностью L после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением пренебречь.

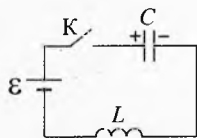


Рис. 28. Найти максимальный ток

19 (МФТИ-2004). В схеме, изображённой на рис. 29, в начальный момент ключ K_1 разомкнут, ключ K_2 замкнут, а конденсаторы C_1 и C_2 не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1 , а в тот момент, когда ток в цепи достигает максимального значения, размыкают ключ K_2 . Найти заряд на конденсаторе C_2 к моменту, когда заряд на конденсаторе C_1 достигнет максимального значения. Внутренним сопротивлением батареи с ЭДС ε и омическим сопротивлением катушки пренебречь. Найти период колебаний после замыкания ключа K_2 .

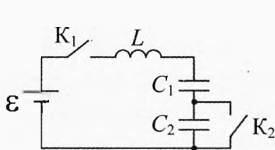


Рис. 29. Подключение второго конденсатора

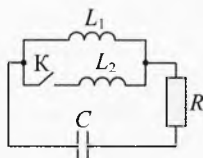


Рис. 30. Подключение второй катушки

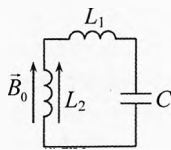


Рис. 31. Выключение внешнего магнитного поля

20 (МФТИ-2004). В LC -контуре при разомкнутом ключе К происходят колебания (рис. 30). В тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно U_0 , а ток через катушку L_1 равен I_0 , замыкают ключ К. Считая заданными U_0 , I_0 , L_1 , L_2 и C , определить полное количество теплоты, которое выделилось в резисторе R после замыкания ключа К. Омическое сопротивление катушек считать равным нулю.

21 (МФТИ-2005). В колебательном контуре, включающем в себя конденсатор ёмкостью C и две катушки самоиндукции с индуктивностями L_1 и L_2 , происходят гармонические колебания (рис. 31). Катушка L_2 с числом витков N и площадью одного витка S расположена в однородном стационарном магнитном поле индукцией B_0 , перпендикулярной плоскости витков. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения U_0 , магнитное поле выключают. Время спада магнитного поля много меньше периода колебаний в контуре. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводящих проводов, определить значение максимального тока в контуре после выключения магнитного поля.

22 Кольцо из сверхпроводника помещено в однородное магнитное поле, индукция которого возрастает от 0 до B_0 . Плоскость кольца перпендикулярна индукции поля. Определить силу индукционного тока, возникающего в кольце. Радиус кольца r , индуктивность L .

23 (МИЭТ-2004). На длинный соленоид вблизи его середины намотана короткая катушка из $N = 100$ витков радиуса $r = 2$ см. Выводы катушки подключены к конденсатору. По обмотке соленоида течёт постоянный ток, создающий внутри него практически однородное магнитное поле индукцией \vec{B} , параллельной оси соленоида. После быстрого выключения тока в соленоиде напряжение на конденсаторе начинает периодически меняться с частотой $\omega = 10^4$ рад/с и амплитудой $U_m = 10$ В. Определить индукцию магнитного поля B . Сопротивлением катушки пренебречь.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Энергия магнитного поля катушки преобразуется в энергию электрического поля конденсатора.

2 $\lambda = c \cdot T = 1200$ м, где $T = 4 \cdot 10^{-6}$ с, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

3 $T_1 = 2\pi\sqrt{LC}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3}} \cdot 3C = T_1$.

4 $v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 620$ Гц.

5 $T_{W_L} = 4T_u$ (по условию), $v_x = v_u = \frac{1}{T_u}$, $v_q = \frac{v_{W_L}}{2} = \frac{1}{2T_{W_L}}$; $\Rightarrow \frac{v_x}{v_q} = 8$.

6 $q_m = 10^{-4}$ Кл, $W_{Lm} = W_{Cm} = \frac{q_m^2}{2C} = 0,5$ мДж.

7 $v_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$, $\Rightarrow C_1 = \frac{1}{4\pi^2 v_1^2 L}$. Аналогично, $C_2 = \frac{1}{4\pi^2 v_2^2 L}$.

а) $C_{\text{пар}} = C_1 + C_2$, $v_{\text{пар}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\text{пар}}}} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 24$ кГц;

б) $\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, $v_{\text{посл}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\text{посл}}}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 50$ кГц.

$$\mathbf{8} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S_1}{l}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 S_2}{d}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi N} \cdot \sqrt{\frac{d}{\mu_0 \varepsilon_0 S_1 S_2}} = 0,48 \text{ МГц.}$$

$$\mathbf{9} \quad \omega = 1000 \text{ рад/с}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{C\omega^2} = 0,1 \text{ Гн};$$

$$I_m = 0,01 \text{ А}, \quad \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad U_m = I_m \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 1 \text{ В}$$

$$\mathbf{10} \quad W_{C_0} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad W_C = \frac{C}{2} \cdot \left(U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8}\right) \right)^2 = \frac{CU_m^2}{4} = \frac{W_{C_0}}{2},$$

$$W_L = W_{C_0} - W_C = \frac{W_{C_0}}{2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{W_L}{W_C} = 1.$$

$$\mathbf{11} \quad \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad I_m = \sqrt{i^2 + \frac{C}{L}u^2} = 0,012 \text{ А.}$$

$$\mathbf{12} \quad W = \frac{LI_m^2}{2}, \quad i = I_m \cdot \sin \omega t, \quad p_R = i^2 \cdot R = I_m^2 R \sin^2 \omega t. \text{ Средняя за период мощ-}$$

$$\text{ность, выделяемая на резисторе: } P_R = \bar{p}_R = I_m^2 R \overline{\sin^2 \omega t} = I_m^2 R \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{I_m^2 R}{2}.$$

$$\text{Энергия контура за один период уменьшится на } |\Delta W| = P_R \cdot T = \frac{I_m^2 R}{2} \cdot \frac{1}{\nu}.$$

$$\text{Тогда: } \frac{|\Delta W|}{W} = \frac{R}{\nu L} = 10^{-6} = 0,0001 \text{ \%}.$$

13 а) $F_0 = 0$, в начальный момент времени напряжение на конденсаторе равно нулю, т.к. катушка препятствует появлению тока; б) после затухания колебаний напряжение на конденсаторе будет равно \mathcal{E} . Сила притяжения одной пластины к другой: $F = q \cdot E_+ = \frac{q \cdot \mathcal{E}}{2}$, $q = C\mathcal{E}$, $E = \frac{\mathcal{E}}{d}$; $\Rightarrow F = \frac{C\mathcal{E}^2}{2d}$.

14 Поскольку активное сопротивление цепи мало и изменение ёмкости тоже мало ($\Delta C \ll C$), то в контуре происходят почти синусоидальные колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Поскольку ёмкость конденсатора увеличивают, когда он разряжен, то работа для этого не требуется. Через четверть периода конденсатор заряжен максимально и для уменьшения ёмкости (увеличения расстояния между обкладками) внешняя сила должна совершить положительную работу, благодаря которой увеличивается энергия конденсатора. За время изменения ёмкости заряд конденсатора практически не изменится (катушка не позволит быстро увеличиться силе тока).

Найдём изменение энергии конденсатора за время уменьшения его ёмкости от $(C + \Delta C)$ до C :

$$\Delta W = W_{C_2} - W_{C_1} = \frac{q_m^2}{2C} - \frac{q_m^2}{2(C + \Delta C)} = \frac{q_m^2}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C(C + \Delta C)} \approx \frac{q_m^2 \Delta C}{2C^2}.$$

Учитывая, что $I_m = q_m \cdot \omega$ и $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим: $q_m^2 = I_m^2 \cdot LC$. Тогда:

$$\Delta W \approx \frac{I_m^2 \cdot L \cdot \Delta C}{2C}.$$

Емкость увеличивают и уменьшают по два раза за период. Найдём количество тепла, которое выделится на резисторе за половину периода:

$$Q = I_{\text{эф}}^2 R \frac{T}{2} = \frac{I_m^2 R T}{4},$$

где $I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ – эффективное (действующее) значение силы тока.

Чтобы колебания были незатухающими потери тепла должны компенсироваться работой внешней силы, уменьшающей ёмкость конденсатора:

$$Q = \Delta W \Rightarrow \frac{I_m^2 R T}{4} = \frac{I_m^2 \cdot L \cdot \Delta C}{2C}.$$

Итак, изменение ёмкости равно $\Delta C = \frac{R T C}{2L} = \pi R C \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 9,4 \text{ нФ}$.

15 Поскольку активное сопротивление цепи мало и изменение индуктивности тоже мало ($\Delta L \ll L$), то в контуре происходят почти синусоидальные колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Увеличение индуктивности не требует работы, т.к. в это время сила тока равна нулю. Когда же уменьшают индуктивность (слегка растягивают катушку) при максимальном значении тока внешняя сила совершает положительную работу против силы притяжения витков. Благодаря чему контур получает дополнительную энергию, которая компенсирует потери энергии на тепло.

За малое время уменьшения индуктивности полный собственный магнитный поток Φ не изменится. Действительно, второе правило Кирхгофа для колебательного контура примет вид:

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = U_C + U_R \quad \text{или} \quad \Delta\Phi = -(U_C + U_R) \cdot \Delta t.$$

Поскольку время изменения индуктивности мало ($\Delta t \approx 0$), можно считать, что магнитный поток в катушке сохраняется за малое время Δt :

$$\Delta\Phi \approx 0 \Rightarrow \Phi_2 \approx \Phi_1.$$

Если до уменьшения индуктивности сила тока была равна I_{m1} , а после – I_{m2} , то

$$L \cdot I_{m2} = (L + \Delta L) \cdot I_{m1} \Rightarrow I_{m2} = I_{m1} \cdot \frac{L + \Delta L}{L}.$$

Найдём изменение энергии магнитного поля катушки за время уменьшения индуктивности катушки от $(L + \Delta L)$ до L :

$$\Delta W = \frac{L I_{m2}^2}{2} - \frac{(L + \Delta L) I_{m1}^2}{2}.$$

Подставляя выражение для I_{m2} , после преобразований получим:

$$\Delta W = \frac{I_{m1}^2 \cdot \Delta L}{2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right).$$

Учитывая, что изменения индуктивности мало ($\Delta L \ll L$), и сила тока тоже изменяется незначительно ($I_{m1} \approx I_{m2} \approx I_m$), получим:

$$\Delta W \approx \frac{I_m^2 \cdot \Delta L}{2}.$$

Индуктивность увеличивают и уменьшают по два раза за период. Найдём количество тепла, которое выделится на резисторе за половину периода:

$$Q = I_{\text{эф}}^2 R \cdot \frac{T}{2} = \frac{I_m^2 RT}{4},$$

где $I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ – эффективное (действующее) значение силы тока.

Чтобы колебания были незатухающими потери тепла должны компенсироваться работой внешней силы, уменьшающей индуктивность катушки:

$$Q = \Delta W \Rightarrow \frac{I_m^2 RT}{4} = \frac{I_m^2 \Delta L}{2}.$$

Итак, изменение индуктивности равно $\Delta L = \frac{RT}{2} = \pi R \sqrt{LC} = 9,4 \text{ мГн}$.

16 Пусть ток в первой катушке идёт слева направо. Конденсатор начинает заряжаться. На нём и на второй катушке начнёт появляться разность потенциалов. Во второй катушке пойдет ток справа налево. В тот момент, когда ток во второй катушке сравняется с током в первой катушке ($|I_1| = |I_2|$), ток через конденсатор будет равен нулю, а значит, напряжение на нём будет максимально (U_m).

Согласно закону сохранения энергии от момента замыкания ключа до момента с максимальным напряжением на конденсаторе:

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2}.$$

Разность потенциалов на катушках одинакова, т.к. они соединены параллельно (ток считаем условно положительным, если он в катушке идёт слева направо):

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow L_1 \cdot dI_1 = L_2 \cdot dI_2.$$

К моменту, когда токи в катушках сравняются по модулю ($I_1 = I$, $I_2 = -I$):

$$L_1 \cdot (I - I_0) = L_2 \cdot ((-I) - 0) \Rightarrow I = \frac{L_1 \cdot I_0}{(L_1 + L_2)}.$$

Подставляя последнее выражение в закон сохранения энергии, получим:

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2) \cdot L_1^2 \cdot I_0^2}{2(L_1 + L_2)^2} \Rightarrow U_m = I_0 \cdot \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C(L_1 + L_2)}}.$$

17 После того, как проводник отпустят, возникнут механические колебания в системе, а также колебания заряда на конденсаторе и тока в проводнике и пружинах. Поскольку, по условию, индуктивность провода и пружин мала, то энергией магнитного поля контура можно пренебречь. При движении провода в магнитном поле в нём возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = B\dot{\nu}$. Точно такое же напряжение будет и на конденсаторе: $U = B\dot{\nu}$.

Начало отсчёта для вычисления баланса энергий возьмем в положении равновесия. При этом изменение потенциальной энергии силы тяжести скомпенсировано начальным удлинением пружин. Согласно закону сохранения кинетическая энергия провода и энергия конденсатора в положении равновесия равна начальной потенциальной энергии упруго деформированных (растянутых) пружин:

$$2 \cdot \frac{k h^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{m \nu^2}{2}.$$

Подставляя выражение для напряжения на конденсаторе $U = B\dot{\nu}$, получим:

$$\nu = h \cdot \sqrt{\frac{2k}{m + C(B\dot{\nu})^2}}.$$

18 Ток возрастает до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не уменьшится до напряжения $U = \mathcal{E}$. В этот момент напряжение на катушке равно нулю. Работа источника будет отрицательна:

$$A_{\text{сг}} = \mathcal{E}q = \mathcal{E} \cdot (C\mathcal{E} - 5C\mathcal{E}) = -4C\mathcal{E}^2 < 0.$$

По закону сохранения энергии: $A_{\text{сг}} = W_L + W_C - W_{C0}$. Значит,

$$-4C\mathcal{E}^2 = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C(5\mathcal{E})^2}{2} \Rightarrow I_m = 4\mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

19 Сразу после замыкания ключа K_1 разность потенциалов на катушке максимальна и равна ЭДС источника. Сила тока в катушке будет монотонно возрастать и достигнет максимального значения I_m . К этому моменту разность потенциалов на катушке станет равной нулю, а разность потенциалов на конденсаторе станет равной ЭДС источника.

Согласно закону сохранения энергии благодаря работе сторонних сил источника появляется энергия магнитного поля катушки (работа против ЭДС индукции) и энергия в конденсаторе (работа против электрического поля конденсатора):

$$\mathcal{E}q = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2}, \quad (1)$$

где q – заряд, прошедший по цепи за это время. Он равен заряду, пришедшему на конденсатор C_1 :

$$q = C_1\mathcal{E}. \quad (2)$$

Подставляя (2) на (1), получим: $I_m = \mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L}}$.

В этот момент замыкают ключ K_2 (который шунтировал конденсатор C_2). Теперь ток пойдет через оба конденсатора. Найдём заряд q_2 на втором конденсаторе к моменту, когда ток на катушке уменьшится до нуля, то есть катушка отдаст всю свою энергию в цепь (конденсаторам). В этот момент заряд на первом конденсаторе равен

$$q_1 = q + q_2. \quad (3)$$

Источник с самого начала до этого момента совершал только положительную работу (через источник прошёл заряд q_1):

$$\mathcal{E}q_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и учитывая (2), получим: $q_2 = C_1\mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}$.

Период колебаний можно найти из формулы Томсона, если в качестве ёмкости конденсатора подставить общую ёмкость двух последовательно соединённых конденсаторов:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}.$$

20 Часть начальной энергии, запасённой в конденсаторе и первой катушке, в конечном счёте, выделится в виде тепла на резисторе. Но другая часть энергии останется в виде энергии магнитного поля: в установившемся режиме в катушках будет циркулировать ток. Причём в первой катушке он будет идти в ту же сторону, что и в начале процесса, а во второй катушке – в обратную сторону.

Пусть ток в первой катушке идёт слева право. Так как катушки соединены параллельно, то разность потенциалов на них одинакова (ток считаем условно положительным, если он в катушке идёт слева направо):

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow L_1 dI_1 = L_2 dI_2.$$

Через некоторое время токи в катушках сравняются по модулю ($I_1 = I, I_2 = -I$):

$$L_1 \cdot (I - I_0) = L_2 \cdot ((-I) - 0) \Rightarrow I = \frac{L_1 I_0}{(L_1 + L_2)}.$$

По закону сохранения энергии: $\frac{CU_0^2}{2} + \frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + Q$.

Подставляя сюда выражение для силы установившегося тока, найдём количество выделившегося тепла: $Q = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{L_1 L_2 I_0^2}{2(L_1 + L_2)}$.

21 Перед выключением поля \vec{B}_0 ток в обеих катушках равен нулю. В процессе убывания внешнего поля катушке L_2 возникает ЭДС индукции $e_{2i} = -\frac{d\Phi}{dt}$, стремящаяся создать ток в цепи, а также ЭДС самоиндукции в обеих катушках $e_{1ci} = -L_1 \cdot \frac{dI}{dt}$ и $e_{2ci} = -L_2 \cdot \frac{dI}{dt}$, которые препятствуют нарастанию тока. Алгебраическая сумма этих трёх ЭДС равна напряжению U_C на конденсаторе:

$$e_{2i} + e_{1ci} + e_{2ci} = U_C.$$

Поскольку процесс происходит очень быстро ($\Delta t \ll T$), то возникший за это время ток перенесёт столь малый заряд, что напряжение на конденсаторе за это время практически не изменится: $U_C \approx U_0$. Значит,

$$-\frac{d\Phi}{dt} - L_1 \cdot \frac{dI}{dt} - L_2 \cdot \frac{dI}{dt} = U_0 \Rightarrow -d\Phi - L_1 dI - L_2 dI = U_0 \cdot dt.$$

Просуммируем последнее уравнение за всё время уменьшения поля:

$$-(0 - \Phi_0) - L_1 I - L_2 I = U_0 \cdot \Delta t.$$

Поскольку $U_0 \cdot \Delta t \approx 0$ из-за того, что $\Delta t \ll T$, то суммарный магнитный поток, пронизывающий катушки, за малое время спада внешнего поля практически не изменился:

$$\Phi_0 - L_1 I - L_2 I \approx 0 \quad \text{или} \quad \Phi_0 = (L_1 + L_2) I.$$

Учитывая, что начальный поток равен $\Phi_0 = B_0 SN$, найдём значение силы тока в цепи сразу после выключения поля: $I = \frac{B_0 SN}{L_1 + L_2}$.

Направление индукционного тока при известном направлении \vec{B}_0 зависит от направления намотки в катушке L_2 , но в данном случае направление тока не влияет на значение энергии магнитного поля катушек, т.к. перед выключением внешнего магнитного поля ток в катушках не шёл.

Максимальное значение силы тока в контуре найдём из закона сохранения энергии: $\frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I_m^2}{2}$,

$$\Rightarrow I_m = \sqrt{I^2 + \frac{CU_0^2}{L_1 + L_2}} \quad \text{или} \quad I_m = \sqrt{\left(\frac{B_0 SN}{L_1 + L_2}\right)^2 + \frac{CU_0^2}{L_1 + L_2}}.$$

22 Увеличивающийся магнитный поток внешнего поля вызывает ЭДС индукции в кольце. Поэтому в кольце возникает индукционный ток. ЭДС самоиндукции, наоборот, препятствует нарастанию силы тока:

$$I \cdot R = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{ci}.$$

Поскольку кольцо сверхпроводящее ($R = 0$), то

$$0 = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{ci} \quad \text{или} \quad |\mathcal{E}_i| = |\mathcal{E}_{ci}|.$$

ЭДС индукции равна скорости изменения внешнего магнитного потока, проходящего через кольцо, а ЭДС самоиндукции – собственного магнитного потока:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \Phi = L \Delta I.$$

Просуммируем последнее выражение за всё время нарастания внешнего поля:

$$B \cdot \pi r^2 = L I \Rightarrow I = \frac{B \cdot \pi r^2}{L}.$$

Заметим, что полный поток, пронизывающий сверхпроводящее кольцо, равен 0. То есть замкнутый сверхпроводник не пропускает через себя внешний магнитный поток, полностью компенсируя его собственным магнитным полем индукционного тока.

23 При уменьшении внешнего магнитного потока в катушке возникает индукционный ток, магнитное поле которого стремится препятствовать уменьшению результирующего магнитного потока через катушку. Согласно закону Ома ЭДС индукции \mathcal{E}_i и ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{ci} создают ток в катушке (напряжение на конденсаторе равно нулю). Причём \mathcal{E}_i способствует течению тока, а \mathcal{E}_{ci} , наоборот, препятствует нарастанию тока:

$$I \cdot R = |\mathcal{E}_i| - |\mathcal{E}_{ci}| \Rightarrow I \cdot R = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| - \left| L \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|.$$

По условию задачи омическое сопротивление в цепи катушка-конденсатор отсутствует. Значит, $\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| L \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\Delta \Phi| = L \Delta I.$

Просуммируем изменение внешнего потока $\Delta \Phi$ за время его исчезновения:

$$B \cdot \pi r^2 N = L \cdot I_m \Rightarrow I_m = \frac{B \cdot \pi r^2 N}{L}. \quad (1)$$

Энергия катушки к моменту исчезновения внешнего поля равна $W_L = \frac{L \cdot I_m^2}{2}$. За счёт появившейся энергии магнитного поля в контуре катушка-конденсатор возникнут гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

Найдём амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе из закона сохранения энергии:

$$\frac{L I_m^2}{2} = \frac{C U_m^2}{2} \Rightarrow I_m = U_m \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (3)$$

Решая (1), (2) и (3), найдём индукцию магнитного поля в соленоиде:

$$\frac{B \cdot \pi r^2 N}{L} = U_m \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow B = \frac{U_m \cdot \sqrt{LC}}{\pi r^2 N} \quad \text{или} \quad B = \frac{U_m}{\pi r^2 N \omega} \approx 8 \text{ мТл}.$$

Глава 6. Переменный электрический ток

*Мы сделаем электричество таким дешёвым,
что жечь свечи будут только богачи.*

Томас Эдисон

§ 43. Принцип генерации переменного тока

Свободные колебания в электрическом колебательном контуре быстро затухают и на практике не используются. Широко применяются вынужденные незатухающие электромагнитные колебания.

Повсеместно используется переменный электрический ток, представляющий собой вынужденные колебания свободных заряженных частиц в электрической цепи. Электрический ток в осветительной сети представляет собой гармонические (синусоидальные) колебания электронов проводимости в генераторах, проводах и потребителях. Если подключить на вход Y осциллографа напряжение от сети, а на оси X включить временную развертку, то мы увидим синусоиду.

По синусоидальному закону, на участке цепи переменного тока изменяется напряжение, сила тока, индукция магнитного поля катушки, заряд конденсатора, энергия магнитного поля катушки индуктивности и т.п.

Рассмотрим принцип действия генератора, ЭДС которого изменяется по синусоидальному закону с течением времени.

Пусть в однородном магнитном поле индукцией \vec{B} равномерно вращается проводящий контур площадью S (рис. 1). И пусть в начальный момент времени контур расположен перпендикулярно вектору магнитной индукции ($\alpha_0 = 0$).

Если угловая скорость вращения контура равна ω , то угол между направлением магнитной индукции \vec{B} и перпендикуляром \vec{n} к контуру будет изменяться со временем в соответствии с формулой:

$$\alpha = \omega t.$$

Магнитный поток, пронизывающий один виток контура, равен

$$\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Если контур состоит из N витков одинаковой площади, то полный магнитный поток, пронизывающий контур, равен

$$\Phi = \Phi_1 \cdot N = B \cdot S \cdot N \cdot \cos \omega t.$$

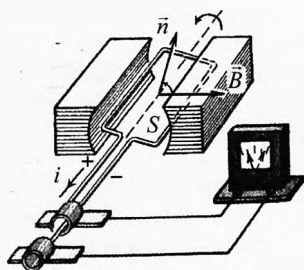


Рис. 1. Генерация переменного тока

Поскольку при вращении контура пронизывающий его магнитный поток изменяется, то, согласно закону электромагнитной индукции, в контуре будет возбуждаться ЭДС индукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -(BSN \cdot \cos \omega t)' = -BSN \cdot (-\omega \cdot \sin \omega t);$$

$$e = BSN\omega \cdot \sin \omega t.$$

Максимальное значение ЭДС равно

$$\boxed{\mathcal{E}_m = BSN \cdot \omega} \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_m = BSN \cdot 2\pi\nu.$$

Максимальное значение ЭДС индукции, возбуждаемой в контуре, прямо пропорционально магнитной индукции B , площади контура S , числу витков N в контуре и угловой скорости вращения ω .

Учитывая, что $\Phi_{\max} = B \cdot S \cdot N$ — полный максимальный магнитный поток, пронизывающий все витки контура, получим:

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \Phi_{\max} \cdot \omega},$$

Максимальное значение ЭДС индукции, возбуждаемой в контуре, равно произведению полного максимального магнитного потока Φ_{\max} , пронизывающего все витки контура, и угловой скорости вращения ω .

Тогда мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\boxed{e = \mathcal{E}_m \cdot \sin \omega t}.$$

ЭДС при $t = 0$ будет равна 0. Действительно, в нашем случае при $t = 0$ магнитный поток, пронизывающий контур, максимален, т. к. контур перпендикулярен вектору магнитной индукции \vec{B} . Значит, скорость изменения магнитного потока в начальный момент равна 0 (контур скользит вдоль магнитных линий, не пересекая их). Поскольку в первой четверти периода магнитный поток в контуре уменьшается, то, согласно правилу Ленца, индукционный ток возникнет такого направления, что своим магнитным полем внутри контура будет препятствовать изменению магнитного потока в контуре, то есть \vec{B}_i будет сонаправлен с \vec{B} и ток в контуре будет направлен при взгляде справа против часовой стрелки («-» источника будет внизу, а «+» вверх).

Через пол-оборота ток поменяет направление. Теперь возникающую в контуре ЭДС условно будем считать отрицательной. Знак ЭДС нужен для того, чтобы можно было определить направление тока в контуре (обмотке якоря генератора).

Таким образом, для создания переменного электрического тока синусоидальной формы нужно равномерно вращать в однородном магнитном поле проводящий контур.

Если к полюсам генератора подключить потребитель электроэнергии, например резистор или электродвигатель, то в потребителе генератор создаст вынужденные колебания свободных заряженных частиц такой же частоты и фазы, то есть

$$u = U_m \cdot \sin \omega t,$$

где u – мгновенное значение напряжения, подаваемого на потребитель, U_m – амплитудное значение напряжения, ω – циклическая частота колебаний, равная скорости изменения фазы колебаний и равная в нашем случае угловой скорости вращения якоря генератора.

Сила тока в потребителе тоже будет совершать вынужденные колебания, причём такой же частоты. Но фаза колебаний силы тока может отличаться от фазы колебаний напряжения, то есть

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_c),$$

где φ_c – сдвиг фаз силы тока на потребителе относительно напряжения. Другими словами, при достижении максимального напряжения на потребителе сила тока в этот момент тоже может достигнуть максимума, то есть совпасть по фазе с напряжением ($\varphi_c = 0$), но может и не достигнуть максимума, то есть отстать по фазе ($\varphi_c < 0$) или, наоборот, опередить его ($\varphi_c > 0$).

Значение сдвига фаз зависит от типа подключённого потребителя.

Если потребитель всю подаваемую энергию превращает во внутреннюю (тепло, свет), например резистор или лампа накаливания, то ток по фазе совпадает с напряжением ($\varphi_c = 0$).

Если в потребителе присутствуют индуктивные элементы: катушки индуктивности, электродвигатели, то ток по фазе отстаёт от напряжения ($\varphi_c < 0$).

Если потребителем является конденсатор, то ток по фазе опережает напряжение ($\varphi_c > 0$).

§ 44. Действующие значения силы тока и напряжения.

Активное сопротивление в цепи переменного тока

Активное сопротивление. Почти вся электроэнергия в мире вырабатывается в виде переменного тока синусоидальной формы. Причём значительная часть электроэнергии превращается во внутреннюю (тепло, свет). Чтобы количественно оценивать действие переменного тока, вво-

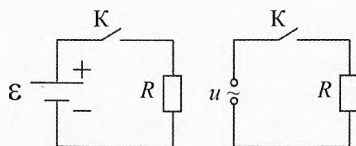


Рис. 2. Резистор в цепи постоянного и переменного тока

дят понятия действующих значений напряжения и силы переменного тока путём сравнения теплового эффекта при данном переменном токе в резисторе с таким же тепловым эффектом в том же резисторе при постоянном токе (рис. 2).

Резистор – это проводник, в котором электроэнергия превращается только во внутреннюю. То есть резистор обладает чисто активным сопротивлением.

Сила переменного тока и напряжение в резисторе. Подключим резистор к цепи переменного тока. Пусть напряжение на резисторе изменяется по закону:

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

Тогда сила тока будет изменяться по такому же закону

$$i = I_m \cdot \sin \omega t$$

При чисто активном сопротивлении сила тока на участке цепи совпадает по фазе с напряжением.

Дело в том, что частота столкновений электронов с ионами кристаллической решетки во много раз больше частоты колебаний напряжения. Поэтому за один период колебания напряжения электрон успевает многократно столкнуться с ионами кристаллической решетки и отдать избыточную энергию, получаемую за счёт работы электрического поля. Отсюда следует, что закон Ома выполняется для резистора в любой момент времени.

Например, если в данное мгновение напряжение максимально, то электрон за счёт работы электрического поля получает максимальную порцию энергии на длине свободного пробега и ток будет максимальным, т. к. электрон в это время получает максимальную скорость. Электрон немедленно передаёт избыточную порцию энергии ионам кристаллической решетки (это работа тока), а они – в окружающую среду в виде тепла.

Итак, в любой момент времени сила тока в резисторе прямо пропорциональна напряжению на нём:

$$i = \frac{u}{R} \quad (2)$$

Это же соотношение имеет место и при постоянном токе: в любой момент времени сила тока прямо пропорциональна напряжению именно в этот момент. Мы могли не обращать внимания на мгновенный характер законов Ома, т. к. при постоянном токе напряжение и сила тока всё время одинаковы

и превращение электрической энергии во внутреннюю происходит в резисторе с неизменной мощностью.

Подставив (1) в (2), получим:

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t,$$

где $\frac{U_m}{R} = I_m$ — амплитудное значение силы тока.

Средние за период значения силы тока и напряжения равны нулю, так как равно нулю среднее за период значение синусоидальной функции:

$$\bar{i} = 0, \quad \bar{u} = 0.$$

Суммарный заряд, прошедший через сечение провода за одну половину периода, равен по модулю заряду, который пройдёт в другую сторону за вторую половину периода. Поэтому средняя за период сила тока равна нулю. Аналогично среднее за период напряжение тоже равно нулю.

Действующее (эффективное) значение напряжения и силы тока. Подсчитаем количество теплоты, которое выделится в резисторе в цепи переменного тока за один период колебания тока. Оно равно произведению средней мощности и периода T :

$$Q_T = \bar{P} \cdot T; \quad \bar{P} = \overline{i^2 \cdot R} = I_m^2 \cdot R \cdot \overline{\sin^2 \omega t}.$$

Учитывая, что $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$, получим:

$$Q_T = I_m^2 \cdot R \cdot \frac{1 - \overline{\cos 2\omega t}}{2} \cdot T;$$

Среднее значение за период $\overline{\cos 2\omega t} = 0$, значит,

$$Q_T = \frac{I_m^2 R T}{2}.$$

Пусть через этот резистор пропускают постоянный ток и за время, равное периоду, на резисторе выделится такое же количество теплоты, равное

$$Q_T = I^2 R T.$$

Приравнявая оба результата, получим:

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2} \quad \text{или} \quad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}.$$

Действующее (эффективное) значение силы переменного тока I равно такому значению постоянного тока, при протекании которого за период переменного тока выделится столько же тепла, что и при данном переменном токе. Действующее значение силы переменного тока равно амплитудному значению силы переменного тока, делённому на $\sqrt{2}$.

Поскольку среднее значение мощности переменного тока за период и кратные ему промежутки времени можно вычислить, с одной стороны, по формуле $\bar{p} = \bar{i}^2 R$, а с другой – по формуле $\bar{p} = I^2 R$, то, сравнивая, получим:

$$I^2 = \bar{i}^2 \quad \text{или} \quad I = \sqrt{\bar{i}^2}.$$

Отсюда следует, что действующее значение силы тока равно квадратному корню из среднего значения квадрата силы тока за период.

