

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА

Дойти

ДО САМОЙ СУТИ!

НАСТОЛЬНАЯ КНИГА

для углубленного
изучения физики
в средней школе

Абитуриентам

Участникам
олимпиад

Учителям физики

Всем, кто хочет
понять физику
и научиться решать
стандартные
и нестандартные
задачи!

ТЕРМОДИНАМИКА
И МОЛЕКУЛЯРНАЯ
ФИЗИКА



URSS

В. П. Дельцов, В. В. Дельцов

ФИЗИКА

ДОЙТИ ДО САМОЙ СУТИ!

Настольная книга
для углубленного изучения
физики в средней школе

Термодинамика и молекулярная физика

Научные редакторы

кандидат физико-математических наук В. А. Овчинкин,
кандидат педагогических наук В. А. Орлов



URSS

МОСКВА

Дельцов Виктор Павлович, Дельцов Василий Викторович

Физика: дойти до самой сути! Настольная книга для углубленного изучения физики в средней школе. Термодинамика и молекулярная физика: Учебное пособие / Науч. ред. В. А. Овчинкин, В. А. Орлов. М.: ЛЕНАНД, 2017. — 304 с.

Настоящее издание представляет собой вторую часть уникального учебного пособия по основам современной физики для средней школы, посвященную вопросам термодинамики и молекулярной физики. Пособие предназначено для школьников, углубленно изучающих физику, а также для абитуриентов; может использоваться и в качестве настольной книги для учителей физики, поскольку в нем есть всё — от определений физических величин и формулировок законов до математических выводов достаточно сложных вопросов; от несложных примеров до олимпиадных задач, многие из которых решены.

Настоящая книга — это плод 40-летнего преподавания физики в классах основного и физико-математического профилей. Многое в существовавших ранее и нынешних учебниках авторов не устраивает, поэтому они пытаются растолковать трудные и спорные моменты сами, исключить двойные и тройные толкования одного и того же. Впервые в школьном учебнике авторы разработали методику изложения фазы колебаний и циклической частоты методом векторных диаграмм, который широко применяется при изучении механических и электромагнитных колебаний в вузах и инженерной практике, но в школе до сих пор излагался чисто формально, что затрудняло понимание учащимися этих важных тем.

Теоретический материал изложен на глубоком научном уровне с единым подходом к формулировкам, конкретно и четко, что существенно сокращает расстояние от теории до практики (решения задач) и избавляет учащихся от необходимости впоследствии переучиваться в вузах.

По ходу изложения теоретического материала постоянно разбирается большое количество задач, это помогает ещё глубже понять теорию. А это необходимо, чтобы ещё успешнее решать другие стандартные и нестандартные задачи, и не только по физике, ибо развитый мозг в одной области знаний может легко переключаться на решение задач других областей.

Цель авторов — помочь учащимся усвоить правильно физические понятия и законы, иллюстрируя их проявление на примерах, и научиться переводить нестандартные задачи в стандартный вид и решать их уже как простые задачи.

Представленный курс уникален по глубине, полноте и систематичности изложения теоретического и практического материала. Книга написана практикующим учителем физики, подготовившим десятки призеров Всероссийской олимпиады, в соавторстве с его сыном, магистром МФТИ, который, будучи школьником, три года подряд становился призером и победителем заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике. Весь материал в пособии преподнесен так, чтобы раскрыть физическую сущность происходящих явлений и чтобы от теории до практики решения задач был всего один шаг.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *Н. С. Алексеева*;

PhD *А. Е. Дементьев*, Yale University USA; д-р физ.-мат. наук, проф. МФТИ *С. М. Козел*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Зак. № 3352.

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Печатное дело».

142300, МО, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

ISBN 978-5-9710-3783-5


© ЛЕНАНД, 2016




Оглавление

Используемые обозначения физических величин.....	6
--	---


Глава 1. Основы молекулярно-кинетической теории вещества..... 7



Введение	7
§ 1. Молекулы.....	10
§ 2. Количество вещества.....	12
§ 3. Движение молекул в твёрдом теле, жидкости и газе.....	19
§ 4. Распределение Больцмана частиц в силовом поле.....	22
§ 5. Броуновское движение	25
§ 6. Средняя длина свободного пробега, частота столкновений молекул	27
§ 7. Перемещение молекул в газах при диффузии	29
§ 8. Диффузия.....	31
§ 9. Идеальный газ. Основное уравнение состояния идеального газа	32
 Упражнения	35

Глава 2. Температура. Газовые законы..... 37

§ 10. Тепловое равновесие. Температура	37
§ 11. Абсолютная температура.....	39
§ 12. Абсолютный нуль температуры. Определение температуры.....	42
§ 13. Абсолютная температура и число степеней свободы.....	43
§ 14. Измерение скоростей газовых молекул.....	45
§ 15. Уравнение состояния идеального газа	47
§ 16. Изопроцессы.....	50
§ 17. Примеры решения задач на газовые законы.....	53
 Упражнения	58


Глава 3. Первое начало термодинамики 66

§ 18. Внутренняя энергия	66
§ 19. Способы изменения внутренней энергии тела	69
§ 20. Количество теплоты	71
§ 21. Работа в термодинамике	75
§ 22. Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии).....	78
§ 23. Применение первого начала термодинамики к различным процессам	82
§ 24. Работа при адиабатном процессе	87
§ 25. Уравнение Пуассона.....	88
§ 26. Теплоёмкость твёрдых тел.....	92
§ 27. Теплопроводность. Поток тепла	93
§ 28. Теплопроводность вещества в различных агрегатных состояниях.....	96
 Упражнения	99

Глава 4. Тепловые машины.....	108
§ 29. Принцип действия тепловых двигателей	108
§ 30. Коэффициент полезного действия (КПД) теплового двигателя.....	109
§ 31. Цикл Карно. КПД идеального теплового двигателя	111
§ 32. КПД реальных тепловых машин.....	113
§ 33. Устройство и принцип действия тепловых машин	114
§ 34. Холодильные машины.....	121
 Упражнения	130
 Глава 5. Энтропия. Второе и третье начала термодинамики	 134
§ 35. Квазистатистические процессы. Обратимые процессы	134
§ 36. Микро- и макросостояния термодинамической системы.....	135
§ 37. Термодинамика и статистическая физика. Статистический вес.....	138
§ 38. Энтропия.....	139
§ 39. Второе начало термодинамики. Флуктуации	142
§ 40. Энтропия идеального газа.....	144
§ 41. Теоремы Карно. КПД цикла Карно.....	145
§ 42. Третье начало термодинамики (теорема Нернста).....	147
§ 43. Получение и применение низких температур	147
 Упражнения	150
 Глава 6. Агрегатные состояния вещества, фазовые переходы. Влажность	 155
§ 44. Агрегатные состояния вещества	155
§ 45. Фазовые переходы. Диаграмма состояния вещества	156
§ 46. Испарение и конденсация	158
§ 47. Кипение.....	161
§ 48. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса	163
§ 49. Изотермы реального газа. Критическое состояние вещества	166
§ 50. Вода – необычайное вещество	170
§ 51. Влажность. Методы измерения влажности.....	172
§ 52. Влажность воздуха.....	174
§ 53. Влага в воздухе. Распределение воды на Земле	177
 Упражнения	181
 Глава 7. Твёрдые тела.....	187
§ 54. Типы кристаллических решёток	187
§ 55. Пространственная решётка	190
§ 56. Анизотропия. Монокристаллы. Поликристаллы. Аморфные тела.....	192
§ 57. Взаимодействие молекул	194
§ 58. Закон Гука.....	196
§ 59. Диаграмма растяжения. Пластичность и хрупкость. Запас прочности	199
§ 60. Тепловое расширение твёрдых тел и жидкостей	202
§ 61. Получение и применение кристаллов.....	206
§ 62. Дефекты в кристаллах. Способы повышения прочности твердых тел.....	207

§ 63. Физические свойства металлов	209
§ 64. Жидкие кристаллы	211
§ 65. Кристаллы и жизнь	212
 Упражнения	213

Глава 8. Поверхностное натяжение 216

§ 66. Газ и жидкость.....	216
§ 67. Поверхностная энергия	217
§ 68. Сила поверхностного натяжения	219
§ 69. Примеры решения задач на поверхностное натяжение.....	222
§ 70. Явления смачивания и несмачивания.....	225
§ 71. Капиллярные явления.....	228
 Упражнения	232

Глава 9. Экспериментальные задания..... 235

§ 72. Измерение физических величин.....	235
§ 73. Пример выполнения экспериментального задания.....	240
§ 74. Газовые законы	242
§ 75. Свойства жидкостей	245
§ 76. Свойства твёрдых тел	249
§ 77. Термодинамика	252

Глава 10. Задачи российских физических олимпиад 256

§ 78. МКТ. Тепловое расширение. Температура. Уравнение состояния идеального газа	257
§ 79. Фазовые переходы. Влажность воздуха. Поверхностное натяжение. Упругие деформации твёрдых тел	262
§ 80. Работа, теплота, внутренняя энергия. I начало термодинамики. Поток тепла.....	264
§ 81. Уравнение теплового баланса. Поток тепла	271
§ 82. Тепловые машины. Холодильник	281

Приложение. Основные формулы 288

Используемые обозначения физических величин

Физическая величина	Условное обозначение	Единица измерения
Температура:		
по шкале Цельсия	t	°C (градус Цельсия)
по шкале Кельвина	T	K (кельвин)
Количество вещества	ν (ню)	моль (моль)
Число молекул	N	– (безразмерная)
Постоянная Авогадро	N_A	1/моль, моль ⁻¹
Масса молекул	m_0	кг, а.е.м.
Относительная молекулярная масса	M_r	– (безразмерная)
Молярная масса	M	кг/моль
Концентрация молекул	n	м ⁻³ , 1/м ³
Плотность вещества	ρ (ро)	кг/м ³
Внутренняя энергия	U	Дж (джоуль)
Число степеней свободы	i	– (безразмерная)
Работа	A	Дж (джоуль)
Количество теплоты	Q	Дж (джоуль)
Поток тепла	Φ	Вт (ватт)
Плотность потока тепла	j	Вт/м ²
Теплопроводность	κ (каппа)	Вт/(м·K)
Теплоёмкость тела	C_t	Дж/K
Теплоёмкость удельная	c	Дж/(кг·K)
Теплоёмкость молярная	C	Дж/(моль·K)
Удельная теплота плавления	λ (лямбда)	Дж/кг
Удельная теплота парообразования	L	Дж/кг
Удельная теплота сгорания	q	Дж/кг
КПД цикла (тепловой машины)	η (эта)	в % от 100 или в частях от 1
Хладопроизводительность	q	Вт
Холодильный коэффициент	ξ (кси)	– (безразмерная)
Отопительный коэффициент	Ψ (пси)	– (безразмерная)
Сила	F	Н (ньютон)
Импульс	P	кг·м/с
Давление	p	Па (паскаль)
Механическое напряжение:		
растяжения, сжатия	σ (сигма)	Па (паскаль)
сдвига	σ_τ	Па (паскаль)
Модуль Юнга	E	Па (паскаль)
Модуль сдвига	G	Па (паскаль)
Абсолютное удлинение	Δl	м (метр)
Относительное удлинение	ε	в % от 100 или в частях от 1
Постоянная Больцмана	k	Дж/K
Универсальная газовая постоянная	R	Дж/(моль·K)
Поверхностное натяжение	σ	Н/м или Дж/м
Краевой угол	θ (тэта)	рад (радиан) или ° (градус)
Абсолютная влажность воздуха	ρ	кг/м ³
Относительная влажность воздуха	ϕ	в % от 100 или в частях от 1
Энтропия	S	Дж/K
Мощность нагревателя	P	Вт

Посвящается замечательным учителям:
Евгению Захаровичу Бондаренко и
Тамаре Васильевне Александровой

Глава 1. Основы молекулярно-кинетической теории вещества

*Во всём мне хочется дойти до самой сути.
В работе, в поисках пути, в сердечной смуте.
До сущности протекших дней, до их причины,
До оснований, до корней, до сердцевины.
Всё время схватывая нить судеб, событий,
Жить, думать, чувствовать, любить,
свершать открытия.*

Борис Пастернак

Введение

Все предметы, с которыми человек сталкивается в быту, технике, при проведении физических экспериментов, — это так называемые макроскопические тела. Они состоят из громадного числа микроскопических элементов — атомов, молекул, а те, в свою очередь, — из элементарных частиц: протонов, нейтронов, электронов.

Представления о дискретном строении вещества были известны ещё в древнем Китае и Индии. Предположение о том, что любое вещество состоит из мельчайших неделимых частиц (атомов), высказано около 2500 лет назад древнегреческими философами Левкиппом и Демокритом. По их представлениям, все вещества возникают в результате соединения атомов. Различия в свойствах тел объясняются тем, что тела состоят из разных атомов, и тем, что одинаковые атомы по-разному соединяются между собой в пространстве.



Демокрит

(ок. 460–370 гг. до н.э.)

В основе **молекулярно-кинетической теории (МКТ)** вещества лежат три основных положения:

1) все вещества состоят из частиц: атомов, молекул и ионов и др.;

- 2) молекулы находятся в непрерывном беспорядочном (хаотическом) движении (поступательном, колебательном, вращательном) по всевозможным направлениям;
- 3) молекулы взаимодействуют между собой силами притяжения и отталкивания на малых расстояниях (одного порядка с размерами простых молекул).

Первые значительные успехи в развитии атомно-молекулярной гипотезы строения вещества были достигнуты в кинетической теории газов. В её основу были положены следующие экспериментальные факты:

1. Газы способны к неограниченному расширению и занимают любой предоставленный им объём.

2. Давление газа на стенки сосуда обусловлено ударами хаотически движущихся молекул. Смесь газов оказывает давление на стенки сосуда, равное сумме давлений каждого из газов, взятых в отдельности, т.е. каждый газ оказывает на стенки сосуда независимое действие:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$



Джон Дальтон
(1766–1844)

Это выражение называется **законом Дальтона**, который был открыт в 1802 г. английским химиком и физиком Джоном Дальтоном.

3. При постоянной температуре давление данной массы газа обратно пропорционально его объёму:

$$pV = \text{const} \quad \text{или} \quad p = \frac{\text{const}}{V} \quad \text{при} \quad T = \text{const}.$$

Этот закон (закон Бойля–Мариотта) открыл в 1667 г. английский химик, физик и философ Роберт Бойль (1627–1691) и независимо от него французский физик Эдм Мариотт (1620–1684) в 1676 г.

4. Степень нагретости тела характеризуется температурой, значение которой определяется интенсивностью хаотического движения молекул в теле. При постоянном объёме данной массы любого газа его давление находится в прямой пропорциональной зависимости от температуры

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad V = \text{const}.$$

где t – температура по шкале Цельсия, p_0 – давление при $t = 0^\circ\text{C}$, α – термический коэффициент давления, одинаковый для всех газов и равный

$$\alpha = \frac{1}{273,15 \text{ K}}.$$

Этот закон (закон Шарля) открыл в 1787 г. французский физик Жак Александр Цезар Шарль (1746–1823).

5. При постоянном давлении данной массы любого газа его объём прямо пропорционален температуре

$$V=V_0(1+\alpha t) \text{ при } p=\text{const},$$

где V_0 – объём газа при $t=0^\circ\text{C}$, α – термический коэффициент объёмного расширения, одинаковый для всех газов и равный

$$\alpha = \frac{1}{273,15 \text{ К}}.$$

Этот закон (закон Гей-Люссака) открыт в 1802 г. французским физиком и химиком Жозефом Луи Гей-Люссаком (1778–1850).

Объём, давление и температура являются важнейшими параметрами состояния жидкости и газа.

Единицы объёма. Основной единицей измерения объёма в СИ является 1 м^3 и производные от него 1 дм^3 , 1 см^3 и т.д. Есть много других внесистемных единиц, например:

один литр, $1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3$;

один баррель (бочка), $1 \text{ б (нефтяной)} \approx 159 \text{ л}$;

одна пинта (в Великобритании), $1 \text{ п} = 1/8 \text{ галлона} = 0,568 \text{ л}$;

$1 \text{ ведро} = 10 \text{ штофов} = 12,3 \text{ л и др.}$

Единицы давления. Основной единицей давления является *паскаль*. Один паскаль – давление, которое создаёт сила 1 Н , равномерно распределённая по поверхности площадью 1 м^2 :

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}.$$

Одной из самых известных единиц измерения давления является *миллиметр ртутного столба* (мм рт. ст.) или *Тор*. Эта единица названа в честь итальянского физика и математика Эванджелисты Торричелли, впервые измерившего атмосферное давление

$$1 \text{ мм рт. ст.} \equiv 1 \text{ Тор}, \quad 1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ Па}.$$

В России предпочтение отдаётся наименованию мм рт.ст. Наименование Тор используется редко, а жаль: во-первых, «Тор» короче писать, а во-вторых, дань уважения к ученому, первым измерившему атмосферное давление, тем более что это обозначение принято в мировой науке.

Как известно, нормальное атмосферное давление на уровне моря равно

$$p_a = 760 \text{ мм рт.ст.} \equiv 760 \text{ Тор}.$$

Это значит, что столбик ртути высотой 760 мм создаёт такое же давление, как и весь столб земной атмосферы (в среднем на уровне моря).

Применяется также *миллиметр водяного столба*:

$$1 \text{ мм вод. ст.} = 9,81 \text{ Па}, \quad 1 \text{ мм рт.ст.} = 13,6 \text{ мм вод. ст.}$$

Имеются и другие единицы давления, например бар (от греч. *baros* – тяжесть)

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}.$$



Эванджелиста
Торричелли
(1608–1647)

Очень распространенной в измерительных приборах была единица давления *техническая атмосфера*, ат.

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 9,81 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

где 1 кгс – килограмм-сила, численно равная силе притяжения к Земле тела массой 1 кг, расположенного на её поверхности.

В качестве единицы измерения давления также используется *физическая атмосфера*, атм.

$$1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.}$$

Температурные шкалы. Для измерения температуры существует несколько различных шкал и единиц температуры.

В 1968 г. была принята международная практическая шкала температур МПТШ-68. Различают международную практическую шкалу Кельвина $T(\text{K})$ (единица измерения температуры этой шкалы называется кельвин) и международную практическую шкалу Цельсия $t(^{\circ}\text{C})$, которые связаны соотношением:

$$T = t + 273,15 \text{ K}.$$

В некоторых странах используются и другие температурные шкалы*:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) Фаренгейта ($^{\circ}\text{F}$): | $T(^{\circ}\text{F}) = 32 + 1,8 \cdot t$; |
| 2) Реомюра ($^{\circ}\text{R}$): | $T(^{\circ}\text{R}) = 0,8 \cdot t$; |
| 3) Ренкина ($^{\circ}\text{Ra}$): | $T(^{\circ}\text{Ra}) = 491,67 + 1,8 \cdot t$, или $T(^{\circ}\text{Ra}) = 1,8 \cdot T$. |

§ 1. Молекулы

Первое положение МКТ гласит, что *все вещества состоят из молекул*. Что же такое молекула? Молекула в переводе с лат. *moles* – масса, с уменьшительным суффиксом *cula*, т.е. буквально молекула – «массочка» (маленькая масса).



Михаил Васильевич
Ломоносов
(1711–1765)



Джеймс Прескотт
Джоуль (1818–1889)



Жан Батист
Перрен (1870–1942)

* Фаренгейт Габриель Даниель (1686–1736) – немецкий физик, изготовил спиртовой (1709) и ртутный (1714) термометры. Предложил температурную шкалу. Реомюр Рене Антуан (1683–1757) – французский естествоиспытатель, предложил (1730) температурную шкалу. Ранкин (Ренкин) (Rankine) Уильям Джон Макуори (1820–1872) – шотландский инженер и физик, один из создателей технической термодинамики.

Представление о молекулах возникло в XVIII в. Например, в 1745 г. Михаил Васильевич Ломоносов дал объяснение явлений теплопроводности, плавления, испарения на основе представлений о природе теплоты как вращательном движении частиц, из которых состоят тела. Согласно Ломоносову, температура тела связана с вращательным движением атомов-корпускул, а не с наличием некоего вещества – теплорода**. В 1798 г. английский политический деятель, естествоиспытатель, граф Бенджамин (Томпсон) Румфорд (1753–1814) исследовал выделение теплоты при сверлении пушечных стволов и пришёл к выводу о несостоятельности теплородной гипотезы: «Я должен признать, что результаты всех моих экспериментов не приводят ни к какому иному выводу..., что теплота не что иное, как колебательное движение частиц тела».

Английский физик Джеймс Прескотт Джоуль в 1852 г. уточнил модель, предложенную М. В. Ломоносовым, приписав атомам поступательное движение. Скорости всех молекул он считал одинаковыми. На этой основе он вывел теоретически закон Бойля–Мариотта, вычислил скорость теплового движения молекул, определил температуру абсолютного нуля. В 1856 г. немецкий физик Август Карл Крёниг (1822–1879), рассматривая газ как совокупность хаотически движущихся упругих шариков, пришёл к выводу, что кинетическая энергия молекул пропорциональна температуре, отсчитанной от абсолютного нуля. В 1857 г. немецкий физик Рудольф Юлиус Эммануэль Клаузиус (1822–1888) дал первое систематическое изложение кинетической теории газов. Он ввел понятие о средних величинах, впервые вычислил давление газа на стенки сосуда и среднюю длину свободного пробега молекул.

Прямое экспериментальное подтверждение существования молекул провел французский физик и физико-химик Жан Батист Перрен при изучении броуновского движения в 1908–1911 гг.

Благодаря работам этих и многих других ученых сформировалось понятие молекулы.

Молекула – наименьшая устойчивая частица вещества, обладающая его основными химическими и физическими свойствами. Молекула состоит из атомных ядер и электронов, связанных между собой электромагнитными силами. Молекулой можно также считать систему атомов, связанных друг с другом различными связями.

Число атомов в молекуле составляет от одного (инертные газы гелий He, неон Ne) до сотен и тысяч (некоторые белки, витамины, гормоны).

Молекулы вещества в газах, жидкостях и молекулярных кристаллах сохраняют свою индивидуальность. В расплавах и ионных кристаллах молекулы, как правило, утрачивают это свойство, так как каждый атом в них связан с большим числом окружающих его атомов.

** Теплород – невесомая материя, присутствующая в каждом теле и являющаяся причиной явлений. Представление о теплороде, распространенное в XVIII – начале XIX веков, оказалось ошибочным, что было доказано в середине XIX века.

Форма молекул определяется пространственным расположением атомов в них, которое в свою очередь зависит от длин связей между атомами и углов между связями (валентных углов). Длина связи – это расстояние между ядрами соседних атомов. Связь между одними и теми же атомами укорачивается с ростом её кратности. Например, типичные величины длин связей C–C, C=C и C≡C соответственно равны 1,50 Å; 1,35 Å и 1,20 Å*.

Длина связи зависит и от её химического окружения в молекуле. Например, длина связи C–H в группе –CH₃ составляет около 1,1 Å, а в группах =CH₂ и ≡CH 1,08 Å и 1,05 Å соответственно.

Валентные углы между связями бывают самые разные, причём углы между одними и теми же связями в различных молекулах могут быть различными, хотя определенные закономерности существуют и для этих углов. Они определяются особенностями взаимодействия электронов, участвующих в связях.

§ 2. Количество вещества

Количество вещества. Для того чтобы определять число молекул в теле, вводится физическая величина – количество вещества. Количество вещества в теле считается тем больше, чем больше в нём молекул. Условились определять его отношением числа молекул в данном теле к постоянной Авогадро и обозначать буквой ν (ню):

$$\nu = \frac{N}{N_A}, \quad [\nu] = \text{моль}. \quad (1)$$

Постоянная Авогадро N_A равна числу атомов в 12 г (0,012 кг) изотопа углерода ¹²C

$$N_A = \frac{0,012 \text{ (кг)}}{m_{0C}}, \quad (2)$$

где m_{0C} – масса одного атома углерода.

В опытах Перрена в 1911 г. получено, что

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$



Амедео Авогадро
(1776–1856)

Количество вещества измеряется в молях. Если количество вещества в теле равно 1 молью, то это значит, что в нём столько же молекул, сколько атомов в 12 г углерода ¹²C, т. е. $6,022 \cdot 10^{23}$ штук.

Количество вещества – это скалярная величина, определяемая числом молекул в теле. Количество вещества равно отношению числа молекул в теле к постоянной Авогадро.

* 1 Å (ангстрем) = 10^{-10} м.

Физическая величина «*количество вещества*» введена в качестве одной из основных величин в Международную систему единиц в 1971 г. решением XIV Генеральной конференции по мерам и весам в Париже.

Масса тела. Масса молекулы. Масса тела представляет собой сумму масс молекул этого тела. Как правило, тело состоит из равномерной смеси нескольких изотопов*.

Под массой молекулы m_0 понимают среднюю массу молекулы, вычисляемую по формуле:

$$m_0 = \frac{m_{01}N_1 + m_{02}N_2 + \dots + m_{0n}N_n}{N}$$

где $N=N_1+N_2+\dots+N_n$ – число молекул в теле,
 m_{01}, m_{02}, \dots – масса молекулы первого, второго и т.д. изотопов,
 N_1 – число молекул первого изотопа в теле,
 N_2 – число молекул второго изотопа в теле и т. д.

Масса тела равна произведению средней массы молекулы и числа молекул в теле

$$m = m_0 N \quad (3)$$

Масса тела m и масса молекулы m_0 измеряются в кг (г, мг и т.п.). Для измерения масс элементарных частиц, атомов, молекул, кроме единицы СИ, кг и производных от неё г, мг и др., применяется так называемая *атомная единица массы*, кратко а.е.м.

Атомная единица массы равна 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C .

$$1 \text{ а.е.м.} = \frac{1}{12} m_{0\text{C}} \quad \text{или} \quad 1 \text{ а.е.м.} = 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Например, масса молекулы изотопа углерода ^{12}C равна 12 а.е.м., или в килограммах – $19,92672 \cdot 10^{-27}$ кг.

$$m_{0\text{C}} = 12 \text{ а.е.м.} = 12 \cdot 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 19,92672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Атомная единица массы примерно равна массе одного нуклона (протона или нейтрона).

* Атомы, содержащие одинаковое количество протонов в ядре, одинаковы по химическим свойствам и занимают одно место в таблице Менделеева. Но при этом число нейтронов в ядре может быть различным. Такие атомы обладают различными физическими свойствами и называются изотопами.

Молярная масса. Кроме массы конкретного тела, полезно знать какова масса одного моля вещества, из которого состоит тело.

Молярная масса равна массе всех молекул тела, взятого в количестве одного моля. Чтобы найти молярную массу, нужно среднюю массу одной молекулы умножить на постоянную Авогадро:

$$M = m_0 N_A \quad (4)$$

Размерность молярной массы – килограмм на моль:

$$[M] = \text{кг/моль}.$$

Комбинируя (1), (3) и (4), получим, что количество вещества можно определить, разделив массу тела на его молярную массу:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{N \cdot m_0}{N_A \cdot m_0} = \frac{m}{M}, \quad \boxed{\nu = \frac{m}{M}} \quad (5)$$

Количество молекул в теле можно определить следующим образом:

$$\boxed{\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}} \Rightarrow \boxed{N = \frac{m}{M} \cdot N_A}$$

Относительная молекулярная (атомная) масса. А как определить молярную массу? Для решения этой задачи введем понятие *относительной молекулярной (атомной) массы*, или кратко – *молекулярной массы (атомной массы)*.

Молекулярная масса (атомная масса) – это относительное значение массы молекулы, равное отношению средней массы молекулы данного вещества к одной двенадцатой массы атома изотопа углерода ^{12}C .

Молекулярная (атомная) масса показывает, во сколько раз масса данной молекулы (атома) больше одной двенадцатой массы атома углерода ^{12}C . Относительную молекулярную и атомную массы обозначим M_r (r – сокращение от лат. *relativas* – относительный).

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12} m_{\text{ос}}} \quad (6)$$

Как видно из формулы (6), относительная молекулярная (атомная) масса является безразмерной величиной.

В таблице Менделеева указана средняя атомная масса отдельных химических элементов.

У многих элементов она далека от целочисленного значения, что обусловлено в основном наличием различных изотопов данного элемента.

Для определения молекулярной массы нужно сложить атомные массы всех элементов, составляющих молекулу. Например, в случае серной кислоты H_2SO_4 молекулярная масса $M_r = 2 \cdot 1 + 32 + 4 \cdot 16 = 98$.

Из определений молекулярной (атомной) массы и определения 1 а.е.м. видно, что масса молекулы, выраженная в а.е.м., численно равна (безразмерной) молекулярной массе.

$$m_0 (\text{а.е.м.}) = M_r$$

или

$$m_0 = M_r \cdot 1 \text{ а.е.м.}$$

Пример 1. Атомная масса золота приблизительно равна 197. Найти массу атома золота в а.е.м. и в кг.

➤ **Решение.** $m_0 = M_r \cdot 1 \text{ а.е.м.}$ $m_0 = 197 \cdot 1 \text{ а.е.м.} = 197 \text{ а.е.м.}$

Чтобы получить массу атома золота в кг, нужно атомную единицу массы выразить в кг и подставить в ту же формулу

$$m_0 = 197 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3,27 \cdot 10^{-25} \text{ кг.} \quad \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Масса атома золота равна 197 а.е.м. или $3,27 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$.

Соотношение между молярной массой и молекулярной массой. Комбинируя (2), (4) и (6), получим:

$$\begin{cases} N_A = \frac{0,012 (\text{кг})}{m_{\text{OC}}}; \\ M = m_0 \cdot N_A; \\ m_0 = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{OC}} \cdot M_r; \end{cases} \Rightarrow M = \frac{1}{12} \cdot m_{\text{OC}} \cdot M_r \cdot \frac{0,012 \text{ кг}}{m_{\text{OC}}}.$$

$$\Rightarrow M = M_r \cdot 10^{-3} (\text{кг / моль}) \quad (7)$$

Если молярную массу измерять в г/моль или кг/кмоль, то нетрудно увидеть, что в этих случаях молярная масса численно равна молекулярной массе. Докажите сами, что

$$M (\text{г/моль, кг/кмоль}) = M_r.$$

Пример 2. Оценить количество вещества и число молекул в 1 кг воды и в теле человека массой 64 кг.

➤ **Решение.** Согласно формулам (5) и (7): $\nu = \frac{m}{M}$ и $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Учитывая, что для воды (H_2O) относительная молекулярная масса равна $M_r=2\cdot 1+16=18$, получим:

$$M=18\cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \quad \nu = \frac{1 \text{ кг}}{18\cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}} = 55,5 \text{ моль}.$$

Из $\nu = \frac{N}{N_A}$ следует $N=\nu\cdot N_A$, $N=55,5 \text{ моль} \cdot 6,02\cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}=3,35\cdot 10^{25}$.

Итак, в одном килограмме воды количество вещества равно 55,5 моль, а число молекул $3,35\cdot 10^{25}$ штук.

Будем считать, что, в первом приближении, человек состоит из воды, тогда количество вещества в нашем четырехпудовом юноше

$$\nu_q=64\cdot 55,5=3552 \text{ моль} \approx 3,55 \text{ кмоль}.$$

Число молекул в человеке:

$$N_q=\nu_q\cdot N_A, \quad N_q=3,55\cdot 10^3\cdot 6,02\cdot 10^{23}=2,14\cdot 10^{27} \approx 2\cdot 10^{27}.$$

✓ **Ответ.** В человеке $2\cdot 10^{27}$ молекул!

Примечание. Как понять и прочувствовать это громадное число? В нашем теле находятся десятки триллионов клеток! А каждая клетка – это мир, кишаший десятками триллионов крошечных атомных групп – молекул! И всё это невообразимое число молекул находится в непрерывном, согласованном движении и взаимодействии!

Концентрация молекул. Для того чтобы характеризовать распределение по объёму молекул (атомов или других частиц), содержащихся в теле, вводится величина *концентрация молекул*.

Концентрация молекул показывает какое количество молекул содержится в единице объёма. При равномерном распределении молекул по объёму концентрация равна отношению числа молекул в теле к его объёму.

$$n = \frac{N}{V}.$$

Единица измерения концентрации:

$$[n] = \frac{\text{шт}}{\text{м}^3} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3}.$$

✎ **Пример 3.** Определить концентрацию молекул чистой воды при 15°C . Плотность воды при температуре 15°C равна $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$.

➔ **Решение.** Плотность тела равна отношению массы тела к его объёму:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Учитывая, что $m=m_0\cdot N$, получим:

$$\rho = \frac{m_0 \cdot N}{V}, \text{ где } \frac{N}{V} = n; \Rightarrow \boxed{\rho = m_0 n}$$

Из определения молярной массы $M = m_0 \cdot N_A$ найдём массу молекулы:

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

Подставляя её в выражение для плотности найдём:

$$n = \frac{\rho N_A}{M}; \quad n = \frac{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

✓ **Ответ.** При температуре 15°C в 1 м^3 чистой воды находятся $3,34 \cdot 10^{28}$ молекул, т. е. концентрация молекул воды равна $3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Примечание. По ходу решения задачи мы получили способ вычисления концентрации молекул в теле.

Чтобы найти концентрацию молекул необходимо плотность тела разделить на среднюю массу молекулы:

$$\boxed{n = \frac{\rho}{m_0}}$$

Пример 4. Оценить размер молекулы воды.

→ **Решение.** Будем считать, что молекулы воды расположены вплотную друг к другу, находясь как бы в узлах кубической кристаллической решетки (рис. 1). Тогда размер молекулы можно вычислить как кубический корень из объёма V_0 , приходящегося на одну молекулу:

$$V_0 = d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{V_0}.$$

Объём, приходящийся на одну молекулу, можно вычислить, разделив весь объём на число молекул в теле:

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}.$$

Тогда диаметр одной молекулы:

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{1}{n}}.$$

Учитывая результат предыдущего примера, получим:

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{1}{3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}}} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3,1 \text{ Å}.$$

✓ **Ответ.** Диаметр молекулы воды равен $3,1 \text{ Å}$.

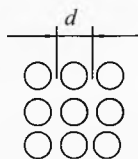


Рис. 1. Размер молекулы

Пример 5. Концентрация молекул воздуха при нормальных условиях равна $2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (число Лошмидта). Определить среднее расстояние между молекулами воздуха и сравнить с размером молекулы азота, равным $3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Решение. Мысленно распределим молекулы воздуха равномерно в пространстве (рис. 2) и воспользуемся для решения формулой, полученной в предыдущем примере:

$$l = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}}} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 33 \text{ Å}.$$

Ответ. Среднее расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях равно $l = 33 \text{ Å}$, что в 11 раз больше размеров самих молекул.

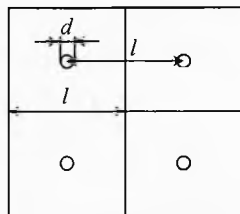


Рис. 2. Концентрация молекул воздуха

Пример 6. Вычислить массу молекулы азота, если $M_r = 28$.

Решение. I способ. Из определения молярной массы $M = m_0 \cdot N_A$ следует $m_0 = \frac{M}{N_A}$. С учетом $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ получим:

$$m_0 = \frac{M_r \cdot 10^{-3} (\text{кг/моль})}{N_A}; \quad m_0 = \frac{28 \cdot 10^{-3} (\text{кг/моль})}{6,02 \cdot 10^{23} (\text{моль}^{-1})} \approx 4,6 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

II способ. $m_0 = M_r \cdot 1 \text{ а.е.м.}$, $m_0 = 28 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 4,6 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Ответ. Масса одной молекулы азота равна 28 а.е.м или $4,6 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Пример 7. Атмосфера на Венере состоит по числу молекул на 97% из углекислого газа, на 2% – из молекулярного азота и на 1% – из паров воды. Найти среднюю молекулярную массу венерианской атмосферы.

Решение. Средняя масса молекулы: $m_0 = \frac{m_{01}N_1 + m_{02}N_2 + m_{03}N_3}{N}$.

Умножим это уравнение на N_A :

$$m_0 \cdot N_A = (m_{01} \cdot N_A) \cdot \frac{N_1}{N} + (m_{02} \cdot N_A) \cdot \frac{N_2}{N} + (m_{03} \cdot N_A) \cdot \frac{N_3}{N}.$$

По определению молярная масса $M = m_0 \cdot N_A$, тогда средняя молярная масса смеси газов:

$$M = M_1 \cdot \frac{N_1}{N} + M_2 \cdot \frac{N_2}{N} + M_3 \cdot \frac{N_3}{N}.$$

$$M = 44 \cdot 0,97 + 28 \cdot 0,02 + 18 \cdot 0,01 \approx 43,4 \text{ г/моль}.$$

Учитывая, что молекулярная масса M_r численно равна молярной массе, выраженной в г/моль, получим: $M_r=43,4$. ←

✓ **Ответ.** Молекулярная масса венерианской атмосферы $M_r=43,4$. Средняя масса молекулы венерианской атмосферы больше массы атома водорода примерно в 43,4 раза.

§ 3. Движение молекул в твёрдом теле, жидкости и газе

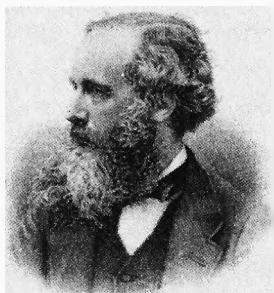
Характер движения молекул зависит от теплового и агрегатного состояния вещества.

В твёрдых телах молекулы находятся в узлах кристаллической решетки, совершая колебательные движения около положений равновесия с частотой 10^{12} – 10^{13} Гц, и очень редко покидают свои места. С повышением температуры вероятность переходов (скачков) увеличивается. Твёрдые тела сохраняют свою форму потому, что перескоки происходят достаточно редко.

В аморфных телах из-за больших нарушений в кристаллической решетке молекулы значительно чаще совершают перескоки, причём с повышением температуры их интенсивность многократно возрастает. Это приводит к текучести. Температура, при которой аморфное тело становится текучим, существенно зависит от химического состава вещества. Например, битум заметно течет уже при температуре в несколько десятков градусов по шкале Цельсия, в то время как стекло – при нескольких сотнях °С.

В жидких телах молекулы совершают колебания около положений равновесия с частотой 10^{12} – 10^{13} Гц.

Но время от времени они перескакивают на появляющиеся рядом свободные места. Частота перескоков при комнатной температуре в десятки раз меньше, чем частота колебаний. Под действием внешней силы перескоки молекул происходят преимущественно в направлении действия силы, поэтому жидкость течет. Чем выше температура жидкости, тем её текучесть больше из-за увеличения частоты перескоков молекул.



Джеймс Клерк Максвелл
(1831–1879)

В газах одноатомные молекулы совершают беспорядочное поступательное движение. Двухатомные совершают ещё и вращательное движение в двух плоскостях. Многоатомные молекулы, состоящие из трёх и более атомов, движутся поступательно и могут вращаться в трёх плоскостях.

При одной и той же температуре молекулы одного и того же вещества движутся с разными скоростями в данный момент времени. Небольшая доля молекул движется со скоростью, близкой к нулю. Также незначительная доля молекул движется с большой скоростью. Скорость основного количества молекул лежит в относительно небольшом интервале скоростей.

Распределение молекул по скоростям было впервые получено английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом в 1860 г. и носит его имя.

По оси абсцисс откладывается модуль скорости молекул. По оси ординат – доля молекул, $\Delta N/N$, имеющая разницу в скорости в пределах 1 м/с. Эта доля молекул носит название функции распределения молекул

$$F(v) \approx \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta v}; \quad \text{более точно:} \quad F(v) = \frac{dN}{N \cdot dv}.$$

Например, если при скорости молекул 400 м/с функция распределения F имеет значение 0,002, то это значит, что в этом газе доля молекул, скорости которых находятся в интервале от 400 м/с до 401 м/с составляет 0,2% всех молекул.

Распределение Максвелла по скоростям имеет вид:

$$F(v) = A \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}},$$

где коэффициент $A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}$, m_0 – масса одной молекулы, v – скорость молекулы, T – абсолютная температура газа, k – постоянная Больцмана.

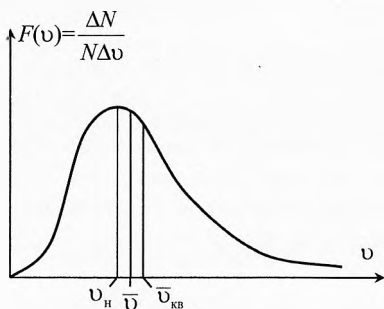


Рис. 3. Распределение Максвелла по скоростям

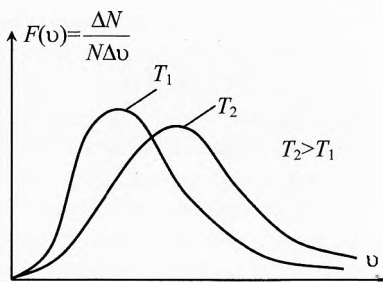


Рис. 4. Распределение Максвелла при различных температурах

* dN – бесконечно малое по сравнению с N количество молекул, скорости которых находятся в интервале от v до $v+dv$. Поскольку число молекул в теле огромно, то dN хоть и мало, по сравнению с N , но во много раз больше 1.

Ясно, что при $v=0$ и $v=\infty$ функция распределения равна нулю. Это означает, что при любой температуре нет неподвижных молекул и молекул с бесконечно большой скоростью. При малых скоростях, с возрастанием скорости, функция плавно возрастает, то есть возрастает доля молекул, имеющих всё большую скорость (рис. 3). А начиная с так называемой наиболее вероятной скорости, функция распределения плавно убывает. Убывание функции распределения с дальнейшим ростом скорости означает уменьшение доли молекул, имеющих всё большую скорость.

На рис. 4 изображено распределение молекул по скоростям для двух температур, причём $T_2 > T_1$. При температуре T_2 доля более быстрых молекул больше, а медленных меньше, чем при температуре T_1 . Площадь под графиком функции распределения при любой температуре равна единице. Это означает, что любая молекула имеет хоть какую-то скорость в интервале от 0 до бесконечности $(0; \infty)$.

Скорость, соответствующая наибольшей доле молекул в единичном интервале скоростей, называется наиболее вероятной v_n . Она вычисляется по формуле*

$$v_n = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекул \bar{v} равна отношению суммы модулей скоростей всех молекул к их числу N :

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N}.$$

Она вычисляется по формуле $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot M}}$.

Средняя арифметическая скорость на 13% больше наиболее вероятной скорости.

На 8,5% больше средней арифметической так называемая среднеквадратичная скорость, определяемая по формуле

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}}; \quad \boxed{\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}.$$

Среднеквадратичная скорость равна корню квадратному из среднего квадрата скоростей всех молекул N в данном объёме. Она является одним из определяющих факторов при вычислении давления газа и средней кинетической энергии молекул.

* $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная (будет рассмотрена позднее).

§ 4. Распределение Больцмана частиц в силовом поле

Пусть газ, заключенный в сосуде, находится в силовом поле, например в поле силы тяжести. Как влияет наличие силового поля на распределение молекул газа по высоте?

При отсутствии поля (или свободном падении закрытого сосуда в поле тяжести) молекулы распределяются равномерно благодаря молекулярному хаосу. Концентрация молекул во всех точках одинакова, следовательно, одинаковы плотность газа $\rho = m_0 n$ и давление $p = nkT$ во всех точках сосуда.

Если бы действовало только поле силы тяжести, но отсутствовало хаотическое движение молекул, то они оказались бы прижатыми силами тяжести к нижней стенке сосуда, т. е. пришли бы в состояние с минимальной потенциальной энергией, что соответствует принципу наименьшего действия: всякая система частиц, предоставленная самой себе, приходит в состояние с минимальной потенциальной энергией.

Поскольку реально имеют место одновременно оба фактора – силовое поле и тепловое движение, то молекулы распределяются по объёму сосуда неравномерно. Наибольшая концентрация будет внизу, где потенциальная энергия молекул, обусловленная силой тяжести, минимальна. А наименьшая концентрация – сверху, где потенциальная энергия максимальна.

Закон распределения молекул в силовом поле был получен австрийским физиком-теоретиком Людвигом Больцманом (1844–1906) в 1868 г. Наиболее простой вид он имеет в случае изотермической атмосферы. Например, для концентрации молекул:

$$n = n_0 e^{-\frac{E}{kT}},$$

где n_0 – концентрация молекул на нулевом уровне;

$e = 2,71828...$ – основание натуральных логарифмов, иррациональное число;

E – потенциальная энергия молекулы в силовом поле относительно нулевого уровня;

k – постоянная Больцмана;

T – температура газа по шкале Кельвина.

В поле силы тяжести Земли (или другой планеты), при $h \ll R$, где R – радиус планеты, $E = m_0 g h$, где m_0 – масса молекулы, g – ускорение силы тяжести, h – высота над поверхностью планеты, концентрация молекул вычисляется по формуле:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}.$$

Учитывая, что при постоянной температуре давление пропорционально концентрации ($p = nkT$), получим выражение для давления на высоте h :

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}.$$

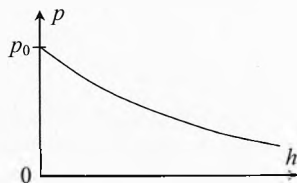


Рис. 5. Барометрическое распределение

Это выражение называется *барометрической формулой*, а график зависимости – *барометрическим распределением* (рис. 5)

Барометрическим распределением объясняется отсутствие атмосферы у Луны и очень разреженная атмосфера на Марсе. Из-за малого ускорения силы тяжести

на Луне (в 6 раз меньше, чем у Земли), а у Марса в 2,6 раза меньше. При этом увеличивается доля молекул, которые окажутся на больших высотах, где поле значительно слабее, чем на поверхности. Скорость молекул может быть здесь больше второй космической, и газ рассеется в мировом пространстве.

Вывод распределения Больцмана. Рассмотрим газ в однородном поле тяжести с изотермической атмосферой при температуре T . Для механического равновесия атмосферы её концентрация должна убывать с высотой. Направим ось Y вверх и найдём закон изменения концентрации молекул с высотой. Выделим малый столб высотой Δy и площадью S (рис. 6).

Разность сил давления газа снизу и сверху уравнивает силу тяжести малого столба газа высотой Δy .

$$F_1 - F_2 = F_g; \Rightarrow (p_1 - p_2) \cdot S = m_0 g \cdot \Delta N,$$

где $\Delta N = n \cdot \Delta V = n \cdot S \cdot \Delta y$ – количество молекул газа в объёме ΔV .

Учитывая, что разность давлений газа равна изменению давления по оси Y , взятого с обратным знаком:

$$p_1 - p_2 = -(p_2 - p_1) = -\Delta p.$$

Производя сокращение, получим:

$$\Delta p = -n \cdot m_0 g \cdot \Delta y, \text{ или в пределе } dp = -n \cdot m_0 g \cdot dy.$$

Подставляя в последнее выражение $p = nkT$ и учитывая, что температура не изменяется с высотой, получим:

$$kT \cdot dn = -nm_0 g \cdot dy \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{m_0 g}{kT} \cdot dy.$$

Проинтегрируем последнее выражение по высоте от $y_0=0$ до $y=h$ и по концентрации газа от n_0 до n :

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = -\frac{m_0 g}{kT} \cdot \int_0^h dy; \Rightarrow \ln \frac{n}{n_0} = -\frac{m_0 g h}{kT}.$$

Потенцируя последнее выражение, получим:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}; \Rightarrow n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}.$$

Учитывая, что $p_0 = n_0 kT$, а $p = nkT$, запишем окончательный результат:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}.$$

Приведённый гидростатический вывод допустим для достаточно плотных газов при наличии большой частоты столкновений молекул, когда длина их свободного пробега во много раз меньше толщины слоя dy . Только тогда имеет смысл говорить о давлении, с которым слой dy действует на окружающий газ.

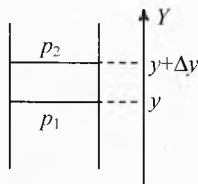


Рис. 6. Равновесие малого столба газа

Пример 8. Давление на поверхности Земли равно $p_0 = 760$ мм рт. ст. На сколько мм рт. ст. давление на высоте $h = 10,5$ м меньше, чем на поверхности Земли? Температуру воздуха считать постоянной и равной $T = 273$ К. Молярная масса воздуха равна $M = 0,029$ кг/моль.

► **Решение.** $|\Delta p| = p_0 - p$; $p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$. Учитывая, что $M = m_0 \cdot N_A$ и что $R = k \cdot N_A$, окончательно получим: $|\Delta p| = p_0 \left(1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}} \right) \approx 1,0$ мм рт. ст.

Воспользуемся формулой:

$$e^x \approx 1+x, \text{ при } x \ll 1.$$

В нашем случае $x = -\frac{Mgh}{RT}$. Тогда: $|\Delta p| \approx p_0 \left(1 - \left(1 - \frac{Mgh}{RT} \right) \right)$.

Итак, при малых высотах давление воздуха уменьшается линейно с высотой:

$$|\Delta p| \approx \frac{p_0 M g}{RT} \cdot h$$

Для требуемой высоты $h=10,5$ м получим:

$$|\Delta p| \approx 1,0 \text{ мм рт. ст.}$$

✓ **Ответ.** При малых высотах атмосферное давление уменьшается на 1,0 мм рт. ст. каждые 10,5 м.

Барометрическая формула хорошо согласуется с данными эксперимента для атмосферы Земли. По мере подъема давление, плотность и концентрация воздуха уменьшаются. Но для точных расчётов при исследовании атмосферы следует вводить поправку на уменьшение температуры с высотой, что несколько осложняет расчёт. В качестве примера приводим таблицу зависимости среднего давления, плотности и температуры воздуха от уровня моря до высоты 20 км.

Таблица 1. Зависимость среднего давления, плотности и температуры воздуха от высоты

Высота над уровнем моря, м	Давление, Па	Плотность, кг/м ³	Температура, °С
0	101 325	1,2250	15,0
1000	89 874	1,1117	8,5
2000	79 495	1,0065	2,0
3000	70 108	0,90913	-4,5
4000	61 640	0,81914	-11,0
5000	54 020	0,73612	-17,5
6000	47 181	0,65970	-24,0
7000	41 061	0,58950	-30,5
8000	35 600	0,52717	-37,5
10 000	26 436	0,41271	-50,0
12 000	19 330	0,31083	-56,5
14 000	14 102	0,22675	-56,5
16 000	10 287	0,16542	-56,5
18 000	7 504,8	0,12068	-56,5
20 000	5 474,9	0,08804	-56,5

§ 5. Броуновское движение

Наиболее ярким примером хаотического движения является броуновское движение.

Броуновское движение представляет собой беспорядочное движение малых макроскопических частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул окружающей среды.

Впервые это явление заметил английский ботаник Роберт Броун (1773–1858) в 1827 г., рассматривая в микроскоп взвешенные в воде частицы цветочной пыльцы (споры плауна). Позже он исследовал движение других мелких тел, в том числе и частиц камней из египетских пирамид.

Теорию броуновского движения разработали немецкий физик-теоретик Альберт Эйнштейн (1879–1955) и польский физик Мариан Смолуховский (1872–1917) в 1905–1906 г.

Они показали, что броуновские частицы ведут себя как гигантские молекулы, средняя кинетическая энергия которых равна средней кинетической энергии молекул жидкости или газа, окружающих частицу.

Поэтому характер движения броуновских частиц такой же, как у молекул, только со значительно меньшей скоростью.

$$\frac{m\overline{u}^2}{2} = \frac{m_0\overline{v}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_{\text{кв}} = \overline{v}_{\text{кв}} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{m}}$$

где $\overline{u}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{u}^2}$ и $\overline{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v}^2}$ – среднеквадратичные скорости броуновской частицы и молекулы соответственно; m_0 – масса молекулы; m – масса броуновской частицы.

Скорость молекул газообразного кислорода или азота при комнатной температуре составляет около 500 м/с. Броуновская частица содержит примерно миллиард молекул, значит её среднеквадратичная скорость, согласно записанной нами формуле, составляет порядка 1 см/с, что и наблюдается на практике.

Теоретически было получена зависимость, называемая *законом Эйнштейна*.

При достаточно большом промежутке времени наблюдения средний квадрат проекции смещения $\overline{\Delta x^2}$ на какую-либо ось в отсутствии внешних сил прямо пропорционален времени:

$$\overline{\Delta x^2} = a\tau$$

В 1908–1911 гг. Ж. Перреном и Т. Сведбергом были проведены опыты, которые подтвердили закон Эйнштейна.

Современное совпадение результатов теории броуновского движения с экспериментальными данными является одним из решающих доказательств справедливости основных положений молекулярно-кинетической теории вещества. Из измерений Перрена и Сведберга были экспериментально определены постоянная Больцмана и постоянная Авогадро.

Так для круглой броуновской частицы закон Эйнштейна принимает вид:

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{RT\tau}{3\pi\eta \cdot r \cdot N_A}$$

где R – универсальная газовая постоянная;
 T – температура среды по шкале Кельвина;
 η – коэффициент вязкости среды;
 r – радиус броуновской частицы;
 τ – время наблюдения;
 N_A – постоянная Авогадро.

Так как все величины, входящие в эту формулу, кроме постоянной Авогадро, можно измерить, то эта формула позволяет найти постоянную Авогадро. Что и было блестяще выполнено Перреном.



Теодор Сведберг
(1884–1971)

Пример 9. Броуновская частица смолы гуммигута радиусом $r=0,5$ мкм взвешена в воде комнатной температуры. Оценить среднеквадратичную скорость частицы. Считать плотность гуммигута равной плотности воды.

Решение. Средняя кинетическая энергия молекул воды равна средней кинетической энергии броуновской частицы:

$$\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{m \overline{u^2}}{2}; \quad \Rightarrow \quad \overline{u_{\text{кв}}} = \overline{v_{\text{кв}}} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{m}}$$

Среднеквадратичная скорость молекул воды: $\overline{v_{\text{кв}}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

Пусть температура воды $t=20^\circ\text{C}$ или $T=293$ К. Тогда,

$$\overline{v_{\text{кв}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 293}{0,018}} \approx 640 \text{ м/с.}$$

Отметим, что среднеквадратичная скорость молекул в жидком, твёрдом и газообразном состоянии вычисляется одинаково.

Масса броуновской частицы $m=\rho V$. Её форма шарообразна, следовательно,

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 5,2 \cdot 10^{-16} \text{ кг.}$$

Масса молекулы воды $m_0 = M_r \cdot 1 \text{ а.е.м.}$, $m_0 = 18 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3,0 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Подставляя m , m_0 и $\overline{v_{\text{кв}}}$ в исходную формулу, получим:

$$\overline{u_{\text{кв}}} = 640 \cdot \sqrt{\frac{3,0 \cdot 10^{-26}}{5,2 \cdot 10^{-16}}} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 5 \text{ мм/с.}$$

Ответ. Среднеквадратичная скорость броуновской частицы из гуммигута диаметром 1 мкм в воде комнатной температуры равна 5 мм/с.

§ 6. Средняя длина свободного пробега, частота столкновений молекул

Молекулы газа, непрерывно двигаясь, сталкиваются друг с другом. При этом их скорости изменяются по модулю и направлению. Между столкновениями они проходят свободно некоторый путь, называемый длиной свободного пробега. Путь, проходимый молекулой между различными столкновениями, неодинаков. Важнейшим параметром хаотического движения молекул газа является средняя длина свободного пробега. Это понятие ввел в 1858 г. Р. Клаузиус.

Средняя длина свободного пробега λ – это среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями молекулы с другими молекулами.

Получим формулу для расчёта средней длины свободного пробега. Представим себе молекулы газа в виде шариков радиуса R . Предположим, что все молекулы, кроме одной неподвижны. Тогда движущаяся со скоростью \bar{v} молекула заденет все молекулы, встречающиеся на её пути, центры которых лежат на расстоянии не большем $2R=d$ от линии, по которой движется центр данной молекулы (рис. 7). Линию её движения выпрямим для простоты расчётов и будем считать, что её скорость остаётся неизменной по модулю.

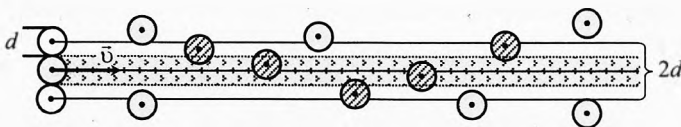


Рис. 7. Коридор движения молекулы

За время t молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых находятся в цилиндре площадью основания $S=\pi d^2$ и длиной пути $l=\bar{v}t$, который молекула пройдет за время t . Тогда количество столкновений за время t :

$$z = n \cdot V_{\text{ц}} = n \cdot S \cdot l = n \bar{v} \pi d^2 t,$$

где n – концентрация молекул газа.

В действительности все молекулы движутся, поэтому среднее число соударений необходимо определять по средней скорости движения молекул по отношению друг к другу, а не относительно стенок сосуда.

Относительная скорость двух произвольно взятых молекул равна:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Возведём в квадрат это уравнение. Учитывая, что квадрат вектора равен квадрату модуля вектора ($\vec{v}_2^2 = v_2^2$ и $\vec{v}_1^2 = v_1^2$), получим:

$$\vec{v}_{\text{отн}}^2 = \vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - 2\vec{v}_1 \vec{v}_2 \quad \text{или} \quad v_{\text{отн}}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2\vec{v}_1 \vec{v}_2.$$

Среднее значение суммы равно сумме средних значений слагаемых, поэтому:

$$\overline{v_{\text{отн}}^2} = \overline{v_2^2} + \overline{v_1^2} - 2\overline{v_1 v_2}.$$

Скорости молекул могут быть направлены по всевозможным направлениям, поэтому последнее слагаемое будет принимать как положительные, так и отрицательные значения, а его среднее значение равно нулю $\overline{v_1 v_2} = 0$. Средний квадрат скорости молекул (среднеквадратичная скорость) одинаков для всех молекул, поэтому:

$$\overline{v_{\text{отн}}^2} = \overline{v_2^2} + \overline{v_1^2} \quad \text{или} \quad \overline{v_{\text{отн}}^2} = 2\overline{v^2}.$$

Учитывая, что среднеквадратичная скорость пропорциональна средней скорости, то получим, что средняя скорость относительного движения молекул газа в $\sqrt{2}$ раз превышает среднюю скорость молекулы относительно стенок:

$$\overline{v_{\text{отн}}} = \sqrt{2} \cdot \overline{v}.$$

Значит, с учётом относительного движения молекул среднее число соударений одной молекулы с другими тоже должно быть увеличено в $\sqrt{2}$ раз. Итак, количество столкновений одной молекулы с другими за время t равно:

$$z = \sqrt{2} n \overline{v} \pi d^2 t$$

Тогда частота соударений:

$$\nu = \frac{z}{t}, \quad \nu = \sqrt{2} n \overline{v} \pi d^2. \quad (8)$$

Среднюю длину свободного пробега получим, разделив путь, пройденный молекулой за время t , на число столкновений за то же время

$$\lambda = \frac{l}{z} = \frac{\overline{v} t}{\sqrt{2} n \pi d^2 \overline{v} t}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}. \quad (9)$$

Из последней формулы видно, что средняя длина свободного пробега молекулы обратно пропорциональна концентрации молекул газа и эффективному сечению соударения. Интересно отметить, что произведение $\pi n d^2$ есть не что иное, как общая площадь поверхности всех молекул в единице объёма.

✎ **Пример 10.** Подсчитать частоту соударений молекул воздуха при нормальных условиях, если средняя скорость молекул азота равна примерно $\overline{v} = 450$ м/с, а концентрация молекул $n = 2,69 \cdot 10^{25}$ м⁻³. Размер молекулы азота $d \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$ м.

➡ **Решение.** Подставляя данные в (8), получим:

$$\nu = \sqrt{2} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} \cdot 450 \cdot 3,14 \cdot 3,3^2 \cdot 10^{-20} = 5,9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

✓ **Ответ.** $\nu = 6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. То есть при нормальных условиях молекулы азота испытывают 6 миллиардов столкновений ежесекундно!

Пример 11. Вычислить среднюю длину свободного пробега молекул азота при нормальных условиях.

➤ **Решение.** $\lambda = \frac{l}{z} = \frac{\bar{v}t}{vt}; \Rightarrow \lambda = \frac{\bar{v}}{v}; \lambda = \frac{450 \text{ м/с}}{6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}} = 75 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$ ➤

✓ **Ответ.** $\lambda = 75 \text{ нм}$ или 750 Å . Это более чем в 200 раз превышает размеры молекулы и в 20 раз больше среднего расстояния между молекулами воздуха при нормальных условиях.

Существуют методы определения средних длин свободного пробега λ разных газов. По этим данным для λ , используя формулу (9), определяют диаметры молекул d , но полученные таким образом диаметры не представляют собой в точности реальные размеры молекул. Действительно, молекулы не являются шариками. Кроме того, процесс столкновения не похож на соударение упругих шаров. Молекулы – это сложные системы, состоящие из атомов, а атомы, в свою очередь, из ядер и электронных облаков (оболочек). Силы взаимодействия между ними носят сложный характер.

Поэтому диаметр молекулы, вычисленный в предположении, что молекулы являются упругими шарами, даёт приближенное представление о размерах молекул. Величина d является, как принято говорить, *эффективным газокинетическим диаметром молекулы*. Величина πd^2 называется *эффективным сечением молекулы*.

Более точные расчёты показывают также, что средняя длина свободного пробега λ зависит от температуры. С повышением температуры длина свободного пробега несколько увеличивается.

Если вычисленную длину свободного пробега по формуле (9) обозначить через λ_0 , то действительная длина свободного пробега λ при температуре T будет равна

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{C + T},$$

где C – величина, постоянная для данного газа, называемая постоянной Сёзерлэнда, её значение определяется из опытных данных.

Для азота, например, $C = 102,7 \text{ К}$. Поэтому по формуле Сёзерлэнда при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ средняя длина свободного пробега на 13% больше, чем при температуре $T_2 = 200 \text{ К}$.

§ 7. Перемещение молекул в газах при диффузии

Получим формулу зависимости среднего расстояния S от времени t , на которое удаляется молекула от первоначального положения при самодиффузии, т. е. *диффузии молекул, составляющих газовую атмосферу в одном сосуда*.

Пусть в начальный момент времени молекула находилась в начале координат (рис. 8). Через некоторое время, после многочисленных столкновений N , она окажется в точке M . Модуль её перемещения определяется по трёхмерной теореме Пифагора

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

где x , y и z – координаты конца вектора перемещения \vec{S} .

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_N,$$

$$y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_N,$$

$$z = \Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_N.$$

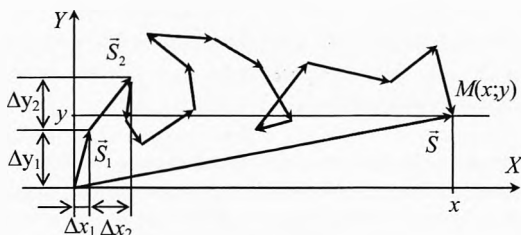


Рис. 8. Перемещение молекулы в газе

Решая совместно эти уравнения, и учитывая, что удвоенные произведения изменения координат $2\Delta x_i \Delta x_k$, $2\Delta y_i \Delta y_k$ и $2\Delta z_i \Delta z_k$ в силу хаотичности движения молекулы будут равновероятно попадаться как со знаком «+», так и со знаком «-» и взаимно уничтожаться, получим:

$$S^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2 + (\Delta z_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta z_2)^2 + \dots + (\Delta x_N)^2 + (\Delta y_N)^2 + (\Delta z_N)^2.$$

Учитывая также, что $(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2 = S_i^2$, получим:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_N^2 \approx N \cdot \lambda^2,$$

где λ – средняя длина свободного пробега молекулы между соседними соударениями. Окончательно получим:

$$S = \lambda \cdot \sqrt{N}.$$

Мы получили, что модуль перемещения молекулы S пропорционален средней длине свободного пробега и корню квадратному из числа столкновений за это время.

Путь l , пройденный молекулой за это время, равен $l = \bar{v} t$. Разделив его на λ , получим число соударений N :

$$N = \frac{\bar{v} t}{\lambda}.$$

Учитывая это, получим ещё одно выражение для модуля перемещения молекулы:

$$S = \sqrt{\bar{v} t} \lambda.$$

Это соотношение позволяет определять среднюю длину свободного пробега молекул газа за известное время по экспериментально полученному значению модуля перемещения и вычисленной скорости движения молекул:

$$\lambda = \frac{S^2}{\bar{v} t}.$$

✎ **Пример 12.** Сравнить модуль перемещения молекул азота за одну секунду со средним путём при нормальных условиях за то же время, средняя скорость молекул азота при н. у. примерно равна 450 м/с, а средняя длина свободного пробега $\lambda = 6 \cdot 10^{-8}$ м.

➤ **Решение.** Средний путь, который проходит молекула за 1 с:

$$l = \bar{v}t = 450 \text{ м.}$$

Среднее перемещение молекулы за 1 с:

$$S = \sqrt{\bar{v}t} \lambda = \sqrt{450 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^{-8}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 0,5 \text{ см.} \blacktriangleleft$$

✓ **Ответ.** При нормальных условиях молекула азота проходит путь около 0,5 км, но из-за многочисленных столкновений смещается за это время всего на 0,5 см!

✎ **Пример 13.** Оценить, за какое время молекулы из флакона дезодоранта распространятся в комнате за счёт диффузии на 4 м.

➤ **Решение.** $t = \frac{S^2}{\bar{v} \cdot \lambda}$; $t = \frac{16}{450 \cdot 6 \cdot 10^{-8}} = 5,9 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 7 \text{ суток.} \blacktriangleleft$

✓ **Ответ.** За счёт диффузии молекулы переместятся в среднем на 4 метра за неделю.

Примечание. Скорость диффузии получилась слишком маленькой. Реально запах в комнате распространяется гораздо быстрее. Почему?

Дело в том, что мы вычислили время распространения запаха, которое происходило бы только за счёт диффузии без учета конвекционных потоков в комнате. Но они то и играют решающую роль в скорости распространения запаха посредством молекул.

Наконец, следует обратить внимание на то, что процесс диффузии молекул газа нельзя характеризовать понятием средней скорости диффузии.

Действительно, модуль среднего перемещения S молекулы пропорционален времени не в первой степени, а в степени 1/2. Следовательно, скорость диффузии является не постоянной величиной, а убывает с увеличением интервала времени:

$$v_{\text{диф}} = \frac{S}{t} = \sqrt{\frac{\bar{v} \lambda}{t}}.$$

§ 8. Диффузия

Многие явления природы свидетельствуют о хаотическом движении частиц вещества, например диффузия. Термин *диффузия* (от лат. *diffusio*) буквально значит *распространение, растекание, рассеивание*.

|| **Диффузия** – это явление заключающееся во взаимопроникновении одного вещества в другое при их контакте.

Наиболее быстро происходит диффузия в газах благодаря тому, что промежутки между молекулами значительно больше размеров самих моле-

кул. Молекулы, выпущенные из сосуда с газом, легко проникают между молекулами воздуха. Диффузия хорошо происходит в жидкостях. Например, спирт быстро растворяется в воде. Некоторые твёрдые вещества легко растворяются в воде: сахар, поваренная соль, йод и др. Медленно происходит диффузия при контакте двух твёрдых тел. В известном опыте при контакте пластин из золота и свинца при комнатной температуре золото и свинец проникли друг в друга на 1 мм за 5 лет. С макроскопической точки зрения это мало. Но, с другой стороны, молекула золота продвигается между молекулами свинца за каждую минуту на один собственный размер.

Интересно, что с помощью диффузии и вынужденной конвекции можно образовать однородную смесь веществ разной плотности, а при воздействии ультразвуком – даже равномерно размешать воду со ртутью. На явлении вынужденной диффузии (с помощью ультразвука) основано действие карманной стиральной машины, которая помещается в таз и, без моющих средств, одним только ультразвуком, выталкивает грязь из белья в воду и, попутно, оказывает бактерицидное действие (разрушает микробы).

Благодаря диффузии, окружающая нас атмосфера (тропосфера) представляет собой однородную смесь азота, кислорода, водяных паров и других газов, хотя плотности этих газов различны.

С ростом температуры процесс диффузии ускоряется, т. к. возрастают скорости хаотического движения молекул, а значит, и интенсивность взаимопроникновения веществ.

§ 9. Идеальный газ. Основное уравнение состояния идеального газа

При описании поведения определенного объекта физики используют модели, в которых абстрагируются от некоторых свойств объекта, что позволяет легче получить зависимость между величинами, характеризующими объект. Полученные теоретически результаты на модели применяют для реальных объектов в определенных границах, где не проявляются существенно свойства объекта, которые отбросили как несущественные.

Для описания газов английским физиком Джоном Герепатом (1790–1865) в 1847 г. была предложена теоретическая модель газа, в которой пренебрегают размерами и притяжением частиц газа и учитывают лишь их упругие столкновения.

Немецкий физик Рудольф Клаузиус использовал модель идеального газа для установления соотношений между макроскопическими и микроскопическими параметрами газа.



Рудольф Юлиус
Эмануэль Клаузиус
(1822–1888)

Модель идеального газа по Клаузиусу должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) объём всех молекул газа ничтожно мал по сравнению с объёмом сосуда, в котором он находится;
- 2) время одного столкновения пренебрежимо мало по сравнению со временем между двумя соседними столкновениями;
- 3) молекулы взаимодействуют между собой только силами отталкивания при непосредственном столкновении.

Можно сказать, что идеальный газ представляет собой множество молекул в виде абсолютно упругих частиц, не имеющих собственного объёма*.

Выведем основное уравнение идеального газа, устанавливающее зависимость давления газа от характеристик молекул.

Давление газа на стенки обусловлено ударами молекул. Оно определяется частотой ударов, которая зависит от концентрации молекул и их скорости, а также средним импульсом молекул.

Молекулы реального газа движутся с разными скоростями, но для простоты будем считать их одинаковыми. Массы всех молекул данного газа тоже будем считать одинаковыми. Хотя газы имеют разные изотопы, например кислород $^{16}_8\text{O}$, $^{17}_8\text{O}$, $^{18}_8\text{O}$. Но в природе они перемешаны равномерно, и в таблице Менделеева даётся средняя атомная масса элементов (см. § 2 и § 3).

Возьмем сосуд кубической формы (рис. 9). Пусть в нём находится N молекул газа. Средняя масса одной молекулы m_0 . Рассмотрим поступательное движение молекул. Любая молекула может иметь проекцию скорости на любую из 3-х осей: v_x , v_y и v_z . Но мы будем считать для облегчения, что скорость каждой молекулы направлена вдоль одной из осей в положительную или отрицательную сторону, такое упрощение не отразится на конечном результате.

Найдём силу F , которой действуют молекулы идеального газа при упругом отражении от небольшой площадки S . За малый промежуток времени Δt площадки достигнут все молекулы, расположенные от неё на расстоянии не более $\Delta l = v \Delta t$, скорость которых направлена в сторону площадки.

В объёме $V = S \cdot v \Delta t$ содержатся $N = n \cdot S v \Delta t$ молекул.

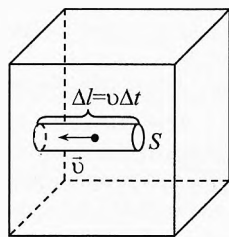


Рис. 9. Давление молекул на стенку кубического сосуда

* Модель идеального газа внутренне противоречива. Действительно, молекулы газа испытывают огромное количество столкновений за 1 с, но поскольку они не имеют собственных размеров, то должны были бы сталкиваться только со стенками. Кроме того они не имея размеров должны иметь форму, ибо кинетическая энергия одноатомных, двухатомных и многоатомных молекул идеального газа вычисляется по разному из-за разного числа степеней свободы (разной формы молекул).

Но поскольку молекулы движутся беспорядочно, а все направления движения равновероятны, то на каждую из шести граней куба будет двигаться только одна шестая часть всех молекул. Итак, количество молекул, которые столкнутся со стенкой площадью S за время Δt равно:

$$z = \frac{1}{6} n S v \Delta t,$$

где n – концентрация молекул.

При упругом отражении каждая молекула передаст площадке импульс

$$|\Delta \vec{p}| = |m_0 \vec{v}' - m_0 \vec{v}| = 2m_0 v, \quad \text{т. к. } \vec{v}' = -\vec{v}.$$

Все попавшие за время Δt на площадку молекулы передадут ей импульс

$$z |\Delta \vec{p}| = \frac{1}{6} n S v \Delta t \cdot 2m_0 v.$$

Эта величина равна импульсу силы $F \cdot \Delta t$. Откуда суммарная сила, действующая со стороны молекул на стенку, равна:

$$F \cdot \Delta t = \frac{1}{6} n S v \Delta t \cdot 2m_0 v; \Rightarrow F = \frac{1}{3} n m_0 v^2 S.$$

Тогда давление, испытываемое стенкой:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow p = \frac{1}{3} n m_0 v^2.$$

Это уравнение было получено Рудольфом Клаузиусом в 1857 г.

В 1860 г. Дж. Максвелл пришёл к выводу, что молекулы газа движутся с разными скоростями (см. § 3). С учетом распределения молекул по скоростям в уравнении Клаузиуса под квадратом скорости следует понимать средний квадрат скорости $\overline{v^2}$. Тогда **уравнение Клаузиуса** примет вид:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}.$$

Это уравнение носит название **основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа**.

Давление идеального газа равно произведению одной трети концентрации молекул на среднюю массу одной молекулы и средний квадрат скорости молекул.

Средняя кинетическая энергия молекулы равна $\overline{E}_k = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$, значит:

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \overline{E}_k.$$

Давление идеального газа прямо пропорционально концентрации и средней кинетической энергии поступательного движения молекул.

Наконец, учитывая, что плотность газа $\rho = nm_0$, получим самое короткое выражение основного уравнения МКТ идеального газа:

$$p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}.$$

Давление идеального газа прямо пропорционально произведению плотности газа и среднего квадрата скорости.



Упражнения

1 Сравнить количество атомов в стальной и алюминиевой ложках равного объёма.

2 Зная постоянную Авогадро N_A , плотность ρ вещества и его молярную массу M , вывести формулы для расчёта числа молекул: 1) в единице массы вещества; 2) в единице объёма; 3) в теле массой m ; 4) в теле объёмом V .

3 В озеро, средняя глубина которого $h=10$ м и площадь поверхности $S=20$ км², бросили кристаллик поваренной соли массой $m=0,01$ г. Сколько молекул соли оказалось бы в наперстке этой воды объёмом $V=2$ см³, зачерпнутой из озера, если полагать, что соль растворилась равномерно во всем объёме?

4 Какое давление производит кислород на стенки сосуда, если среднеквадратичная скорость молекул 400 м/с, а число молекул в 1 см³ равно $2,7 \cdot 10^{19}$?

5 1) Каково давление азота, если среднеквадратичная скорость молекул $\overline{v_{\text{кв}}} = 500$ м/с, а его плотность $\rho = 1,35$ кг/м³? 2) Найти среднеквадратичную скорость молекул газа, плотность которого $\rho = 1,8$ кг/м³ и давление $p = 1,5$ атм.

6 Кристаллы поваренной соли NaCl кубической кристаллической решетки состоят из чередующихся ионов Na⁺ и Cl⁻. Определить минимальное расстояние между их центрами. Молярная масса 58,5 г/моль, а плотность — 2,2 г/см³.

7 С какой скоростью растёт толщина стенки покрываемой серебром путём распыления? Кинетическая энергия атома серебра $E = 1,0 \cdot 10^{-17}$ Дж. Атомы серебра производят давление на стенку равное $p = 100$ кПа. Плотность серебра $\rho = 10,5$ г/см³.

8 К молекулярному пучку, со скоростью молекул $v = 1000$ м/с и концентрацией $n = 5,0 \cdot 10^{17}$ м⁻³, нормально движется «зеркальная» стенка со скоростью $u = 50$ м/с. Найти давление, оказываемое на стенку пучком молекул. Масса одной молекулы $m_0 = 3,3 \cdot 10^{-26}$ кг.

9 Найти среднеквадратичную скорость пылинки массой $1,77 \cdot 10^{-12}$ кг, взвешенной в воздухе при нормальных условиях (н.у.): $p = 101325$ Па, $T = 273,15$ К.

10 Определить расстояние между ближайшими атомами железа, кристаллизованного в кубическую решетку, если плотность железа $\rho = 7,9$ г/см³, а атомная масса $M = 56$ г/моль.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

$$\mathbf{1} \quad N = \nu N_A = \frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{\rho V}{M} \cdot N_A; \Rightarrow \frac{N_{\text{ст}}}{N_{\text{ал}}} = \frac{\rho_{\text{ст}} M_{\text{ал}}}{\rho_{\text{ал}} M_{\text{ст}}} = \frac{7800 \cdot 27}{2700 \cdot 56} = 1,39.$$

$$\mathbf{2} \quad 1) \frac{N}{m} = \frac{\frac{m}{M} \cdot N_A}{m} = \frac{N_A}{M}; 2) \frac{N}{V} = \frac{\frac{m}{M} \cdot N_A}{m/\rho} = \frac{\rho \cdot N_A}{M};$$

$$3) N_m = \frac{m}{M} \cdot N_A; 4) N_V = \frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{\rho \cdot V \cdot N_A}{M}.$$

$$\mathbf{3} \quad n = \frac{N_0}{V_0} = \frac{m N_A}{M \cdot S h}; N = n \cdot V = \frac{m \cdot N_A \cdot V}{M \cdot S \cdot h} = 1,7 \cdot 10^6.$$

$$\mathbf{4} \quad p = \frac{1}{3} n \frac{M}{N_A} \overline{v^2} = 77 \text{ кПа}.$$

$$\mathbf{5} \quad 1) p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3} = 113 \text{ кПа}, 2) \overline{v_{\text{кв}}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 580 \text{ м/с}.$$

$\mathbf{6} \quad d = \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}$, где $n = \frac{\rho}{m_0}$ – концентрация молекул соли NaCl; $2n$ – концентрация ионов (то есть количество ионов Na^+ плюс количество ионов Cl^- в единице объёма); $m_0 = \frac{M}{N_A}$ – масса молекулы NaCl. Тогда $d = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho N_A}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

$$\mathbf{7} \quad E = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}; \rho = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot m_0}{S \cdot h}, \text{ где } h \text{ и } S - \text{толщина и площадь покрытия}.$$

По закону изменения импульса $F \cdot t = |\Delta P|$ или $p \cdot S \cdot t = N \cdot m_0 \overline{v}$, где $m_0 \overline{v}$ – изменение импульса одной молекулы; $m_0 = \frac{M}{N_A}$ – масса одной молекулы.

$$\text{Толщина покрытия увеличивается со скоростью } \frac{h}{t} = \frac{p}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2EN_A}} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

$\mathbf{3} \quad$ Перейдем в инерциальную систему отсчёта, связанную со стенкой. В этой системе отсчёта молекулы налетают на стенку со скоростью $v+u$ и после упругого удара отлетают с такой же скоростью. Значит каждая молекула передают стенке импульс $\Delta P_1 = m_0 \cdot 2(v+u)$. По закону изменения импульса $F \cdot t = |\Delta P|$ или $p \cdot S \cdot t = z \cdot m_0 \cdot 2(v+u)$, где $z = n \cdot V = n \cdot S \cdot l = n \cdot S \cdot (v+u)t$ – количество молекул, попадающих на стенку площадью S за время t . Значит молекулярный пучок оказывает на стенку давление, равное: $p = 2m_0 n(v+u)^2 = 0,17 \text{ МПа}.$

$$\mathbf{9} \quad \frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}; \overline{v_{\text{кв}}} = \overline{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}; \Rightarrow \overline{u_{\text{кв}}} = \overline{u} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 0,08 \text{ мм/с}.$$

$\mathbf{10} \quad$ На один элемент кубической решетки приходится в среднем один атом. Диаметр атома равен расстоянию между ближайшими атомами, а формула плотности справедлива вплоть до элементарной ячейки. Расстояние между центрами ближайших атомов в кристалле железа равно $d = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{M}{N_A \rho}} = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

Глава 2. Температура. Газовые законы

*Чтобы познать суть, меру и связь явлений,
надо погасить в себе суетность.*

Пифагор

§ 10. Тепловое равновесие. Температура

Поведение макроскопических тел, в частности газов, можно описывать не только молекулярно-кинетической теорией, но и с помощью небольшого числа параметров, характеризующих тело в целом.

Величины, определяющие состояние макроскопических тел без учета их молекулярного строения, называются макроскопическими. Среди них: давление, объём, температура, масса и др.

Центральное понятие при изучении тепловых явлений – температура. Понятие температуры, как степени нагретости тела, вошло в физику из бытовых представлений. Однако наши ощущения теплого и холодного субъективны и зависят не только от температуры тел, но и от состояния среды и особенностей человека. Например, в жару металлические предметы на ощупь кажутся более горячими, чем деревянные, хотя их температура одинакова, а в холод деревянные кажутся менее холодными, чем металлические, только в первом случае их температура была выше температуры человека, а во втором – ниже.

В основе измерения температуры лежит понятие о тепловом равновесии, и сама температура является характеристикой равновесного состояния тел.

|| Система тел находится в **тепловом (термодинамическом) равновесии**, если между телами этой системы отсутствует теплообмен.

Каково бы ни было начальное состояние тел изолированной системы, в ней в конце концов установится термодинамическое равновесие, в котором прекратятся все макроскопические процессы.

Это положение играет важную роль при изучении тепловых явлений и принимается за постулат, иногда называемый **общим началом термодинамики**.

Для измерения температуры используется общее начало, а также **нулевое начало (нулевой постулат) термодинамики**.

Пусть имеются три тела *A*, *B* и *C* (рис. 1).

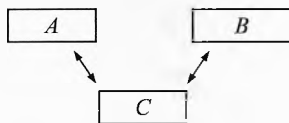


Рис. 1. Нулевое начало термодинамики

Опыт показывает, что если при контакте тела C с телом A не происходит теплообмена и при контакте тела C с телом B тоже нет теплообмена, то не будет теплообмена и при контакте тел A и B .

Причём это явление наблюдается независимо от агрегатных состояний тел, их цвета, плотности, формы и других характеристик. Значит, все тела, независимо от их различных свойств, характеризуются определенным параметром, значение которого одно и то же для каждого из тел в состоянии теплового равновесия. Этот параметр называется **температура**.

Опыт также показывает, что самопроизвольно тепло идёт от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой.

Значит, температура определяет и направление теплообмена. При одинаковой температуре тел теплообмен между ними отсутствует.

Для того чтобы измерить температуру тела, нужно привести его в контакт с термометром – телом, которое может измерять свою собственную температуру, а при тепловом равновесии с другим телом – и температуру тела, ибо температуры их одинаковы.

Заметим, что при контакте тела с термометром нужно подождать, пока между ними прекратится теплообмен, и они придут в состояние теплового равновесия, то есть состояния с одинаковой температурой.

Но как проградуировать термометр? Для этого используется зависимость какого-либо параметра вещества (давления, объёма, электропроводности и др.) от температуры и реперные точки.

Реперные точки – температурные точки, которым приписываются определенные значения температуры, и задаётся способ нахождения этих точек.

Первый практически пригодный термометр, основанный на тепловом расширении жидкостей (спирт, ртуть), сделал немецкий физик Габриель Фаренгейт. В 1709 г. он изготовил спиртовой термометр, а в 1714 – ртутный. Конструкция, разработанная Фаренгейтом, применяется и в настоящее время в комнатных термометрах. В 1724 г. он предложил шкалу температур, носящую его имя, которая до сих пор используется в англоязычных странах.

В качестве двух реперных точек Фаренгейт выбрал два уровня столбика ртути в тонкой трубке, один из которых соответствовал температуре тела здорового человека – 100°F , другой (0°F) – низшему уровню, до которого опустился столбик ртути в одну из холодных зим того времени (температура смеси снега с нашатырем определённой концентрации). Расстояние между этими точками он разделил на 100 равных частей, каждую из которых назвал градусом (*градус* от лат. *gradus* – шаг, ступень).

Использование термометров конструкции Фаренгейта позволило установить и другие реперные точки на температурной шкале. Оказалось, что такими точками являются температуры фазовых переходов вещества из твёрдого состояния в жидкое и из жидкого состояния в газообразное (при одних и тех же внешних условиях), а также обратные переходы, в частности вода кипит при 212°F , а замерзает при 32°F .



Даниель Габриель
Фаренгейт (1686–1736)



Андерс Цельсий
(1701–1744)



Карл Линней
(1707–1778)

Шведский астроном и физик Андерс Цельсий в качестве нулевой отметки на шкале своего термометра взял уровень, соответствующий температуре кипения воды, а через 100°C обозначил температуру таяния льда (при нормальном атмосферном давлении).

Разделив этот интервал на 100 равных частей, Цельсий получил стоградусную шкалу, называемую теперь его именем.

Известный шведский естествоиспытатель Карл Линней пользовался термометром с переставленными значениями реперных точек: 0°C означал температуру плавления льда, а 100°C – температуру кипения воды. Таким образом, современная шкала Цельсия по существу является шкалой Линнея–Цельсия.

§ 11. Абсолютная температура

Выбор реперных точек в температурных шкалах Фаренгейта и Цельсия, как видно из предыдущего параграфа, произволен, и полученная шкала оказалась неудобной для теоретических исследований. В связи с этим появилась необходимость создания температурной шкалы, не связанной со свойствами одного конкретного вещества.

В 1848 г. английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин)* предложил абсолютную шкалу температур.



Уильям Томсон лорд
Кельвин (1824–1907)

* В 1892 году У. Томсону за его большие научные заслуги был присвоен титул лорда Кельвина (по имени реки Кельвин, протекающей вблизи университета в городе Глазго, где он в течение 53 лет работал профессором и заведовал кафедрой).

При построении этой шкалы он исходил из законов термодинамики, поэтому абсолютная шкала температур Кельвина называется ещё термодинамической шкалой. Мы же получим её, используя газовый термометр.

Ещё в 1787 г. Шарль установил, что одинаковое нагревание любого газа приводит к одинаковому повышению давления при постоянном объёме. Значит, манометр можно проградуировать не в единицах давления, а в единицах температуры и получить газовый термометр. Важно найти удобное начало отсчёта и привязать новую шкалу к привычной шкале Цельсия.

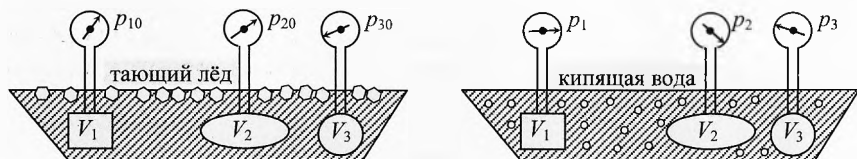


Рис. 2. Градуирование газового термометра

Возьмём несколько разных по форме и объёму сосудов, снабженных манометрами, (рис. 2) и напомним их газами, например, водородом, гелием и азотом при различных небольших давлениях, сравнимых с атмосферным. Поместим эти сосуды в тающий лёд. Все манометры отметят уменьшение давления в связи с охлаждением. Через некоторое время давление во всех сосудах перестанет изменяться, значит, газ в каждом из них пришёл в тепловое равновесие со льдом. Затем поместим эти сосуды в воду, кипящую при нормальном атмосферном давлении (101325 кПа). В первом опыте температура каждого газа одна и та же. Во втором опыте она больше, чем в первом, но также одинакова для каждого газа. Нам нужно найти соотношение параметров, которое было бы одинаково для всех газов в каждом опыте и чтобы оно было больше для второго случая. Это соотношение можно принять за температуру.

Опыт показывает, что обоим условиям удовлетворяет отношение давления газа к его концентрации в сосуде:

$$\frac{p_{10}}{n_1} = \frac{p_{20}}{n_2} = \frac{p_{30}}{n_3} \quad \text{— при } 0^\circ\text{C (таяние льда при н.у.)},$$

$$\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_3}{n_3} \quad \text{— при } 100^\circ\text{C (кипение воды при н.у.)}.$$

Обозначим это отношение через Θ (тэта):

$$\frac{p}{n} = \Theta. \quad (1)$$

Его можно было бы принять равным температуре, ибо в состоянии теплового равновесия оно одинаково для любых газов и увеличивается с возрастанием температуры.

Однако это отношение: при 0°C равно $\Theta = 3,76 \cdot 10^{-21}$ Дж, а при 100°C равно $\Theta = 5,14 \cdot 10^{-21}$ Дж – оказалось крайне неудобным для измерения температуры.

Вместо температуры Θ в энергетических единицах введем температуру, выраженную в привычных для нас градусах, при этом придётся считать Θ не равной, а прямо пропорциональной температуре:

$$\Theta = kT, \quad (2)$$

где k – коэффициент пропорциональности – постоянная Больцмана.

Найдём его значение, используя взаимосвязь между температурой по новой шкале Кельвина T и температурой по Цельсию. Кельвин предложил размер единицы температуры по новой шкале считать равным градусу по шкале Цельсия

$$\Delta T = \Delta t, \quad \text{или} \quad T - T_0 = t - t_0. \quad (3)$$

В нашем опыте $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$, а $t = 100^{\circ}\text{C}$. Значит,

$$T - T_0 = 100 \text{ K}. \quad (4)$$

Выражая из (2) $T = \frac{\Theta}{k}$ и $T_0 = \frac{\Theta_0}{k}$, подставив в (4), получим:

$$\frac{\Theta}{k} - \frac{\Theta_0}{k} = 100 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\Theta - \Theta_0}{100 \text{ K}}.$$

$$k = \frac{(5,14 - 3,76) \cdot 10^{-21} \text{ Дж}}{100 \text{ K}}; \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / K}.$$

Постоянная Больцмана связывает температуру в энергетических единицах с температурой в Кельвинах. Вычислим T_0 :

$$\Theta_0 = kT_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{\Theta_0}{k}$$

$$T_0 = \frac{3,76 \cdot 10^{-21}}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 273,15 \text{ K},$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K}.$$

Подставляя результат в (3), при $t_0 = 0$ получим формулу для перевода температуры из шкалы Цельсия в шкалу Кельвина:

$$T = t + 273,15 \text{ K}.$$

При нестрогих расчётах можно считать, что $T_0 \approx 273 \text{ K}$.

§ 12. Абсолютный нуль температуры.

Определение температуры

Комбинируя (1) и (2), получим: $\frac{P}{n} = kT$.

Откуда следует, что абсолютная температура T равна

$$T = \frac{P}{nk}. \quad (5)$$

Почему она носит название абсолютной шкалы температур? Из (5) видно, что температура по шкале Кельвина не может быть отрицательной, так как бессмысленны отрицательные значения давления или концентрация молекул газа. Минимальная температура по этой шкале равна нулю, когда давление обращается в ноль, то есть при отсутствии поступательного движения молекул газа.

Шкала температур по Кельвину называется абсолютной потому, что ноль по этой шкале есть минимально возможная температура для любого вещества.

Следует отметить, что газовые термометры не могут измерять температуру, близкую к абсолютному нулю, т. к., во-первых, любой газ при достаточно низких температурах превращается в жидкость. Во-вторых, реальные газы при низких температурах вырождаются, в них начинают проявляться квантовые свойства, и зависимость давления от температуры становится нелинейной.

Дадим теперь полное определение температуры.

Температура – это скалярная физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия тел (определяемое интенсивностью теплового движения молекул) и направление самопроизвольного теплообмена (от горячего к холодному).

Абсолютная температура газа равна отношению давления газа к его концентрации и постоянной Больцмана.

Газовый термометр (рис. 3) представляет собой герметичный баллон 1 с газом (обычно водородом), соединенный трубкой 2 с манометром 3, проградуированным в Кельвинах и/или в градусах Цельсия.

На практике температуру измеряют не газовым термометром, а ртутным, спиртовым, термометрами сопротивления, термопарами, инфракрасными термометрами излучения и др. Однако образцовым термометром, по которому градуируются шкалы других термометров, является газовый.

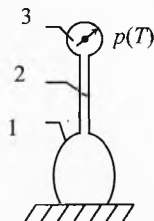


Рис. 3. Газовый термометр

В качестве термометрического тела можно взять любой газ. Но оказывается, показания водородного термометра точнее, чем показания термометров, баллон которых наполнен другим газом. Водородный термометр даёт наименьшую погрешность в сравнении с тем, что дал бы термометр с идеальным газом. Эти погрешности очень малы, они составляют для водорода – 0,012%, для гелия – 0,018%, для кислорода – 0,073% при н. у. При этом водородный термометр даёт погрешность в 6 раз меньше, чем заполненный кислородом (воздухом).

§ 13. Абсолютная температура и число степеней свободы

Абсолютная температура – мера средней кинетической энергии молекул. Действительно из определения абсолютной температуры следует:

$$T = \frac{P}{nk} \Rightarrow \boxed{p = nkT}$$

Сравнивая его с основным уравнением молекулярно-кинетической теории $p = \frac{2}{3}n \cdot \bar{E}_k$, получим:

$$\frac{2}{3}n \cdot \bar{E}_k = nkT \Rightarrow \boxed{\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT}$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул прямо пропорциональна абсолютной температуре.

То есть абсолютная температура однозначно определяется средней кинетической энергией, приходящейся на одну молекулу.

В состоянии теплового равновесия температуры тел одинаковы. Это означает, что средние кинетические энергии поступательного движения молекул разных тел равны независимо от агрегатного состояния, цвета, химического состава и других свойств. То есть среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы любого тела можно вычислить по формулам

$$\bar{E}_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{и} \quad \bar{E}_k = \frac{3}{2}kT.$$

Число степеней свободы. Средняя кинетическая энергия для молекул, состоящих из разного числа атомов, вычисляется не совсем одинаково.

*Количество независимых координат, с помощью которых можно описать положение атомно-молекулярной системы, называется **числом степеней свободы этой системы** и обозначается буквой i .*

Одноатомные молекулы можно представить материальными точками, имеющими три степени свободы движения по осям X , Y и Z . Полная средняя энергия одноатомной молекулы:

$$\bar{E}_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы любой атомно-молекулярной системы равна $\frac{1}{2} kT$.

Двухатомные молекулы можно представить в виде гантели, которая кроме трёх степеней свободы поступательного движения может вращаться в двух плоскостях (относительно оси X и Z по рис. 4). Поэтому полная кинетическая энергия двухатомных молекул:

$$\bar{E}_{\text{к2}} = \frac{5}{2} kT.$$

Трёхатомные и другие многоатомные молекулы, кроме трёх степеней свободы поступательного движения, могут ещё вращаться в трёх плоскостях, поэтому имеют шесть степеней свободы:

$$\bar{E}_{\text{к3}} = \frac{6}{2} kT,$$

или в общем виде кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекул:

$$\bar{E}_{\text{к}} = \frac{i}{2} kT,$$

где $i_1=3$ для одноатомных; $i_2=5$ для двухатомных; $i_3=6$ для многоатомных молекул. Если имеется смесь газов, то число степеней свободы будет дробным. Например, если смешать 0,5 моля водорода (двухатомного газа) и 0,5 моля гелия (одноатомного газа), то получим 1 моль газа с числом степеней свободы $i=4$.

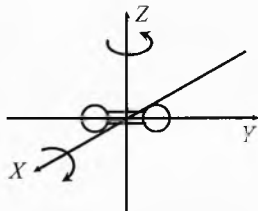


Рис. 4. Двухатомная молекула

Пример 1. Определить среднюю кинетическую энергию молекулы одноатомного газа и концентрацию молекул при температуре $T=290$ К и давлении $p=0,8$ МПа.

✓ **Ответ.** $p=nkT \Rightarrow n = \frac{p}{kT} = 2 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$. $\bar{E}_{\text{к}} = \frac{3}{2} kT = 6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$.

§ 14. Измерение скоростей газовых молекул

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы может быть вычислена по двум формулам:

$$\bar{E}_k = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} \quad \text{и} \quad \bar{E}_k = \frac{3}{2} kT.$$

Приравняв эти выражения, получим средний квадрат скорости молекул $\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m_0}$, откуда следует, что среднеквадратичная скорость молекул, равная корню квадратному из среднего квадрата скорости молекул, может вычисляться по формуле:

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\bar{v}^2}; \quad \boxed{\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}}.$$

Пример 2. Вычислить среднеквадратичную скорость молекул азота при нормальных условиях ($t=0^\circ\text{C}$, $p=760$ мм рт.ст.).

Дано:

$T=273$ К

$p=760$ мм рт.ст.

$M=0,028$ кг/моль

$\bar{v}_{\text{кв}} - ?$

Решение. Масса молекулы азота:

$$m_0 = \frac{M}{N_A}; \quad m_0 = \frac{0,028}{6,02 \cdot 10^{23}} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}; \quad \bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{4,65 \cdot 10^{-26}}} = 493 \text{ м/с.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** При 0°C среднеквадратичная скорость молекул азота 493 м/с!

Когда в начале второй половины XIX века была вычислена скорость теплового движения молекул учеными Д. Джоулем и другими, то результат оказался ошеломляющим. Мало кто мог представить такую скорость молекул, а следовательно, поверить в молекулярно-кинетическую теорию вещества.

Людвиг Больцман – один из создателей МКТ, – очень страдавший от непрерывных нападков со стороны противников кинетической теории газов, совершенно потерял душевный покой. Он писал, что с большим трудом заставляет себя работать только ради того, чтобы будущим поколениям не пришлось открывать всё заново. Остаток жизни Больцман провел в бедности и покончил с собой в 1906 году.



Людвиг Больцман
(1844–1906)

Прямые измерения скоростей теплового движения молекул были впервые выполнены в 1920 г. немецким физиком-экспериментатором Отто Штерном (1888–1969) в опытах с молекулярными пучками. В качестве исследуемого газа ученый использовал пары серебра. Один из приборов Штерна состоял из двух жестко связанных соосных цилиндров с радиусами r и R (рис. 5). Вдоль оси цилиндров натянута тонкая платиновая проволочка, покрытая слоем серебра. Прибор помещался в герметичный сосуд, из которого откачивался воздух. Во внутреннем цилиндре имелась узкая щель. По проволоке пропускали электрический ток. Пока прибор был неподвижен, испаряющиеся атомы серебра пролетали сквозь щель и попадали на внешний цилиндр строго по прямой линии, соединяющей проволоку, щель и место падения (точка A). После того, как прибор приводили во вращательное движение вокруг оси, проходящей через проволоку (ось цилиндров), полоска серебра на внешнем цилиндре смещалась и размывалась. Пока атом пролетал между малым и большим цилиндрами, прибор успевал поворачиваться на некоторый угол. Различие в смещении разных атомов свидетельствует о различии скоростей атомов серебра. По смещению атомов и известной угловой скорости вращения прибора вычислялась скорость атомов серебра. Проведенный опыт показал распределение атомов серебра на стенке внешнего сосуда, соответствующее распределению Максвелла молекул по скоростям. Таким образом, молекулярно-кинетическая теория получила блестящее экспериментальное подтверждение.

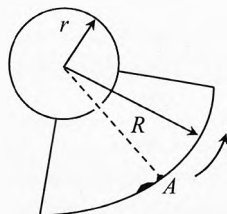


Рис. 5. Измерение скорости молекул

Пример 3. С какой скоростью летела молекула паров серебра, если её угловое смещение φ в опыте Штерна составляло $5,4^\circ$ при частоте вращения прибора 150 об/с? Расстояние между внешним и внутренними цилиндрами равно 2 см.

→ **Решение.**

Дано:	СИ:
$R - r = 2 \text{ см}$	$0,02 \text{ м}$
$n = 150 \text{ об/с}$	150 с^{-1}
$\varphi = 5,4^\circ$	$0,094 \text{ рад}$
$v = ?$	

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{R - r}{t}; & \varphi &= \omega t \\ \omega &= 2\pi n \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = \frac{\varphi}{2\pi n};$$

$$v = \frac{(R - r)2\pi n}{\varphi} = 200 \text{ м/с.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Молекула серебра двигалась со скоростью 200 м/с.

§ 15. Уравнение состояния идеального газа

Термическое уравнение состояния. Формула $p = nkT$, полученная из определения абсолютной температуры, есть одна из форм записи уравнения состояния идеального газа. Давление газа прямо пропорционально его концентрации и абсолютной температуре. Подставляя сюда выражение для концентрации молекул $n = \frac{N}{V}$, получим:

$$pV = NkT.$$

Это вторая запись уравнения состояния идеального газа. Произведение давления газа и его объёма прямо пропорционально числу молекул и абсолютной температуре.

Из определения количества вещества следует: $N = \nu \cdot N_A$, тогда

$$pV = \nu N_A kT.$$

Произведение числа Авогадро N_A и постоянной Больцмана k есть постоянная величина, она называется **универсальной газовой постоянной R** :

$$R = k \cdot N_A = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Получим самое изящное уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT.$$

(6)

Это уравнение называется **термическим уравнением состояния**.

Произведение давления идеального газа на занимаемый им объём прямо пропорционально количеству вещества и абсолютной температуре.

Уравнение (6) справедливо и для любого реального газа при не слишком больших и не слишком малых давлениях и температурах. При больших температурах газы ионизируются, а свойства ионизированного газа (плазмы) отличаются от свойств нейтрального газа. При достаточно низких температурах газы превращаются в жидкости. При высоких давлениях порядка 100 атм начинают сказываться собственные размеры молекул и взаимодействие между молекулами. При очень низких давлениях столкновения молекул между собой и со стенками происходят редко. Будут заметны флуктуации* давления. Ведь урав-



Бенуа Поль Эмиль
Клапейрон
(1799–1864)

* Флуктуация (от лат. fluctuatio – колебание) – беспорядочное отклонение физических величин от их средних значений.

нение Клаузиуса $p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}$ выведено для огромного числа столкновений молекул со стенкой в единицу времени, т.е. для большой концентрации.

Коэффициент R в уравнении (6) называется универсальной газовой постоянной потому, что он одинаков для всех газов при использовании уравнения в широком интервале температур и давлений.

Конечно, как указывалось при определении абсолютной температуры, к идеальному газу ближе всего подходит по свойствам водород, но и для других газов при решении многих технических задач уравнение (6) даёт достаточно хорошие результаты.

Уравнение Клапейрона. Уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{pV}{T} = \nu R. \quad (7)$$

Если в процессе с газом количество вещества не меняется, т. е. $\nu = \text{const}$, то произведение ν на R будет постоянным. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \quad (8)$$

Выражение (8) связывает параметры p, V и T любого состояния газа. Для двух разных состояний одного и того же количества газа можно записать:

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}. \quad (9)$$

Выражение (8), как и (9), называется объединённым **законом газового состояния**.

При любых (не слишком больших) изменениях давления, объёма и температуры любого газа произведение давления газа и его объёма, делённое на абсолютную температуру, есть величина постоянная для данного количества вещества.

Уравнение состояния газа в форме (9) было получено французским физиком и инженером Бенуа Клапейроном в 1834 г. и носит его имя.

Уравнение Клапейрона–Менделеева. Используя уравнение Клапейрона в 1874 г. Менделеев вывел уравнение состояния для одного моля газа:

$$pV = (1 \text{ моль}) \cdot RT.$$

Если же масса газа равна m , а молярная – M , то:

$$\boxed{pV = \frac{m}{M} RT}. \quad (10)$$

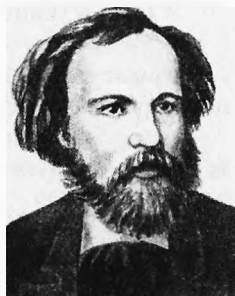
Это обобщенное и конкретизированное Менделеевым уравнение состояния идеального газа называется уравнением Клапейрона–Менделеева.

Его можно получить, подставив в (6) выражение для количества вещества:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{m}{M} \\ pV &= \nu RT \end{aligned} \Rightarrow pV = \frac{m}{M} RT.$$

Уравнение Клапейрона–Менделеева замечательно тем, что явно связывает пять параметров газа в одном состоянии: давление, объём, массу, молярную массу и температуру газа.

Уравнение газового состояния в форме $pV = \nu RT$ тоже является, по сути, уравнением Клапейрона–Менделеева, но это новая форма его записи, ибо понятие «количество вещества» введено почти на век позже уравнения (10).



Дмитрий Иванович
Менделеев
(1834–1907)

Пример 4. Объём одного моля любого газа при нормальных условиях равен 22,4 л. Вычислить по этим данным универсальную газовую постоянную. Под нормальными условиями понимаются давление $p = 101325$ Па и температура $t = 0^\circ\text{C}$ или $T = 273,15$ К.

Дано:

$$V = 22,4 \text{ л} = 0,0224 \text{ м}^3$$

$$p = 101325 \text{ Па}$$

$$T = 273,15 \text{ К}$$

$$\nu = 1 \text{ моль}$$

$$R = ?$$

Решение. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \nu RT \Rightarrow R = \frac{pV}{\nu T}.$$

$$R = \frac{101325 \cdot 0,0224}{1 \cdot 273,15} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

✓ **Ответ.** Согласно косвенным измерениям, универсальная газовая постоянная равна $R \approx 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Более точные подсчёты 1991 года дают следующее значение: $R = 8,314510(70) \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Пример 5. Вычислить плотность сухого воздуха при нормальных условиях.

Дано:

$$p = 101325 \text{ Па}$$

$$T = 273,15 \text{ К}$$

$$M = 0,02898 \text{ кг/моль}$$

$$\rho = ?$$

Решение. Из формулы для плотности по определению и уравнения состояния газа, получим выражения, связывающие давление газа, плотность и температуру:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad pV = \frac{m}{M} RT, \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{pM}{RT}}.$$

$$\rho = \frac{101325 \cdot 0,02898}{8,31451 \cdot 273,15} = 1,2929 \approx 1,29 \text{ кг/м}^3. \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Плотность воздуха при н. у. равна $1,29 \text{ кг/м}^3$.

Примечание. Давать ответ с большим количеством знаков нет смысла, несмотря на высокую точность данных давления и температуры, так как точность всего лишь до 2-х знаков молярной массы даже третий знак в ответе делает сомнительным.

✍ **Пример 6.** Вычислить *число Лошмидта*, то есть концентрацию молекул идеального газа при нормальных условиях.

➔ **Решение.** Лошмидт Иоганн Йозеф – австрийский физик и химик, первым вычислил диаметр молекулы и определил то, что мы вычислим сейчас.

$$p = nkT; \Rightarrow n = \frac{p}{kT}; \quad n = \frac{101325}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx$$

$$\approx 2,69 \cdot 10^{25} \left(\frac{1}{\text{м}^3} \right) = 2,69 \cdot 10^{19} \left(\frac{1}{\text{см}^3} \right). \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Число Лошмидта равно $2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Это значит, что при нормальных условиях в одном кубическом сантиметре содержится 26,9 миллиарда миллиардов молекул воздуха.



Иоганн Йозеф Лошмидт (1821–1895), мемориальная доска в Вене

§ 16. Изопроцессы

Из объединенного закона газового состояния $\frac{pV}{T} = \nu R$, или $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ следуют три частных газовых закона.

Закон Бойля–Мариотта. Этот закон описывает изотермический процесс, то есть процесс, протекающий при постоянной температуре ($T = \text{const}$).

Из $pV = \nu RT$, обозначив $\nu RT = B$, получим:

$$pV = B, \quad \text{или} \quad p = \frac{B}{V}. \quad (11)$$

Давление данного количества любого газа при постоянной температуре обратно пропорционально объёму газа.

Чем выше температура, тем дальше от начала координат расположен график зависимости $p(V)$ для одинакового количества газа (рис. 6): чем больше T , тем больше $B = \nu RT$, а значит, и произведение $pV = B$.

Для двух состояний газа можно написать:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{при } T_1 = T_2. \quad (12)$$

Важно отметить, что уравнением (11) можно пользоваться, если температура в течение всего процесса остаётся неизменной, а для использования (12) достаточно, чтобы температура была одинакова лишь в начальном и конечном состояниях: $T_1 = T_2$.

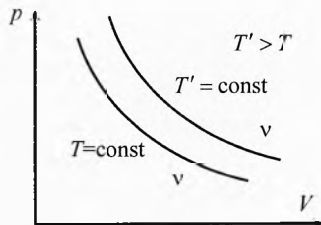


Рис. 6. Изотерма



Роберт Бойль
(1627–1691)



Жак Александр Цезарь
Шарль (1746–1823)



Жозеф Луи Гей-Люссак
(1778–1850)

Закон Шарля. Этот закон описывает изохорный процесс, то есть процесс, протекающий при постоянном объёме ($V = \text{const}$).

Из $pV = \nu RT$, обозначив $\frac{\nu R}{V} = B$, получим:

$$\frac{p}{T} = B, \quad \text{или } p = BT. \quad (13)$$

Давление данного количества любого газа при постоянном объёме прямо пропорционально абсолютной температуре.

Для двух состояний газа можно написать:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \text{при } V_1 = V_2. \quad (14)$$

Чем больше объём тела, тем меньше угол наклона графика $p(T)$, так как с увеличением V коэффициент $B = \frac{\nu R}{V}$ уменьшается (рис. 7).

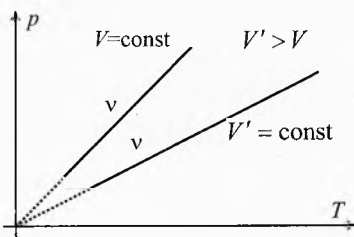


Рис. 7. Изохора

Запишем закон Шарля (14) для произвольного состояния и состояния с температурой $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (или $T_0 = 273,15\text{ К}$).

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} \Rightarrow p = \frac{p_0}{T_0} \cdot T \Rightarrow p = p_0 \alpha T, \quad (15)$$

где $\alpha = \frac{1}{T_0}$ – термический коэффициент давления (см. Введение).

Учитывая, что $T = T_0 + t$, получим:

$$p = p_0(\alpha T_0 + \alpha t) \quad \text{или} \quad p = p_0(1 + \alpha t).$$

Подчеркнем ещё раз, что уравнения (13) и (15) верны, если в течение всего процесса объём данного количества газа не изменяется. А вот уравнение (14) можно использовать и при изменяющемся объёме. Необходимо лишь, чтобы объём газа в начале процесса был равен объёму газа в конце процесса: $V_1 = V_2$.

Закон Гей-Люссака. Этот закон описывает изобарный процесс, то есть процесс протекающий при постоянном давлении ($p = \text{const}$).

Из $pV = \nu RT$, обозначив $\frac{\nu R}{p} = B$, получим:

$$\frac{V}{T} = B \quad \text{или} \quad V = BT.$$

Объём данного количества любого газа при постоянном давлении прямо пропорционален абсолютной температуре.

Чем больше давление, тем меньше угол наклона графика $V(T)$ к оси абсцисс (рис. 8). Действительно, с увеличением давления коэффициент $B = \frac{\nu R}{p}$ уменьшается.

Для двух состояний газа можно написать:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{при} \quad p_1 = p_2. \quad (16)$$

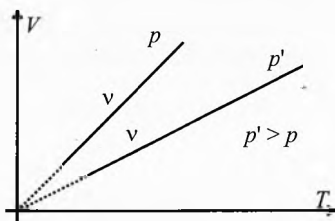


Рис. 8. Изобара

Важно отметить, что закон Гей-Люссака в форме (16) можно применять и при изменяющемся давлении. Необходимо только, чтобы в начальном и конечном состояниях давление было одинаково, т. е. $p_1 = p_2$.

Запишем закон Гей-Люссака (16) для произвольного состояния и для состояния с температурой $t_0 = 0^\circ\text{C}$ (или $T_0 = 273,15 \text{ K}$):

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \Rightarrow V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} \Rightarrow V = V_0 \alpha T.$$

где $\alpha = \frac{1}{T_0}$ – термический коэффициент объёмного расширения.

Учитывая, что $T = T_0 + t$, получим уравнение, выведенное впервые Гей-Люссаком (см. Введение):

$$V = V_0(\alpha T_0 + \alpha t) \quad \text{или} \quad V = V_0(1 + \alpha t).$$

На рис. 9 и 10 представлен опорный конспект по газовым законам.

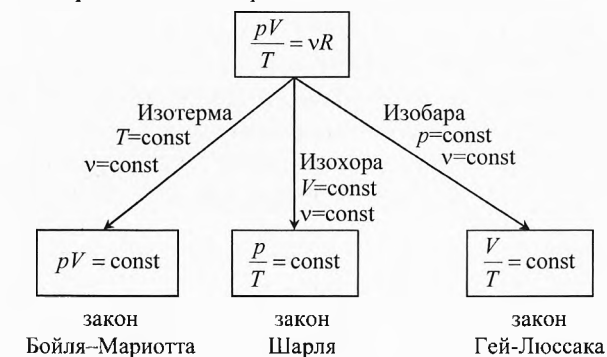


Рис. 9. Опорный конспект по газовым законам при $v = \text{const}$

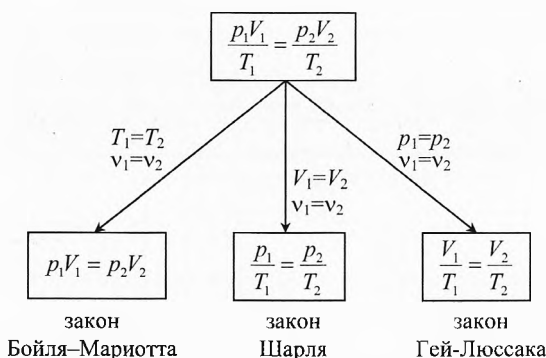


Рис. 10. Опорный конспект по газовым законам при $v_1 = v_2$

§ 17. Примеры решения задач на газовые законы

✍ **Пример 7.** Как изменялась температура идеального газа в процессе, график которого изображен на рис. 11?

➔ **Решение.** Данный круговой процесс не относится к числу изопроцессов, описанных выше. Чтобы оценить интервалы изменения температуры, изобразим две изотермы – касательные к графику в нижней и верхней его частях (рис. 12). Температура T_2 в верхней изотерме и в точке a больше, чем

температура T_1 в нижней изотерме и точке c , т. к. из уравнения состояния $pV = \nu RT$ следует:

$$\begin{cases} p_a V_a = \nu RT_2 \\ p_c V_c = \nu RT_1 \end{cases}$$

Поскольку $p_a V_a > p_c V_c$, то $T_2 > T_1$. Значит, в точке a температура была самой высокой, а в точке c самой низкой.

Итак, на участке cda температура повышалась от T_1 до T_2 , а на участке abc — понижалась от T_2 до T_1 . ◀

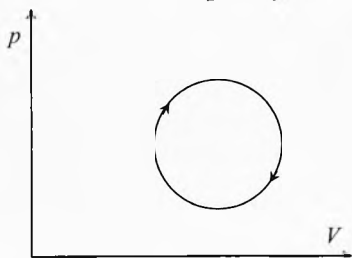


Рис. 11. Круг на pV -диаграмме

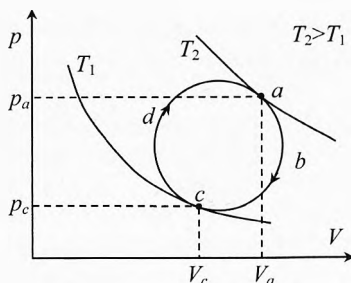


Рис. 12. Круг на pV -диаграмме

✎ **Пример 8.** Как изменялся объём в круговом процессе, изображенном на рис. 13?