Аналогично можно показать, что действующее (эффективное) значение напряжения равно амплитудному значению напряжения, делённому на корень из двух:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Также легко показать, что действующее значение напряжения равно корню квадратному из среднего квадрата напряжения за один период:

$$U = \sqrt{\bar{u}^2}.$$

Для измерения переменного напряжения и силы тока применяются вольтметры и амперметры электромагнитной системы или магнитоэлектрической с выпрямителем. Прямое применение приборов магнитоэлектрической системы невозможно, т. к. стрелка из-за инертности не успеет отклониться на нужный угол и будет дрожать на месте.

Амперметр и вольтметр для переменного тока проградированы так, что показывают действующие значения напряжения и силы тока и для них не важна полярность включения.

Найдём зависимость мощности, потребляемой резистором, от времени

$$p_R = i \cdot u = (I_m \sin \omega t) \cdot (U_m \sin \omega t) = I_m \cdot U_m \cdot \sin^2 \omega t = I_m \cdot U_m \frac{1 - \cos 2\omega t}{2};$$

$$p_R = \frac{P_{Rm}}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad (3)$$

Среднее (действующее) значение мощности за половину периода и кратные ему промежутки времени можно вычислить по формулам:

$$\overline{P_R} = P_R, \quad P_R = \frac{P_{Rm}}{2}, \quad P_R = \frac{I_m \cdot U_m}{2}, \quad P_R = \frac{I_m^2 \cdot R}{2}, \quad P_R = \frac{U_m^2}{2R},$$

$$P_R = I^2 R, \quad P_R = \frac{U^2}{R}, \quad P_R = I \cdot U.$$

Изобразим векторную диаграмму и графики зависимости силы тока, напряжения и мощности, выделяемой на резисторе, от времени (рис. 3).

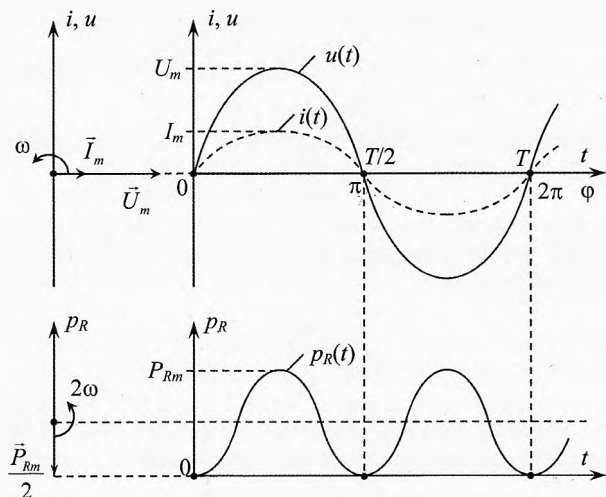


Рис. 3. Векторная диаграмма и график зависимости силы тока, напряжения и мощности, выделяемой на резисторе, от времени

Период колебаний мощности, выделяемой на резисторе при переменном токе, в два раза меньше (а частота – в два раза больше) периода колебаний напряжения и силы тока.

Так что при частоте промышленного тока 50 Гц частота мерцаний лампы накаливания равна 100 Гц. Это сделано не случайно, чтобы человек не замечал мерцаний. Кстати, если выполнить однополупериодное выпрямление переменного тока, то мерцания лампы будут заметны.

Поскольку для резистора закон Ома в цепи переменного тока выполняется в любой момент времени, то он будет выполняться и для действующих значений:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Действующее значение силы тока на резисторе равно отношению действующего напряжения на нём к сопротивлению резистора.

Пример 1. Напряжение в бытовой осветительной сети $U = 220$ В. Чему равна разность потенциалов между полюсами розетки?

Решение. Под напряжением в сети имеют в виду действующее напряжение. Максимальное напряжение между полюсами розетки $U_m = \sqrt{2} \cdot U$, $U_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 311$ В. Разность потенциалов между полюсами розетки изме-

няется от 0 до 311 В, причём 50 раз в секунду на одной клемме будет «+», а на другой «-» и наоборот. ◀

✎ **Пример 2.** Конденсатор рассчитан на напряжение 250 В. Можно ли его подключить к сети с действующим напряжением в 220 В?

→ **Решение.** Как видно из предыдущего примера, напряжение в сети достигает 311 В, и если запас изоляции по напряжению небольшой, то она может быть пробита, поэтому использование такого конденсатора в сети с напряжением 220 В рискованно. ◀

§ 45. Конденсатор в цепи переменного тока

Подключим последовательно источник постоянного напряжения, конденсатор, амперметр и ключ (рис. 4). При замыкании ключа пройдёт кратковременный импульс тока. Конденсатор зарядится до разности потенциалов, равной ЭДС источника. Ток в дальнейшем идти не будет, так как конденсатор представляет собой два проводника, разделённых диэлектриком, то есть в этом месте цепь разорвана.

Если конденсатор подключить к источнику переменного напряжения (рис. 5), то в течение одной четверти периода он будет заряжаться. В течение следующей четверти, когда напряжение на источнике начнёт уменьшаться, конденсатор начнёт разряжаться, отдавая полученную энергию обратно в цепь. В третьей четверти периода он будет перезаряжаться (знаки зарядов на обкладках поменяются), а когда разность потенциалов вновь достигнет максимума в обратной полярности, конденсатор вновь начнёт разряжаться.

Таким образом, в конденсаторе будут наблюдаться вынужденные электрические колебания. Конденсатор оказывает сопротивление протеканию переменного тока. Он препятствует зарядке и уменьшению напряжения при разрядке. Вычислим его сопротивление, разделив действующее значение напряжения, показываемого вольтметром, на действующее значение силы тока, измеренного амперметром. Сопротивление конденсатора называют реактивным, т. к. всю энергию, которую он получает при зарядке, возвращает обратно цепь в течение следующей четверти периода колебания (обратная реакция). Сопротивление конденсатора обозначается X_C :

$$X_C = \frac{U}{I}.$$

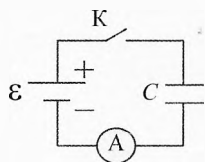


Рис. 4. Конденсатор в цепи постоянного тока

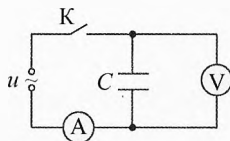


Рис. 5. Конденсатор в цепи переменного тока

Обратим внимание ещё раз, что в идеальном конденсаторе нет активно-го «омического» сопротивления. Он не поглощает электроэнергию, а обменивается ею с цепью.

Отчего же зависит ёмкостное сопротивление конденсатора?

Ясно, что чем больше электроёмкость конденсатора, тем больше пройдёт заряда через него при данном напряжении и частоте. Значит, чем больше электроёмкость конденсатора, тем меньше его сопротивление (аналогично: чем больше вместимость автобуса, тем больше пассажиров он может перевезти).

И чем чаще происходит перезарядка конденсатора, тем больший заряд пройдёт за одинаковое время. Значит, сопротивление конденсатора тем меньше, чем больше частота колебаний переменного тока (аналогично: чем чаще курсирует автобус, тем больше человек можно перевезти).

Получим количественную зависимость ёмкостного сопротивления конденсатора от его электроёмкости и частоты тока. В любой момент времени разность потенциалов на конденсаторе равна разности потенциалов на зажимах цепи:

$$u = \frac{q}{C}. \quad (4)$$

Рассмотрим процесс с момента, когда конденсатор максимально заряжен, то есть $u_0 = U_m$. Тогда зависимость напряжения на конденсаторе от времени будет описываться уравнением:

$$u = U_m \cos \omega t. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получим: $\frac{q}{C} = U_m \cos \omega t \Rightarrow q = CU_m \cos \omega t$.

Производная заряда q на конденсаторе по времени есть сила тока i :

$$i = \frac{dq}{dt} = q' = CU_m (\cos \omega t)' \quad \text{или}$$

$$i = -\omega CU_m \cdot \sin \omega t = \omega CU_m \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, колебания силы тока происходят по гармоническому закону и опережают по фазе колебания напряжения (заряда) на $\pi/2$:

$$i = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $I_m = \omega CU_m$ — амплитудное значение силы тока. Аналогично, для действующих значений силы тока и напряжения:

$$I = \omega CU \Rightarrow X_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}.$$

Итак, ёмкостное сопротивление конденсатора, включённого в цепь переменного тока, равно величине, обратной произведению циклической частоты и ёмкости конденсатора:

$$X_c = \frac{1}{\omega C}.$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, получим:

$$X_c = \frac{1}{2\pi\nu C}.$$

Представим векторную диаграмму и графики зависимости силы тока, напряжения и мощности на конденсаторе от времени (рис. 6).

Из графика видно, что в начальный момент напряжение и заряд конденсатора максимально положительны. Сила тока в начальный момент равна нулю. Конденсатор начинает разряжаться, заряд на нём уменьшается $dq < 0$, значит, сила тока в первой четверти отрицательна:

$$i = \frac{dq}{dt} < 0.$$

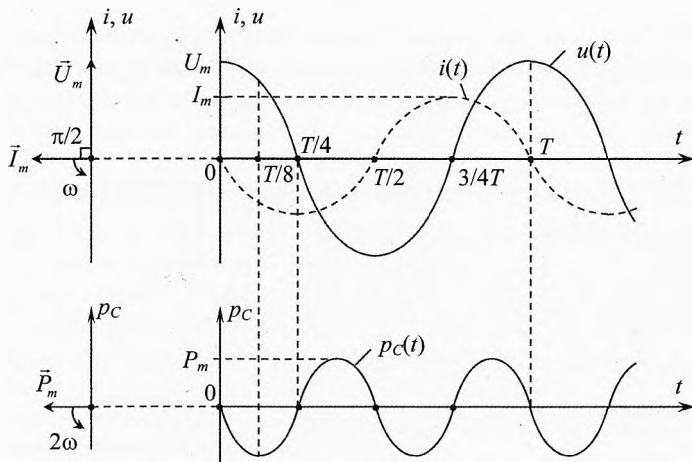


Рис. 6. Векторная диаграмма и график зависимости силы тока, напряжения и мощности на конденсаторе от времени

Найдём зависимость мгновенной мощности, потребляемая конденсатором, от времени:

$$p_c = u \cdot i = U_m \cos \omega t \cdot (-I_m \sin \omega t) = -\frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot 2 \sin \omega t \cos \omega t.$$

Так как $2 \sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t$, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, то

$$p_C = -U \cdot I \cdot \sin 2\omega t \quad \text{или} \quad p_C = -P_{Cm} \cdot \sin 2\omega t$$

где $P_{Cm} = U \cdot I$ – амплитудное значение мощности.

Частота изменения мощности на конденсаторе вдвое больше частоты изменения тока (напряжения).

В первую четверть мощность отрицательна – конденсатор, разряжаясь, отдаёт энергию в цепь. Во второй четверти периода мощность положительна – конденсатор, заряжаясь, получает электроэнергию из цепи. За половину периода колебаний тока средняя мощность на конденсаторе равна нулю. То же самое будет за вторую половину периода и кратные ей промежутки времени. Таким образом, конденсатор в целом не превращает электроэнергию в другие виды энергии, а обменивается ею с цепью: сколько получает за четверть периода, столько за следующую четверть отдаёт.

Сила тока на конденсаторе опережает по фазе колебания напряжения (заряда) на $\pi/2$.

Как запомнить, что ток по фазе опережает напряжение в конденсаторе? Можно сказать так: для того чтобы на конденсаторе появился заряд (напряжение), сначала должен пойти ток.

§ 46. Катушка индуктивности в цепи переменного тока

Подключим последовательно катушку индуктивности с замкнутым стальным сердечником, лампочку накаливания, источник постоянного напряжения и ключ (рис. 7а). Лампочку подберём такую, чтобы она ярко светилась.

Теперь вместо источника постоянного напряжения подключим источник переменного тока (рис. 7б), действующее напряжение которого такое же, как в первом случае. Оказывается, теперь лампочка светится слабее. Причина в том, что в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует протеканию переменного тока, то есть в цепи наряду с омическим сопротивлением появляется так называемое индуктивное сопротивление.

Индуктивность L катушки, подключённой к источнику, аналогична инертной массе m груза, к которому приложена сила.

Обозначим индуктивное сопротивление катушки, обусловленное её «электрической инертностью», через X_L . Разделив действующее напряжение

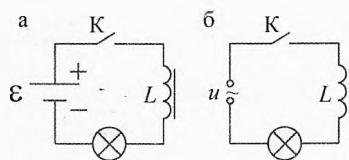


Рис. 7. Катушка в цепи постоянного и переменного тока

на катушке на действующую силу тока в ней, получим индуктивное сопротивление катушки:

$$X_L = \frac{U}{I}.$$

От чего зависит индуктивное сопротивление катушки?

Ясно, что оно должно быть тем больше, чем больше индуктивность катушки. Если мы сначала подключим катушку без сердечника, а затем со стальным сердечником (особенно замкнутым), то сопротивление катушки существенно возрастёт.

Индуктивное сопротивление будет увеличиваться, если увеличить частоту тока. Действительно, чем больше частота тока, тем больше скорость изменения тока при том же амплитудном значении, а значит, больше ЭДС самоиндукции, которая, согласно правилу Ленца, препятствует изменению силы тока, то есть препятствует протеканию переменного тока.

Получим аналитически зависимость индуктивного сопротивления от частоты тока и индуктивности катушки.

Запишем закон Ома для катушки:

$$i \cdot R = e_{ci} + u,$$

где i – сила тока в данное мгновение; u – разность потенциалов, которую создаёт на катушке источник (сеть) переменного тока в данное мгновение; e_{ci} – мгновенное значение ЭДС самоиндукции; R – активное (омическое) сопротивление катушки, которым ввиду его малости пренебрежем. Тогда

$$e_{ci} + u \approx 0.$$

Что это значит? Работа источника плюс работа ЭДС самоиндукции за малый промежуток времени (по сравнению с периодом) равна нулю. Если, например, ток в катушке нарастает, то электрическое поле сети совершает положительную работу по переносу заряда в катушке (ток идёт в том же направлении, куда его «толкает» электрическое поле источника), а вихревое электрическое поле (ЭДС самоиндукции) совершает за то же время такую же отрицательную работу. С точки зрения превращения энергии это означает, что электрическая энергия источника переменного напряжения превращается в энергию магнитного поля катушки.

Если же ток убывает, то положительную работу совершает ЭДС самоиндукции, а отрицательную – источник переменного напряжения. При этом энергия магнитного поля катушки превращается в энергию электрического поля источника переменного напряжения.

Поскольку ЭДС самоиндукции равна:

$$e_{ci} = -L \cdot \frac{di}{dt} \equiv -L i',$$

а сила тока изменяется по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin \omega t,$$

(6)

то $u = -e_{ci} = L \dot{i} = L(I_m \sin \omega t)' = LI_m \omega \cos \omega t$ или

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (7)$$

то есть амплитуда напряжения равна:

$$U_m = \omega L I_m,$$

Тогда

$$X_L = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \omega L.$$

Значит, индуктивное сопротивление катушки равно произведению индуктивности катушки и циклической частоты тока:

$$X_L = \omega L.$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, получим:

$$X_L = 2\pi\nu L.$$

Анализируя формулы (6) и (7), можно сделать следующий вывод.

Колебания напряжения на катушке опережают колебания тока по фазе на $\pi/2$.

Как это запомнить? Пусть, например, в начальный момент времени сила тока в катушке равна нулю, а напряжение максимально и начинает уменьшаться по гармоническому закону косинуса. В связи с наличием индуктивности (электрической инертности) ток в катушке нарастает постепенно. Поскольку напряжение уменьшается, то нарастание тока происходит всё медленнее, и, когда напряжение уменьшится до нуля, ток достигнет максимального значения. То есть сначала подаем напряжение, а только потом начинает появляться ток (аналогично при механическом движении сначала прикладываем силу к массивной тележке, а только потом начинает нарастать её скорость). Мы описали одну четверть периода колебаний в катушке, изображенной на рис. 8.

Слева от графика изменения тока и напряжения изображена векторная диаграмма. Из неё видно, что вектор амплитуды напряжения \vec{U}_m «бежит» на $\pi/2$ впереди вектора амплитуды силы тока \vec{I}_m .

Ниже представлен график зависимости мгновенной мощности на катушке от времени.

$$p_L = u \cdot i = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \cdot 2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = U \cdot I \cdot \sin 2\omega t.$$

Значит, амплитуда колебаний мощности $P_{Lm} = U \cdot I$. Тогда

$$p_L = P_{Lm} \sin 2\omega t.$$

Частота изменения мощности в 2 раза больше частоты изменения тока или напряжения.

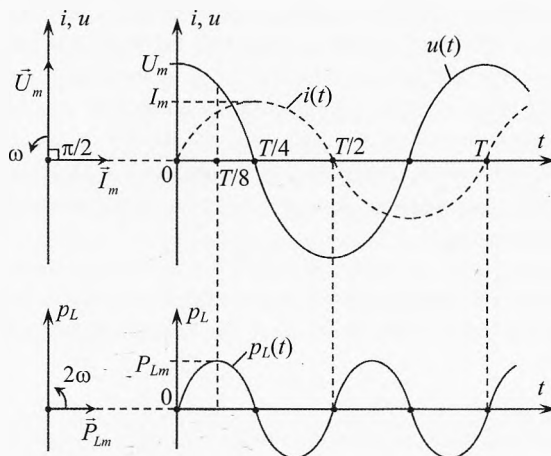


Рис. 8. Векторная диаграмма и график зависимости силы тока, напряжения и мощности на катушке индуктивности от времени

В течение одной четверти периода катушка поглощает электрическую энергию из цепи, превращая её в энергию магнитного поля, а в течение второй четверти периода отдаёт обратно столько же энергии в цепь. Таким образом, идеальная катушка индуктивности является чисто реактивным элементом. Сколько получает, столько же обратной реакцией отдаёт.

Реальная катушка индуктивности имеет индуктивное и активное сопротивления. Она представляет собой как бы идеальную катушку с последовательно включённым резистором. Эквивалентная схема катушки индуктивности при наличии активного сопротивления представлена на рис. 9.

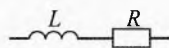


Рис. 9. Эквивалентная схема катушки

§ 47. Закон Ома для участка цепи переменного тока

Важнейшей характеристикой участка цепи является зависимость силы тока от напряжения, то есть вольтамперная характеристика (ВАХ). В предыдущих трёх параграфах мы установили, что при чисто активном сопротивлении, то есть в резисторах, сила тока в любой момент времени прямо пропорциональна напряжению: $i_R = \frac{u_R}{R}$. Естественно, что действующее значение силы тока в резисторе прямо пропорционально действующему напряжению на нём, то есть

$$I_R = \frac{U_R}{R}.$$

Это важно, ведь действующее значение силы тока и напряжения можно измерить (амперметром и вольтметром). Для резистора закон Ома выполняется однозначно как при постоянном, так и при переменном токе.

А вот в случае конденсатора или катушки мгновенные значения силы тока и напряжения уже не прямо пропорциональны друг другу. Сила тока и напряжение изменяются, как и в случае резистора, по синусоидальному закону, но не синхронно, а со сдвигом фаз. Сила тока в конденсаторе опережает по фазе на $\pi/2$ напряжение, а в катушке индуктивности он отстаёт по фазе на $\pi/2$ от напряжения.

Но замечательно, что отношение действующего напряжения к ёмкостному сопротивлению в конденсаторе или индуктивному сопротивлению в катушке оказывается равно действующему значению силы тока в них:

$$I_L = \frac{U_C}{X_C} \quad \text{или} \quad I_L = \frac{U_L}{X_L}.$$

То есть закон Ома выполняется для действующих значений силы тока и напряжения на отдельных участках, состоящих из конденсатора, катушки индуктивности и, тем более, резистора.

А можно ли записать аналитически (формулой) связь между силой тока и напряжением в случае соединения резистора, конденсатора и катушки последовательно, параллельно или смешанно? Оказывается, можно. Дадим ответ сразу, а потом рассмотрим некоторые конкретные случаи.

Итак, формулировка **закона Ома для участка цепи переменного тока**.

Действующее значение силы переменного синусоидального тока на любом участке цепи, состоящем из конденсаторов, катушек индуктивности и резисторов, равно отношению действующего напряжения к полному сопротивлению участка цепи при любых напряжениях и частотах тока:

$$I = \frac{U}{Z},$$

где Z – полное сопротивление участка цепи, которое носит ещё второе название – **импеданс** (от лат. *impedio* – препятствую, англ. *impedance* – полное сопротивление).

§ 48. Последовательное соединение элементов в цепи переменного тока

У реальной катушки есть не только индуктивное, но и активное, и ёмкостное сопротивление, но ими мы будем пренебрегать или отдельно оговаривать их значения. То же самое будем иметь в виду и при использовании ос-

тальных элементов цепи, то есть будем рассматривать только идеальные элементы, если не оговорено иное.

Итак, подключим к источнику синусоидально-го напряжения $u = U_m \cos \omega t$ последовательно: резистор, конденсатор и катушку (рис. 10). Сила тока в них будет изменяться также по гармоническому (синусоидальному) закону, т. к. переменный ток — это вынужденные колебания свободных заряженных частиц, которые всегда происходят с частотой вынуждающей силы, форма этих колебаний тоже определяется характером изменения вынуждающей силы (напряжённости электрического поля).

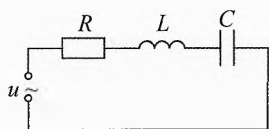


Рис. 10. Последовательное соединение элементов

Поскольку соединение последовательное, то сила тока одинакова на всех элементах цепи

$$i_R = i_C = i_L.$$

Связь между амплитудными значениями силы тока и напряжения получим методом векторных диаграмм.

Поскольку ток на всех элементах совпадает по значению и фазе, то амплитуды напряжений на отдельных элементах будем строить относительно амплитуды силы тока \vec{I}_m . Значения любой величины получим как проекцию соответствующей амплитуды на вертикально расположенную ось. Проекции векторов амплитуд на эту ось дают значение силы тока i , напряжения сети u , напряжения на резисторе u_R , на конденсаторе u_C и катушке u_L .

Построим сначала для произвольного момента времени вектор амплитуды силы тока \vec{I}_m , который вращается с угловой скоростью ω . Каждый вектор вращаем синхронно против часовой стрелки, как принято во всём мире.

Вектор амплитуды напряжения на резисторе \vec{U}_{Rm} сонаправлен с вектором амплитуды силы тока \vec{I}_m , то есть на резисторе ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 11).

Вектор амплитуды напряжения на катушке \vec{U}_{Lm} опережает на $\pi/2$ вектор амплитуды силы тока. Поэтому строим его на $\pi/2$ впереди относительно вектора \vec{I}_m .

Вектор амплитуды напряжения конденсатора \vec{U}_{Cm} отстает по фазе на $\pi/2$ относительно \vec{I}_m . Поэтому строим его на $\pi/2$ позади вектора \vec{I}_m .

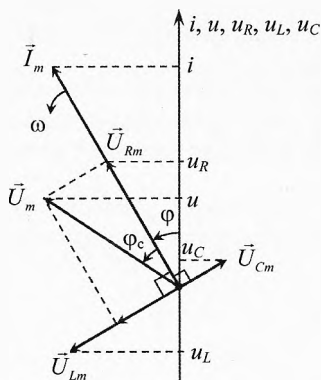


Рис. 11. Векторная диаграмма при последовательном соединении элементов

Векторная сумма всех трёх амплитуд напряжений даёт вектор амплитуды напряжения сети:

$$\vec{U}_m = \vec{U}_{Rm} + \vec{U}_{Lm} + \vec{U}_{Cm}.$$

Алгебраическая сумма напряжений на отдельных элементах в проекции на ось колебаний равна напряжению сети в этот момент:

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Из рисунка видно, что, согласно теореме Пифагора:

$$U_m^2 = U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2.$$

Учитывая, что $U_{Rm} = I_m \cdot R$, $U_{Lm} = I_m \cdot X_L$, $U_{Cm} = I_m \cdot X_C$, получим:

$$U_m = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Для действующих значений силы тока и напряжения:

$$U = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (8)$$

Мы получили, что действующее значение силы переменного тока прямо пропорционально действующему напряжению. То есть получилась зависимость, аналогичная закону Ома в постоянном токе. Здесь не всё нужно понимать буквально. Мгновенные значения силы тока и напряжения не пропорциональны друг другу (прямая пропорциональность выполняется только для действующих значений). Тем не менее, это выражение называется законом Ома с добавлением слов «для переменного тока».

Действующее значение силы тока при последовательном соединении конденсатора, катушки и резистора прямо пропорционально действующему значению напряжения.

Выражение, стоящее в знаменателе – есть полное сопротивление данного участка цепи переменному току (**импеданс**):

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

С учетом этого получим короткую формулу **закона Ома для переменного тока**:

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Если на участке цепи присутствует только один из трёх элементов, а остальные два отсутствуют, то из (8) получим три частных случая, которые

рассмотрены выше. Если же отсутствует только один из элементов, то получатся ещё три варианта получастных выражения для закона Ома:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}; \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}; \quad I = \frac{U}{|X_L - X_C|}.$$

Обратим внимание, что на векторной диаграмме ток через источник и напряжение на нём не совпадают по фазе, то есть наблюдается сдвиг по фазе φ_c между током и напряжением:

$$\cos \varphi_c = \frac{U_{Rm}}{U_m} = \frac{I_m \cdot R}{I_m \cdot Z} \quad \text{или} \quad \boxed{\cos \varphi_c = \frac{R}{Z}}.$$

Косинус сдвига фаз между током и напряжением равен отношению активного сопротивления к полному сопротивлению участка цепи.

Из векторной диаграммы видно, что ток отстаёт по фазе от напряжения, если индуктивное сопротивление больше ёмкостного (как в нашем примере), и опережает по фазе напряжение, когда ёмкостное сопротивление больше индуктивного.

Пример 3. В осветительную цепь напряжением $U = 110$ В частоты $\nu = 60$ Гц подключены последовательно резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ и катушка индуктивности $L = 1,0$ Гн. Вычислить ёмкостное сопротивление конденсатора, индуктивное сопротивление катушки и импеданс, а также силу тока через источник и напряжение на каждом элементе цепи при фазе $\varphi_1 = 30^\circ$. Вычислить сдвиг фаз между силой тока и напряжением.

Решение. Векторная диаграмма процесса изображена на рис. 11:

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}, \quad X_C = \frac{1}{2\pi 60 \cdot 10^{-5}} = 265 \text{ Ом}.$$

$$X_L = 2\pi\nu L, \quad X_L = 2\pi 60 \cdot 1,0 = 377 \text{ Ом}.$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad Z = \sqrt{100^2 + (377 - 265)^2} = 150 \text{ Ом}.$$

$$\text{Амплитуда силы тока: } I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{Z}, \quad I_m = \frac{110 \cdot \sqrt{2}}{150} = 1,04 \text{ А}.$$

Мгновенное значение силы тока на всех элементах одинаково:

$$i_1 = I_m \cdot \cos \varphi_1, \quad i_1 = 1,04 \cdot \cos 30^\circ = 0,9 \text{ А}.$$

Мгновенные значения напряжения на элементах:

$$u_{R1} = i_1 \cdot R = 90 \text{ В}, \quad u_{C1} = i_1 \cdot X_C = 238,5 \text{ В}, \quad u_{L1} = -i_1 \cdot X_L = -339,3 \text{ В}.$$

Сдвиг фаз между силой тока и напряжением:

$$\cos \varphi_c = \frac{R}{Z} = \frac{100}{150} = 2/3, \quad \varphi_c = 48^\circ \leftarrow$$

§ 49. Параллельное соединение элементов в цепи переменного тока

Соединим параллельно резистор, конденсатор и катушку индуктивности и подадим на них напряжение (рис. 12), изменяющееся по гармоническому закону:

$$u = U_m \cdot \cos \omega t.$$

Напряжение на всех элементах цепи совпадает по модулю и фазе. Сила тока на резисторе совпадает по фазе с напряжением. На конденсаторе ток будет опережать напряжение на $\pi/2$, а на катушке отставать на столько же. Построим векторную диаграмму токов относительно вектора амплитуды напряжения (рис. 13).

Получим связь между общим током и напряжением (закон Ома) и вычислим в общем виде полное сопротивление (импеданс) для параллельного соединения элементов цепи. Ось колебаний направим по вертикали. Изобразим вектор амплитуды напряжения для произвольного момента, например, когда фаза колебаний $\varphi = 30^\circ$.

В любой момент времени проекция i амплитуды силы тока \vec{I}_m через источник равна алгебраической сумме проекций векторов амплитуд токов на катушке, конденсаторе и резисторе:

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Из векторной диаграммы, применив теорему Пифагора, получим:

$$I_m^2 = I_{Rm}^2 + (I_{Lm} - I_{Cm})^2.$$

Учитывая, что для отдельных элементов цепи

$$I_{Rm} = \frac{U_m}{R}, \quad I_{Lm} = \frac{U_m}{X_L}, \quad I_{Cm} = \frac{U_m}{X_C},$$

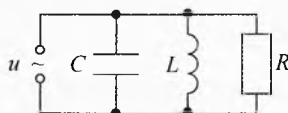


Рис. 12. Параллельное соединение элементов

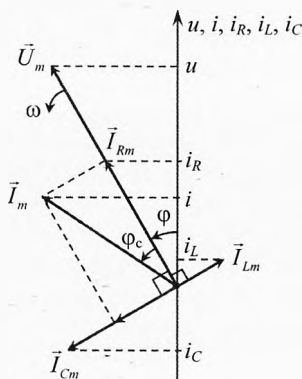


Рис. 13. Векторная диаграмма при параллельном соединении элементов

получим:

$$I_m = U_m \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}.$$

Для действующих значений силы тока I и напряжения источника U :

$$I = U \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}.$$

Это выражение называется **законом Ома для переменного тока при параллельном соединении элементов цепи**.

Действующее значение силы тока при параллельном соединении конденсатора, катушки и резистора прямо пропорционально действующему значению напряжения.

Нетрудно догадаться, что величина, обратная импедансу (полному сопротивлению участка цепи), в этом случае равна:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}.$$

Это выражение слегка напоминает формулу для величины, обратной общему сопротивлению при параллельном соединении резисторов в цепи постоянного тока:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Можно взять более сложные, смешанные комбинации соединения резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности.

Но во всех случаях зависимость между действующими значениями силы тока и напряжения можно привести к виду:

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Действующее значение силы переменного синусоидального тока на любом участке цепи, состоящем из конденсаторов, катушек индуктивности и резисторов, равно отношению действующего напряжения к импедансу этого участка при любых напряжениях и частотах*.

* Обратим внимание на то, что при изменении частоты изменяются не только индуктивное сопротивление катушки и ёмкостное сопротивление конденсатора, но и активное сопротивление проводников. На высоких частотах оно возрастает.

§ 50. Мощность в цепи переменного тока

Выделяют три вида мощности в цепи переменного тока.

Активная электрическая мощность – скалярная величина, характеризующая интенсивность преобразования электрической энергии на участке цепи во внутреннюю энергию (тепло, свет). Активная мощность в цепи однофазного тока равна произведению действующих значений напряжения, силы тока и косинуса сдвига фаз между векторами амплитуд силы тока и напряжения:

$$P_{\text{акт}} = U \cdot I \cdot \cos \varphi_c$$

Воспользовавшись формулами $I = \frac{U}{Z}$ и $\cos \varphi_c = \frac{R}{Z}$, получим ещё одно выражение для активной мощности:

$$P_{\text{акт}} = I^2 \cdot R$$

Единица измерения активной мощности – 1 Вт (ватт).

Именно активную мощность измеряет ваттметр.

Реактивная электрическая мощность характеризует интенсивность обмена энергией между участком цепи и источником (сетью). Реактивная мощность равна произведению действующих значений напряжения, силы тока и синуса сдвига фаз между векторами амплитуд силы тока и напряжения:

$$P_{\text{реакт}} = U \cdot I \cdot \sin \varphi_c$$

Единица измерения реактивной мощности – 1 ВАр (вольт-ампер реактивный).

Полная электрическая мощность характеризует интенсивность подводимой электроэнергии от источника (сети) в цепь. Полная (или кажущаяся) мощность равна произведению действующих значений напряжения и силы тока:

$$P_{\text{полн}} = U \cdot I$$

Единица измерения полной мощности ВА (вольт-ампер).

Между всеми тремя мощностями существует очевидное соотношение:

$$P_{\text{полн}} = \sqrt{P_{\text{акт}}^2 + P_{\text{реакт}}^2}$$

Коэффициентом мощности называется отношение активной мощности к полной мощности. Он показывает, какая часть подводимой в цепь электроэнергии потребляется ею:

$$\cos \varphi_c = \frac{P_{\text{акт}}}{P_{\text{полн}}}$$

Пример 4. Вычислить по данным из предыдущего примера мгновенную мощность на каждом элементе в указанный момент времени. Вычислить активную, реактивную и полную мощность в цепи.