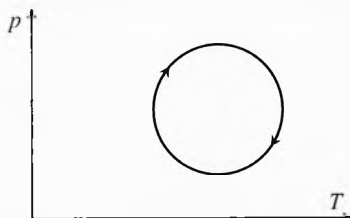


Рис. 13. Круг на pT -диаграмме

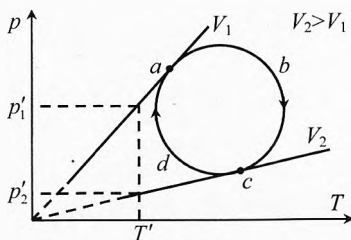


Рис. 14. Круг на pT -диаграмме

→ **Решение.** Проведем две изохоры, касающиеся снизу и сверху графика циклического процесса (рис. 14).

Объём V_1 в процессе на верхней изохоре меньше объёма V_2 в процессе на нижней изохоре.

Действительно, при любой фиксированной температуре T' давление больше на верхней изохоре, $p'_1 > p'_2$, значит, согласно закону Бойля–Мариотта,

$$p'_1 \cdot V_1 = p'_2 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p'_1}{p'_2} > 1 \Rightarrow V_2 > V_1.$$

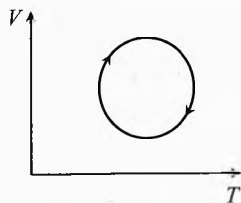


Рис. 15. Круг на pT -диаграмме

Тогда в точке *a* объём минимальный (V_1), а в точке *c* – максимальный (V_2). Следовательно, на участке *abc* объём увеличивается, а на участке *cda* уменьшается. ←

Решите сами, как изменяется давление в круговом процессе, изображенном на рис. 15.

✎ **Пример 9.** Три баллона емкостями $V_1 = 3$ л, $V_2 = 7$ л и $V_3 = 5$ л наполнены соответственно кислородом ($p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па), азотом ($p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па) и углекислым газом ($p_3 = 3 \cdot 10^5$ Па) при одной и той же температуре (рис. 16). Баллоны соединяют между собой, причём образуется смесь той же температуры. Каково давление в смеси?

→ **Решение.** После открытия клапанов все газы перемешаются. Согласно закону Дальтона, каждый газ будет создавать во всех сосудах одно и то же давление независимо от наличия других газов, а давление смеси будет равно их сумме:

$$p = p'_1 + p'_2 + p'_3,$$

где p'_1 – давление, созданное кислородом во всех сосудах. Согласно закону Бойля–Мариотта:

$$p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2 + V_3) \Rightarrow p'_1 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

Аналогично азот и углекислый газ создадут давление:

$$p'_2 = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2 + V_3}, \quad p'_3 = \frac{p_3 V_3}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

Подставляя выражения для p'_1 , p'_2 и p'_3 в первое уравнение, получим:

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = 2,8 \cdot 10^5 \text{ Па.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Давление смеси газов станет равным $2,8 \cdot 10^5$ Па.

Примечание. Следует отметить, что газы перемешаются за довольно длительное время, а давление, одинаковое во всех сосудах согласно полученной формуле, установится практически мгновенно. Указание на то, какие газы были в сосудах, оказалось ненужным для решения задачи (то есть задача переопределена).

✎ **Пример 10.** До какой температуры нужно нагреть запаянный шар, содержащий только $m = 17,5$ г воды, чтобы он разорвался, если стенки шара выдерживают давление 100 атм? Объём шара $V = 1$ л.

→ **Решение.** Предположим, что вся вода при нагревании испарится (рис. 17). Тогда из уравнения Клапейрона–Менделеева:

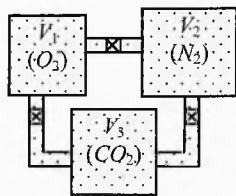


Рис. 16. Смесь газов

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow T = \frac{pVM}{Rm}.$$

$$T = \frac{10^7 \cdot 10^{-3} \cdot 0,018}{8,31 \cdot 0,0175} = 1237 \text{ (K)} \approx 1,2 \cdot 10^3 \text{ (K)}.$$

Результат округлим до двух значащих цифр из-за низкой точности данных: данные объёма и давления определены с точностью всего в одну значащую цифру. Даже вторая цифра в ответе является сомнительной. Очевидно, что при температуре такого порядка вся вода, конечно, испарится и решение правомерно. —

✓ **Ответ.** Чтобы шар разорвался, нужно нагреть его примерно до одной тысячи двухсот Кельвинов или 950°C .

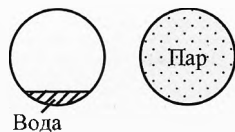


Рис. 17. Взрыв шара

✎ **Пример 11.** Сколько молекул воздуха выйдет из комнаты объёмом $V_0 = 120 \text{ м}^3$ при повышении температуры от $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 25^\circ\text{C}$? Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

➤ **Решение.** При нагревании воздуха давление его должно повышаться, но т. к. помещения имеют щели, часть воздуха выходит из комнаты, и процесс идёт изобарно, но с уменьшающимся количеством вещества.

Используя уравнение $p = nkT$ и $n = \frac{N}{V}$, получим: $N = \frac{pV}{kT}$.

$$\text{Тогда } \Delta N = N_2 - N_1 = \frac{p_0 V_0}{kT_2} - \frac{p_0 V_0}{kT_1}; \quad \Delta N = \frac{p_0 V_0 (T_1 - T_2)}{k \cdot T_1 \cdot T_2};$$

$$\Delta N = \frac{10^5 \cdot 120 \cdot (-10)}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 288 \cdot 298} \approx -10^{26}. —$$

✓ **Ответ.** Количество молекул в комнате уменьшится на 10^{26} штук.

✎ **Пример 12.** Оболочка аэростата объёмом $V = 1600 \text{ м}^3$, находящегося на поверхности Земли, наполнена водородом на $n = 7/8$ при давлении $p_0 = 101 \text{ кПа}$ и температуре $t_0 = 15^\circ\text{C}$. Аэростат поднялся на высоту, где давление $p_1 = 79,3 \text{ кПа}$ и температура $t_1 = 2^\circ\text{C}$. Сколько водорода потерял аэростат при своём подъёме в результате расширения газа (рис. 18)?

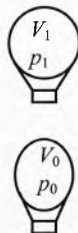


Рис. 18. Потеря водорода

➤ **Решение.** Количество потерянного водорода $v_n = v_0 - v_1$.

По уравнению Клапейрона–Менделеева, $p_0 V_0 = v_0 R T_0$, где $V_0 = nV$ – начальный объём водорода.

На некоторой высоте оставшийся водород занимает весь объём оболочки:

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \text{ где } V_1 = V. \text{ Тогда } \nu_n = \frac{p_0 n V}{R T_0} - \frac{p_1 V}{R T_1} \text{ или } \nu_n = \frac{V}{R} \left(\frac{p_0 n}{T_0} - \frac{p_1}{T_1} \right);$$

$$\nu_n = \frac{1600}{8,31} \left(\frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 7}{288 \cdot 8} - \frac{7,93 \cdot 10^4}{275} \right) \approx 3,6 \text{ кмоль.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Аэростат потерял 3,6 кмоль водорода.

✎ **Пример 13.** Фабричная труба высотой $h=50$ м выносит дым при температуре $t=60^\circ\text{C}$. Оценить перепад давления в трубе, обеспечивающий тягу. Температура воздуха равна $t_0=-10^\circ\text{C}$, плотность воздуха $\rho_0=1,29 \text{ кг/м}^3$.

✎ **Решение.** Давление дыма на выходе из трубы примерно равно давлению p_0 воздуха на этой высоте (рис. 19). Перепад давления, обеспечивающий тягу равен разности между давлением перед печью p_n и давлением p дыма на нижнем уровне внутри печи: $\Delta p = p_n - p$, благодаря чему кислород (воздух) попадает снаружи в печь и поддерживает горение.

Разность давлений дыма внизу и вверху трубы $p - p_0 = \rho g h$, где ρ – плотность дыма. Разность давлений воздуха внизу и вверху трубы $p_n - p_0 = \rho_0 g h$. Из последних двух уравнений и предыдущего анализа следует, что тяга в трубе обеспечивается разностью давлений, равной:

$$\Delta p = p_n - p = (\rho_0 - \rho) g h. \quad (17)$$

Плотность дымовых газов (без учета сажи) найдём из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \frac{m}{M} \cdot RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

$$\text{Аналогично для плотности воздуха: } \rho_0 = \frac{p_0 M_0}{RT_0}.$$

Для расчёта плотности дыма будем считать, что его среднее давление приблизительно равно атмосферному ($p \approx p_0$):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p M T_0}{p_0 M_0 T} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{M T_0}{M_0 T}.$$

Молярная масса дыма M зависит от природы топлива, о котором нам не сообщили. Если топят природным газом, то дым состоит из углекислого газа CO_2 , паров воды H_2O и азота N_2 из воздуха. Молярная масса такого дыма примерно равна молярной массе воздуха M_0 . Если же топят углем, то дым состоит в основном из азота N_2 и углекислого газа, молярная масса которого несколько больше, чем у воздуха. Из-за дефицита данных будем считать в первом приближении $M \approx M_0$. Тогда из последнего уравнения следует:

$$\rho \approx \rho_0 T_0 / T. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим:

$$\Delta p \approx (1 - T_0/T) \rho_0 g h = (1 - 263/333) \cdot 1,29 \cdot 9,8 \cdot 50 = 133 \text{ Па.}$$

Из-за допущенных приближений оставим в ответе один знак. ✓

✓ **Ответ.** Перепад давлений в трубе составляет около ста паскаль.

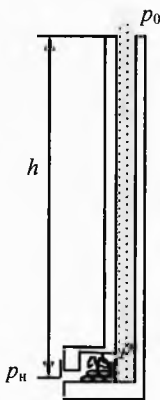


Рис. 19. Перепад давления в трубе

✎ **Пример 14.** В герметичном цилиндре, над массивным теплонепроницаемым поршнем находится столько же воздуха, сколько и под ним $v_1=v_2=v$, при одной и той же температуре $T_0=400$ К. Давление под поршнем p_2 в два раза больше, чем над ним p_1 . До какой температуры T нужно нагреть воздух под поршнем, при неизменной температуре верхней части, чтобы поршень расположился посередине цилиндра?

✎ **Решение.** Решая задачу, можно начинать со вспомогательных действий, чтобы расчистить путь к направлению главного удара, особенно если его не очень видно. Но можно сразу *«брать быка за рога»* и попутно решать вспомогательные задачи для достижения цели. Мы пойдем здесь вторым путём.

Запишем уравнение Клапейрона, для двух состояний воздуха в нижней части цилиндра (рис. 20):

$$\frac{p_2 V_2}{T_0} = \frac{p'_2 V'_2}{T} \Rightarrow T = \frac{p'_2 V'_2}{p_2 V_2} \cdot T_0. \quad (19)$$

Из условия следует, что

$$V'_1 = V'_2 = 0,5 V_{\text{ц}}, \quad (20)$$

где $V_{\text{ц}}$ – объём цилиндра (не заданный по условию). Исходные объёмы нижней и верхней частей цилиндра выразим из очевидного соотношения $V_1 + V_2 = V_{\text{ц}}$. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для верхней и нижней частей цилиндра до нагрева:

$$p_1 V_1 = v_1 R T_0; \quad p_2 V_2 = v_2 R T_0.$$

По условию $v_1 = v_2$, значит, $p_1 V_1 = p_2 V_2$, учитывая, что $p_2 = 2p_1$, получим: $V_1 = 2V_2$, и наконец

$$V_1 = 2V_{\text{ц}}/3, \quad V_2 = V_{\text{ц}}/3. \quad (21)$$

Для нахождения p'_2 запишем условие равновесия поршня в обоих состояниях и закон Бойля–Мариотта для двух состояний воздуха в верхней части цилиндра:

$$F_2 = F_1 + F_T \Rightarrow p_2 = p_1 + mg / S;$$

$$F'_2 = F'_1 + F_T \Rightarrow p'_2 = p'_1 + mg / S;$$

$$p_1 V_1 = p'_1 V'_1 \Rightarrow p_1 \cdot 2V_{\text{ц}}/3 = p'_1 \cdot V_{\text{ц}}/2 \Rightarrow p'_1 = 4p_1/3.$$

Учитывая, что по условию $p_2 = 2p_1$, из четырех уравнений получим:

$$p'_2 = 7p_1/3. \quad (22)$$

Подставляя (20), (21) и (22) в (19), получим: $T = 7T_0/4 = 700$ К. ◀

✓ **Ответ.** Воздух под поршнем нужно нагреть до температуры 700 К.

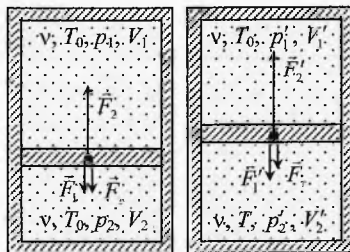


Рис. 20. Выравнивание объёмов



Упражнения

1 Современная техника позволяет создавать вакуум до 1 нПа. Какова концентрация оставшихся молекул газа при температуре 300 К?

2 Два сосуда объёмами V_1 и V_2 наполнены газом при давлениях p_1 и p_2 и температурах T_1 и T_2 соответственно. Сосуды соединили трубкой. Какая установилась температура после наступления равновесия, если давление стало p ?

3 Сосуд объёмом $V=100$ л разделен пополам неподвижной полунепроницаемой перегородкой. В одной половине находится $m_{\text{H}_2}=2$ г водорода, во второй $\nu_{\text{N}_2}=1$ моль азота. Определить давление, установившееся по обе стороны перегородки, если она пропускает только водород. Температура в обеих половинках одинакова и равна $t=127^\circ\text{C}$.

4 Какова разность давлений воздуха между полом и потолком комнаты высотой 2,55 м при нормальных условиях?

5 Из баллона со сжатым водородом емкостью $V=10$ л утекает газ вследствие неисправности вентиля. При $t_1=7^\circ\text{C}$ манометр показывал $p=5\cdot 10^6$ Па. Через некоторое время при $t_2=17^\circ\text{C}$ манометр показал такое же давление. Сколько утекло газа? Какая часть газа утекла, а какая осталась?

6 В сосуде объёмом $V=1$ л заключено $m=0,28$ г азота. Азот нагрет до температуры $t=1500^\circ\text{C}$, при которой $\alpha=0,3$ от всего числа молекул диссоциировали на атомы. Найти давление в сосуде.

7 При уменьшении объёма газа в 2 раза давление увеличилось на 120 кПа и абсолютная температура возросла на 10%. Каким было начальное давление?

8 Футбольный мяч объёмом $V=2,5$ л накачивают насосом, забирающим за один цикл $V_{\text{н}}=0,15$ л атмосферного воздуха при нормальном давлении. Найти давление в камере после $z=20$ качаний, если вначале: а) в ней не было воздуха, б) мяч был наполовину заполнен воздухом при атмосферном давлении, в) мяч был целиком заполнен воздухом при атмосферном давлении.

9 Компрессор захватывает при каждом качании $\Delta V=4$ л воздуха при атмосферном давлении $p_0=10^5$ Па и температуре $t_0=-3^\circ\text{C}$ и нагнетает его в резервуар емкостью $V=1,5$ м³, находящемся при температуре $t=45^\circ\text{C}$. Сколько качаний должен сделать компрессор для увеличения давления в резервуаре $\Delta p=1,96\cdot 10^5$ Па?

10 Найти число ходов поршня, которое надо сделать, чтобы поршневым насосом откачать воздух из сосуда емкостью V от давления p_0 до p , если емкость насоса ΔV .

11 В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l=90$ см находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой $h_1=30$ см; столбик ртути доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, причём часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, оставшейся в трубке, если атмосферное давление $p_a=750$ мм рт.ст. $=\rho g H$?

12 В ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При сверке его с исправным барометром оказалось, что при давлении $p_1=768$ Тор барометр показывает $p'_1=748$ Тор, причём расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки $l=80$ мм. Каково истинное давление, если барометр показывает $p'_2=734$ Тор? $T=\text{const}$.

13 Доказать, что: а) $T_2>T_1$; б) $p_2>p_1$; в) $V_2>V_1$ в процессах представленных на рис. 21 а, б, в, произведённых с одинаковым количеством газа.

14 Изобразить цикл 1-2-3-4-1 (рис. 22) в осях координат p, T и V, T , если через точки 2 и 4 проходит изотерма.

15 Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре до давления $p_0=760$ Тор. Парциальные давления метана и кислорода одинаковы. После герметизации камеры в ней происходит взрыв. Найти установившееся давление в камере после охлаждения продуктов сгорания до первоначальной температуры, при которой давление насыщенных паров воды $p_n=17$ Тор.

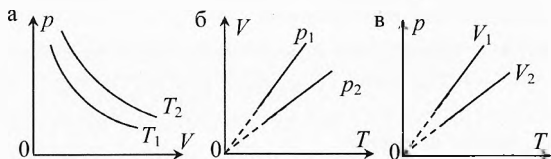


Рис. 21. Сравнение параметров газа на графике

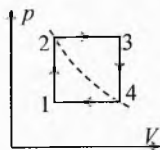


Рис. 22. Смена координат

16 Чему равна масса m азота, которая содержится в воздухе комнаты объемом $V=75$ м³? Среднеквадратичная скорость молекул азота $v=500$ м/с. Считать, что воздух состоит только из азота и кислорода. Концентрация молекул азота в $\beta=4$ раза больше концентрации молекул кислорода. Атмосферное давление $p=10^5$ Па.

17 Серный ангидрид в количестве $\nu_1=1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1=1000$ К, при которой он частично диссоциирует на сернистый ангидрид и кислород согласно реакции: $\text{SO}_3=\text{SO}_2+\frac{1}{2}\text{O}_2$. Степень диссоциации в этих условиях $\alpha_1=0,2$. Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2=0,4$ моль SO_3 , то для создания такого же давления газ пришлось нагреть до температуры $T_2=2000$ К. Определить степень диссоциации во втором опыте.

18 Подопытный кролик дышит газовой смесью, состоящей на $1/3$ из молекул кислорода и на $2/3$ – из молекул гелия. Найти плотность этой смеси при температуре 50°C и давлении $1,2$ атм.

19 При погружении спутника в тень Земли его абсолютная температура в начале равная $T_0=300$ К уменьшилась на 1% , при этом давление воздуха в спутнике понизилось на $|\Delta p|=8$ Тор. Определить массу воздуха в спутнике, если его объем $V=10$ м³. Молярная масса воздуха $M=29$ г/моль.

20 По некоторым оценкам масса озона (O_3) в атмосфере Венеры составляет $\alpha=10^{-5}\%$ от массы всей атмосферы. Какой толщины слой образовал бы озон, если бы он собрался вблизи поверхности планеты и имел бы температуру и давление такие же, как на поверхности Венеры. Ускорение силы тяжести на поверхности Венеры $g=8,9$ м/с². Температура атмосферы достигает $T=800$ К.

21 Атмосфера Венеры в основном ($96,5\%$) состоит из углекислого газа CO_2 . Масса атмосферы Венеры составляет $m=4,8 \cdot 10^{20}$ кг. Чему равна плотность углекислого газа вблизи поверхности Венеры, если его температура $T=740$ К? Радиус Венеры $R_B=6050$ км, а ускорение свободного падения $g=8,9$ м/с². Толщина атмосферы Венеры много меньше радиуса планеты.

22 Колокол для подводных работ объемом $V=10$ м³ опускается вверх дном с борта корабля на дно водоема глубиной $h=20$ м (рис. 23). Запешая в колокол вода

вытесняется из него с помощью баллонов со сжатым воздухом. Объём одного баллона $V_6=40$ л, давление воздуха в нём $p_6=200$ атм. Найти минимальное количество баллонов, которое нужно подсоединить к колоколу с помощью шланга, чтобы вытеснить из него воду?

23 Воздух в основном состоит из азота и кислорода. Концентрация молекул кислорода в $\alpha=4$ раза меньше концентрации молекул азота. Чему равна суммарная кинетическая энергия вращения всех молекул кислорода, который содержится в воздухе комнаты объёмом $V=50$ м³ при давлении $p=10^5$ Па?

24 Над газом совершают циклический процесс, состоящий из политропы 1-2, изохоры 2-3 и изобары 3-1, представленный на осях p, V . Нарисовать эту диаграмму в координатах p, T и V, T (рис. 24).

25 На рис. 25 представлен циклический процесс 1-2-3-1. Нарисовать эту диаграмму в координатах p, T и V, T .

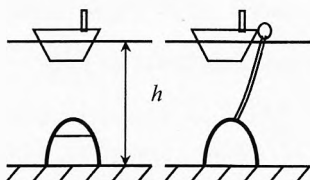


Рис. 23. Вытеснение воды из купола

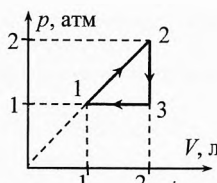


Рис. 24. Смена координат диаграммы

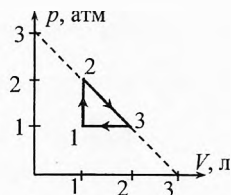


Рис. 25. Смена координат диаграммы

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $n = \frac{p}{kT} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ м}^{-3}$.

2 $p_1 V_1 = \nu_1 RT_1, p_2 V_2 = \nu_2 RT_2, p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT; \Rightarrow T = \frac{p(V_1 + V_2)}{p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2}$.

3 $p_1 = p_{H_2} = \frac{m_{H_2} RT}{M_{H_2} V} = 33 \text{ кПа}; p_2 = p_{H_2} + p_{H_2}; p_{H_2} = \frac{\nu_{N_2} RT}{V/2};$

$\Rightarrow p_2 = \left(\frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} + 2\nu_{N_2} \right) \frac{RT}{V} = 100 \text{ кПа}.$

4 $\Delta p = \rho gh = \frac{pM}{RT} gh; \Delta p = \frac{10^5 \cdot 0,029}{8,31 \cdot 273} \cdot 9,8 \cdot 2,55 = 32 \text{ Па}.$

5 $\Delta \nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{(p + p_a)V}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = -0,29 \text{ моль}; \frac{|\Delta \nu|}{\nu_1} = \frac{|T_1 - T_2|}{T_2} = 3,4\%.$

6 $p = \frac{RT(1 + \alpha)m}{VM} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$

7 $p_0 V = \nu RT, (p_0 + \Delta p) \cdot V/2 = \nu R \cdot 1,1 T; p_0 = \Delta p/1,2 = 100 \text{ кПа}.$

8 Начальное количество вещества в камере $\nu_0 = \frac{p_0 V_0}{RT}$, где V_0 – начальный объём воздуха в мяче. За каждый цикл насоса в камеру попадает $\Delta \nu = \frac{p_0 V_n}{RT}$. Через z циклов: $\nu = \nu_0 + z \cdot \Delta \nu = \frac{p_0}{RT} \cdot (V_0 + z \cdot V_n)$, а давление $p = \frac{\nu RT}{V}$; $\Rightarrow p = \frac{p_0}{V} \cdot (V_0 + z \cdot V_n)$.
 а) $p = \frac{p_0}{V} \cdot (z \cdot V_n) = 1,2$ атм; б) $p = \frac{p_0}{V} \cdot \left(\frac{V}{2} + z \cdot V_n\right) = 1,7$ атм; в) $p = \frac{p_0}{V} \cdot (V + z \cdot V_n) = 2,2$ атм.

9 Компрессор должен сделать $z = \frac{\Delta p T_n V}{p_0 T \Delta V} \approx 624$ качаний.

10 По закону Бойля–Мариотта, для первого хода поршня: $p_0 V = p_1 (V + \Delta V)$. Для второго хода поршня: $p_1 V = p_2 (V + \Delta V)$. Откуда получим: $\frac{p_0}{p_2} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^2$. Аналогично для конечного давления p и искомого числа ходов поршня z : $\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^z$. Прологарифмировав это выражение, получим: $z = \frac{\ln(p_0/p)}{\ln(1 + \Delta V/V)}$.

11 $p_1 V_1 = p_2 V_2$; $V_1 = (l - h_1)S$; $V_2 = (l - h_2)S$; $p_1 = p_a + p_{h_1} = \rho g(H + h_1)$; $p_2 = p_a - p_{h_2} = \rho g(H - h_2)$. Подставляя всё в первое уравнение получим: $\rho g(H + h_1)(l - h_1)S = \rho g(H - h_2)(l - h_2)S$; $\Rightarrow h_2^2 - (H + l)h_2 + h_1(H + h_1 - l) = 0$. Из последнего уравнения получим: $h_2 = \frac{H + l}{2} - \frac{\sqrt{(H + l)^2 - 4h_1(H + h_1 - l)}}{2} = 2,8$ (см).

12 $p_1 = p'_1 + p_{n1}$; $p_2 = p'_2 + p_{n2}$; $p_{n1} \cdot V_{n1} = p_{n2} \cdot V_{n2}$; $V_{n1} = Sl$; $V_{n2} = S \cdot \left(l + \frac{p'_1 - p'_2}{\rho_{\text{рт}} g}\right)$;
 $\Rightarrow p_2 = p'_2 + \frac{p_1 - p'_1}{1 + (p'_1 - p'_2)/(\rho_{\text{рт}} gl)} = 751$ мм рт.ст.

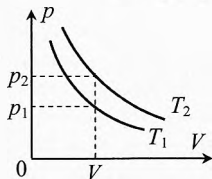


Рис. 26. Сравнение температур

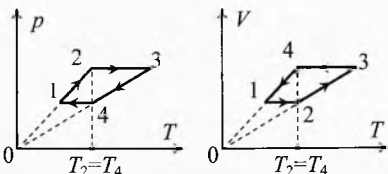


Рис. 27. Смена координат диаграммы

13 $\frac{pV}{T} = \nu R = \text{const}$. а) при одинаковом объёме газ во втором процессе создаёт большее давление (рис. 26): $p_2 > p_1$, значит $T_2 > T_1$;

б) в обоих процессах объём прямо пропорционален температуре $V = \alpha T$; $\Rightarrow \frac{p \cdot \alpha T}{T} = \text{const}$; $\Rightarrow p = \frac{\text{const}}{\alpha}$; т.к. $\alpha_1 > \alpha_2$, то $p_2 > p_1$;

в) $p = \alpha T$; $\Rightarrow \frac{\alpha T \cdot V}{T} = \text{const}$; $V = \frac{\text{const}}{\alpha}$; $\alpha_1 > \alpha_2$; $\Rightarrow V_2 > V_1$.

14 См. рис. 27. pT -диаграмма: $T_2=T_4$, $p_{23}=\text{const}$, $p_{41}=\text{const}$; $V_{12}=\text{const} \Rightarrow p_{12}=\frac{V R}{V_{12}} T_{12}=\alpha_{12} T_{12}$; $V_{34}=\text{const} \Rightarrow p_{34}=\alpha_{34} T_{34}$.

VT -диаграмма: $T_2=T_4$, $V_{12}=\text{const}$, $V_{34}=\text{const}$, $V_{41}=\alpha_{41} T_{41}$, $\Rightarrow V_{23}=\alpha_{23} T_{23}$.

15 Химическая реакция процесса $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$. Парциальное давление газа в сосуде пропорционально количеству молекул этого газа:

$p = \frac{N}{N_A} \cdot \frac{RT}{V} = \alpha \cdot N$. Значит, половина молекул метана останется не прореагировавшей и создаст давление $p_1=p_{10}/2=p_0/4=190$ Тор. Количество образовавшихся молекул углекислого газа равно количеству прореагировавших молекул метана, значит $p_{\text{CO}_2}=p_{10}-p_1=p_0/4=190$ Тор. Большая часть образовавшихся молекул воды сконденсируется, а пар будет насыщенным: $p_{\text{пара}}=p_{\text{н}}=17$ Тор. Согласно закону Дальтона установившееся давление в камере равно сумме парциальных давлений всех газов в камере:

$$p = p_1 + p_{\text{CO}_2} + p_{\text{пара}} = p_0/2 + p_{\text{н}} = 397 \text{ Тор.}$$

16 Из формулы для среднеквадратичной скорости молекул азота выразим температуру воздуха: $v = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{N}_2}}}$, $\Rightarrow T = \frac{v^2 \cdot M_{\text{N}_2}}{3R}$.

$$\text{Найдём массу азота: } m = \frac{p_{\text{N}_2} \cdot V \cdot M_{\text{N}_2}}{RT} = \frac{3p_{\text{N}_2} \cdot V}{v^2}.$$

Поскольку парциальное давление пропорционально концентрации газа ($p=nkT$), то $p_{\text{N}_2} = p \frac{\beta}{\beta+1}$. Окончательно получим: $m = \frac{3\beta pV}{(\beta+1)v^2} = 72 \text{ кг.}$

17 В процессе диссоциации из одной молекулы SO_3 получается 1,5 молекулы (одна молекула SO_2 и половины молекулы O_2). Следовательно, в первом случае количество вещества после реакции будет равно: $v'_1=v_1(1-\alpha+1,5\alpha_1)=v_1(1+0,5\alpha_1)$. А во втором случае: $v'_2=v_2(1+0,5\alpha_2)$.

По условию: $p'_1 = p'_2$, где $p'_1 = \frac{v'_1 RT_1}{V}$, $p'_2 = \frac{v'_2 RT_2}{V}$ — давления после реакции в обоих случаях. Решая эти уравнения, получим: $\alpha_2 = \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} (2 + \alpha_1) - 2 = 0,75$. То есть во втором случае диссоциировало 75% молекул SO_3 .

18 Из определения плотности $\rho=m/V$ и уравнения состояния газа $pV=\frac{m}{M} RT$, получим: $\rho = \frac{pM}{RT}$. Задача сводится к нахождению молярной массы смеси.

$$M = \frac{1}{3} M_1 + \frac{2}{3} M_2 = 0,013 \text{ кг/моль}; \quad \rho = 0,596 \text{ кг/м}^3 \approx 0,60 \text{ кг/м}^3.$$

$$\textbf{19} \quad p_0 V = \frac{m}{M} RT_0; \quad (p_0 - |\Delta p|) V = \frac{m}{M} R(T_0 - |\Delta T|); \quad \Rightarrow \quad m = \frac{MV \cdot |\Delta p|}{R \cdot |\Delta T|} \approx 12 \text{ кг.}$$

20 Давление p атмосферы можно вычислить как силу тяжести столба газа сечением S , отнесенной к единице поверхности площади S : $p=mg/S$. Тогда масса

озона на единицу поверхности планеты: $m_{O_3} = \alpha \cdot m = \alpha \cdot pS / g$. Если бы весь озон собрался бы на поверхности Венеры и имел бы давление p и температуру T , то высота его слоя была бы равна h (по закону Бойля–Мариотта):

$$pSh = \frac{m_{O_3}}{M_{O_3}} RT; \Rightarrow h = \frac{\alpha RT}{gM_{O_3}} \approx 1,6 \text{ мм.}$$

21 Давление, которое создаёт углекислый газ на поверхность планеты, равно отношению общего веса углекислого газа к площади планеты: $p = \frac{mg}{S} = \frac{mg}{4\pi R_B^2}$.

Тогда плотность углекислого газа на поверхности: $\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{mgM}{4\pi R_B^2 RT} \approx 66,5 \text{ кг/м}^3$.

22 Начальное количество воздуха в колоколе: $v_1 = \frac{p_a V}{RT} = \frac{10(\text{атм} \cdot \text{м}^3)}{RT}$. После вытеснения всей воды в нём должно быть: $v_2 = \frac{(p_a + \rho gh)V}{RT} = \frac{30(\text{атм} \cdot \text{м}^3)}{RT}$. Количество воздуха в баллоне: $v_6 = \frac{p_6 V_6}{RT} = \frac{8(\text{атм} \cdot \text{м}^3)}{RT}$. Пренебрегая воздухом, оставшимся в баллоне ($v_{6, \text{ост}} \approx \frac{(p_a + \rho gh)V_6}{RT} \approx \frac{0,12 \cdot (\text{атм} \cdot \text{м}^3)}{RT}$), получим, что необходимо количество баллонов: $N = (v_2 - v_1) / v_6 = 2,5$. То есть нужно иметь в наличии 3 баллона.

23 Полная внутренняя энергия кислорода в комнате: $E_k = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} p_k V$, где $p_k = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot p = \frac{p}{5}$ – парциальное давление кислорода; $i=5$ – число степеней свободы молекул кислорода, причём 3 из них приходятся на поступательное движение молекул, а 2 – на вращение молекул. Искомая кинетическая энергия вращения: $E_{k, \text{вр}} = \frac{2}{2} p_k V = pV/5 = 1 \text{ МДж}$.

24 Для облегчения построения представим диаграмму в координатах p, T справа от исходной, а в координатах V, T – под диаграммой в координатах p, T (рис. 28).

По данным из исходных графиков для состояний 1 и 2 используя уравнение $pV = \nu RT$, получим, что $T_2 = 4T_1$. Поскольку T_1 – самая низкая температура в процессе, а T_2 – самая высокая, соответствующим образом выберем масштаб на оси температур, чтобы графики занимали центральную часть квадранта. Используя законы Шарля и Гей-Люссака и данные задачи, построим точки, соответствующие состояниям 1, 2 и 3, а также графики изохорного 2-3 и изобарного 3-1 процессов на диаграмме в координатах p, T .

Переход 1-2 не относится к изопроцессам, а описывается, как видно из графика, уравнением $p = \alpha V$, где α – постоянная величина. Выразив из этого уравнения объём V и подставив его в уравнение состояния газа $pV = \nu RT$, получим зависимость давления от температуры: $p^2 = \alpha \nu RT$, квадрат давления газа прямо пропорционален абсолютной температуре, или абсолютная температура пропорциональна квадрату давления газа. График этой зависимости представляет собой участок ветви параболы от 1 до 2, лежащей на боку с вершиной в начале координат. Проводим эту параболу по трем точкам: начало координат, 1 и 2.

Для построения диаграммы в координатах V, T сначала построим точки, соответствующие состояниям 1, 2, 3, взяв значения соответствующих параметров на предыдущих диаграммах. Далее соединяем точки 2 и 3 отрезком прямой, учитывая, что это – изохора. Точки 3 и 1 также соединяем отрезком прямой, которая должна «смотреть» в начало координат, т.к. процесс 3-1 – изобарный. График политропного процесса 1-2 построим, получив зависимость объёма от температуры, как в предыдущем случае:

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha V \\ pV &= \nu RT \end{aligned} \right| \Rightarrow \alpha V^2 = \nu RT.$$

Опять получилась квадратичная зависимость, только теперь абсолютной температуры от объёма. График этой зависимости в координатах V, T представляет собой участок ветви параболы с вершиной в начале координат, лежащей на боку. Построим его аналогично предыдущему по трем точкам.

25 Указание. Решение аналогично решению предыдущей задачи. Максимальная температура будет в точке посередине отрезка 2-3. Зависимость p от V на этом участке описывается уравнением $p=b(V-3V_1)$, где $b=-1$ атм/л. Участок 2-3 в координатах p, T и V, T отображается в виде куска параболы, лежащей на боку, с вершиной $(2, 25T_1; 1,5$ атм) в координатах p, T , ветви которой проходят через начало координат и точку $(0; 3$ атм); аналогично в координатах V, T вершина параболы $(2, 25T_1; 1,5$ л), а ветви параболы проходят через начало координат и точку $(0; 3$ л). Желаем успеха в искусстве изображения.

При отображении графиков процессов, заданных в одних координатах (например, p и V) в другие координаты, третий параметр (например, T) приходится выбирать произвольно. Нужно оценить по исходным графикам процессов: этот параметр имеет в первом состоянии минимальное, максимальное или промежуточное значение, и в соответствии с этим выбирать масштаб на оси для этого параметра. Кроме того, соотношения между параметрами известных состояний должны отображаться строго в одинаковых пропорциях при любых комбинациях координат. Например, если объём на диаграмме p, V отличается в два раза в состояниях 1 и 2, то в координатах V, T объём во втором состоянии нужно обязательно изобразить в два раза больше, чем в первом состоянии, и так везде, а не делать тят-ляп, ибо истина конкретна. Все мы хотим жить красиво, а для этого каждый шаг нужно привыкать делать чётко. Любая работа заслуживает, чтобы её делали хорошо.

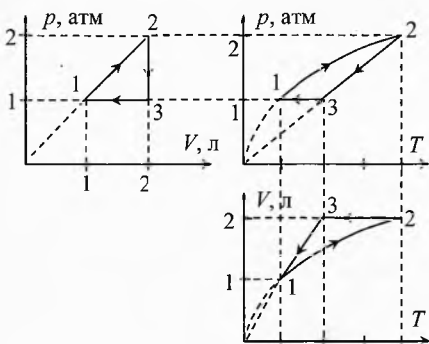


Рис. 28. Смена координат диаграммы

Глава 3. Первое начало термодинамики

Я смиренно стараюсь охватить хотя бы бесконечно малую долю разума, ясно проявляющегося в природе.

Альберт Эйнштейн

Испокон веков люди использовали простые механизмы: рычаги, наклонную плоскость, колесо и др. Работа совершалась с помощью простых машин за счёт энергии ветра, мускульной силы людей и животных.

Около 200 лет назад началось широкое применение внутренней энергии топлива. Сейчас около 80% энергии, используемой человечеством, является внутренней энергией химического топлива и атомной энергией.

***Термодинамика** – раздел физики, в котором тепловые явления изучаются на основе анализа возможных превращений энергии в макроскопических системах.*

Законы термодинамики справедливы для всех макроскопических тел, независимо от их внутреннего строения.

§ 18. Внутренняя энергия

Термодинамические системы. В термодинамике используется понятие термодинамической системы.

***Термодинамическая система** – совокупность тел, способных обмениваться энергией и веществом между собой и с другими телами (внешней средой).*

Простыми примерами таких систем являются: стакан с чаем, кастрюля с супом, цилиндр с газом, закрытый поршнем (рис. 1) и т.д.

Дистиллированная вода – это физически однородная среда.

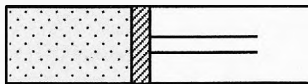


Рис. 1. Термодинамическая система

*Термодинамическая система называется **физически однородной**, если её состав и все физические свойства одинаковы в любых частях этой системы.*

Жидкая вода со льдом и паром – это химически однородная среда.

*Термодинамическая система называется **химически однородной**, если она состоит из одного химического вещества,*

Естественно, что термодинамические системы могут быть неоднородны как физически, так и химически.

Одним из важнейших параметров термодинамической системы является её внутренняя энергия. В дальнейшем, вместо сочетания слов термодинамическая система, будем пользоваться, для краткости, термином – *тело*.

Внутренняя энергия тела. Любому телу в данной системе отсчёта соответствует определенное значение механической энергии*. Кроме того, телу приписывается внутренняя энергия. Внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Обозначим внутреннюю энергию тела буквой U . Таким образом, по определению, внутренняя энергия тела (термодинамической системы):

$$U = E_k + E_n,$$

где $E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki}$ – сумма кинетической энергии хаотического движения молекул; N – число молекул в теле, $E_n = \sum_{i,j=1}^N E_{nij}$ – сумма потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой.

В твёрдом и жидком состояниях значительную роль играет как кинетическая, так и потенциальная составляющие внутренней энергии.

В разреженных газах, например, при нормальном атмосферном давлении, и даже в десятки раз выше его, энергия взаимодействия (притяжения) молекул ничтожна по сравнению с кинетической, поэтому ею можно пренебречь.

Внутренняя энергия газа. Вычислим внутреннюю энергию идеального газа. Полученный результат можно использовать и для разреженного реального газа (для давлений от 0 до десятков атмосфер).

Так как молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой (кроме моментов соударений), то вся внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетической энергии его молекул:

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki},$$

где $N = \nu \cdot N_A$ – число молекул в теле, $\bar{E}_k = \frac{i}{2} kT$ – средняя кинетическая энергия одной молекулы.

Решая совместно, получим:

$$U = \nu N_A \frac{i}{2} kT.$$

* Механическая энергия тела равна сумме его кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия с другими телами.

Так как $N_A \cdot k = R$, получим:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT \quad (1)$$

Это уравнение называется **калорическим уравнением состояния газа** в отличие от термического уравнения состояния ($pV = \nu RT$).

Таким образом, внутренняя энергия идеального (и разреженного реально-го) газа зависит от числа степеней свободы молекул: $i=3$ – для одноатомных; 5 – для двухатомных; 6 – для многоатомных; число степеней свободы может быть и дробным для смеси газов (см. гл. 2); внутренняя энергия газа прямо пропорциональна количеству вещества в теле и абсолютной температуре.

При неизменном химическом составе и количестве вещества внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры и не зависит от способа, которым достигнуто это состояние (закон Джоуля).

Учитывая, что $pV = \nu RT$, получим ещё одно выражение для внутренней энергии идеального газа:

$$U = \frac{i}{2} pV \quad (2)$$

Пример 1. В доме, где начальная температура $t_1=12^\circ\text{C}$ протопили печь. В результате температура в комнате объёмом 50 м^3 увеличилась на 15°C . Оценить изменение внутренней энергии воздуха в комнате. Какая часть молекул покинет её?

Решение. Как видно из (2), внутренняя энергия изменится, если при неизменном составе воздуха ($i=\text{const}$) изменится произведение давления на объём. Объём комнаты остаётся постоянным и давление тоже. Казалось бы, при нагревании воздух в комнате должен создавать более высокое давление. Но атмосферное давление снаружи не изменится (оттого, что протопили печь в данном доме). Благодаря щелям часть воздуха выйдет из комнаты и давление останется прежним, значит, и внутренняя энергия воздуха в комнате не изменится. Средняя энергия одной молекулы возрастет, но часть молекул покинет комнату. Вычислим «ушедшую» часть.

$$\text{Так как } U_1=U_2, \text{ а } U=\frac{i}{2}\nu RT, \text{ то: } \frac{i}{2}\nu_1 RT_1 = \frac{i}{2}\nu_2 RT_2; \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{T_1}{T_2};$$

$$\frac{|\Delta \nu|}{\nu_1} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2}; \quad \frac{|\Delta \nu|}{\nu_1} = 1 - \frac{285}{300} = 0,05. \leftarrow$$

Ответ. Внутренняя энергия воздуха в комнате не изменится, выйдет 5% воздуха.

§ 19. Способы изменения внутренней энергии тела

Работа как способ изменения внутренней энергии. Каким образом можно изменить внутреннюю энергию тела? Одним из способов изменения энергии тела, в том числе и внутренней, является работа. Можно, например, нагреть тело за счёт силы трения. С древности известен способ добывания огня трением трута об огниво. На этом же способе основано высекание искры в бензиновых или газовых зажигалках. Можно увеличить внутреннюю энергию газа, сжав его насосом. Газ нагреется, а при многократном качании – даже насос нагреется догоряча. Во всех этих случаях энергия тел изменяется за счёт работы внешних (сторонних) сил $A_{\text{ст}}$. В краткой математической записи это выглядит так:

$$\Delta U = A_{\text{ст}}.$$

Если работа внешних сил над телом положительна ($A_{\text{ст}} > 0$), то его внутренняя энергия возрастает ($\Delta U > 0$). Если же работа сторонних сил над телом отрицательна ($A_{\text{ст}} < 0$), то внутренняя энергия тела уменьшается ($\Delta U < 0$).

Например, при сжатии воздуха с помощью насоса внешняя сила (более верно сказать – человек) совершает положительную работу, и внутренняя энергия воздуха в насосе увеличивается и воздух нагревается. Если же с помощью насоса увеличить объём, занимаемый газом, то работа поршня над газом будет отрицательна, и внутренняя энергия газа уменьшится.

Количество теплоты как способ изменения внутренней энергии. Внутреннюю энергию можно изменить и другим способом, который называется теплопередачей. Известно три вида теплопередачи: теплопроводность, конвекция и излучение.

Путём теплопроводности энергия передаётся от тела с высокой температурой телу с меньшей температурой благодаря ударам хаотически движущихся молекул.

Процесс происходит постепенно – молекулы граничного слоя более горячего тела передают энергию с помощью соударений молекулам граничного слоя менее горячего тела, которые, в свою очередь, передают полученную энергию тоже за счёт соударений внутренним слоям молекул. Граничный же слой молекул горячего тела получает потерянную энергию от внутренних слоев своего тела и вновь отдаёт её холодному телу.

Таким образом, при теплопроводности происходит передача энергии без переноса вещества. Теплопередача путём теплопроводности может осуществляться во всех фазах вещества: твёрдой, жидкой и газообразной.

При конвекции энергия переносится струями жидкости или газа, нагретыми более горячим телом (например, путём теплопроводности). Плотность нагретого слоя жидкости или газа меньше плотности основной части

жидкой (или газообразной) среды. Поэтому в поле силы тяжести нагретый слой поднимается вверх, а на его место, к нагревателю, приходит снизу холодная жидкость или газ. Возможен и другой вариант конвекции, применяемый в холодильниках. Морозильная камера находится сверху. Слой воздуха, примыкающий к ней, охлаждается; его плотность больше, чем у нижних слоев. Поэтому он опускается вниз. На его место приходит более теплый воздух.

При излучении поток тепла от одних тел к другим идёт в виде квантов электромагнитного поля – фотонов, летящих со скоростью света, которые излучаются телами при любой температуре.

Интенсивность излучения тепла абсолютно черным телом пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры (**закон Стефана–Больцмана**):

$$j = \sigma T^4,$$

где j – плотность потока излучения, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана, T – абсолютная температура. Согласно этому закону, только при абсолютном нуле температуры тело не излучает тепло.

Путём излучения мы получаем тепло и свет от Солнца.

Изменение внутренней энергии тела с помощью теплопередачи называется количеством теплоты Q . Если при этом над телом не совершается работа внешними силами, то изменение внутренней энергии равно количеству полученной теплоты:

$$\Delta U = Q.$$

Откуда видно, что при получении тепла ($Q > 0$) внутренняя энергия тела увеличивается ($\Delta U > 0$). Если благодаря теплопередачи внутренняя энергия уменьшается ($\Delta U < 0$), то количество теплоты отрицательно, то есть тело отдаёт тепло ($Q < 0$). Например, внутренняя энергия чайника с водой, стоящего на газовой плите, увеличивается за счёт переданного ему тепла горящим газом.

Если тело получает или отдаёт тепло и над ним совершается работа внешними силами, и его механическая энергия при этом не меняется, то изменение внутренней энергии тела будет равно сумме работы внешних (сторонних) сил и количества теплоты, полученного телом.

$$\Delta U = A_{\text{ст}} + Q.$$

Это выражение есть один из вариантов записи первого начала термодинамики – закона сохранения энергии, применительно к тепловым процессам.

Итак, существует только два способа изменения внутренней энергии тела: совершение работы над телом внешними силами и передача теплоты.

§ 20. Количество теплоты

Изменение внутренней энергии тела путём теплопередачи может происходить в пределах одной фазы, а может и с изменением фазы (агрегатного состояния).

Понятие количества теплоты Q вводится для того, чтобы характеризовать теплообмен. Количество теплоты равно изменению энергии тела, происходящему в результате теплообмена этого тела с другими телами.

Количество теплоты измеряется в джоулях (Дж) или калориях (кал):

$$1 \text{ кал} \approx 4,187 \text{ Дж}$$

Теплоёмкость. Для того чтобы характеризовать тепловые свойства вещества вводится понятие теплоёмкость. Различают удельную теплоёмкость вещества, молярную теплоёмкость и теплоёмкость тела.

***Теплоёмкость тела** – это скалярная величина, характеризующая способность тела изменять свою температуру при подводе и отводе теплоты. Теплоёмкость тела равна энергии, которую получает тело при нагреве на 1°C или отдаёт при охлаждении на 1°C в результате теплообмена.*

Теплоёмкость обозначается C_T и измеряется в Дж/К или кал/К.

В пределах одной фазы при нагревании или охлаждении тела количество теплоты, полученное (отданное) телом, вычисляется по формуле

$$Q = C_T \cdot \Delta t$$

где Δt – изменение температуры тела по шкале Цельсия. Вместо Δt можно писать ΔT , так как изменение температуры по шкале Цельсия и Кельвина одинаковы ($\Delta t = \Delta T$):

$$Q = C_T \cdot \Delta T$$

$$C_T = \frac{Q}{\Delta T}$$

$$[C_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Теплоёмкость любого вещества всегда положительна. Это означает, что при нагревании единицы массы любого вещества на 1 градус путём теплопередачи тело обязательно должно получить тепло, а при охлаждении – отдать (это верно для случая, когда над телом не совершается работа внешними силами).

Кроме теплоёмкости тела вводятся понятия удельной теплоёмкости c и молярной теплоёмкости C , которые связаны с теплоёмкостью тела.

***Удельная теплоёмкость тела** равна энергии, которую получает тело массой 1 кг при нагреве на 1°C или отдаёт при охлаждении на 1°C в результате теплообмена:*

$$Q = cm\Delta t;$$

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t};$$

$$[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

Молярная теплоёмкость равна энергии, которую получает тело, взятое в количестве 1 моль, при нагреве на 1°C или отдаёт при охлаждении на 1°C в результате теплообмена:

$$Q = \nu C \Delta t;$$

$$C = \frac{Q}{\nu \cdot \Delta t};$$

$$[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

При нагревании жидкостей и твёрдых тел увеличиваются как кинетическая, так и потенциальная энергии молекул, а в газах – только кинетическая, поэтому в твёрдом и жидком состояниях одного и того же вещества теплоёмкость больше, чем в газообразном. Причём в жидком состоянии теплоёмкость любого вещества больше, чем в твёрдом. Это говорит о том, что потенциальная энергия молекул жидкости увеличивается при нагревании в большей степени, чем в твёрдом теле.

Плавление и кристаллизация. В фазовых переходах при постоянном давлении изменяется только потенциальная энергия молекул. Поэтому такие процессы происходят без изменения температуры. Например, при плавлении льда (железа и др.) разрушается кристаллическая решетка. Поступающая к телу энергия ($Q_{\text{пл}} > 0$) расходуется на разрушение кристалла. Кинетическая энергия молекул остаётся прежней, а потенциальная увеличивается:

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m,$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}},$$

где λ – модуль удельной теплоты плавления (кристаллизации).

Если при температуре плавления (кристаллизации) тепло отнимается от тела, состоящего, например, из воды или двухфазной равновесной системы вода-лёд, то молекулы объединяются в кристалл, то есть вещество кристаллизуется (превращается в лёд или снег).

Согласно закону сохранения энергии при этом выделится такое же количество тепла ($Q_{\text{кр}} < 0$), которое было затрачено при его плавлении:

$$Q_{\text{кр}} = -\lambda m.$$

Удельная теплота плавления (кристаллизации) равна количеству теплоты, которое необходимо для расплавления единицы массы вещества, взятой при температуре плавления. Она также равна, количеству теплоты, которое выделится при кристаллизации единицы массы вещества, взятой при температуре кристаллизации.

* Напомним, что потенциальная энергия молекул отрицательна, так что по модулю она уменьшается (до нуля в газообразном состоянии), но с учетом знака увеличивается.

Растворение. Из твёрдого состояния в жидкое некоторые вещества могут переходить не только при плавлении, но и при растворении, например, соли и щелочи в воде. На такой переход тоже требуется энергия: например, при растворении соли в воде, кристаллы соли надо разрушить. В этом случае используется понятие удельной теплоты растворения вещества, аналогично процессу плавления:

$$Q_{\text{раств}} = \lambda_{\text{раств}} m, \quad [\lambda_{\text{раств}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Удельная теплота растворения равна количеству теплоты, которое необходимо для растворения единицы массы вещества при данной температуре.

Испарение и конденсация. Молекулы в жидкости хаотично движутся в различных направлениях с различными скоростями. При испарении жидкости с её поверхности вылетают самые быстрые молекулы, энергия которых достаточна для преодоления сил притяжения со стороны оставшихся молекул. Жидкость, потеряв часть самых энергичных молекул, охлаждается.

Для того чтобы процесс испарения продолжался также интенсивно, необходимо пополнение энергии жидкости извне, например, за счёт теплопередачи ($Q_{\text{исп}} > 0$):

$$Q_{\text{исп}} = Lm, \quad [L] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

При конденсации пар отдаёт столько же энергии окружающим телам ($Q_{\text{конд}} > 0$), сколько получил при испарении. Это следует из закона сохранения энергии и подтверждается опытом. Итак:

$$Q_{\text{конд}} = -Lm,$$

где m – масса испарившегося (конденсировавшегося) вещества;

L – удельная теплота парообразования (конденсации).

Удельная теплота парообразования (конденсации) равна количеству теплоты, которое необходимо для испарения единицы массы вещества, взятой при температуре кипения. Она также равна, количеству теплоты, которое выделится при конденсации единицы массы вещества, взятой при температуре кипения.

Чем выше температура жидкости, тем меньше удельная теплота парообразования/конденсации. Например, при температуре 0°C удельная теплота парообразования равна 569 ккал/кг ($2,3 \text{ МДж/кг}$), а при температуре 100°C – 539 ккал/кг ($2,26 \text{ МДж/кг}$).

Удельная теплота парообразования любого вещества, как правило, значительно превышает его удельную теплоту плавления. Почему? Потому что

полностью разорвать связи между молекулами жидкости труднее (требуется больше энергии), чем при плавлении (разрушении кристаллической решетки), где молекулы всё равно остаются рядом и обладают большой энергией взаимодействия.

Вопрос 1. Сравнить внутреннюю энергию 1 кг воды при 0°C и 1 кг льда при той же температуре.

Ответ. Кинетическая энергия молекул воды и льда одинакова, поскольку одинакова температура, а потенциальная энергия воды больше, чем льда, на значение удельной теплоты плавления, то есть на 335 кДж.

Вопрос 2. Что обожжет сильнее: 1 г стоградусного пара или 1 г стоградусной воды?

Ответ. Пар, конденсируясь и охлаждаясь до температуры тела, отдаёт примерно в 8 раз больше тепла, чем 1 г воды, охлаждаясь также до температуры тела, поэтому пар значительно опаснее крутого кипятка. **Будьте осторожны с паром!**

Как отмечалось выше, кроме описанных фазовых переходов возможны переходы из твёрдого состояния в газообразное минуя жидкую фазу (сублимация) и наоборот (десублимация). Эти процессы характеризуются удельной теплотой сублимации.

Таблица 2. Температура, теплота плавления и испарения (или сублимации) простых веществ при нормальном давлении 101325 Па

Вещество	$t_{\text{пл}}, ^\circ\text{C}$	$\lambda, \text{кДж/моль}$	$t_{\text{кип}}$ или $t_{\text{субл}}, ^\circ\text{C}$	$L_{\text{исп}}$ или $L_{\text{субл}}, \text{кДж/моль}$
Азот	-209,86	0,720	-195,75	5,57
Водород	-259,19	0,117	-252,77	0,916
Вольфрам	3420	35	5680	824
Гелий	-271,4 (при 3,0 МПа)	0,007 (при 3 МПа)	-268,934	0,0837
Железо	1538	13,8	2872	350
Золото	1063,4	12,6	2877	331
Кальций	842	8,66	1484	152
Кислород	-218,35	0,444	-182,96	3,41
Медь	1083	13,0	2543	302
Никель	1455	17,6	≈2800	370
Олово	231,97	7,2	≈2450	296,1
Ртуть	-38,89	2,30	356,66	59,23
Свинец	327,44	4,77	1745	178
Серебро	960,5	11,3	2167	251
Углерод (графит)	сублимация	сублимация	4200	—
Цинк	419,5	7,2	906,2	115,3

§ 21. Работа в термодинамике

Рассмотрим другой способ изменения внутренней энергии тела – совершение работы.

Пусть под поршнем находится некоторое количество газа, который изобарно расширяется, толкая поршень (рис. 2). Газ совершит работу A по передвижению поршня на расстояние $\Delta l = l_2 - l_1$:

$$A = F \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

где α – угол между силой \vec{F} и направлением движения поршня. В нашем случае $\alpha = 0$ и $\cos \alpha = 1$.

Сила давления газа на поршень:

$$F = p \cdot S, \quad (4)$$

где p – давление газа, S – площадь поршня.

Подставляя (4) в (3), получим:

$$A = pS(l_2 - l_1) \cdot 1 = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Итак, работа газа при изобарном расширении (или сжатии) равна произведению давления газа на изменение его объёма:

$A = p\Delta V$

(5)

На диаграмме p - V работа газа в определенном масштабе равна площади под графиком зависимости давления от объёма, то есть площади прямоугольника $V_1 1 2 V_2$ (рис. 3).

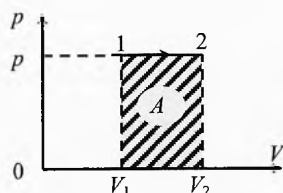


Рис. 3. Работа равна площади под графиком $p(V)$

Из (5) видно: при расширении газа (увеличении объёма) работа газа положительна, при сжатии – отрицательна.

По третьему закону Ньютона, внешнее тело по отношению к газу действует на него с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой. Поэтому работа внешних (сторонних) сил $A_{\text{ст}}$ равна работе газа над внешними телами, взятой с обратным знаком:

$A_{\text{ст}} = -A$

 $A_{\text{ст}} = -p\Delta V.$

Внешняя (сторонняя) сила совершает положительную работу ($A_{\text{ст}} > 0$), когда сжимает газ ($\Delta V < 0$).

✍ **Пример 2.** Под легко подвижным поршнем в горизонтально расположенном цилиндре находится $\nu=2$ моль воздуха. Его нагрели на $\Delta t=10^\circ\text{C}$. Найти работу, которую совершит воздух, находящийся в цилиндре. Атмосферное давление принять равным $p_a=10^5$ Па.

➡ **Решение.** Так как поршень легко подвижен, а цилиндр горизонтален, то давление воздуха в цилиндре постоянно и равно атмосферному ($p=p_a$).

$$A_p = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = \nu RT_2 - \nu RT_1;$$

$$A_p = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R\Delta T = \nu R\Delta t; \quad A_p = 2 \cdot 8,31 \cdot 10 = 166 \text{ Дж} \approx 170 \text{ Дж.} \quad \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Воздух совершит работу, равную $A_p=170$ Дж.

Итак, мы получили выражение для работы газа в изобарном процессе:

$$A_p = \nu R\Delta T \quad (6)$$

Работа газа при изобарном процессе равна произведению количества вещества, универсальной газовой постоянной и изменения температуры.

Из формулы (6) видно, что универсальная газовая постоянная R равна работе совершенной одним молем газа при изобарном нагревании на 1°C (или на 1 К). То есть при изобарном нагревании одного моля любого газа на 1 кельвин газ совершит положительную работу 8,31 Дж.

Формула (5) и (6) справедлива для неизменной силы, т. е. при изобарном процессе. Если же давление газа изменяется, то эту формулу можно использовать только для достаточно малых изменений объёма, таких, что на данном интервале относительное изменение давления $\frac{\Delta p}{p}$ пренебрежимо мало.

Если же требуется вычислить работу при неизобарном процессе с большим изменением объёма, то нужно весь интервал изменения объёма разбить на маленькие участки (рис. 4). На каждом из них вычислить работу и просуммировать:

$$A \approx \sum_{i=1}^z p_i \cdot \Delta V_i,$$

где z – количество участков, p_i – среднее давление на i -м участке, ΔV_i – малое изменение объёма на i -м участке.

То есть работа равна в определенном масштабе площади под графиком зависимости $p(V)$.

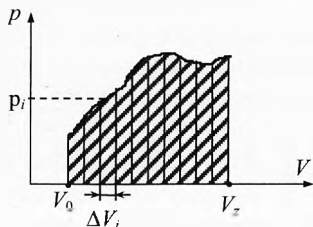


Рис. 4. Работа равна площади под графиком $p(V)$

Более точное, предельно точное, суммирование называется интегрированием. Для интегрирования необходимо знать функциональную зависимость, в нашем случае, давления от объема – $p=p(V)$. При интегрировании также идёт суммирование по отдельным участкам, но разбиение осуществляется до предельно малых интервалов (дифференциалов). Операция интегрирования записывается так:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV,$$

где начальное и конечное значения аргумента (V_1 и V_2) называются пределами интегрирования, dV – бесконечно малое приращение объема, при котором никакие существующие приборы не способны обнаружить изменение давления. Знак \int обозначает операцию интегрирования (предельно точного суммирования).

✎ **Пример 3.** Вычислить работу газа при изотермическом изменении его объема от V_1 до V_2 .

→ **Решение.** $pV = \nu RT$; $A_T = \int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV$; $\Rightarrow A_T = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} \cdot dV$;

$$A_T = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Мы получили выражение для работы газа в изотермическом процессе:

$$A_T = \nu RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Работа газа при изотермическом изменении объема равна произведению количества вещества ν , универсальной газовой постоянной R , абсолютной температуры газа T и натурального логарифма отношения конечного объема к начальному:

Если объем газа увеличивается ($V_2 > V_1$), то работа газа положительна. Если газ сжимается, то есть $V_2 < V_1$, то его работа – отрицательна.

✎ **Пример 4.** Один моль воздуха, находящийся при нормальных условиях, расширяется от объема V_0 до $V=2V_0$ двумя способами – изотермически, потом изобарно. Сравнить работу, совершенную воздухом в этих процессах.

Дано:

$\nu=1$ моль
 $M=0,029$ г/моль
 $p_0=10^5$ Па
 $T_0=273$ К
 $V=2V_0$

$\frac{A_p}{A_T} = ?$

→ **Решение.** При изобарном расширении совершаемая газом работа A_p равна в определенном масштабе площади прямоугольника $12VV_0$ (рис. 5):

$$A_p = p_0(V - V_0) = p_0(2V_0 - V_0) = p_0 \cdot V_0.$$

Учитывая, что $p_0V_0 = \nu RT_0$, получим:

$$A_p = \nu RT_0.$$

При изотермическом процессе работа воздуха A_T в определенном масштабе равна площади заштрихованной фигуры 13VV₀, и как было показано выше вычисляется по формуле:

$$A_T = \nu RT_0 \cdot \ln \frac{V}{V_0}.$$

Подставляя данные, получим: $A_T = \nu RT_0 \cdot \ln 2$

Сравним оба результата:

$$\frac{A_p}{A_T} = \frac{\nu RT_0}{\nu RT_0 \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} = 1,44 \approx 1,4.$$

✓ **Ответ.** При изобарном расширении газ совершит в 1,4 раза большую работу, чем при изотермическом. Это обусловлено тем, что при изобарном процессе среднее давление газа, а значит и сила давления, больше, чем при изотермическом.

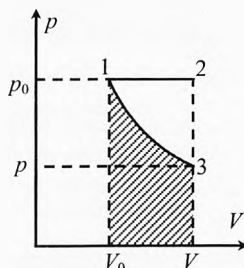


Рис. 5. Сравнение работы газа на изотерме и изобаре

Примечание. Обратим внимание, что все данные, кроме отношения объёмов, оказались лишними, т. е. задача переопределена. Но этого мы могли бы и не заметить, если бы вычислили по отдельности работу в каждом процессе, а затем взяли их отношение. Так что не бойтесь лишних данных в задаче, возможно автор задачи не додумался до более рационального решения, как Вы.

§ 22. Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии)

Ещё древним грекам было известно, что «ничего не возникает из ничего и нечто в ничто не превращается».

Анализ многочисленных наблюдений и специально поставленных опытов, выполненных к середине XIX в., привел немецкого врача Роберта Майера, немецкого естествоиспытателя Германа Людвига Фердинанда Гельмгольца (1821–1894) и английского физика Д. Джоуля к выводу о существовании закона сохранения энергии.

При любых взаимодействиях тел энергия не исчезает бесследно и не возникает из ничего. Энергия может передаваться от одного тела к другому и превращаться из одной формы в другую.



Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц (1821–1894)

Пусть механическая энергия замкнутой системы тел в некоторый момент времени равна E_1 , а внутренняя U_1 . В результате различных внутрен-

них движений и взаимодействий в другой момент времени механическая энергия может принять значение E_2 , а внутренняя – U_2 .

Согласно закону сохранению энергии, сумма механической и внутренней энергии изолированной системы тел остаётся неизменной, то есть:

$$E_1 + U_1 = E_2 + U_2 \quad \text{или} \quad \Delta E + \Delta U = 0.$$

Если же система тел не изолирована и может получать тепло извне (или отдавать), а внешние (сторонние) тела будут совершать над телами системы работу $A_{\text{ст}}$, то энергия системы изменится на значение совершенной работы и переданного количества теплоты Q :

$$\Delta E + \Delta U = Q + A_{\text{ст}}.$$

Это выражение представляет собой закон превращения энергии для неизолированной системы.

В термодинамике часто рассматриваются задачи, когда механическая энергия системы практически не изменяется, то есть $\Delta E \approx 0$. В этом случае:

$$\Delta U = Q + A_{\text{ст}}. \quad (7)$$

Поскольку работа внешних тел над телом (системой тел) всегда равна работе тела над внешними телами, $A = -A_{\text{ст}}$ (это мы показывали для газа), тогда уравнение (7) примет вид $\Delta U = Q - A$ или

$$Q = \Delta U + A.$$

Это основное выражение I начала термодинамики*, то есть закона сохранения энергии применительно к тепловым процессам, сформулировал в 1842 г. Р. Майер, а экспериментально подтвердил Д. Джоуль в 1843 г.

Количество теплоты, полученное (отданное) телом, равно изменению его внутренней энергии и работе, которую совершит тело над внешними телами.

Как отмечалось выше, количество теплоты положительно, когда тело получает тепло, и отрицательно – когда отдаёт. Изменение внутренней энергии положительно, когда она возрастает. Работа газа положительна, когда он расширяется и отрицательна, когда он сжимается.



Юлиус Роберт Майер (1814–1878)

* Первое начало термодинамики и первый закон термодинамики – одно и то же. Но предпочтительнее использовать первое название, так легче идентифицировать, о чем идёт речь, «законов» много, а «начал» мало.

Вопрос 3. Верно ли высказывание: «Нагреть тело – значит дать ему тепло»?

Ответ. Не всегда. Нагреть тело можно не только за счёт тепла, но и за счёт совершения работы над ним внешними силами (сжать, потереть).

Вопрос 4. Внутренняя энергия тела возрастает. Нагревается ли тело?

Ответ. Совсем не обязательно. При фазовых переходах изменяется потенциальная энергия молекул. Например, при плавлении внутренняя энергия возрастает, а температура не увеличивается, т.е. тело не нагревается.

Вопрос 5. Можно ли построить вечный двигатель первого рода, который, будучи однажды запущенным, бесконечно долго совершал бы работу без потребления энергии извне?

Ответ. С XIII в. предпринимались многочисленные попытки его построения. Однако все они не увенчались успехом и привели к мысли о невозможности его существования.

Действительно, согласно I началу термодинамики, при отсутствии подачи тепла работа может совершаться за счёт убыли внутренней энергии:

$$Q = \Delta U + A; \text{ если } Q = 0, \text{ то } A = -\Delta U.$$

После того, как запас энергии иссякнет, двигатель обязательно перестанет работать, какое бы хитроумное изобретение ни было предложено. Поэтому в 1775 г. Французская Академия Наук прекратила рассмотрение проектов вечных двигателей, задолго до того, как было сформулировано I начало термодинамики.

✎ **Пример 5.** Оценить количество теплоты, полученное воздухом комнаты при нагреве на 15°C , если объём комнаты $V = 50 \text{ м}^3$, атмосферное давление $p = 10^5 \text{ Па}$, а начальная температура воздуха $t = 12^\circ\text{C}$.

➔ **Решение.** Процесс изобарный. Используем I начало термодинамики и выражения для изменения внутренней энергии воздуха ($i = 5/2$) и его работы:

$$Q = \Delta U + A; \quad \Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T; \quad A = \nu R \Delta T.$$

Обратим внимание на то, что не весь воздух нагревается на 15°C . Часть его, которая вышла из комнаты, нагреется в среднем менее, чем на 15°C , но вышло всего 5% воздуха (см. пример 1 этой главы), поэтому приблизительно можно считать, что весь он нагреется на 15°C .

$$Q \approx \nu R \Delta T \left(\frac{5}{2} + 1 \right) = \frac{7}{2} \nu R \Delta T; \quad pV = \nu RT; \quad \Rightarrow \quad \nu R = \frac{pV}{T};$$

$$\Rightarrow Q \approx \frac{7}{2} \cdot \frac{pV \Delta T}{T}; \quad Q \approx \frac{7}{2} \cdot \frac{10^5 \cdot 50}{285} \cdot 15 \approx 9,2 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 920 \text{ кДж.} \leftarrow$$

Примечание. Заметим, что от печи воздух получил значительно больше тепла, чем мы вычислили. Дело в том, что воздух, нагреваясь, отдаёт тепло стенам, полу, потолку, и далее поток тепла уходит наружу. Мы топим печь не для того, чтобы нагреть воздух и вещи в комнате, а для того, чтобы теплом от печи уравновесить поток тепла, уходящий из комнаты наружу. То есть мы топим, главным образом, не для увеличения температуры, а для поддержания её на определенном (комфортном) уровне.

✎ **Пример 6.** Определить какая часть энергии, затраченная на образование водяного пара при температуре $t=100^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении, идёт на увеличение внутренней энергии вещества, если удельная теплота парообразования воды $L=2,26$ МДж/кг. Определить в электрон-вольтах изменение внутренней энергии, приходящейся на одну молекулу воды (энергия связи). $1\text{ эВ}=1,6\cdot 10^{-19}$ Дж.

➔ **Решение.** При образовании пара подводимая энергия тратится на разрыв молекулярных связей (увеличение потенциальной энергии) и на «завоевание места под солнцем», то есть на работу по «отодвиганию» атмосферы.

$$Q=\Delta E_{\text{п}}+A; \quad \varepsilon = \frac{\Delta E_{\text{п}}}{Q} = \frac{Q-A}{Q} = 1 - \frac{A}{Q} = 1 - \frac{p\Delta V}{Q}.$$

где ΔV – изменение объёма испарившейся воды; оно примерно в 1000 раз больше объёма воды в жидком состоянии, то есть изменение объёма воды приблизительно равно объёму образовавшегося пара:

$$\Delta V \approx V_{\text{п}}.$$

Поскольку $pV_{\text{п}}=\nu RT$, $Q=Lm$, $\nu = \frac{m}{M}$, то $\varepsilon = 1 - \frac{\nu RT}{Lm} = 1 - \frac{RT}{L \cdot M}$.

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{8,31 \cdot 373}{2,26 \cdot 10^6 \cdot 0,018} \right) \cdot 100\% = (1 - 0,076) \cdot 100\% \approx 92\%.$$

Найдём энергию связи $E_{\text{п0}}$, приходящуюся на одну молекулу:

$$\Delta E = E_{\text{п.пара}} - E_{\text{п.жидк}} = -E_{\text{п0}} \cdot N; \quad N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{M} N_A.$$

Здесь учтено, что потенциальная энергия пара равна нулю: $E_{\text{п.пара}}=0$.

$$\Delta E_{\text{п}} = \varepsilon Q; \quad \Rightarrow \quad E_{\text{п0}} = -\frac{\Delta E_{\text{п}}}{N} = -\frac{\varepsilon \cdot Lm}{N} = -\frac{\varepsilon \cdot LM}{N_A}.$$

$$E_{\text{п0}} = -\frac{0,924 \cdot 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} \cdot 0,018 \text{ кг/моль}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}},$$

$$E_{\text{п0}} = -6,24 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = -6,24 \cdot 10^{-20} \cdot \frac{1 \text{ эВ}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = -0,39 \text{ эВ.} \quad \blacktriangleleft$$

✓ **Ответ.** Потенциальная энергия взаимодействия воды отрицательна, то есть для превращения воды в пар (кроме совершения работы против атмосферного давления) необходимо подвести по 0,39 эВ на каждую молекулу для преодоления потенциальной энергии взаимодействия молекул воды, что составляет 92% всей подводимой энергии.

§ 23. Применение первого начала термодинамики к различным процессам

Изохорный процесс. Это наиболее простой процесс, например, нагревание газа в закрытом сосуде (рис. 6). Запишем I начало термодинамики для изохорного процесса:

$$Q_V = \Delta U_V + A_V.$$

При изохорном процессе газ не совершает работы, поскольку объём газа не изменяется:

$$A_V = 0.$$

Значит, при изохорном процессе количество теплоты, переданное телу, равно изменению его внутренней энергии:

$$Q_V = \Delta U_V.$$

При неизменном химическом составе и количестве вещества в изохорном процессе изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U_V = \frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

Поскольку изменение внутренней энергии не зависит от вида процесса, а является только функцией i , ν и T , то ставить индекс «V» при изменении внутренней энергии нет смысла. Оно будет одинаково для любого процесса. Итак,

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$$

и

$$Q_V = \frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

Найдём удельную теплоёмкость газа при изохорном процессе:

$$c_V = \frac{Q_V}{m \Delta T} = \frac{\Delta U}{m \Delta T} = \frac{i \nu R \Delta T}{2 m \Delta T} = \frac{i R}{2 M}; \quad c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}.$$

Молярная теплоёмкость газа: $C_V = \frac{Q_V}{\nu \Delta T}; \quad C_V = \frac{i}{2} \cdot R.$

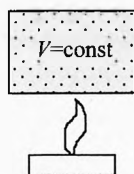


Рис. 6. Процесс изохорный

Пример 7. Вычислить удельную теплоёмкость воздуха при постоянном объёме.

✎ **Решение.** $c_v = \frac{iR}{2M} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{0,029 \text{ кг}/\text{моль}} = 716 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \approx 0,72 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$

Изобарный процесс. Изобарный процесс можно осуществить, подогревая (охлаждая) газ в цилиндре с легкоподвижным поршнем, расположенным вертикально (горизонтально) или под углом к горизонту (рис. 7).

При нагревании давление газа должно увеличиваться, а давление поршня на газ остаётся неизменным; при вертикальном расположении оно складывается из атмосферного давления и давления, обусловленного весом поршня. Поэтому, газ будет поднимать поршень по мере нагревания так, что давление газа останется практически неизменным:

$$p = p_a + \frac{mg}{S}, \text{ где } m - \text{масса поршня, } S - \text{площадь его попе-}$$

речного сечения. В результате нагревания газа происходит увеличение его внутренней энергии, и газ совершает положительную работу A_p :

$$Q_p = \Delta U + A_p.$$

Ранее было получено:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T \quad \text{и} \quad A_p = \nu R \Delta T$$

Из трёх последних уравнений получим количество теплоты:

$$Q_p = \nu R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right).$$

Найдём удельную теплоёмкость газа при изобарном процессе:

$$c_p = \frac{Q_p}{m \Delta T} = \frac{\Delta U + A_p}{m \Delta T} = \frac{1}{m \Delta T} \left(\frac{i}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T \right) = \frac{1}{m \Delta T} \left(\frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T \right);$$

$$c_p = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) \cdot \frac{R}{M}.$$

Молярная теплоёмкость при изобарном процессе:

$$C_p = \frac{Q_p}{\nu \Delta T}; \quad C_p = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) \cdot R.$$

Найдём разность между молярной теплоёмкостью газа при постоянном давлении и постоянном объёме (*соотношение Роберта Майера*).

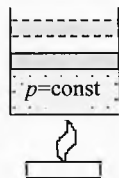


Рис. 7. Процесс изобарный

$$C_p - C_v = \left(\frac{i}{2} + 1\right)R - \frac{i}{2}R = R; \quad \text{или} \quad \boxed{C_p - C_v = R}.$$

Универсальная газовая постоянная равна разности между молярной теплоёмкостью при постоянном давлении и молярной теплоёмкостью при постоянном объёме идеального газа.

Итак, теплоёмкость газов при постоянном давлении больше, чем при постоянном объёме. Дело в том, что при постоянном давлении внутренняя энергия газа изменяется так же, как и при постоянном объёме, но при этом газ, расширяясь, ещё совершает положительную работу. На это тратится часть тепла.

Когда газ охлаждается при постоянном давлении, теплоёмкость также больше, чем при постоянном объёме, причём на столько же. Охлаждаясь изобарно, газ отдаёт тепло за счёт уменьшения своей внутренней энергии и за счёт положительной работы внешней силы, сжимающей газ.

Пример 8. Вычислить удельную теплоёмкость воздуха при постоянном давлении.

Решение.

$$c_p = \left(\frac{i}{2} + 1\right) \cdot \frac{R}{M} = \frac{8,31}{29 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{5}{2} + 1\right) = 1003 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \approx 1 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Пример 9. Найти удельную теплоёмкость при постоянном объёме и давлении смеси из $m_1=10$ г гелия и $m_2=10$ г аргона.

Решение. По условию: $m_1=m_2=m$, оба газа одноатомные ($i=3$).

Согласно I началу термодинамики для изохорного процесса:

$$Q_v = \Delta U = \frac{3}{2}(v_1 + v_2)R\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) = \frac{3}{2}mR\Delta T \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right).$$

$$c_v = \frac{Q_v}{2m\Delta t} = \frac{3}{4}R \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right); \quad c_v = 1,7 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

По I началу термодинамики для изобарного процесса: $Q_p = \Delta U + A$;

$$Q_p = \frac{3}{2}(v_1 + v_2)R\Delta T + (v_1 + v_2)R\Delta T = \frac{5}{2}(v_1 + v_2)R\Delta T = \frac{5}{2}mR\Delta T \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right).$$

$$c_p = \frac{Q_p}{2m\Delta t} = \frac{5}{4}R \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right); \quad c_p = 2,9 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Изотермический процесс. При расширении газ, совершая работу, охлаждается. Но если процесс идёт достаточно медленно, то газ успевает обмениваться теплом с внешней средой так, что его температура остаётся практически постоянной (рис. 8).

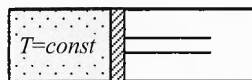


Рис. 8. Изотермический процесс

В изотермическом процессе изменение внутренней энергии равно нулю.

$$\Delta U_T = \frac{i}{2} \nu R \Delta T, \text{ но } \Delta T = 0, \text{ значит, } \boxed{\Delta U_T = 0}.$$

Тогда первое начало термодинамики при изотермическом процессе:

$$\boxed{Q_T = A_T}.$$

Количество теплоты, переданное газу (отданное газом) при изотермическом процессе, равно работе, которую совершает газ за это время.

Найдём молярную теплоёмкость при изотермическом процессе:

$$C_T = \frac{Q_T}{\nu \Delta T}, \text{ но } \Delta T = 0, \text{ значит } \boxed{C_T = \infty}.$$

При изотермическом процессе теплоёмкость газа равна бесконечности.

Это означает, что, сколько тепла газу ни давай при изотермическом процессе, его ни на один градус не нагреешь. Всё тепло будет уходить на работу газа.

Адиабатный процесс. Название адиабатного процесса произошло от греческого слова *adiabatos* – непроходимость.

Адиабатный (адиабатический) процесс представляет собой тепловой процесс, при котором нет теплообмена с окружающей средой:

$$\boxed{Q_a = 0}.$$

Адиабатный процесс можно осуществить в термодинамической системе, окруженной теплоизолирующей (адиабатной) оболочкой. В нетеплоизолированной системе процесс можно считать приближенно адиабатным, если он происходит так быстро, что можно пренебречь теплообменом с окружающей средой за это время. Например, при распространении звука в газах, при расширении воздуха за реактивным самолетом или при вылете пробки из бутылки с шампанским.

Запишем первый закон термодинамики для адиабатного процесса:

$$0 = Q_a = A_a + \Delta U \Rightarrow A_a = -\Delta U.$$

Работа газа в адиабатном процессе равна изменению его внутренней энергии, взятому с обратным знаком.

Это означает, что при адиабатном расширении газ будет охлаждаться, совершая положительную работу, а при адиабатном сжатии нагреваться за счёт положительной работы сторонних сил над газом:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\Delta U \\ A &= -A_{\text{ст}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = A_{\text{ст}}.$$

То есть изменение внутренней энергии газа при адиабатном процессе равно работе сторонних сил над газом.

Вычислим молярную теплоёмкость при адиабатном процессе:

$$C_a = \frac{Q_a}{\nu \Delta T}, \text{ но } Q_a = 0, \Delta T \neq 0 \Rightarrow C_a = 0.$$

Итак, молярная теплоёмкость в адиабатном процессе равна нулю. Это означает, что для нагревания газа в адиабатном процессе на один градус тепла не требуется, ибо он нагревается при этом за счёт другого способа изменения внутренней энергии, а именно за счёт работы внешних сил над газом.

Теплообмен в калориметре. Калориметр – прибор, в котором может происходить теплообмен между помещёнными в него телами, и при этом затруднен (в идеале отсутствует) теплообмен с окружающей средой. Бытовой термос – довольно хорошая модель калориметра.

Школьный калориметр представляет собой два стакана, между которыми находится прослойка воздуха (рис. 9). Внутренний стакан светлый, как правило из алюминия, а внешний – алюминиевый или пластмассовый. При смешивании веществ различной температуры в калориметре теплоёмкость калориметра или учитывается или специально оговаривается, что ею можно пренебречь. При проведении опытов с калориметром желательно накрыть его листом бумаги, чтобы уменьшить потери тепла, особенно на испарение.

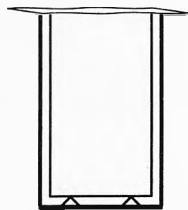


Рис. 9. Калориметр

По первому началу термодинамики для теплообмена в калориметре:

$$Q = \Delta U + A.$$

Теплообмен между телами в калориметре происходит без совершения работы, то есть $A=0$. А в идеале ещё нет теплообмена и с внешней средой, то

есть $Q=0$. Значит, внутренняя энергия системы тел в калориметре не изменяется, то есть $\Delta U = 0$. Итак,

$$Q=0 \quad \text{или} \quad Q_{\text{отд}} + Q_{\text{получ}} = 0, \quad (8)$$

где $Q_{\text{отд}}$ — количество теплоты, отданное телами внутри калориметра другим телам, находящимся там же; $Q_{\text{отд}} < 0$, ибо внутренняя энергия этих тел уменьшается. $Q_{\text{получ}}$ — количество теплоты, полученное телами внутри калориметра, оно положительно $Q_{\text{получ}} > 0$.

Уравнение (8) называется уравнением теплового баланса. Этот баланс можно записать и в более явном виде

$$Q_{\text{получ}} = |Q_{\text{отд}}|. \quad (8')$$

Количество теплоты, отданное телами при теплообмене в идеальном калориметре по модулю равно количеству теплоты, полученному другими телами в том же калориметре за то же время.

При решении задач на уравнение теплового баланса можно использовать уравнения как в форме (8) так и в форме (8'). Зачастую удобнее использовать выражение (8).

Пример 10. В калориметре смешиваются три химически не взаимодействующие жидкости массами: $m_1=m$, $m_2=2m$, $m_3=3m$, начальная температура которых $t_1=100^\circ\text{C}$, $t_2=40^\circ\text{C}$, $t_3=10^\circ\text{C}$. Удельные теплоёмкости их соответственно равны $c_1=c$, $c_2=3c$, $c_3=4c$. Найти установившуюся температуру. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

→ **Решение.** Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \quad \text{или} \quad c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (t - t_2) + c_3 m_3 (t - t_3) = 0,$$

где t — установившаяся температура. $t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + c_3 m_3 t_3}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3} \approx 24^\circ\text{C}$. ←

Примечание. Рекомендуем установившуюся температуру обозначать буквой t или T без индекса.

§ 24. Работа при адиабатном процессе

Пусть газ расширяется адиабатно, имея начальные параметры p_1 , V_1 , T_1 , до состояния с параметрами p_2 , V_2 , T_2 . График зависимости давления от объёма показан на рис. 10 сплошной линией. Пунктирной линией для сравнения показано изотермическое расширение того же газа. При адиабатном расши-

рении газ охлаждается, поэтому кривая графика расположена ниже, чем для изотермического.

Работа при адиабатном изменении объёма от V_1 до V_2 будет равна заштрихованной площади.

Согласно первому началу термодинамики для адиабатного процесса,

$$A_{12} = -\Delta U$$

где $\Delta U = U_2 - U_1$; $U_1 = \frac{i}{2} p_1 V_1$; $U_2 = \frac{i}{2} p_2 V_2$.

$$\Rightarrow A_{12} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

С учетом термического уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$, получим второе выражение для работы газа в адиабатном процессе:

$$A_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_1 - T_2) \quad \text{или} \quad A_{12} = -\frac{i}{2} \nu R \Delta T$$

Здесь учтено, что $\Delta T = T_2 - T_1$.

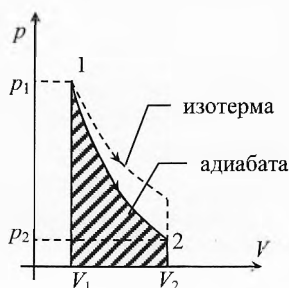


Рис. 10. Работа при адиабатном процессе

§ 25. Уравнение Пуассона

Рассмотрим, как связаны между собой параметры, определяющие состояние идеального газа, когда с ним происходит квазистатический адиабатический процесс. Запишем первый закон термодинамики для бесконечно малого изменения параметров при таком процессе:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Поскольку при адиабатном процессе $\delta Q = 0$, так как нет теплообмена с окружающей средой, то

$$dU + \delta A = 0.$$

Учитывая, что $dU = \nu C_V dT$ и $\delta A = p \cdot dV$, получим:

$$\nu C_V dT + p dV = 0,$$

где C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

Из термического уравнения, для бесконечно малого изменения параметров:

$$T = \frac{pV}{\nu R} \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{d(pV)}{\nu R} = \frac{p dV + V dp}{\nu R}.$$

Подставим полученное выражение для бесконечно малого изменения температуры в предыдущее уравнение:



Симеон Дени Пуассон
(1781–1840)

* Определение квазистатического процесса см. в §35 гл. 5.

$$\nu C_V \cdot \frac{p \cdot dV + V \cdot dp}{\nu R} + p \cdot dV = 0 \Rightarrow C_V (p \cdot dV + V \cdot dp) + R \cdot p \cdot dV = 0.$$

Учитывая соотношение Майера: $R = C_p - C_V$, получим:

$$C_V \cdot p \cdot dV + C_V \cdot V \cdot dp + C_p \cdot p \cdot dV - C_V \cdot p \cdot dV = 0 \Rightarrow C_V \cdot V \cdot dp + C_p \cdot p \cdot dV = 0.$$

Теплоёмкость газа может зависеть от температуры. Но во многих случаях, в широком интервале температур, C_p и C_V остаются неизменными.

Отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме называется адиабатной постоянной или **показателем адиабаты**:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Учитывая это, можем переписать предыдущее уравнение в следующем виде:

$$V \cdot dp + \gamma \cdot p \cdot dV = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\gamma \cdot \frac{dV}{V}.$$

Проинтегрируем последнее выражение: $\int \frac{dp}{p} = -\gamma \cdot \int \frac{dV}{V}.$

$$\Rightarrow \ln p = -\gamma \cdot \ln V + \ln(\text{const}); \Rightarrow \ln p + \gamma \cdot \ln V = \ln(\text{const}); \Rightarrow \ln(pV^\gamma) = \ln(\text{const}).$$

$$pV^\gamma = \text{const}$$

Эта формула называется **уравнением Пуассона**.

Произведение объёма идеального газа в степени γ на его давление есть величина постоянная при любом квазистатическом адиабатном процессе.

Для двух разных состояний уравнение Пуассона примет вид:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

С учетом термического уравнения состояния газа ($pV = \nu RT$) уравнение адиабаты можно записать ещё в двух видах:

$$\frac{p^{(\gamma-1)}}{T^\gamma} = \text{const}$$

и

$$TV^{(\gamma-1)} = \text{const}$$

(9)

Вычислим показатель адиабаты, который равен не только отношению молярных теплоёмкостей газа при постоянном давлении и объёме, но и отношению соответствующих удельных теплоёмкостей.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \gamma = \frac{\left(\frac{i}{2} + 1\right)R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}. \quad \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Для одноатомного газа ($i_1=3$): $\gamma_1=5/3 \approx 1,67$; для двухатомного ($i_2=5$): $\gamma_2=7/5=1,4$; для многоатомного ($i_3=6$): $\gamma_3=8/6 \approx 1,33$. Для смеси газов γ может принимать значения от 1,33 до 1,67.

Так как для всех газов $\gamma > 1$, то из уравнения адиабаты в форме (9) следует, что при адиабатном сжатии газа он нагревается, а при расширении – охлаждается. На этом основано явление пневматического огнива в известном школьном опыте (рис. 11). В толстостенную трубку из плексигласа входит плотно подогнанный поршень, к нижней части которого прикрепляют кусочек пироксилиновой ваты. При быстром вдвигании поршня воздух в трубке нагревается настолько сильно, что пироксилин воспламеняется.

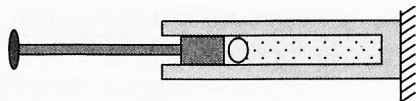


Рис. 11. Пневматическое огниво

Адиабатический нагрев нашёл применение в дизельных двигателях, где воспламенение горючей смеси осуществляется путём адиабатического сжатия. Нагрев газа при этом объясняется тем, что, во время сжатия, над газом производится положительная работа внешними силами. Она идёт на увеличение внутренней энергии газа, которая прямо пропорциональна его абсолютной температуре. Аналогично объясняется и охлаждение газа при адиабатном расширении.

Следует отметить, что уравнение Пуассона нельзя применять для адиабатных неквазистатических процессов. Пусть, например, имеется теплоизолированный сосуд с заслонкой посередине, и газ сначала находится в одной половине, а в другой – вакуум (рис. 12). Уберем внезапно заслонку. Произойдет адиабатное расширение газа в пустоту.

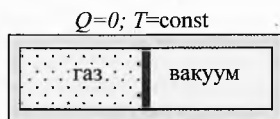


Рис. 12. Расширение в вакуум

Этот процесс необратимый неквазистатический. Действительно, сначала возникнет резкое неравновесное состояние, сопровождающееся бурными и сложными макроскопическими движениями газа. Затем они затухнут из-за внутреннего трения, и кинетическая энергия перейдет во внутреннюю. В установившемся равновесном состоянии температура, очевидно, будет, как и до открытия заслонки. Это следует из первого начала термодинамики, ведь теплообмена нет и нет работы внешних сил. А если бы мы применили уравнение Пуассона, то получили бы уменьшение температуры, что явно ошибочно.

Поэтому при решении задач нужно убедиться в квазистатичности процесса, чтобы иметь основание применить уравнение Пуассона. При малых отступлениях от равновесия, когда ошибка при использовании уравнения одного порядка с погрешностью измерений параметров газа, можно применить его и для не вполне равновесных процессов, например, для звуковых волн, распространяющихся в газах и в более медленных процессах.

Парафраз о политропическом процессе

Процесс, совершаемый над газом, называется **политропическим**, если при этом теплоёмкость газа постоянна:

$$\delta Q = \nu C \cdot dT,$$

где $C = \text{const}$ – молярная теплоёмкость газа в этом процессе.

Для таких процессов справедливо соотношение

$$pV^n = \text{const}$$

где

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C}$$

– **показатель политропы**.

Действительно, согласно первому началу термодинамики, $\delta Q = dU + \delta A$.
Учитывая, что $dU = \nu C_V \cdot dT$, $\delta A = p \cdot dV$, получим:

$$\nu C_V \cdot dT = \nu C_V \cdot dT + p \cdot dV.$$

Из термического уравнения состояния, для бесконечно малого изменения параметров, получим:

$$dT = \frac{d(pV)}{\nu R} = \frac{p \cdot dV + V \cdot dp}{\nu R}.$$

Итак, $\nu(C_V - C) \cdot \frac{p \cdot dV + V \cdot dp}{\nu R} = -p \cdot dV$, или $(C_V - C)V \cdot dp = -(R + C_V - C)p \cdot dV$.

По уравнению Майера $R + C_V = C_p$. Введём обозначение $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$. Тогда:

$$(C_V - C)V \cdot dp = -(C_p - C)p \cdot dV; \Rightarrow \frac{dp}{p} = -n \cdot \frac{dV}{V}.$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим:

$$\ln p = -n \cdot \ln V + \ln(\text{const}) \quad \text{или} \quad pV^n = \text{const}.$$

Описанные выше изопроцессы являются политропическими.

Для изотермического процесса: $n=1$, $pV = \text{const}$, $C = \infty$.

Для адиабатного процесса: $n=\gamma = C_p/C_V$, $pV^\gamma = \text{const}$, $C=0$.

Для изобарного процесса: $n=0$, $p = \text{const}$, $C = C_p$.

Для изохорного процесса: $n=\infty$, $V = \text{const}$, $C = C_V$.

Пример 11. В велосипедном насосе объёмом $V_1 = 100 \text{ см}^3$ быстро сжали воздух в 10 раз (рис. 13). Какова температура воздуха будет в конце сжатия, если в начале она была равна 17°C ? До какого давления будет сжат воздух? Какая при этом совершена работа?

Дано:

$$V_1 = 100 \text{ см}^3$$

$$V_1 = 10V_2$$

$$t_1 = 17^\circ\text{C}$$

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$i=5$$

$$t_2 = ?$$

$$p_2 = ?$$

$$A_{\text{ст}} = ?$$

Решение. Будем считать процесс адиабатным. Запишем уравнение Пуассона и Клапейрона для начального и конечного состояний (рис. 14):

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}; \Rightarrow$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{или} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

Воздух — двухатомный газ ($i=5$),

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \Rightarrow \gamma = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

$$T_2 = 290 \cdot (10)^{1,4-1} = 290 \cdot 10^{0,4} = 728 \text{ К}; \quad t_2 = 455 (^\circ\text{C}).$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad p_2 = 10^5 \cdot 10^{1,4} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

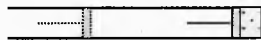


Рис. 13. Сжатие воздуха в насосе

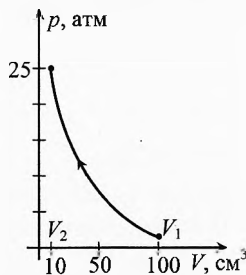


Рис. 14. Адиабатное сжатие

$$A_{\text{сж}} = \Delta U = \frac{i}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{5}{2}(2,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-5} - 10^5 \cdot 10^{-4}) \approx 37 \text{ Дж.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** В конце сжатия температура воздуха равна 455°C , давление 25 атм. Человек, сжимающий воздух, совершит работу 37 Дж.

§ 26. Теплоёмкость твёрдых тел

Тепловое движение частиц, из которых состоят кристаллы, сводится в основном к их колебаниям около положения равновесия. Частица отклоняется до тех пор, пока кинетическая энергия не превратится в потенциальную, затем движется в противоположную сторону. Колебания эти весьма сложны, но как у тела, совершающего гармонические колебания на пружине, средние значения изменения кинетической и потенциальной энергии частицы в твёрдом теле одинаковы.

Поэтому на одну степень свободы колебательного движения приходится энергия в 2 раза большая, чем на одну степень свободы поступательного движения, т. е. $2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$.

Полная энергия колебательного движения одной молекулы $\bar{E}_{\text{кол}} = 3kT$. Следовательно, изменение внутренней энергии твёрдого тела:

$$\Delta U = N \cdot 3k\Delta T,$$

где N – число частиц (молекул, атомов, ионов) в теле.

Пренебрегая работой при изменении температуры твёрдого тела (объём изменяется незначительно), можно считать, что процесс изохорный и удельная теплоёмкость вещества в твёрдом состоянии:

$$c \approx \frac{\Delta U}{m\Delta T} = \frac{3N \cdot k \cdot \Delta T}{m \cdot \Delta T} = \frac{3 \frac{N}{N_A} \cdot (k \cdot N_A)}{m} = \frac{3\nu \cdot R}{m} = \frac{3R}{M}; \text{ или } c \approx \frac{3R}{M}.$$

Тогда **молярная теплоёмкость твёрдого тела**

$$C = c \cdot M = 3R \approx 25 \frac{\text{Дж}}{\text{Моль} \cdot \text{К}}.$$

То есть молярная теплоёмкость всех кристаллических тел должна быть практически одинаковой.

В 1818 г. французские физики Пьер Луи Дюлонг (1785–1838) и Алексис Терез Пти (1791–1820) на основании опытов установили эту зависимость, называемую **законом Дюлонга–Пти**.

Молярная теплоёмкость при постоянном объёме для всех твёрдых тел одинакова и составляет около $3R$.

Из табл. 3, видно, что закон Дюлонга—Пти примерно справедлив для многих элементов в твёрдом состоянии. Но есть и резкие отличия, например, для бора, йода I_2 , кремния. Это одно из расхождений классической теории теплоёмкости с практикой. Имеются и другие трудности классической теории, которые устраняются квантовой теорией строения вещества.

Таблица 3. Молярная изобарная теплоёмкость вещества в твёрдом состоянии при $T=298,15\text{ К}$ и $p=101325\text{ Па}$

Вещество	Теплоёмкость C , Дж моль·К	Вещество	Теплоёмкость C , Дж моль·К
Алюминий	24,35	Никель	26,07
Барий	28,10	Олово белое	27,11
Бор	11,09	Олово серое	25,78
Ванадий	24,48	Осмий	24,70
Висмут	26,02	Палладий	25,86
Вольфрам	24,27	Платина	25,86
Германий	23,22	Ртуть (жидкая)	27,98
α -железо	24,98	Свинец	26,65
β -железо	26,74	Сера ромбическая	22,69
Золото	25,40	Серебро	25,36
Индий	26,90	Сурьма	25,23
Йод I_2	54,44	Титан	25,06
Кремний	19,79	Хром	23,35
Медь	24,43	Цезий	32,17
Молибден	23,93	Цинк	25,44
Мышьяк	24,68		

§ 27. Теплопроводность. Поток тепла

Поток тепла. Тепло может переходить от одного тела к другому через поверхность соприкосновения, или внутри тела от одних слоев молекул к другим (теплопроводность и конвекция). Тепло также может передаваться в пустоте в виде энергии электромагнитного излучения.

Для того чтобы характеризовать прохождение тепловых потоков в пространстве, вводятся понятия: *поток тепла* и *плотность потока тепла*.

Поток тепла характеризует интенсивность протекания тепловой энергии через некоторую поверхность. Поток тепла равен отношению малого количества тепла δQ , прошедшего через некоторую поверхность, к малому промежутку времени dt , за который оно прошло:

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt}.$$

Для равномерно протекающего теплового потока:

$$\Phi = \frac{Q}{\tau}, \quad [\Phi] = 1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \quad (10)$$

Из определения видно, что тепловой поток имеет размерность мощности и измеряется в ваттах.

Плотность потока тепла. Тепловой поток, проходящий через некоторую поверхность, может быть распределен неравномерно по отдельным её участкам.

Поверхностная плотность теплового потока (или кратко **плотность потока тепла**) характеризует распределение потока тепла по поверхности, через которую он проходит. Плотность потока тепла равна отношению малого теплового потока $\delta\Phi$ к малой площади поверхности δS_{\perp} (перпендикулярной направлению распространения тепла), через которую он проходит:

$$j = \frac{\delta\Phi}{\delta S_{\perp}}.$$

При равномерно протекающем по всей поверхности тепловом потоке

$$j = \frac{\Phi}{S} = \frac{Q}{\tau \cdot S_{\perp}}, \quad [j] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \quad (11)$$

Поверхностная плотность потока тепла 1 Вт/м^2 показывает, что через 1 м^2 поверхности, перпендикулярной направлению распространения тепла, протекает 1 Дж тепла за 1 с.

Коэффициент теплопроводности. Опыт показывает, что при теплопроводности плотность потока тепла через поверхность, перпендикулярную к направлению распространения тепла, прямо пропорциональна разности температур по обе стороны площадки и обратно пропорциональна толщине площадки (рис. 15):

$$j = \kappa \cdot \frac{T_1 - T_2}{l}. \quad (12)$$

Комбинируя (11) и (12), получим:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} \cdot S_{\perp}, \quad (13)$$

где κ (каппа) – коэффициент теплопроводности.

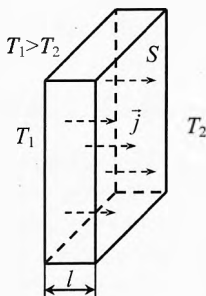


Рис. 15

Коэффициент теплопроводности характеризует способность данного материала пропускать тепло. Коэффициент теплопроводности равен плотности потока тепла при градиенте температур один кельвин на метр.

Например, теплопроводность льда $\alpha = 2,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ означает, что через каждый квадратный метр поверхности льда будет проходить поток тепла 2,2 Вт, если разность температур на каждый метр толщи льда равна 1 К.

Подставляя (10) в (13), получим, что количество тепла Q , проходящее через однородную пластинку за время τ , прямо пропорционально градиенту температур по обе стороны пластинки $(T_1 - T_2)/l$, площади поперечного сечения пластинки S_{\perp} и обратно пропорционально её толщине l :

$$\frac{Q}{\tau} = \alpha \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} \cdot S_{\perp} \quad \text{или} \quad Q = \alpha \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} \cdot S_{\perp} \cdot \tau$$

Таблица 4. Плотность и теплопроводность некоторых веществ

Вещество	Плотность ρ , г/м ³	Температура T , К	α , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Азот газообразный	$1,25 \cdot 10^{-3}$	300; 400	0,0257; 0,0324
Кислород газообразный	$1,429 \cdot 10^{-3}$	- I -	0,0267; 0,034
Вода	1,00	273,15; 373,15	0,561; 0,644
Алюминий	2,689	- I -	237; 240
Вольфрам	19,35	- I -	174; 159
Железо	7,874	- I -	80; 70
Золото	19,32	- I -	317; 311
Медь	8,96	- I -	401; 393
Ртуть поликристаллическая	13,546	- I -	8,3; 9,8
Серебро	10,50	- I -	429; 425
Свинец	11,336	- I -	35; 34
Фарфор	2,2 – 2,5	27; 200°C	1,35; 1,68
Железобетон	2,4	- I -	1,6
Картон плотный	1,0	- I -	0,23
Кирпич красный плотный	1,8	- I -	0,67
- пористый	1,22	- I -	0,44
- силикатный	1,9	- I -	0,81
Рубероид	0,6	- I -	0,17
Береза	0,72	20°C	0,15
Дуб	0,825	15°C	0,20
Пробковое дерево	0,113	30°C	0,045
Бумага	0,73	20°C	0,096
Вата минеральная	0,10	-200 ... 20°C	0,016 ... 0,047
Пенопласт ПС-1	0,10	-170 ... 20°C	0,015 ... 0,040
Лёд	0,9	0°C	2,2
Снег	0,25	0°C	0,16

Из таблицы видно, что лучшими проводниками являются металлы, особенно серебро, медь, золото и алюминий. А плохими проводниками являются все пористые воздухосодержащие вещества: пенопласт, вата минеральная, бумага, пробковое дерево.

§ 28. Теплопроводность вещества в различных агрегатных состояниях

Теплопроводность разреженных газов при длине свободного пробега молекул, значительно меньшей размеров сосуда, слабо возрастает с ростом температуры и давления. Газ можно считать существенно разреженным до давления порядка 10^6 Па при комнатной температуре и до давления $4 \cdot 10^6$ Па при $T=1000$ К. Теплопроводности всех газов в широком интервале температур составляют сотые доли Вт/(м·К).

Теплопроводность любой жидкости увеличивается с ростом давления и при понижении температуры (кроме воды и глицерина), но в широком интервале температур и давлений составляет десятые доли Вт/(м·К).

Теплопроводность твёрдых тел в подавляющем большинстве случаев обусловлена двумя механизмами: движением электронов проводимости и тепловыми колебаниями атомов решетки. Первый механизм доминирует в металлах, второй определяет теплопроводность в неметаллах. В некоторых полупроводниках, полуметаллах и сильно упорядоченных сплавах оба механизма дают сравнимые вклады в теплопроводность.

При низких температурах теплопроводность твёрдого тела существенно зависит от количества и типа примесей, дефектов решетки. При высоких же температурах теплопроводность твёрдых тел слабо зависит от этих факторов.

Теплопроводность аморфных тел значительно меньше, чем теплопроводность кристаллов.

Поликристаллические тела обладают промежуточной теплопроводностью между монокристаллами и аморфными телами.

В металлах доминирует электронная теплопроводность, поэтому их теплопроводность во много раз больше, чем у неметаллов. Всё это видно из табл. 4.

✎ **Пример 12.** За какое время нарастёт толщина $\Delta l=1$ см льда на озере при температуре воздуха $t=-10^\circ\text{C}$ и начальной толщине льда $l_0=10$ см? Удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг, коэффициент теплопроводности $\alpha=2,2$ Вт/(м·К).

➔ **Решение.** Из-за разности температур между водой $t_0=0^\circ\text{C}$ и воздухом $t=-10^\circ\text{C}$ поток тепла самопроизвольно будет идти из воды в воздух через лёд (рис. 16):

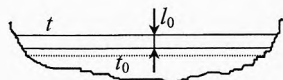


Рис. 16. Замерзание озера

$$\Phi = \alpha \cdot \frac{t_0 - t}{l_0} \cdot S, \quad (14)$$

где S — площадь поверхности озера. Источником тепла является замерзающая вода:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \lambda \cdot \Delta m \\ \Delta m &= \rho \cdot \Delta V \\ \Delta V &= S \cdot \Delta l \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q = \lambda \rho S \cdot \Delta l. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в формулу теплового потока $\Phi = \frac{Q}{\tau}$, получим:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \frac{t_0 - t}{l_0} S &= \frac{\lambda \rho S \cdot \Delta l}{\tau}; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\lambda \rho l_0 \cdot \Delta l}{\alpha(t_0 - t)}. \\ \tau &= \frac{3,35 \cdot 10^5 \cdot 900 \cdot 0,1 \cdot 0,01}{2,2 \cdot 10} = 1,37 \cdot 10^4 \text{ с} = 3,8 \text{ ч} \approx 4 \text{ ч.} \end{aligned}$$

✓ **Ответ.** Один сантиметр льда нарастёт примерно за 4 ч.

✎ **Пример 13.** Оценить время, за которое нарастёт толща льда от 0 до 1 м, если средняя температура воздуха -10°C .

✎ **Решение.** Пусть в момент времени t толщина льда равна l , тогда за бесконечно малое время dt толщина льда нарастёт ещё на dl . В этом случае расчётная формула из предыдущей задачи примет вид: $dt = \frac{\lambda \rho l \cdot dl}{\alpha(T_0 - T)}$.

Проинтегрируем это выражение: $\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\lambda \rho l \cdot dl}{\alpha(T_0 - T)} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\lambda \rho (l_2^2 - l_1^2)}{2\alpha(T_0 - T)}$.

В нашем случае $t_1=0$, $l_1=0$, $t_2=\tau$, $l_2=l$, тогда $\tau = \frac{\lambda \rho l^2}{2\alpha(T_0 - T)}$;

$$\tau = \frac{3,35 \cdot 10^5 \cdot 900 \cdot 1}{2 \cdot 2,2 \cdot 10} = 6,87 \cdot 10^6 \text{ (с)} \approx 80 \text{ суток.} \blacktriangleleft$$

✓ **Ответ.** Лёд толщиной 1 м нарастёт за 80 суток.

Примечание. Задача решена для случая, когда лёд голый, без снега. В водоемах он, как правило, рано или поздно покрывается снегом, а теплопроводность снега в 14 раз меньше теплопроводности льда. Поэтому за такое время толщина льда в озере будет меньше; в зависимости от того, когда и сколько выпало снега, толщина льда может существенно отличаться от рассчитанной.

✎ **Пример 14.** Смесь свинцовых и алюминиевых опилок общей массой $m=0,15$ кг и температурой $t=100^\circ\text{C}$ погружена в калориметр с водой, температура которой $t_0=15^\circ\text{C}$, а масса $m_0=0,23$ кг (рис. 17). Конечная температура $\theta=20^\circ\text{C}$. Теплоёмкость калориметра $C=42$ Дж/К. Сколько свинца m_1 и алюминия m_2 было в смеси? Удельные теплоёмкости воды, свинца и алюминия равны: $c_0=4200$ Дж/(кг·К), $c_{\text{св}}=130$ Дж/(кг·К), $c_{\text{ал}}=880$ Дж/(кг·К).



Рис. 17.

Горячие опилки

→ **Решение.** Запишем уравнение теплового баланса (первое начало термодинамики, когда $A=0$ и $\Delta U=0$):

$$Q=0 \text{ или } Q_{\text{отд}} + Q_{\text{получ}} = 0.$$

$$c_{\text{св}} m_{\text{св}} (\theta - t) + c_{\text{ал}} m_{\text{ал}} (\theta - t) + c_0 m_0 (\theta - t_0) + C(\theta - t_0) = 0.$$

Подставляя в это выражение $m_{\text{ал}} = m - m_{\text{св}}$, найдём $m_{\text{св}}$:

$$m_{\text{св}} = \frac{c_{\text{ал}} m(t - \theta) - (C + c_0 m_0)(\theta - t_0)}{(c_{\text{ал}} - c_{\text{св}})(t - \theta)};$$

$$m_{\text{св}} = \frac{10560 - 5040}{750 \cdot 80} = 0,092 \text{ кг} = 92 \text{ г. } m_{\text{ал}} = 150 - 92 = 58 \text{ г.}$$

✓ **Ответ.** Свинцовых опилок 92 г в смеси, алюминиевых – 58 г.

✎ **Пример 15.** Теплоизолированный сосуд объёмом V_1 разделен перегородкой на две части. В одной части объёмом V_2 сосуда находится ν молей сильно сжатого одноатомного газа при температуре T (рис. 18). В другой части сосуда – вакуум. Перегородку разрушают. Определить установившуюся температуру T' газа. Известно, что при адиабатическом сжатии этого газа из сильно разреженного состояния с температурой T до объёма V_1 над газом совершают работу A_1 , и его температура становится T_1 , а при сжатии от сильно разреженного состояния до объёма V_2 совершают работу A_2 и температура становится T_2 .

Примечание. При сильном сжатии газа существенно взаимодействие между его молекулами. В выражении для внутренней энергии заданной массы газа появляется (по сравнению с идеальным газом) дополнительное слагаемое, однозначно определяемое объёмом газа.

→ **Решение.** Пусть, когда газ занимает объём V_1 , дополнительная энергия взаимодействия молекул равна Π_1 , а при объёме V_2 — Π_2 . Выразим внутреннюю энергию газа в четырех состояниях.

В исходном состоянии:

$$U(T, V_2) = 1,5\nu RT + \Pi_2. \quad (16)$$

После разрушения перегородки:

$$U(T', V_1) = 1,5\nu RT' + \Pi_1. \quad (17)$$

После адиабатического сжатия из очень разреженного состояния до состояния с объёмом V_1 и температурой T_1 :

$$U(T_1, V_1) = 1,5\nu RT_1 + \Pi_1. \quad (18)$$

После адиабатического сжатия из очень разреженного состояния до состояния с объёмом V_2 и температурой T_2 :

$$U(T_2, V_2) = 1,5\nu RT_2 + \Pi_2. \quad (19)$$

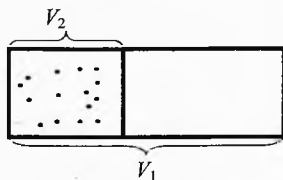


Рис. 18. Расширение в вакуум неидеального газа

При разрушении перегородки внутренняя энергия газа в сосуде не изменяется ($Q=0$ и $A=0$):

$$U(T, V_2) = U(T', V_1). \quad (20)$$

При адиабатном сжатии от разряженного состояния с температурой T до состояния с объёмом V_1 и температурой T_1 работа внешней силы:

$$A_{\text{сж1}} = \Delta U_1 = U(V_1, T_1) - 1,5\nu RT. \quad (21)$$

Аналогично при адиабатическом сжатии от разряженного состояния с температурой T до состояния с объёмом V_2 и температурой T_2 работа внешней силы

$$A_{\text{сж2}} = \Delta U_2 = U(T_2, V_2) - 1,5\nu RT. \quad (22)$$

Подставляя (16) и (17) в (20), получим:

$$1,5\nu RT + \Pi_2 = 1,5\nu RT' + \Pi_1. \quad (23)$$

Подставляя (18) в (21), получим:

$$A_{\text{сж1}} = 1,5\nu R(T_1 - T) + \Pi_1. \quad (24)$$

Подставляя (19) в (22), получим:

$$A_{\text{сж2}} = 1,5\nu R(T_2 - T) + \Pi_2. \quad (25)$$

Решая совместно (23), (24) и (25) получим:

$$T' = T + T_1 - T_2 + (A_2 - A_1)/(1,5\nu R). \leftarrow$$

✓ Ответ. $T' = T + T_1 - T_2 + (A_2 - A_1)/(1,5\nu R)$.



Упражнения

1 Выпал мокрый снег. Каким способом можно определить процентное содержание влаги в нём? Задайте данные и решите.

2 Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в другой кастрюле с кипящей водой?

3 Почему человек чувствует озноб после того, как сильно чихнет?

4 Алюминиевый чайник массой 400 г, в котором находится 2 кг воды при 10°C , помещают на газовую горелку с КПД 40%. Какова мощность горелки, если через 10 мин вода закипела, причём выкипело 20 г воды? Сколько природного газа сгорело за это время (недостающие данные возьмите из таблиц)?

5 Чему равна внутренняя энергия многоатомного газа при давлении $p=200$ кПа, если его объём $V=2$ л?

6 Какова внутренняя энергия одноатомного газа занимающего объём V при температуре T , если концентрация молекул n ?

7 Как изменится внутренняя энергия водорода массой m при: изобарном нагревании на ΔT ; изохорном охлаждении на ΔT ; изотермическом сжатии?

8 При увеличении объёма 2-х атомного газа в 4 раза давление его упало на 30%. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия?

9 В цилиндрическом сосуде площадью основания $S=250$ см² находится азот массой $m=10$ г, сжатый поршнем, на котором лежит гиля массой $m_1=12,5$ кг. Какую

работу совершит газ при нагревании его от $t_1=25^\circ\text{C}$ до $t_2=625^\circ\text{C}$? Насколько при этом увеличится объём газа? $p_a=10^5$ Па. Поршень можно считать невесомым.

10 Работа при изобарном расширении двух молей идеального газа равна 50 Дж. Какова конечная температура газа, если начальная была 27°C ?

11 При изобарном расширении азота массой $m=0,2$ кг его температура увеличилась на $\Delta T=280$ К. Определить работу A , совершенную газом, изменение внутренней энергии ΔU , количество теплоты Q , полученное газом. Какую часть сообщенного газу тепла составляет A и ΔU ?

12 Определить количество теплоты, которое надо сообщить кислороду объёмом $V=50$ л при изохорном нагревании, чтобы давление повысилось на $\Delta p=0,5$ МПа.