→ **Решение.** Мгновенное значение мощности на резисторе:

$$p_{R1} = u_{R1} \cdot i_1 = 90 \cdot 0,9 = 81 \text{ Вт}.$$

Конденсатор в этот момент поглощает энергию из сети:

$$p_{C1} = u_{C1} \cdot i_1 = 265 \cdot 0,9 = 238,5 \text{ Вт},$$

Катушка в этот момент отдаёт в цепь запасённую ранее энергию:

$$p_{L1} = u_{L1} \cdot i_1 = -339,3 \cdot 0,9 = -305,4 \text{ Вт}.$$

Полная электрическая мощность:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{Z} = \frac{110^2}{150} = 80,7 \text{ ВА}.$$

Реактивная мощность в цепи:

$$P_{\text{реакт}} = P \cdot \sin \varphi_c = 80,7 \cdot \sin(48^\circ) = 60 \text{ ВАр}.$$

Активная мощность в цепи (средняя мощность за период, потребляемая резистором):

$$P_{\text{акт}} = P \cdot \cos \varphi_c = 80,7 \cdot \cos(48^\circ) = 54 \text{ Вт}.$$

Пример 5. В сеть напряжения $U = 220 \text{ В}$ стандартной частоты $\nu = 50 \text{ Гц}$ подключены соединённые параллельно: резистор сопротивлением $R = 200 \text{ Ом}$, конденсатор ёмкостным сопротивлением $X_C = 620 \text{ Ом}$, катушка индуктивности, сопротивление переменному току которой $X_L = 970 \text{ Ом}$. Найти значение индуктивности катушки и ёмкости конденсатора. Вычислить значение тока через источник и каждый элемент при фазе $\varphi_1 = 30^\circ$ и через полпериода, то есть при фазе $\varphi_2 = 210^\circ$. Вычислить мощность во втором случае на каждом элементе.

→ **Решение.** Векторная диаграмма для первого случая аналогична диаграмме, представленной на рис. 13.

Легко найти ёмкость конденсатора и индуктивность катушки:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad C = \frac{1}{2\pi\nu X_C} = 5,13 \text{ мкФ};$$

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L, \quad L = \frac{X_L}{2\pi\nu} = 3,09 \text{ Гн}.$$

Найдём амплитудные значения силы тока на элементах:

$$I_{Rm} = \frac{U_m}{R}, \quad I_{Lm} = \frac{U_m}{X_L}, \quad I_{Cm} = \frac{U_m}{X_C},$$

где $U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ В} \approx 311 \text{ В}$.

$$I_{Rm} = \frac{311}{200} = 1,56 \text{ А}, \quad I_{Lm} = \frac{311}{970} = 0,32 \text{ А}, \quad I_{Cm} = \frac{311}{620} = 0,50 \text{ А}.$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$i_{R1} = I_{Rm} \cdot \cos \varphi_1, \quad i_{L1} = I_{Lm} \cdot \sin \varphi_1, \quad i_{C1} = -I_{Cm} \cdot \sin \varphi_1, \quad u_1 = U_m \cdot \cos \varphi.$$

Тогда

$$i_{R1} = 1,56 \cdot \cos 30^\circ = +1,35 \text{ А};$$

$$i_{L1} = 0,32 \cdot \sin 30^\circ = +0,16 \text{ А};$$

$$i_{C1} = -0,50 \cdot \sin 30^\circ = -0,25 \text{ А}.$$

$$u_1 = 311 \cdot \cos 30^\circ = +269 \text{ В}.$$

В данный момент напряжение положительно и равно 269 В. Знак его условен относительно оси колебаний. Например, можно считать напряжение (разность потенциалов) положительным, когда верхний полюс имеет положительный потенциал относительно нижнего.

Общий ток в данный момент положителен относительно оси колебаний. Причём внутри источника он идёт от «-» к «+», то есть источник тока (сеть) совершает положительную работу в данный момент времени.

$$i = i_R + i_L + i_C, \quad i = 1,35 + 0,16 - 0,25 = 1,26 \text{ А}.$$

Ток через катушку в данный момент тоже положителен, причём он возрастает. Катушка получает энергию в этот момент.

Ток через конденсатор отрицателен (в проекции на ось колебаний). Конденсатор в этот момент разряжается, и ток в нём по модулю возрастает. Он отдаёт энергию в цепь.

Через полпериода, когда значение фазы станет $\varphi_2 = 210^\circ$, проекции всех величин изменят знаки:

$$u_2 = -269 \text{ В}; \quad i_{R2} = -1,35 \text{ А}; \quad i_{L2} = -0,16 \text{ А}; \quad i_{C2} = +0,25 \text{ А}; \quad i_2 = -1,26 \text{ А}.$$

Знак мгновенного значения любой величины означает ориентацию соответствующего вектора амплитуды относительно положительного направления колебаний.

Рассчитаем мгновенную мощность на каждом элементе во втором случае. На резисторе мощность всегда положительна, так как он всегда поглощает энергию

$$p_{R2} = i_{R2} \cdot u_2 = (-1,35 \text{ А}) \cdot (-269 \text{ В}) = 363 \text{ Вт}.$$

Мощность на катушке:

$$p_{L2} = i_{L2} \cdot u_2 = (-0,16 \text{ А}) \cdot (-269 \text{ В}) = 43 \text{ Вт}.$$

Ток в катушке нарастает по модулю, и энергия её магнитного поля увеличивается, поэтому мощность на катушке в данный момент тоже положительна.

Мощность на конденсаторе:

$$p_{C2} = i_{C2} \cdot u_2 = (+0,25 \text{ А}) \cdot (-269 \text{ В}) = -67 \text{ Вт}.$$

Мощность на конденсаторе отрицательна, значит, в этот момент конденсатор разряжается, отдаёт энергию в цепь.

Мощность источника положительна, значит, источник передаёт энергию в цепь:

$$p_2 = i_2 \cdot u_2 = (-1,26 \text{ A}) \cdot (-269 \text{ В}) = 339 \text{ Вт.}$$

Получилось, что мощность источника в это мгновение равна алгебраической сумме мощностей на отдельных элементах:

$$p_{R2} + p_{L2} + p_{C2} = 363 + 43 - 67 = 339 \text{ Вт} \quad \text{или} \quad p_2 = p_{R2} + p_{L2} + p_{C2}.$$

Это есть очевидное проявление закона сохранения энергии.

Мы убедились, что метод векторных диаграмм позволяет удобно и верно рассчитать значения напряжения, токов и мощности отдельных элементов в любой момент времени. Рассчитайте самостоятельно мощности для первого случая. ←

§ 51. Резонанс в цепи переменного тока

Резонанс напряжений при последовательном соединении элементов. Соединим последовательно конденсатор, катушку индуктивности и лампу накаливания. Концы полученной цепи подключим к генератору звуковой частоты (рис. 14).

Поддерживая амплитуду колебаний напряжения на выходе генератора неизменной, будем плавно увеличивать частоту колебаний. При этом яркость свечения лампы будет постепенно возрастать, что говорит о возрастании амплитуды силы

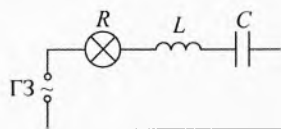


Рис. 14. Наблюдение резонанса напряжений

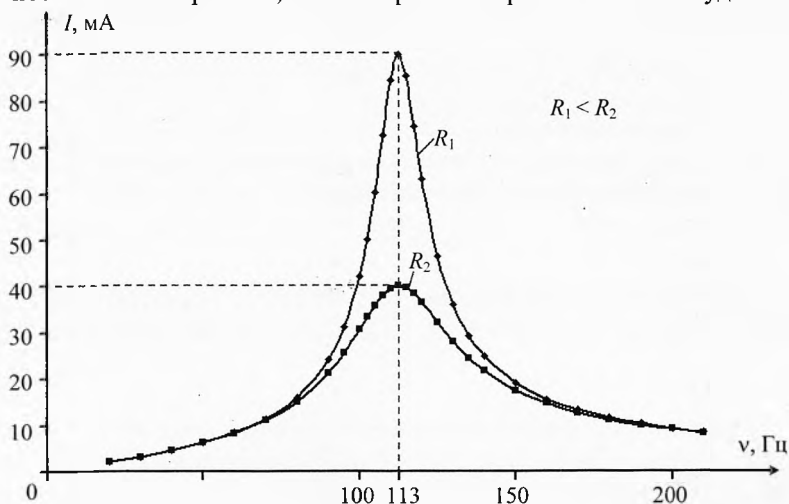


Рис. 15. Резонанс напряжений при последовательном соединении элементов

тока. После достижения некоторого максимального значения яркость свечения лампы плавно убывает.

На рис. 15 представлена зависимость действующего значения силы тока от частоты, снятая нами на стандартном школьном оборудовании, где вместо лампочки взят реостат. Для снятия значений напряжения и силы тока в цепь включены амперметр и вольтметр. Индуктивность катушки в опыте $L = 1,0$ Гн, ёмкость конденсатора $C = 2,0$ мкФ. Действующее напряжение на выходе генератора поддерживалось равным $U = 8$ В.

Двум графикам, представленным на рисунке, соответствуют различные значения активного сопротивления цепи ($R_1 = 89$ Ом, $R_2 = 200$ Ом), то есть различные положениям ползунка на реостате.

На низких частотах сила тока в цепи мала. С увеличением частоты сила тока в первом случае возрастает достаточно круто, а во втором случае – полого. Практически при одной и той же частоте сила тока в обоих случаях достигает максимума, а затем убывает.

Такую зависимость объяснить нетрудно. Запишем в развернутом виде закон Ома для этой цепи:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При малых значениях частоты ёмкостное сопротивление конденсатора во много раз больше индуктивного сопротивления катушки и существенно больше активного сопротивления резистора. Поэтому при малых частотах сила тока мала:

$$I \approx \omega C \cdot U \ll I_{\text{рез.}}$$

При увеличении частоты колебаний напряжения индуктивное сопротивление возрастает, а ёмкостное уменьшается, поэтому уменьшается и разность между ними. Значит, уменьшается полное сопротивление цепи, поэтому сила тока возрастает.

Сила тока будет максимальной, когда значение индуктивного сопротивления сравняется с ёмкостным, то есть когда

$$\omega_{\text{рез}} L - \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = 0.$$

При этом наступает **резонанс** (лат. *resonans* – дающий отзвук, отголосок). В этом случае цепь откликается максимально возможной силой тока:

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{R}.$$

При резонансе напряжений полное сопротивление цепи минимально. Оно равно её активному сопротивлению. Катушка индуктивности и конденсатор просто перекачивают друг другу энергию.

В условиях резонанса напряжения на катушке и конденсаторе могут значительно (часто во много раз) превышать напряжение на входе цепи. Но поскольку напряжения на конденсаторе и на катушке находятся в противофазе, то их суммарное напряжение равно нулю.

Обратим внимание на то, что циклическая частота при резонансе напряжений равна

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Эта формула аналогична формуле для циклической частоты свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

А что представляет собой наша цепь? Катушка с конденсатором и резистор, подключенные к источнику переменной ЭДС. Это есть электрический колебательный контур с резистором, подключенным к источнику, который заставляет цепь совершать вынужденные колебания, то есть откликаться на «насилие». Поэтому в нашей цепи наиболее сильные колебания происходят, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой свободных колебаний. Это понятно, ведь если меня тащат туда, куда я и сам хочу, то я с удовольствием буду колебаться с частотой вынуждающей силы.

Заметим, что на наших графиках максимальные значения амплитуды колебаний отличаются более чем в два раза, при почти одинаковой резонансной частоте $\nu = 113$ Гц. Дело в том, что при меньшем активном сопротивлении амплитуда силы тока больше. Если активное сопротивление цепи велико, то даже при условии $\omega = 1/\sqrt{LC}$ заметного увеличения амплитуды силы тока не будет, то есть не будет резонанса (существенного отклика).

Резонанс – это вынужденные колебания с резко возросшей амплитудой при приближении частоты вынуждающего воздействия к собственной частоте свободных колебаний системы (резонансной частоте). Резонанс наблюдается при малом активном сопротивлении колебательной системы.

Бывают сложные колебательные системы, в которых есть несколько собственных частот. В этом случае можно говорить о резонансе на любой из этих частот при наличии внешних колебательных воздействий соответствующей частоты.

Резонанс токов при параллельном соединении элементов. При параллельном соединении элементов цепи переменного тока говорят о резонансе токов (рис. 16):

$$I = U \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}.$$

В этом случае если индуктивное и ёмкостное сопротивления становятся одинаковыми, то конденсатор и катушка обмениваются энергией только друг с другом. Поэтому ток в цепи источника будет минимальным и равным

току на резисторе $I_{\text{рез}} = \frac{U}{R}$. При резонансе токов полное сопротивление цепи равно её активному сопротивлению (аналогично резонансу напряжений).

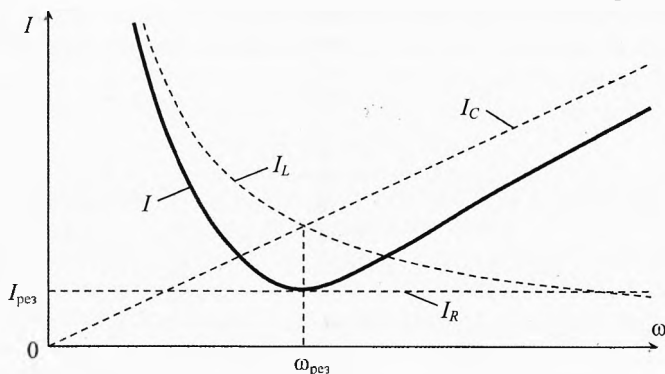


Рис. 16. Резонанс токов при параллельном соединении элементов

В условиях резонанса сила тока в катушке и конденсаторе может значительно превышать силу тока, проходящего через источник. Но поскольку токи, проходящие через конденсатор и катушку, находятся в противофазе, то их суммарное значение равно нулю.

Если частота отличается от резонансной, то пара катушка-конденсатор пропускает через себя часть тока от источника, то есть ток через источник становится больше, чем при резонансе.

Применение резонанса. Явление резонанса используется, в частности, при осуществлении радиосвязи (рис. 17). Радиоволны от различных передающих радиостанций возбуждают в антенне радиоприемника переменные токи различных частот, так как каждая радиостанция работает на своей частоте. С антенной индуктивно связан колебательный контур. Вследствие электромагнитной индукции в контурной катушке возникают переменные ЭДС соответствующих частот. Но только для резонансной частоты колебаний значения силы тока и напряжения на конденсаторе контура будут значительными. То есть из колебаний всех частот, возбужденных в антенне, контур выделяет только колебания, частота которых равна собственной частоте контура. Настройка на нужную частоту обычно осуществляется путём изменения ёмкости конденсатора. В этом состоит настройка радиоприемника на определённую радиостанцию.

В некоторых случаях резонанс в электрической цепи может принести большой вред. Если цепь не рассчитана на работу в условиях резонанса, то возникновение резонанса приведёт к аварии. Чрезмерно большие токи могут перегреть провода. А большие напряжения приведут к пробое изоляции. Такого рода аварии нередко случались раньше, когда плохо представляли

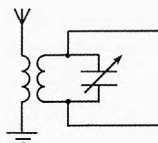


Рис. 17. Антенна радиоприёмника

себе законы электрических колебаний и не умели правильно рассчитывать электрические цепи.

Лирическое отступление. Почему юноша с девушкой любят друг друга, то есть общаются друг с другом с большой амплитудой, а с другими, возможно, даже более яркими, личностями общаются значительно слабее?

Дело в том, что любовь – это резонансное явление. Если фибры душ двух людей соединяются многими нитями, то они живут в резонансе, то есть «колеблются» согласованно с большой амплитудой. А на других любящие мало обращают внимания, ибо их души настроены на другие частоты.

Однако встречаются люди, у которых много собственных частот. Поэтому они могут любить нескольких человек одновременно (или в порядке очереди).

§ 52. Добротность контура. Волновое сопротивление

Острота резонанса колебательной системы характеризуется добротностью. Чем сильнее возрастает амплитуда вынужденных колебаний при резонансе, тем больше добротность контура. Чем меньше сопротивление в механической или электрической колебательной системе, тем больше добротность.

Добротность электрического колебательного контура – скалярная величина, характеризующая остроту резонанса. Она равна отношению амплитуды колебаний напряжения на катушке индуктивности или конденсаторе при резонансе напряжений к амплитуде напряжения на источнике.

Добротность обозначается буквой Q :

$$Q = \frac{U_{Lm,рез}}{U_m} \quad \text{или} \quad Q = \frac{U_{Cm,рез}}{U_m}. \quad (9)$$

При резонансе напряжений амплитуда напряжения на источнике равна амплитуде напряжения на резисторе, т.к. напряжения на катушке и конденсаторе взаимно компенсируются (рис. 14):

$$U_m = I_m \cdot R. \quad (10)$$

Индуктивное сопротивление катушки переменному току при резонансе:

$X_{L,рез} = \omega_{рез} L$, где $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота колебаний. Значит,

$$X_{L,рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Амплитуда напряжения на катушке:

$$U_{Lm,рез} = I_m \cdot X_{L,рез} = I_m \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

Легко показать, что $X_{C, \text{рез}} = X_{L, \text{рез}}$ и $U_{Cm, \text{рез}} = U_{Lm, \text{рез}}$.

Подставляя (10) и (11) в (9), получим:

$$Q = \frac{I_m \sqrt{L/C}}{I_m R} \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Индуктивное или ёмкостное сопротивление контура при резонансе называется **волновым сопротивлением** и обозначается буквой ρ :

$$\rho = \omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C}, \quad \text{где } \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Подставляя это в выражение для добротности, получим:

$$Q = \frac{\rho}{R}$$

Добротность контура равна отношению волнового сопротивления контура к активному

Волновое сопротивление в электротехнике вводится для того, чтобы характеризовать способность линии, по которой бежит волна напряжения, препятствовать переносу электромагнитной энергии по этой линии.

§ 53. Трансформатор

Действующее напряжение бытовой осветительной сети $U = 220$ В. Генераторы на тепловых электростанциях вырабатывают ток напряжением 11 кВ. В линию электропередач нужно подать от электростанции электроэнергию напряжением 110 кВ. То есть при производстве, передаче и использовании электроэнергии напряжение требуется повышать или понижать. Для этой цели служат специальные устройства – трансформаторы (от лат. *transformato* – преобразую).

Павел Николаевич
Яблочков (1847–1894)

Трансформатор – это электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования напряжения переменного тока при неизменной частоте.

Трансформатор был изобретен в 1878 г. русским ученым П. Н. Яблочковым.

Простейший трансформатор состоит из двух или более проводочных обмоток, надетых на сердечник (рис. 18). Сердечник набран из изолированных листов магнито-мягкой трансформаторной стали. Обмотки катушек

трансформатора изготавливаются из медного изолированного провода. Обмотки надеваются на один и тот же сердечник, поэтому их пронизывает один и тот же магнитный поток.

Обмотка, на которую подаётся напряжение от сети, состоит из N_1 витков проволоки и называется *первичной обмоткой*. Обмотка, к которой подключается потребитель, состоит из N_2 витков и называется *вторичной обмоткой*.

Важной характеристикой трансформатора является коэффициент трансформации K .

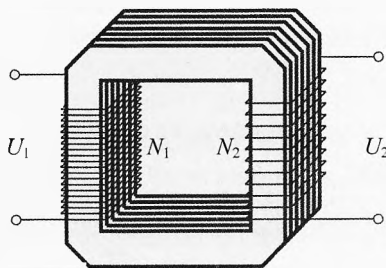


Рис. 18. Трансформатор

Коэффициент трансформации показывает, во сколько раз напряжение на первичной обмотке больше, чем на вторичной. Он равен отношению напряжения на первичной обмотке к напряжению на вторичной обмотке*:

$$K = \frac{U_1}{U_2}$$

Если коэффициент трансформации больше единицы ($K > 1$), то трансформатор называется *понижающим*.

Если коэффициент трансформации меньше единицы ($K < 1$), то трансформатор называется *повышающим*.

Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. Пусть на первичную обмотку подано синусоидальное напряжение:

$$u_1 = U_{1m} \cdot \cos \omega t.$$

Пусть сначала вторичная обмотка не подключена к потребителю, то есть трансформатор работает в *холостом режиме*. Переменное напряжение

* Коэффициент трансформации иногда определяют как отношение напряжения на вторичной обмотке к напряжению на первичной обмотке (или как отношение числа витков во вторичной обмотке к числу витков в первичной обмотке): $K = \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{N_2}{N_1}$.

Один и тот же трансформатор можно использовать для повышения и для понижения напряжения. Поэтому в электротехнике для удобства коэффициент трансформации определяют как отношение большего числа витков к меньшему. Можно встретить фразы «повышающий трансформатор с коэффициентом трансформации 10» или «понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации 27». Поэтому при решении задач на трансформаторы необходимо особенно внимательно читать условие задачи.

на первичной обмотке вызовет появление ЭДС самоиндукции, которое будет препятствовать протеканию переменного тока.

Поскольку напряжение на первичной обмотке изменяется по гармоническому закону, то по этому же закону будет изменяться сила тока в ней и магнитный поток, создаваемый этим током в сердечнике:

$$\Phi = \Phi_m \cdot \sin \omega t.$$

При изменении магнитного потока в каждом витке обмотки возникает изменяющаяся по гармоническому закону ЭДС самоиндукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi' = -\omega \Phi_m \cdot \cos \omega t = -\mathcal{E}_m \cdot \cos \omega t,$$

где $\mathcal{E}_m = \omega \Phi_m$ — максимальное значение ЭДС самоиндукции, возникающей в одном витке. Поскольку количество витков в первичной катушке N_1 , а ЭДС самоиндукции во всех витках одинакова и равна e , то мгновенное значение ЭДС самоиндукции первичной катушки равно:

$$e_1 = N_1 \cdot e = -N_1 \omega \Phi_m \cdot \cos \omega t.$$

Каждый виток вторичной катушки пронизывается таким же потоком, что пронизывает витки первичной катушки. Значит, ЭДС индукции, возникающей в каждом витке вторичной катушки, тоже равна e . Поскольку количество витков вторичной катушки равно N_2 , то мгновенное значение ЭДС индукции вторичной катушки равно:

$$e_2 = -N_2 \omega \Phi_m \cdot \cos \omega t.$$

Значит, отношение ЭДС самоиндукции в первичной обмотке к ЭДС индукции во вторичной обмотке равно отношению числа витков:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Активное сопротивление первичной обмотки мало по сравнению с её индуктивным сопротивлением, поэтому приложенное напряжение u_1 в любой момент времени практически равно ЭДС самоиндукции, взятой со знаком «-»:

$$u_1 \approx -e_1 = N_1 \omega \Phi_m \cdot \cos \omega t.$$

При разомкнутой цепи вторичной катушки, то есть в режиме холостого хода, напряжение u_2 на её концах в любой момент времени равно ЭДС индукции, взятой со знаком «-»:

$$u_2 = -e_2 = N_2 \omega \Phi_m \cdot \cos \omega t$$

Поэтому

$$\frac{u_1}{u_2} \approx \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Поскольку это соотношение верно для мгновенных значений напряжения, то оно будет верно и для действующих значений. Поэтому, коэффициент трансформации можно определить как отношение числа витков в первичной катушке к числу витков во вторичной катушке:

$$K \approx \frac{N_1}{N_2}$$

Если $N_1 > N_2$, то трансформатор понижает напряжение, а если $N_1 < N_2$, то трансформатор повышает напряжение.

Рабочий режим. При подключении нагрузки к концам вторичной обмотки во вторичной цепи возникает переменный ток. Колебания силы тока во вторичной цепи возбуждают в сердечнике переменный магнитный поток. Этот магнитный поток уменьшает амплитуду колебаний полного магнитного потока в сердечнике, что приводит к уменьшению ЭДС самоиндукции в первичной катушке. Из-за этого в ней возрастает амплитуда колебаний силы тока до тех пор, пока не будет достигнуто равенство амплитуд приложенного напряжения и ЭДС самоиндукции.

Действующее значение силы тока в первичной обмотке нагруженного трансформатора существенно больше силы тока холостого хода.

Активная мощность $P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$, потребляемая из сети первичной обмоткой, расходуется на мощность, передаваемую потребителю вторичной обмоткой цепи $P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2$. При нагрузках трансформаторов, близких к номинальным, КПД трансформаторов достигает $90 \div 95\%$, а для мощных трансформаторов – до $98 \div 99,5\%$. При этом сдвиг фаз φ_1 и φ_2 в обеих обмотках близок к нулю, то есть

$$P_1 \approx U_1 \cdot I_1 \quad \text{и} \quad P_2 \approx U_2 \cdot I_2.$$

На что же идёт энергия, поступившая на первичную обмотку трансформатора от источника? Основная её часть идёт через вторичную обмотку к потребителям $P_2 = U_2 \cdot I_2$. Кроме этого небольшая часть энергии расходуется на нагревание проводов обмоток, то есть на «потери в меди» $P_m = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2$.

Наконец, часть энергии тратится на перемагничивание сердечника. Его не случайно делают из магнито-мягкого материала с возможно более узкой петлей гистерезиса, чтобы как можно меньше тратилось энергии на перемагничивание сердечника. Сердечник набирают из тонких изолированных пластин, расположенных параллельно вектору магнитной индукции, для того, чтобы максимально уменьшить потери на нагревание сердечника за счёт токов Фуко. Потери электроэнергии в сердечнике называются «потерями в стали» $P_{ст}$.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$P_1 = P_2 + P_m + P_{ст}.$$

КПД трансформатора равен отношению мощности, снятой потребителем с вторичной обмотки трансформатора, к мощности, полученной первичной обмоткой от сети:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}, \quad \eta = \frac{P_1 - (P_m + P_{ст})}{P_1} \quad \text{или} \quad \eta = 1 - \frac{P_m + P_{ст}}{P_1}.$$

В маломощных трансформаторах потери в стали и меди могут достигать десятков процентов, но в мощных трансформаторах они составляют единицы процентов. Из всех машин и аппаратов КПД трансформатора самый высокий.

Если потери в стали и меди незначительны, то мощность, поступающая в первичную обмотку, приблизительно равна мощности, передаваемой потребителю вторичной обмоткой:

$$U_1 \cdot I_1 \approx U_2 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} \approx \frac{I_2}{I_1}.$$

Во сколько раз трансформатор увеличивает напряжение, примерно во столько же раз уменьшает силу тока, и наоборот.

Поскольку $\frac{U_1}{U_2} = K$, то

$$K \approx \frac{I_2}{I_1}.$$

В хороших трансформаторах с малыми потерями в стали и меди коэффициент трансформации приблизительно равен отношению силы тока во вторичной обмотке к силе тока в первичной обмотке.

Коэффициент трансформации приблизительно показывает, во сколько раз сила тока во вторичной обмотке больше, чем в первичной.

§ 54. Генератор высокочастотных электромагнитных колебаний

Для осуществления радиосвязи необходимо перенести от источника до приемника полезный сигнал, представляющий собой электромагнитные колебания низкой частоты. Роль носителя информации выполняют высокочастотные электромагнитные колебания, которые модулируются (кодируются) полезным сигналом и «вылетают» из радиопередатчика в виде электромагнитных волн высокой частоты (1 МГц ÷ 1 ГГц). А это – миллионы, миллиарды колебаний в секунду! Такие колебания не могут создаваться электро-механическими генераторами. Колебания высоких и сверхвысоких частот создаются специальными высокочастотными генераторами.

Существует несколько схем генераторов с самовозбуждением, то есть генераторов, в которых часть энергии источника постоянного напряжения превращается в энергию высокочастотных колебаний. Мы рассмотрим две наиболее наглядные из них.

Генератор на ламповом триоде или транзисторе с индуктивной обратной связью представляет собой автоколебательную систему, аналогичную механической, например, как в часах-«ходиках».

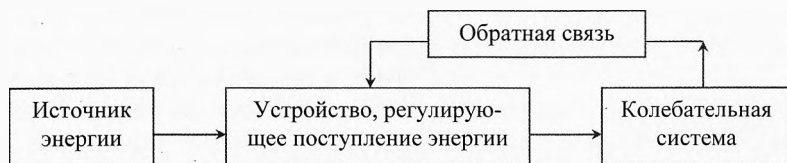


Рис. 19. Блок-схема автоколебательной системы

На рис. 19 представлена блок-схема автоколебательной системы:

1) источник энергии, поддерживающий незатухающие колебания (источник постоянного напряжения);

2) устройство, регулирующее поступление энергии от источника, то есть играющее роль быстродействующего ключа (вакуумный триод в ламповом генераторе или транзистор в генераторе на транзисторе);

3) колебательная система, в которой происходят колебания (колебательный контур);

4) обратная связь, с помощью которой колебательная система управляет поступлением дополнительной энергии (катушка связи).

Ламповый генератор. Ламповый генератор содержит колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и конденсатора ёмкостью C . Если зарядить конденсатор, то в контуре возникнут затухающие колебания. Чтобы эти колебания не затухали, необходимо компенсировать потери энергии за каждый период.

Пополнять энергию в контуре можно подзаряжая конденсатор в нужные моменты времени. Для этого надо контур периодически подключать на некоторый (малый по сравнению с периодом) промежуток времени к источнику постоянного напряжения \mathcal{E}_n (рис. 20). Конденсатор должен подключаться к источнику напряжения в те интервалы времени, когда присоединённая к положительному полюсу источника обкладка конденсатора заряжена положительно, а присоединённая к отрицательному полюсу — отрицательно. Только в этом случае источник дополнительно подзаряжает конденсатор, пополняя энергию колебательного контура. И только в этом случае в контуре могут установиться незатухающие колебания, циклическая частота которых равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

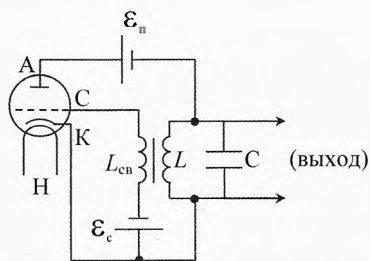


Рис. 20. Ламповый генератор электромагнитных колебаний

Для этого необходимо обеспечить автоматическую работу быстрodeйствующего ключа, который будет включать и отключать источник постоянного напряжения в нужные моменты времени. В качестве такого практически безынерционного ключа используется ламповый триод.

Колебательный контур через катушку связи $L_{\text{св}}$ сигнализирует ламповому триоду, когда ему нужно закрываться или открываться, то есть катушка $L_{\text{св}}$ осуществляет обратную связь между колебательным контуром и источником с лампой.

Для большего КПД генератора ламповый триод обычно подключают так, чтобы он работал в режиме, при котором он открывается один раз за период на время, значительно меньшее половины периода. Для работы в таком режиме на сетку лампы подаётся отрицательный относительно катода потенциал, превышающий по модулю запирающее напряжение лампы. Этот потенциал создаётся с помощью автоматического смещения или специального источника \mathcal{E}_c .

Когда заряд нижней обкладки конденсатора увеличивается, достигая максимально положительного значения, напряжение на конденсаторе тоже становится максимальным. Значит, и напряжение на катушке контура тоже становится максимальным. Поскольку катушка контура L и катушка связи $L_{\text{св}}$ насажены на один сердечник, то напряжение на катушке связи тоже будет увеличиваться, достигая максимального значения. Значит, как раз в этот момент отрицательный потенциал на сетке будет скомпенсирован напряжением на катушке связи и откроется ламповый триод. А значит, источник \mathcal{E}_n будет «подталкивать» колебания как раз в тот момент, когда нижняя обкладка конденсатора заряжена положительно, а верхняя — отрицательно.

Правда, для этого необходима определённая ориентация намотки провода в катушке связи относительно направления намотки в катушке колебательного контура, а также определённое соотношение числа витков в катушках.

Генератор на транзисторе. Генераторы на ламповых триодах сейчас используются только в очень мощных генераторах. В подавляющем большинстве случаев используются генераторы на транзисторах. Они на порядок компактнее, надёжнее, экономичнее.

Схема работы генератора на транзисторе аналогична схеме лампового генератора, особенно при использовании транзистора $n-p-n$ типа (рис. 21). Колебательный контур соединён последовательно с источником тока и транзистором таким обра-

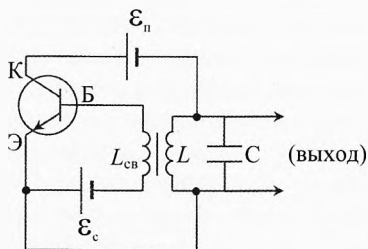


Рис. 21. Генератор электромагнитных колебаний на транзисторе

зом, что на эмиттер подан отрицательный потенциал, а на коллектор – положительный.

Чтобы в генераторе возникли незатухающие колебания, транзистор должен быть заперт более половины периода. Для этого на базу транзистора нужно подать отрицательный относительно эмиттера потенциал. При этом ток эмиттер-база будет равен нулю.

Чтобы транзистор открылся, на базу относительно эмиттера нужно подать положительный потенциал. При этом через эмиттер-база пойдёт ток, а поскольку площадь коллектора значительно больше площади базы, то большая часть электронов, двигаясь хаотически на пути от эмиттера к базе, диффундирует в коллекторную область, пройдёт через запирающий слой и попадёт в ускоряющее поле коллектора. И тем самым создаст ток в цепи коллектора, то есть в цепи колебательного контура.

Этот коллекторный ток должен пройти в тот момент, когда нижняя по рисунку обкладка конденсатора заряжена положительно, а верхняя – отрицательно. А для этого необходима определённая ориентация катушки провода в катушке связи относительно направления катушки в катушке колебательного контура, а также определённое соотношение числа витков в катушках. Если всё согласовано, то источник постоянного напряжения будет в нужные моменты времени «подталкивать» колебания, компенсируя потери за период. При этом в контуре возникнут незатухающие колебания.



Упражнения

1 Найти мощность, выделяемую на резисторах в цепи (рис. 22). На вход подаётся синусоидальный переменный ток с действующим напряжением U . Сопротивление каждого резистора равно R , диоды идеальные.

2 Найти мощность, выделяемую на резисторах в цепи (рис. 23). На вход подаётся синусоидальный переменный ток с действующим напряжением U . Сопротивление каждого резистора равно R , диоды идеальные.

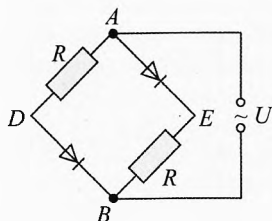


Рис. 22. Найти мощность на резисторах

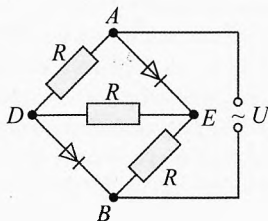


Рис. 23. Найти мощность на резисторах

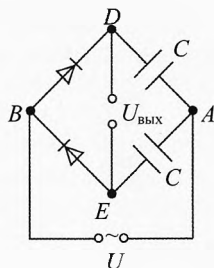


Рис. 24. Выпрямитель двухполупериодный

3 На рис. 24 приведена схема двухполупериодного выпрямителя с удвоением напряжения. На вход подаётся синусоидальный переменный ток с действующим напряжением $U = 220$ В. Диоды идеальные. Чему равно напряжение на выходе выпрямителя?

4 В цепи переменного тока с циклической частотой $\omega = 300$ рад/с последовательно включены резистор $R = 10$ Ом и конденсатор. Найти ёмкость конденсатора, если амплитуда напряжения на нём $U_{Cm} = 100$ В, а амплитуда напряжения на резисторе $U_{Rm} = 90$ В.

5 Конденсатор, катушка индуктивности и резистор последовательно включены в цепи переменного тока. При неизменной амплитуде и частоте переменного напряжения сети постепенно увеличивают индуктивность катушки от 0 до ∞ . Как будет изменяться амплитуда силы тока в цепи?

6 Циклическая частота переменного тока $\omega = 100\pi$ рад/с. Определить период и частоту переменного тока.

7 Амплитудное значение ЭДС при вращении витка в магнитном поле $\mathcal{E}_m = 20$ В. Определить мгновенные значения ЭДС через промежутки времени t , равные $1/12$, $1/4$, $1/2$ периода. Начальная ЭДС равна нулю.

8 Сколько витков в рамке площадью $S = 500$ см², если при вращении её с частотой $\nu = 20$ Гц в однородном магнитном поле индукцией $B = 0,1$ Тл, амплитудное значение ЭДС индукции равно $\mathcal{E} = 63$ В?

9 Квадратная рамка площадью $S = 625$ см² с замкнутой обмоткой из медного провода вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл вокруг оси, лежащей в плоскости рамки, перпендикулярной полю, совершая $n = 1200$ об/мин. Определить, пренебрегая теплопередачей, изменение температуры обмотки за время $\tau = 1$ мин. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Плотность меди $D = 8900$ кг/м³. Удельная теплоёмкость меди $c = 390$ Дж/(кг·К).

10 Сила тока в цепи изменяется со временем по закону $i = 8,5 \cdot \sin(314 \cdot t + 0,651)$. Определить действующее значение силы тока, его начальную фазу и частоту. Чему будет равна сила тока в цепи в момент времени $t_1 = 0,08$ с; $t_2 = 0,042$ с?

11 Сила тока в проводнике меняется со временем так, как показано на рис. 25, I_0 и τ неизвестны, но известно эффективное значение силы тока $I = 2$ А. Какой электрический заряд проходит через поперечное сечение проводника за один час?

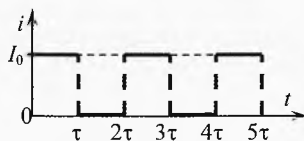


Рис. 25. Найти прошедший заряд

12 Тепловой вольтметр, включённый в цепь переменного тока, показывает $U = 220$ В. Найти максимальное напряжение в цепи.

13 Соленоид с железным сердечником (дросселем) индуктивностью $L = 2$ Гн и сопротивлением $R = 10$ Ом включён в сеть постоянного тока с напряжением $U = 20$ В, а затем в сеть переменного тока с действующим напряжением $U = 20$ В и частотой $\nu = 0,4$ кГц. Найти силу тока, проходящего через соленоид в первом случае и амплитуду силы тока во втором случае.

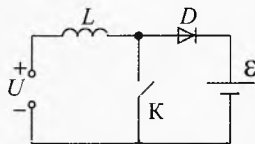


Рис. 26. Подзарядка аккумулятора

14 Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В от мощного источника напряжения $U = 5$ В собрана схема из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн, диода и прерывателя К (рис. 26), который периодически замыкается и размыкается через одинаковые промежутки времени $\tau_1 = \tau_2 = 0,01$ с. Определить среднюю силу тока зарядки аккумулятора.

15 К источнику переменного напряжения $u = 300 \cdot \sin(200\pi \cdot t)$ подключены последовательно катушка индуктивностью $L = 0,5$ Гн, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ, активное сопротивление $R = 100$ Ом. Определить амплитудное значение силы тока, сдвиг фаз между током и напряжением, коэффициент мощности и потребляемую мощность.

16 В цепи, представленной на рис. 27, $R = 20$ Ом, $L = 0,2$ Гн, $C = 100$ мкФ, действующее напряжение $U = 75$ В и частота переменного тока $\nu = 50$ Гц. Найти действующее значение силы тока и разность фаз между напряжением и током. Определить действующее напряжение на каждом участке и мощность тока в цепи.

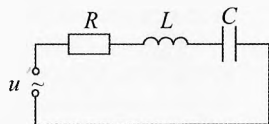


Рис. 27. Последовательное соединение элементов

17 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор $R = 628$ Ом и катушка индуктивности. При этом между колебаниями напряжения и силы тока наблюдается сдвиг фазы на $\varphi_c = \pi/4$. Какова индуктивность катушки? Конденсатор какой ёмкости нужно включить в цепь, чтобы сдвиг фаз между силой тока и напряжением стал равен нулю?

18 Резонанс в последовательном колебательном контуре (рис. 27), содержащем конденсатор ёмкостью $C = 1$ мкФ, наступает при частоте $\nu_1 = 400$ Гц. Если параллельно конденсатору ёмкостью C подключить конденсатор ёмкостью C' , то резонансная частота становится равной $\nu_2 = 100$ Гц. Найти ёмкость конденсатора C' .

19 Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 220$ В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки $U_2 = 20$ В, её сопротивление $R_2 = 1$ Ом; сила тока в ней $I = 2$ А. Найти коэффициент трансформации и КПД трансформатора.

20 Трансформатор повышает напряжение от значения $U_1 = 220$ В до значения $U_2 = 660$ В и содержит в первичной обмотке $N_1 = 840$ витков. Каков коэффициент трансформации? Сколько витков N_2 содержит вторичная обмотка? В какой обмотке провод большего сечения?

21 Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $K = 10$ включён в сеть напряжением $U_1 = 220$ В. Каково напряжение U_2 на выходе трансформатора, если сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0,2$ Ом, а сопротивление полезной нагрузки $R = 2$ Ом?

22 Сила тока холостого хода в первичной обмотке трансформатора, питаемой от сети переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В, равна $I = 0,2$ А. Электрическое сопротивление первичной обмотки $R_1 = 100$ Ом. Определить индуктивность первичной обмотки трансформатора.

23 Напряжение на первичной обмотке трансформатора $U_1 = 120$ В и сила тока в ней $I_1 = 0,5$ А. Ко вторичной обмотке подсоединена лампа, сила тока в которой $I_2 = 3$ А, а напряжение на ней $U_2 = 10$ В. КПД трансформатора $\eta = 0,7$. Найти сдвиг фазы между силой тока и напряжением в первичной обмотке.

24 Неоновая лампа включена в цепь переменного тока частотой 50 Гц и действующим напряжением 127 В. Напряжение зажигания у лампы 84 В. Определить продолжительность вспышек Δt_1 неоновой лампы и время между ними Δt_2 . Считать напряжения зажигания и гашения равными (хотя на самом деле напряжения зажигания больше напряжения гашения).

25 Цепь состоит из источника, разность потенциалов которого меняется по закону $u = 311 \cos(314t)$ (В), конденсатора ёмкостью $C = 50$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 40$ Ом (рис. 28). Найти показания амперметра, а также действующее напряжение на конденсаторе и резисторе.

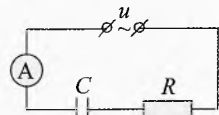


Рис. 28. Найти силу тока и напряжение на элементах

26 Паяльник с номинальным напряжением $U_n = 40$ В и мощностью $P = 65$ Вт нужно питать от сети переменного тока частотой 50 Гц и напряжением $U = 220$ В. Рассмотреть возможные варианты схем и выбрать наиболее эффективный с точки зрения экономичности и безопасности использования. Имеется возможность использовать любые материалы и комплектующие.

27 Цепь переменного тока состоит из генератора, напряжение на полюсах которого изменяется по закону $u = U_m \cos(\omega t)$, резистора сопротивлением $R = 100$ Ом и катушки индуктивности $L = 0,55$ Гн, соединённых параллельно (рис. 29). Найти действующее значение силы тока I через генератор, резистор I_R и катушку индуктивности I_L , а также сдвиг фаз между силой тока и напряжением, если частота тока $\nu = 50$ Гц, а действующее напряжение $U = 220$ В.

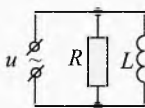


Рис. 29. Определить силы токов и сдвиг фаз

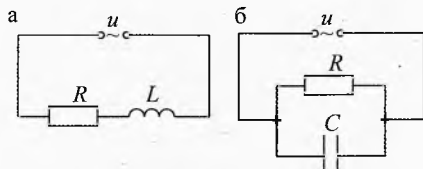


Рис. 30. При каких параметрах цепи сдвиг фаз будет одинаков?

28 Имеются две независимые цепи переменного тока. Первая (рис. 30а) состоит из источника питания $u = U_m \cos \omega t$, катушки индуктивности L и резистора сопротивлением R , соединённых последовательно. Вторая (рис. 30б) состоит из такого же источника питания и параллельно соединённых конденсатора C и резистора сопротивлением R . При каком соотношении L , C и R сдвиг фаз между током и напряжением в обеих цепях будет одинаков?

29 Длина линии электропередачи переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц составляет $S = 600$ км. Оценить разность фаз напряжения в сети на этом расстоянии.

30 Для определения активной мощности переменного тока, выделяемой катушкой индуктивности L , активное сопротивление которой равно r , можно использовать схему по рис. 31. Эквивалентная схема такой катушки представ-

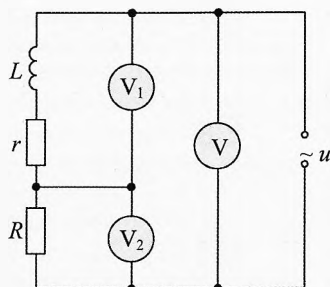


Рис. 31. Определение активной мощности катушки

ляет собой идеальную катушку индуктивностью L с последовательно соединённым с ней резистором r . Последовательно с катушкой соединяют резистор сопротивлением R и измеряют действующие напряжения U , U_1 и U_2 идеальными вольтметрами V , V_1 и V_2 . Найти мощность, выделяемую на катушке, то есть на её активном сопротивлении r .

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Для прохождения тока участки ADB и AEB эквивалентны. Ток через резисторы и диоды идёт, когда потенциал точки A больше потенциала точки B , то есть только половину периода. Так как диоды идеальные, то их сопротивление в «прямом» направлении равно нулю, а в «обратном» – бесконечно большое. Следовательно, всё тепло выделяется только на резисторах. Поскольку ток через диоды и резисторы идёт только половину периода, то выделяемая на двух резисторах мощность равна: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R}$.

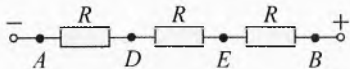


Рис. 32. Первая половина периода

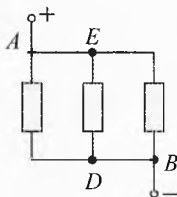


Рис. 33. Вторая половина периода

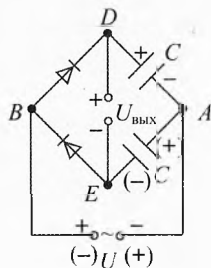


Рис. 34. Выпрямитель

2 В течение полупериода, при котором потенциал точки A ниже потенциала точки B ($\varphi_A < \varphi_B$), все три резистора фактически соединены последовательно (рис. 32). Средняя выделяемая в этом полупериоде мощность равна:

$$P_1 = \frac{U^2}{3R}.$$

В смежной половине периода, когда $\varphi_A > \varphi_B$, резисторы соединены параллельно (рис. 33). Средняя выделяемая в этом полупериоде мощность равна:

$$P_2 = 3 \cdot \frac{U^2}{R}.$$

Средняя за период мощность равна:

$$P = \frac{P_1 \cdot 0,5T + P_2 \cdot 0,5T}{T} = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{U^2}{R}.$$

3 Выпрямитель работает следующим образом. В течение одного полупериода, когда открыт диод в плече BD , заряжается конденсатор в плече DA . В течение другого полупериода, когда открыт диод в плече EB , заряжается конденсатор в плече AE .

Полярность заряженных конденсаторов приведена на рис. 34. Напряжение на выходе выпрямителя равно сумме напряжений на конденсаторах. Поскольку диоды идеальные, то каждый конденсатор заряжается до амплитудного значения $\sqrt{2}U$. Следовательно, напряжение на выходе выпрямителя с удвоенным напряжением при отсутствии нагрузки равно:

$$U_{\text{вых}} = 2\sqrt{2}U \quad \text{или} \quad U_{\text{вых}} = 2\sqrt{2} \cdot 220 \text{ В} = 622 \text{ В}.$$

Заметим, что напряжение на выходе не является переменным: «+» всегда сверху, а «-» всегда снизу.

При наличии нагрузки, подключённой к выходу выпрямителя, напряжение на ней будет меньше, т.к. на нагрузку идёт ток и конденсаторы не будут заряжаться до амплитудного значения. Они наоборот будут разряжаться через нагрузку. Чем больше идёт ток через нагрузку, тем меньше будет напряжение на выходе.

$$\text{4} \quad U_{R_m} = I_m R, \quad U_{C_m} = \frac{I_m}{\omega C}; \Rightarrow C = \frac{U_{R_m}/R}{\omega U_{C_m}} = 300 \text{ мкФ}.$$

5 Амплитуда силы тока будет монотонно возрастать, а после достижения резонанса – монотонно убывать.

$$\text{6} \quad T = 2\pi/\omega = 0,02 \text{ с}, \quad \nu = \omega/2\pi = 50 \text{ Гц}.$$

$$\text{7} \quad e = \mathcal{E}_m \cdot \sin(2\pi \cdot t/T), \quad e_1 = 10 \text{ В}, \quad e_2 = 20 \text{ В}, \quad e_1 = 0.$$

$$\text{8} \quad \mathcal{E} = \Phi_{\text{max}} \cdot \omega, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \Phi_{\text{max}} = BSN; \Rightarrow N = \mathcal{E}/(2\pi\nu \cdot BS) = 100.$$

9 Максимальное значение ЭДС индукции, возбуждаемой в обмотке, равно произведению максимального магнитного потока $\Phi_{\text{max}} = B \cdot S \cdot N$, пронизывающего все витки контура, и угловой скорости вращения ($\omega = 2\pi\nu$):

$$\mathcal{E}_m = \Phi_{\text{max}} \cdot \omega \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_m = BSN \cdot 2\pi\nu.$$

$$\text{Тогда действующее значение ЭДС равно: } \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} = \pi BSNn \cdot \sqrt{2}.$$

По закону сохранения энергии: $\frac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot \tau = c \cdot m \cdot \Delta t$, где $R = \frac{\rho l}{S}$ – сопротивление рамки, $l = 4aN$ – длина всех витков проволоки в рамке, a – длина стороны квадратной рамки, $S = a^2$ – площадь рамки, $m = D \cdot S \cdot l$ – масса рамки.

$$\text{Решая последние шесть уравнений, получим: } \Delta t = \frac{S \cdot (B\pi n)^2 \cdot \tau}{8\rho c \cdot D} = 3,1 \text{ К}.$$

$$\text{10} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 6 \text{ А}; \quad \varphi_0 = 0,651 \text{ рад}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Гц}; \quad i_1 = 5 \text{ А}; \quad i_2 = 8,1 \text{ А}.$$

$$\text{11} \quad I_0^2 R \cdot \frac{t}{2} = I^2 R t, \Rightarrow I_0 = I \cdot \sqrt{2}. \text{ Значит, } q = I_0 \cdot \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot I t}{2} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ Кл}.$$

$$\text{12} \quad U_m = U \cdot \sqrt{2} = 311 \text{ В}.$$

$$\text{13} \quad 1) I = U/R = 2 \text{ А}; \quad 2) I_m = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2}} = 5,6 \text{ мА}.$$

14 Найдём силу тока I_1 , который нарастёт в катушке за время τ_1 при замкнутом ключе в цепи U - L - K :

$$U = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow I_1 = \frac{U\tau_1}{L} = 0,05 \text{ А}.$$

После размыкания ключа K в катушке возникнет ЭДС самоиндукции, которая препятствует уменьшению тока в ней. Благодаря этой ЭДС откроется диод и ток пойдёт по цепи U - L - D - \mathcal{E} . Найдём скорость уменьшения тока в этом случае:

$$U - \mathcal{E} = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{U - \mathcal{E}}{L} = -7 \text{ А/с}.$$

Значит, сила тока в катушке уменьшится от I_1 до нуля раньше, чем снова откроется прерыватель K :

$$\tau'_2 = \frac{I_1}{|\Delta I / \Delta t|} = \frac{I_1 \cdot L}{\mathcal{E} - U} = \frac{U \tau_1}{\mathcal{E} - U} = 0,0071 \text{ с.}$$

Поскольку за это время сила тока линейно уменьшается, от I_1 до нуля, то средняя сила тока за время τ'_2 равна $I_1/2$.

Найдём среднее значение силы тока через аккумулятор за весь период ($\tau_1 + \tau_2$):

$$I_{\text{ср}} = \frac{(I_1/2) \tau'_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U^2 \tau_1^2}{2L(\mathcal{E} - U)(\tau_1 + \tau_2)} = 8,9 \text{ мА.}$$

$$\textbf{15} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \omega = 200\pi, \quad U_m = 300 \text{ В}, \Rightarrow I_m = \frac{U}{Z} = 1,6 \text{ А.}$$

$$\text{Сдвиг фаз: } \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{|\omega L - \frac{1}{\omega C}|}{R}, \Rightarrow \varphi_c = 57^\circ. \text{ Коэффициент мощности: } \cos \varphi_c = 0,54.$$

$$\text{Потребляемая активная мощность: } P = \frac{I_m^2}{2} \cdot R = 130 \text{ Вт.}$$

$$\textbf{16} \quad I = 2,0 \text{ А; } \varphi = 57^\circ; U_R = 40 \text{ В; } U_L = 126 \text{ В; } U_C = 63 \text{ В; } P = 80 \text{ Вт.}$$

$$\textbf{17} \quad \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{2\pi\nu L}{R}, \Rightarrow L = \frac{R}{2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi_c} = 2 \text{ Гн; } C = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 \cdot L} = 5 \text{ мкФ.}$$

$$\textbf{18} \quad v_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C')}}; \Rightarrow C' = C((v_1/v_2)^2 - 1) = 15 \text{ мкФ.}$$

$$\textbf{19} \quad K = \frac{U_1}{U_2 + I \cdot R} = 10; \eta = \frac{U_2 I}{(U_2 + I \cdot R) I} = 91\%.$$

$$\textbf{20} \quad K = U_1/U_2 = 1/3; N_2 = N_1/K = 2520; \text{ в первичной.}$$

$$\textbf{21} \quad K = \frac{U_1}{U_{20}}, \quad I_2 = \frac{U_{20}}{R + R_2}, \quad U_2 = I_2 \cdot R = 20 \text{ В.}$$

$$\textbf{22} \quad I = \frac{U}{Z}, \quad Z = \sqrt{R_1^2 + (2\pi\nu L)^2}; \Rightarrow L = \frac{\sqrt{(U/I)^2 - R_1^2}}{2\pi\nu} = 3,5 \text{ Гн.}$$

$$\textbf{23} \quad \eta = \frac{P_{\text{ламп}}}{P_{\text{потребл}}} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_c}, \quad \cos \varphi_c = \frac{U_2 I_2}{\eta U_1 I_1} = 0,714, \quad \varphi = 44^\circ.$$

$$\textbf{24} \quad \Delta t_1 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ с; } \Delta t_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$\textbf{25} \quad \text{Согласно закону Ома для переменного тока } I = \frac{U}{Z}, \text{ где } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

$$U = \frac{311 \text{ В}}{\sqrt{2}} = 220 \text{ В; } Z - \text{полное сопротивление участка цепи (импеданс). При последо-}$$

$$\text{вательном соединении элементов } Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 63,7 \text{ Ом.}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{220}{\sqrt{40^2 + 63,7^2}} \approx 2,9 \text{ А. } U_R = I \cdot R = 117 \text{ В; } U_C = I \cdot X_C = 186 \text{ В.}$$

26 а) Можно использовать реостат, рассчитанный на напряжение 220 В сопротивлением порядка $r = 100 \text{ Ом}$, включённый с паяльником по схеме потен-

$$\text{циометра (рис. 35а). КПД такого устройства } \eta = \frac{P}{P_{\text{полн}}} = \frac{P}{U^2 / R_{\text{полн}}},$$

где $R_{\text{полн}} = r_1 + \frac{R \cdot r_2}{R + r_2}$, $r = r_1 + r_2$, $R = \frac{U_{\text{н}}^2}{P}$.

Ясно, что $I = \frac{U - U_{\text{н}}}{r_1} = \frac{U_{\text{н}}}{r_2 R / (r_2 + R)}$. Проведя расчёты, получим: $\eta \approx 11\%$. Как

видно, устройство малоэффективное и напряжение на клеммах реостата опасно (реостат надо изолировать от персонала!).

б) Можно последовательно с паяльником подключить резистор сопротивлением $R_{\text{д}} = \frac{U - U_{\text{н}}}{I}$. $R = 110$ Ом. КПД такого устройства (рис. 35б) $\eta = \frac{U_{\text{н}}}{U} = 0,18 = 18\%$.

КПД выше, чем в первом случае, но далек от 100%.

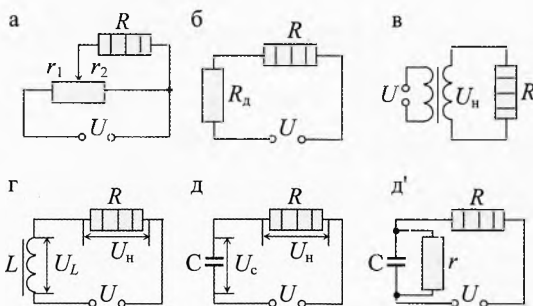


Рис. 35. Схема подключения паяльника

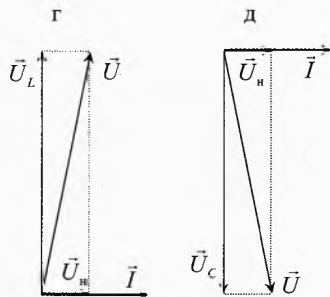


Рис. 36. Векторные диаграммы для схем с катушкой и конденсатором

в) Можно использовать понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $K = 5,5$. Поскольку комбинация напряжений 220 и 40 В является стандартной, то можно просто купить такой трансформатор, хотя это не очень дешево. КПД с трансформатором в несколько раз выше, чем в первых двух случаях. Хотя для маломощных трансформаторов он не очень близок к 100% (рис. 35в).

г) Можно подключить последовательно с паяльником катушку индуктивности с замкнутым стальным сердечником, которая погасит избыточное напряжение (рис. 35г). Из векторной диаграммы видно, что (рис. 36г): $U^2 = U_{\text{н}}^2 + U_L^2$. Учитывая,

что $U_L = I \cdot \omega L$, $I = P/U_{\text{н}}$, получим: $L = \frac{U_{\text{н}} \sqrt{U^2 - U_{\text{н}}^2}}{\omega P}$; $L \approx 0,42$ Гн.

Достоинство такой схемы – высокий КПД, ибо индуктивное сопротивление катушки во много раз больше активного, особенно с замкнутым сердечником. Но недостатком является то, что при такой большой индуктивности нужно использовать для её намотки довольно много дорогого медного провода и нужен большой сердечник.

д) Можно подключить последовательно с паяльником конденсатор, который погасит избыточное напряжение (рис. 35д).

Из векторной диаграммы для действующих значений напряжения видно (рис. 36д): $U^2 = U_{\text{н}}^2 + U_C^2$. Так как $U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{P/U_{\text{н}}}{\omega C}$, то $C = \frac{P}{\omega U_{\text{н}} \sqrt{U^2 - U_{\text{н}}^2}}$; $C \approx 24$ мкФ.

Металлобумажный конденсатор такой ёмкости, рассчитанный на напряжение (300÷400) В, имеет небольшие габариты и стоит недорого. Кроме того, он не по-

требуется электроэнергия, поэтому данный вариант имеет КПД, практически равный 100%. Однако при отключении такого устройства от сети конденсатор останется под напряжением и при касании рукой втулок вилки человек получит разряд на себя. Чтобы избежать такой неприятности, достаточно параллельно с конденсатором подключить высокоомный резистор $r = 100 \text{ кОм}$ (рис. 35д'), который быстро разрядит конденсатор. Характерное время разряда:

$$\tau = r \cdot C, \quad \tau = (10^5 \text{ Ом}) \cdot (2,4 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}) = 2,4 \text{ с.}$$

Рассеиваемая им мощность менее 0,5 Вт, и КПД установки составит 99%. Последний вариант схемы является наилучшим решением данной задачи.

27 Напряжение на генераторе, резисторе и катушке изменяется синфазно. $I_R = \frac{U}{R}$, $I_R = 2,2 \text{ А}$; $I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}$, $I_L = 1,27 \text{ А}$. Изобразим векторную диаграмму для сил тока и напряжения (рис. 37). Сила тока в резисторе по фазе совпадает с напряжением, а в катушке индуктивности отстает на $\pi/2$. Амплитуда силы тока $\vec{I}_m = \vec{I}_{Lm} + \vec{I}_{Rm}$ или

$$I_m = \sqrt{I_{Lm}^2 + I_{Rm}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{U_m}{R}\right)^2}, \text{ действующее значение}$$

$$\text{силы тока } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2}, \quad I = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2}, \quad I = 2,54 \text{ А.}$$

$$\text{Сдвиг фаз } \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{I_{Lm}}{I_{Rm}} = \frac{U_m \cdot R}{\omega L \cdot U_m}, \quad \operatorname{tg} \varphi_c = \frac{R}{\omega L}, \quad \varphi_c = 30^\circ.$$

$$\text{Токи } I_R \text{ и } I_L \text{ можно найти и так: } I_R = \frac{I_{Rm}}{\sqrt{2}} = \frac{I_m \cos \varphi_c}{\sqrt{2}}, \quad I_R = I \cos \varphi_c, \quad I_R = 2,2 \text{ А};$$

$$I_L = \frac{I_{Lm}}{\sqrt{2}} = \frac{I_m \sin \varphi_c}{\sqrt{2}}, \quad I_L = I \sin \varphi_c, \quad I_L = 1,27 \text{ А.}$$

28 Изобразим векторные диаграммы напряжений и токов для обеих цепей.

В первой цепи все элементы соединены последовательно, поэтому ток во всех элементах одинаков (рис. 38а). Напряжение на резисторе совпадает по фазе с силой тока. В катушке напряжение опережает силу тока на 90° . Найдём сдвиг фаз между силой тока и общим напряжением в схеме с катушкой:

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{U_{Lm}}{U_{Rm}} = \frac{I_m \cdot \omega L}{I_m \cdot R} = \frac{\omega L}{R}.$$

Во второй цепи все элементы соединены параллельно, поэтому напряжение на всех элементах одинаково (рис. 38б). Сила тока на резисторе совпадает по фазе с напряжением. Сила тока в конденсаторе опережает напряжение на 90° . Сдвиг фаз между общей силой тока и напряжением в схеме с конденсатором:

$$\operatorname{tg} \varphi_6 = \frac{I_{Cm}}{I_{Rm}} = \frac{U_m \cdot \omega C}{U_m / R} = \omega CR.$$

Значит, сдвиг фаз в обеих цепях одинаков (по модулю) при условии:

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \operatorname{tg} \varphi_6 \Rightarrow \frac{\omega L}{R} = \omega CR \Rightarrow L = C \cdot R^2.$$

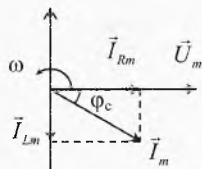


Рис. 37. Векторная диаграмма к задаче 27

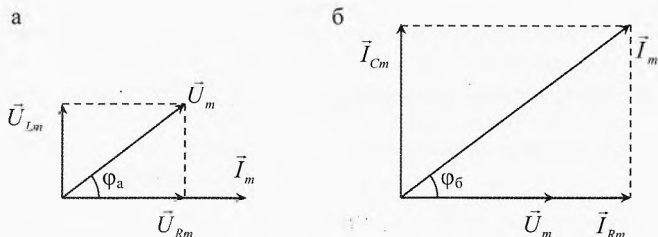


Рис. 38. Векторные диаграммы к задаче 28

29 Пусть в начале линии напряжение изменяется по закону $u_0 = U_m \sin \omega t$, где $\omega = 2\pi\nu$. На расстоянии S происходит запаздывание по фазе из-за конечности скорости передачи сигнала электромагнитной волной по проводам. Для оценки примем её равной скорости самой электромагнитной волны, то есть скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Время запаздывания $\tau = S/c$. В конце линии напряжение будет изменяться по закону $u = U_m \sin(\omega t - \omega\tau)$. Разность фаз $\Delta\varphi$ в один и тот же момент в начале и конце линии $\Delta\varphi = \omega\tau = 2\pi\nu \cdot \frac{S}{c} = \frac{\pi}{5} = 36^\circ$.

30 Построим векторную диаграмму для действующих значений напряжения и тока, каждое из которых меньше амплитудного в $\sqrt{2}$ раз (рис. 39). Идеальная катушка L , резистор r и R соединены последовательно, значит, сила тока в них совпадает. Поэтому векторы напряжений

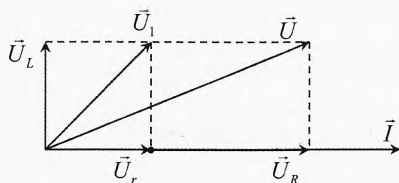


Рис. 39. Векторная диаграмма к задаче 30

будем строить относительно вектора силы тока. Напряжение \vec{U}_L на индуктивности опережает на 90° вектор тока \vec{I} , а на активном сопротивлении катушки r и резисторе R векторы напряжений \vec{U}_r и \vec{U}_R совпадают по фазе с вектором тока \vec{I} .