13 При изотермическом расширении газа совершена работа $A=20$ Дж. Какое количество тепла, сообщено газу?

14 В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой $m=0,2$ кг при $t_1=20^\circ\text{C}$. Расширяясь, он совершил работу $A=4470$ Дж. Найти изменение внутренней энергии и его температуру после расширения.

15 Свинцовая пуля пробивает деревянную стенку; скорость в момент удара $v_1=400$ м/с, а в момент вылета $v_2=100$ м/с. Какая часть пули расплавилась, если на это ушло 60% потерянной механической энергии? Начальная температура пули $t_0=50^\circ\text{C}$, а температура плавления свинца $t_{\text{пл}}=327^\circ\text{C}$. $c=130$ Дж/(кг·К), $\lambda=87$ кДж/кг.

16 При трении двух тел, теплоёмкости которых по $C_t=800$ Дж/К, их температура через $t=1$ мин повысилась на $\Delta T=30$ К. Найти среднюю мощность при трении.

17 Насколько градусов нагреется вода при падении водопада высотой 30 м?

18 Стальной осколок, падая с высоты 500 м, достиг у поверхности земли скорости 80 м/с. Насколько повысилась температура осколка, если вся работа сопротивления воздуха пошла на его нагревание? $c=460$ Дж/(кг·К).

19 В колбе находилась вода при 0°C . Выкачивая влажный воздух из колбы, заморозили всю воду посредством собственного испарения. Какая часть воды испарилась, если при температуре 0°C удельная теплота испарения воды $L=2,26$ МДж, а удельная теплота плавления воды $\lambda=335$ кДж?

20 С какими одинаковыми по модулю скоростями должны лететь навстречу друг другу две одинаковые капли воды, чтобы в результате неупругого соударения они испарились? Начальная температура капель $t_0=25^\circ\text{C}$. Удельная теплота парообразования при температуре $t=100^\circ\text{C}$, $L=2,26$ МДж/кг, $c=4200$ Дж/(кг·К).

21 Чтобы поддерживать в доме температуру $t=20^\circ\text{C}$ при температуре на улице $t_1=-10^\circ\text{C}$ приходится ежедневно сжигать $0,10$ м³ дров. Сколько дров потребуется сжигать ежедневно для поддержания в доме той же температуры, если на улице она понизится до $t_2=-16^\circ\text{C}$? Поток тепла, уходящий из дома прямо пропорционален разности температур в доме и на улице.

22 В вакууме вертикально стоит цилиндрический сосуд, закрытый сверху подвижным поршнем массой m (рис. 19). Внутри сосуда находится одноатомный газ при давлении p_0 . Внутреннее сечение цилиндра S , а поршень находится на высоте H над его дном. Поршень отпустили. После колебаний он останавливается.

На каком расстоянии от начального положения остановится поршень, если теплоёмкость газа при постоянном объёме много больше теплоёмкости поршня и цилиндра? Вся система теплоизолирована. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

23 В большой сосуд с теплой водой опускают тонкостенный кубический контейнер из пластмассы (рис. 20), целиком заполненный льдом при $t_0=0^\circ\text{C}$. Весь лёд в контейнере растаял за 20 мин. За какой промежуток времени растаял бы лёд, заполняющий другой кубический контейнер с такой же толщиной стенок из той же пластмассы, но с длиной ребра куба вдвое большей? Температуру воды в сосуде считать постоянной. Теплопроводность льда и воды намного выше теплопроводности пластмассы. В обоих случаях контейнеры полностью погружены в воду.

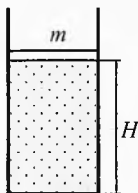


Рис. 19. Равновесие поршня

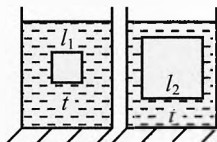


Рис. 20. Таяние льда

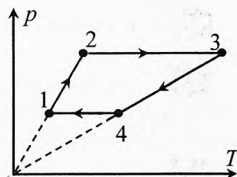


Рис. 21. Работа газа за цикл

24 С 3 молями идеального одноатомного газа совершён цикл (рис. 21). Температуры газа в различных состояниях равны: $T_1=400\text{ K}$, $T_2=800\text{ K}$, $T_3=2400\text{ K}$ и $T_4=1200\text{ K}$. Найти работу газа за цикл.

25 Состояние одного моля идеального газа изменялось вначале по изохоре 1-2, а затем по изобаре 2-3 (рис. 22) при этом газом совершена работа A . Известно, что температура в конечном состоянии 3 равна начальной температуре T . Определить отношение давлений p_1/p_2 в состояниях 1 и 2.

26 Моль гелия совершил работу A в замкнутом цикле, состоящем из изобары 1-2, изохоры 2-3 и адиабатического процесса 3-1 (рис. 23). Какое количество теплоты Q было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна ΔT ?

27 Найти работу A , которую совершает моль гелия в замкнутом цикле (рис. 24), состоящем из адиабатического процесса 1-2, изобары 2-3 и изохоры 3-1. В адиабатическом процессе разность максимальной и минимальной температур равна ΔT . В процессе 2-3 от газа отвели количество тепла Q .

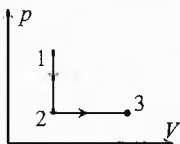


Рис. 22. Отношение давлений

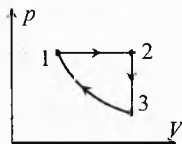


Рис. 23. Тепло на изобаре

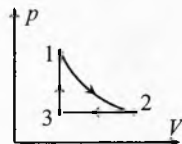


Рис. 24. Работа газа за цикл

28 В тепловом процессе с идеальным одноатомным газом, абсолютная температура T которого связана с его объёмом V соотношением $T = \alpha V^2$, где α – постоянная величина, подвели тепло $Q=4\text{ кДж}$. Найти совершенную газом работу.

29 Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110°C . Вода занимает при этом 0,1% объёма цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объёма вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу $A=177$ Дж, а объём, который он занимал, увеличился на $\Delta V=1,25$ л. Найти давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

30 Летним днём перед грозой плотность влажного воздуха $\rho=1140$ г/м³ при давлении $p=100$ кПа и температуре $t=30^{\circ}\text{C}$. Найти отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению сухого воздуха.

31 Гелий в количестве $\nu=2$ моля расширяется в процессе с постоянной теплоёмкостью C . К газу подвели количество теплоты $Q=3000$ Дж, а внутренняя энергия газа уменьшилась на $|\Delta U|=2490$ Дж. Чему равна работа, совершенная газом, и теплоёмкость газа C ?

32 Одноатомный газ находится в цилиндре под подвижным поршнем. Его нагревают при постоянном давлении, переводя из состояния 1 в состояние 2 (рис. 25). При этом газ совершает работу A_{12} . Затем его сжимают в процессе 2-3, в этом процессе давление p пропорционально объёму V , при этом над газом совершается работа $|A_{23}|$. Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе 3-1, возвращаясь в первоначальное состояние. Найти работу $|A_{31}|$, совершенную над газом в адиабатическом процессе.

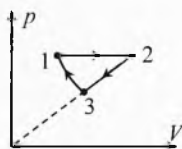


Рис. 25. Работа на адиабате

33 В сосуде находится 4 г водорода при температуре $T_1=300$ К и давлении $p_1=10^5$ Па. При повышении температуры до $T_2=3000$ К происходит частичная диссоциация молекул на атомы и давление возрастает в 15 раз. Какая часть молекул α водорода диссоциировала на атомы? Как изменилась внутренняя энергия газа?

34 Подвижный поршень массой m , подвешенный на пружине, делит объём вертикально расположенного откачанного цилиндра на две части (рис. 26). В положении равновесия высота нижней части H_0 , а удлинение пружины равно x_0 . В нижнюю часть цилиндра впрыскивается ν молей воды. При медленном нагреве до некоторой температуры вся вода испаряется, а поршень поднимается на $x_1=\alpha x_0$. Определить конечную температуру и работу, совершенную паром, если $\alpha=1/2$.

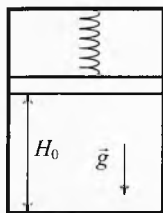


Рис. 26. Инъекция воды в вакуум

35 В вертикально расположенном цилиндре площадью основания $S=1$ дм² под поршнем массой $m=10$ кг, скользящем без трения, находится $\nu=1$ моль воздуха. При изобарном нагревании поршень поднялся на $h=20$ см. Какую работу совершил воздух, на сколько изменилась его внутренняя энергия, сколько тепла получил воздух, на сколько изменилась температура газа? Атмосферное давление равно $p_a=10^5$ Па.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

2 Не будет, т.к. на кипение нужно тепло, которое не пойдет во внутреннюю кастрюлю из-за отсутствия разности температур.

3 Указание. Применить I начало термодинамики для адиабатного процесса.

4 **Указание.** КПД нагревателя (горелки) равен отношению количества теплоты, полученного телом (чайником с водой), к количеству теплоты, выделившемуся при сгорании газа.

Ответ. Мощность горелки 3,5 кВт, сгорело 60 г газа.

5 $U = \frac{i}{2} \nu RT$, для многоатомных $i=6$; $\nu RT = pV$; $\Rightarrow U = \frac{i}{2} pV = \frac{6}{2} pV = 1,2$ кДж.

6 $U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} pV$, $i=3$, $p=nkT$; $\Rightarrow U = \frac{3}{2} nkTV$.

7 $p=\text{const}$: $\Delta U = \frac{5m}{2M} R\Delta T$; $V=\text{const}$: $\Delta U = -\frac{5m}{2M} R|\Delta T|$; $T=\text{const}$: $\Delta U = \frac{5m}{2M} R\Delta T=0$.

8 $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{i}{2} p_2 V_2}{\frac{i}{2} p_1 V_1} = \frac{0,7 p_1 \cdot 4V_1}{p_1 V_1} = 2,8$.

9 $p=\text{const}$; $A=p(V_2-V_1)=\frac{m}{M} R(T_2-T_1)=1780$ Дж; $\Delta V=\frac{A}{p}=\frac{A}{p_a+m_g/S}=17$ л.

10 $p=\text{const}$; $A=p(V_2-V_1)=\nu R(t_2-t_1)$; $t_2=t_1+A/(\nu R)=30^\circ\text{C}$.

11 $p=\text{const}$; $A=p(V_2-V_1)=\frac{m}{M} R\Delta T=16,6$ кДж; $\Delta U=\frac{i}{2} \frac{m}{M} R\Delta T=\frac{5}{2} \frac{m}{M} R\Delta T$;
 $\Delta U=41,6$ кДж; $Q=A+\Delta U=58,2$ кДж; $A/Q=2/7$; $\Delta U/Q=5/7$.

12 $V=\text{const}$: $A=0$, $\Rightarrow Q=\Delta U=\frac{i}{2} \nu R\Delta T=\frac{5}{2} V\Delta p=62,5$ кДж.

13 $T=\text{const}$; $\Delta U=0$; $Q=A=20$ Дж.

14 $0=Q=\Delta U+A$; $\Delta U=-A=-4470$ Дж; $\Delta U=\frac{5}{2} \frac{m}{M} R\Delta t$, $\Rightarrow t_2=t_1-A\cdot\frac{2M}{5mR}=-10^\circ\text{C}$.

15 $\eta \cdot \left(\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_2^2}{2} \right) = cm(t_{\text{пл}} - t_0) + \lambda \Delta m$; $\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\eta}{2} (v_1^2 - v_2^2) - c(t_{\text{пл}} - t_0) \right] = 0,36$.

16 $|A_{\text{тр}}|=Q=2C_{\tau} \cdot \Delta T$; $N=|A_{\text{тр}}|/\tau=2(C_{\tau} \Delta T)/\tau=800$ Вт.

17 $mgh=cm\Delta t$. Вода нагреется на $\Delta t=gh/c=0,07^\circ\text{C}$.

18 $cm\Delta t=mgh-\frac{mv^2}{2}$; $\Rightarrow \Delta t=\frac{2gh-v^2}{2c}=4^\circ\text{C}$.

19 $|Q_{\text{отд}}|=Q_{\text{получ}}$; $(m-m_n)\lambda=m_n L$; $\Rightarrow \frac{m_n}{m} = \frac{\lambda}{\lambda+L}=13\%$.

20 Поскольку соударение происходит очень быстро, а суммарный импульс системы равен 0 относительно земли, то вся кинетическая энергия капель превратится в их внутреннюю энергию.

$$2 \frac{mv^2}{2} = 2mc(t-t_0) + 2mL; \Rightarrow v = \sqrt{2(c(t-t_0) + L)} \approx 2,3 \text{ км/с.}$$

21 Дом отапливается для того, чтобы компенсировать поток тепла, уходящий из него через стены, окна, потолок и т.д.: $m\dot{q}=P_{\text{т.п.}} \cdot \tau$, где $P_{\text{т.п.}}$ — мощность тепловых потерь, $\tau=1$ сут, масса дров $m=\rho V$, q — удельная теплота сгорания дров.

В случае теплопроводности поток тепла прямо пропорционален разности температур внутри тела (в доме) и окружающей среды: $P_{\text{т.п.}}=k(t-t_c)$.

В первом случае: $\rho V_1 q = k(t - t_1)\tau$. Во втором случае: $\rho V_2 q = k(t - t_2)\tau$.

$$\Rightarrow V_2 = V_1(t - t_2)/(t - t_1) = 0,12 \text{ м}^3.$$

Ответ. Необходимо сжигать ежедневно 0,12 м³ дров, то есть на 20% больше.

22 Здесь возможно два варианта: если сила тяжести была больше силы давления газа на поршень ($mg > p_0 S$), то поршень опустится (рис. 27а), а если меньше ($mg < p_0 S$), то он поднимется (рис. 27б). В обоих случаях установится равновесное состояние при котором сила тяжести поршня станет равной силе давления $mg = p \cdot S$. Только в первом случае температура газа увеличится, а во втором — уменьшится.

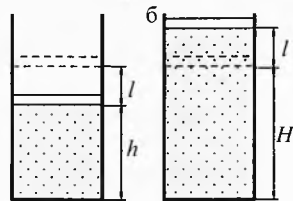


Рис. 27. Равновесие поршня

Найдём смещение l для второго случая ($mg < p_0 S$). Согласно закону сохранения энергии, сумма потенциальной энергии поршня и внутренней энергии газа не изменяется:

$$E_2 + U_2 = E_1 + U_1 \quad \text{или} \quad E_2 - E_1 = -(U_2 + U_1),$$

где $E_2 - E_1 = mgl$ — изменение потенциальной энергии поршня,

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2} \nu R \Delta T \text{ — изменение внутренней энергии газа.}$$

Из последних трёх уравнений следует:

$$mgl = -\frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (28)$$

Запишем уравнение Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$\frac{p_0 SH}{T_0} = \frac{mg(H+l)}{T} \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = T_0 \left(\frac{mg(H+l)}{p_0 SH} - 1 \right). \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), получим:
$$mgl = \frac{3}{2} \cdot \nu R T_0 \left(1 - \frac{mg(H+l)}{p_0 SH} \right).$$

Учитывая, что $\nu R T_0 = p_0 SH$, получим:

$$mgl = \frac{3}{2} (p_0 SH - mg(H+l)) \Rightarrow l = \frac{3}{5} H \left(\frac{p_0 S}{mg} - 1 \right).$$

В первом случае ответ будет таков: $l = 0,6H \left(1 - \frac{p_0 S}{mg} \right)$. Рекомендуем вам убедиться в этом самим. Решение аналогично.

Ответ. Поршень остановится на расстоянии $l = 0,6H \left| \frac{p_0 S}{mg} - 1 \right|$.

23 Из условия задачи ясно, что плотность потока тепла в обоих случаях одинакова. Лёд в контейнере плавится благодаря потоку тепла приходящему через его стенки из большого сосуда. В первом случае:

$$\lambda m_1 = \Phi_1 \tau_1; \quad \Phi_1 = k \cdot S \cdot \Delta T = k \cdot 6l_1^2 \cdot \Delta T; \quad m_1 = \rho l_1^3.$$

Решая совместно, получим: $\lambda \rho l_1^3 = 6k l_1^2 \cdot \Delta T \cdot \tau_1 \Rightarrow \lambda \rho l_1 = 6k \cdot \Delta T \cdot \tau_1.$

Аналогично во втором случае: $\lambda \rho l_2 = 6k \cdot \Delta T \cdot \tau_2.$

Из двух последних уравнений, получим:

$$l_2/l_1 = \tau_2/\tau_1 \Rightarrow \tau_2 = 2 \cdot \tau_1 = 40 \text{ мин.}$$

24 Изобразим диаграмму процесса в осях p, V (рис. 28).

Процессы 1-2 и 3-4 – изохорные.

Процессы 2-3 и 4-1 – изобарные.

Работа за цикл равна площади прямоугольника

$$1-2-3-4: A_{\text{ц}} = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2) = p_2 V_3 - p_1 V_3 - p_2 V_2 + p_1 V_2;$$

$$A_{\text{ц}} = p_3 V_3 - p_4 V_4 - p_2 V_2 + p_1 V_1 = \nu R(T_3 - T_4 - T_2 + T_1) \approx 20 \text{ кДж.}$$

25 $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, $A = p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2)$, $T_3 = T_1 = T$.

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{A}{\nu RT}.$$

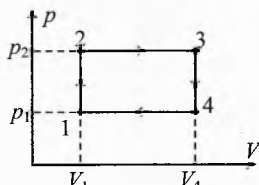


Рис. 28. Работа газа за цикл

26 Работа за цикл равна суммарному теплу (каждое слагаемое со своим знаком), подведённому к газу за цикл: $A = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = Q_{12} + Q_{23}$, ибо изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю. Согласно I началу термодинамики: $Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = \Delta U_{23} = \nu R \Delta T_{23}$. А поскольку максимальная температура гелия в точке 2, а минимальная – в точке 3, так как при адиабатном сжатии (3-1) газ нагревается, то $\Delta T_{23} = -\Delta T$, $Q_{23} = -\nu R \Delta T$; $\Rightarrow Q = Q_{12} = A - Q_{23} = A + \nu R \Delta T$.

27 В процессе 2-3 газ охлаждается и совершает отрицательную работу:

$$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}; Q_{23} = -Q; \Delta U_{23} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{23} = \frac{3}{2} p \Delta V_{23} = \frac{3}{2} A_{23}; \Rightarrow A_{23} = -\frac{2}{5} Q.$$

Процесс 1-2 адиабатический:

$$0 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}; \Rightarrow A_{12} = -\Delta U_{12} = -\frac{3}{2} \nu R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T.$$

$$\text{Учитывая, что } A_{31} = 0, \text{ получим: } A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T - \frac{2}{5} Q.$$

28 Пусть в некоторый момент времени объём газа V , температура – T , давление – p . Найдём связь между работой, совершенной газом, и изменением его внутренней энергии при изменении объёма газа на малую величину dV :

$$\delta A = p \cdot dV = \frac{\nu R T}{V} \cdot dV = \nu R \cdot \alpha V \cdot dV;$$

$$dU = \frac{3}{2} \nu R \cdot dT = \frac{3}{2} \nu R ((T + dT) - T) = \frac{3}{2} \nu R \cdot \alpha ((V + dV)^2 - V^2) \approx 3 \nu R \cdot \alpha V \cdot dV = 3 \cdot \delta A.$$

Поскольку соотношение $dU = 3 \cdot \delta A$ справедливо при любом малом изменении состояния газа в процессе, то оно так же будет применимо и на всем процессе: $\Delta U = 3A$. Тогда по I началу термодинамики: $Q = A + \Delta U = 4A$; $\Rightarrow A = Q/4$; $A = 1 \text{ кДж}$.

29 Процесс испарения воды происходит при постоянном давлении, так как пар при этом остаётся насыщенным. Таким образом, работа, совершенная паром к моменту испарения всей воды, $A = p_n \cdot \Delta V$; $\Rightarrow p_n = A/\Delta V = 142 \text{ кПа}$.

В этом процессе вся вода испарилась и, следовательно, заняла объём ΔV . По уравнению Клапейрона–Менделеева: $p_n \Delta V = \frac{m_n}{M} RT$; $\Rightarrow m_n = \frac{p_n \Delta V \cdot M}{RT} = \frac{A \cdot M}{RT} = 1 \text{ г}$. Следовательно, начальный объём воды $V_n = 1 \text{ мл}$, а объём цилиндра $V_0 = 1 \text{ л}$. Учитывая, что $V_n \ll V$, найдём начальную массу пара: $p_n V_0 = \frac{m_n}{M} RT$; $m_n = \frac{p_n V_0 \cdot M}{RT} = 0,8 \text{ г}$.

30 Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха и пара: $p = p_v + p_n$.

Аналогично, для массы, а значит, и для плотности воздуха:

$$m = m_v + m_n; \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{m_v}{V} + \frac{m_n}{V} \Rightarrow \rho = \rho_v + \rho_n.$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева получим: $p_n = \frac{\rho_n RT}{M_n}$; $p_v = \frac{\rho_v RT}{M_v}$.

Решая совместно эти уравнения, получим: $\frac{p_n}{p} = \frac{\rho RT - p M_v}{p M_n - \rho RT} = \frac{1}{36}$.

31 Согласно I началу термодинамики: $Q = A + \Delta U$, где $\Delta U = -|\Delta U| < 0$; $\Rightarrow A = Q + |\Delta U|$; $A = 5490$ Дж. Изменение внутренней энергии газа: $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$. Теплоёмкость газа: $C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{3 \nu R Q}{2 \Delta U}$; $C = -30$ Дж/К.

Отрицательная теплоёмкость говорит о том, что к газу подводится тепло, но при этом он охлаждается, так как при этом он совершает работу, значение которой больше количества подводимого тепла.

32 1) Процесс 1-2. $A_{12} = p_1 \Delta V_{12}$; $\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} p_1 \Delta V_{12} = \frac{3}{2} A_{12}$.

2) Процесс 2-3. Работа, совершенная над газом в процессе 2-3, равна площади под графиком процесса 2-3: $|A_{23}| = \frac{1}{2} (p_2 + p_3) (V_2 - V_3) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3 + p_3 V_2 - p_2 V_3)$.

Учитывая, что давление здесь пропорционально объёму, получим:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2} \quad \text{или} \quad p_3 V_2 = p_2 V_3; \Rightarrow |A_{23}| = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3) = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_3).$$

Изменение внутренней энергии в процессе 2-3: $\Delta U_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2)$.

Учитывая выражение для A_{23} , получим: $\Delta U_{23} = -3|A_{23}|$.

3) Процесс 3-1 – адиабатический ($Q=0$): $A_{31} + \Delta U_{31} = 0$; $\Rightarrow \Delta U_{31} = -A_{31} = |A_{31}|$.

4) Поскольку изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, то

$$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} A_{12} - 3|A_{23}| + |A_{31}| = 0.$$

Значит, в процессе 3-1 над газом была совершена работа $|A_{31}| = 3|A_{23}| - \frac{3}{2} A_{12}$.

33 Запишем уравнение состояния для температуры T_1 : $p_1 V = \nu R T_1$.

После нагрева до температуры T_2 в сосуде стало два газа: молекулярный водород с количеством вещества $\nu_{H_2} = (1-\alpha)\nu$ и атомарный водород, количество вещества которого $\nu_H = 2\alpha\nu$, где α – доля диссоциировавших молекул водорода; коэффициент 2 появился потому, что из одной молекулы водорода получается два отдельных атома (две одноатомных молекулы).

Запишем для конечного состояния газа закон Дальтона и уравнение состояния для обоих компонентов (H_2 и H):

$$p_2 = p_{H_2} + p_H; \quad p_{H_2} V = \nu(1-\alpha)RT_2; \quad p_H V = 2\alpha\nu RT_2.$$

Решая совместно эти три уравнения и сравнивая с уравнением для начального состояния, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1+\alpha)T_2}{T_1}; \Rightarrow \alpha = \frac{T_1 p_2}{T_2 p_1} - 1 = 0,5 \text{ или } \alpha = 50\%.$$

Найдём, во сколько раз изменилась внутренняя энергия газа при нагревании:

$$U_1 = \frac{5}{2} \nu R T_1, \quad (30)$$

$$U_2 = \frac{5}{2} \nu_{H_2} R T_2 + \frac{3}{2} \nu_H R T_2.$$

Подставим выражения для ν_{H_2} и ν_H в последнее уравнение:

$$U_2 = \nu R T_2 \left[\frac{5}{2} (1-\alpha) + 2\alpha \cdot \frac{3}{2} \right] = \nu R T_2 (0,5\alpha + 2,5). \quad (31)$$

Разделим (31) на (30):
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2 (0,5\alpha + 2,5)}{2,5 T_1} = 11.$$

Ответ. Половина молекул водорода диссоциирует на атомы, внутренняя энергия газа увеличится в 11 раз.

Примечание. Строго говоря, в приведённом решении не совсем корректно посчитано увеличение внутренней энергии газа. Дело в том, что после диссоциации у нас получился совсем другой газ. На диссоциацию молекул водорода затрачено немало энергии, которая вполне может быть использована при обратном процессе. Это эффект используется, например, при резке металла – энергия передаётся металлу в результате рекомбинации атомарного водорода на его поверхности. Рекомендуем Вам посчитать какое количество энергии было потрачено на диссоциацию водорода, если теплота диссоциации водорода составляет 435 кДж/моль.

34 Условие равновесия поршня до впрыскивания воды: $mg = kx_0$, где k – жесткость пружины.

Конечный давление и объём пара: $p = \frac{mg - k(x_0 - \alpha x_0)}{S} = \frac{\alpha mg}{S}$; $V = (H_0 + \alpha x_0)S$.

Конечную температуру найдём из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{\alpha mg(H_0 + \alpha x_0)}{\nu R} = \frac{mg(2H_0 + x_0)}{4\nu R}.$$

Работа, совершенная паром, идёт на увеличение потенциальной энергии поршня и на изменение энергии деформации пружины:

$$A = mg\alpha x_0 + \frac{k(x_0 - \alpha x_0)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{8}.$$

35 $p = p_a + \frac{mg}{S} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $\Delta V = S \cdot h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; $A = p \cdot \Delta V = 220 \text{ Дж}$,

$$\Delta U = \frac{5}{2} p \cdot \Delta V = \frac{5}{2} A = 550 \text{ Дж}, \quad Q = \Delta U + A = 770 \text{ Дж}, \quad \Delta T = \frac{p \cdot \Delta V}{\nu R} = \frac{A}{\nu R} = 26,5 \text{ К}.$$

Глава 4. Тепловые машины

Знание — есть сила, сила — есть знание.
Фрэнсис Бэкон

§ 29. Принцип действия тепловых двигателей

Мировая цивилизация получает основную долю механической энергии за счёт внутренней энергии топлива. Почти все автомобили совершают работу в результате сгорания топлива.

*Устройства, в которых периодически происходит преобразование внутренней энергии вещества в механическую, называют тепловыми двигателями (**тепловыми машинами**).*

Для того чтобы двигатель совершал работу, необходима разность давлений газа по обе стороны поршня двигателя или лопастей турбины.

*Газ, расширение которого вызывает движение поршня или вращение турбины, называют **рабочим телом**.*

Рассмотрим принцип действия тепловых машин на примере поршневого теплового двигателя (рис. 1) и, для простоты рассуждений, будем считать, что в двигателе используется одна и та же порция газа (рабочее тело).

Когда газ, получивший тепло от **нагревателя**, расширяется, он приводит в движение поршень 3. Движение поршня передаётся коленчатому валу с сидящим на нём маховиком. При расширении газа его давление и температура уменьшаются. Для того чтобы газ снова мог совершить работу, его нужно привести в исходное состояние: сжать и нагреть.

Для сжатия газа поршень должен переместиться под действием внешней силы назад. Это движение совершается при помощи шатуна 4 и коленчатого вала 5 за счёт кинетической энергии, запасенной маховиком 6 в процессе расширения газа.

Положительный эффект от работы двигателя будет, если работа газа при его расширении окажется больше работы внешних сил (маховика), затраченной на сжатие газа. А для этого надо, чтобы при каждом значении объёма давление при расширении газа было больше давления при его сжа-

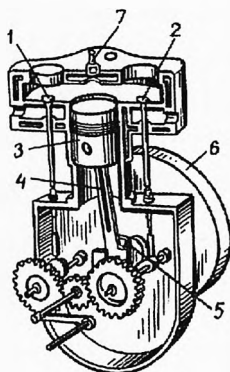


Рис. 1. Поршневой тепловой двигатель

тии. Поэтому перед сжатием газ должен быть дополнительно охлажден. Для этого его необходимо привести в контакт с телом, имеющим более низкую температуру. Это тело, которому газ отдаёт часть своей энергии для его охлаждения, называют **холодильником**. Нагреватель, рабочее тело и холодильник – основные части теплового двигателя.

Принципиальная схема теплового двигателя изображена на рис. 2.

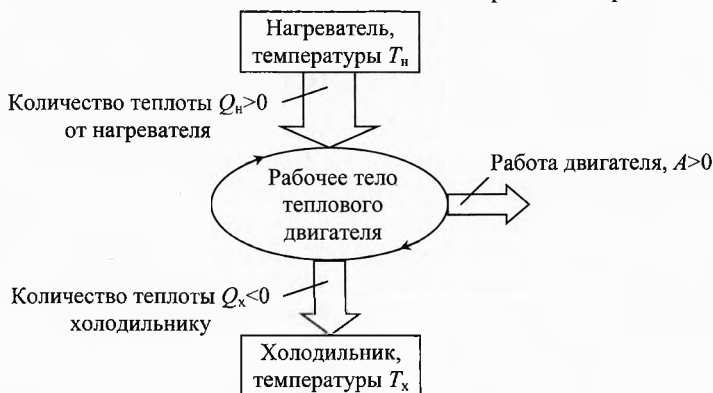


Рис. 2. Принципиальная схема теплового двигателя

Рабочее тело двигателя при сгорании топлива в нагревателе получает количество теплоты Q_n и совершает работу A . Отработавший газ (рабочее тело) отдаёт холодильнику количество теплоты $|Q_x| < Q_n$.

§ 30. Коэффициент полезного действия (КПД) теплового двигателя

Рабочее тело не может превратить в результате кругового процесса всю полученную от нагревателя теплоту Q_n в механическую энергию. Для того чтобы характеризовать эффективность тепловой машины по преобразованию внутренней энергии в механическую, вводится понятие коэффициента полезного действия.

Коэффициента полезного действия (КПД) тепловой машины характеризует эффективность преобразования затрачиваемой энергии в полезную работу. КПД равен отношению работы, совершенной двигателем за цикл, к количеству теплоты, полученному от нагревателя за то же время:

$$\eta = \frac{A_u}{Q_n}$$

$$\eta = \frac{A_u}{Q_n} \cdot 100\%.$$

КПД можно определять за 1 цикл или за несколько циклов работы двигателя.

Согласно закону сохранения энергии, совершаемая двигателем работа не может быть больше, чем:

$$A_{\text{ц}} = Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|.$$

Получим еще одно выражение для КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}}; \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}}}.$$

Коэффициент полезного действия тепловой машины всегда меньше единицы (<100%). Задача теплоэнергетики состоит в том, чтобы сделать КПД как можно более высоким, то есть использовать для получения работы как можно большую часть теплоты от топлива. Во-первых, как можно более эффективно сжигать топливо (полное сгорание). Во-вторых, уменьшить потери тепла в окружающую среду от рабочего тела во время процесса работы. В третьих, поменьше отдавать тепла с отработанным газом в атмосферу (поменьше тепла в трубу). В четвертых, уменьшать потери на трение в узлах машины. Наконец, самое главное, по возможности повышать температуру нагревателя по сравнению с температурой холодильника. Об этом подробнее в следующем параграфе.

Пример 1. На рис. 3 представлена диаграмма осуществлённого с воздухом цикла, состоящего из двух изохор и двух изобар. Давления и объёмы газа известны во всех точках. Вычислить КПД двигателя, работающего по заданному циклу. Воздух в основном двухатомный газ.

Дано:

$p_3 = p_4 = 1$ атм
 $p_1 = p_2 = 3$ атм
 $V_1 = V_4 = 0,2$ л
 $V_2 = V_3 = 0,6$ л
 $i = 5$
 КПД – ?

Решение. По определению КПД равен отношению работы газа за цикл $A_{\text{ц}}$ к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя за этот цикл

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}}.$$

Газ совершает работу только на участках изобарного расширения 1-2 и изобарного сжатия 3-4, так как на участках 2-3 и 4-1 объём газа не изменяется:

$$A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{34}; \Rightarrow A_{\text{ц}} = p_1(V_2 - V_1) + p_3(V_4 - V_3);$$

$$V_4 - V_3 = -(V_3 - V_4) = -(V_2 - V_1); \Rightarrow A_{\text{ц}} = p_1(V_2 - V_1) - p_3(V_2 - V_1);$$

$$A_{\text{ц}} = (p_1 - p_3)(V_2 - V_1).$$

Обратим внимание, что при расширении работа газа положительна, а при сжатии – отрицательна.

Полная работа газа за цикл равна в определённом масштабе площади заштрихованной фигуры на диаграмме p - V .

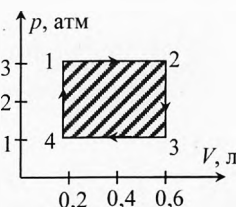


Рис. 3. КПД двигателя

Итак, $A_u = 2 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 80 \text{ Дж}$.

Теперь найдём количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл. На участке 1-2 газ получает тепло, которое расходуется на его нагревание и совершение работы. Согласно I началу термодинамики,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}, \Rightarrow Q_{12} = \frac{i}{2} p_1 (V_2 - V_1) + p_1 (V_2 - V_1) = \left(\frac{i}{2} + 1\right) p_1 (V_2 - V_1).$$

На участке 2-3 газ изохорно охлаждается и не работает ($\Delta V_{23} = 0$), значит, не получает тепла от нагревателя, а наоборот, отдаёт холодильнику.

На участке 3-4 газ изобарно сжимается. При этом он совершает отрицательную работу и охлаждается, следовательно, не получает тепла от нагревателя.

На участке 4-1 газ изохорно нагревается, не совершая работы, значит, получает тепло

$$Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_4 V_4).$$

Итак, количество теплоты, полученное газом за 1 цикл,

$$Q_n = Q_{12} + Q_{41}; \quad Q_n = \left(\frac{i}{2} + 1\right) p_1 (V_2 - V_1) + \frac{i}{2} (p_1 - p_4) V_1,$$

$$Q_n = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} + \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 420 + 100 = 520 \text{ Дж}.$$

$$\eta = \frac{80 \text{ Дж}}{520 \text{ Дж}} = 0,154 \approx 0,15 = 15\%.$$

✓ **Ответ.** Коэффициент полезного действия двигателя равен 15 %.

§ 31. Цикл Карно. КПД идеального теплового двигателя

Чему же равен максимально возможный КПД тепловой машины, работающей по самому совершенному циклу, и каков этот цикл? Эту задачу решил в 1824 г. французский физик и инженер Никола Леонард Сади Карно.

Он предложил цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 4). На участке 1-2 изотермического расширения, согласно первому началу термодинамики, всё получаемое газом тепло идёт на совершение положительной работы

$$Q_{12} = A_{12}.$$

То есть нет никаких потерь тепла в окружающее пространство и никакого изменения внутренней энергии $\Delta U_{12} = 0$, т.к. $T_{12} = \text{const}$.

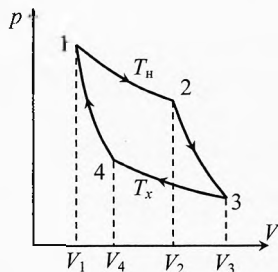


Рис. 4. Цикл Карно

На участке 2-3 адиабатного расширения газ совершает положительную работу ($A_{23} > 0$) за счёт уменьшения внутренней энергии газа ($\Delta U_{23} < 0$):

$$Q_{23} = 0 \Rightarrow 0 = \Delta U_{23} + A_{23} \Rightarrow A_{23} = -\Delta U_{23}.$$

Здесь также нет потерь тепла, по определению адиабатного процесса.

На участке 3-4 над газом совершается положительная работа внешней силой, но он не нагревается (изотермический процесс). Благодаря достаточно медленно протекающему процессу и хорошему контакту с холодильником газ успевает отдавать получаемую за счёт работы внешних сил энергию в виде тепла холодильнику ($Q_{34} < 0$). Сам же газ совершает при этом отрицательную работу ($A_{34} < 0$):

$$Q_{34} = A_{34}.$$

На участке 4-1 газ адиабатно (без теплообмена) сжимается и нагревается до исходного состояния. При этом он совершает отрицательную работу ($A_{41} < 0$), а работа внешних сил над газом положительна:

$$0 = \Delta U_{41} + A_{41} \Rightarrow A_{41} = -\Delta U_{41}.$$

Таким образом, за цикл газ получает тепло только на участке 1-2 изотермического расширения

$$Q_{\text{н}} = Q_{12} = A_{12} = \nu R T_{\text{н}} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Холодильнику тепло отдаётся только при изотермическом сжатии газа на участке 3-4:

$$Q_{\text{х}} = Q_{34} = A_{34} = \nu R T_{\text{х}} \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Учитывая, что $\ln \frac{V_4}{V_3} = -\ln \frac{V_3}{V_4}$, получим:

$$Q_{\text{х}} = A_{34} = -\nu R T_{\text{х}} \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Работа газа за цикл равна сумме работ на всех участках. При адиабатном расширении и сжатии работы газа равны по модулю и противоположны по знаку. Действительно,

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = -\frac{i}{2} \nu R (T_{\text{х}} - T_{\text{н}}) = \frac{i}{2} \nu R (T_{\text{н}} - T_{\text{х}});$$

$$A_{41} = -\Delta U_{41} = -\frac{i}{2} \nu R (T_{\text{н}} - T_{\text{х}}).$$

$$\Rightarrow A_{41} = -A_{23}.$$

Поэтому, фактически, работа газа за цикл Карно равна сумме работ при его изотермическом расширении и сжатии:



Никола Леонард
Сади Карно
(1796–1832)

$$A_u = A_{12} + A_{34} = Q_n + Q_x = Q_n - |Q_x|;$$

$$A_u = \nu RT_n \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_x \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Вычислим теперь КПД машины, работающей по циклу Карно,

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{A_u}{Q_n} = \frac{\nu RT_n \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_x \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu RT_n \ln \frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow \eta_{\text{ид}} = \frac{T_n \ln \frac{V_2}{V_1} - T_x \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_n \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Согласно уравнению Пуассона для процессов 2-3 и 4-1:

$$T_n V_2^{\gamma-1} = T_x V_3^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad T_n V_1^{\gamma-1} = T_x V_4^{\gamma-1}; \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Учитывая это, получим:

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_n \ln \frac{V_2}{V_1} - T_x \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_n \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_n - T_x}{T_n};$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{\text{ид}} = \frac{T_n - T_x}{T_n}} \quad \text{или} \quad \boxed{\eta_{\text{ид}} = 1 - \frac{T_x}{T_n}}.$$

КПД теплового двигателя, работающего по циклу Карно, равен отношению разности температур нагревателя T_n и холодильника T_x к температуре нагревателя T_n .

§ 32. КПД реальных тепловых машин

Полученная формула КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, даёт теоретический предел для максимального значения КПД тепловых машин. Она показывает, что тепловой двигатель тем эффективнее, чем выше температура нагревателя и ниже температура холодильника. Лишь при температуре холодильника, равной абсолютному нулю, его коэффициент полезного действия $\eta=1$ или 100%.

Но температура холодильника практически не может быть намного ниже температуры окружающего воздуха. Повышать температуру нагревателя можно, но жаропрочность материалов, особенно при больших давлениях, весьма ограничена.

Основные усилия теплоэнергетиков сейчас направлены на повышение КПД двигателей за счёт уменьшения трения в деталях машин и более полного сгорания топлива.

Реальные возможности для повышения КПД здесь остаются всё ещё большими. Для паровой турбины начальные и конечные температуры пара примерно таковы: $T_n=800$ К и $T_x=300$ К. Максимально возможный КПД

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}; \quad \eta_{\text{ид}} = 0,62 = 62\%.$$

Реально же максимальный КПД паровых турбин достигает 40%.

✎ **Пример 2.** Вычислить максимальный КПД в процессе, с минимальной и максимальной температурой, как в примере 1 этой главы, если минимальная температура в том процессе была 300 К.

➔ **Решение.** Минимальная температура будет в точке 4 ($T_{\text{х}} = T_4 = 300$ К), а максимальная в точке 2. Согласно уравнению Клапейрона,

$$\frac{p_4 V_4}{T_4} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_4 \cdot \frac{p_2 V_2}{p_4 V_4},$$

$$T_{\text{н}} = T_2 = 300 \cdot \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}}{10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 2700 \text{ К}.$$

КПД максимален, если вместо двух изохор и двух изобар будет проведён цикл Карно из двух изотерм и двух адиабат с теми же экстремальными температурами

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_2 - T_4}{T_2}; \quad \eta_{\text{ид}} = \frac{2700 - 300}{2700} = 0,89 \approx 0,9 = 90\%.$$

✓ **Ответ.** Максимально возможный КПД с данными экстремальными температурами примерно равен 90%. Он в 6 раз больше, чем в процессе, состоящем из двух изобар и изохор.

Примечание. Для получения ответа конкретное значение $T_{\text{х}}$ было не обязательным, но одно придаёт решению большую наглядность.

§ 33. Устройство и принцип действия тепловых машин

В XIX веке произошёл небывалый до того расцвет промышленности и транспорта, связанный с изобретением и усовершенствованием тепловых двигателей: сначала паровой машины, затем двигателей внутреннего сгорания.

Паровые машины. В России первые практически действующие паровые машины были созданы русским теплотехником Иваном Ивановичем Ползуновым. В 1763 г. он разработал проект универсального теплового двигателя первой в мире пароатмосферной машины непрерывного действия, осуществить который ему не удалось. В 1765 г. И.И. Ползунов по другому проекту построил первую



Иван Иванович
Ползунов
(1728–1766)

в России паротеплосиловую установку для заводских нужд, проработавшую 43 дня; однако за неделю до её пуска изобретатель скончался.

Большую роль в переходе к машинному производству сыграл английский изобретатель Джеймс Уатт, создатель универсального теплового двигателя. В 1774 году он изобрел паровую машину с цилиндром двойного действия (пар поочередно толкал поршень с двух сторон), в которой применил центробежный регулятор, передачу от штока цилиндра к балансиру с параллелограммом (патент 1784 г.).

В машинах Ползунова и Уатта имелись основные элементы всех последующих машин: 1) *нагреватель*, в котором освобождалась энергия топлива; 2) *рабочее тело* – водяной пар получал энергию от нагревателя и совершал работу над поршнем, в результате которой энергия нагревателя частично превращалась в механическую; 3) *охладитель (холодильник)*, необходимый для снижения температуры и давления отработавшего пара.

Некоторые первые машины были экзотических размеров. Например, машина Ньюкомена–Коули (английских изобретателей) изготовленная в 1705 г. для откачки воды в шахтах, получившая широкое распространение в XVIII веке, достигала высоты 4–5 этажного дома, имела цилиндр диаметром 2 м с ходом поршня 3 м.

Усовершенствования конструкции паровых машин, повышение температуры и давления пара позволило повышать их мощность и уменьшать размеры. Благодаря чему они нашли широкое применение на заводах и фабриках для привода станков, а также в пароходах и паровозах. До конца XIX века паровая машина была практически единственным распространенным двигателем в промышленности и на транспорте.



Джеймс Уатт
(1736–1819)

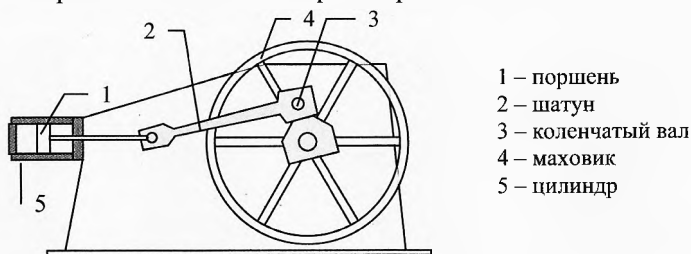


Рис. 5. Схема паровой машины

Паровая машина допускает большие перегрузки и реверсирование (обратный ход), надежна, проста (рис. 5). Мощность до 15 МВт (20000 л. с.), КПД достигает 20–25%.

Недостатками паровой машины, сузившими её применение, является низкая экономичность (низкий КПД, особенно у маломощных машин).

Поршневые двигатели внутреннего сгорания (ДВС) – двигатель, в котором топливо сгорает внутри цилиндра.

Первый ДВС был создан в 1860 г. французским инженером Этьеном Ленуаром.



Этьен Ленуар
(1822–1900)



Альфонс Бо де
Роша (1815–1893)



Николаус Август
Отто (1832–1891)

Вместо пара в цилиндр при движении поршня засасывалась смесь светильного газа и воздуха. Когда поршень проходил расстояние, равное половине своего хода, закрывался впускной клапан и горючая смесь воспламенялась электрической искрой. Под давлением продуктов сгорания поршень продолжал двигаться и совершал работу. В конце рабочего хода открывался выпускной клапан, и поршень при обратном ходе выталкивал продукты сгорания из цилиндра. КПД первого ДВС был равен 3,3%.

В 1862 г. французский инженер Альфонс Бо де Роша предложил идею четырёхтактного ДВС (рис. 6): всасывание, сжатие, горение и расширение (рабочий ход), выхлоп. Эту идею использовал немецкий изобретатель Николаус Август Отто (1832–1891), создав четырёхтактный газовый двигатель внутреннего сгорания в 1876 г. КПД двигателя составил 22%, что было наивысшим достижением того времени.

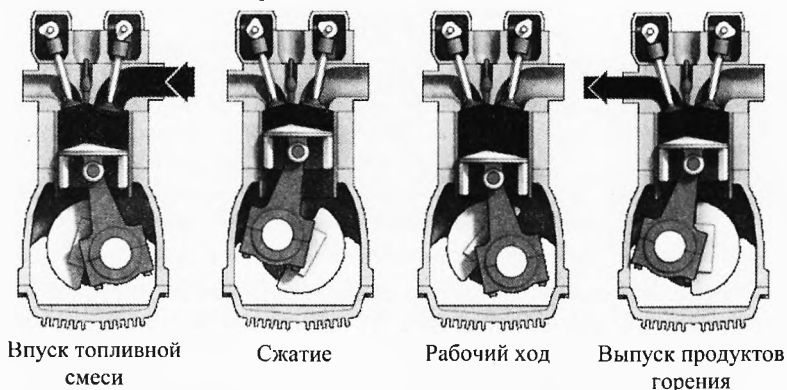


Рис. 6. Четырёхтактный двигатель внутреннего сгорания

Карбюраторные двигатели. В конце XIX века появились новые виды топлива – бензин и керосин, полученные из нефти.

В бензиновом (и керосиновом) двигателях горючее смешивают с воздухом перед впуском в цилиндр в специальных устройствах, называемых карбюраторами. Воздушно-бензиновую смесь называют горючей смесью.

Для полного сгорания бензина на единицу его массы должно приходится не менее 15 единиц массы воздуха. Таким образом, в карбюраторном ДВС нагревателем являются пары бензина с кислородом в результате реакции окисления (горения), а рабочим телом – продукты горения и нагретый ими азот воздуха.

Рабочий цикл четырехтактного ДВС Отто. Двигатель внутреннего сгорания Отто состоит из следующих процессов (рис. 7):

а) при первом ходе поршня слева направо (первый такт) в цилиндр всасывается через клапан *a* горючее (смесь паров бензина с воздухом). Можно считать, что это изотермическое всасывание происходит при постоянном давлении, приблизительно равном атмосферному; объём цилиндра увеличивается от V_0 до V_1 (участок 0-1);

б) в течение второго хода (второй такт; участок 1-2) поршень, двигаясь налево, адиабатически сжимает эту смесь, уменьшая её объём от V_1 до V_0 и повышая температуру от T_0 до T_2 и давление от p_0 до p_2 ;

в) когда поршень подходит к верхней мёртвой точке (ВМТ*), между электродами свечи *M* проскакивает искра, сжатая смесь взрывается. Начинается третий такт. При этом бензин сгорает практически при неизменном объёме (участок 2-3). Давление газов и температура резко возрастают до значений p_3 и T_3 . Продукты сгорания получают количество теплоты $Q_{\text{н}}$.

При дальнейшем движении поршня к НМТ совершается рабочий ход – газ адиабатически расширяется до объёма V_1 , а его температура падает от T_3 до T_4 (участок 3-4). Продукты сгорания отдают часть своей энергии поршню, совершая на участке 3-4 работу $A_{\text{дв}}$.

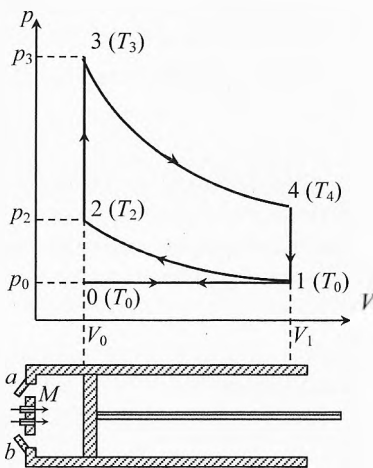


Рис. 7. Двигатель Отто

* Крайнее положение поршня работающей поршневой машины, при котором его скорость равна нулю, называется мёртвой точкой. Верхняя мёртвая точка (ВМТ) соответствует наибольшему удалению поршня от коленчатого вала (то есть минимальному объёму газа), нижняя (НМТ) – наименьшему (то есть максимальному объёму газа).

В положении поршня, соответствующем точке 4, открывается выпускной клапан b , причём давление при постоянном объёме V_1 падает до значения p_0 (участок 4-1); температура падает до значения T_0 ;

г) при последнем, четвертом такте, поршень движется налево к ВМТ. При этом отработавший газ выталкивается в атмосферу через клапан b (участок 1-0), унося с собой в окружающую среду количество теплоты $|Q_x|$. Затем процесс повторяется.

КПД цикла:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}},$$

где $A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{34}$ – работа газа за цикл ($A_{12} < 0$); $Q_{\text{н}} = Q_{23}$ – количество теплоты, полученное газом (продуктами сгорания) за цикл от «нагревателя», то есть при сгорании бензина.

Можно рассчитать, что КПД цикла Отто равен:

$$\eta_{\text{Отто}} = \frac{T_3 - T_4}{T_3}.$$

КПД цикла Отто ниже, чем КПД цикла Карно, ибо наименьшая температура в этом цикле Отто T_0 в точке 1, и КПД цикла Карно при тех же максимальной и минимальной температурах был бы равен:

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{T_3 - T_0}{T_3}.$$

Это соответствует теореме Карно, что КПД любого цикла меньше КПД цикла Карно.

КПД поршневых двигателей возрастает с увеличением *степени сжатия* ε горючей смеси, т. к. при этом достигается более высокая температура в конце сжатия, что способствует более полному сгоранию топлива.

$$\varepsilon = V_1/V_2,$$

где V_1 и V_2 – объёмы газа в начале и конце сжатия.

Увеличению степени сжатия препятствует детонация.

Детонация – самовоспламенение горючей смеси, которое может произойти до достижения поршнем верхней мёртвой точки. Детонация оказывает разрушающее действие на двигатель, снижает его мощность и КПД.

У современных карбюраторных двигателей степень сжатия составляет 8–9. Достигнуть такой степени сжатия без детонации удалось путём увеличения скорости движения поршня и повышения частоты оборотов двигателя до 5–6 тыс. об/мин., а также применения бензина со специальными антидетонационными присадками.

Список веществ, позволяющих повысить антидетонационные свойства топлива, достаточно обширен, однако не все из них могут использоваться ввиду технологических или экологических ограничений. Для основы антидетонационных присадок используются следующие действующие компоненты:

- антидетонаторы на базе соединений свинца (в настоящее время практически не используются);
- антидетонаторы на базе ароматических аминов;
- антидетонаторы на базе соединения ферроцена (железа);
- антидетонаторы на базе соединения марганца;
- антидетонаторы на базе соединений щелочных металлов;
- оксигенаты (кислородсодержащие добавки);
- смесевые композиции.

Долгое время в качестве основы таких присадок использовался тетраэтилсвинец (ТЭС): $\text{Pb}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$. Способность тетраэтилсвинца повышать антидетонационные свойства топлив была открыта в 1921 году, а уже два года спустя ТЭС стали интенсивно производить в промышленности.

ТЭС не применяют в чистом виде, поскольку образующийся металлический свинец осаждается на стенках цилиндров двигателя, что приводит к его отказу. По этой причине в смеси с ТЭС вводят так называемые выносители, которые образуют с металлическим свинцом летучие соединения. Смесь ТЭС и выносителя называют этиловой жидкостью, а бензин, содержащий добавки этиловой жидкости, — этилированным.

Антидетонаторы на основе тетраэтилсвинца в России были запрещены ГОСТ Р 51105-97, который регламентирует производство только неэтилированных бензинов. В Европе и других развитых странах от ТЭС отказались с введением в 1995 году норм Евро-2.

Дизельные двигатели. Один из путей повышения КПД (причём без свинцовых добавок в топливе) — использование двигателей Дизеля. Немецкий инженер Рудольф Дизель (1858–1913) создал в 1897 г. двигатель внутреннего сгорания с более высокой степенью сжатия, чем у карбюраторных. В его двигателях сжимается воздух, а не горючая смесь, поэтому отсутствует опасность детонации. Устройство его двигателя в основном такое же, как у карбюраторного, но вместо карбюратора и системы электрического зажигания используется топливный насос, сжимающий горючее до давления порядка 150 атм., и вместо свечи в цилиндр вставляется форсунка. Через неё в цилиндр впрыскивается топливо, когда поршень дойдёт почти до ВМТ. В этот момент давление сжатого воздуха порядка 25 атм, а температура 600–700°C. При такой температуре попавшее в цилиндр топливо самовоспламеняется. Его поступление в камеру сгорания происходит не мгновенно, а в течение некоторой части рабочего хода, что уменьшает ударные нагрузки на детали двигателя. Поршневые ДВС, как правило, имеют 4–6 и более цилиндров для создания более равномерного режима работы. В современных двигателях используют степень сжатия 16–21, и их КПД составляет около 40%.

Паровые турбины — тепловые лопастные двигатели непрерывного действия, в которых потенциальная энергия пара превращается в кинетическую, а затем в механическую энергию вращающегося вала. Первую паровую турбину, нашедшую практическое применение, изготовил в 1889 г. шведский инженер Карл Густав Патрик де Лаваль. Её мощность была около 4 кВт при частоте вращения ротора 500 об/с. Лаваль применил в своём детище многие технические усовершенствования.

вания. Главное, он решил две задачи: добился, чтобы внутренняя энергия пара в максимальной степени превращалась в кинетическую энергию струи, вылетающей из сопла, и чтобы кинетическая энергия струи в максимальной степени передавалась лопаткам ротора турбины.

В настоящее время паровая турбина – основной тип двигателя для привода электрогенераторов на теплоэлектростанциях (ТЭС). В котле сжигается топливо (природный газ, мазут, угольная пыль). Вдоль стен котла расположены трубы с водой, которая нагревается и превращается в пар с давлением 130 атм. и температурой 550°C. Пар поступает сначала в турбину высокого давления, где отдаёт часть своей энергии. При этом его давление уменьшается в 10 раз. После чего пар подаётся в турбину среднего, а затем – низкого давления. При этом давление пара становится во много раз меньше атмосферного (заметим, что воздуха в системе турбин нет).

Все турбины насажены на один вал, герметически изолированы друг от друга. Площадь поверхности лопаток увеличивается по мере уменьшения давления. Температура отработанного пара составляет 40–50°C. Затем пар конденсируется, полученная вода подогревается и под давлением 200 атм при температуре 230°C подаётся снова в котёл. Также применяют паровые турбины с противодавлением, у которых давление на выходе из последней ступени выше атмосферного.

Кроме ТЭС паровые турбины применяются также для привода центробежных воздуходувок, компрессоров и насосов. В России паровые турбины строят различных мощностей – от нескольких кВт до 1,2 ГВт и более. Частота вращения тоже может варьироваться от 3000 (стационарные турбины) до 30000 об/мин и более (турбины небольшой мощности).

Габариты паровой турбины сравнительно малы, она проста в эксплуатации, экономична и позволяет использовать пар высоких параметров (давления и температуры), получить чистый конденсат, одновременно с выработкой электроэнергии отпускать потребителям пар среднего давления. КПД парогенераторов для выпуска электроэнергии составляет 25–30%, а с учетом выработки тепла, особенно в зимнее время, КПД ТЭС может достигать 40%.

Ракетные двигатели – реактивные двигатели, не использующие для своей работы кислород из окружающей среды. Это основной тип двигателей в космонавтике. Применяются химические (жидкостные и твёрдотопливные), а также электрические ракетные двигатели.

Основные части химического ракетного двигателя – камера сгорания и реактивное сопло. Химическая энергия ракетного топлива при сгорании преобразуется в тепловую, а затем при расширении продуктов сгорания в сопле – в кинетическую энергию газового потока. Тяга создаётся вследствие реактивного воздействия струи. В твёрдотопливных двигателях твёрдое топливо полностью помещается в камеру сгорания. Обычно горение продолжается до полного его выгорания. На таких двигателях применяются неохлаждаемые камеры.