Вольтметр V измеряет напряжение сети U . Вольтметр V_2 измеряет напряжение на резисторе R : $\vec{U}_1 = \vec{U}_R$. Вольтметр V_1 измеряет напряжение U_1 на катушке. Вектор напряжения \vec{U}_1 на катушке равен векторной сумме векторов \vec{U}_L и \vec{U}_r .

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении катушки в виде тепла, равна:

$$P = I \cdot U_r.$$

Поскольку сила тока в катушке и резисторе R одинакова, то

$$I = \frac{U_2}{R}.$$

Дважды используем теорему Пифагора:

$$U_1^2 = U_L^2 + U_r^2 \quad \text{и} \quad U^2 = U_L^2 + (U_r + U_2)^2.$$

Из последних четырех уравнений, найдём выделяемую на катушке мощность:

$$P = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}.$$

Глава 7. Трёхфазный ток

В среде физиков-теоретиков высоко ценится способность задать глупый вопрос. С него часто начинается открытие новых путей и понятий.

Георгий Гачев
(советский-российский
философ и культуролог)

§ 55. Трёхфазный ток

Переменный ток, который мы изучили, называется однофазным. От генератора к потребителю электроэнергия в случае однофазного тока передаётся по двум проводам.

Однако более широкое распространение во всем мире получил трёхфазный ток, который вырабатывается в генераторах с тремя обмотками якоря (фазами), расположенными неподвижно в статоре (неподвижной части генератора). Ток в них возбуждается от одного индуктора (вращающегося электромагнита). Вырабатываемая ЭДС в разных обмотках смещена по фазе на 120° . Это даёт преимущество трёхфазного тока по сравнению с однофазным:

1) от трёх обмоток (фаз) трёхфазного генератора нужно вести четыре или три провода, в то время как от трёх однофазных генераторов понадобилось бы шесть проводов при той же нагрузке;

2) генерация трёхфазного тока позволила использовать трёхфазные асинхронные двигатели, которые очень просты в устройстве и надёжны в эксплуатации;

3) линии трёхфазного тока позволяют применять два действующих напряжения. Например, к электрическим щиткам наших квартир подведены три фазных провода и один нулевой. Напряжение между любым фазным и нулевым проводами в России равно 220 В (а в США – 110 В). А между любыми двумя фазными проводами напряжение 380 В.

Трёхфазным током называется система трёх токов синусоидальной формы одинаковых частот и амплитуд напряжений, сдвинутых по фазе на 120° друг относительно друга.

Отметим, что все основы техники трёхфазного тока разработал и первым практически применил наш соотечественник М. О. Доливо-Добровольский, о котором мы помещаем небольшую статью.

М. О. Доливо-Добровольский – русский физик и электротехник, заложивший основы техники трёхфазного тока, родился в Петербурге. Учился в рижском политехническом институте. За участие в студенческих политических выступлениях был исключен из института без права поступления в вузы России. Окончил Дармштадское высшее техническое училище (1884) и работал на заводах электротехнической компании Эдисона в Германии. В 1914–1918 гг. жил в Швейцарии.



Михаил Осипович
Доливо-Добровольский
(1862–1919)

Автор многих открытий и изобретений. Предложил систему из трёх однофазных токов, сдвинутых по фазе на 120° (трёхфазный ток). В 1888 г. построил первый генератор трёхфазного тока с вращающимся магнитным полем. Сконструировал двигатель трёхфазного тока с ротором из литого железа, асинхронный короткозамкнутый двигатель (1890). Изобрел трансформаторы трёхфазного тока (1890), фазометр (1894) и др. Разработал схемы включения генераторов и двигателей «звездой» и «треугольником» и построил в 1891 г. первую линию электропередачи трёхфазного тока длиной около 170 км.

§ 56. Устройство и принцип действия трёхфазного генератора

Трёхфазный генератор имеет в статоре три одинаковые сдвинутые между собой в пространстве на 120° обмотки, которые называются *фазами генератора* (рис. 1). Одни выводы фазных обмоток являются *началами фаз* генератора и обозначаются буквами *A, B, C*. А другие – *концами фаз* генератора и обозначаются буквами *X, Y, Z*.

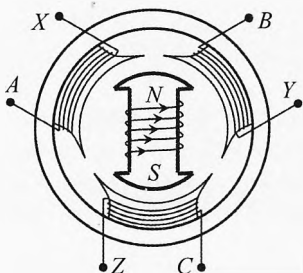


Рис. 1. Трёхфазный генератор

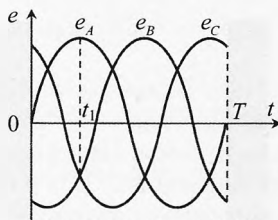


Рис. 2. Графики ЭДС трёхфазного генератора

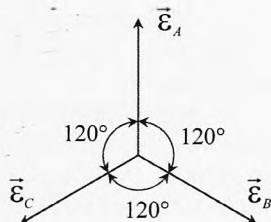


Рис. 3. Векторная диаграмма ЭДС

Ротором трёхфазного генератора является электромагнит, который служит индуктором. При вращении индуктора с угловой скоростью ω в фазных обмотках статора, которые являются якорями, возбуждаются ЭДС индукции e_A, e_B, e_C , сдвинутые по фазе друг относительно друга на 120° .

Если $e_A = \mathcal{E}_m \cdot \sin \omega t$, то $e_B = \mathcal{E}_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ)$, $e_C = \mathcal{E}_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ)$.

Графики значений ЭДС представлены на рис. 2.

Алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС трёхфазного генератора в любой момент времени равна нулю. Например, для момента времени $t_1 = T/4$ получим:

$$\begin{aligned} e_A &= \mathcal{E}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \mathcal{E}_m \sin(90^\circ) = \mathcal{E}_m; \\ e_B &= \mathcal{E}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - 120^\circ\right) = -\mathcal{E}_m \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_m; \\ e_C &= \mathcal{E}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - 240^\circ\right) = -\mathcal{E}_m \sin 150^\circ = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_m. \end{aligned}$$

Следовательно, $e_A + e_B + e_C = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2} \mathcal{E}_m - \frac{1}{2} \mathcal{E}_m = 0$.

На векторной диаграмме ЭДС трёхфазного генератора изобразится в виде трёхлучевой симметричной звезды (рис. 3). Геометрическая сумма трёх действующих ЭДС трёхфазного генератора также равна нулю, так как сумма векторов $\vec{\mathcal{E}}_B$ и $\vec{\mathcal{E}}_C$ даёт вектор, равный по модулю вектору $\vec{\mathcal{E}}_A$, но сдвинутый по фазе относительно него на 180° .

В каждую фазу генератора подключается нагрузка. Нагрузка фаз называется *симметричной* (равномерной), если в каждую из них включены приемники (потребители) с равными по значению и одинаковыми по характеру сопротивлениями (одинаковыми ёмкостью и индуктивностью). При симметричной нагрузке фаз генератора векторная диаграмма напряжений на фазных нагрузках (фазных напряжений) также представится трёхлучевой звездой. Геометрическая сумма фазных напряжений при симметричной нагрузке также равна нулю:

$$\vec{U}_A + \vec{U}_B + \vec{U}_C = 0.$$

В зависимости от характера фазных нагрузок векторы токов будут отставать, совпадать или опережать векторы фазных напряжений.

При симметричной нагрузке с активным и индуктивным сопротивлением векторная диаграмма токов будет представлять собой трёхлучевую симметричную звезду (рис. 4), сдвинутую относительно фазных напряжений по ходу часовой стрелки на угол φ , т. к. преобладание индуктивного сопротивления приводит к отставанию тока по фазе относительно напряжения.

При нагрузке с активным и ёмкостным сопротивлением векторная диаграмма токов будет смещена против хода часовой стрелки относительно векторной диаграммы напряжений.

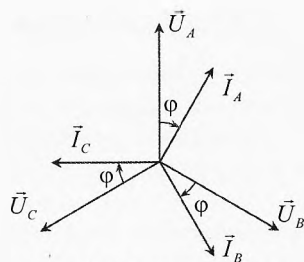


Рис. 4. Диаграмма токов при симметричной нагрузке

При симметричной нагрузке фаз генератора для действующих и мгновенных значений токов по аналогии с ЭДС и напряжением можно записать:

$$\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C = 0 \quad \text{и} \quad i_A + i_B + i_C = 0.$$

Трёхфазные генераторы в зависимости от источника механической энергии, приводящего во вращение ротор, делятся на паротурбинные, газотурбинные и гидрогенераторы, а также маломощные генераторы с двигателем внутреннего сгорания. Статор турбогенератора и гидрогенератора представляет собой сердечник, набранный из листов электротехнической стали, в пазах которого размещаются три фазных обмотки, смещенные друг относительно друга на 120° . Сердечник размещается в станине, отлитой из чугуна или сваренной из листовой стали и установленной на фундаменте или раме. Концы фазных обмоток выводятся к зажимам, расположенным на поверхности станины в зажимной коробке.

Роторы по своей конструкции бывают с явно выраженными полюсами и применяются в тихоходных машинах (гидрогенераторах). Сердечник такого рода имеет на своей поверхности полюсы с обмотками, по которым проходит постоянный ток. В роторах с неявно выраженными полюсами* обмотка вкладывается в пазы цилиндрического сердечника, насаженного на вал. Роторы с неявно выраженными полюсами применяются в быстроходных генераторах (паро- и газотурбинных). Они вращаются с частотой 3000 об/мин или 50 об/с, чтобы создать переменный ток частотой 50 Гц при двухполюсном индукторе (роторе).

При вращении ротора его магнитное поле пересекает обмотки статора, в которых возбуждается переменная ЭДС. Так как три фазные обмотки статора смещены друг относительно друга, то ЭДС в них отличается по фазе на 120° .

§ 57. Соединение нагрузок звездой

Каждая фаза генератора является источником энергии и может быть самостоятельно подключена на нагрузку (рис. 5).

Началами фаз генератора принимаются выводы, по которым ток условно принятого положительного направления выходит, а концами – выводы, через которые ток возвращается в генератор. Началами фазных нагрузок принимаются выводы, через которые ток условного направления входит в нагрузку, а концами – выводы, через которые ток выходит из нагрузки.

* «Неявно выраженные» полюса означают, что при отсутствии тока в обмотке ротора он не является электромагнитом. Электромагнитом с полюсами он становится, когда по обмотке ротора пойдет постоянный ток.

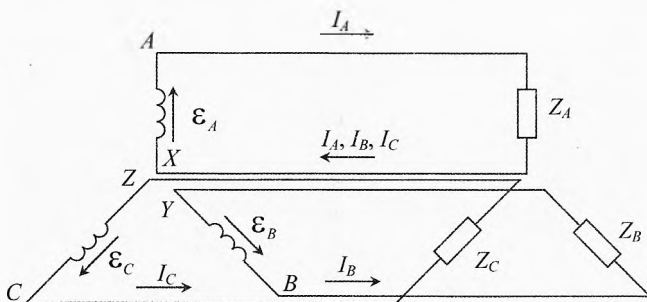


Рис. 5. Соединение нагрузок звездой в шестипроводной системе трёхфазного тока

Шестипроводную трёхфазную систему можно заменить четырехпроводной, если концы фаз генератора и концы фазных нагрузок соединить в узлы, обозначенные на схеме точками O и O' , а затем соединить их между собой уравнительным (нулевым) проводом (рис. 6). Такое соединение называется звездой и обозначается значком Y . На практике используется в основном именно такое соединение.

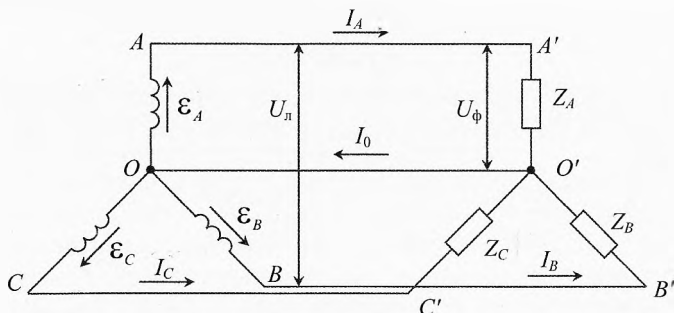


Рис. 6. Соединение нагрузок звездой в четырехпроводной системе трёхфазного тока

Провода, соединяющие начала фаз генератора с потребителем, называются *линейными* проводами. Ток, проходящий по ним, называется *линейным током*, а ток, проходящий по фазной нагрузке, — *фазным током*. При соединении звездой линейный ток равен фазному:

$$I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}.$$

Напряжения между каждым из линейных проводов и нейтральным проводом называются *фазными напряжениями*. Их действующие значения обозначаются U_A , U_B , U_C , или в общем виде $U_{\text{ф}}$.

Напряжения между линейными проводами называются *линейными напряжениями*. Их действующие значения обозначаются U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} , или в общем виде $U_{\text{л}}$.

При соединении симметричной нагрузки звездой линейное напряжение больше фазного в $\sqrt{3}$ раз: $U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}$.

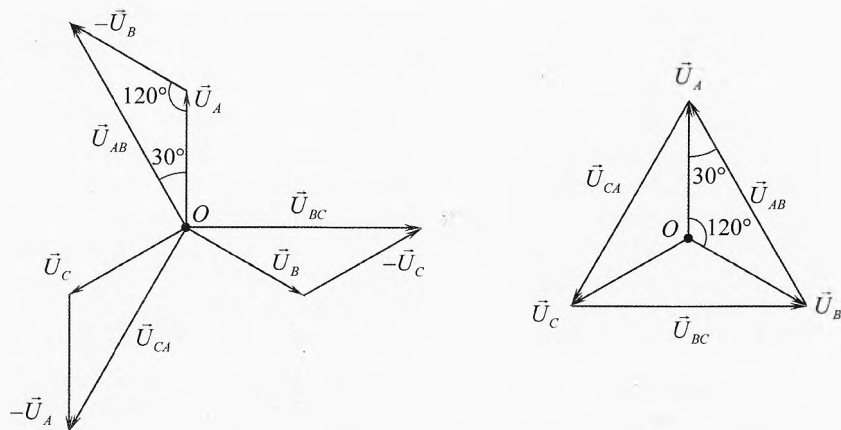


Рис. 7. Линейное напряжение при симметричной нагрузке в $\sqrt{3}$ больше фазного

Для доказательства этого воспользуемся векторной диаграммой (рис. 7):

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_A - \vec{U}_B = \vec{U}_A + (-\vec{U}_B);$$

$$\vec{U}_{BC} = \vec{U}_B - \vec{U}_C = \vec{U}_B + (-\vec{U}_C);$$

$$\vec{U}_{CA} = \vec{U}_C - \vec{U}_A = \vec{U}_C + (-\vec{U}_A).$$

Выполнив сложение векторов, получим, что линейное напряжение определяется стороной треугольника, лежащей против угла в 120° . Применим теорему косинусов:

$$U_{AB}^2 = U_A^2 + U_B^2 - 2U_A U_B \cos 120^\circ$$

$$\text{или } U_{\text{л}}^2 = 2U_{\text{ф}}^2 - 2U_{\text{ф}}^2 \cos 120^\circ.$$

Следовательно,

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}.$$

При симметричной нагрузке линейные напряжения представляют собой трёхлучевую звезду, сдвинутую относительно звезды фазных напряжений на 30° .

Для демонстрации подключения нагрузки звездой можно (но очень осторожно) собрать электрическую цепь из лампового реостата 1, реостатного потенциометра 2, трёхполюсного рубильника 3, амперметра и вольтметра (рис. 8).

Реостатный потенциометр можно использовать для снижения напряжения сети от 380 до 220 В.

Подключим собранную цепь к зажимам сети и соединим концы фазных нагрузок x , y и z , то есть соединим нагрузку звездой. Измерив вольтметром линейное (U_{AB}) и фазное (U_{AX}) напряжения, увидим, что линейное напряжение больше фазного:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}.$$

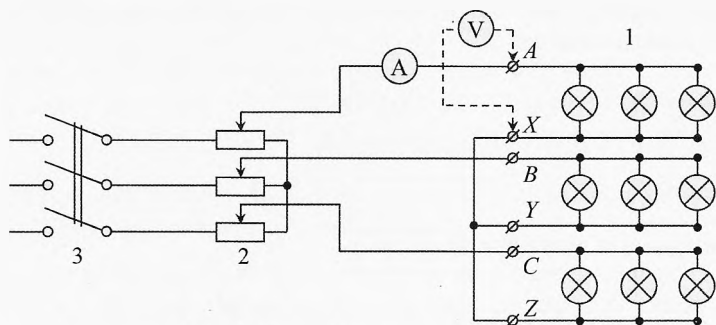


Рис. 8. Пример симметричной нагрузки

При соединении фазных нагрузок звездой на основании первого правила Кирхгофа получим:

$$\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C + \vec{I}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \vec{I}_0 = -(\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C).$$

То есть ток \vec{I}_0 в нулевом проводе равен геометрической сумме фазных токов с обратным знаком.

При симметричной нагрузке ток в нулевом проводе равен нулю:

$$\vec{I}_A + \vec{I}_B + \vec{I}_C = 0, \quad \vec{I}_0 = 0.$$

И четырехпроводная цепь заменяется трёхпроводной.

Симметричной нагрузкой для трёхфазной цепи являются электродвигатели, электрические печи, трансформаторы и др.

Несимметричная нагрузка подключается к трёхфазной сети звездой с нулевым проводом. Напряжения на фазных нагрузках всех трёх фаз одинаковы независимо от значений фазных нагрузок. Изменение фазной нагрузки одной фазы вызывает изменение тока в данной фазе, которое влечёт за собой изменение тока в нулевом проводе и не влияет на ток в других фазах. Несимметричной нагрузкой трёхфазной цепи являются однофазные цепи освещения и бытового обслуживания.

Почему же нельзя подключать несимметричную нагрузку в сеть звездой без нулевого провода?

Дело в том, что при таком подключении произойдет следующее перераспределение напряжений: на фазах с меньшей нагрузкой напряжение будет больше номинального фазного напряжения, что приведёт к перегреву потребителей; на фазах с большей нагрузкой напряжение окажется меньше номинального и потребители будут работать не на полную мощность.

Пусть в трёхфазной сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 380$ В при подключении потребителей звездой без нулевого провода к фазе *B* подключена одна лампа, к фазе *C* — параллельно девять таких же ламп, а фаза *A* не имеет нагрузки. При этом нагрузки *B* и *C* окажутся подключенными последовательно под линейное напряжение сети, которое распределится по фазам

прямо пропорционально сопротивлению. Следовательно, нагрузка фазы B будет под напряжением

$$U_B = \frac{9}{10} \cdot U_{\text{л}} = 342 \text{ В},$$

а нагрузка фазы C будет под напряжением

$$U_C = \frac{1}{10} \cdot U_{\text{л}} = 38 \text{ В},$$

при номинальном напряжении 220 В.

Пусть теперь нагрузка на фазах B и C одинакова, а на фазе A нагрузки по-прежнему нет. Тогда фазные напряжения фаз B и C равны

$$U'_B = U'_C = \frac{1}{2} U_{\text{л}} = 190 \text{ В}, \text{ а фаза } A: U'_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 380 \text{ В}.$$

При коротком замыкании фазы A потенциал нулевой точки будет равен потенциалу фазы A . При этом потребители на фазах B и C подпадут под линейное напряжение $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$ и токи в этих фазах увеличатся в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с номинальным.

§ 58. Соединение нагрузок треугольником

Соединение, при котором конец первой фазы соединяется с началом второй фазы, конец второй фазы – с началом третьей, конец третьей фазы – с началом первой, называется соединением треугольником и обозначается значком Δ .

При соединении нагрузок треугольником фазные нагрузки подключаются под линейное напряжение, то есть между линейными проводами (рис. 9). В такой схеме нет различия между линейным и фазным напряжением: $U_{\text{ф}} = U_{\text{л}}$. При симметричной нагрузке линейный ток больше фазного в $\sqrt{3}$.

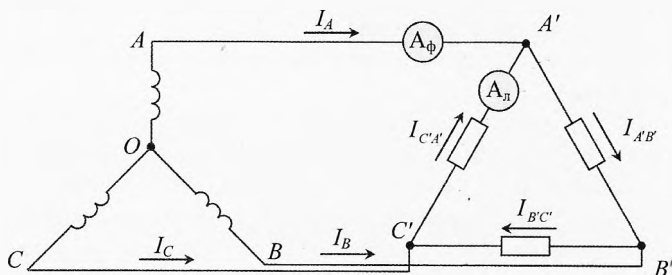


Рис. 9. Соединение нагрузок треугольником

Двигатели и трансформаторы в одинаковой мере соединяются как звездой, так и треугольником. Если фазная обмотка двигателя рассчитана на на-

пряжение 220 В, то в сеть с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 380$ В он включается звездой, а в сеть с линейным напряжением 220 В – треугольником.

Обмотки генератора треугольником соединяются редко, т. к. при несимметричности системы или несинусоидальном изменении фазных ЭДС в обмотках генератора, соединенных треугольником, будет циркулировать ток.

Двойкий способ включения двигателей трёхфазного тока даёт возможность их широкого практического применения.

§ 59. Асинхронный трёхфазный двигатель

Вращающееся магнитное поле. Синхронный двигатель. Рассмотрим простой пример, который помогает понять идею конструкции и действия однофазных и трёхфазных асинхронных двигателей. На рис. 10 изображён проволочный замкнутый виток, подвешенный на горизонтальных полюсах, а также постоянный магнит, который можно вращать рукой при помощи рукоятки.

Если вращать магнит, то в соответствии с правилом Ленца и законом электромагнитной индукции Фарадея проволочный виток тоже начнёт вращаться в том же направлении.

Действительно, при вращении магнитного поля магнита изменяющийся магнитный поток, пронизывающий виток, вызовет в нём индукционный ток, который, согласно правилу Ленца, будет препятствовать изменению магнитного потока в витке, то есть создаст вращающий момент, тормозящий магнит. Но этот тормозящий момент не сможет остановить магнит, т. к. его вращающее действие заведомо меньше, чем у руки человека. Поэтому виток будет стремиться догнать магнит, чтобы магнитный поток в нём не изменялся.

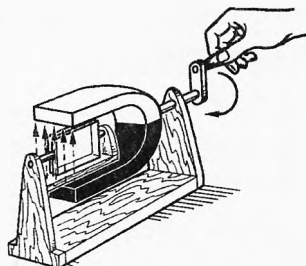


Рис. 10. Виток вращается за полем магнита

В трёхфазном двигателе вращающееся магнитное поле создаётся трёхфазным током без механического вращения магнита.

Статор трёхфазного двигателя устроен так же, как и статор трёхфазного генератора. Три обмотки электродвигателя соединяют звездой или треугольником и подключают к трёхфазной сети.

При прохождении тока каждая обмотка создаёт переменное магнитное поле. Векторы магнитной

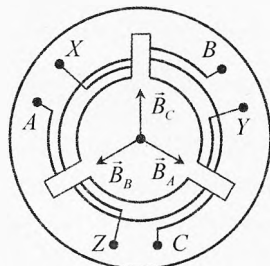


Рис. 11. Магнитное поле в трёхфазном двигателе

индукции каждой фазы \vec{B}_A , \vec{B}_B и \vec{B}_C колеблются вдоль осей симметрии соответствующих обмоток статора. На рис. 11 каждая из обмоток $A-X$, $B-Y$, $C-Z$ изображена схематически.

Так как в любой момент времени модуль магнитной индукции пропорционален силе тока в катушке, то изменение индукции магнитного поля любой катушки будет происходить по тому же закону, что и изменение тока в ней. Учитывая сдвиг фаз между токами в катушках, можно записать:

$$\begin{aligned} B_A &= B_m \cdot \sin(\omega t). \\ B_B &= B_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ). \\ B_C &= B_m \cdot \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned}$$

Складывая геометрически векторы магнитной индукции всех фаз \vec{B}_{Am} , \vec{B}_{Bm} и \vec{B}_{Cm} , можно показать, что модуль вектора магнитной индукции \vec{B} результирующего магнитного поля трёх катушек является постоянным:

$$B = 1,5 \cdot B_m,$$

где B_m – модуль максимальной магнитной индукции \vec{B}_m одной фазы. Причём этот вектор \vec{B} равномерно вращается в плоскости осей катушек с угловой скоростью ω .

Если в качестве ротора поместить внутрь статора трёхфазного двигателя постоянный магнит, то он будет вращаться с частотой магнитного поля, то есть получится синхронный двигатель.

Такие трёхфазные синхронные двигатели применяются в промышленных установках, где при большой мощности требуется постоянная скорость вращения (прокатные станы, бумагоделательные машины и др.)

Асинхронный трёхфазный двигатель. Если во вращающееся магнитное поле поместить замкнутую металлическую рамку на оси, совпадающей с осью вращения поля, то, вследствие вращения магнитного поля, изменяется магнитный поток, пронизывающий металлическую рамку. Это

приводит к возникновению в рамке ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ и, соответственно, к возникновению в ней индукционного тока. На оба участка рамки, расположенные перпендикулярно вектору магнитной индукции поля, действует сила Ампера $F_A = I \cdot B \cdot l$, которая создаёт вращающий момент, равный:

$$M = 2 \cdot F_A \cdot \frac{d}{2} = I \cdot B \cdot l \cdot d = I \cdot B \cdot S = I \cdot \Phi,$$

где $S = l \cdot d$ – площадь рамки, $\Phi = B \cdot S$ – магнитный поток, пронизывающий рамку. Вращающий момент поворачивает рамку в направлении вращения поля.

По мере того как скорость вращения рамки приближается к скорости вращения магнитного поля, скорость изменения пронизывающего её потока уменьшается, поэтому уменьшается ЭДС индукции и сила тока в рамке. Это приводит к уменьшению момента сил, действующих на рамку.

При равенстве скоростей вращения магнитного поля и рамки ЭДС индукции и сила тока в рамке равны нулю. Следовательно, и момент сил, вызывающих вращение рамки, становится равным нулю. Поэтому рамка в электродвигателе такого типа вращается всегда медленнее магнитного поля, то есть *не синхронно* с ним.

*Электродвигатель, в котором вращающее магнитное поле взаимодействует с током в обмотках ротора, индуцированным этим же магнитным полем, называется **асинхронным двигателем**.*

Вращающий момент на валу трёхфазного асинхронного электродвигателя возрастает с уменьшением скорости вращения ротора и достигает максимального значения при его остановке.

Наиболее широко применяют асинхронные трёхфазные двигатели с короткозамкнутым ротором. В таких машинах обмотка ротора представляет систему медных стержней, заложенных в пазы ротора и соединённых с торцов медными кольцами. Обмотку такого типа называют «беличьим колесом» (рис. 12). «Беличье колесо» может быть алюминиевым. При изготовлении ротора алюминий в расплавленном состоянии заливают в его пазы под давлением. На рис. 13 изображён разобранный асинхронный двигатель.

Простота изготовления и надёжность в эксплуатации привели к тому, что большая часть всех двигателей, применяемых в народном хозяйстве, приходится на долю асинхронных двигателей.

Так как при изменении порядка подключения начала и конца любой из обмоток статора направление вращения магнитного поля изменяется на противоположное, то для реверсирования (то есть для изменения направления вращения) ротора трёхфазного двигателя достаточно изменить порядок подключения начала и конца одной из обмоток статора к сети трёхфазного тока.

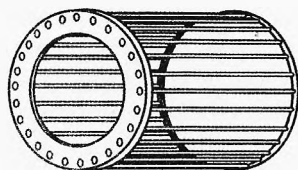


Рис. 12. Беличье колесо

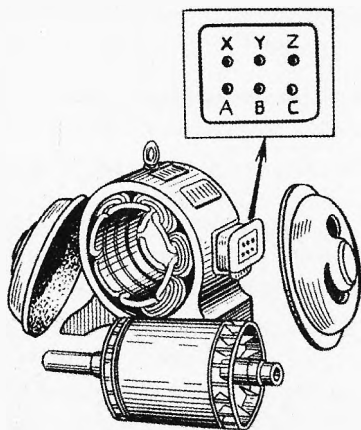


Рис. 13. Асинхронный двигатель

§ 60. Мощность трёхфазного тока

Активная мощность трёхфазной цепи равна арифметической сумме активных мощностей отдельных фаз:

$$P_{\text{акт}} = P_{1\text{акт}} + P_{2\text{акт}} + P_{3\text{акт}} = I_1 U_1 \cdot \cos \varphi_1 + I_2 U_2 \cdot \cos \varphi_2 + I_3 U_3 \cdot \cos \varphi_3,$$

где φ_1 , φ_2 и φ_3 – сдвиги фаз между током и напряжением (отставание по фазе силы тока от напряжения) в соответствующих фазных потребителях.

Реактивная мощность равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$P_{\text{реакт}} = P_{1\text{реакт}} + P_{2\text{реакт}} + P_{3\text{реакт}} = I_1 U_1 \cdot \sin \varphi_1 + I_2 U_2 \cdot \sin \varphi_2 + I_3 U_3 \cdot \sin \varphi_3.$$

Реактивная мощность индуктивности и ёмкости всегда находятся в противофазе. Например, если ток в цепи в данный миг нарастает, то катушка индуктивности получает энергию из сети в этот миг, а конденсатор – отдаёт. В электротехнике реактивная мощность индуктивной нагрузки берётся со знаком плюс, а ёмкостной – со знаком минус.

При симметричной нагрузке трёхфазной цепи активные мощности фаз равны между собой. Следовательно, активная мощность трёхфазного потребителя при симметричной нагрузке выразится формулой:

$$P_{\text{акт}} = 3 I_{\Phi} U_{\Phi} \cdot \cos \varphi.$$

Выразив фазные значения токов и напряжений через линейные, получим ещё одну общую для соединений звездой и треугольником формулу для мощности трёхфазного тока при симметричной нагрузке:

$$P_{\text{акт}} = \sqrt{3} I_{\text{л}} U_{\text{л}} \cdot \cos \varphi,$$

где для соединения нагрузок звездой: $I_{\Phi} = I_{\text{л}}$, $U_{\Phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$,

для соединения треугольником: $I_{\Phi} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$, $U_{\Phi} = U_{\text{л}}$.

При симметричной нагрузке индексы при силе тока и напряжении обычно не ставят, и формула мощности трёхфазной цепи записывается в следующем виде:

$$P_{\text{акт}} = \sqrt{3} \cdot I \cdot U \cdot \cos \varphi$$

где I и U – действующие значения линейного тока и напряжения, φ – сдвиг фаз между фазным напряжением и силой тока.

Аналогично записываются формулы реактивной мощности и общей мощности трёхфазной цепи:

$$P_{\text{реакт}} = \sqrt{3} \cdot I \cdot U \cdot \sin \varphi$$

и

$$P_{\text{полн}} = \sqrt{3} \cdot I \cdot U$$

Обратим внимание на то, что в электротехнике активная мощность часто обозначается буквой P без индекса, реактивная мощностью буквой Q , а полная мощность, которая ещё называется кажущейся, буквой S , то есть

$$P_{\text{акт}} \equiv P, \quad P_{\text{реакт}} \equiv Q, \quad P_{\text{полн}} \equiv S.$$

Но мы не использовали эти обозначения для уменьшения путаницы, т. к. букв в алфавите мало, а величин много.

§ 61. Трёхфазный трансформатор

Трёхфазные токи изменяют при помощи трёхфазных трансформаторов.

Трёхфазные трансформаторы изготавливаются в виде отдельных однофазных трансформаторов (рис. 14), объединённых в группу. Такой тип получил название – трансформатор с раздельной магнитной системой. Процессы, происходящие в каждой паре катушек трёхфазного трансформатора, ничем не отличаются от процессов в однофазном трансформаторе.

Трансформатор, у которого обмотки расположены на трёх стержнях, называется трансформатором с объединённой магнитной системой (рис. 15).

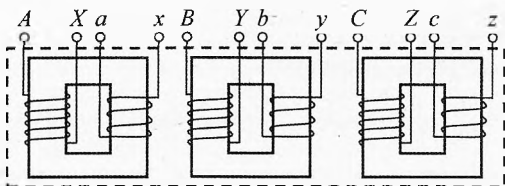


Рис. 14. Трёхфазный трансформатор с раздельной магнитной системой

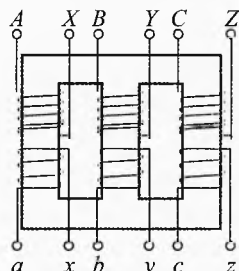


Рис. 15. Трансформатор с объединённой магнитной системой

Трёхстержневой трансформатор стоит дешевле группового и имеет меньшие габариты, хотя каждый однофазный трансформатор группы меньше по габаритам и по весу, чем целый трехстержневой трансформатор, что имеет большое значение при установке и перевозке мощных единиц.

На случай выхода из строя одной обмотки трёхстержневого трансформатора приходится держать в запасе ещё один целый трансформатор. А на случай выхода из строя одной обмотки в групповом трансформаторе достаточно иметь в запасе только одну фазу из трёх. Таким образом, групповой трансформатор имеет преимущества при больших мощностях, где условия перевозки и надёжность при эксплуатации имеют большое значение. Наоборот, трансформаторы средней и особенно малой мощности выполняются главным образом как трёхстержневые. В России трёхстержневые трансформаторы стандартизованы на мощности до 60 МВА, а групповые – начиная с мощности 1,8 МВА и выше.

Первичные обмотки трёхфазного трансформатора могут соединяться звездой или треугольником. Так же могут соединяться и вторичные обмотки. Таким образом, возможны четыре схемы соединения обмоток трансфор-

матора: звезда-звезда (Y/Y), звезда-треугольник (Y/Δ), треугольник-треугольник (Δ/Δ), треугольник-звезда (Δ/Y). Из четырех указанных схем на практике применяются (Y/Y_0), (Y/Δ), (Y_0/Δ). В приведенных обозначениях числитель указывает схему соединения обмоток высокого напряжения, а знаменатель – схему соединения обмоток низкого напряжения. Обозначение Y_0 применяется для обмоток, соединенных звездой, с выведенной нулевой точкой.

Охлаждение трансформатора довольно серьезная задача. Например, трансформатор на ТЭЦ должен повышать напряжение с 11 кВ до 110 кВ мощностью 200 МВт. Если трансформатор очень хорош и его КПД составляет 98,5%, то, тем не менее, он должен рассеивать тепловую мощность, равную 3 МВт. А его объем составляет всего несколько кубометров. Для решения этой задачи мощные трансформаторы всегда устанавливают в хорошо проветриваемом месте, помещают их в стальной кожух и заливают трансформаторным маслом. С помощью стальных трубок на кожухе увеличивают поверхность для рассеивания тепла.

§ 62. Производство, передача и использование электроэнергии

Электроэнергия – это наиболее удобный, наиболее широко используемый вид энергии.

В России основная доля электроэнергии производится на крупных электростанциях: тепловых (примерно 66% электроэнергии), гидроэлектростанциях (17%) и атомных (менее 17%).

В тепловых электростанциях (ТЭС) и тепловых электроцентралях (ТЭЦ) источником энергии являются химические виды топлива: уголь, мазут, природный газ, горючие сланцы.

КПД электростанций не высок и составляет менее 40%. В ТЭЦ, где кроме электроэнергии вырабатывается тепло для обогрева жилья и производственных помещений и пар среднего давления (10–13 атм) для технологических нужд, КПД заметно выше с учетом использования тепловой энергии (60–70%).

Большая проблема тепловых электростанций – доставка огромного количества химического топлива для работы.

Второй важной проблемой ТЭЦ является проблема загрязнения окружающей среды. Например, Чебоксарская ТЭЦ-2 в 1990 г. выбросила в атмосферу 43 тыс. тонн различных веществ, весьма бесполезных для человека и окружающей среды. Вдумайтесь, за год на каждого жителя Чебоксар пришлось по 100 кг вредных веществ! А рядом в 20 км Новочебоксарская ТЭЦ-3 ещё столько же подарила окружающей среде.

В 1988 г. в СССР принят закон, согласно которому за загрязнение окружающей среды все предприятия обязаны платить. Это дало положительные плоды, в том числе на ТЭЦ. Инженеры поработали над улучшением качества сгорания топлива, а самое главное – перевели многие ТЭЦ в России на природный газ вместо мазута. К 1996 г. выбросы в атмосферу на Чебоксарской ТЭЦ-2 уменьшились в 15 раз, составив 3 тыс. тонн в год.

Естественно с точки зрения экологии все ТЭЦ, которые находятся вблизи больших городов, должны работать на природном газе, как на экологически более чистом топливе. Но мы с изумлением слышим, что на введенные в 2006 г. новые мощности ТЭЦ, расположенные вблизи Калининграда и С.-Петербурга Газпром не желает выделять дополнительные квоты на газ!?

Самые замечательные источники энергии – это гидроэлектростанции (ГЭС). Они не дают выбросов в атмосферу, их производительность легко регулировать. КПД гидроагрегатов составляет примерно 90%! То есть около 90% потенциальной энергии воды (*mgh*) между верхним и нижним бьефами (уровнями воды) превращается в электроэнергию, фантастика! ГЭС не требует никакого топлива. Улучшаются возможности судоходства благодаря подъему уровня на равнинных реках.

Но когда плывешь на корабле по Волгоградскому водохранилищу, возникает вопрос, а стоило ли столько земельных площадей топить? И когда смотришь на рыбоприемник Волгоградской ГЭС, где пытаются перебрасывать осетров и другую рыбу с нижнего бьефа на верхний, то ощущаешь неуклюжесть и бессмысленность такой затеи...

ГЭС оправданы на малых горных реках. Их строительство активно ведётся на Кавказе.

Во Франции 76% электроэнергии производят атомные электростанции (АЭС). В СССР также активно развивался этот сегмент электроэнергетики, и доля их в производстве электроэнергии достигла 10%. Но в 1986 г. грянул Чернобыль, который показал, что русское «авось» и атомные электростанции несовместимы. Народ стал категорически возражать против строительства новых АЭС и дело здесь затормозилось на десятилетия. На десяти имеющихся в России АЭС вводятся новые энергоблоки и к 2016 году доля АЭС достигла 17%.

А ведь АЭС практически не требуют транспортных расходов на доставку топлива. Строить их можно там, где требуется электричество, а не там, где есть залежи топлива, но нет людей и промышленности.

Правда есть проблема утилизации отработавших реакторов. Ведь ресурс работы реакторов АЭС на медленных нейтронах составляет 20 лет. Куда девать их через 20 лет? Человек ведь создан для того, чтобы наводить порядок во Вселенной (по мнению одного советского философа). А в наше время, кроме полезных дел в этом направлении человечество производит немало деструктивных действий.

Использование мирного атома – заманчивая идея, но тут нужно ещё много работать ученым-физикам, инженерам, политическим деятелям и др., чтобы атомные электростанции были абсолютно надёжны и менее хлопотны в экологическом плане.

После взрыва на Чернобыльской АЭС в России разработаны системы управления с дублированием функций. И человеческий фактор уже не может привести к непоправимым последствиям.

Принцип работы тепловых электростанций. В паровые котлы по тонким трубам подаётся химически очищенная подогретая вода под большим давлением. В форсунки поступает топливо: газ, мазут или угольная пыль (уголь, поставляемый на станцию ж.д. эшелонами в специальной мельнице превращают в пыль). Топливо сгорает. Вода превращается в пар с давлением 130 атм и температурой 550°C. Пар высокого давления поступает в турбину высокого давления, где совершает работу, вращая турбину. Его давление на выходе уменьшается в 10 раз, и он поступает в турбину среднего давления. Отработав в ней, пар поступает в турбину низкого давления, в которой его давление становится во много раз меньше

атмосферного. Все три турбины находятся на одном валу, герметично изолированы друг от друга. Пар среднего давления (13 атм) может отбираться для производственных нужд.

На валу парогенератора насажен ротор генератора электроэнергии. На этом же валу находится возбудитель, в котором вырабатывается электроэнергия для питания обмоток ротора. В обмотках статора благодаря явлению электромагнитной индукции вырабатывается электроэнергия напряжением 11 кВ частотой 50 Гц. Двухполюсной индуктор (ротор) вращается с частотой 50 об/с, которая должна поддерживаться с высокой степенью точности.

Герметичный корпус генератора заполнен водородом для лучшего отвода тепла от трущихся деталей (молекулы водорода самые маленькие и хорошо проникают даже в самые труднодоступные места генератора).

За один цикл использования пара теряется 2% воды. Пар охлаждается и конденсируется в градирнях в противотоке воздуха, подаваемого насосами. Затем конденсат вновь нагревается и под давлением поступает в котел.

На открытом воздухе за машинным залом находится трёхфазный трансформатор, который повышает напряжение в 10 раз до 110 кВ. Эта электроэнергия по проводам идёт к потребителям. Если часть энергии нужно передать в единую энергосистему, то напряжение повышают ещё (например, в Чебоксарах – до 230 кВ).

От электростанции электроэнергия поступает по линиям электропередач (ЛЭП) в сторону потребителя. На понижающих подстанциях в районе потребителя напряжение понижается со 110 кВ до 35 кВ, а затем на следующей подстанции до 6 кВ и, наконец, до 220 В в трансформаторных будках микрорайонов.

Использование электроэнергии. Главным потребителем электроэнергии в России является промышленность, на которую приходится более половины вырабатываемой электроэнергии. Большим потребителем является транспорт: железнодорожный, городской (метро, троллейбус, трамвай).

Всё больше электроэнергии потребляет население для освещения и использования всё возрастающего ассортимента бытовой техники.

Широко применяется электроэнергия в сельском хозяйстве.

Возрастает потребление электроэнергии в бурно развивающихся телефонной, телеграфной связи, радио, телевидении и компьютерных технологиях.

В школах так возросло количество компьютеров, и другой оргтехники, что не выдерживают электрические щиты, рассчитанные на уровень социалистического потребления.

Потери и рациональное использование электроэнергии. Передача электроэнергии связана с большими потерями в линиях электропередач ЛЭП. Мощность, передаваемая по линии трёхфазного тока при симметричной нагрузке фаз:

$$P = \sqrt{3} \cdot I \cdot U \cdot \cos \varphi,$$

где I и U – действующие значения линейного тока и напряжения, φ – сдвиг фаз между фазным напряжением и силой тока.

Мощность тепловых потерь (которая уходит на нагревание проводов):

$$P_{\text{тп}} = 3 \cdot I^2 R_{\text{лп}} = 3 \cdot I^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad \text{т.к.} \quad I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos \varphi}, \quad \text{то}$$

$$P_{\text{тп}} = \frac{P^2 \cdot \rho l}{U^2 S \cdot \cos^2 \varphi}$$

Анализ этой формулы показывает, что есть только следующие пути уменьшения тепловых потерь на линиях электропередач:

- 1) увеличение напряжения U ;
- 2) увеличение коэффициента мощности ($\cos\varphi$);
- 3) уменьшение энергопотребления потребителями P ;
- 4) уменьшение длины проводов l (строительство электростанций вблизи потребителей).

Напряжение в ЛЭП повышают до 110 тыс. вольт и более для того, чтобы при одинаковой потребляемой мощности сила тока, текущего по проводам, а значит, и теряемая в них мощность, была как можно меньше. Но этот путь уже исчерпал свои возможности.

При большом сдвиге фаз между током и напряжением значительная часть энергии циркулирует по проводам от генераторов к потребителям и обратно, что приводит к большим тепловым потерям на проводах ЛЭП. Например, если повысить коэффициент мощности с 0,75 до 0,95, то согласно последней формуле, тепловые потери на проводах уменьшатся на 60%.

Проблемой повышения коэффициента мощности в последнее время активно занимаются на предприятиях. На заводах много электродвигателей, поэтому преобладает индуктивная нагрузка и $\cos\varphi$ уменьшается. Но его можно реально увеличить до 1. Для этого в цехах устанавливают специальные шкафы с конденсаторами, которые нейтрализуют индуктивное сопротивление электродвигателей. Причём необходимая ёмкость при изменении индуктивной нагрузки в цехах подбирается автоматически с помощью контроллера и компьютера. Эта технология действительно существует и пользуется большим спросом. В качестве примера назовем, что Чебоксарский электроаппаратный завод выпускает «Установки конденсаторные для компенсации реактивной мощности УККРМ». Масса такой установки составляет около 200 кг.

Основной путь снизить потери электроэнергии – это более рационально её использовать. Если Вы обратите внимание на новые образцы бытовой техники, то в них во главу угла ставится экологическая безопасность и уменьшение энергопотребления. Так в Австралии в 2007 г. принято решение полностью отказаться от лампочек накаливания и использовать галогеновые лампы, которые потребляют в 5–6 раз меньше энергии.

Наши старые бетонные, да и кирпичные дома слишком интенсивно отдают в холодную пору тепло на улицу. Изменены СНиПы (строительные нормы и правила), согласно которым внутри стен домов выкладывается теплоизолирующий слой пенопласта или стекловаты, который значительно лучше задерживает тепло.

Немаловажно усилить воспитательное действие на учащихся, чтобы они использовали электроосвещение только тогда, когда оно нужно. В школе регулярно можно наблюдать следующую картину: как рано утром включили свет в классе, так лампочки и светятся до обеда, хотя солнце светит в окна уже ярче, чем лампочка. Ни до учителя, ни до учащихся не доходит, что свет давно надо было выключить.

А ведь проблему рационального использования света в школе решить легко. Администрации нужно ввести институт ответственных по свету. Пусть двое учащихся в классе следят в течение четверти за рациональным использованием электроэнергии в классе. Постепенно все привыкнут, что свет нужно выключать.

Конечно, немаловажна проблема воровства электроэнергии и воровства электрических проводов, кабелей и т.п. ради сдачи их в утиль цветных металлов.

Приведем одну неофициальную цифру: в сельской местности бывают случаи воровства до 50% используемой энергии. В городе это процент значительно меньше, т.к. лучше налажен контроль.

Кроме основных видов электростанций существуют ещё множество других:

1) ветряные электростанции, уже давно появившиеся в России, но в Западной Европе их во много раз больше;

2) гелиостанции – прямые превращения солнечного света в электроэнергию (солнечные батареи). Эффективность таких станций с годами становится всё выше, а стоимость – ниже. В частных домах Греции и других стран солнечной энергией нагревается вода, которая используется для бытовых нужд.

В Японии и других странах есть дома, которые отапливаются и освещаются за счёт солнечных батарей днём и ночью (с использованием аккумуляторов);

3) геотермальные и приливные станции;

4) проводится большая работа в Европе, России, Америке, по проблеме управляемого термоядерного синтеза. Решение этой задачи сулит огромные мощности электроэнергии на безопасных электростанциях управляемого термоядерного синтеза, но многие люди считают, что это направление в энергетике нужно закрыть, так успех маловероятен.



Упражнения

1 Какая нагрузка трёхфазного генератора называется симметричной?

2 Чему равна скорость лопаток паровой турбины радиусом 0,6 м, вращающей двухполюсный ротор генератора переменного тока частотой 50 Гц?

3 Сколько оборотов в минуту делает 60-полюсный ротор гидрогенератора, дающего переменный ток частотой 50 Гц?

4 В паспорте асинхронного трёхфазного двигателя указано: 380/220. Как будет работать двигатель: а) если в трёхфазную сеть с линейным напряжением 220 В его подключили звездой; б) если в трёхфазную сеть с фазным напряжением 380 В его подключили треугольником?

5 В трёхфазную сеть с линейным напряжением 380 В равномерно подключены звездой 60 ламп мощностью по 100 Вт каждая. Определить ток в каждой лампе, фазный и линейный токи.

6 В сеть переменного тока с линейным напряжением 220 В подключена треугольником симметричная нагрузка. Активное сопротивление каждой фазы равно $R = 40$ Ом, а реактивное – $X = 30$ Ом. Определить линейный и фазный токи цепи. Чему равен линейный и фазный токи при отключении фазы AB ?

7 В трёхфазную сеть с линейным напряжением 380 В включён звездой потребитель. Определить линейный ток, коэффициент мощности $\cos\varphi$, активную мощность потребителя, сдвиг фаз между током и фазным напряжением, если активное сопротивление каждой фазы 20 Ом, а индуктивное – 15 Ом. Начертить векторную диаграмму фазных токов и фазных напряжений.

8 Три потребителя с активным сопротивлением 8 Ом и индуктивным – 6 Ом включаются в сеть трёхфазного тока. При соединении их звездой амперметр показывает фазный ток 12,7 А. Определить фазное и линейное напряжение сети, коэффициент мощности $\cos\varphi$, активную мощность потребителя. Как изменится активная мощность при соединении потребителя треугольником? Начертить векторную диаграмму токов и напряжений для соединения звездой.

9 Ваттметры, включённые в каждую фазу трёхфазной системы с линейным напряжением 380 В, показывают мощность $P_1 = 704$ Вт, $P_2 = 770$ Вт, $P_3 = 792$ Вт, а амперметры $I_1 = 4$ А, $I_2 = 5$ А, $I_3 = 6$ А. Определить коэффициент мощности $\cos\varphi$, активные и реактивные сопротивления каждой фазы, если нагрузка включена в сеть звездой с нулевым проводом. Начертить векторную диаграмму токов и напряжений.

10 В трёхфазную сеть с линейным напряжением 380 В равномерно включены звездой 60 шестидесятиваттных ламп. Определить фазное напряжение, ток, проходящий через каждую лампу, фазный ток, линейный ток и фазную мощность. Определить те же величины: а) при сгорании предохранителя в фазе А; б) при коротком замыкании в фазе А. Начертить векторную диаграмму напряжений.

11 В трёхфазную сеть с линейным напряжением 220 В равномерно включены треугольником 60 ламп по 60 Вт. Определить фазные и линейные токи, фазную мощность. Определить напряжения в фазах, фазные и линейные токи: а) если в линейном проводе А перегорел предохранитель; б) при отключении фазы АВ.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Нагрузка на трёхфазный генератор называется симметричной, если на каждой фазе потребителя подключена одинаковая активная и реактивная нагрузка.

2 $v = \omega R = 2\pi\nu R \approx 190$ м/с.

3 Число пар полюсов равно 30. Частота тока равна произведению числа пар полюсов на частоту вращения: $\nu = 30 \cdot n \Rightarrow n = \frac{\nu}{30} = \frac{50 \text{ Гц}}{30} = \frac{5}{3}$ об/с = 100 об/мин.

4 а) двигатель будет работать с меньшей нагрузкой, чем предусмотрено паспортом, ибо на каждую обмотку будет подано напряжение $U = \frac{220 \text{ В}}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В}$.

Необходимо подключить обмотки двигателя треугольником; б) двигатель будет работать с большой перегрузкой, т.к. на каждую обмотку (фазу) будет подано напряжение $U = \sqrt{3} \cdot 380 \text{ В} = 658 \text{ В}$. Это опасно и недопустимо так перепутывать схему подключения. Необходимо подключить обмотки двигателя звездой.

5 Напряжение на каждой лампе $U = \frac{380 \text{ В}}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$. Сила тока в каждой лампе $I_1 = P/U = 0,45$ А. Фазный и линейный токи одинаковы: $I_\phi = I_\lambda = 20 \cdot I_1 = 9$ А.

6 $I_\phi = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 4,4$ А, $I_\lambda = \sqrt{3} \cdot I_\phi = 7,6$ А.

При отключении фазы АВ фазные токи: $I_{AB} = 0$, $I_{BC} = I_{AC} = I_\phi = 4,4$ А.

Линейные токи: $I_A = I_B = I_\phi = 4,4$ А, $I_C = \sqrt{3} \cdot I_\phi = 7,6$ А.

$$\mathbf{7} \quad I_L = \frac{U_\phi}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_L}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2}} = 8,8 \text{ А};$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = 0,8; \text{ ток отстает от фазно-}$$

го напряжения на $\varphi = 37^\circ$ (рис. 16); активная мощность: $P_{\text{акт}} = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi = 4,6 \text{ кВт}$.

$$\mathbf{8} \quad \text{При соединении звездой } I_L = I_\phi = 12,7 \text{ А.}$$

Импеданс потребителя: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 10 \text{ Ом}$.

$$U_\phi = I_\phi \cdot Z = 127 \text{ В. } U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi = 220 \text{ В};$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 0,8; \varphi = 37^\circ; P_{\text{акт}} = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi = 3,87 \text{ кВт}.$$

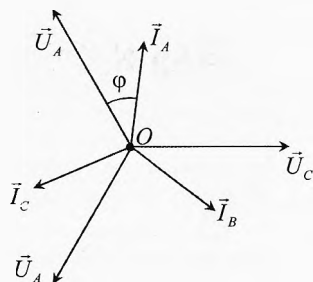


Рис. 16. Векторная диаграмма к задаче 7

При соединении потребителя треугольником напряжение на каждой фазе увеличивается в $\sqrt{3}$ раз. Во столько же раз, согласно закону Ома, возрастёт и сила тока в каждой из фаз. Значит, потребляемая мощность возрастёт в 3 раза.

$$\mathbf{9} \quad \text{Напряжение на каждой фазе при соединении звездой } U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В.}$$

$$\cos \varphi = \frac{P_{\text{акт}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{P_{\text{акт}}}{U_\phi \cdot I}; \cos \varphi_1 = \frac{P_1}{U_\phi \cdot I_1} = 0,8, \varphi_1 = 37^\circ;$$

$$\cos \varphi_1 = 0,7, \varphi_2 = 45,6^\circ; \cos \varphi_3 = 0,6, \varphi_3 = 53^\circ;$$

Из $P_{\text{акт}} = U_\phi \cdot I \cdot \cos \varphi$, $U_\phi = I \cdot Z$, $\cos \varphi = R/Z$ получим закон Джоуля–Ленца для активной мощности: $P_{\text{акт}} = I^2 \cdot R$.

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} = 44 \text{ Ом}, R_2 = 30,8 \text{ Ом}, R_3 = 22 \text{ Ом. Реактивное сопротивление}$$

$$X = R \cdot \operatorname{tg} \varphi; X_1 = 44 \text{ Ом} \cdot \operatorname{tg} 37^\circ = 33 \text{ Ом}, X_2 = 31,4 \text{ Ом}, X_3 = 29,3 \text{ Ом}.$$

$$\mathbf{10} \quad U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В. } P_1 = U_\phi \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = P_1 / U_\phi = 0,273 \text{ А. Считаем, что лампы}$$

в каждой фазе подключены параллельно: $I_\phi = 20 \cdot I_1 = 5,46 \text{ А}, I_L = I_\phi = 5,46 \text{ А}$.

Фазная мощность (мощность, выделяемая на каждой фазе) $P = U_\phi \cdot I_\phi = 1,2 \text{ кВт}$.

а) при сгорании предохранителя фаза А отключится, в остальных фазах всё останется без изменения, только теперь по нулевому проводу пойдет ток $I_0 = 5,46 \text{ А}$.

б) при коротком замыкании в фазе А, нагрузка на фазах В и С подпадет под линейное напряжение $U'_\phi = U_L = 380 \text{ В}$, то есть напряжение, сила тока на лампах, линейный (и фазный) ток увеличатся в $\sqrt{3}$ раз. Фазная мощность увеличится в 3 раза.

$$\mathbf{11} \quad U_\phi = U_L = 220 \text{ В. } P_1 = U_\phi \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = P_1 / U_\phi = 0,273 \text{ А. Считаем, что лампы}$$

в каждой фазе подключены параллельно: $I_\phi = 20 \cdot I_1 = 5,46 \text{ А}, I_L = I_\phi \cdot \sqrt{3} = 9,45 \text{ А}$. Фазная мощность (мощность, выделяемая на каждой фазе) $P = U_\phi \cdot I_\phi = 1,2 \text{ кВт}$.

а) Фазные токи: $I_{BC} = I_\phi = 5,46 \text{ А}, I_{AB} = I_{AC} = I_\phi / 2 = 2,73 \text{ А}$.

Фазные напряжения: $U_{BC} = U_L = 220 \text{ В}, U_{AC} = U_{AB} = U_L / 2 = 110 \text{ В}$.

Линейные токи: $I_A = 0, I_B = I_C = 1,5 \cdot I_\phi = 8,19 \text{ А}$.

б) Фазные токи: $I_{AB} = 0, I_{BC} = I_{AC} = I_\phi = 5,46 \text{ А}$.

Фазные напряжения: $U_{AC} = U_{BC} = U_L = 220 \text{ В}$.

Линейные токи: $I_A = I_B = I_C = I_\phi = 5,46 \text{ А}, I_C = \sqrt{3} \cdot I_\phi = 9,45 \text{ А}$.

Глава 8. Экспериментальные задания

*Опыт есть совокупность
наших разочарований.*

Нильс Бор

§ 63. Электромагнитные колебания

Условия экспериментальных задач

- 1** Определить ёмкость конденсатора.

Оборудование: звуковой генератор, электронный осциллограф, несколько резисторов с известными сопротивлениями ($R = 50 \text{ Ом}$, 520 Ом , 15 кОм), конденсатор неизвестной ёмкости, переключатель, соединительные провода.

- 2** Определить индуктивность катушки.

Оборудование: звуковой генератор, осциллограф, катушка на 220 В от универсального школьного трансформатора с сердечником, резистор с известным сопротивлением, авометр, переключатель, соединительные провода.

- 3** Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика (промасленной бумаги).

Оборудование: промасленная бумага между двумя слоями металлической фольги, вольтметр, миллиамперметр (с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением), микрометр, линейка измерительная, ключ, источник тока для практического, соединительные провода.

- 4** Определить количество витков в обмотках трансформатора.

Оборудование: трансформатор школьный разборный, источник переменного тока, авометр, моток медного изолированного провода, нож.

Возможные решения предложенных задач

- 1** К выходу звукового генератора (ЗГ) подключаем участок цепи, состоящий из последовательно соединённых конденсатора и резистора (рис. 1).

Поворотом ручки «частота генератора» находим такую частоту, при которой реактивное сопротивление конденсатора равно сопротивлению резистора ($X_C = R$). При этом падение напряжения на конденсаторе U_C будет равно падению напряжения на резисторе U_R , что легко можно установить с помощью осциллографа, ставя переключатель поочередно в положения А и В.

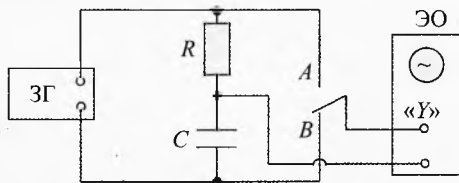


Рис. 1. Определение ёмкости конденсатора

При этом падение напряжения на конденсаторе U_C будет равно падению напряжения на резисторе U_R , что легко можно установить с помощью осциллографа, ставя переключатель поочередно в положения А и В.

Так как $X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$, где ν – частота переменного тока, то $C = \frac{1}{2\pi\nu R}$. Подобрать частоты для каждого резистора, вычисляем ёмкость конденсатора в каждом случае и сравниваем результаты.

2 Собираем электрическую цепь по схеме, представленной на рис. 2. При некоторой определенной частоте ν реактивное сопротивление катушки равно сопротивлению резистора ($X_L = R$). При этом падение напряжения на катушке U_L будет равно падению напряжения на резисторе U_R , что легко можно установить с помощью осциллографа, ставя переключатель поочередно в положения A и B . Значит,

$$X_L = R \quad \Rightarrow \quad \sqrt{R_0^2 + (2\pi\nu)^2 L^2} = R,$$

где R_0 – активное сопротивление катушки (измерить с помощью авометра), L – её индуктивность, R – сопротивление резистора. Тогда

$$L = \frac{\sqrt{R^2 - R_0^2}}{2\pi\nu}.$$

Если активное сопротивление катушки много меньше сопротивления резистора ($R_0 \ll R$), то

$$L \approx \frac{R}{2\pi\nu}.$$

3 Включаем бумажный конденсатор в цепь переменного тока последовательно с миллиамперметром. Параллельно конденсатору включаем вольтметр. Зная показания амперметра I , вольтметра U и частоту тока ν , определим ёмкость конденсатора:

$$I = \frac{U}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}; \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I}{2\pi\nu U}.$$

Ёмкость плоского конденсатора равна $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$, где $S = a \cdot b$ – площадь бумаги, a и b – её длина и ширина (измерить линейкой), d – толщина бумаги (измерить микрометром). Тогда диэлектрическая проницаемость ϵ диэлектрика:

$$\epsilon = \frac{Cd}{\epsilon_0 ab} \quad \text{или} \quad \epsilon = \frac{I}{2\pi\nu U} \cdot \frac{d}{\epsilon_0 ab}.$$

4 Одну из обмоток трансформатора подключаем к источнику переменного тока и измеряем напряжение на его обмотках (U_1 и U_2).

Намотаем поверх имеющихся ещё одну катушку с известным числом витков N и измерим напряжение U на этой обмотке. Тогда можно записать:

$$\frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} = \frac{U}{N},$$

где N_1 и N_2 – число витков в обмотках трансформатора. Отсюда

$$N_1 = \frac{U_1 N}{U}; \quad N_2 = \frac{U_2 N}{U}.$$

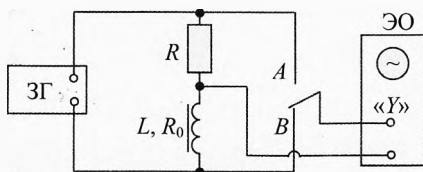


Рис. 2. Определение индуктивности катушки

§ 64. Исследование «чёрных ящиков» на переменном токе

Условия экспериментальных задач

1 Определить электрическую схему «чёрного ящика» и параметры его элементов.

Оборудование: закрытая коробка с двумя клеммами, внутри которой собрана схема по рис. 3, генератор электрических колебаний звуковой частоты, два авометра, соединительные провода.

Примечание. $R = 1,3 \text{ кОм}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$.

2 Определить электрическую схему «чёрного ящика» и параметры его элементов.

Оборудование: закрытая коробка с двумя клеммами, внутри которой собрана схема по рис. 4, генератор электрических колебаний звуковой частоты, два авометра, соединительные провода.

Примечание. $R = 1,3 \text{ кОм}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$.

3 Исследовать электрические параметры неизвестной электрической схемы – «чёрного ящика».

Оборудование: закрытая коробка с двумя клеммами, внутри которой собрана схема по рис. 5, генератор звуковой частоты, два авометра, соединительные провода.

4 Определить электрическую схему «чёрного ящика» и параметры его элементов.

Оборудование: закрытая коробка с двумя клеммами, внутри которой собрана схема по рис. 6, генератор звуковой частоты, два авометра, соединительные провода.

5 Определить электрическую схему «чёрного ящика» и параметры его элементов.

Оборудование: закрытая коробка с двумя клеммами, внутри которой собрана схема по рис. 7, генератор звуковой частоты, два авометра, соединительные провода.

6 Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединённых «чёрного ящика» и конденсатора, подсоединена к источнику переменного напряжения. Определить мощность, потребляемую «чёрным ящиком».

Оборудование: «чёрный ящик», конденсатор, провод с вилкой, ключ, источник переменного напряжения, авометр (мультиметр) для измерения переменных напряжений до 25 В (220 В) и токов до 20 мА (50, 200 мА).

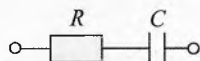


Рис. 3. Чёрный ящик

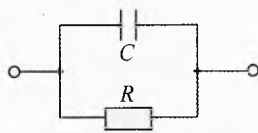


Рис. 4. Чёрный ящик



Рис. 5. Чёрный ящик

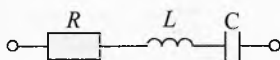


Рис. 6. Чёрный ящик

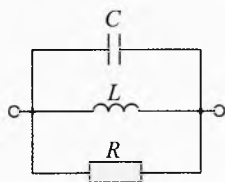


Рис. 7. Чёрный ящик

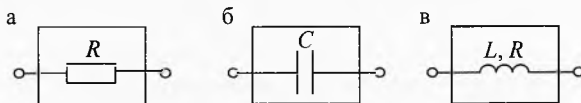


Рис. 8. Возможные схемы чёрного ящика

7 Какая из схем, представленных на рис. 8, собрана в «чёрном ящике»?

Оборудование: «чёрный ящик», звуковой генератор, электронный осциллограф, несколько резисторов с известными сопротивлениями ($R = 50 \text{ Ом}$, 520 Ом , 15 кОм), соединительные провода.

Возможные решения предложенных задач

1 Поддерживая напряжение источника неизменным проводим серию измерений силы тока при различных частотах и строим графики $I(\nu)$ и $Z(\nu)$ при $U = \text{const}$ (рис. 9). Устанавливаем схему «чёрного ящика»:

$$I = \frac{U}{Z}, \quad \text{где } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}.$$

Измеряем активное сопротивление (в области высоких частот $Z \approx R$, $I = U/R$).

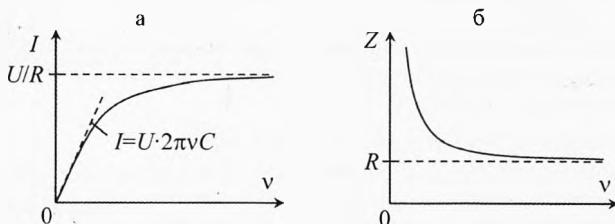


Рис. 9. Зависимость силы тока и импеданса от частоты тока

Используя линейный участок графика $I(\nu)$ в области низких частот ($Z \approx X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$, $I = U \cdot 2\pi\nu C$) определяем ёмкость конденсатора: $C = \frac{I}{2\pi\nu U}$.