Жидкостный ракетный двигатель состоит из камеры, агрегатов системы подачи топлива из баков в камеру сгорания (насосной или вытеснительной), агрегатов автоматизации пуска, регулирования и т. п. Стенки камеры двигателя охлаждаются компонентами топлива, пропускаемыми по специальным каналам. Приме-



Карл Густав Патрик де Лаваль (1845–1913)

няется также внутреннее охлаждение (например, подача топлива на внутреннюю горячую поверхность).

Твёрдотопливные двигатели по конструкции и в эксплуатации проще жидкостных, но не имеют их преимуществ – высокой удельной тяги, регулируемости тяги, многократного запуска. Твёрдотопливные двигатели применяют в ракетной артиллерии, в боевых и космических ракетах и, в отдельных случаях, в качестве усилителей (в космонавтике).

В 1903 г. русским учёным-самоучкой и изобретателем, школьным учителем Константином Эдуардовичем Циолковским предложен жидкостный двигатель, применяемый на боевых и космических ракетах и на самолетах. Диапазон тяги твёрдотопливных и жидкостных двигателей составляет от нескольких мН до нескольких МН. Первые советские жидкостные двигатели созданы в Гидродинамической лаборатории в 1930–1931 гг., а первая ракета ГИРД-09 – в 1933 г. по проекту Михаила Клавдиевича Тихонравова (1900–1974 г.). Он же был участником создания первых искусственных спутников Земли, космических кораблей, автоматических межпланетных станций. Эти работы осуществлялись под руководством академика Сергея Павловича Королева (1906–1966 г.). Жидкостные ракетные двигатели для этих космических ракет разработаны под руководством академика Валерия Петровича Глушко (1908–1989).



Константин Эдуардович Циолковский (1857–1935)

Мощность первой ступени ракеты-носителя «Восток» с жидкостным ракетным двигателем достигала 15 ГВт. В 1987 г. прошла успешные испытания универсальная ракета-носитель «Энергия». Её стартовая масса более 2000 т, она способна выводить на орбиту более 100 т полезного груза.

В электрических ракетных двигателях рабочее тело разгоняется до весьма высоких скоростей (недостижимых в жидкостных двигателях) с использованием электрической энергии. У такого двигателя высокая удельная тяга, но малая абсолютная тяга. По способу разгона рабочего тела различают электротермические, электромагнитные и электростатические электрические ракетные двигатели. Первый в мире электрический ракетный двигатель создан в Газодинамической лаборатории в Ленинграде в 1929–1933 гг. Они используются на космических спутниках как двигатели, корректирующие положение спутника в пространстве (ориентационные) и корректирующие орбиту.

§ 34. Холодильные машины

Цикл Карно является обратимым процессом, поэтому его можно провести в обратном порядке (рис. 8): процесс 1-4 – адиабатное расширение газа, сопровождающееся понижением температуры от T_n до T_x ; процесс 4-3 – изотермическое расширение газа при низкой температуре T_x ; процесс 3-2 – адиабатное сжатие газа с повышением температуры от T_x до T_n ; процесс 2-1 – изотермическое сжатие газа при температуре T_n .

Теперь внешний двигатель совершит положительную работу для приведения в действие холодильной машины.

Рабочее тело отнимает количество теплоты Q_x у продуктов при низкой температуре T_x , и отдаёт количество теплоты $|Q_n|$ окружающим телам, находящимся за пределами машины при высокой температуре T_n . Таким образом, машина, работающая по обратному циклу Карно, будет не тепловой машиной, а идеальной холодильной машиной.

В этом случае роль нагревателя (отдающего тепло) выполняет тело с более низкой температурой. Но, сохранив названия элементов как в тепловой машине, работающей по прямому циклу, представим блок-схему холодильной машины на рис. 9.

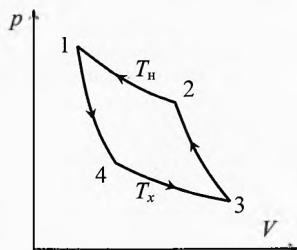


Рис. 8. Обратный цикл Карно



Рис. 9. Блок-схема холодильной машины

Обратим внимание, что теплота от холодного тела к горячему переходит в машине, работающей по обратному циклу, не самопроизвольно, а за счёт работы внешней силы (двигателя).

Тепловая машина, запущенная в обратную сторону, потребляет энергию, например, электрическую, совершает за счёт неё механическую работу, отнимая тепло у сравнительно холодного тела и передаёт тепло более нагретому телу.

В зависимости от того, что мы хотим получить в качестве положительного эффекта, различают две разновидности устройства: тепловой насос или холодильный агрегат (холодильник).

Для машины, работающей по обратному циклу Карно, соотношения между работой совершенной над газом $|A|$, количествами теплоты $|Q_n|$ и Q_x и температурами T_n и T_x такие же как и для прямого цикла Карно.

Тепловой насос. Эффективность теплового насоса характеризуется отопительным коэффициентом.

Отопительный коэффициент ψ (пси) характеризует энергетическую эффективность цикла теплового насоса. Отопительный коэффициент равен отношению количества теплоты, отданного в помещение от окружающей среды к работе двигателя совершенной над газом за то же время:

$$\Psi = \frac{|Q_n|}{|A|}, \text{ или } \Psi = \frac{|Q_n|}{|Q_n| - Q_x}, \text{ или } \Psi = \frac{A + Q_x}{A}.$$

Для идеальной машины, работающей по обратному циклу Карно:

$$\Psi_{ид} = \frac{T_n}{T_n - T_x} \quad \text{или} \quad \Psi = \frac{1}{\eta},$$

где η – КПД прямого цикла Карно, T_n – температура нагреваемого помещения, а T_x – температура атмосферного воздуха на улице.

Например, если использовать машину, работающую по обратному циклу Карно для поддержания в комнате температуры $+20^\circ\text{C}$ ($T_n=293\text{ K}$), когда на улице мороз -20°C ($T_x=253\text{ K}$), она будет забирать тепло с улицы и переносить его в теплую комнату, работая в качестве теплового насоса. Его отопительный коэффициент равен:

$$\psi = |Q_n|/|A| = T_n/(T_n - T_x); \quad \psi = 293/40 = 7,3 \approx 7.$$

То есть на каждый джоуль работы двигателя этот тепловой насос забирает с холодной улицы и передаёт в теплую комнату в общей сложности более 7 Дж тепла.

На использовании этого эффекта основан предложенный Томсоном (лордом Кельвином) так называемый динамический способ отопления. Допустим, при сжигании топлива мы получили 1 Дж тепла. Это тепло и получит комната при традиционном способе отопления. При динамическом отоплении между комнатой (нагревателем) и улицей (холодильником) запускается тепловая машина (рис. 10).

Нетрудно подсчитать, что при работе тепловой машины чуть больше половины джоуля ($Q_{дв}=0,5\text{ Дж}$), полученного от сгорания топлива, сразу поступит в комнату (при КПД двигателя около 50%). А менее половины джоуля, превращенного в механическую энергию ($A_{дв}=0,5\text{ Дж}$), можно использовать в работе теплового насоса для закачивания с улицы в комнату ещё

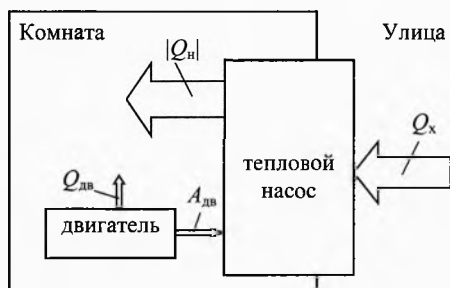


Рис. 10. Схема работы теплового насоса

около трёх джоулей тепла ($Q_x=3$ Дж). В итоге, в комнату поступит 4 джоуля тепла, а не один джоуль как при традиционном отоплении:

$$Q=Q_{\text{дв}}+|Q_{\text{н}}|=Q+(Q_x+A_{\text{дв}})=4 \text{ Дж.}$$

Чтобы представленная картина теплового насоса не воспринималась слишком абстрактно, приведем пример. Если домашний холодильник с открытой дверцей выставить в окно, заднюю часть (радиатор) холодильника – в комнату, а места соединения холодильника с рамой загерметизировать, то получится тепловой насос. Он будет отнимать тепло с улицы и отдавать его в комнату. Кроме того, часть тепла комната получит из-за нагрева двигателя. Когда же холодильник стоит в комнате он перекачивает тепло из холодильника в комнату, которое через стенки снова поступает в холодильник из комнаты благодаря теплопроводности стенок. И в этом случае холодильник отапливает комнату только за счёт потребленной электроэнергии, то есть тепловым насосом не является.

Технологические трудности и необходимость значительных начальных вложений капитала задерживают широкое распространение этого способа отопления. Но, например, в Швеции, богатой стране с развитой технологией и дефицитом топлива, динамическое отопление уже находит заметное применение. В начале XXI века оплата за отопление и горячую воду в России возросла в несколько раз, поэтому динамическое отопление постепенно становится актуальным и у нас. В России ежегодно закупается около 300 тысяч кондиционеров, работающих в режиме отопления.

Холодильник. Если обращенная тепловая машина используется для поддержания в комнате или камере холодильника температуры, более низкой, чем температура окружающей среды, то нас интересует количество тепла, отнятое у холодильника. В этом случае, эффективность работы устройства определяется холодильным коэффициентом.

***Холодильный коэффициент** ξ (кси) – это скалярная величина, характеризующая энергетическую эффективность цикла холодильной установки. Холодильный коэффициент равен отношению количества теплоты, отнятого из холодильной камеры к работе двигателя над газом (рабочим телом машины):*

$$\xi = \frac{Q_x}{|A|}.$$

Для идеальной машины, работающей по обратному циклу Карно:

$$\xi_{\text{ид}} = \frac{T_x}{T_{\text{н}} - T_x} \quad \text{или} \quad \xi_{\text{ид}} = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

Например, если в комнате температура $t_{\text{н}} = +20^\circ\text{C}$, а в морозильной камере поддерживается $t_x = -20^\circ\text{C}$, то $\xi = 253/40 \approx 6$. От камеры отнимается в 6 раз

больше тепла, чем расходуется электроэнергия для работы холодильного агрегата (при условии, что КПД электродвигателя $\approx 100\%$).

Иногда, производительность теплового насоса (отопительный коэффициент) и холодильный коэффициент холодильника называют коэффициентами полезного действия соответствующих устройств. Такое использование понятия КПД является неприемлемым, ибо может привести к недоразумениям. Действительно, полезный эффект превышает затраченную работу, но никакого нарушения закона сохранения энергии здесь, конечно, нет. Из одного джоуля работы не получается 6–7 джоулей тепла. Благодаря этому джоулю работы только перекачивается тепло от менее нагретого тела к более нагретому, и эта работа двигателя служит тем самым «компенсатором», без которого такой процесс самопроизвольно проходить не может.

Нет здесь и нарушения второго начала термодинамики, что не так очевидно. Холодильник и воздух комнаты не являются замкнутой системой. Холодильник необходимо подключить к электросети. Электрическая энергия с помощью электродвигателя превращается в механическую энергию, и затем используется для работы холодильной машины. Следовательно, переход тепла от холодного тела к горячему не является единственным результатом работы холодильника, так как сопровождается потреблением электрической (или любой другой) энергии.

В наших квартирах используются компрессорные холодильники, где компрессия и декомпрессия создаётся в цилиндре компрессора с помощью электродвигателя. Рабочим телом в компрессорном холодильнике служит легко испаряющееся вещество фреон, которым заполнена замкнутая система конденсатора, испарителя и компрессора (рис. 11).

Компрессор (цилиндр с двумя клапанами), приводимый в действие электродвигателем, откачивает газообразный фреон из испарителя и нагнетает его в конденсатор. При этом фреон нагревается. Охлаждение его до температуры, близкой к комнатной, происходит в конденсаторе, расположенном вне холодильной камеры (обычно прикрепленном к задней стенке холодильника). Охлаждаемый в конденсаторе фреон при повышенном давлении переходит в жидкое состояние, а выделяемая при конденсации энергия передаётся комнате.

Из конденсатора фреон поступает через капиллярную трубку в испаритель, где испаряется и кипит даже при температуре ниже 0°C при пониженном давлении, поддерживаемом непрерывной откачкой паров фреона в кожух компрессора через отсасывающую трубку. Энергия на испарение фреона отбирается от тонких стенок испарителя, вызывая их охлаждение, а они отнимают тепло от продуктов, находящихся в холодильнике. Испаритель в быту называется морозилкой (морозильной камерой). Точнее, испаритель — это стенки морозилки, в которых выполнены каналы для движения фреона.

Откачанные пары фреона поступают в кожух компрессора, оттуда снова в конденсатор и т. д. по замкнутому циклу.



Рис. 11. Схема работы холодильника

Обратим внимание на недопустимость орудования острыми предметами в испарителе (морозилке), ибо малейшее повреждение стенки приведет к тому, что фреон уйдет через поврежденную стенку канала испарителя и холодильник выйдет из строя.

Для осуществления естественной конвекции испаритель (морозильную камеру) располагают в верхней части холодильника, чтобы охлаждаемый им воздух опускался вниз, а на его место приходил более тёплый воздух из холодильного шкафа.

Следует отметить, что задача холодильника заключается не столько в том, чтобы охладить продукты до определенной температуры, сколько в поддержании их при этой пониженной температуре.

Дело в том, что сквозь стенки холодильного шкафа, благодаря разности температур с комнатной, в холодильник идёт тепловой поток. Пусть мы положили в холодильник суточный запас продуктов. Он охладит их до заданной температуры довольно быстро, а потом будет только тем и заниматься, что откачивать тепло, идущее через стенки холодильного шкафа из

комнаты. Чем ниже нам требуется температура в холодильнике и чем выше температура в комнате, тем больший поток тепла будет идти в холодильник через его стенки. И тем большую часть времени компрессор должен работать.

Режим работы холодильника устанавливается специальным регулятором и поддерживается автоматически.

Следует отметить, что холодильники, в том числе и российского производства, — очень надежные агрегаты и при правильной эксплуатации могут работать без ремонта десятилетиями.

Кроме компрессорных существуют и другие типы холодильников, использующие не механическую энергию электродвигателя, а тепловую (теплоиспользующие холодильные машины) и термоэлектрические, в которых охлаждение осуществляется за счёт использования эффекта Пельтье. Этот эффект обнаружил в 1834 году французский физик Жан Пельтье.



Жан Шарль Атаназ Пельтье (1785–1845)

Эффект Пельтье – поглощение теплоты в месте контакта двух веществ (металлов, полупроводников) при прохождении через контакт электрического тока.

Любой холодильник представляет собой устройство для охлаждения и хранения пищевых или иных продуктов при температурах ниже температуры окружающей среды.

Разновидностью холодильной машины является кондиционер, который забирает тепло из комнаты и отдаёт её наружу. Использование кондиционеров особенно актуально в экваториальной зоне Земли и прилежащих к ним северных и южных широтах, особенно в местностях с влажным климатом.

Хладопроизводительность. Важной характеристикой холодильной машины является хладопроизводительность.

Хладопроизводительность – определяет интенсивность откачивания тепла из холодильной камеры. Хладопроизводительность равна отношению количества тепла, отнятого из холодильной камеры, к промежутку времени, за который это тепло отнято:

$$q = \frac{Q_x}{t}.$$

Хладопроизводительность измеряется, как видно из определения, в единицах мощности – Вт. Возможно применение и внесистемных единиц, например ккал/ч.

Пример 3. Оценить стоимость изготовления одного килограмма льда в домашнем холодильнике, с температурой испарения фреона минус 12°C и температурой радиатора 40°C . Стоимость одного кВт·ч электроэнергии равна 1 руб. Температура в комнате 20°C .

Дано:
 $m=1\text{ кг}$

$$c=4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$$

$$t=20^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\text{н}}=40^{\circ}\text{C}$$

$$t_{\text{х}}=-12^{\circ}\text{C}$$

$$\lambda=336 \text{ кДж/К}$$

$$\text{Ц}=3 \frac{\text{руб}}{\text{кВт}\cdot\text{ч}}$$

Д – ?

→ **Решение.** Стоимость D изготовления льда равна произведению работы электродвигателя на тариф Ц :

$$D=\text{Ц}\cdot|A|.$$

Для превращения воды в лёд с температурой 0°C необходимо отвести от неё количество теплоты

$$Q_{\text{х}}=m(ct+\lambda).$$

Считаем приближенно, что над фреоном совершается обращённый цикл Карно с изотермами при температурах $T_{\text{н}}=40+273=313\text{ К}$ и $T_{\text{х}}=273-12=261\text{ К}$. Холодильный коэффициент по определению: $\xi=Q_{\text{х}}/|A|$. Для идеального холодильника: $\xi_{\text{ид}}=T_{\text{х}}/(T_{\text{н}}-T_{\text{х}})$. Из нашего приближения следует, что $\xi \approx \xi_{\text{ид}}$.

Решим совместно три последних уравнения:

$$\frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}-T_{\text{х}}}=\frac{Q_{\text{х}}}{|A|}; \Rightarrow |A|=\frac{Q_{\text{х}}(T_{\text{н}}-T_{\text{х}})}{T_{\text{х}}}; \Rightarrow |A|=\frac{m(ct+\lambda)(T_{\text{н}}-T_{\text{х}})}{T_{\text{х}}}.$$

$$|A|=\frac{1\cdot(4200\cdot 20+3,36\cdot 10^5)\cdot 52}{261}\approx 84 \text{ кДж}=0,023 \text{ кВт}\cdot\text{ч}.$$

$$D=3 \text{ руб}/(\text{кВт}\cdot\text{ч})\cdot 0,023 \text{ кВт}\cdot\text{ч}=6,9 \text{ коп.} \leftarrow$$

Примечание. Результат оказался слишком «дешёвым». Да и по времени процесс замораживания должен произойти при мощности холодильника 150 Вт за девять минут! На самом же деле вода заморозится за время примерно в сто раз дольше, потому что львиная доля работы холодильного устройства тратится на поддержание низкой температуры внутри холодильного шкафа, то есть на периодическую откачку тепла, проникающего сквозь стенки холодильника. С учетом теплопередачи в холодильник количество энергии и время изготовления льда возрастают на два порядка.

Пример 4. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1=-3^{\circ}\text{C}$ при температуре на улице $t_2=-23^{\circ}\text{C}$. Предлагается использовать бензин не в горелке, а в двигателе, КПД которого $\eta=0,4$, и с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу теплоту с улицы в то же помещение. Какую температуру t_3 удастся в таком случае поддержать в помещении при прежнем расходе бензина? Двигатель находится вне помещения.

→ **Решение.** В первом случае тепло, получаемое при сгорании бензина, поступает прямо в помещение, и в установившемся режиме столько же уходит через стены наружу. В комнате становится теплее, но можно отравиться продуктами сгорания. Потери тепла через стены пропорциональны разности температур между помещением и улицей, поэтому:

$$qm = k(T_1 - T_2)\tau. \quad (1)$$

Аналогично в случае работы теплового насоса, количество теплоты, отдаваемое тепловым насосом $|Q_n|$ в помещение, в установившемся режиме равно потерям тепла через стенки помещения:

$$|Q_n| = k(T_3 - T_2)\tau. \quad (2)$$

По определению отопительный коэффициент

$$\psi = \frac{|Q_n|}{A_{\text{дв}}} \Rightarrow |Q_n| = \psi \cdot A_{\text{дв}}, \quad (3)$$

где $A_{\text{дв}} = \eta qm$ – полезная работа двигателя.

Учитывая, что насос работает по обратному циклу Карно, запишем:

$$\psi = \frac{T_n}{T_n - T_x} \quad \text{или} \quad \psi = \frac{T_3}{T_3 - T_2}.$$

Подставляя выражения для $A_{\text{дв}}$ и ψ в (3), получим:

$$|Q_n| = \frac{T_3 \eta qm}{T_3 - T_2}.$$

Подставляя это выражение в (2), получим:

$$\frac{T_3 \eta qm}{T_3 - T_2} = k(T_3 - T_2)\tau. \quad (4)$$

Разделим (4) на (1):

$$\begin{aligned} \frac{T_3 \eta}{T_3 - T_2} = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_2} &\Rightarrow T_3^2 - 508T_3 + 250^2 = 0; \\ \Rightarrow T_3 = 254 \pm 45 \text{ K}, \quad T_3 = 299 \text{ K или } t_3 = 26^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Обратите внимание, как здорово – в помещении будет температура 26°C и чистый воздух! Это, несравненно, лучше, чем в первом варианте.

Второе решение $T'_3 = 209 \text{ K}$ или $t'_3 = -64^\circ \text{C}$ соответствует работе агрегата в режиме холодильника. Рекомендуем прорешать этот вариант. Учтите при этом, что холодильный коэффициент $\xi = Q_x / A_{\text{дв}}$, где Q_x – количество тепла, отнятое у помещения и отданное на улицу; $A_{\text{дв}} = \eta qm$ – работа двигателя. Наконец, холодильный коэффициент идеальной машины $\xi = \frac{T_x}{T_n - T_x} = \frac{T_2}{T_3 - T_2}.$

Прорешав, не только убедитесь в совпадении ответа, но и чётко прочувствуйте систему трёх понятий: отопительный коэффициент, холодильный коэффициент и коэффициент полезного действия тепловой машины. →

Кондиционер – это многофункциональный тепловой агрегат, которой должен доводить до нужной кондиции климат в помещении. Современные кондиционеры могут отчищать воздух от пыли, дыма, пыльцы, осушать его, охлаждать и даже нагревать.

Основная функция кондиционера – охлаждать воздух, поддерживая температуру в помещении на уровне $17\text{--}30^\circ\text{C}$. Многие кондиционеры могут охлаждать помещение до $+17^\circ\text{C}$, но такой режим – это излишество (в некоторых магазинах Рима в июльскую жару поддерживается именно столь низкая температура. Заходишь охладиться и боишься простудиться! И это при стеклянных дверях без порогов. А ещё возникает вопрос: оправдывает ли средства столь глубокое кондиционирование?)

Следует отметить, что кондиционеры при нормальном режиме работы достаточно экономичны, на $1\text{ кВт}\cdot\text{ч}$ потребляемой электроэнергии они выдают примерно $3\text{ кВт}\cdot\text{ч}$ холода, то есть $3\text{ кВт}\cdot\text{ч}$ внутренней энергии кондиционер отнимает у комнаты и переносит наружу.

Многие современные кондиционеры умеют греть, т.е. работать в режиме теплового насоса. При наружных температурах вплоть до -10°C такое отопление весьма эффективно – представленные в России модели позволяют получать от $2,5$ до $3,5\text{ кВт}\cdot\text{ч}$ тепла на каждый $\text{кВт}\cdot\text{ч}$ электроэнергии. При очень низких температурах гонять кондиционер в качестве теплового насоса неэффективно, т.к. уже при -30°C он выдаёт всего 40% своей номинальной мощности. К тому же, при низких температурах масло в картере компрессора густеет, и износ деталей компрессора многократно возрастает.

На средних широтах кондиционер в качестве теплового насоса используют осенью в межсезонье, когда уже становится прохладно, а центральное отопление еще не включили, или весной, когда его уже отключили, но температура на улице внезапно понизилась. В тёплых странах, например в Греции, где зимой температура редко опускается ниже $+8^\circ\text{C}$, в каждой комнате кондиционеры используют в режиме теплового насоса. В жарких странах, например в Саудовской Аравии, где температура на улице в июле держится на уровне $+44^\circ\text{C}$, невозможно представить себе помещение без кондиционера, работающего в режиме охлаждения.



Упражнения

1 Автомобиль массой $4,6 \cdot 10^3\text{ кг}$ трогается с места на подъеме с углом наклона 30° и, двигаясь равномерно, за 40 с проходит 200 м . Коэффициент трения качения $\mu=0,02$, КПД $\eta=20\%$. Найти расход бензина на этом участке и мощность двигателя ($q=46\text{ МДж/кг}$).

2 Автобус прошёл путь $S=80$ км за $t=1$ ч. Двигатель развивал при этом среднюю мощность $N=70$ кВт при КПД $\eta=25\%$. Сколько дизельного топлива плотностью $\rho=800$ кг/м³ сэкономил водитель в рейсе, если норма расхода горючего $V_0=40$ л на $S_0=100$ км пути? Удельная теплота сгорания топлива $q=42 \cdot 10^6$ Дж/кг.

3 Найти КПД двигателя автобуса, расходующего 63 кг лигроина ($q=43,3$ МДж/кг) за 2,5 ч работы при средней мощности 70 кВт.

4 Найти расход бензина автомобиля на 1 км пути при средней скорости 90 км/ч. Мощность мотора 55 кВт, коэффициент полезного действия 30%. Удельная теплота сгорания бензина $q=46$ МДж/кг. Ответ выразить в единицах массы и в рублях, если цена бензина составляет $\Pi=35$ руб/л, а плотность $\rho=0,7$ г/см³.

5 Тепловая машина работает по циклу Карно и за счёт каждого кДж тепла, полученного от нагревателя, совершает работу 300 Дж. Температура холодильника равна 280 К. Какова температура нагревателя?

6 В паровой турбине расходуется 0,35 кг дизельного топлива на 1 кВт·ч. Температура поступающего в турбину пара 250°C, температура холодильника 30°C. Вычислить фактический КПД и сравнить его с КПД идеальной тепловой машины, работающей при тех же параметрах. Удельная теплота сгорания дизельного топлива $q=42$ МДж/кг.

7 При выстреле снаряд массой $m=6,2$ кг вылетает из ствола пушки со скоростью $v=680$ м/с. Каков КПД этой пушки, если сгорает $m_n=1$ кг пороха? Удельная теплота сгорания пороха $q=3,8$ МДж/кг.

8 КПД тепловой машины в цикле (рис. 12), состоящем из участка 1-2, адиабатического процесса 2-3 и изотермы 3-1, равен η_1 , а в цикле, состоящем из изотермы 1-3, изобары 3-4 и адиабаты 4-1, равен η_2 . Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 1-2-3-4-1? Все циклы обходятся по часовой стрелке. Рабочим веществом является идеальный газ.

9 Тепловая машина работает по циклу (рис. 13), состоящему из изобары, изохоры и политропы, на которой давление газа и объём связаны соотношением $p=\alpha V$, где α – постоянная величина. Найти КПД машины. Газ двухатомный. Отношение максимальных объёма и давления к минимальным: $p_2/p_1=2$; $V_2/V_1=3$.

10 С идеальным двухатомным газом происходит политропический процесс, постоянная политропы $n=-1$. Найти работу, производимую газом, при увеличении объёма от V_1 до V_2 . Поглощается или выделяется при этом энергия? Вычислить молярную теплоёмкость газа.

11 Домашний холодильник потребляет среднюю мощность $P=40$ Вт. Какое количество теплоты выделится в комнате за сутки, если холодильный коэффициент $\xi=9$?

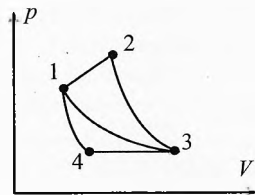


Рис. 12. КПД трёх циклов

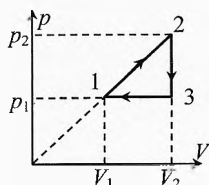


Рис. 13. КПД цикла

Решения, указания и ответы для самоконтроля

$$1 \quad m_0 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)S/(\eta q) = 0,51 \text{ кг. } N = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)S/t = 117 \text{ кВт.}$$

$$2 \quad N = \eta \cdot \frac{mq}{t} = \eta \cdot \frac{V\rho q}{t}, V_n = V_0 \frac{S}{S_0} - \text{нормативный расход топлива на 80 км;}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_n - V = V_0 \frac{S}{S_0} - \frac{Nt}{\eta\rho q} = 2 \text{ л.}$$

$$3 \quad \eta = A/Q = N\tau/(qm) = 0,23 \text{ или } 23\%$$

$$4 \quad A = \eta Q; Q = qm; A = S \cdot F_n = S \cdot N/v; \Rightarrow m = SN/(\eta qv) = 0,16 \text{ кг; } D = \Pi \cdot m/\rho = 8 \text{ руб.}$$

$$5 \quad \eta = \frac{A}{Q}; \eta = 1 - \frac{T_x}{T_n}; \Rightarrow T_n = \frac{T_x}{1 - A/Q} = 400 \text{ К.}$$

$$6 \quad \eta = \frac{A}{qm} = 24\%; \eta_{нд} = \frac{T_n - T_x}{T_n} = 42\%. \frac{\eta}{\eta_{нд}} = 0,58.$$

$$7 \quad \text{КПД пушки } \eta = \frac{mv^2}{2m_n q} = 38\%.$$

$$8 \quad \text{КПД} - \text{отношение работы газа за цикл к количеству тепла, получаемому газом при нагревании: } \eta = \frac{A_u}{Q_n}.$$

$$\text{Цикл 1-2-3-1: } Q_{n1} = Q_{12}, A_{u1} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = Q_{12} - |Q_{31}|, \Rightarrow \eta_1 = 1 - |Q_{31}|/Q_{12}.$$

$$\text{Цикл 1-3-4-1: } Q_{n2} = Q_{13}, A_{u2} = Q_{13} + Q_{34} + Q_{41} = Q_{13} - |Q_{34}|, \Rightarrow \eta_2 = 1 - |Q_{34}|/Q_{13}.$$

$$\text{Цикл 1-2-3-4-1: } Q_{n3} = Q_{12}, A_{u3} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Q_{12} - |Q_{34}|, \Rightarrow \eta_3 = 1 - |Q_{34}|/Q_{12}.$$

$$\text{Учитывая, что } |Q_{31}| = Q_{13}, \text{ получим: } \eta_3 = \eta_1 - \eta_1\eta_2 + \eta_2.$$

$$9 \quad \text{КПД тепловой машины равен отношению работы газа за цикл } A_u \text{ к количеству теплоты } Q_n, \text{ полученному им за время этого цикла,}$$

$$\eta = \frac{A_u}{Q_n}. \quad (5)$$

Эта работа равна (в определенном масштабе) площади треугольника 1-2-3.

$$A_u = 0,5(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 0,5\alpha(V_2 - V_1)^2. \quad (6)$$

Выразим объём газа в зависимости от температуры в процессе 1-2:

$$p \cdot V = \nu RT \Rightarrow \alpha V \cdot V = \nu RT \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\nu RT}{\alpha}}.$$

$$\text{Тогда: } V_1 = \sqrt{\frac{\nu RT_1}{\alpha}}; V_2 = \sqrt{\frac{\nu RT_2}{\alpha}}.$$

$$\text{Подставляя эти выражения в (6), получим: } A_u = 0,5\nu R(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2.$$

$$\text{Или учитывая, что } \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 4, \text{ получим:}$$

$$A_u = 0,5\nu RT_1. \quad (7)$$

Газ получает тепло от нагревателя только в процессе 1-2 политропного расширения (на участках 2-3 и 3-1 он охлаждается):

$$Q_n = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}.$$

$$\text{Учитывая, что } A_{12} = A_u - A_{31} = 0,5\nu RT_1 - p_1(V_1 - V_2) = 1,5\nu RT_1, \text{ получим:}$$

$$Q_n = \frac{5}{2} \nu R(T_2 - T_1) + 1,5 \cdot \nu R T_1 = 9 \nu R T_1. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (5), получим: $\eta = \frac{1}{18} \approx 0,056$ или 5,6%.

10 Уравнение политропы: $pV^n = \alpha$, где α – постоянная величина. В нашем случае $pV^{-1} = \alpha \Rightarrow p = \alpha V$, т.е. давление газа прямо пропорционально занимаемому им объёму (рис. 14).

Работа газа равна площади (в некотором масштабе) под графиком на диаграмме p - V . Как видно из рисунка, $A = 0,5(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$. Учитывая, что $p_1 = \alpha V_1$, а $p_2 = \alpha V_2$, получим: $A = 0,5\alpha(V_2^2 - V_1^2)$.

Из уравнений Клапейрона–Менделеева ($p_1 V_1 = \nu R T_1$, $p_2 V_2 = \nu R T_2$) видно, что $T_2 > T_1$, так как $p_2 V_2 > p_1 V_1$. Значит, газ нагревается ($\Delta U > 0$).

Согласно I началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A. \quad (9)$$

Поскольку $A > 0$ и $\Delta U > 0$, то газ поглощает энергию.

Так как газ двухатомный, то

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T. \quad (10)$$

Теперь выразим работу через изменение температуры:

$$\begin{aligned} A &= 0,5\alpha(V_2^2 - V_1^2) \\ pV &= \nu RT \\ p &= \alpha V \end{aligned} \Rightarrow A = 0,5\nu R \Delta T. \quad (11)$$

Из определения молярной теплоёмкости следует:

$$Q = C \cdot \nu \Delta T. \quad (12)$$

Подставляя (10), (11), (12) в (9), после сокращений получим: $C = 3R$.

Ответ. Газ поглощает энергию, при этом он нагревается и совершает работу $A = 0,5\alpha(V_2^2 - V_1^2)$. Его молярная теплоёмкость в данном процессе $C = 3R$.

11 Количество теплоты Q_n отданное нагревателю холодильником за цикл равно: $|Q_n| = |A| + Q_x$, где $|A| = P \cdot \tau$ – работа, совершенная над газом за цикл, τ – время одного цикла; $Q_x = \xi |A|$ – количество теплоты, отнятое от холодильника.

За сутки комната получит от радиатора количество теплоты:

$$Q = \tau \cdot |Q_n| / \tau = P(1 + \xi)\tau; \quad Q = 40 \text{ Вт} \cdot (1 + 9) \cdot 86400 \text{ с} = 3,46 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Примечание. Комната получила бы столько тепла, если бы в ней находился только радиатор холодильника, а сам он был в другой комнате. Тогда вся отнимаемая теплота от холодильника и энергия, потребляемая двигателем, рассеивались бы радиатором в первой комнате. Но холодильник и радиатор находятся в одной комнате, и радиатору отдаётся рабочим телом в основном тепло, которое попадает в холодильник сквозь стенки за счёт теплопроводности. И холодильник отдаёт это тепло в ту же самую комнату, из которой оно снова поступает в него. И если в течение суток продуктов не добавляли в холодильник, то по закону сохранения энергии комната получит тепло, равное количеству электроэнергии, израсходованной двигателем в течение суток, т.е. в 10 раз меньше рассчитанного в задаче:

$$Q' = P \cdot \tau = 3,46 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Глава 5. Энтропия. Второе и третье начала термодинамики

Полезно поразмыслить над ошибками, сделанными великими умами, поскольку они часто имели серьёзные основания, чтобы их сделать.

Луи де Бройль

§ 35. Квазистатические процессы. Обратимые процессы

При изучении различных процессов мы полагали, что термодинамические параметры состояния: давление, плотность и температура – одинаковы во всех точках объёма газа. Это, строго говоря, неверно. Например, если сдвинуть поршень в цилиндре, то газ вблизи него сожмётся и в этой области возрастет давление, плотность и температура. В более отдалённых участках цилиндра параметры сразу не изменятся, и равновесие восстановится только через некоторое время, называемое *временем релаксации*.

Если процесс происходит достаточно медленно, то его можно представить в виде суммы большого числа малых процессов (например, микросжатий), в каждом из которых время релаксации меньше времени микропроцесса. Тогда в течение каждого микропроцесса в системе будет успевать устанавливаться термодинамическое равновесие, и весь процесс будет представлять собой совокупность переходов через множество равновесных состояний. Такие процессы называются *квазистатическими* (почти равновесными).

***Квазистатический процесс** – идеализированный процесс, состоящий из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия. Такие процессы называются также квазиравновесными, так как систему в каждый момент времени можно считать находящейся в состоянии термодинамического равновесия.*

Изохорный, изобарный и изотермический процессы можно проводить достаточно медленно, то есть с любой точностью приблизить к квазистатическому.

Труднее с адиабатным. С одной стороны, он должен протекать так быстро, чтобы не было заметно теплообмена с окружающей средой. С другой стороны, время его протекания должно быть значительно больше времени релаксации. Поэтому реальные процессы лишь с большой натяжкой можно считать адиабатными и применять к ним уравнение Пуассона.

***Обратимый процесс** – термодинамический процесс, который может проходить как в прямом, так и в обратном направлениях, проходя через одинаковые промежуточные состояния, причём система возвращается в исходное состояние без затрат энергии, и в окружающей среде не остается макроскопических изменений.*

Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является **необратимым**.

Обратимыми являются процессы, протекающие в системах, где действуют только консервативные силы.

Например, при отсутствии трения тело, брошенное вверх, возвращается назад, имея на тех же высотах такие же значения скоростей, только обратного направления. И при упругом ударе о горизонтальную поверхность этот процесс может повториться сколько угодно раз.

В реальном же падении тела имеется неконсервативная сила трения о воздух и о поверхность при ударе. Поэтому процесс является необратимым. Через несколько соударений он прекратится вовсе.

Почти все квазистатические тепловые процессы являются обратимыми.

Убедимся в этом на примере квазистатического изотермического процесса.

Пусть объём возрос на малое значение ΔV . Поскольку термодинамическая система всё время проходила через равновесные состояния, то в любой момент процесс можно направить в обратном направлении, то есть сжать газ настолько же. Вся система пройдет через те же промежуточные состояния, которые были при расширении. При изотермическом расширении газ совершает работу, равную количеству теплоты, которую он получает за то же время от окружающих предметов. Пусть эта работа пошла на увеличение потенциальной энергии тела (например, поршня массой m при его подъеме на высоту h). Тогда:

$$Q_T = A_T = mgh.$$

В обратном процессе поршень опустится на ту же высоту h . Уменьшение потенциальной энергии поршня пойдёт на совершение работы по сжатию газа. Газ отдаст окружающей среде путём теплообмена такое же количество теплоты, которое он получил при расширении.

Итак, после проведения изотермического расширения и сжатия газа, он сам и все окружающие тела вернутся к начальным условиям, пройдя одни и те же промежуточные состояния. Следовательно, квазистатический изотермический процесс обратим.

Аналогично можно доказать обратимость других квазистатических процессов, ибо в рассмотрении важен не характер теплообмена системы с окружающей средой, а равновесный способ прохождения системой всех промежуточных состояний.

§ 36. Микро- и макросостояния термодинамической системы

Термин «состояние» используется применительно к термодинамической системе в целом и по отношению к отдельной подсистеме. Смысл в обоих случаях вкладывается разный.

Рассмотрим пример, когда система – это некоторое количество идеального одноатомного газа, а подсистемами являются отдельные молекулы. Состояние системы характеризуется температурой, давлением, плотностью (или концентрацией молекул). Состояние молекулы (материальной точки) можно считать заданным, если известны её координаты и скорость (или импульс).

Иначе говоря, состояние молекулы определяется помещением точки в фазовом пространстве. Для материальной точки фазовое пространство – пространство шести измерений. Это могут быть три координаты в обычном пространстве x, y, z и три координаты в пространстве импульсов p_x, p_y, p_z . Вместо импульсов можно задать три координаты в пространстве скоростей u_x, u_y, u_z .

Координаты частицы и её импульс можно определить только с некоторой погрешностью Δx и Δp_x . Более того, квантовая механика утверждает, что можно измерить с высокой точностью либо только координату частицы, либо её импульс, но принципиально невозможно определить обе величины с высокой точностью.

Частица не может одновременно обладать точными значениями координаты и соответствующим импульсом по этой оси, ибо имеет место соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

где $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – приведённая постоянная Планка (или постоянная Дирака), $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Если мы рассматриваем поступательное движение в трёхмерном пространстве x, y, z , то соответствующее фазовое пространство шестимерно, и тогда объём одной квантовой ячейки равен $\hbar^3 \approx 10^{-102}$ Дж³·с³. Чрезвычайная малость этой величины приводит к тому, что даже в очень небольших фазовых объёмах содержится громадное количество ячеек, громадное количество различных состояний подсистем.

В равных фазовых объёмах содержится одинаковое число состояний. Это позволяет из соображений удобства рассматривать в одних случаях распределение подсистем по состояниям (по ячейкам), а в других – по достаточно произвольно выбранным, но равным между собой фазовым объёмам.

Если о каждой молекуле известно, в какой квантовой ячейке она находится, то мы знаем микросостояние системы.

Однако, с макроскопической точки зрения безразлично, какие именно молекулы находятся в той или иной ячейке. Макросостояние системы может зависеть только от того, сколько молекул находится в каждой ячейке. Более того, если подсистемы являются одинаковыми микрочастицами (как в нашем случае – молекулы одного газа вообще неразличимы), то максимум информации, который может быть известен о совокупности таких подсистем – их распределение: сколько подсистем находится в каждом состоянии.

Перечислим ещё раз те понятия, статистической физики, с которыми мы познакомились.

Состояние подсистемы, в частности, для молекулы, считается заданным, если известны с определенной точностью её положение и скорость, то есть известны в какой ячейке находится молекула.

Для наиболее детального описания состояния термодинамической системы необходимо определить на каждом элементарном участке координаты и импульсы частиц с возможно большей точностью. Столь детально охарактеризованное состояние системы называется микросостоянием.

Микросостояние системы считается заданным, если известны состояния всех подсистем.

Например (рис. 1): молекула A – в ячейке 1, B – тоже в ячейке 1, молекула C – в ячейке 2, молекулы D, E и F – в ячейке 4 (пусть в ячейке 3 молекул нет) и т.д.

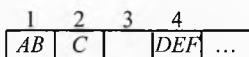


Рис. 1. Микросостояние системы

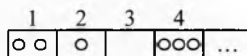


Рис. 2. Распределение подсистем по состояниям

Распределение подсистем по состояниям характеризует количество подсистем, которое находится в каждом из возможных состояний.

Например (рис. 2): в ячейке 1 – две молекулы, в ячейке 2 – одна молекула, в ячейке 3 молекул нет, в ячейке 4 – три молекулы и т.д.

Состояние термодинамической системы может быть также задано с помощью макроскопических (т.е. характеризующих всё тело в целом) параметров: объёма, давления, температуры и т.п.

Макросостояние системы считается заданным, если известны значения всех макроскопических параметров системы.

Если система находится в равновесии, то параметры, описывающие её состояние, будут постоянными, а макросостояние – неизменным.

Вместе с тем, частицы (например, молекулы), образующие систему, всё время движутся, их координаты и импульсы изменяются в результате соударений.

Микросостояние в системе всё время изменяется, поэтому всякое макросостояние осуществляется многочисленными вариантами, каждому из которых соответствует некоторое микросостояние системы.

Казалось бы, в изолированной термодинамической системе возможны любые процессы, в ходе которых выполняется закон сохранения энергии. Однако это не так. Дело в том, что различные состояния с одной и той же энергией, обладают разной вероятностью. Изолированная система будет самопроизвольно переходить из менее вероятных состояний в более вероятные и преимущественно пребывать в состоянии, вероятность которого максимальна.

Например, если в калориметр (изолированную систему) поместить горячую воду и холодный кусок железа, то будет происходить процесс теплопередачи, приводящий к выравниванию температур. После того, как температура обоих тел станет одинаковой, невозможен самопроизвольный процесс, в результате которого температура одного из тел увеличится, а другого уменьшится.

Второй пример. Пусть имеется сосуд, разделенный перегородкой, в одной половине 1 л воздуха, а в другой вакуум. Если убрать перегородку, то газ распределится равномерно, обратный процесс, в результате которого газ самопроизвольно собрался бы в одной половине сосуда, невозможен. Это обусловлено тем, что вероятности состояния, при котором молекулы газа распределены поровну между обеими половинами сосуда, во много раз превышает вероятность того, что все молекулы соберутся в одной половине сосуда. При нормальных условиях в объёме 1 л содержится $3 \cdot 10^{22}$ молекул. Вероятность того, что они распределятся поровну, в $2^{3 \cdot 10^{22}}$ (или около $10^{10^{22}}$) раз превышает вероятность того, что молекулы соберутся в одной из половин сосуда.

Заметим, что оба процесса – переход теплоты от более нагретого тела к холодному и распространение газа на весь объём являются необратимыми.

Необратимым является процесс, обратный к которому маловероятен.

Для того чтобы определить, какие процессы могут протекать в изолированной термодинамической системе, нужно знать вероятность различных состояний этой системы. Величина, которая характеризует вероятность состояния термодинамической системы, называется энтропией.

§ 37. Термодинамика и статистическая физика.

Статистический вес

Термодинамика утверждает, что попавшая в равновесное состояние система при неизменных внешних условиях будет вечно находиться в этом равновесном состоянии. В термодинамике нет понятия флуктуаций.

Что же говорит о состояниях системы статистическая физика? Она может делать только вероятностные предсказания. На основе сведений о свойствах микросистем, на основе моделей, описывающих эти свойства, статистика предсказывает вероятности распределений микросистем по состояниям. А эти распределения в свою очередь, определяют состояние системы, и таким образом, выводы статистики сводятся к предсказанию вероятностей того или иного состояния системы.

Система постулатов статистики.

1. Все доступные микросостояния системы равновероятны.
2. Равновесию соответствует наиболее вероятное распределение (подсистем по состояниям).
3. Вероятность пребывания подсистемы в некотором состоянии определяется только энергией состояния.

«Энергия состояния» – энергия, которой обладает подсистема, находящаяся в данном состоянии, в данной ячейке.

Может показаться, что первые два постулата прямо противоречат друг другу. Чтобы выяснить, что противоречия тут нет, разберем простой пример. Пусть система состоит из N частиц, полная энергия системы равна $E_c = 2NE$, а каждая частица может находиться в одном из трёх состояний: состояние 1 с энергией $E_1 = E$, состояние 2 с энергией $E_2 = 2E$, состояние 3 с энергией $E_3 = 3E$.

Сравним два распределения: (рис. 3а) – все частицы находятся в состоянии 2, (рис. 3б) – одна частица в состоянии 1, одна в состоянии 3, остальные в состоянии 2.

Варианту а) отвечает единственное микросостояние системы. Что касается варианта б), то тут в состояние 1 можно поместить любую из N частиц, и при этом в состоянии 3 может оказаться любая из остальных $N-1$ частиц. Всего, таким образом, распределению б) отвечает $N(N-1)$ микросостояний системы, и оно, согласно первому постулату, именно в $N(N-1)$ раз вероятнее распределения а). Понятно, что во столько же раз вероятнее макросостояние, соответствующее второму варианту.

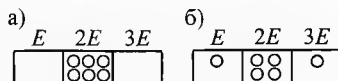


Рис. 3. Сравните два распределения

Статистический вес W – число различных микросостояний, посредством которых можно осуществить данное макросостояние.

Иногда статистический вес называют термодинамической вероятностью, то есть статистический вес и термодинамическая вероятность – синонимы. Название «термодинамическая вероятность» предложено немецким ученым Максом Планком, чтобы подчеркнуть её отличие от математической вероятности, которая всегда меньше единицы.

Статистический вес обычно выражается невообразимыми числами, из-за огромного числа молекул даже в относительно небольших макротелах. Так, например, статистический вес одного моля кислорода при нормальных условиях составляет $W=10^{6.5 \cdot 10^{24}}$ (это значит, что таким количеством микросостояний может реализовываться одно и то же макросостояние одного моля кислорода при н.у.) Представить себе это число совершенно невозможно. Но можно понять, почему число микросостояний большого числа частиц огромно. Возьмем два числа. Сколькими способами их можно расположить в ряд? Очевидно – двумя: (1, 2) и (2, 1). А три числа: 1, 2 и 3? Ответ: шестью способами: (1, 2, 3); (2, 1, 3); (2, 3, 1), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2). А четыре числа: 1, 2, 3 и 4? Ответ: двадцатью четырьмя способами! То есть при монотонном возрастании количества элементов число возможных комбинаций возрастает лавинообразно.



Макс Планк
(1858–1947)

§ 38. Энтропия

Итак, вероятность *макросостояния*, в дальнейшем будем называть его просто *состоянием*, равна его статистическому весу. Поэтому его можно было бы взять в качестве величины, определяющей вероятность состояния. Однако это неудобно по двум причинам. Во-первых: статистический вес выражается огромными числами, работать с которыми очень затруднительно. Во-вторых, что ещё важнее, статистический вес не обладает свойством аддитивности. Пример: возьмем термодинамическую систему и разобьем её на две практически не взаимодействующие подсистемы. Пусть их статистические веса W_1 и W_2 . Каждое из W_1 микросостояний первой подсистемы может реализоваться совместно с каждым из W_2 микросостояний второй подсистемы. Всего возможно $W_1 \cdot W_2$ различных комбинаций подсистем, каждая из которых является микросостоянием системы. Следовательно, статистический вес состояния системы равен:

$$W = W_1 \cdot W_2. \quad (1)$$

Отсюда видно, что статистический вес не аддитивная величина, т.е. стат. вес системы не равен сумме стат. весов её независимых подсистем.

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей последнего равенства и получим соотношение

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2, \quad (2)$$

из которого следует, что логарифм статистического веса – аддитивная величина, что весьма удобно при решении различных задач. Поэтому в качестве величины характеризующей вероятность макросостояния системы принимается натуральный логарифм её статистического веса, которая называется *энтропией* системы:

$$\sigma = \ln W. \quad (3)$$

Энтропия является функцией состояния термодинамической системы, следовательно, она может быть представлена в виде функции параметров состояния,

таких как давление, объём, температура, количество вещества и т.п. Методами статистической физики можно доказать, что из приведенного определения (3) для обратимого процесса вытекает следующее соотношение:

$$d\sigma = \frac{\delta Q}{kT}. \quad (4)$$

Здесь $d\sigma$ – приращение энтропии, обусловленное получением (или отдачей) системой в ходе обратимого процесса количества теплоты δQ , k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура системы.

Чтобы сделать числовые значения энтропии более удобными в экспериментальной (и в теоретической) физике, от величины σ переходят к величине

$$S = k \cdot \sigma, \quad (5)$$

которая тоже называется *энтропией*, тогда

$$S = k \cdot \ln W \quad (6)$$

Определённая таким образом энтропия измеряется в Дж/К.

Эта формула имеет огромное значение, она связывает хаос микромира с макромиром термодинамической системы. Она была получена Л. Больцманом в 1875 г. и называется *формулой Больцмана*.

Энтропия – это скалярная величина, являющаяся мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния термодинамической системы, характеризующая направление протекания теплообмена между термодинамической системой и внешней средой, а также направление любых самопроизвольных процессов в замкнутой системе от менее вероятного состояния к более вероятному. Энтропия равна произведению постоянной Больцмана и натурального логарифма статистического веса макросостояния термодинамической системы.

Вычислим значение энтропии σ и S для моля кислорода, стат. вес которого приведен в предыдущем параграфе

$$\sigma = \ln 10^{6,5 \cdot 10^{24}} = 6,5 \cdot 10^{24} \cdot \ln 10 = 6,5 \cdot 10^{24} \cdot 2,3 \approx 1,5 \cdot 10^{25}; \quad \sigma = 1,5 \cdot 10^{25}.$$

Ему соответствует значение $S = k \cdot \sigma = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 1,5 \cdot 10^{25} \approx 207 \text{ Дж/К}$.

Из выражений (4) и (5) следует, что для обратимого процесса

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что при получении количества теплоты ($\delta Q > 0$) энтропия системы при обратимом процессе возрастает. Если же при обратимом процессе система отдаёт тепло, то её энтропия уменьшается.

Это соотношение лежит в основе применения энтропии в термодинамике. Оно выражает второй способ измерения энтропии.

Малое приращение энтропии системы в обратимом процессе равно отношению малого количества теплоты, полученного системой от теплового резервуара, к значению абсолютной температуры системы.

Обратим внимание, что при переходе из одного макросостояния в другое:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \cdot \ln W_2 - k \cdot \ln W_1 = k \cdot \ln(W_2/W_1).$$

Таким образом, изменение энтропии системы при любом процессе равно произведению постоянной Больцмана на натуральный логарифм отношения статистических весов системы в этих состояниях:

$$\Delta S = k \cdot \ln \frac{W_2}{W_1}$$

Из определения энтропии вытекают следующие её свойства:

1. В ходе необратимого процесса энтропия изолированной системы возрастает. Действительно, изолированная (т.е. предоставленная самой себе) система переходит из менее вероятных в более вероятные состояния, что сопровождается увеличением статистического веса, а, следовательно, и значения энтропии.

2. Энтропия изолированной системы, находящейся в равновесном состоянии, максимальна, ибо в равновесном состоянии стат. вес системы максимален при данной температуре, а энтропия однозначно определяется стат. весом.

Поскольку изолированная система не обменивается теплотой с окружающим миром, т.е. $\delta Q=0$, то из формулы (7) следует, что для обратимых процессов $\Delta S=0$ или $S=\text{const}$. Итак, в ходе обратимого процесса, протекающего в изолированной термодинамической системе, энтропия остаётся постоянной.

Если же в изолированной системе протекает необратимый процесс, то переход её происходит из менее вероятного в более вероятное макросостояние, который сопровождается увеличением стат. веса, а, значит, и увеличением энтропии, т.е. $\Delta S_{\text{изол. необр}} > 0$.

В общем случае, если системе сообщается количество теплоты при необратимом процессе, то её энтропия увеличивается как за счёт необратимости процесса, так и благодаря увеличению стат. веса, связанного с получением системой теплоты. В итоге, для **необратимого процесса**:

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \quad (8)$$

Если же в случае неравновесного процесса система отдаёт тепло ($\delta Q < 0$), энтропия может не только возрастать, но и убывать. Это будет в случае, когда $\left| \frac{\Delta Q}{T} \right|$

больше доли приращения энтропии, которое обусловлено необратимостью процесса. Другими словами, из-за необратимости процесса беспорядок добавляется, но при достаточно сильном охлаждении беспорядка в целом может стать меньше.

Формулы (7) и (8) можно объединить в одну:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (9)$$

в которой знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства – к необратимым процессам. Это выражение называется **неравенством Клаузиуса**.

Энтропия и хаос. Состояние, осуществляемое небольшим числом способов, называется упорядоченным или неслучайным, а состояние, осуществляемое многими способами, называется беспорядочным или случайным.

Сообщение системе теплоты приводит к усилению хаотического движения молекул, а, значит, увеличивает степень беспорядка в ней. В соответствии с (9), чем больше теплоты получает система при данной температуре, тем больше в ней

становится беспорядка. С другой стороны, чем выше температура, тем меньше добавляется беспорядка при сообщении системе данного количества теплоты δQ .

§ 39. Второе начало термодинамики. Флуктуации

Второе начало термодинамики. Мы убедились, что реальные тепловые процессы имеют определенную направленность протекания. Они самопроизвольно проходят так, что выравниваются термодинамические параметры системы: давление, температура, концентрация, химический состав и др. Значит, имеется закон природы, определяющий направленность тепловых процессов в природе.

Из первого начала термодинамики направленность процессов не вытекает. Оно требует лишь одного: чтобы количество теплоты, отданное одним телом, в точности равнялось количеству теплоты, которое получают другие тела. И нет запрета на передачу тепла от холодного тела к горячему со стороны первого начала термодинамики. Из него также нельзя объяснить необратимость превращения механической энергии при неупругом ударе, трении и др.

Направленность и, тем самым, необратимость реальных тепловых процессов определяется законом, называемым *вторым началом термодинамики*, некоторое обоснование которому мы дали выше. Наиболее общая формулировка этого начала такова:

При любых процессах, протекающих в замкнутой и адиабатически изолированной системе, её энтропия не убывает, то есть

$$\Delta S \geq 0$$

Имеются и другие формулировки. Впервые как закон природы второе начало термодинамики сформулировал ещё в 1824 г. Сади Карно. Он впервые доказал, что *тепловые двигатели могут совершать работу лишь в процессе перехода тепла от горячего тела к холодному*.

Карно придумал идеальную тепловую машину, вычислил её КПД и доказал, основываясь на фактически открытом впервые им втором начале термодинамики, так называемую **теорему Карно**.

Любая реальная тепловая машина, работающая с нагревателем температуры T_n и холодильником температуры T_x , не может иметь КПД, превышающий КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно.

Позже второе начало термодинамики было сформулировано Р. Клаузиусом в 1850 г. и У. Томсоном (Кельвином) в 1851 г. в различных, но эквивалентных формулировках.

Формулировка Клаузиуса утверждает следующее.

*Процесс, при котором не происходит никаких изменений, кроме передачи тепла от горячего тела к холодному, необратим, а значит, теплота не может самопроизвольно переходить от более холодного тела к горячему (**принцип Клаузиуса**).*

Действительно, если бы такой процесс был возможен, то он сопровождался бы убылью энтропии. А это противоречит второму началу термодинамики, данному выше в наиболее общей формулировке.

Формулировка Томсона звучит следующим образом.

Процесс, при котором работа переходит в тепло без каких-либо иных изменений состояния системы тел, необратим, а значит, невозможно полностью преобразовать в работу всё тепло, взятое от тела, не производя никаких других изменений состояния системы (принцип Томсона).

Принцип Томсона эквивалентен утверждению о невозможности вечного двигателя второго рода – периодически действующей машины, которая получает энергию от теплового резервуара и целиком превращает её в работу без каких-либо изменений в окружающей среде.

То есть чтобы сделать тепловую машину не достаточно иметь в наличии только один «горячий» тепловой резервуар. Необходим ещё и «холодный» тепловой резервуар, куда нужно будет отдавать часть энергии.

Если бы был возможен вечный двигатель второго рода, то это приводило бы к убыванию энтропии изолированной системы, что противоречит второму началу термодинамики.

Флуктуации. Законы сохранения имеют неограниченную область применения, как для макросистем, так и для микрочастиц. Второе же начало термодинамики применимо только к макроскопическим системам, состоящим из огромного числа молекул.

Возрастание энтропии в самопроизвольных процессах есть следствие роста термодинамической вероятности, т.е. хаоса. Однако в микросистеме большой системы вполне вероятен процесс с убыванием энтропии из-за наличия флуктуаций.

Флуктуациями называются отклонения истинных мгновенных значений физических величин от их средних значений.

Значит, если во всей системе хаос возрастает, то в образовавшихся флуктуациях может возникнуть «островок» порядка. Значит, закон возрастания энтропии не является строго абсолютным законом, а носит вероятностный характер, а именно: в изолированной термодинамической системе возрастание энтропии наиболее вероятно.

Результатом флуктуации давления является броуновское движение. Пользуясь только законами динамики, нельзя объяснить, почему броуновское движение наблюдается на частицах размером 0,5–1 мкм, а частицы размером 5 мкм уже не участвуют в этом движении.

Если броуновскую частицу размером 0,5 мкм представить в виде тонкой нити в воздухе, а расстояние между молекулами воздуха $20 \text{ \AA} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$, то с четырех сторон вокруг броуновской частицы окажется примерно 1000 молекул.

Можно подсчитать, что вероятность флуктуации (того, что, например, с одной стороны частицы в некоторые моменты времени окажется на 20–30 молекул воздуха больше, чем с другой) достаточно велика – порядка 10%. Такую часть времени частица будет находиться в прыжках по сравнению с равновесным состоянием, и при длительности прыжка порядка 1 с, что может визуально наблюдать человек, она сделает за минуту порядка 10 прыжков.

Вокруг частицы размером 5 мкм будут находиться десятки тысяч молекул воздуха, и вероятность того, что их количество с разных сторон окажется различным на несколько процентов, достаточных для заметного смещения частицы, практически равна нулю. Поэтому броуновское движение достаточно больших частиц не наблюдается.

§ 40. Энтропия идеального газа

Из формулы приращения энтропии в обратимом процессе при передаче системе количества теплоты $dS = \frac{\delta Q}{T}$ получим $\delta Q = T \cdot dS$.

Эта формула для количества теплоты аналогична формуле $\delta A = p \cdot dV$ для работы газа, которая справедлива тоже только для обратимого процесса (иначе давление p не имело бы определенного значения при протекании процесса).

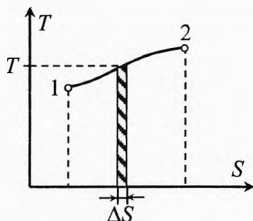


Рис. 4. Количество теплоты равно площади под графиком $T(S)$

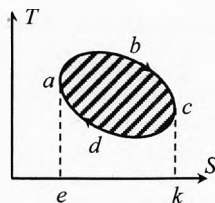


Рис. 5. Количество теплоты равно площади цикла на графике $T(S)$

Кривая на рис. 4 изображает обратимый процесс на диаграмме T - S . Подобно тому как площадь под кривой на диаграмме p - V равна (в определенном масштабе) работе газа A_{12} , площадь под кривой на диаграмме T - S численно равна количеству теплоты Q_{12} , полученному в ходе процесса 1-2 (в определенном масштабе):

$$Q_{12} = \int_1^2 T dS.$$

В случае изотермического процесса ($T = \text{const}$):

$$Q_{12} = \int_1^2 T dS = T \int_1^2 dS = T(S_2 - S_1).$$

То есть при изотермическом процессе количество теплоты получаемой или отдаваемой системой равно произведению абсолютной температуры системы на изменение энтропии за время протекания процесса,

$Q_{12} = T \cdot (S_2 - S_1)$

 при $T = \text{const}$.

Цикл можно разбить, например, на два участка (рис. 5): abc , на котором энтропия увеличивается, и cda , на котором энтропия уменьшается. На участке abc система получает количество теплоты Q_{abc} , равное (в определенном масштабе) площади $abcde$. На участке cda система отдает количество теплоты Q_{cda} , равное (в том же масштабе) площади $cdaek$. В общем, за цикл система получает количество теплоты $Q_u = Q_{abc} - Q_{cda} = Q_{abcd}$.

В случае кругового обратимого процесса количество теплоты, полученное или отданное системой, равно в определенном масштабе площади ($abcd$) цикла. Причём, если процесс идёт по часовой стрелке, то система получает тепло, а если против – то отдаёт (за полный цикл).

Отметим также, что поскольку суммарное изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, то суммарное тепло, полученное системой за цикл, равно полезной работе в этом цикле.

§ 41. Теоремы Карно. КПД цикла Карно

Теорема Карно. Вычисли КПД цикла Карно, который является обратимым процессом. На диаграмме p - V цикл Карно представлен в § 31. Он состоит из двух адиабат 2-3 и 4-1 и двух изотерм 1-2 и 3-4. Изобразим цикл Карно на диаграмме T - S (рис. 6). По определению КПД любого цикла равен отношению работы A_u газа за цикл к количеству теплоты Q_u , полученному газом (рабочим телом) за этот цикл (или за много циклов) от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_u}{Q_u} \quad (10)$$

Газ получает тепло только на участке изотермического расширения 1-2:

$$Q_u = Q_{12} = T_u(S_2 - S_1). \quad (11)$$

По I началу термодинамики для всего цикла:

$$Q_u = \Delta U_u + A_u.$$

Поскольку начальное и конечное состояния одинаковы, то внутренняя энергия рабочего тела не изменилась:

$$\Delta U_u = 0.$$

Тепло, переданное рабочему телу за цикл, равно площади цикла на диаграмме T - S (см. предыдущий параграф):

$$Q_u = (T_u - T_x)(S_2 - S_1).$$

Тогда работа газа за цикл:

$$A_u = Q_u = (T_u - T_x)(S_2 - S_1). \quad (12)$$

Подставляя (12) и (11) в (10), получим:

$$\eta = \frac{A_u}{Q_u} = \frac{(T_u - T_x)(S_2 - S_1)}{T_u(S_2 - S_1)} = \frac{T_u - T_x}{T_u} \quad \text{или} \quad \boxed{\eta = \frac{T_u - T_x}{T_u}}.$$

При выводе формулы для КПД цикла Карно мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела и устройстве тепловой машины. Следовательно, можно сделать следующий вывод, называемый **теоремой Карно**.

КПД всех обратимых машин, работающих по циклу Карно при одной и той же температуре T_u нагревателя и холодильника T_x одинаков, т.е. не зависит от природы рабочего тела, а определяется только предельными значениями температур нагревателя и холодильника.

Вторая теорема Карно утверждает следующее.

КПД любого теплового двигателя не может превышать КПД цикла Карно при таких же температурах нагревателя и холодильника.

Поясним. На участке 1-2 рабочее тело (газ) получает количество теплоты, которое полностью идёт на совершение положительной работы этим газом. На участках 2-3 адиабатного расширения и 4-1 адиабатного сжатия нет теплообмена с окружающей средой и суммарная работа газа на этих двух участках равна нулю.

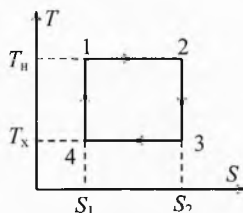


Рис. 6. Цикл Карно

На участке 3-4 газ совершает отрицательную работу, отдавая часть энергии холодильнику за счёт работы внешних сил над ним. Без этого нельзя, ведь нужно к концу цикла прийти к исходному состоянию. Но эта положительная работа совершается внешней силой при самой низкой температуре газа, поэтому потери энергии на этом участке минимально возможные, т.е. КПД цикла Карно является максимально возможным для тепловых машин, являясь идеальной моделью. Тепловые машины нужно конструировать так, чтобы как можно ближе их КПД подходил к максимально возможному, то есть к КПД цикла Карно.

Обратим внимание, что:

- 1) КПД идеальной тепловой машины тем больше, чем больше разность температур нагревателя и холодильника;
- 2) КПД тем больше, чем меньше температура холодильника, которая не может быть ниже температуры окружающей среды;
- 3) КПД цикла Карно достиг бы единицы или 100%, если температура холодильника достигла бы абсолютного нуля, чего невозможно ни практически, ни даже теоретически.

Второе начало термодинамики с учетом вышеизложенного уместно дать в формулировке, примыкающей к формулировке Томсона

Невозможно создать тепловую машину, КПД которой был бы равен 100%.

В заключении обратим внимание, насколько проще вывод формулы для КПД цикла Карно с использованием понятия энтропии, чем без него в § 31.

≠ Пример 1. Используя диаграмму температура-энтропия доказать, что при заданных максимальной и минимальной температурах цикла КПД цикла Карно максимально возможный.

→ Решение. Возьмем произвольный процесс, например, круговой (рис. 7). Сравним КПД этого цикла с КПД цикла Карно, имеющего такие же предельные значения температуры и энтропии. КПД цикла по

определению равно: $\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}}$, где $A_{\text{ц}}$ – работа рабочего

тела (например, газа) за цикл. Она равна в некотором масштабе площади цикла на диаграмме T - S ; $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, переданное рабочему телу от нагревателя. Она равна площади под графиком на тех участках цикла, где энтропия увеличивается.

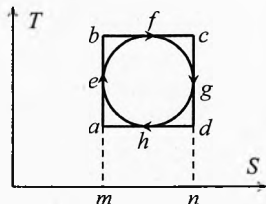


Рис. 7. Максимальный КПД

Для кругового процесса: $\eta = \frac{S_{efgh}}{S_{efghn}}$,

где S_{efgh} и S_{efghn} – площади фигур $efgh$ и $efghn$ соответственно.

Для цикла Карно: $\eta_{\text{Карно}} = \frac{S_{abcd}}{S_{abcdnm}} = \frac{S_{efgh} + (S_{ebf} + S_{fcg} + S_{gdh} + S_{hae})}{S_{efghn} + (S_{ebf} + S_{fcg})}$.

Поскольку $\eta < 1$ и $S_{ebf} \geq 0$, $S_{fcg} \geq 0$, $S_{gdh} \geq 0$, $S_{hae} \geq 0$, то $\eta_{\text{Карно}} \geq \eta$.

Это будет справедливо для любого цикла, так как любой цикл можно вписать в цикл Карно с такими же максимальными и минимальными значениями температуры и энтропии. ➤

§ 42. Третье начало термодинамики (теорема Нернста)

Для получения конкретного значения энтропии можно воспользоваться выражением (6). Но для этого придётся вычислить термодинамическую вероятность (статистический вес), что весьма затруднительно для макроскопических систем, имеющих огромное число молекул. Гораздо проще узнать значение энтропии для какой-нибудь одной температуры и, зная зависимость теплоёмкости от температуры, вычислить с помощью (7) энтропию для других температур. Одно такое значение энтропии определяет теорема, которую сформулировал в 1906 г. немецкий физик и химик Вальтер Нернст.



Вальтер Фридрих
Герман Нернст
(1864–1941)

Теорема Нернста утверждает следующее.

Энтропия твёрдого или жидкого тела в состоянии термодинамического равновесия стремится к нулю при стремлении к нулю абсолютной температуры:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Действительно, при абсолютном нуле температуры любое тело находится в состоянии, статистический вес которого равен единице (никакие молекулы не меняются местами друг с другом, а «дрожат от холода на месте»). Отсюда следует, что энтропия любого тела стремится к нулю при стремлении к нулю его абсолютной температуры. При температуре, равной абсолютному нулю, в системе наблюдался бы полный порядок.

Для того чтобы определить абсолютное значение энтропии какого-либо тела при определенной температуре, нужно знать зависимость теплоёмкости этого тела от абсолютного нуля до данной температуры. А поскольку при абсолютном нуле, согласно теореме Нернста, энтропия тела равна нулю, то при нагревании тела до температуры T энтропию можно вычислить по формуле:

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} = \int_0^T \frac{C(T)dT}{T}.$$

Кроме решения задачи об определении абсолютного значения энтропии, из третьего начала термодинамики – теоремы Нернста – вытекает ряд важных выводов: о недостижимости абсолютного нуля температуры; о стремлении теплоёмкости, коэффициента теплового расширения и термического коэффициента давления к нулю при $T \rightarrow 0$.

Третье начало термодинамики имеет большое значение для достижения сверхнизких температур методом адиабатического размагничивания, в химии – для расчёта химического равновесия и т. д.

§ 43. Получение и применение низких температур

Применение низких температур. Низкие температуры применяют в самых разных областях. Небольшое охлаждение до температуры замёрзания воды, а также чуть ниже или выше неё, используется практически в каждой квартире в бытовых

холодильниках, для торможения химико-биологических процессов в продуктах питания, лекарствах и т.п.

Искусственный холод применяют в самых различных областях медицины, строительстве, химической промышленности, например для хранения крови при температуре ниже 200 К, проходке туннелей для замораживания водоносных пород, создании искусственных катков, при производстве синтетического каучука, искусственного волокна. Широко применяются низкие температуры в науке: исследование свойств различных веществ, например, сверхпроводимости в разных диапазонах низких температур и наличии внешних магнитных полей, в сверхпроводящих магнитах ускорителей заряженных частиц и др.

Глубокое охлаждение важно для сжижения воздуха, с целью получения его компонентов азота $t_k = -196^\circ\text{C} = 77\text{ К}$ и кислорода $t_k = -183^\circ\text{C} = 90\text{ К}$. Жидкий азот используют как в научных целях, так и для производства аммиака, с помощью которого получают различные удобрения, взрывчатые вещества, красители.

Кислород применяют в медицине (наполнение кислородных подушек) и для интенсификации окислительных процессов, в том числе получения высоких температур в автогенной резке и сварке металлов (температура пламени около 3200°C) и др.

Методы получения низких температур. В технике применяют следующие методы для получения низких температур: испарение жидкостей; дросселирование газа; обратимое адиабатическое расширение газа с совершением внешней работы.

Применяются также различные охлаждающие смеси. Так, путём смешения поваренной соли со снегом можно получить температуру ниже минус 20°C , а смешением хлороформа или эфира с твёрдой углекислотой – минус 77°C .

По принципу испарения жидкостей работают домашние холодильники.

При адиабатном расширении сжатого газа резкое падение давления сопровождается увеличением расстояний между молекулами. Он совершает положительную работу за счёт своей внутренней энергии, и его температура понижается. Если при этом газ расширяется через узкое отверстие, то такой процесс называется **дросселированием**. Если же газ расширяется с помощью поршня в цилиндре, то это – метод обратимого адиабатического расширения с совершением внешней работы.

Цикл с дросселированием газа (рис. 8) был предложен в 1895 г. английским ученым Хемпсоном (1840–1900) и независимо от него немецким инженером-физиком Карлом Линде (1842–1934).

Цикл с обратимым адиабатическим расширением газа с совершением внешней работы (рис. 9) был фактически запатентован ещё в 1857 г. немецким электротехником и промышленником Эрнстом Вернером фон Сименсом (1816–1892). Однако только французскому инженеру Жоржу Клоду (1870–1960) удалось в 1902 г. с помощью такого цикла получить жидкий воздух. Поэтому метод получения низких температур и сжижения газов путём обратимого адиабатического расширения с совершением внешней работы получил название **метода Клода**.

Схематически принцип действия машин этими методами состоит в следующем. Поршень компрессора 1 сжимает газ в цилиндре 2. Сжатый и нагретый газ, покидая цилиндр, охлаждается жидкостью 5. Далее в установках типа Клода он поступает в цилиндр детандера 4 (поршневой машины), в которой происходит адиабатическое расширение газа – газ производит работу над поршнем 3. В установках типа Хемпсона–Линде вместо детандера применяется вентиль 3, через который происходит дросселирование газа. В обоих случаях газ охлаждается. Охлаждённый газ, прежде чем вернуться в цилиндр, проходит через теплообменник 6,

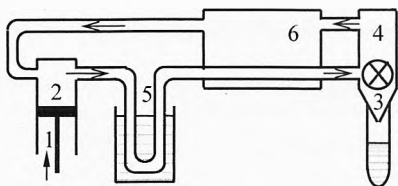


Рис. 8. Дросселирование
в установке Хемпсона–Линде

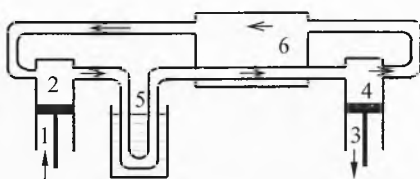


Рис. 9. Обратимое адиабатическое
расширение методом Клода

который обычно представляет собой трубу в форме спирали (змеевика). По внутренней трубе газ поступает в детандер или вентиль, по наружной – возвращается охлажденный газ, который дополнительно охлаждает новую порцию газа, текущего навстречу. Это охлаждение является назначением теплообменника. После каждого хода поршня 2 в детандер или к вентилю будет поступать всё более холодный газ, который после очередного расширения начнет сжиматься. Советский физик П.Л. Капица усовершенствовал термодетандеры, работающие по методу обратимого адиабатического расширения газа с совершением внешней работы.

Существует метод сжижения газов, основанный на эффекте Джоуля–Томсона (изменение температуры газа при стационарном адиабатическом протекании его через пористую перегородку). Машины, работающие по этому методу, более просты, но эффективность их работы низка. Необходимо использовать большие количества газа и более высокое давление. Охлаждение, которое можно получить адиабатным расширением, обычно много больше того, что даёт эффект Джоуля–Томсона.



Эрнст Вернер фон
Сименс (1816–1892)



Петр Леонидович
Капица (1894–1984)



Джеймс Дьюар
(1842–1923)

Жидкий водород был впервые получен в 1898 г. английским физиком и химиком Джеймсом Дьюаром (1842–1923). Им был использован эффект Джоуля–Томсона. Дьюар изобрел также сосуды, носящие его имя. Дьюаровские сосуды имеют двойные стенки, между которыми создан вакуум, что приводит к хорошей теплоизоляции вещества, находящегося внутри сосуда. К Дьюаровским сосудам относится термос, распространенный в быту.

В 1908 г. Камерлинг-Оннес (1853–1926) впервые получил жидкий гелий и измерил его температуру. В 1909 г. он получил температуру в 1,04 К. Как же это возможно? Дело в том, что температура кипения гелия (^4He) при нормальном давлении равна 4,2 К. Но заставляя кипеть его под пониженным давлением, можно достигнуть температуры 0,7–1 К. Для получения более низких температур употребляют ванны с жидким ^3He , температура кипения которого более низка (3,2 К)

при нормальном давлении. Откачивая ванну с ^3He удаётся достигнуть температуры 0,3 К.

Для получения ещё более низких температур применяют эффект охлаждения при растворении ^3He в сверхтекучем ^4He , а также применяют метод адиабатического размагничивания парамагнитных солей. Самая низкая температура, достигнутая последним методом, равна $-0,0014$ К.

Формулировка начал термодинамики. В заключение главы сформулируем все пять начал (законов) термодинамики. Общее и нулевое начала термодинамики мы рассматривали во второй главе. А первое, второе и третье начала термодинамики рассмотрели в третьей и пятой главах.

Общий постулат термодинамики. *Каково бы ни было начальное состояние тел изолированной системы, в ней в конце концов установится термодинамическое равновесие, в котором прекратятся все макроскопические процессы.*

Нулевой постулат термодинамики. *Пусть имеются три тела А, В и С. Если при контакте тела С с телом А не происходит теплообмена и при контакте тела С с телом В тоже не происходит теплообмена, то не будет теплообмена и при контакте тел А и В.*

Первое начало термодинамики. *Количество теплоты, полученное телом, равно изменению его внутренней энергии и работе, которую совершит тело над внешними телами.*

Второе начало термодинамики (наиболее общая формулировка). *При любых процессах, протекающих в замкнутой и адиабатически изолированной системе, её энтропия не убывает.*

Третье начало термодинамики (теорема Нернста). *Энтропия твёрдого или жидкого тела в состоянии термодинамического равновесия стремится к нулю при стремлении к нулю абсолютной температуры.*



Упражнения

1 Может ли энтропия убывать в ходе необратимого процесса?

2 Насколько изменяется энтропия газа в цикле Карно за один цикл?

3 В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при температуре $T=350$ К, тело совершило работу $A=80$ Дж. Его внутренняя энергия при этом увеличилась на $\Delta U=7,5$ Дж. Найти приращение энтропии тела.

4 Найти приращение энтропии ΔS одного моля одноатомного идеального газа при обратимом изобарическом нагревании его от 0 до 273°C .

5 Найти изменение энтропии при изохорном квазистатическом охлаждении воздуха массой $m=2$ кг, если при этом его давление понизилось с $p_1=760$ Тор до $p_2=722$ Тор.

6 Рабочее тело тепловой машины получает от нагревателя количество теплоты $Q_n = 300$ кДж. Температура нагревателя и холодильника равны соответственно $T_n = 450$ К и $T_x = 280$ К. Вычислить работу, совершенную рабочим веществом машины за это время.

7 В вертикальном цилиндре находится ν молей идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт поршнем массой m площадью S . Вся система теплоизолирована. В начале поршень неподвижен, газ в цилиндре занимает объём V_0 , его температура T_0 , затем поршень освобождают. После нескольких колебаний он приходит в состояние покоя. Пренебрегая силами трения, а также теплоёмкостью цилиндра, найти температуру и объём газа в установившемся положении поршня. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу в цилиндре для того, чтобы поршень занял своё первоначальное положение?

8 В стоящем на столе теплоизолированном сосуде под свободно перемещающимся поршнем находится в равновесии одноатомный идеальный газ (рис. 10а). По другую сторону поршня – вакуум. Поршень закрепляют, сосуд наклоняют на угол $\alpha = 60^\circ$ и поршень снова освобождают (рис. 10б). Во сколько раз изменится объём и температура газа после установления равновесия?

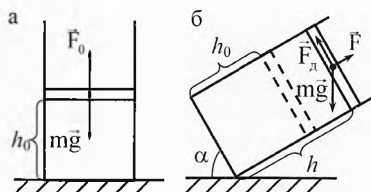


Рис. 10. Подъём с охлаждением

9 Два тела A и B массой $m = 1$ кг каждое, температуры которых $T_A = 293$ К и $T_B = 283$ К, привели в тепловой контакт на короткое время. При этом от тела A к телу B перешло тепло в количестве $Q = 1$ Дж. Как при этом изменилась суммарная энтропия тел A и B ?

10 Тепловая машина совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с несколькими тепловыми резервуарами (нагревателями и холодильниками). Пользуясь неравенством Клаузиуса, показать, что КПД такой тепловой машины не может превосходить значение $\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}$, где T_{\max} – максимальная, а T_{\min} – минимальная температуры тепловых резервуаров, с которыми машина обменивается теплом.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 Может, если процесс идёт с понижением температуры. Действительно, из-за того, что процесс необратимый, степень беспорядка в системе возрастает в соответствии с неравенством Клаузиуса, но если при этом тепло от системы отнимается, то от этого фактора энтропия уменьшается. В зависимости от того, какой из факторов будет играть большую роль, энтропия в необратимом процессе будет или возрастать, или уменьшаться, или оставаться неизменной.

2 I способ. Когда газ изотермически расширяется и получает от нагревателя (теплого резервуара с температурой T_n) количество теплоты Q_n , его энтропия возрастает на $\Delta S_{1,2} = Q_n/T_n$. При адиабатном расширении на участке 2-3 энтропия газа не изменяется. При изотермическом сжатии на участке 3-4 газ отдаёт тепло холодильнику (тепловому резервуару с температурой T_x) количество теплоты $|Q_x|$,

и его энтропия уменьшается на $\Delta S_{34} = Q_N/T_N = -|Q_N|/T_N$. При адиабатном сжатии на участке 4-1 энтропия газа не изменится.

Таким образом, суммарное изменение энтропии газа в машине, работающей по циклу Карно, за один цикл:

$$\Delta S_{\text{ц}} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{|Q_N|}{T_N}. \quad (13)$$

$$\text{КПД цикла Карно: } \eta = \frac{T_H - T_N}{T_H}.$$

$$\text{С другой стороны, по определению КПД: } \eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_N|}{Q_H}.$$

Сравнивая эти два выражения, получим:

$$1 - \frac{T_N}{T_H} = 1 - \frac{|Q_N|}{Q_H}; \Rightarrow \frac{Q_H}{T_H} = \frac{|Q_N|}{T_N}. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получим: $\Delta S_{\text{ц}} = 0$.

II способ. Поскольку энтропия является функцией состояния, а в течение цикла из одного состояния газ, в конечном счёте, приходит в то же самое состояние, то энтропия в конце будет такой же, как и в начале, поэтому изменение энтропии за цикл равно нулю: $\Delta S_{\text{ц}} = 0$.

3 По I началу термодинамики, количество теплоты, полученное телом: $Q = \Delta U + A$. Поскольку процесс изотермический, $\Delta S = Q/T = (\Delta U + A)/T$; $\Delta S = 0,25 \text{ Дж/К}$.

4 Учитывая, что при изобарном процессе ($p = \text{const}$) для одноатомного газа $\delta Q = dU + \delta A = \frac{3}{2} \nu R dT + \nu R dT = \frac{5}{2} \nu R dT$, получим:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \frac{5}{2} \nu R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} \nu R \cdot \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{5}{2} \nu R \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot \ln(2) = 14,4 \text{ Дж/К}.$$

$$\mathbf{5} \quad \Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right), i=5. \text{ При изохорном процессе:}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}. \quad \Delta S = \frac{5}{2} \frac{m}{M} R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right); \quad \Delta S = \frac{5 \cdot 2,8,31}{2 \cdot 0,029} \ln \left(\frac{722}{760} \right) \approx -74 \text{ Дж/К}.$$

Ответ. Энтропия уменьшилась на 74 Дж/К.

$$\mathbf{6} \quad \text{По определению } \eta = \frac{A}{Q_H}, \text{ а для цикла Карно } \eta_{\text{ид}} = \frac{T_H - T_N}{T_H}. \text{ Согласно тео-}$$

реме Карно КПД любого теплового двигателя не может превышать КПД цикла Карно при таких же температурах нагревателя и холодильника: $\eta < \eta_{\text{ид}}$. Подставляя значение КПД данной тепловой машины и цикла Карно, получим:

$$\frac{A}{Q_H} < \frac{T_H - T_N}{T_H}; \Rightarrow A < Q_H \cdot \frac{T_H - T_N}{T_H}; \quad A < 113 \text{ кДж}.$$

Ответ. Тепловая машина совершила работу менее 113 кДж.

7 После освобождения поршень начнет колебаться. Этот процесс – не квазистатический, а значит и необратимый. Колебания быстро затухнут; часть энергии перейдет во внутреннюю, в соответствие со II началом термодинамики. В условии задачи ничего не сказано об атмосферном давлении. Решим задачу для простейшего случая, когда над поршнем вакуум. Согласно закону сохранения энергии,

$$U_0 + E_0 = U + E \quad \text{или} \quad U - U_0 = E_0 - E \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}(pV - p_0V_0) = mg(h_0 - h).$$

Учитывая, что в конечном положении равновесия $p = mg/S$, а так же, что $V_0 = h_0 \cdot S$, $V = h \cdot S$, $p_0V_0 = \nu RT_0$, $pV = \nu RT$, после преобразований получим:

$$V = \frac{2}{5}V_0 + \frac{3\nu RT_0 S}{5mg}, \quad T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{2mgV_0}{5S\nu R} + \frac{3}{5}T_0.$$

Согласно условию задачи для восстановления первоначального положения необходимо подвести некоторое количество теплоты $Q > 0$, значит $h < h_0$. Чтобы поршень поднялся в исходное положение нужно увеличить его внутреннюю энергию (нагреть газ) и совершить работу по подъему поршня за счёт передачи количества теплоты (при постоянном давлении):

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}p(V_0 - V) + p(V_0 - V) = \frac{5}{2}p(V_0 - V).$$

Подставляя выражения для p и V , получим: $Q = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{mgV_0}{S} - \nu RT_0 \right).$

Примечание. Если над поршнем имеется воздух с атмосферным давлением p_a , то давление на газ увеличится на постоянное значение (p_a) и составит:

$$p' = \frac{mg}{S} + p_a.$$

Тогда: $T' = \frac{2V_0}{5\nu R} \left(\frac{mg}{S} + p_a \right) + \frac{3}{5}T_0$; $V' = \frac{2}{5}V_0 + \frac{3}{5} \frac{\nu RT_0}{(p_a + mg/S)}.$

Количество теплоты: $Q' = \frac{3}{2} \cdot \left[V_0 \left(\frac{mg}{S} + p_a \right) - \nu RT_0 \right].$

8 Запишем условие равновесия поршня до его закрепления: $p_0 S = mg$. После наклона и освобождения сила давления поршня на газ уменьшится и объём газа начнет увеличиваться. Возникнут колебания, которые быстро затухнут из-за вязкого трения (процесс колебаний неквазистатический, а, следовательно, необратимый).

В новом положении условие равновесия поршня вдоль оси колебаний имеет вид: $pS = mg \cdot \cos \alpha$. Применим закон сохранения энергии, поскольку система теплоизолирована и трения нет (уравнение Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$ применять нельзя из-за неквазистатичности процесса): $U_0 + E_0 = U + E$; $\Rightarrow E - E_0 = U_0 - U$, где E – механическая энергия поршня, U – внутренняя энергия газа.

Тогда, $mg(h - h_0) \cos \alpha = \frac{3}{2}(p_0V_0 - pV).$

Учитывая, что $p_0 = mg/S$, $p = mg \cdot \cos \alpha / S$, $h_0 = V_0/S$ и $h = V/S$, получим $V/V_0 = 8/5$.

Запишем уравнение Клапейрона $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{pV}{p_0V_0} = \frac{8}{5} \cos \alpha = \frac{4}{5}.$

Объём газа увеличится на 60%, а температура уменьшится на 20%.

9 Если телу массой 1 кг передать тепло 1 Дж, то оно нагреется всего на $\Delta T = Q/(c \cdot m) \approx 10^{-3}$ К. Поэтому температуру тел во время этого короткого взаимодействия можно считать примерно постоянной.

Изменение энтропии тела A : $\Delta S_A = \frac{Q_A}{T_A} = -\frac{Q}{T_A}.$

Изменение энтропии тела B : $\Delta S_B = \frac{Q_B}{T'_B} = \frac{Q}{T_B}$.

Суммарное изменение энтропии: $\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = -\frac{Q}{T_A} + \frac{Q}{T_B} = Q \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right)$;

$$\Delta S = 1 \text{ Дж} \left(\frac{1}{283 \text{ К}} - \frac{1}{293 \text{ К}} \right) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/К} = 0,12 \text{ мДж/К}.$$

Суммарная энтропия системы тел увеличилась на $0,12 \text{ мДж/К}$.

10 Поскольку в круговом процессе рабочее тело приходит в исходное состояние, то суммарное изменение его энтропии за цикл равно нулю: $\sum dS = 0$.

Тогда неравенство Клаузиуса ($dS \geq \frac{\delta Q}{T}$) можно записать в виде:

$$\sum \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{или} \quad \sum \frac{\delta Q_{\text{н}}}{T_{\text{н}}} - \sum \frac{|\delta Q_{\text{х}}|}{T_{\text{х}}} \leq 0,$$

где $\delta Q_{\text{н}}$ – элементарное тепло, получаемое машиной в круговом процессе от нагревателей, $|\delta Q_{\text{х}}|$ – элементарное тепло, отдаваемое холодильникам.

Если вместо $T_{\text{н}}$ поставить максимальную температуру T_{max} , а вместо $T_{\text{х}}$ – минимальную температуру T_{min} , то неравенство только усилится.

$$\text{Значит, } \frac{1}{T_{\text{max}}} \sum \delta Q_{\text{н}} - \frac{1}{T_{\text{min}}} \sum |\delta Q_{\text{х}}| \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{Q_{\text{н}}}{T_{\text{max}}} - \frac{|Q_{\text{х}}|}{T_{\text{min}}} \leq 0,$$

где $Q_{\text{н}}$ – полное количество теплоты, получаемое от всех нагревателей за цикл, $|Q_{\text{х}}|$ – полное количество теплоты, отдаваемое всем холодильникам за цикл.

Преобразуем последнее неравенство:

$$-\frac{|Q_{\text{х}}|}{T_{\text{min}}} \leq -\frac{Q_{\text{н}}}{T_{\text{max}}}; \quad -\frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} \leq -\frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}; \quad 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} \leq 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}};$$

Откуда следует, что

$$\boxed{\eta = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} \leq \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}}.$$

Глава 6. Агрегатные состояния вещества и фазовые переходы.

Влажность

Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что от поры до времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красную раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным.

Исаак Ньютон

§ 44. Агрегатные состояния вещества

Вещество может находиться в пяти агрегатных состояниях.

При низких температурах, близких к абсолютному нулю, почти все вещества находятся в твёрдом состоянии. При повышении температуры твёрдое состояние сменяется жидким, затем газообразным. При дальнейшем увеличении температуры газ ионизируется – получается плазма (это основное состояние вещества во Вселенной, на его долю приходится примерно 98% всего вещества). При очень большом сжатии электроны соединяются с протонами и получается нейтронное состояние вещества огромной плотности (нейтронные звезды). Нейтронные звезды большой массы превращаются в чёрные дыры.

В газах молекулы расположены беспорядочно отдельно друг от друга. В жидкостях наблюдается ближний порядок в пределах нескольких молекулярных диаметров, молекулы в результате взаимодействия между собой находятся в определенном порядке (формула воды в жидком состоянии $(\text{H}_2\text{O})_x$, где x – число молекул в капле ближнего порядка).

Молекулы жидкости, совершая колебания около положений равновесия, могут при столкновениях друг с другом получить достаточную кинетическую энергию, чтобы перейти в новое положение равновесия. В результате ближний порядок постоянно разрушается тепловым движением и вновь создаётся силами межмолекулярного взаимодействия. Жидкость обладает замечательным свойством – текучестью. Если внешняя сила, например сила

* В начале XXI века начали говорить о «тёмной материи» и тёмной энергии, на долю которых отводят основную (более 90%) часть массы Вселенной.

тяжести, действует в определенном направлении, то перескоки молекул будут происходить преимущественно в том же направлении.

Кинетическая энергия молекул твёрдых тел значительно меньше потенциальной, поэтому они не могут свободно перемещаться. Они находятся в узлах кристаллической решетки. В расположении молекул твёрдого кристаллического тела наблюдается дальний порядок, т. е. строгая периодичность на протяжении тысяч и более межмолекулярных расстояний. Однако упорядоченная структура в реальном кристалле нарушается из-за различных дефектов, которые уменьшают во много раз прочность кристаллов, а также облегчают переходы атомов или молекул с одного места на другое, но происходят такие переходы редко. Среднее время оседлой жизни молекул в зависимости от температуры может исчисляться секундами, часами, сутками, годами. Поэтому диффузия в кристаллах протекает очень медленно.

У одного и того же вещества может быть несколько разных модификаций кристалла с различными свойствами. Так, углерод образует две основные кристаллические модификации – графит и алмаз, существует сера ромбическая и моноклинная, белый и красный фосфор.

Исходя из этого, кроме понятия агрегатного состояния вводится более широкое понятие фазы.

Фаза – это равновесное состояние вещества, отличающееся по своим физическим свойствам от других состояний этого вещества.

У вещества возможны одна газообразная* и одна или несколько жидких и твёрдых фаз.

Переход вещества из одной фазы в другую называется **фазовым переходом**.

При таких переходах скачком меняются механические, тепловые, электрические, магнитные и оптические свойства вещества.

§ 45. Фазовые переходы. Диаграмма состояния вещества

Пары и «постоянные газы». До середины XIX века вещества в газообразном состоянии подразделялись на пары и «постоянные газы». Пары можно было конденсировать, а «постоянные газы» – кислород, водород, азот и др. не удавалось перевести в жидкое состояние ни при каких давлениях.

* Газообразный кислород может состоять из атомарного кислорода O, молекулярного кислорода O₂ и озона O₃. У них общее то, что они состоят из атомов кислорода. Но они отличаются не только по физическим, но и по химическим свойствам. Поэтому их можно считать разными веществами.

Догадку об отсутствии принципиальной разницы между парами и «постоянными газами» высказал ещё французский химик Антуан Лоран Лавуазье (1743–1794) в конце XVIII века. Он считал, что при достаточно низкой температуре и атмосферный воздух превратится в жидкость, что и было экспериментально доказано через сотню лет.

В 1877 г. французский инженер Кальете (1832–1913) и швейцарский физик Рауль Пьер Пикте (1846–1929) независимо друг от друга добились сжижения кислорода при давлении в 300 атмосфер и охлаждении ниже температуры -140°C . В том же году был сжижен азот. В 1898 г. английский физик Дж. Джоар получил жидкий водород, а в 1908 г. нидерландский физик Гейке Камерлинг-Оннес (1853–1926) перевел в жидкое состояние гелий.

Таким образом, практически было доказано, что любое вещество можно изотермически перевести в жидкое состояние, но только при температуре ниже критической $T_{\text{кр}}$. При этой температуре средняя кинетическая энергия теплового движения молекул примерно равна по модулю потенциальной энергии связи молекул. Так как энергия связи при одной и той же температуре у разных веществ различна, то одни из них при данной температуре твёрдые, другие – жидкие, а третьи – газообразные.

Диаграмма состояния вещества.

Диаграмма состояния (рис. 1) позволяет судить, какие фазовые превращения будут происходить в том или ином процессе. Возьмем, например, твёрдое тело и будем нагревать его при постоянном давлении $p_2 > p_{\text{тр}}$. На диаграмме состояния этому процессу соответствует горизонтальная прямая. Эта прямая проходит выше тройной точки, пересекая кривую плавления в точке 2 и кривую испарения в точке 3. Значит, при нагревании твёрдое тело сначала расплавится (точка 2), затем получившаяся жидкость нагреется (участок 2-3), а потом испарится (точка 3).

Если это тело нагревать при давлении $p_1 < p_{\text{тр}}$, то горизонтальная прямая такого процесса пройдет ниже тройной точки и пересечет кривую возгонки в точке 1. То есть твёрдое тело не будет плавиться, а сразу перейдет (сублимирует) в газообразное состояние (точка 1), как, например, твёрдая углекислота CO_2 при атмосферном давлении ($p_{\text{тр}} = 5,1$ атм).

График плавления AB идёт почти вертикально для многих веществ, поскольку температура плавления слабо зависит от давления.

Для веществ, обладающих в твёрдом состоянии меньшей плотностью по сравнению с жидким состоянием (лёд, висмут, серый чугун), увеличение

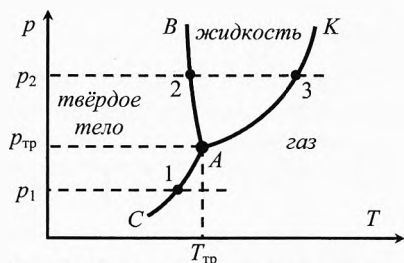


Рис. 1. Диаграмма состояния вещества

давления способствует уменьшению температуры плавления. Для таких веществ кривая плавления отклоняется влево от вертикали*. Например, айсберги тают снизу, поскольку на глубине давление больше и температура плавления льда будет ниже 0°C .

Температура тройной точки для воды $t_{\text{тр}}=0,01^\circ\text{C}$, или $T_{\text{тр}}=273,16\text{ K}$, а давление $p_{\text{тр}}=4,58\text{ мм.рт.ст.}$ Тройная точка воды является основной реперной точкой при построении абсолютной шкалы температур Кельвина, а также шкалы Цельсия.

§ 46. Испарение и конденсация

В жидкости или твёрдом теле при любой температуре существует некоторое количество молекул (атомов), кинетическая энергия которых превышает модуль потенциальной энергии их связи с остальными молекулами. Если такая молекула оказалась на поверхности тела и её скорость направлена наружу, то она преодолеет притяжение остальных молекул и вылетит наружу.

Переход вещества из жидкого состояния в газообразное называется испарением.

В результате испарения наиболее быстрых молекул оставшаяся часть жидкости охлаждается. Для того чтобы жидкость не охлаждалась, ей нужно подводить количество теплоты, равное уносимой энергии, которое вычисляется по формуле:

$$Q_{\text{исп}} = Lm,$$

где L – удельная теплота парообразования (конденсации); m – масса испарившегося вещества.

Удельная теплота парообразования равна количеству теплоты, которое нужно подвести к жидкости, чтобы испарить один килограмм этой жидкости при данной температуре. Чем выше температура жидкости, тем меньше

* Наклон кривых на диаграмме состояния можно рассчитать с помощью так называемых уравнений Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dp_{\text{сд}}}{dT} = \frac{L_{\text{субл}}}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{газ}}} - \frac{1}{\rho_{\text{тв}}} \right)}, \quad \frac{dp_{\text{пл}}}{dT} = \frac{\lambda}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{жидк}}} - \frac{1}{\rho_{\text{тв}}} \right)}, \quad \frac{dp_{\text{исп}}}{dT} = \frac{L}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{газ}}} - \frac{1}{\rho_{\text{жидк}}} \right)},$$

где $\rho_{\text{тв}}$, $\rho_{\text{жидк}}$, $\rho_{\text{газ}}$ – плотность вещества в твёрдом, жидком и газообразном состояниях при температуре T ; $L_{\text{субл}}$ – удельная теплота сублимации, L – удельная теплота испарения, λ – удельная теплота плавления вещества.

удельная теплота парообразования, ибо кинетическая энергия молекул жидкости возрастает с увеличением температуры.

Например, для воды при температуре 100°C и при $t=0^{\circ}\text{C}$:

$$L_{100} = 539 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}} = 2,26 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}, \quad L_0 = 595 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}} = 2,49 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}.$$

Наблюдается и обратный процесс перехода пара в жидкость, называемый конденсацией. Конденсируясь вещество отдаёт окружающим телам часть своей внутренней энергии, равную той, которая была получена при испарении с той же температурой:

$$Q_{\text{конд}} = -Lm$$

При парообразовании молекулы должны преодолеть притяжение со стороны молекул жидкости, а также совершить работу по «отодвиганию атмосферы», чтобы занять некоторый объём в среднем одинаковый на каждую молекулу газа и пара. И не важно испаряются молекулы поодиночке или группами. При конденсации атмосфера совершает такую же положительную работу по «вталкиванию» молекул газа в жидкую фазу, какую совершали молекулы пара по «отодвиганию атмосферы» при испарении. Поэтому удельная теплота испарения равна удельной теплоте конденсации.

Количество теплоты, которое требуется для испарения пара массы m при данной температуре и атмосферном давлении: $Q=L \cdot m$. Или в соответствии с I началом термодинамики:

$$Q=\Delta U + A,$$

где $\Delta U=U_{\text{пара}}-U_{\text{жидк}}$ – изменение внутренней энергии молекул,

$A=p_a \cdot \Delta V$ – работа пара по «отодвиганию атмосферы»,

p_a – атмосферное давление,

ΔV – изменение объёма при переходе вещества из жидкого в газообразное состояние. При небольших давлениях (порядка нормального атмосферного) оно приблизительно равно объёму образующегося пара: $\Delta V \approx V_{\text{пара}}$.

Откуда следует, что

$$L = \frac{\Delta U + A}{m}$$

$$\text{или} \quad L = \frac{(U_{\text{пара}} - U_{\text{жидк}}) + p_a \Delta V}{m} \approx \frac{1}{m} (U_{\text{пара}} - U_{\text{жидк}}) + \frac{1}{M} RT.$$

С повышением температуры удельная теплота парообразования уменьшается из-за того, что внутренняя энергия молекул жидкости с повышением температуры растёт в большей степени, чем внутренняя энергия молекул пара, то есть $(U_{\text{пара}}-U_{\text{жидк}})$ уменьшается.

При разных значениях атмосферного давления различны и значения удельной теплоты парообразования. Но эти различия небольшие. Например,

для воды доля тепла, затрачиваемого на увеличение внутренней энергии (разрыв связей между молекулами) примерно в 20 раз больше, чем работа по «отодвиганию атмосферы». Поэтому небольшие колебания атмосферного давления заметно не влияют на значение удельной теплоты парообразования L .

Насыщенный и ненасыщенный пар. Процесс испарения жидкости или твёрдого тела в закрытой ёмкости сопровождается увеличением концентрации паров, а это приводит к увеличению конденсации. Наступает момент, когда интенсивность испарения и конденсации сравниваются, т. е. наступает *динамическое равновесие* между испарением жидкости и конденсацией пара. Такой пар называется *насыщенным* при данной температуре.

Если увеличить объём и/или температуру, то пар станет ненасыщенным, тогда испарение вновь будет преобладать над конденсацией, до очередного насыщения.

Если же насыщенный пар сжать и/или охладить, то он станет пересыщенным (или переохлажденным) и начнёт конденсироваться.

Интересно, что при данной температуре концентрация и давление насыщенного пара практически не зависят от давления воздуха, который находится в том же объёме.

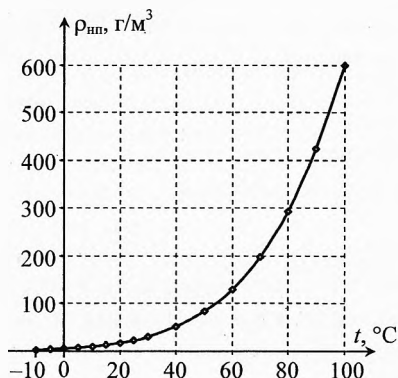


Рис. 2. Плотность насыщенных паров воды

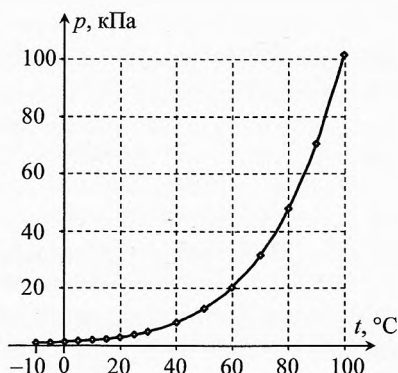


Рис. 3. Давление насыщенных паров воды

Чем выше температура жидкости, тем больше концентрация насыщенных паров, а в ещё большей степени давление, ведь давление пара пропорционально концентрации и абсолютной температуре: $p = nkT$.

На рис. 2 показана зависимость плотности насыщенных паров воды от температуры, на рис. 3 — зависимость их давления от температуры.

При увеличении температуры от 20 до 100°C плотность насыщенных паров возрастает примерно в 33 раз, а давление — в 43,3 раза:

$$\frac{\rho_{100}}{\rho_{20}} = \frac{600 \text{ г/м}^3}{17,3 \text{ г/м}^3} \approx 35, \quad \frac{p_{100}}{p_{20}} = \frac{101,3 \text{ кПа}}{2,34 \text{ кПа}} \approx 43.$$

§ 47. Кипение

В жидкости имеется растворенный воздух, ибо часть молекул воздуха, попадая в жидкость, растворяются в ней. Каждый газ из воздушной смеси растворяется независимо от наличия других компонентов в газовой смеси.

При постоянной температуре растворимость в данной жидкости каждого из компонентов газовой смеси, находящейся над жидкостью, пропорциональна парциальному давлению этого газа (второй закон Дальтона).

Второй закон Дальтона справедлив при малой растворимости газов, когда количество молекул газа значительно меньше молекул воды, в которой растворяется газ.

Испарение молекул происходит не только с поверхности жидкости, но и внутри пузырьков, возникающих в точках с более высокой температурой. Эти пузырьки поднимаются под действием силы Архимеда и лопаются на поверхности.

Пока жидкость, например вода, не прогрета, образующиеся около нагревателя пузырьки при подъёме вверх уменьшаются в размере, т. к. во время подъема пар охлаждается, становится пересыщенным и часть его конденсируется. Поэтому в начале нагревания сосуда с водой часто слышен шум, который образуется благодаря схлопыванию пузырьков.

Когда же вода прогреется, то образующиеся пузырьки из пара и воздуха поднимаются вверх. В них интенсивно испаряется жидкость, поэтому пузырьки увеличиваются в объёме.

Кипение протекает интенсивнее, когда имеется нагреватель достаточной мощности. Сначала зародыши пузырьков образуются из воздуха и пара. Но очень скоро весь растворенный в воде воздух уходит с пузырьками, и в дальнейшем пузырьки образуются только из пара в наиболее горячих точках. По мере подъема они быстро увеличиваются в объёме и выходят на поверхность. Чем больше мощность нагревателя, тем больше количество и объём отдельных пузырьков. Выражаясь ненаучно, можно сказать, что кипение – это бурление жидкости, сопровождающееся интенсивным испарением жидкости. Кипение каждой жидкости происходит при достижении ею определенной температуры – температуры кипения, которая неизменна для данной жидкости при неизменном внешнем давлении.

Процесс образования и увеличения объёма пузырьков возможен, если давление насыщенных паров внутри пузырька больше давления жидкости в этом месте. Давление жидкости равно сумме атмосферного давления p_a , гидростатического давления столба жидкости, а также давления $p_{пов}$, обусловленного силой поверхностного натяжения (см. гл. 7):

$$p_{\text{нп}} \geq p_a + \rho_{\text{ж}}gh + p_{\text{пов}}.$$

При наличии мощного нагревателя пузырьки образуются в самых горячих точках, потому что именно в них больше вероятность достижения паром давления, достаточного для преодоления атмосферного, гидростатического давления и давления сил поверхностного натяжения, значительных при малых радиусах образующихся пузырьков.

Важную роль для явления кипения играет внешнее, в частности атмосферное давление. Если понизить атмосферное давление до 12,3 кПа, вода закипает при 50°C, а при уменьшении давления до 2,33 кПа вода закипает уже при температуре 20°C.

Если при этом нет активного нагревателя, то кипение будет наблюдаться в поверхностном слое, т. к. в этом случае важную роль будет играть гидростатическое давление, и чем меньше глубина, тем больше вероятность кипения. На температуру кипения влияет также наличие примесей.

Кипение – это интенсивное испарение жидкости с поверхности и по всему её объёму внутрь пузырьков газа с выходом наружу, наблюдаемое, когда давление внутри жидкости становится равным давлению насыщенного пара.

Почему при нормальном атмосферном давлении 760 мм рт. ст. (или 101,3 кПа) вода кипит при 100°C? Это происходит потому, что при 100°C давление насыщенных паров воды становится равным атмосферному давлению.

Пример 1. На какую высоту можно поднять с помощью поршневого жидкостного насоса воду с температурой $t_1=0^\circ\text{C}$, $t_2=50^\circ\text{C}$, $t_3=100^\circ\text{C}$ при нормальном атмосферном давлении?

Решение. В сообщающихся сосудах давление на одном уровне одинаково в однородной жидкости, т.е. $p_A = p_B$.

Давление в точке A (рис. 4) равно атмосферному, а давление в точке B складывается из давления столба воды и давления насыщенных паров под поршнем

$$p_a = \rho gh + p_{\text{нп}} \Rightarrow h = \frac{p_a - p_{\text{нп}}}{\rho g}.$$

По таблице зависимости давления насыщенных паров от температуры находим при 0°C: $p_{\text{нп1}}=0,42$ кПа, при 50°C: $p_{\text{нп2}}=12,3$ кПа, при 100°C: $p_{\text{нп3}}=101,3$ кПа.

$$h_1 = \frac{(101,3 - 0,42) \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,8} = 10,3 \text{ (м)} \approx 10 \text{ (м)};$$

$$h_2 = \frac{(101,3 - 12,3) \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,8} = 9,08 \text{ (м)} \approx 9 \text{ (м)}; \quad h_3 = \frac{(101,3 - 101,3) \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,8} = 0.$$

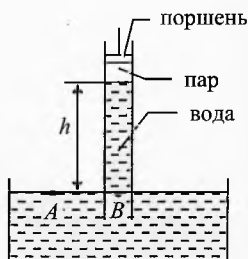


Рис. 4. Подъем воды поршнем

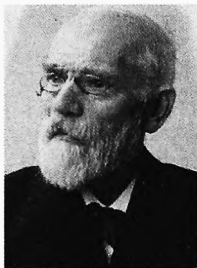
✓ **Ответ.** С помощью поршневого насоса можно эффективно поднимать холодную и теплую воду: при 0°C на 10 м, а при 50°C на 9 м. Кипящая вода не поднимается за поршневым насосом.

§ 48. Реальные газы.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Экспериментальные исследования свойств газов при высоких давлениях и низких температурах, выполненные в конце XIX века, показали, что уравнение состояния идеального газа даёт хорошее согласование с экспериментом лишь при температуре выше некоторого значения, вполне определенного для каждого вещества, и при не очень высоких давлениях.

В 1873 г. голландский физик Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс показал, что согласованность результатов теории и эксперимента в области низких температур и высоких давлений оказывается значительно лучшей, если учесть, что молекулы не только отталкиваются при соударениях, но ещё и притягиваются друг к другу сравнительно малыми силами на расстояниях, сравнимых с размерами молекул. Средняя сила, приложенная к молекуле, находящейся далеко от стенок, со стороны других молекул равна нулю, так как они равномерно окружают данную молекулу. Если же она приближается к стенке, все остальные молекулы оказываются по одну сторону от молекулы, и равнодействующая всех сил притяжения на неё направлена от стенки внутрь сосуда газа. Это приводит к торможению молекулы при подлёте к стенке и к уменьшению импульса силы, передаваемого стенке. В результате давление газа на стенки сосуда уменьшается по сравнению с тем, каким оно было бы в отсутствие сил притяжения между молекулами:



Ян Дидерик
Ван-дер-Ваальс
(1837–1923)

$$p = p_{\text{ид}} - |\Delta p|.$$

Уменьшение передаваемого стенке импульса одной молекулой пропорционально силе притяжения этой молекулы к другим молекулам. Эта сила притяжения пропорциональна числу ближайших молекул, к которым она притягивается, а значит – концентрации молекул.

Суммарное количество молекул, ударяющихся о стенку, тоже пропорционально концентрации. Значит, дополнительное давление (уменьшение давления по сравнению с идеальным) будет пропорционально квадрату концентрации или обратно пропорционально квадрату объёма газа (при неизменном количестве молекул):

$$|\Delta p| = \frac{a}{V^2}.$$

Тогда уравнение Клапейрона–Менделеева для одного моля газа ($p_{\text{ид}} V_{\text{ид}} = RT$) примет вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) V_m = RT. \quad (1)$$

Под объёмом идеального газа понимается объём пустот между молекулами, ведь молекулы идеального газа представляют собой абсолютно упругие частицы,

не имеющие собственного объёма. Реальные же газы имеют собственный объём, и ни при каких давлениях его нельзя свести к нулю. Например, при нормальном атмосферном давлении собственный объём молекул воздуха составляет примерно 0,1% объёма, занимаемого воздухом.

Таким образом, молекулы реального газа перемещаются не в объёме сосуда V , а в уменьшенном объёме

$$V_{\text{ид}} = V_m - b, \quad (2)$$

здесь b – так называемый запрещённый объём.

С учетом (2) уравнение (1) примет вид

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT. \quad (3)$$

Это и есть **уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа**.

От уравнения Ван-дер-Ваальса (3), написанного для одного моля газа, легко перейти к уравнению для произвольного количества вещества ν . Для этого нужно учесть, что ν молей занимает при тех же условиях объём V в ν раз больший, чем объём одного моля $V = \nu \cdot V_m$. Заменяя в уравнении (3) V_m на V/ν , получим:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) \cdot \left(\frac{V}{\nu} - b \right) = RT.$$

Умножим обе части уравнения на ν и введём обозначения:

$$a^1 = \nu^2 \cdot a, \quad b^1 = \nu b.$$

В результате приходим к уравнению Ван-дер-Ваальса, для ν молей газа:

$$\left(p + \frac{a^1}{V^2} \right) (V - b^1) = \nu RT.$$

Постоянная a^1 измеряется в $\text{Н} \cdot \text{м}^4$, а b^1 – в м^3 .

Хотя уравнение Ван-дер-Ваальса даёт лучшую согласованность теории с экспериментом, чем уравнение Клапейрона–Менделеева, но часто точность, полученная на его основе, недостаточна для решения задач современной техники. Поэтому приходится использовать уравнения состояния газа ещё более сложного вида.

Единственной теоретически обоснованной формой уравнения состояния газа является **вириальное уравнение состояния**

$$\frac{pV_m}{RT} = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots$$

где V_m – объём одного моля газа, B , C – второй, третий и т. д. вириальные коэффициенты, которые зависят от температуры и не зависят от давления и плотности газа.

При малой плотности ($V_m \rightarrow \infty$) уравнение вырождается в уравнение состояния идеального газа $pV_m = RT$ для одного моля газа. Второе, третье и т. д. слагаемые описывают поправку на неидеальность газа, обусловленную взаимодействиями его молекул.

Для представления экспериментальных данных часто употребляются различные эмпирические уравнения состояния. Одним из простейших наиболее употребительных из них является рассмотренное выше уравнение Ван-дер-Ваальса.