2 Поддерживая напряжение источника неизменным проводим серию измерений силы тока при различных частотах. По результатам измерений строим графики $I(\nu)$ и $Z(\nu)$ при $U = \text{const}$ (рис. 10):

$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (2\pi\nu C)^2}.$$

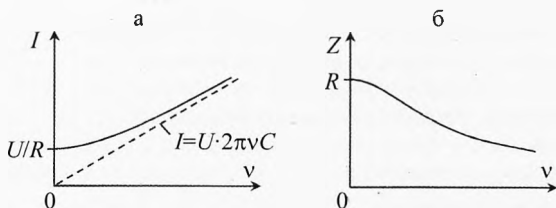


Рис. 10. Зависимость силы тока и импеданса от частоты тока

Измерение электрического сопротивления резистора возможно с помощью омметра, а для определения ёмкости конденсатора можно найти значение его ёмкостного сопротивления X_C в области высоких частот, где $X_C \ll R$ и $Z \approx X_C$:

$$I \approx U \cdot 2\pi\nu C; \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{I}{2\pi\nu U}.$$

3 Исследуем зависимость силы переменного тока $I(v)$ и полного сопротивления $Z(v)$ от частоты приложенного напряжения (рис. 11). Устанавливаем схему «чёрного ящика».

Катушка индуктивности с активным сопротивлением обмотки R и индуктивностью L может быть представлена как цепь из последовательно включенных резистора с активным сопротивлением R и идеальной катушки с индуктивностью L .

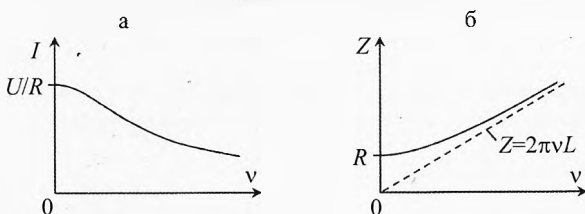


Рис. 11. Зависимость силы тока и импеданса от частоты тока

С увеличением частоты v приложенного напряжения индуктивное сопротивление катушки растёт прямо пропорционально частоте: $X_L = 2\pi vL$.

По закону Ома для переменного тока:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi vL)^2}}.$$

Значит, при малых частотах полное сопротивление «чёрного ящика» равно её активному сопротивлению ($Z \approx R$) (можно измерить омметром): $R \approx \frac{U}{I}$.

И, наоборот, на достаточно большой частоте активное сопротивление R обмотки пренебрежимо мало по сравнению с её индуктивным сопротивлением ($Z \approx X_L$):

$$X_L \approx \frac{U}{I}, \quad X_L = 2\pi vL; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{2\pi v} = \frac{U}{2\pi v \cdot I}.$$

4 Если в «чёрном ящике» находится электрическая цепь из последовательно соединённых катушки, конденсатора и резистора, то график зависимости силы тока от частоты при постоянном значении переменного напряжения U имеет вид, представленный на рис. 12:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где $\omega = 2\pi v$ – циклическая частота переменного тока.

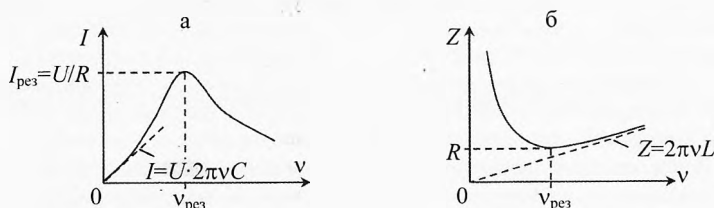


Рис. 12. Зависимость силы тока и импеданса от частоты тока

Значение активного сопротивления R в этой цепи можно определить, воспользовавшись тем фактом, что при резонансе $Z_{\text{рез}} = R$. Следовательно,

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{Z_{\text{рез}}} \approx \frac{U}{R}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U}{I_{\text{рез}}}.$$

Ёмкость конденсатора можно определить, приняв, что на низких частотах полное сопротивление цепи Z приблизительно равно ёмкостному сопротивлению X_C :

$$I = \frac{U}{Z} \approx \frac{U}{X_C} = U \cdot 2\pi\nu C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I}{2\pi\nu U}.$$

Индуктивность катушки можно определить из условия резонанса по экспериментально найденному значению резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$:

$$\frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \omega_{\text{рез}} L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}}^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \nu_{\text{рез}}^2 C}.$$

Значение индуктивности катушки можно также определить по графику $Z(\nu)$ на высоких частотах, когда сопротивлениями резистора и конденсатора можно пренебречь по сравнению с индуктивным сопротивлением катушки ($Z \approx X_L$):

$$X_L = 2\pi\nu L; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{2\pi\nu}, \quad L \approx \frac{Z}{2\pi\nu}.$$

5 При получении графика зависимости силы тока и полного сопротивления переменному току от частоты такого вида, какой представлен на рис. 13, можно сделать заключение о том, что в «чёрном ящике» включены параллельно резистор, конденсатор и катушка:

$$I = \frac{U}{Z} = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

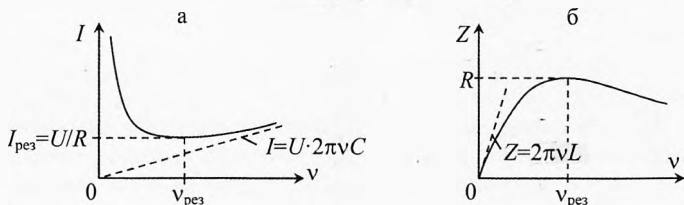


Рис. 13. Зависимость силы тока и импеданса от частоты тока

Значения активного сопротивления, ёмкости и индуктивности можно в этом случае определить аналогичным способом (см. предыдущую задачу).

6 Собираем схему, изображенную на рис. 14, где «ЧЯ» – «чёрный ящик». В качестве амперметра используем авометр в режиме амперметра. При разомкнутом ключе K с помощью амперметра измеряется сила тока I в цепи. Во всех режимах авометр измеряет действующие значения токов или напряжений.

Убираем из схемы амперметр и замыкаем ключ K . Теперь с помощью авометра (в режиме измерения напряжений) измеряем напряжение на входе генератора (U_r), на конденсаторе (U_C) и на «чёрном ящике» (U_x).

По измеренным напряжениям определяем сдвиг фаз ϕ между током I и напряжением U_x на «чёрном ящике». Качественная векторная диаграмма общего тока I и напряжений показана на рис. 15. Действующее значение силы тока I откладывается вдоль горизонтальной оси. Напряжение U_C на конденсаторе отстает по

фазе от тока на $\pi/2$. Напряжение на генераторе равно векторной сумме напряжений на конденсаторе и «чёрном ящике»:

$$\vec{U}_r = \vec{U}_c + \vec{U}_я.$$

По теореме косинусов:

$$U_r^2 = U_c^2 + U_я^2 - 2U_c U_я \cos \psi.$$

Вычислим из этой формулы $\cos \psi$:

$$\cos \psi = \frac{U_c^2 + U_я^2 - U_r^2}{2U_c U_я}.$$

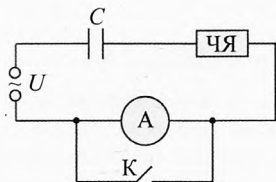


Рис. 14. Схема подключения

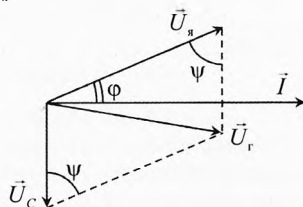


Рис. 15. Векторная диаграмма

Теперь найдём сдвиг фаз φ между током и напряжением на «чёрном ящике»:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \text{ поэтому } \cos \varphi = \sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}.$$

Мощность, потребляемая «чёрным ящиком»: $P = I \cdot U_я \cdot \cos \varphi$.

7 Собираем цепь, представленную на рис 16. На вход «X» электронного осциллографа (ЭО) подаем напряжение с чёрного ящика. На вход «Y» — напряжение с резистора с известным сопротивлением R_0 . Напряжение на резисторе R_0 пропорционально силе тока в цепи.

Значит, по оси «X» осциллографа будет напряжение на «чёрном ящике», а по оси «Y» — напряжение, пропорциональное силе тока на «чёрном ящике».

При наложении этих двух сигналов напряжений на экране осциллографа появятся так называемые фигуры Лиссажу.

Фигура Лиссажу для резистора будет представлять прямую линию (рис. 17). Чем больше сопротивление резистора в «чёрном ящике» по отношению к R_0 , тем меньше будет наклон α линии к оси X.

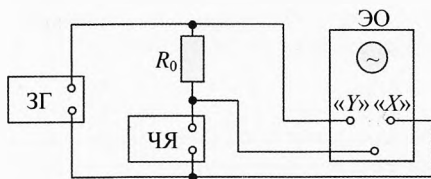


Рис. 16. Схема подключения

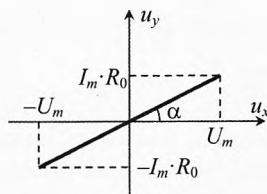


Рис. 17. Фигура Лиссажу для резистора

По отношению амплитуд колебаний напряжения по оси X и Y можно найти значение сопротивления резистора в «чёрном ящике» при известном сопротивлении R_0 .

Если в «чёрном ящике» находится конденсатор, то фигура Лиссажу (рис. 18) в зависимости от частоты переменного тока будет выглядеть как окружность

($X_C = R$) или эллипс: горизонтальный ($X_C > R_0$, то есть при малых частотах) или вертикальный ($X_C < R_0$, то есть при больших частотах).

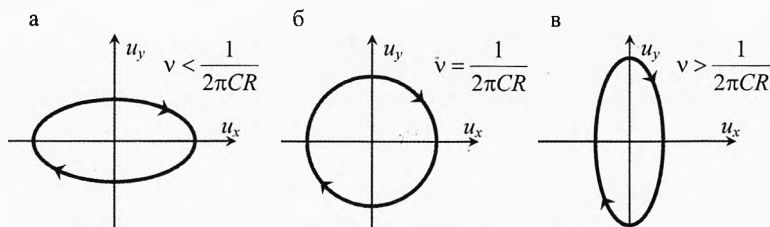


Рис. 18. Фигуры Лиссажу для конденсатора с резистором

Для «чёрного ящика» с катушкой будет наблюдаться другая зависимость фигуры от частоты: при низких частотах напряжение на катушке будет мало, а при высоких частотах, когда реактивное сопротивление катушки велико, напряжение на ней увеличится по сравнению с напряжением на резисторе R_0 (рис. 19). Кроме реактивного сопротивления в катушке есть активное сопротивление R , поэтому эллипс будет слегка наклонён, а при совсем малых частотах фигура станет такой же, как и для «чёрного ящика» с резистором, то есть прямой наклонённой линией.

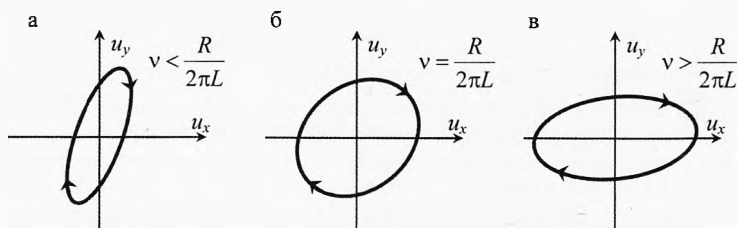


Рис. 19. Фигуры Лиссажу для катушки индуктивности с резистором

Глава 9. Задачи российских физических олимпиад

*Не стыдись учиться в зрелом возрасте:
лучше научиться поздно, чем никогда.*

Эзоп

§ 65. Магнитное поле

1 (2002, III, 11). В магнитном поле индукцией $B = 10$ Тл спектральная линия атома водорода длиной волны $\lambda_0 = 121$ нм расщепляется на две. Разность между длинами волн этих линий $\Delta\lambda = 1,37 \cdot 10^{-2}$ нм. Рассмотреть планетарную модель атома, в которой частота излучаемого света равна частоте обращения электрона вокруг ядра. Найти из этих данных отношение e/m , где e – модуль заряда электрона, m – его масса. Считать, что плоскость орбиты электрона перпендикулярна внешнему магнитному полю, а её радиус не изменяется при помещении атома в магнитное поле.

Решение. По условию частота вращения электрона равна частоте излучаемого света: $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$. Расщепление спектральных линий $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ соответствует расщеплению $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. По условию $\Delta\lambda \ll \lambda$, значит $\Delta\omega \ll \omega$, поэтому:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{2\pi c \cdot \Delta\lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{2\pi c \cdot \Delta\lambda}{\lambda_0^2}. \quad (1)$$

При отсутствии магнитного поля центростремительное ускорение электрона обеспечивается силой Кулона:

$$ma = F_c, \quad a = \omega_0^2 R, \quad F_c = \frac{ke^2}{R^2}; \quad \Rightarrow \quad m\omega_0^2 R = \frac{ke^2}{R^2}, \quad (2)$$

где R – расстояние от ядра до электрона, ω_0 – угловая скорость вращения электрона вокруг ядра в отсутствие внешнего магнитного поля.

При помещении же атома в магнитное поле

$$m\omega^2 R = \frac{ke^2}{R^2} + e\omega B, \quad (3)$$

где ω – угловая скорость вращения электрона вокруг ядра во внешнем магнитном поле, $v = \omega R$. Примем, что $\omega > 0$, если вращение электрона связано правилом правого буравчика с направлением магнитного поля, и $\omega < 0$ в случае левого буравчика.

Из (2) и (3) получим квадратное уравнение: $\omega^2 - \frac{eB}{m} \cdot \omega - \omega_0^2 = 0$.

По теореме Виета: $\omega'_1 + \omega'_2 = \frac{eB}{m}$, $\omega'_1 \omega'_2 = -\omega_0^2$,

где ω'_1 и ω'_2 – корни квадратного уравнения.

Эти частоты соответствуют частотам двух спектральных линий, наблюдаемых в эксперименте: $\omega_1 = \omega'_1$, $\omega_2 = |\omega'_2|$. Значит, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega'_1 + \omega'_2 = \frac{eB}{m}$.

Подставляя это выражение в (1), получим: $\frac{e}{m} = \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2 B} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ (Кл/кг)}$. ◀

2 (2005, III, 11). Электроны вылетают из электронной пушки в заданном направлении с постоянной скоростью. В постоянном однородном магнитном поле, перпендикулярном вектору их скорости, за время τ они долетают до точки A_1 (рис. 1). Если поле увеличить в $n = 3$ раза, то через время $\tau/3$ после вылета из пушки они оказываются в точке A_2 . Где находится электронная пушка? Изобразить её положение относительно точек A_1 и A_2 . Размеры пушки считать пренебрежимо малыми по сравнению с расстоянием A_1A_2 .

→ **Решение.** В постоянном магнитном поле на электрон действует сила Лоренца $F_L = e\mathbf{v}B$. Под её действием электроны движутся по окружности (рис. 2), т. к. сила Лоренца перпендикулярна скорости электрона. Согласно II закону Ньютона: $m\vec{a}_n = \vec{F}_L$, где $a_n = \frac{v^2}{R}$ – центростремительное ускорение. Значит,

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = e\mathbf{v}B \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{eB}{m}.$$

С учетом того, что $v = \omega R$, видим, что угловая скорость вращения электрона не зависит от значения линейной скорости:

$$\omega = \frac{eB}{m}.$$

Углы поворота векторов скорости в обоих случаях тоже одинаковы:

$$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \frac{eB\tau}{m}; \quad \varphi_2 = \omega\tau_2 = \frac{e \cdot 3B}{m} \cdot \frac{\tau}{3} = \frac{eB\tau}{m}.$$

Пусть точка C обозначает положение электронной пушки, O_1 и O_2 – центры окружностей, по которым движутся электроны. Фигуры CO_1A_1 и CO_2A_2 подобны с коэффициентом подобия 3, поэтому точки A_1 , A_2 и C лежат на одной прямой, причём:

$$\frac{A_1C}{A_2C} = 3, \text{ откуда } A_2C = \frac{1}{2} A_1A_2. \leftarrow$$

3 (2003, V, 11). В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = \alpha x$ ($\alpha \geq 0$) стартует частица массой m и зарядом q с начальной скоростью \vec{v} , направленной по оси OX (рис. 3). Определить максимальное смещение частицы вдоль оси OX .

→ **Решение.** На частицу действует только сила Лоренца. Сила Лоренца всегда направлена перпен-

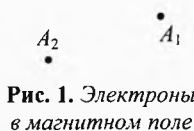


Рис. 1. Электроны в магнитном поле

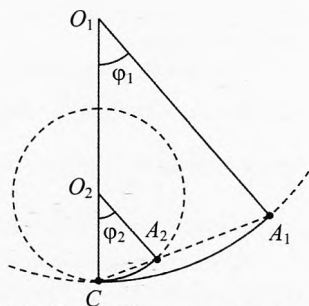


Рис. 2. Электроны в магнитном поле

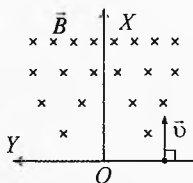


Рис. 3. Смещение частицы в магнитном поле

дикулярно скорости частицы, и поэтому не совершает работы, то есть энергия частицы (а значит, и её скорость) сохраняется: $v_x^2 + v_y^2 = v^2$.

По II закону Ньютона в проекции на ось OY (рис. 4):

$$ma_y = F_{\text{Л}} \cdot \cos \alpha,$$

где $F_{\text{Л}} \cdot \cos \alpha = Bqv \cdot \cos \alpha = Bqv_x = \alpha qv_x$ — проекция силы Лоренца на ось OY .

Значит, $ma_y = \alpha qv_x$.

Учитывая, что $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ и $v_x = \frac{dx}{dt}$, получим:

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \alpha q \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow m \cdot dv_y = \alpha q \cdot dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$m(v_y - v_{y0}) = \alpha q \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right).$$

Начальная скорость по оси OY равна нулю $v_{y0} = 0$, и $x_0 = 0$, следовательно:

$$mv_y = \frac{1}{2} \alpha q x^2.$$

При максимальном удалении частицы вдоль оси OX проекция её скорости на ось OY равна нулю. Поскольку скорость частицы постоянна, то при максимальном удалении $|v_y| = v$. Если заряд частицы положителен, то согласно предыдущему уравнению $v_y = v$, а если отрицателен, то $v_y = -v$. Значит,

$$mv = \frac{1}{2} \alpha |q| x_{\text{max}}^2 \Rightarrow x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2mv}{\alpha |q|}}.$$

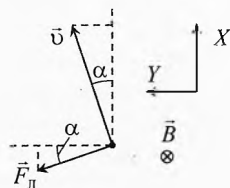


Рис. 4. Сила Лоренца

§ 66. Электромагнитная индукция

4 (1994, III, 11). Квадратная металлическая рамка скользит вниз без трения по вертикальным направляющим (рис. 5). Масса рамки равна m , длина стороны a , сопротивление рамки R . На высоте $h = 2a$ над полом рамка попадает в постоянное магнитное поле, индукция которого равна \vec{B} . Найти скорость рамки в момент, когда она коснется пола, если сразу после попадания в магнитное поле скорость её становится постоянной.

► **Решение.** Когда в магнитном поле находится только нижняя сторона рамки, скорость v_1 рамки постоянна по условию задачи. Значит, в это время результирующая сила, действующая на рамку, равна нулю, то есть сила тяжести уравновешивается силой Ампера:

$$F_T = F_A \quad \text{или} \quad mg = B \cdot I \cdot a.$$

Силу тока в рамке можно найти из закона Ома:

$$I \cdot R = |\mathcal{E}_i| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

где $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t} = \frac{B \cdot a \cdot |\Delta y|}{\Delta t} = B \cdot a \cdot v_1$ — скорость изменения магнитного потока, пронизывающего рамку. Значит,

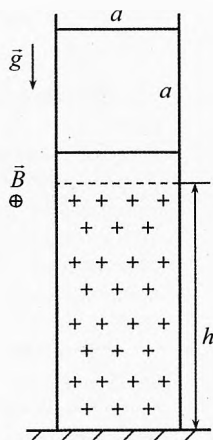


Рис. 5. Падение рамки в магнитном поле

$$I \cdot R = Bav_1, \Rightarrow v_1 = \frac{I \cdot R}{Ba} = \frac{mg \cdot R}{B^2 a^2}.$$

Когда же вся рамка окажется в магнитном поле, то сила Ампера будет равна нулю, и рамка будет свободно падать. Скорость рамки v_2 в момент касания найдём из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + mg(h-a) = \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\left(\frac{mg \cdot R}{B^2 a^2}\right)^2 + 2ga}.$$

5 (2004, III, 11). В проволоочный каркас в форме двух прямоугольников размерами $AB = BC = a$ и $CD = 2a$ впаяны небольшие по размерам резисторы сопротивлением R , $7R$ и R_x (рис. 6). Конструкция помещена в однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно её плоскости и изменяющееся во времени с постоянной скоростью $\Delta B / \Delta t = k$. При каком значении сопротивления резистора R_x ток через резистор сопротивлением $7R$ не будет течь? Сопротивлением проводов каркаса пренебречь.

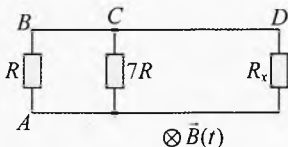


Рис. 6. Уравновесить мост

► **Решение.** ЭДС в левом и правом контурах «направлены» против часовой стрелки (при $k > 0$) и равны $\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot S_1 = ka^2$ и $\mathcal{E}_2 = 2ka^2$.

Через резистор $7R$ ток идти не будет, если $\varphi_A = \varphi_B$, тогда $I_R = I_{R_x}$. То есть одновременно получилось короткое замыкание обоих источников ($\varphi_A = \varphi_B$) и разрыв цепи ($I_{7R} = 0$). Работа сторонних сил источников \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 идёт только на выделение тепла в резисторах R и R_x . Согласно закону Ома $I_R = \frac{\mathcal{E}_1}{R}$, $I_{R_x} = \frac{\mathcal{E}_2}{R_x}$. Приравнявая

силы токов, получим: $\frac{\mathcal{E}_1}{R} = \frac{\mathcal{E}_2}{R_x}$; $\Rightarrow R_x = R \cdot \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = 2R$.

6 (2006, III, 11). Цепь состоит из катушки индуктивности $L = 1$ Гн, резистора сопротивлением $R = 1$ Ом, источника постоянного напряжения, ограничивающего резистора и ключа (рис. 7). Через значительное время после замыкания ключа сила тока через батарейку устанавливается постоянной и равной $I_0 = 0,1$ А. Определить с точностью не хуже 1% на сколько изменится сила тока, идущего через катушку, за время $\tau = 10^{-2}$ с после размыкания ключа. Все элементы цепи считать идеальными.

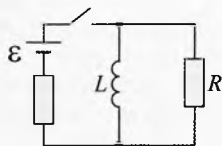


Рис. 7. Катушка как источник энергии

► **Решение.** Сразу после размыкания ключа сила тока в катушке останется равной I_0 , т. к. для скачкообразного изменения силы тока в катушке требуется бесконечное напряжение. В катушке возникнет ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{ci} , препятствующая уменьшению силы тока:

$$I \cdot R = \mathcal{E}_{ci}, \quad \mathcal{E}_{ci} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{R}{L} \cdot I. \quad (1)$$

В начальный момент времени сила тока равна I_0 , значит, сила тока вначале уменьшалась со скоростью:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t}(0) = -\frac{R}{L} \cdot I_0 = -0,1 \text{ А/с.}$$

Если бы в течение всего времени затухания тока эта скорость оставалась практически постоянной, то ток прекратился бы через время, равное:

$$T = \frac{I_0}{\left| \frac{\Delta I}{\Delta t}(0) \right|} = \frac{L}{R} = 1 \text{ с.}$$

Из (1) видно, что $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ со временем убывает, поэтому истинное время затухания будет ещё больше. Поскольку $\tau \ll T$, то будем считать, что в течение искомого времени τ ток убывает с постоянной скоростью. Тогда:

$$\Delta I = \tau \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}(0) = -\frac{\tau \cdot R I_0}{L} = -1 \text{ мА.} \quad \curvearrowright$$

Примечание. Уравнение (1) имеет точное решение $I(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L}$, откуда

$$\Delta I = I(\tau) - I_0 = I_0 \cdot (e^{-R\tau/L} - 1) = -0,995 \text{ мА} \approx -1 \text{ мА.}$$

7 (2003, V, 11). В цепи, представленной на рис. 8, электродвижущая сила источника равна $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, сопротивление резистора $R = 4 \text{ Ом}$, индуктивность катушки $L = 0,5 \text{ Гн}$. Вольтамперная характеристика $I(U)$ нелинейного элемента Э представлена на рис. 9. Напряжение стабилизации $U_0 = 4 \text{ В}$. В начальный момент ключ К разомкнут, ток в катушке не течёт. Какое количество теплоты выделится на нелинейном элементе после замыкания ключа? Построить качественный график зависимости силы тока в катушке от времени. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

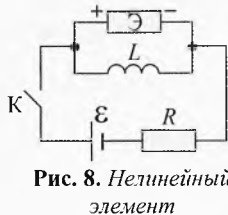


Рис. 8. Нелинейный элемент

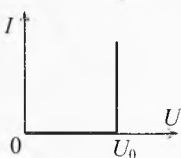


Рис. 9. ВАХ элемента

Решение. После замыкания ключа через резистор будет течь ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = 2 \text{ А.}$$

Такой же ток в начальный момент будет течь через нелинейный элемент Э. Ток в катушке L будет нарастать со временем по линейному закону, пока не достигнет значения I_0 . В самом деле

$$U_0 = L \cdot \frac{\Delta I_L}{\Delta t}, \quad \text{откуда} \quad I_L = \frac{U_0}{L} t.$$

Сила тока через катушку станет равной I_0 в момент времени, равный τ :

$$\tau = \frac{L \cdot I_0}{U_0} = \frac{L(\mathcal{E} - U_0)}{R U_0} = 0,25 \text{ с.}$$

В этот момент ток через нелинейный элемент прекращает течь. В промежуток времени $0 < t < \tau$ сила тока в нём линейно уменьшается от I_0 до 0.

Итак, при $0 < t < \tau$: $I_2 = I_0 - I_L = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} - \frac{U_0}{L} t$; при $t \geq \tau$: $I_2 = 0$.

Площадь под графиком зависимости силы тока на нелинейном элементе от времени (рис. 10) равна заряду q_2 , который прошёл через нелинейный элемент:

$$q_1 = \frac{1}{2} I_0 \tau = \frac{L}{2U_0} \cdot \left(\frac{\mathcal{E} - U_0}{R} \right)^2.$$

Значит, количество теплоты, выделившийся на нелинейном элементе, равно

$$Q_1 = q_1 \cdot U_0 = \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{\mathcal{E} - U_0}{R} \right)^2 = 1 \text{ Дж}.$$

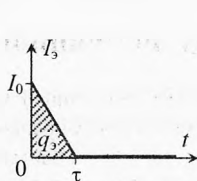


Рис. 10. Сила тока на элементе

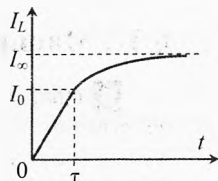


Рис. 11. Сила тока в катушке

Как уже было сказано, сила тока в катушке при $0 < t < \tau$ линейно возрастает от 0 до I_0 . При $t > \tau$ ток через нелинейный элемент не течёт, а в катушке возрастает, асимптотически стремясь к значению $I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} = 3 \text{ А}$. График зависимости силы тока через катушку от времени представлен на рис. 11. ➤

8 (2004, V, 11). Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня (постоянного магнита) находится тонкая кольцевая катушка массой $m = 10 \text{ г}$ (рис. 12). Она может перемещаться вдоль вертикальной оси Z . Если катушку заставить колебаться по гармоническому закону около этого положения с амплитудой $A = 5 \text{ мм}$ и частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$, то на её разомкнутых концах появится переменное напряжение с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 1 \text{ В}$. Какой постоянный ток (по величине и направлению) нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

➤ **Решение.** У северного полюса цилиндра вектор магнитной индукции поля \vec{B} имеет горизонтальную составляющую, направленную по радиусу цилиндра. Обозначим эту составляющую через \vec{B}_r .

Перемещение катушки вдоль оси Z :

$$z(t) = A \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t).$$

Значит скорость катушки: $v_z(t) = z'(t) = 2\pi\nu \cdot A \cdot \cos(2\pi\nu \cdot t)$.

ЭДС индукции, наводимая в катушке при колебаниях:

$$\mathcal{E} = B_r \cdot l \cdot v_z = B_r \cdot l \cdot 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t),$$

где l — суммарная длина всех витков в катушке.

Значит, амплитуда переменного напряжения:

$$\mathcal{E}_0 = 2\pi\nu A B_r l.$$

Если теперь пропустить по катушке постоянный ток I по часовой стрелке (если смотреть сверху), то на катушку будет действовать направленная вверх сила Ампера:

$$F_A = B_r \cdot l I = \frac{I \cdot \mathcal{E}_0}{2\pi\nu A}.$$

Катушка зависнет, если сила Ампера уравнивает силу тяжести:

$$F_A = F_t \Rightarrow \frac{I \cdot \mathcal{E}_0}{2\pi\nu A} = mg \Rightarrow I = \frac{2\pi\nu A m g}{\mathcal{E}_0} = 0,15 \text{ А}. \quad \blacktriangleleft$$

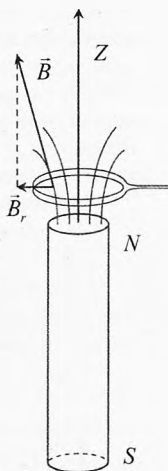


Рис. 12. Левитация катушки

§ 67. Машины постоянного тока

9 (2002, IV, 11). Игрушечный электропоезд массой $m = 500$ г с двигателем постоянного тока питается через рельсы от источника тока напряжением $U_0 = 5$ В и движется с горизонтальной скоростью $v_0 = 20$ см/с. В некоторый момент времени источник отключают, а рельсы замыкают резистором сопротивлением $R = 50$ Ом. Найти тормозной путь l поезда, считая, что его колеса не проскальзывают. Сопротивлением обмоток электродвигателя, трением в подшипниках и другими потерями в двигателе пренебречь.

→ **Решение.** ЭДС индукции поезда пропорциональна скорости изменения магнитного потока, поэтому напряжение на клеммах двигателя пропорционально скорости движения поезда:

$$U = U_0 \cdot \frac{v}{v_0}.$$

Мощность, которую вырабатывает двигатель, работающий в режиме генератора, целиком выделяется на резисторе (трением пренебрегаем) и определяется законом Джоуля–Ленца:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{Rv_0^2} \cdot v^2, \quad P + F \cdot v = 0.$$

Откуда видно, что тормозящая сила пропорциональна скорости:

$$F = -\frac{U_0^2}{Rv_0^2} \cdot v.$$

По второму закону Ньютона

$$F = ma, \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{U_0^2}{Rv_0^2} \cdot v.$$

Учитывая, что $v \cdot \Delta t = \Delta x$, из последнего уравнения получим:

$$m \Delta v = -\frac{U_0^2}{Rv_0^2} \cdot \Delta x.$$

За время торможения поезд пройдёт расстояние l , а его скорость уменьшится от v_0 до нуля:

$$m(0 - v_0) = -\frac{U_0^2}{Rv_0^2} \cdot (l - 0).$$

Значит, тормозной путь равен: $l = \frac{mRv_0^3}{U_0^2} = 8$ мм.

10 (2002, V, 11). Коллекторный двигатель питается от источника постоянного тока с напряжением $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого электродвигателя, если магнитное поле в нём создаётся постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и механической нагрузки?

→ **Решение.** Возникающая в обмотках ротора ЭДС индукции прямо пропорциональна угловой скорости его вращения, то есть

$$|\mathcal{E}_i| = \Phi \omega,$$

где Φ – максимальный магнитный поток, пронизывающий обмотку ротора, – постоянная величина, ибо поток создаётся магнитным полем постоянного магнита.

При полной остановке ротора $\omega = 0$, значит, сила тока определяется только активным сопротивлением его обмоток:

$$R = U/I_2. \quad (1)$$

Пусть ω_1 – угловая скорость вращения ротора при работе двигателя на холостом ходу, тогда по закону Ома:

$$\begin{aligned} U &= |\mathcal{E}_i| + I_1 \cdot R \quad \text{или} \quad U = \Phi \omega_1 + I_1 \cdot R \\ \Rightarrow \quad \Phi &= \frac{U - I_1 \cdot R}{\omega_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае работа источника идёт на выделение тепла в обмотках и преодоление силы трения. По закону сохранения энергии:

$$P_3 = P_R + P_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad U \cdot I_1 = I_1^2 R + M_{\text{тр}} \omega_1,$$

Значит, момент сил трения равен:

$$M_{\text{тр}} = \frac{U \cdot I_1 - I_1^2 R}{\omega_1}. \quad (3)$$

Пусть теперь двигатель нагружен и вращается с угловой скоростью ω .

По закону Ома:

$$U = \Phi \omega + I \cdot R. \quad (4)$$

Полезную механическую мощность $P_{\text{мех}}$ найдём из закона сохранения энергии:

$$P_3 = P_R + P_{\text{тр}} + P_{\text{мех}} \quad \text{или} \quad U \cdot I = I^2 R + M_{\text{тр}} \omega + P_{\text{мех}}.$$

Подставим в последнее уравнение выражение для силы тока I из (4):

$$P_{\text{мех}} = -\frac{\Phi^2}{R} \omega^2 + \left(\frac{\Phi \cdot U - M_{\text{тр}} R}{R} \right) \omega. \quad (5)$$

Это парабола с ветвями, направленными «вниз». Поэтому полезная механическая мощность максимальна при

$$\omega_m = \frac{\Phi U - M_{\text{тр}} R}{2\Phi^2}. \quad (6)$$

Подставляя в (5) выражение для оптимальной угловой скорости из (6), а также выражения для R , Φ и $M_{\text{тр}}$ из (1), (2) и (4), получим максимальное значение полезной механической мощности:

$$P_{\text{мех. max}} = \frac{(\Phi \cdot U - M_{\text{тр}} R)^2}{4R\Phi^2} = \frac{UI_2}{4} \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right)^2 = 50 \text{ Вт.} \leftarrow$$

§ 68. Электромагнитные колебания

11 (1992, III, 11). В схеме, изображенной на рис. 13, индуктивности катушек равны $L_1 = L$, $L_2 = 2L$, $L_3 = 3L$, а конденсатор ёмкости C заряжен до напряжения U_0 . Найти максимальный ток через катушку L_2 после замыкания ключа К. Активное сопротивление катушек считать пренебрежимо малым.

► **Решение.** В любой момент времени ЭДС индукции в катушках L_2 и L_3 равны друг другу. Поэтому приращение токов в этих катушках обратно пропорционально их индуктивности:

$$L_2 \cdot \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = L_3 \cdot \frac{\Delta I_3}{\Delta t}.$$

Так как $I_{20} = 0$, $I_{30} = 0$, то

$$L_2 \cdot I_2 = L_3 \cdot I_3.$$

Максимальные значения сил тока I_1 , I_2 и I_3 в катушках достигаются одновременно, при этом

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Ток, протекающий в схеме, максимален, когда напряжение на конденсаторе равно нулю. По закону сохранения энергии

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_3 I_3^2}{2}.$$

Решая совместно последние три уравнения, получим:

$$I_2 = U_0 L_3 \cdot \sqrt{\frac{C}{L_1(L_2 + L_3)^2 + L_2 L_3^2 + L_3^2 L_3}} = 3U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{55L}}.$$

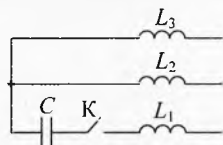


Рис. 13. Максимальный ток во второй катушке

12 (1996, III, 11). Конденсаторы ёмкостями C и $2C$ заряжены до напряжения U и $2U$ соответственно (рис. 14а). Найти заряды на конденсаторах после замыкания ключа K в момент, когда ток через катушку индуктивности достигнет максимального значения. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

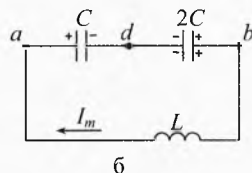
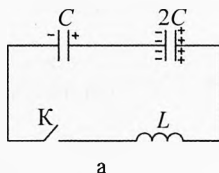


Рис. 14. Найти заряд конденсаторов при максимальном токе

► **Решение.** Сила тока будет максимальной, когда разность потенциалов на катушке равна нулю (рис. 14б):

$$\varphi_a - \varphi_b = 0.$$

При этом первый конденсатор поменяет полярность заряда так, что:

$$U_1 = U_2 \quad \text{или} \quad \frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{2C} \Rightarrow q_2 = 2q_1.$$

Согласно закону сохранения заряда для узла d

$$q_1 + q_2 = q_{20} - q_{10} \quad \text{или} \quad q_1 + q_2 = 2C \cdot 2U - C \cdot U = 3C \cdot U.$$

Решая, получим: $q_1 = CU$; $q_2 = 2CU$.

13 (1998, III, 11). В схеме, изображенной на рис. 15, в начальный момент времени оба ключа разомкнуты, конденсатор ёмкостью C_1 заряжен до разности потенциалов U_1 , а конденсатор ёмкостью C_2 ($C_2 > C_1$) не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1 , а затем начинают попеременно замыкать и размыкать ключ K_2 в те моменты, когда напряжение на конденсаторе C_1 равно нулю. В результате в катушке индуктивностью L будут

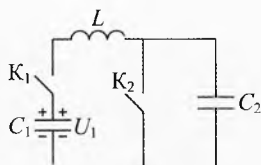


Рис. 15. Найти максимумы ЭДС в катушке

наблюдаться максимумы (локальные максимумы) ЭДС самоиндукции. Найти эти максимальные значения в процессе многократных замыканий и размыканий ключа K_2 . Омическим сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

→ **Решение.** После замыкания ключа K_1 начальный заряд $q_0 = C_1 U_1$ конденсатора C_1 начнёт перетекать на конденсатор C_2 . Когда напряжение на конденсаторе C_1 станет равным нулю, то весь заряд с конденсатора C_1 перетечёт на конденсатор C_2 , а напряжение на втором конденсаторе будет равно $U_2 = \frac{q_0}{C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_2}$, и через катушку будет течь ток I . Согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2} + \frac{LI^2}{2}. \quad (1)$$

В этот момент замыкается ключ K_2 . Конденсатор C_2 очень быстро разряжается, и возникает новая схема, изображённая на рис. 16. Начальный заряд конденсатора C_1 равен нулю, а в цепи течёт ток I . Максимальное напряжение на катушке \mathcal{E}_{1m} будет равно по модулю и противоположно по знаку максимальному напряжению U_{1m} на конденсаторе C_1 , а это будет, когда вся энергия катушки перейдёт в энергию конденсатора C_1 , то есть при нулевом токе в цепи. По закону сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{C_1 U_{1m}^2}{2}.$$

Решая совместно три последние уравнения, получим:

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_1^2 U_1^2}{2C_2} + \frac{C_1 U_{1m}^2}{2} \Rightarrow \mathcal{E}_{1m} = U_{1m} = U_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{C_1}{C_2}}.$$

Когда конденсатор снова разрядится и напряжение на нём станет равным нулю, ключ K_2 размыкается и новая схема примет вид, изображённый на рис. 17. При этом заряд обоих конденсаторов равен нулю, а в цепи течёт такой же ток I , но уже в обратном направлении.

Затем вся энергия, сосредоточенная в этот момент в катушке перейдёт в конденсаторы, они зарядятся до максимальных напряжений U'_{1m} и U'_{2m} . Поскольку заряды на них должны быть равны, то $C_1 U'_{1m} = C_2 U'_{2m} = q$. По закону сохранения энергии:

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}.$$

Подставляя это выражение в (1), получим:

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_1^2 U_1^2}{2C_2} + \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}, \Rightarrow q = C_1 U_1 \cdot \sqrt{\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}}.$$

$$\text{Тогда } U'_{1m} = \frac{q}{C_1} = U_1 \cdot \sqrt{\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}}, \quad U'_{2m} = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot U_1 \cdot \sqrt{\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}}.$$

Максимальная ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{2m} в катушке (напряжение на катушке) будет численно равна сумме напряжений на конденсаторах:

$$\mathcal{E}_{2m} = U'_{1m} + U'_{2m} = U_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2}.$$

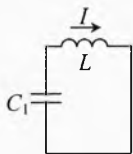


Рис. 16. Ключ K_2 замкнут

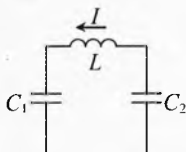


Рис. 17. Ключ K_2 разомкнут

При дальнейших замыканиях и размыканиях ключа K_2 максимальное и минимальное значения ЭДС в катушке будут повторять значения \mathcal{E}_{1m} и \mathcal{E}_{2m} .

14 (2003, III, 11). Шар радиусом R через катушку индуктивности L соединён с землей (рис. 18). Из бесконечности на него налетает пучок электронов. Определить максимальный заряд шара и построить график зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени. Считать, что изначально шар был не заряжен, концентрация электронов в пучке равна n , а их скорость $v \ll c$, где c – скорость света.

Решение. Пусть q – заряд шара в некоторый момент времени ($q < 0$), I – сила тока, протекающего через катушку индуктивности ($I > 0$). Напряжение на катушке равно потенциалу на шаре относительно Земли, взятому с обратным знаком:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{kq}{R}. \quad (1)$$

За время dt на шар попадут электроны, занимающие объем $V = S \cdot l = \pi R^2 \cdot v \cdot dt$. Их заряд равен

$$q_- = -e \cdot N = -e \cdot n \cdot V = -e \cdot n \cdot \pi R^2 \cdot v \cdot dt.$$

При силе тока I через катушку на шар придет положительный заряд:

$$q_+ = I \cdot dt.$$

Тогда суммарный прирост заряда на шаре равен:

$$\begin{aligned} dq &= dq_+ + dq_- = I \cdot dt - en\pi R^2 \cdot v \cdot dt, \\ \Rightarrow I &= en\pi R^2 \cdot v + \frac{dq}{dt}. \end{aligned} \quad (2)$$

Возьмём производную из последнего уравнения по времени:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Подставим полученное выражение в (1):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{k}{RL} \cdot q.$$

Это – уравнение гармонических колебаний, решение которого имеет вид:

$$q = q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{RL}}$ – циклическая частота, q_m – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза.

В начальный момент времени заряд шара был равен нулю.

Подставляя $q = 0$ и $t = 0$ в (3), получим: $0 = q_m \cdot \sin(0 + \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = 0$.

В начальный момент времени напряжение и сила тока на катушке равны нулю, поэтому, как видно из (2), в начальный момент модуль заряда нарастает с максимальной скоростью:

$$\frac{dq}{dt} = -en\pi R^2 \cdot v.$$

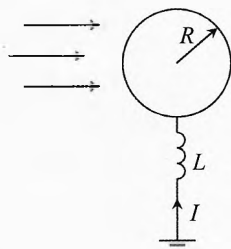


Рис. 18. Пучок электронов и заземлённый через катушку шар

Дифференцируя (3) по времени, для начального момента времени получим:

$$\frac{dq}{dt} = q_m \omega \cdot \cos(\omega \cdot 0) = q_m \omega.$$

Сравнивая два последних уравнения, найдём максимальный заряд шара:

$$q_m = -\frac{e\pi R^2 v}{\omega} = -e\pi R^2 v \cdot \sqrt{\frac{RL}{k}}.$$

Дифференцируем уравнение (3) по времени:

$$\frac{dq}{dt} = q_m \omega \cdot \cos(\omega t) = -e\pi R^2 v \cdot \cos(\omega t).$$

Подставляя полученный результат в (2), получим:

$$I = e\pi R^2 v (1 - \cos(\omega t)).$$

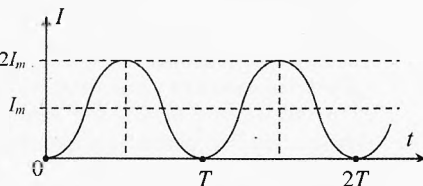


Рис. 19. Колебания силы тока в катушке

График зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени представлен на рис. 19, где $I_m = e\pi R^2 v$ – амплитуда колебаний силы тока, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{RL}{k}}$ – период колебаний. ◀

15 (2005, V, 10). В некоторый момент сверхпроводящий соленоид объёмом $V = 40 \text{ см}^3$ подключают к высоковольтному конденсатору ёмкостью $C = 100 \text{ мкФ}$, заряженному до напряжения $U = 1 \text{ кВ}$. Известно, что при индукции магнитного поля в соленоиде $B_0 = 1,6 \text{ Тл}$ разрушается состояние сверхпроводимости материала, из которого выполнена обмотка соленоида. Определить, произойдёт ли разрушение сверхпроводимости в описанном эксперименте.

→ **Решение.** Пусть N – число витков соленоида, l – длина соленоида, S – площадь поперечного сечения, тогда индуктивность соленоида:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l}.$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ – магнитная постоянная.

Ток в соленоиде достигнет максимума, когда вся энергия конденсатора перейдёт в энергию магнитного поля соленоида:

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \Rightarrow I_{\max} = U \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{N} \cdot \sqrt{\frac{Cl}{\mu_0 S}}. \quad (1)$$

Индукцию магнитного поля в соленоиде найдём из двух выражений для полного собственного магнитного потока, проходящего через соленоид:

$$\Phi = B_{\max} \cdot S \cdot N \text{ и } \Phi = L \cdot I_{\max} \Rightarrow B_{\max} = \frac{L \cdot I_{\max}}{S \cdot N} = \frac{\mu_0 \cdot N}{l} \cdot I_{\max}.$$

Подставляя I_{\max} из (1), и учитывая, что объём катушки равен $V = S \cdot l$, получим:

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 U}{l} \cdot \sqrt{\frac{Cl}{\mu_0 S}} = U \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 C}{St}} = U \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 C}{V}} = 1,77 \text{ Тл}.$$

Итак, $B_{\max} > B_0$, значит сверхпроводящее состояние разрушится. ◀

§ 69. Переменный электрический ток

16 (III, 2000, 11). В однополупериодном выпрямителе для зарядки аккумулятора (рис. 20) «высох» электролитический конденсатор большой ёмкости – его ёмкость упала во много раз. Во сколько раз увеличится время, необходимое для зарядки аккумулятора? Действующее значение напряжения источника переменного напряжения $U = 15$ В, ЭДС аккумулятора $\mathcal{E} = 12$ В. Диод считать идеальным.

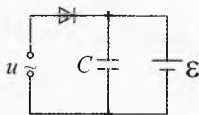


Рис. 20. Зарядка аккумулятора

→ **Решение.** Рассмотрим нормальный режим работы зарядного устройства (рис. 21). Предположим, что изначально конденсатор был подключён к аккумулятору и на аккумуляторе всё ещё оставалось небольшое количество энергии. Тогда перед их подключением к источнику конденсатор уже будет заряжен до напряжения \mathcal{E} (рис. 22).

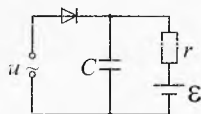


Рис. 21. Нормальный режим работы

Пусть после подключения источника напряжение на источнике изменяется по закону $u = U_0 \sin(\omega t)$. До момента t_1 напряжение на источнике меньше, чем \mathcal{E} , поэтому диод будет закрыт. После этого момента диод откроется.

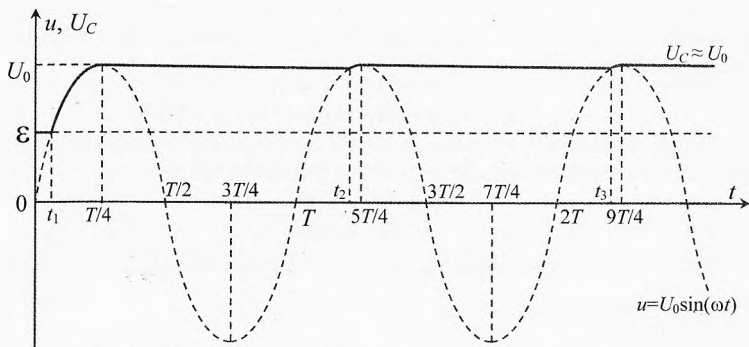


Рис. 22. Напряжение на конденсаторе при нормальном режиме работы

К концу первой четверти периода конденсатор C зарядится до максимального значения напряжения переменного тока: $U_0 = \sqrt{2}U$. Аккумулятор тоже будет заряжаться.

Начиная со второй четверти периода зарядка перейдёт в стационарный режим:

1) при $t \in [T/4; t_2]$ диод будет закрыт, т.к. напряжение на конденсаторе больше, чем на источнике. Конденсатор будет разряжаться через аккумулятор, то есть аккумулятор будет заряжаться от конденсатора;

2) при $t \in [t_2; 5T/4]$ диод будет открыт, конденсатор и аккумулятор будут заряжаться от источника тока;

3) далее процесс 1-2 будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega$.

При достаточно большой ёмкости конденсатора напряжение U_C на нём при разрядке через аккумулятор будет уменьшаться незначительно. Поэтому можно

считать, что напряжение на конденсаторе будет практически неизменным и равным амплитудному значению переменного тока: $U_c \approx U_0 = \sqrt{2}U$.

Сила тока зарядки аккумулятора также будет практически неизменной (рис. 23). Она зависит от внутреннего сопротивления r аккумулятора:

$$I_1 = \frac{U_r}{r} = \frac{U_c - \mathcal{E}}{r} \approx \frac{\sqrt{2}U - \mathcal{E}}{r}.$$

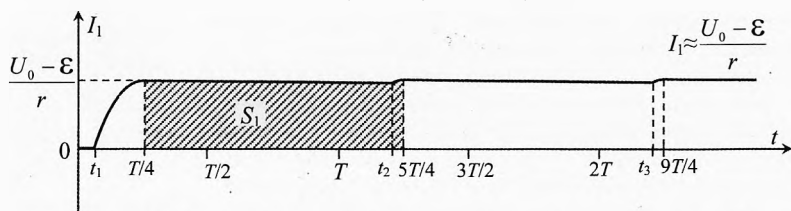


Рис. 23. Сила тока в аккумуляторе при нормальном режиме работы

Пусть ёмкость аккумулятора равна q . Например, для «пальчикового» аккумулятора на 1,5 В ёмкость равна $q = 750$ мА·ч. Это значит, что для его зарядки током 75 мА потребуется 10 часов.

Ёмкость аккумулятора – это заряд, который пройдет через аккумулятор при его зарядке (или разрядке):

$$q = 750 \text{ мА} \cdot \text{ч} = 750 \cdot 10^{-3} \text{ А} \cdot 3600 \text{ с} = 2700 \text{ Кл}.$$

Тогда промежуток времени, который потребуется для полной зарядки аккумулятора при нормальном режиме работы зарядного устройства:

$$\tau_1 = \frac{q}{I_1} = \frac{q \cdot r}{\sqrt{2}U - \mathcal{E}}. \quad (1)$$

Заштрихованная площадь на графике $I_1(t)$ равна заряду, на который зарядится аккумулятор за один период: $q_{1T} = I_1 \cdot T \approx (\sqrt{2}U - \mathcal{E}) \cdot \frac{T}{r}$.

В случае с «высохшим» конденсатором его электроёмкость уменьшилась во много раз. А это значит, что мы совсем можем убрать этот конденсатор из схемы (рис. 24).

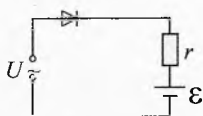


Рис. 24. Схема без конденсатора

В этом случае диод будет открыт тогда, когда напряжение на источнике больше, чем ЭДС (рис. 25): $u > \mathcal{E}$.

То есть в интервалах времени $t \in [0; t_1] \cup [t_2; T]$ диод будет закрыт. Напряжение на аккумуляторе равно ЭДС: $U_{\text{ак}} = \mathcal{E}$, и он не заряжается.

А при $t \in [t_1; t_2]$ диод будет открыт и напряжение на аккумуляторе будет равно напряжению на источнике: $U_{\text{ак}} = u = U_0 \sin(\omega t)$.

Далее процесс будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega$.

График зависимости силы тока через аккумулятор для этого случая представлен на рис. 26: $I_2 = \frac{U_{\text{ак}} - \mathcal{E}}{r} = \frac{U_0 \cdot \sin(\omega t) - \mathcal{E}}{r}$.

Найдём моменты времени t_1 и t_2 , в которые открывается и закрывается диод:

$$U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \mathcal{E} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{\mathcal{E}}{U_0} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}U} = 0,566 \Rightarrow t_1 \approx 0,096 \cdot T, \quad t_2 \approx 0,404 \cdot T.$$

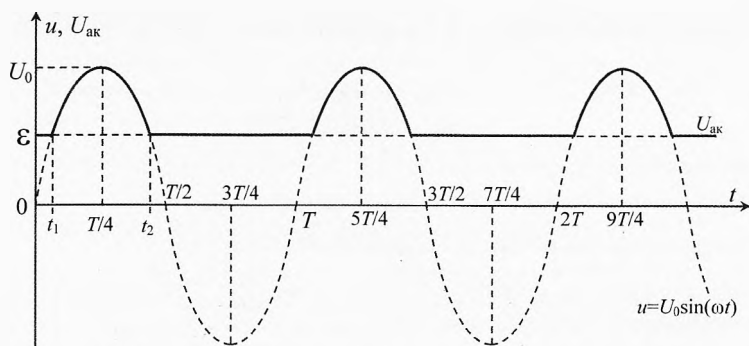


Рис. 25. Напряжение на аккумуляторе при «высохшем» конденсаторе

Заряд, который пройдёт через аккумулятор за один период, можно найти как площадь заштрихованной области под графиком зависимости силы тока от времени. Найдём эту площадь с помощью интегрирования:

$$q_{2T} = \int_{t_1}^{t_2} I_2(t) \cdot dt = \frac{1}{r} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[U_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - \varepsilon \right] \cdot dt = -\frac{U_0 \cdot T}{2\pi r} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{\varepsilon}{r} \cdot t \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$q_{2T} = \frac{U_0 \cdot T}{2\pi r} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_1\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_2\right) \right] - \frac{\varepsilon}{r} \cdot (t_2 - t_1) \approx (0,262 \cdot U_0 - 0,308 \cdot \varepsilon) \cdot \frac{T}{r}.$$

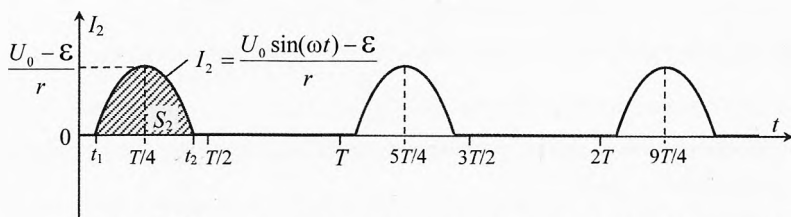


Рис. 26. Сила тока в аккумуляторе при «высохшем» конденсаторе

Время, за которое аккумулятор зарядится до заряда q :

$$\tau_2 = \frac{q \cdot r}{(0,262 \cdot U_0 - 0,308 \cdot \varepsilon)}. \quad (2)$$

Сравним время зарядки в обоих случаях, разделив (2) на (1):

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\sqrt{2}U - \varepsilon}{0,262 \cdot \sqrt{2} \cdot U - 0,308 \cdot \varepsilon} \approx 4,9.$$

При «высохшем» конденсаторе время зарядки увеличится в 5 раз!

Отношение времени зарядки можно было найти графически через отношение заштрихованных площадей на графиках $I_1(t)$ и $I_2(t)$, то есть через отношение зарядов, протекающих через аккумулятор за один период:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{q_{1T}}{q_{2T}} = \frac{S_1}{S_2} \approx 5.$$

Приложение. Основные формулы

1. Магнитное поле

Магнитный момент контура: $\vec{P}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ или $P_m = I \cdot S$.

Максимальный вращающий момент на контур со стороны поля \vec{B} : $M_{\max} = B \cdot P_m$.

Законом Ампера (сила взаимодействия двух элементов тока): $F_A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \delta l_1 \delta l_2}{4\pi R^2}$.

Сила Ампера, действующая на элемент тока со стороны поля \vec{B} : $F_A = B \cdot I \cdot \delta l \cdot \sin \alpha$, где α – угол между магнитной индукцией \vec{B} и направлением тока.

Магнитный поток: $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ или $\Phi = B_{\perp} \cdot S$, где α – угол между магнитной индукцией \vec{B} и перпендикуляром к контуру.

Собственный магнитный поток контура индуктивностью L : $\Phi_e = L \cdot I$.

Магнитная проницаемость изотропного материала: $\mu = \frac{B}{B_0}$.

Закон Био–Савара–Лапласа (магнитная индукция от элемента тока): $\delta B = \frac{\mu \mu_0 I \delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}$.

Закон Био–Савара–Лапласа для бесконечно длинного прямого тока: $B = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi R}$.

Закон Био–Савара–Лапласа для прямого провода конечной длины: $B_{12} = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$.

Магнитная индукция соленоида (катушки индуктивности): $B = \mu \mu_0 n \cdot I$.

Индуктивность соленоида: $L = \mu \mu_0 n^2 V$, где $V = S l$; $n = \frac{N}{l}$ – плотность намотки витков.

Сила взаимодействия параллельных токов: $F_{12} = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2 \delta l}{2\pi R}$.

Сила Лоренца, действующая на движущуюся заряженную частицу: $F_L = q_0 v B \sin \alpha$, где α – угол между магнитной индукцией \vec{B} и скоростью \vec{v} .

Радиус вращения заряженной частицы в однородном магнитном поле: $R = \frac{mv}{qB}$.

2. Электромагнитная индукция

Закон электромагнитной индукции Фарадея: $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$.

ЭДС индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле: $\mathcal{E}_i = B l v \sin \beta$, где β – угол между магнитной индукцией \vec{B} и скоростью \vec{v} .

ЭДС самоиндукции, возникающая в контуре неизменной индуктивности: $\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Энергия магнитного поля катушки индуктивности: $W_m = \frac{L I^2}{2}$.

3. Машины постоянного тока

ЭДС генератора постоянного тока: $\mathcal{E} = 2NRBl\omega$ или $\mathcal{E} = \Phi_{\max} \omega$, где Φ_{\max} – полный максимальный магнитного потока, пронизывающий обмотку якоря, ω – угловая скорость вращения якоря, N – число витков в одной обмотке якоря, R и l – радиус и длина якоря, B – магнитная индукция, создаваемая индуктором.

КПД генератора постоянного тока: $\eta_{\text{ген}} = \frac{P_2}{P_{\text{мех}}}$.

Вращающий момент на валу электродвигателя постоянного тока: $M = I \Phi_{\text{макс}}$

Механическая мощность электродвигателя постоянного тока: $P_{\text{мех}} = |\mathcal{E}_i| \cdot I$, где \mathcal{E}_i – ЭДС индукции, возникающей в обмотке якоря, I – сила тока в якоре.

КПД электродвигателя постоянного тока: $\eta_{\text{дв}} = \frac{P_{\text{мех}}}{P_2}$.

4. Электрические измерения

Угол поворота стрелки электроизмерительного прибора магнитоэлектрической системы: $\alpha = k \cdot I$.

Угол поворота стрелки электроизмерительного прибора электромагнитной системы: $\alpha = k \cdot I^2$.

Угол поворота стрелки электроизмерительного прибора электродинамической системы: $\alpha = k \cdot I_1 \cdot I_2$.

Измеряемая мощность и частота вращения диска индукционного измерительного прибора: $P = k \cdot n$.

Потреблённая электрической цепью электроэнергия и число оборотов диска индукционного измерительного прибора: $W = k \cdot N$.

5. Электромагнитные колебания

Уравнение гармонических колебаний в LC -контуре: $q'' = -\frac{1}{LC}q$ или $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q$.

Циклическая частота и период колебаний в LC -контуре: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Заряд конденсатора, сила тока и напряжение на катушке (или конденсаторе) в LC -контуре:

$$q = q_m \cos \omega \cdot t, \quad i = -I_m \sin \omega \cdot t \quad \text{или} \quad i = I_m \cos \omega \cdot (t + \frac{\pi}{2}), \quad u = U_m \cos \omega t.$$

Разрядка конденсатора через резистор: $U_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

Зарядка конденсатора от источника \mathcal{E} через резистор: $U_C = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

«Разрядка» катушки индуктивности через резистор: $I = I_0 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.

«Зарядка» катушки индуктивности от источника \mathcal{E} через резистор: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$.

6. Переменный электрический ток

Максимальное значение ЭДС индукции, возбуждаемой в контуре при вращении в постоянном магнитном поле: $\mathcal{E}_m = BSN\omega$ или $\mathcal{E}_m = \Phi_{\text{макс}} \cdot \omega$.

Мгновенное значение ЭДС индукции: $e = \mathcal{E}_m \cdot \sin \omega t$.

Действующее (эффективное) значение напряжения и силы тока: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Напряжение и сила переменного тока, сопротивление переменному току, мощность:

– резистор: $u = U_m \cdot \sin \omega t$, $i = I_m \cdot \sin \omega t$, $X_R = R$, $p_R = \frac{P_{Rm}}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, $\overline{p_R} = \frac{IU}{2}$.

– конденсатор: $u = U_m \cos \omega t$, $i = -I_m \sin(\omega t)$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $p_C = -P_{Cm} \sin 2\omega t$, $\overline{p_C} = 0$.

– катушка: $u = U_m \cos \omega t$, $i = I_m \sin \omega t$, $X_L = \omega L$, $p_L = P_{Lm} \sin 2\omega t$, $\overline{p_L} = 0$.

Закон Ома для электрической цепи переменного тока: $I = \frac{U}{Z}$, где Z – импеданс.

Последовательное соединение элементов в цепи переменного тока: $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$,

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad \cos \varphi_c = \frac{U_{Rm}}{U_m}, \quad \cos \varphi_c = \frac{R}{Z}.$$

Параллельное соединение элементов в цепи переменного тока: $I = U \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$,

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}, \quad \cos \varphi_c = \frac{I_{Rm}}{I_m}, \quad \cos \varphi_c = \frac{Z}{R}.$$

Активная электрическая мощность: $P_{\text{акт}} = U \cdot I \cdot \cos \varphi_c$, при последовательном соединении элементов:

$$P_{\text{акт}} = I^2 \cdot R, \quad \text{при параллельном: } P_{\text{акт}} = \frac{U^2}{R}.$$

Реактивная электрическая мощность: $P_{\text{реакт}} = U \cdot I \cdot \sin \varphi_c$.

Полная электрическая мощность: $P_{\text{полн}} = U \cdot I$, $P_{\text{полн}} = \sqrt{P_{\text{акт}}^2 + P_{\text{реакт}}^2}$.

Коэффициентом мощности: $\cos \varphi_c = \frac{P_{\text{акт}}}{P_{\text{полн}}}$.

Циклическая частота при резонансе напряжений: $\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Добротность LC-контура: $Q = \frac{U_{Lm, \text{рез}}}{U_m}$, $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$, $Q = \frac{\rho}{R}$.

Волновое сопротивление LC-контура: $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Коэффициент трансформации трансформатора: $K = \frac{U_1}{U_2}$ или $K \approx \frac{N_1}{N_2}$ или $K \approx \frac{I_2}{I_1}$.

7. Трехфазный ток

Соединение нагрузок звездой: $U_n = \sqrt{3} \cdot U_\phi$, $I_n = I_\phi$.

Соединение нагрузок треугольником: $U_n = U_\phi$, $I_n = \sqrt{3} \cdot I_\phi$.

Мощность одной фазы: $P_{\text{фаз}} = I_\phi \cdot U_\phi \cdot \cos \varphi$, $P_{\text{реакт}} = I_\phi \cdot U_\phi \cdot \sin \varphi$, $P_{\text{полн}} = I_\phi \cdot U_\phi$ или $P_{\text{фаз}} = \frac{I_n \cdot U_n}{\sqrt{3}} \cdot \cos \varphi$,

$$P_{\text{реакт}} = \frac{I_n \cdot U_n}{\sqrt{3}} \cdot \sin \varphi, \quad P_{\text{полн}} = \frac{I_n \cdot U_n}{\sqrt{3}}; \quad P_{\text{полн}} = \sqrt{P_{\text{фаз}}^2 + P_{\text{реакт}}^2}.$$

Общая мощность всех трех фаз трехфазной цепи: $P_{\text{акт}} = P_{\text{фаз}} + P_{\text{фаз}} + P_{\text{фаз}}$, $P_{\text{реакт}} = P_{\text{реакт}} + P_{\text{реакт}} + P_{\text{реакт}}$,

$$P_{\text{полн}} = P_{\text{полн}} + P_{\text{полн}} + P_{\text{полн}}.$$