**Таблица 5. Критические параметры
и постоянные Ван-дер-Ваальса некоторых веществ**

Вещество	Формула	$T_{кр}, K$	$p_{кр}, MPa$	$\rho_{кр}, 10^3 \frac{кг}{м^3}$	$V_{кр}, \frac{см^3}{моль}$	$a, \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$	$b, \frac{см^3}{моль}$
Азот	N_2	126,25	3,399	0,304	92,1	0,1368	38,607
Аргон	Ar	150,65	4,86	0,531	75,2	0,1361	32,191
Бром	Br_2	584	10,3	1,18	135	0,9624	58,724
Водород нормальный	$n-H_2$	33,24	1,297	0,0310	65,5	0,02484	26,635
Гелий	He	5,20	0,229	0,0693	57,5	0,00344	23,599
Золото	Au	> 4820	-	-	-	-	-
Кислород	O_2	15478	5,081	0,41	78	0,1375	31,662
Медь	Cu	> 5390	-	-	-	-	-
Неон	Ne	44,45	2,72	0,484	41,7	0,0211	16,948
Ртуть	Hg	1763	153,5	5,3	36,5	0,5905	11,936
Хлор	Cl_2	417	7,71	0,573	124	0,6576	56,202
Воздух	-	413,8	3,77	0,35	-	1,3247	114,09
Вода	H_2O	647,30	22,12	0,32	50,3	0,5524	30,413
Углерода двуокись	CO_2	304,15	7,387	0,468	94	0,3652	42,792
Бензол	C_6H_6	562,6	4,92	0,304	259	1,8744	118,73
Этин (ацетилен)	C_2H_2	308,33	6,24	0,232	112	0,4442	51,338
Уксусная кислота	$C_2H_4O_2$	594,75	5,786	0,351	171	1,7829	106,83
Фенол	C_6H_6O	604,2	6,13	0,401	-	2,2926	117,69
Фуран	C_4H_4O	490,2	5,50	0,312	218	1,2737	92,592
Этиловый спирт	C_2H_6O	516	6,4	0,276	167	1,2164	84,006
Этиловый эфир	$C_4H_{10}O$	466,70	3,638	0,265	280	1,7462	133,33
Анилин	C_6H_7N	699	5,31	0,34	270	2,6837	136,82

Пример 2. Один моль водорода находится при нормальных условиях: $T_0=273 K$, $p_0=101,3 kPa$. Сравнить давления газа при изотермическом уменьшении объема в 2, 10, 100 и 500 раз, вычисленные по уравнениям Клапейрона–Менделеева и Ван-дер-Ваальса. Поправки для нормального водорода равны $a=0,0248 H \cdot м^4/моль^2$ и $b=2,66 \cdot 10^{-3} м^3/моль$.

Дано:

$\nu=1$ моль

$p_0=1,013 \cdot 10^5$ Па

$T_0=273 K$

$V_1=0,5 V_0$

$V_2=0,1 V_0$

$V_3=0,01 V_0$

$V_4=0,002 V_0$

$V_0=0,0224 м^3$

$a=0,0248$

$H \cdot м^4/моль^2$

$b=2,66 \cdot 10^{-3} м^3/моль$

Решение. Уравнения Ван-дер-Ваальса и Клапейрона–Менделеева для одного моля газа имеют вид:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2};$$

$$p_{ид} V = RT \Rightarrow p_{ид} = \frac{RT}{V}.$$

$$\text{Значит, } \frac{p}{p_{ид}} = \frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV}.$$

$$\text{В первом случае } \frac{p_1}{p_{ид1}} = \frac{V_1}{V_1-b} - \frac{a}{RTV_1};$$

$$\frac{p_1}{p_{ид1}} = 1,0014, \text{ отличается от идеального на } 0,14\%.$$

$$\text{Аналогично, } \frac{p_2}{p_{ид2}} = 1,007, \text{ отличается от идеального на } 0,7\%,$$

$$\frac{p_3}{p_{ид3}} = 1,086, \text{ отличается от идеального на } 8,6\%,$$

$$\frac{p_4}{p_{ид4}} = 2,22, \text{ отличается от идеального на } 122\%.$$

Видно, что для первых двух случаев различие в результатах, полученных с помощью уравнений Клапейрона–Менделеева и более сложного – Ван-дер-Ваальса, ничтожно мало. При стократном сжатии разница составляет уже около 10%, и её следует учитывать в инженерной практике, а при сжатии в 500 раз различие более, чем вдвое! Причём водород по свойствам близок к идеальному газу. Если же вычисления произвести для азота или кислорода, то отличия будут значительно более существенные. Например, для азота, отношение давлений $p/p_{ид}$ примерно в 2,7 раза больше, чем для водорода, если сжимать при той же температуре в 500 раз. —

§ 49. Изотермы реального газа.

Критическое состояние вещества

Изотермы реального газа. При температурах выше критической свойства вещества достаточно хорошо описываются уравнением Ван-дер-Ваальса, а при не очень больших давлениях и уравнением Клапейрона–Менделеева. Изотерма при этих температурах мало отличается от гиперболы.

При низких же температурах появляется горизонтальный участок на графике зависимости давления от объёма при постоянной температуре (рис. 7). Это связано с тем, что при изотермическом сжатии в состоянии, соответствующем точке *B*, пар становится насыщенным, и при дальнейшем сжатии излишек пара конденсируется, а давление насыщенного пара остаётся неизменным.

В состоянии, соответствующем точке *C*, весь пар превращается в жидкость, и далее давление резко возрастает с уменьшением объёма, т. к. жидкость малосжимаема.

При повышении температуры концентрация и давление насыщенного пара растут, т. к. возрастает доля энергичных молекул в жидкости, способных разорвать узы молекулярных связей. В жидкое состояние всё вещество перейдет при большем объёме, чем в случае низкой температуры, ибо при нагревании жидкость расширяется. Таким образом, чем выше температура, тем короче полочка *BC* (разница объёмов между насыщенным паром и жидкостью).

Наконец, при критической температуре исчезает граница между паром и жидкостью. Изотерма только искривляется в районе критического объёма и давления.

Опишем подробнее экспериментально полученную изотерму реального газа в области фазовых переходов. Чтобы получить изотерму опытным путём, нужно поместить газ в сосуд, закрытый поршнем, где поддерживается постоянная температура. К нижней части сосуда подключим манометр (рис. 5). Вдвигая медленно поршень, нужно делать одновременные отсчёты давления и объёма. На рис. 6 изображены результаты подобного опыта для азота при температуре $T=110$ К (критическая температура для азота 126 К), p_n – давление насыщенного пара.

В начале с уменьшением объёма давление газа растёт, причём ход изотермы хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Однако, начиная с объёма V_1 , давление в сосуде перестаёт меняться. Вместо завитка 1-4-3-2, соответствующего решению уравнения Ван-дер-Ваальса (представляющего собой кубическую гиперболу на графике диаграммы p - V), на экспериментальной изотерме получается прямолинейный участок 1-2. Вещество при этом разделяется на две фазы: жидкую и газообразную – насыщенный пар. По мере уменьшения объёма всё большая часть вещества конденсируется, причём конденсация происходит при постоянном давлении насыщенного пара p_n . При значении объёма V_2 процесс конденсации заканчивается, вещество становится однородным (жидким), дальнейшее уменьшение объёма приводит к быстрому росту давления, который примерно следует решениям уравнения Ван-дер-Ваальса (так что оно описывает не только реальный газ, но и процесс сжатия жидкости).

Участок 3-4 (пунктирная линия) не может реализоваться ни при каких условиях. На участке 1-4 и 2-3 вещество в отношении зависимости давления от объёма ведёт себя нормально, но для реализации этих состояний нужны специальные условия, поскольку они не вполне устойчивы. Достаточно, например, попадания в пар или жидкость пылинки, и вещество распадается на две фазы. Подобные, не совсем устойчивые, состояния называются **метастабильными**. Вещество в состояниях 1-4 называется **пересыщенным (переохлажденным) паром**, а в состояниях 2-3 – **перегретой жидкостью**. Пересыщенный пар может наблюдаться, например, в атмосфере, что играет большое значение в эволюции облаков.

Итак, на диаграмме p - V можно выделить 4 области (рис. 7):

1) выше критической изотермы AKE вещество находится в газообразном состоянии при любых давлениях, даже при сближении молекул вплотную. Если открыть сосуд, то вещество моментально разлетится на отдельные молекулы, так как недостаточно энергии притяжения, чтобы молекулы удерживались друг около друга;

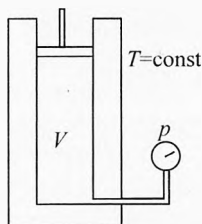


Рис. 5. Получение зависимости $p(V)$

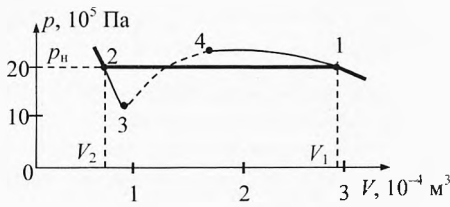


Рис. 6. Изотерма реального газа

2) ниже части критической кривой AK и выше пунктирной KBM вещество находится в состоянии ненасыщенного (перегретого) пара, который отличается от «надкритического» состояния тем, что при изотермическом сжатии его можно перевести в жидкое состояние;

3) область, ограниченная кривой $MBKCN$ соответствует равновесным состояниям жидкости и насыщенного пара;

4) наконец, область слева от $NCKE$ соответствует жидкому и твёрдому состояниям вещества.

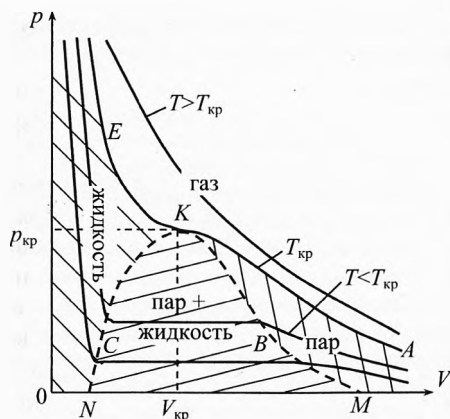


Рис. 7. Изотермы реального газа

Критическое состояние вещества. Состояние, соответствующее точке K (рис. 7) при температуре $T_{кр}$, называется критическим состоянием (критическая точка). В этом состоянии исчезают различия в физических свойствах между жидкостью и паром, находящимся с ней в динамическом равновесии. Температуру, давление, плотность и объём вещества в этом состоянии называют критическими. В табл. 5 приведены критические параметры некоторых веществ. Поскольку критический объём зависит от количества вещества, то он приводится для одного моля вещества. Существование критической температуры предсказал в 1860 г. Д. И. Менделеев.

При увеличении температуры возрастает плотность насыщенного пара (кривая MK) и уменьшается плотность жидкости (кривая NK).

Таблица 6. Зависимость плотности воды и насыщенного водяного пара от температуры

Температура, °C	Плотность, кг/м ³	
	вода	пар
15	1000	0,013
50	998	0,083
100	960	0,597
200	866	7,84
300	700	46,9
374	320	320

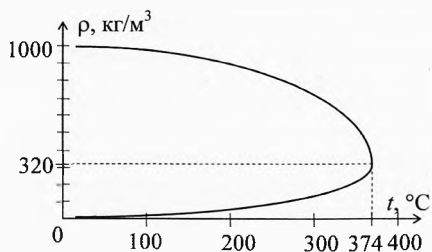


Рис. 8. Плотность воды и насыщенного пара

В табл. 6 и на графике (рис. 8) приведены значения плотности воды и её насыщенного пара вплоть до критической температуры. Из таблицы видно, что при критической температуре 374°C плотность жидкости становится

равной плотности насыщенного пара. Различие между паром и жидкостью исчезает.

Термины «газ» и «пар» возникли в те времена, когда считалось, что пар может быть превращен в жидкость, а газ нет.

После того как все газы были сконденсированы, предварительно охлажденные до температуры ниже критической, то не осталось особых оснований для двойственной терминологии. Пар и газ – это одно и то же состояние вещества (в виде отдельных молекул или атомов). Теперь, когда говорят о паре какого-либо вещества, то обычно имеют в виду, что его температура ниже критической и изотермическим сжатием пар можно превратить в жидкость (или твердое тело).



Михаил Петрович
Авенариус
(1835–1895)

Эксперименты по изучению критического состояния вещества впервые выполнил в 1863 г. русский физик М. П. Авенариус. Прибор Авенариуса для наблюдения критического состояния вещества имеется почти в каждой школе. Он состоит из воздушной ванны и находящейся внутри неё стеклянной ампулы с жидким эфиром (рис. 9).

Объём ампулы равен критическому объёму для эфира, налитого в неё. Пространство над жидким эфиром заполнено его насыщенными парами. Для опыта выбран эфир, так как он имеет сравнительно невысокое критическое давление (35,9 атм) и небольшую критическую температуру (193,5°C).

Электроплиткой или спиртовкой нагревают воздушную ванну. За состоянием эфира наблюдают через стеклянное окошко в приборе.

При комнатной температуре отчетливо видна граница между жидкостью и паром. При повышении температуры близко к критической объём жидкого эфира увеличивается, а граница раздела жидкость – пар становится неустойчивой. Когда температура достигает критической граница исчезает совсем. При дальнейшем нагревании вещество остаётся прозрачным, равномерно заполняющим весь объём ампулы. Затем убирают нагреватель и ампула охлаждается.

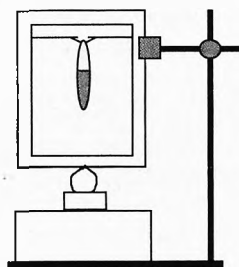


Рис. 9. Нагрев ампулы
с жидким эфиром

При охлаждении ниже критической температуры в ампуле появляется густой туман (заполняющий всю ампулу). Это образуются капельки жидкости, которые сливаются вместе, и опять возникает граница раздела между жидкостью и паром.

В чем суть понятия *критической температуры* и *критического состояния* вещества? В том, что при постоянной температуре ниже критической газ можно превратить в жидкость сжатием, а выше критической ни при каких давлениях этого сделать нельзя. В первом случае, если понизить давле-

ние, то вещество останется в жидком состоянии, а во втором при понижении давления вещество сразу займет весь предоставленный объём.

✎ **Пример 3.** Вычислить давление насыщенных паров воды при температурах $t_1=200^\circ\text{C}$ и $t_2=300^\circ\text{C}$ и $t_{\text{кр}}=374^\circ\text{C}$, если известно, что плотность насыщенного пара при этих температурах соответственно равна $\rho_1=7,84 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2=46,9 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{кр}}=320 \text{ кг/м}^3$.

→ **Решение.** Будем считать водяной пар достаточно разреженным, при этих температурах и воспользуемся уравнением состояния идеального газа $pV=(m/M)RT$. Учитывая, что плотность вещества равна $\rho=m/V$, получим:

$$p = \frac{\rho RT}{M}.$$

$$p_1 = \rho_1 RT_1 / M; \quad p_1 = 7,84 \cdot 8,31 \cdot 473 / 0,018 = 1,71 \text{ МПа} = 16,9 \text{ атм.}$$

$$p_2 = \rho_2 RT_2 / M; \quad p_2 = 46,9 \cdot 8,31 \cdot 573 / 0,018 = 12,4 \text{ МПа} = 122 \text{ атм.}$$

$$p_{\text{кр}} = \rho_{\text{кр}} RT_{\text{кр}} / M; \quad p_{\text{кр}} = 320 \cdot 8,31 \cdot 647 / 0,018 = 95,6 \text{ МПа} = 943 \text{ атм.} \quad \leftarrow$$

Примечание. Проанализируем полученные результаты. Для температуры 200°C результат вполне удовлетворительный, газ при таком давлении можно считать достаточно разреженным. При температуре 300°C собственный объём молекул насыщенного пара составляет около 5% от объёма, занимаемого им. В этом случае уже будет сказываться неидеальность газа (пара), но в первом приближении результат можно считать удовлетворительным. Правда, ответ следует округлить в меньшую сторону: p_2 находится в интервале 100 – 120 атм. При критической температуре наши расчёты очевидно не верны, ибо собственный объём молекул насыщенного пара составляет в этом случае 1/3 объёма занимаемого паром, т.к. по условию $\rho_{\text{кр}}=320 \text{ кг/м}^3$. Действительно, по табл. 5 находим, что критическое давление для воды $p_{\text{кр}}=22,12 \text{ МПа}$. Это в 4,3 раза меньше полученного нами результата. Чтобы получить более правдоподобный результат в третьем случае, следует воспользоваться уравнением Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right) \cdot \left(\frac{V}{v} - b\right) = RT, \quad \frac{v}{V} = \frac{m}{V \cdot M} = \frac{\rho}{M}; \Rightarrow p_{\text{кр}} = \frac{\rho_{\text{кр}} RT_{\text{кр}}}{M - \rho_{\text{кр}} b} - \frac{\rho_{\text{кр}}^2 a}{M^2};$$

$$p_{\text{кр}} = \frac{320 \cdot 8,31 \cdot 647}{0,018 - 320 \cdot 3,04 \cdot 10^{-5}} - \frac{320^2 \cdot 0,5524}{0,018^2} \approx 33,4 \text{ МПа} = 330 \text{ атм.}$$

§ 50. Вода – необычайное вещество

На Земле существуют огромные запасы воды, которая обладает жизненно важными свойствами. Она имеется в большем изобилии, чем любое

другое вещество. Одно из многих благоприятных свойств воды заключается в том, что она встречается как газ (водяной пар), как жидкость (вода) и как твёрдое тело (лёд) – всё это в пределах земных температур. Кроме того, тысячи разных веществ, необходимых людям, животным и растениям, должны транспортироваться посредством какой-нибудь жидкости, например крови или растительного сока. Для этой цели вода идеальна, так как она растворяет больше веществ, чем любая другая жидкость.

Необычайным является также особенность замерзания воды. Охлаждаясь в озерах, реках и морях, она становится плотнее и перемещается вниз. Благодаря этому, менее плотная теплая вода поднимается вверх. Но когда температура воды достигает 4°C и понижается до точки замерзания, то происходит обратный процесс, то есть плотность воды уменьшается(!) и вверх поднимается более холодная вода. Превратившись в лёд, она держится на поверхности (плотность льда на 10% меньше плотности жидкой воды!). Лёд действует как изолятор и препятствует дальнейшему замерзанию воды. Ещё больше уменьшает скорость нарастания льда снег, выпадающий на лёд с атмосферы, что защищает подводную жизнь. Если бы лёд был плотнее воды (ведь у многих веществ плотность в твёрдом состоянии больше, чем в жидком), то каждую зиму всё больше и больше льда опускалось бы на дно, где наступающим летом солнечное излучение не могло бы растопить его. Большая часть воды в реках, озерах и океанах стала бы сплошным льдом. Земля превратилась бы в суровую, неблагоприятную для жизни планету.

Таблица 7. Зависимость плотности дистиллированной воды от температуры при нормальном давлении в интервале от 0 до 16°C

$t, ^{\circ}\text{C}$	Плотность, кг/м^3	$t, ^{\circ}\text{C}$	Плотность, кг/м^3
0	999,841	9	999,782
1	999,900	10	999,701
2	999,941	11	999,606
3	999,965	12	999,498
4	999,973	13	999,377
5	999,965	14	999,244
6	999,941	15	999,099
7	999,909	16	998,943
8	999,849		

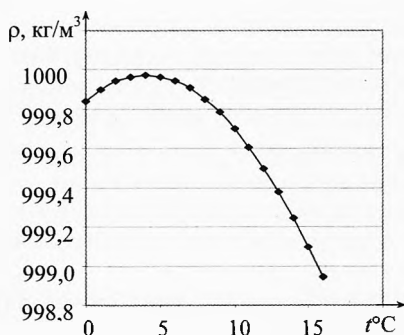


Рис. 10. Плотность воды

При температуре 4°C плотность воды максимальна и равна $999,97 \text{ кг/м}^3$. От 0 до 4°C плотность плавно возрастает, а от 4 до 8°C симметрично убывает и далее от 8 до 16°C плотность убывает, причём, чем больше температура, тем в большей степени уменьшается плотность при увеличении темпера-

туры. В интервале от 0 до 4°C плотность увеличивается на 0,013%, а в интервале от 4 до 16°C она убывает на 0,10%. С точностью 0,1% можно считать, что плотность в интервале от 0 до 16°C приблизительно постоянна.

§ 51. Влажность. Методы измерения влажности

Вода широко распространена в верхней части литосферы и нижней части атмосферы Земли.

Живые организмы содержат от 50 до 99,7% воды. В садах и огородах мы выращиваем овощи, ягоды, фрукты, в которых основным компонентом является вода: в помидорах – 95% воды, а в огурцах – 96–97%. Мозг человека на 80% состоит из воды и т.д.

Вода содержится практически в любых твёрдых, жидких и газообразных полезных ископаемых. Содержание влаги в атмосфере, сырье и готовой продукции имеет большое значение для успешной работы сельского хозяйства, промышленности, транспорта. Поэтому важен контроль за влажностью различных материалов.

Например, материалы повышенной влажности (уголь, песок и др.) в процессе зимних перевозок смерзаются настолько, что их разгрузка в местах назначения становится невозможной без применения специальных средств. А попробуйте воспользоваться зимой песком из пожарного ящика, стоящего во дворе какой-нибудь конторы! Его засыпали летом и скорее всего не прокалили и не укрыли пленкой. Как важен контроль влажности при изготовлении теста для блинов, пельменей, хлебобулочных изделий! При изготовлении кирпичей влажность глиняного бруса, из которого делают кирпич-сырец, должна находиться в узком интервале. Если влаги будет больше необходимой, кирпичи потеряют форму, если меньше, то будет трудно выдавливать брус и нарезать кирпичи. Кирпич-сырец нужно подсушить до влажности, при которой его можно помещать в обжиговую печь.

Исключительно важен контроль влажности зерна и других сельскохозяйственных продуктов, а также воздуха в хранилищах стройматериалов, произведений искусства и др.

Существуют десятки методов измерения влажности.

Обычно для жидких и твёрдых материалов используются одни методы, а для газов – другие.

Для твёрдых и жидких материалов вводится понятие абсолютной и относительной влажности.

Относительной влажностью жидкого или твёрдого тела называется скалярная величина, характеризующая содержание свободной воды в теле. Относительная влажность равна отношению массы свободной воды в теле к общей массе этого жидкого (твёрдого) тела:

$$W_{\text{отн}} = \frac{m_{\text{в}}}{m}.$$

Например, если говорят, что в огурце 96% воды, то речь идёт об относительной влажности. То есть в огурце 4% составляет сухая часть вещества (клетчатка, витамины и пр.), $m_0 = 0,04m$, и 96% воды, $m_{\text{в}} = 0,96m$.

Относительная влажность глиняного бруса, выходящего из пресса при изготовлении кирпичей, должна быть примерно 18–20%, а подсушенного перед помещением его в обжиговую печь – 8–10%.

Следует отметить, что содержание химически связанной, так называемой конституционной воды, выделяющейся только при химическом разложении, а также воды, входящей в состав ряда кристаллических веществ, не входит в понятие влажности.

То есть, при измерении влажности имеют в виду воду, которую можно испарить или отжать.

Вопрос 1. Рассказывают, что руководитель компании «Боинг» любил предлагать своим сотрудникам следующую задачу.

Лежит куча огурцов. Её масса $m_1=100$ кг. Относительная влажность $W_1=98\%$. Огурцы полежали на солнце, и часть воды из них испарилась. Относительная влажность огурцов стала равной $W_2=96\%$. Чему стала равна масса этой кучи огурцов?

Те сотрудники, которые за 15 минут не могли решить эту задачу, увольнялись либо лишались премии. Проверь себя, дорогой читатель.

✓ **Ответ.** Масса огурцов стала равной $m_2=50$ кг.

Для измерения влажности жидких и твёрдых тел разработано много приборов, где используются различные методы измерения:

Приборы высокочастотной влагометрии, в которых, как правило, измеряется электроёмкость конденсатора при заполнении его исследуемым веществом (влажность материала влияет на электроёмкость конденсатора). Эти приборы работают на частотах от 1 кГц до 30 МГц.

Измерение влажности сверхвысокочастотными методами. Эти приборы работают на частотах от 30 МГц и выше. Принцип измерения СВЧ-методами заключается в измерении параметров прошедшей или отражённой волны, предварительно собранной в узкие пучки с помощью передающей и приёмной антенн, после взаимодействия с материалом.

Влагомеры с использованием инфракрасного излучения. В ИК-методах используется зависимость интенсивности отражённого ИК-излучения от влажности отражающего материала.

Влагомеры, использующие явление ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Сущность метода ЯМР заключается в том, что при определенных условиях, в результате переориентации ядерных спинов, вещество избирательно, на фиксированной частоте поглощает энергию электромагнитного поля. Эта частота зависит от свойств ядер и значения внешнего магнитного поля.

Таким образом, изменяя значение магнитного поля, можно снимать спектр ЯМР и определить, какие ядра содержатся в образце.

Количество поглощаемой энергии пропорционально числу ядер, содержащихся в образце, в частности, для протонов, входящих в состав воды. Для веществ, не имеющих других протонов, по интенсивности поглощения энергии можно судить об их влажности.

Нейтронные влагомеры. В состав нейтронных влагомеров как обязательные элементы входят источник быстрых нейтронов и детекторы медленных нейтронов. Быстрые нейтроны ($E_0 \approx 3$ МэВ), вылетая из портативного источника и попадая на влажный образец, тормозятся наиболее интенсивно протонами (ядрами атомов водорода). Чем выше влажность материала, тем с большей концентрацией будет облако медленных тепловых нейтронов ($E_n \approx 0,025$ эВ) вокруг образца и прибора. Детекторы регистрируют концентрацию медленных нейтронов, которая прямо пропорциональна влажности.

Существуют и другие методы измерения влажности твёрдых и жидких тел. Следует отметить, что в реальных производственных условиях трудно измерить достаточно точно влажность какого-либо материала любым из методов, т. к. кроме влажности на показания прибора влияет много факторов (температура, химический состав, форма поверхности и др.). Слаба воспроизводимость результатов даже приборами, использующими один метод, не говоря уже о разных. То есть, измеряя влажность одного и того же тела одним и тем же прибором несколько раз, как правило, наблюдается заметный разброс показаний влагомера. Как показывает производственная практика, влагомеров высокой точности практически не существует.

Поэтому в каждом конкретном случае нужно выбирать приборы наиболее подходящего метода и конструкции.

Замечательно, что некоторые методы: СВЧ-, ИК-, нейтронные влагомеры – позволяют контролировать влажность материала мгновенно (непрерывно) бесконтактным способом, что очень важно во многих технологических процессах.

§ 52. Влажность воздуха

Влажность воздуха – это наличие в воздухе водяного пара. Его главные источники – испарение с поверхности океанов, морей, водоемов, почвы, растений, животных, градиен тепловых электростанций и др.

Образовавшийся водяной пар переносится вверх турбулентностью и конвекцией, а по горизонтали – ветром. Под влиянием различных процессов водяной пар конденсируется, образуя туманы, облака, осадки (дождь, снег, град), росу, иней и т. д.

Для количественной оценки влажности воздуха используется несколько величин:

1) *давление водяного пара*, представляет собой парциальное давление водяных паров в атмосфере; обозначим его p . Измеряется в единицах давления – паскалях (Па). Устаревшее название – упругость водяного пара;

2) *абсолютная влажность воздуха*, представляющая собой плотность водяных паров в атмосфере, ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$, $\text{г}/\text{м}^3$);

3) *относительная влажность воздуха* – степень насыщения воздуха водой при данной температуре.

Относительная влажность воздуха – это скалярная величина, характеризующая степень насыщения атмосферы водяными парами. Относительная влажность воздуха равна отношению давления паров, имеющихся в атмосфере, к давлению насыщенных паров при данной температуре*:

$$\varphi = \frac{p}{p_n},$$

где φ – относительная влажность в частях от единицы, p_n – давление насыщенных паров при данной температуре.

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\%.$$

Здесь относительная влажность измеряется в процентах от 100%.

4) используется также понятие *дефицит влажности* – представляющее собой разность между давлением насыщенных паров и имеющихся при данной температуре:

$$d = p_n - p \text{ (Па)};$$

5) существует понятие *массовая доля влаги* (устаревшее – удельная влажность), показывающая, какую долю составляет водяной пар к массе влажного воздуха в том же объёме:

$$q = \frac{m_n}{m},$$

где q – массовая доля влаги, m_n – масса пара, m – масса влажного воздуха в том же объёме;

6) *массовое отношение влаги* (устаревшее – отношение смеси), показывающее, какую долю составляют по массе водяные пары от массы сухого воздуха в том же объёме:

$$f = \frac{m_n}{m_c},$$

где f – массовое отношение влаги, m_n – масса водяных паров, m_c – масса сухого воздуха в том же объёме.

Приборы для измерения влажности воздуха называются гигрометрами и психрометрами. В них используется зависимость какого-либо параметра чувствитель-

* Обратим внимание на то, что относительная влажность для жидкостей, твёрдых тел и даже газов, определяемая как отношение массы влаги к общей массе тела, существенно отличается от относительной влажности воздуха. В случае воздушной атмосферы в сосуде, строго говоря, измеряется не влажность воздуха, а влажность в сосуде, которая не зависит от того, есть ли воздух в сосуде или нет. Но поскольку влага в воздушной атмосфере имеет большое значение для процессов, в том числе и в жизни людей, то содержание влаги в атмосфере Земли называется влажностью воздуха.

ного к влажности элемента. Например, в волосяном гигрометре используется зависимость упругих свойств обезжиренного волоса от относительной влажности.

В метеорологии влажность воздуха характеризуется также *точкой росы* (τ) – температурой, при которой водяные пары, содержащиеся в воздухе, становятся насыщенными. При понижении температуры влажного воздуха ниже точки росы, избыточное количество воды выпадает в виде росы. Понятно, что при различных давлениях содержащегося в воздухе водяного пара точка росы достигается при разных температурах.

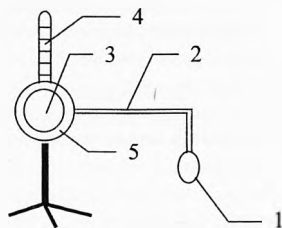


Рис. 11. Гигрометр Ламбрехта

Точку росы можно определить с помощью гигрометра Ламбрехта (рис. 11). Его основной частью является металлический сосуд в форме цилиндра 3, ось которого занимает горизонтальное положение. Одно основание цилиндра снаружи сделано блестящим. Внутри цилиндра входит трубка 2, которая присоединяется к какому-либо воздухоподводящему устройству, например к резиновой груше 1.

Внутри цилиндра наливают эфир. Продувая через эфир воздух, ускоряют его испарение. Испаряясь, эфир охлаждается и охлаждает цилиндр. Когда температура цилиндра становится ниже температуры точки росы, его поверхность «запотевает», так как наружный воздух вблизи цилиндра охлаждается, а пар в нём становится пересыщенным и конденсируется на цилиндр. Для измерения температуры внутри цилиндра вставляют термометр 4. Чтобы момент выпадения росы был заметнее, на цилиндр надевают блестящее кольцо 5, изолированное от него прокладкой.

Стандартным (образцовым) прибором для измерения относительной влажности воздуха является психрометр Августа. Его изобрёл немецкий физик и изобретатель Август Эрнст Фердинанд (1795–1870) в 1828 г. Психрометр Августа состоит из двух термометров (рис. 12). Резервуар одного из них покрыт батиновым мешочком, опущенным в воду. Вода испаряется, и, благодаря этому, термометр охлаждается. Другой (сухой) термометр показывает температуру воздуха. Чем меньше влажность воздуха, тем интенсивнее испарение и тем больше разность показаний сухого и влажного термометров. По специальной психрометрической таблице определяют влажность воздуха.

Имеется много других методов измерения влажности воздуха. Интенсивно развиваются дистанционные методы (в том числе с борта самолетов и метеорологических искусственных спутников Земли) лазерными и радиометрическими приборами.

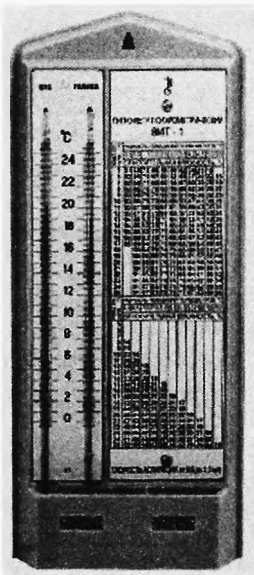


Рис. 12. Психрометр Августа

§ 53. Влага в воздухе.

Распределение воды на Земле

В атмосфере Земли содержится около $1,24 \cdot 10^{16}$ кг водяного пара, составляющего 0,2% от массы воздуха Земли. Сконденсировавшись, он мог бы образовать «слой осажженной воды» 2,4 см. Значение абсолютной влажности резко убывает с понижением температуры. Поэтому для атмосферы типично уменьшение плотности водяного пара от экватора к полюсам и быстрое её уменьшение по мере увеличения высоты над Землей. У её поверхности среднее содержание водяного пара – 2,6%, а в полярных районах – 0,2%.

От подстилающей поверхности до высоты 1,5 – 2 км среднее содержание водяного пара уменьшается вдвое. Выше тропосферы и вплоть до 30 км массовая доля влаги $q \approx 2,6 \cdot 10^{-6}$, а относительная влажность обычно не превышает нескольких процентов. Лишь изредка влажность воздуха в стратосфере может быть гораздо выше. Так, на высотах 17–32 км иногда образуются перламутровые (стратосферные) облака, что свидетельствует о насыщенных парах.

Вода в атмосфере при отрицательных температурах может быть газообразной, жидкой (переохлажденной вплоть до -40°C) и твёрдой (лёд). Важной особенностью водяного пара является то, что давление насыщенных паров воды над переохлажденной водой больше, чем надо льдом. Эта разность максимальна при температуре $t = -12^{\circ}\text{C}$ ($\Delta p = 26,9$ Па). Эта особенность играет большую роль в эволюции переохлажденных облаков, способствует переконденсации воды с капель на кристаллы, чем облегчается образование частиц осадков.

Фазовые переходы воды сопровождаются выделением или поглощением тепла, поэтому они играют огромную роль в термодинамике атмосферы. Поскольку водяной пар имеет в инфракрасной области спектра несколько полос поглощения, влажность воздуха сильно влияет на тепловой баланс атмосферы. Наиболее интенсивные полосы поглощения находятся на длинах волн 5,5–7,0 мкм и $\lambda > 17$ мкм. Заморозки вероятнее в звездную, а не в пасмурную ночь.

Для хорошего самочувствия необходимо, чтобы относительная влажность была в пределах от 40 до 60%. При меньшей влажности высыхают слизистые оболочки дыхательных путей. При высокой влажности уменьшается испарение воды с поверхности тела, и тем самым затрудняется терморегуляция человеческого организма.

К сожалению, во многих районах России (Ленинградской, Новгородской областях, Волго-Вятском районе и др.) большую часть года влажность высока и многие люди тяжело её переносят. Порой даже приходится уезжать в районы с меньшей влажностью. С другой стороны, в наших бетонных домах влажность, как правило, ниже нормы, особенно зимой. Это обусловлено большой поглощающей способностью бетона по отношению к водяному пару.

Многие люди, особенно старики, чувствительные к дефициту влажности, ставят баночки с водой на батареи отопления для нормализации влажности воздуха в квартире.

Недалеко от Ташкента на одном из домов у дороги красуется лозунг «Вода – это жизнь». Воистину, вся наша жизнь, каждый вздох связаны с водой. А сколько воды на Земле? Ответ в таблице 8.

Таблица 8. Распределение воды на Земле

Водные объекты	Масса воды, кг
Океаны и моря	$1,3 \cdot 10^{21}$
Полярный лёд	$3,5 \cdot 10^{18}$
Озера	$2,5 \cdot 10^{17}$
Подземные озера	$2,5 \cdot 10^{17}$
Реки	$5 \cdot 10^{16}$
Болота	$6 \cdot 10^{15}$
Снежный покров	$2,5 \cdot 10^{14}$
Полный запас	$1,3 \cdot 10^{21}$

Запас воды в основном сосредоточен в океанах и морях и составляет чуть более 0,02% от всей массы Земли (то есть средняя относительная влажность Земли равна 0,02%). Масса воды на Земле в 200 раз больше массы земного воздуха*.

Общее количество воды, выпадающей за один год в виде осадков для всего земного шара, оценивается в $5 \cdot 10^{17}$ кг, что в 40 раз больше общего содержания воды в атмосфере. То есть, фигурально выражаясь, весь водяной пар, находящийся в атмосфере Земли, выпадает в виде осадков 40 раз в год.

В целом годовой слой осадков, равный годовому испарению, составляет 92,8 см/год, причём на сушу из общего количества осадков выпадает 22%, а на океан, составляющий 70,8% поверхности Земли, выпадает 78% осадков. Испарение с поверхности суши составляет 14% общего испарения, а остальные 86% – с поверхности океана.

Пример 4. Доказать, что относительную влажность воздуха можно определить отношением плотности паров в атмосфере к плотности насыщенных паров при той же температуре.

Решение. Воспользуемся определением плотности и уравнением Клапейрона–Менделеева для насыщенного и ненасыщенного паром воздуха:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad \rho = \frac{m}{V}; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\rho RT}{M}.$$

Аналогично, для насыщенного пара: $p_n = \frac{\rho_n RT}{M}$.

Из этих уравнений следует: $\frac{p}{p_n} = \frac{\rho}{\rho_n}$.

* Если по каким-либо причинам температура на Земле повысится до 400°C (примерно как на Венере), то большая часть воды из океанов и других источников испарится и атмосферное давление возрастет примерно до 200 атмосфер. Это ужасно! Между прочим, атмосферное давление на поверхности Венеры почти в 100 раз больше атмосферного давления на Земле.

Учитывая, что относительная влажность воздуха по определению равна

$\varphi = \frac{p}{p_n}$, получим требуемое соотношение:

$$\boxed{\varphi = \frac{\rho}{\rho_n}}.$$

Во многих случаях при расчётах массы водяных паров формула относительной влажности воздуха $\varphi = \frac{\rho}{\rho_n}$ даже более удобна, но нужно иметь в виду, что ρ и ρ_n должны быть измерены при одной и той же температуре, как впрочем и давления пара p и p_n .

Пример 5. В помещение нужно подать $V_1=20000 \text{ м}^3$ воздуха при $t_1=18^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\varphi_1=50\%$, забирая его с улицы при $t_2=10^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\varphi_2=60\%$. Сколько воды надо дополнительно испарить в подаваемый воздух? Плотность насыщенных водяных паров при $t_2=10^\circ\text{C}$ равна $\rho_{2n}=9,4 \text{ г/м}^3$, при температуре $t_1=18^\circ\text{C}$ — $\rho_{1n}=15,4 \text{ г/м}^3$.

Решение. В кондиционере воздух увлажняется и подогревается при постоянном давлении, значит, его объём увеличивается. Поэтому с улицы надо взять менее 20000 м^3 холодного воздуха. В него нужно добавить $m(\text{кг})$ воды $m=m_1-m_2$, где m_1 — масса водяного пара, который должен быть в воздухе, m_2 — масса водяных паров, имевшихся во взятом с улицы воздухе:

$$m_1 = \rho_1 V_1; \quad m_2 = \rho_2 V_2.$$

Согласно закону Гей-Люссака, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1}$.

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, и учитывая, что $\rho_1 = \rho_{1n} \cdot \varphi_1$ и $\rho_2 = \rho_{2n} \cdot \varphi_2$, получим:

$$m = \rho_{1n} \varphi_1 V_1 - \rho_{2n} \varphi_2 \frac{V_1 T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad m = V_1 \left(\rho_{1n} \varphi_1 - \rho_{2n} \varphi_2 \frac{T_2}{T_1} \right);$$

$$m = 20000 \cdot \left(15,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 - 9,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 \cdot \frac{283}{291} \right) \approx 44 \text{ кг.}$$

Ответ. Нужно испарить 44 кг воды.

Пример 6. В цилиндре под поршнем находится водяной пар массой $m=0,4 \text{ г}$ при температуре $T_0=290 \text{ К}$. Этот пар занимает объём $V_0=40 \text{ л}$. Как можно сделать пар насыщенным?

Решение. I способ. Можно изотермически сжать газ, пока он не станет насыщенным. По справочнику находим, что при температуре 290 К или 17°C плотность насыщенных паров воды равна $\rho_n=14,5 \text{ г/м}^3$.

Из определения плотности:

$$\rho_n = \frac{m}{V_n} \Rightarrow V_n = \frac{m}{\rho_n}; \quad V_n = \frac{0,4 \text{ г}}{14,5 \text{ г/м}^3} = 0,0276 \text{ м}^3 = 27,6 \text{ л} \approx 28 \text{ л}.$$

II способ. Можно изохорно охладить цилиндр, пока пары не станут насыщенными: $\rho_n = \frac{m}{V_0}; \rho_n = \frac{0,4 \text{ г}}{40 \text{ л}} = \frac{0,4 \text{ г}}{0,04 \text{ м}^3} = 10 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}.$

По справочнику находим, что такова плотность насыщающих паров при температуре 11°C .

Кроме этих двух решений существует ещё бесчисленное множество решений данной задачи. Действительно, можно добиться 100% влажности одновременным уменьшением объёма и понижением (или даже повышением) температуры. Можно увеличивать объём, но в ещё большей степени понижать температуру. —

✓ **Ответ.** Можно изотермически сжать до 28 л или изохорно охладить до 11°C . Можно добиться насыщения одновременным изменением объёма и температуры. Задача имеет бесконечное множество решений.

✎ **Пример 7.** Отверстие клапана в кастрюле-скороварке закрывается грузом массы $m=14,1 \text{ г}$. Диаметр отверстия $d=2 \text{ мм}$. Определить температуру в скороварке, если известно, что давление насыщенного пара воды возрастает на 20% при повышении температуры на $\Delta t=6^\circ\text{C}$.

✎ **Решение.** Определим максимальную температуру в скороварке. Для этого выразим и вычислим температурный коэффициент давления пара, считая его неизменным на рабочем интервале температур скороварки:

$$\alpha = \Delta p / (p_n \Delta t); \quad \alpha = 0,2 / (6^\circ\text{C}) = 1 / (30^\circ\text{C}) \approx 0,033^\circ\text{C}^{-1},$$

где $\Delta t = t - t_0$, t — температура в скороварке при давлении пара p , тогда $p_n = 101,3 \text{ кПа}$ — давление насыщающих паров воды при $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Учитывая это, запишем:

$$\alpha = \Delta p / (p_n (t - t_0)) \Rightarrow t = t_0 + \Delta p / (\alpha p_n). \quad (4)$$

Теперь найдём избыточное давление пара Δp , которое может удержать контрольный груз m . На него сверху давит атмосферный воздух. Будем считать его давление нормальным $p_0 = p_n = 101,3 \text{ кПа}$. Снизу на груз давит пар. Эту разность давлений должен уравновесить груз за счёт своего веса

$$\Delta p = p - p_n \leq mg/S.$$

Учитывая, что площадь основания груза $S = \pi d^2 / 4$, получим:

$$\Delta p \leq 4mg / (\pi d^2). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), окончательно получим: $t_{\max} = t_0 + 4mg / (\pi d^2 \alpha p_n).$

$$t_{\max} = 100 + 4 \cdot 14,1 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 / (3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,033 \cdot 101300) \approx 113^\circ\text{C}.$$

Температура может быть и меньше, тогда груз будет частично давить на свое гнездо. ←

✓ **Ответ.** Температура в скороварке не более 113°C при нормальном атмосферном давлении.

Примечание. При нагревании скороварки клапан будет периодически приоткрываться и при температуре меньшей 113°C , и часть пара с воздухом будет выходить. Температура достигнет 113°C только тогда, когда весь воздух выйдет, и в скороварке останется только насыщенный водяной пар.

Упражнения

1 В теплоизолированном сосуде находится $m_{\text{л}}=1$ кг льда, температура которого $t_{\text{л}}=0^{\circ}\text{C}$. В него вливают кипяток с температурой $t_{\text{в}}=100^{\circ}\text{C}$. Определить массу влитого в сосуд кипятка, если известно, что в сосуде установилась температура $t=20^{\circ}\text{C}$.

2 Смесь, состоящую из $m_{\text{л}}=5$ кг льда и $m_{\text{в}}=15$ кг воды, находящуюся при температуре $t_1=0^{\circ}\text{C}$, нужно нагреть до температуры $t=80^{\circ}\text{C}$, впуская в него водяной пар, температура которого $t_2=100^{\circ}\text{C}$. Определить необходимую для этого массу пара. Весь впущенный пар остаётся в смеси.

3 В сосуд, содержащий $m_{\text{л}}=10$ кг льда при температуре $t_{\text{л}}=0^{\circ}\text{C}$, влили $m_{\text{в}}=3$ кг воды, температура которой $t_{\text{в}}=90^{\circ}\text{C}$. Какая установится температура? Расплавится ли весь лёд, и если не расплавится, то сколько останется льда? Теплоёмкость сосуда не учитывать.

4 В холодильнике из воды с начальной температурой $t_1=10^{\circ}\text{C}$ за 4 часа получили $m=300$ г льда при температуре $t_2=-3^{\circ}\text{C}$. Сколько отнято тепла $Q_{\text{х}}$? Какую часть составляет оно от электроэнергии $Q_{\text{э}}$, потребленной холодильником от сети, если мощность двигателя $P=70$ Вт при ПВ=100% (ПВ – продолжительность включения), т. е. при непрерывном режиме работы?

5 В цилиндре под невесомым поршнем находится $m_1=1$ кг воды с температурой $t_0=0^{\circ}\text{C}$ и кусок стали массой $m_2=1$ кг, нагретый до температуры $t_2=1100^{\circ}\text{C}$. На какую высоту поднимется поршень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Площадь сечения поршня $S=0,1$ м². Удельная теплоёмкость стали $c_2=500$ Дж/(кг·К). Удельная теплоёмкость и теплота парообразования для воды: $c_1=4200$ Дж/(кг·К), $L=2,26$ МДж/кг. Теплоёмкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь.

6 Приготовление пищи в кастрюле-скороварке идёт при температуре $t_1=120^{\circ}\text{C}$. Давление насыщенных водяных паров при такой температуре равно $p_1=2$ атм. Во сколько раз плотность пара в таких условиях больше, чем над поверхностью кипящей воды в открытой кастрюле при нормальном атмосферном давлении (рис. 13)?

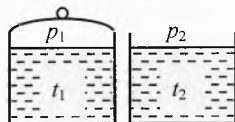


Рис. 13. Скороварка

7 Тонкая пробирка частично заполнена водой, закрыта сверху крышечкой и расположена вертикально. Начальная плотность влажного воздуха в пробирке отличается от плотности сухого атмосферного воздуха на $\Delta\rho=27$ г/м³, а давление равно атмосферному. После снятия крышки вследствие диффузии в пробирке уста-

навивается линейное изменение концентрации пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, а у верхнего открытого в атмосферу конца пробирки его концентрация в 5 раз меньше. Найти изменение среднего по объёму парциального давления сухого воздуха в пробирке после снятия крышки. Температура $t=37^{\circ}\text{C}$, давление насыщенного пара при этой температуре $p_n=47$ Тор. Атмосферное давление $p_a=760$ Тор.

8 Тонкая пробирка частично заполнена водой и расположена вертикально открытым концом в атмосферу. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации пара с его высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, а у верхнего открытого в атмосферу конца пробирки его концентрация в 3 раз меньше. Пробирку герметично закрывают крышкой и увеличивают температуру на $\Delta T=1$ К. На сколько изменится давление влажного воздуха внутри пробирки после установления равновесия по сравнению с первоначальным? Атмосферное давление $p_a=760$ Тор, начальная температура $T=300$ К, давление насыщенного пара при этой температуре $p_n=27$ Тор. Известно, что малое относительное изменение давления насыщенного пара связано с малым относительным изменением температуры формулой: $\Delta p/p=18\Delta T/T$.

9 В сосуде объёмом $V_1=31$ л находится воздух, вода и насыщенный пар. Температура в сосуде $T=373$ К, давление $p_1=2,5$ атм. При постоянной температуре объём сосуда медленно уменьшают, пока давление не станет равным $p_2=4$ атм. Определить массу воды в сосуде в конце опыта. Общая массы воды и пара в сосуде составляет $m=22$ г. Объёмом, занимаемым жидкостью, в обоих случаях пренебречь.

10 Возьмите кружку с неизвестным количеством воды. Поставьте её на электроплитку с неизвестной постоянной мощностью. Имея секундомер, лист бумаги и термометр с диапазоном измерений от 0 до 100°C , оценить, за какое время вода выкипит из кружки, только лишь доведя её до кипения.

11 До какой температуры надо нагреть алюминиевый куб, чтобы положенный на лёд куб полностью погрузился в него? Температура льда 0°C . Удельная теплоёмкость алюминия $c=836$ Дж/(кг·К). Плотность льда $\rho_n=917$ кг/м³, плотность алюминия $\rho_{ал}=2,7\cdot 10^3$ кг/м³. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3,35\cdot 10^5$ Дж/кг.

12 В закрытом с обоих концов цилиндре объёмом $V=2$ л свободно ходит невесомый тонкий поршень (рис. 14). В пространстве с одной стороны поршня вводится $m_1=2$ г воды; с другой стороны – $m_2=1$ г азота. На какой части длины цилиндра установится поршень при температуре $t=100^{\circ}\text{C}$?

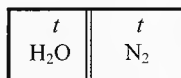


Рис. 14. Вода, пар, азот

13 При соблюдении необходимых предосторожностей вода может быть переохлаждена до температуры $t_1=-10^{\circ}\text{C}$. Сколько льда образуется из такой воды массой $m=1$ кг, если в неё бросить крупинку льда и этим вызвать замерзание воды? Какова должна быть температура переохлажденной воды, чтобы она целиком превратилась в лёд? $c_v=4,2$ кДж/(кг·К), $c_n=2,1$ кДж/(кг·К), $\lambda=335$ кДж/кг.

14 Температура воздуха 23°C , его относительная влажность 45%. Найти абсолютную влажность воздуха, если плотность насыщенных паров $\rho_n=20,6$ г/м³.

15 Днём при 20°C относительная влажность воздуха была 60%. Сколько воды в виде росы выделится из каждого кубометра воздуха, если температура ночью понизилась до 8°C ? Плотность насыщенных паров при 20°C равна $17,3$ г/м³, а при 8°C – $8,3$ г/м³.

16 Какое количество росы выпадет из $V_1=2 \text{ м}^3$ воздуха при изотермическом уменьшении его объёма в 5 раз, если температура воздуха 10°C , а относительная влажность 60%? Плотность насыщенного водяного пара при 10°C равна $9,43 \text{ г/м}^3$.

17 В цилиндре под поршнем сжимают изотермически $0,9 \text{ г}$ ненасыщенного пара ($p_n=4 \text{ кПа}$) при температуре $t=29^\circ\text{C}$. Каков будет объём пара, когда начнётся конденсация?

18 В сосуде находится воздух, относительная влажность которого при $t_1=10^\circ\text{C}$ равна $\varphi_1=60\%$. Какова будет относительная влажность φ_2 после уменьшения объёма в $n=3$ раза и нагревания до $t_2=100^\circ\text{C}$? $\rho_{n1}=9,4 \text{ г/м}^3$, $M=18 \text{ кг/кмоль}$.

19 При температуре $t_1=25^\circ\text{C}$ относительная влажность воздуха $\varphi_1=70\%$. Сколько влаги выделится из объёма $V=1 \text{ м}^3$ воздуха при понижении температуры до $t_2=16^\circ\text{C}$? Давление насыщенных паров воды: $p_{n1}=23 \text{ г/м}^3$, $p_{n2}=13,6 \text{ г/м}^3$.

20 В комнате объёмом $V=50 \text{ м}^3$ относительная влажность $\varphi_1=40\%$. Если испарить дополнительно воду массой $\Delta m=60 \text{ г}$, то относительная влажность при той же температуре будет равна $\varphi_2=50\%$. Какова абсолютная влажность воздуха?

21 Влажный воздух массой m занимает объём V , создаёт давление p , его температура T . Найти относительную влажность. Давление насыщенного пара при температуре T равно p_n .

22 На рис. 15 изображена изотерма влажного воздуха, давление его в точках 1, 2 и 3 равны p_1 , p_2 и p_3 соответственно. Определить относительную влажность воздуха в этих точках.

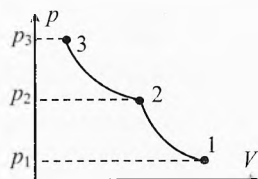


Рис. 15. Изотерма влажного воздуха

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $m_n c_n (t_n - t) = m_n \lambda + m_n c_n (t - t_n); \Rightarrow m_n = m_n \frac{\lambda + c_n (t - t_n)}{c_n (t_n - t)} \approx 1,2 \text{ кг}.$

2 $m_n = \frac{m_n \lambda + (m_n + m_n) c_n (t - t_1)}{L + c_n (t_2 - t)} \approx 3,6 \text{ кг}.$

3 Указание. Вычислить сначала, сколько выделится тепла при охлаждении воды до 0°C . Вычислить, сколько нужно тепла для плавления 10 кг льда, и сравнить эти количества теплоты.

Ответ. 0°C ; нет; растаяло $|\Delta m_n| = \frac{c_n m_n (t_n - t_1)}{\lambda} = 3,4 \text{ кг}$, осталось 66% льда.

4 $Q_x = m[c_n(t_1 - 0^\circ\text{C}) + \lambda + c_n(0^\circ\text{C} - t_2)] = 115 \text{ кДж}.$ $Q_3 = P\tau = 1 \text{ МДж}.$ $Q_x/Q_3 \approx 11\%.$

5 Поршень будет плотно прилегать к воде пока давление насыщенных паров из-за её нагревания не станет равным атмосферному, то есть пока вода не нагреется до температуры $t=100^\circ\text{C}$. После этого всё тепло, отдаваемое сталью, будет тратиться на испарение воды, то есть на преодоление энергии связи молекул и на работу «отодвиганию» атмосферы. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_2 m_2 (t_2 - t) = c_1 m_1 (t - t_0) + L m_n \Rightarrow m_n = 0,035 \text{ кг}.$$

Объём пара найдём из уравнения Клапейрона–Менделеева: $p_n V_n = \frac{m_n}{M} RT$.

Учитывая, что $p_n = p_0$ и $V_n = S \cdot h$, получим: $h = \frac{m_n RT}{M p_0 S} = 0,6 \text{ м}$.

В этом процессе поршень совершает работу по «отодвиганию» атмосферы, но это уже учтено в значении удельной теплоты парообразования воды L .

6 В открытой кастрюле у поверхности кипящей воды пар насыщенный и его давление равно атмосферному. В скороварке пар тоже насыщенный. Используя уравнение состояния $pV = \frac{m}{M} RT$ и формулу плотности $\rho = \frac{m}{V}$, получим $\rho = \frac{pM}{RT}$.

Записав это выражение для обоих случаев, получим: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = 1,9$.

7 1) Плотность сухого атмосферного воздуха: $\rho_a = \frac{p_a M_n}{RT}$, где молярная масса сухого воздуха равна $M_n = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Плотность влажного воздуха в пробирке: $\rho_1 = \frac{p_{n1} M_n + p_{в1} M_v}{RT}$, где p_{n1} и $p_{в1}$ – парциальные давления пара и воздуха в закрытой пробирке: $p_a = p_{n1} + p_{в1}$.

Учитывая, что $\Delta p = p_a - p_1$, получим давление паров воды:

$$p_{n1} = \frac{\Delta p RT}{M_n - M_n} \approx 6,3 \text{ кПа}.$$

Значит, воздух в пробирке был насыщенным ($p_n = 47 \text{ Тор} \approx 6,3 \text{ кПа}$).

Парциальное давление сухого воздуха в пробирке равно $p_{n1} = p_a - p_{в1} = 95 \text{ кПа}$.

2) Среднее парциальное давление паров воды после снятия крышки:

$$p_{n2} = \frac{p_n + p_n / 5}{2} = \frac{3 p_n}{5} = 3,8 \text{ кПа}.$$

Тогда среднее давление сухого воздуха: $p_{n2} = p_a - p_{n2} = 97,5 \text{ кПа}$.

Следовательно, изменение среднего по объёму парциального давления сухого воздуха: $\Delta p_v = p_{n2} - p_{n1} = 2,5 \text{ кПа}$.

8 1) Среднее по объёму парциальное давление паров воды в начале эксперимента: $p_{n1} = \frac{p_n + p_n / 3}{2} = \frac{2}{3} p_n = 18 \text{ Тор}$. Следовательно, парциальное давление сухого воздуха равно ($p_1 = p_a$ – давление влажного воздуха): $p_{в1} = p_1 - p_{n1} = 742 \text{ Тор}$.

2) После того как пробирку закрыли крышкой, парциальное давление сухого воздуха увеличилось за счёт увеличения температуры: $p_{в2} = (p_{в1} + \Delta p_v) = p_{в1} \cdot (1 + \Delta T / T)$.

К тому же пар стал насыщенным, то есть $p_{n2} = p_{n2} = p_n + \Delta p_n = p_n \cdot (1 + 18 \Delta T / T)$.

Значит давление влажного воздуха в пробирке в конце эксперимента:

$$p_2 = p_{n2} + p_{в2} = p_n \cdot (1 + 18 \Delta T / T) + p_{в1} \cdot (1 + \Delta T / T) \approx 773 \text{ Тор}.$$

Окончательно получим: $\Delta p = p_2 - p_1 = 13 \text{ Тор}$.

9 При температуре 373 К (100°C) давление насыщенного пара воды равно $p_n = 1 \text{ атм}$. Следовательно в первом случае парциальное давление сухого воздуха: $p_{в1} = p_1 - p_n = 1,5 \text{ атм}$, а во втором случае $p_{в2} = p_2 - p_n = 3 \text{ атм}$. Значит, что объём сосуда

уменьшился в $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_{n2}}{p_{n1}} = 2$ раза. Из уравнения Клапейрона–Менделеева для пара

$$(p_n V_2 = \frac{m_{n2}}{M_n} RT), \text{ найдём массу пара в конце опыта: } m_{n2} = \frac{M_n p_n V_2}{RT} = \frac{M_n p_n V_1}{2RT} = 9 \text{ г.}$$

Тогда масса жидкой воды в конце опыта: $m_{a2} = m - m_{n2} = 13 \text{ г.}$

10 Кружку накрыть листом бумаги и нагревать. Измерить время τ_n нагревания в интервале $\Delta t = (90 \div 95)^\circ\text{C}$. Время кипения будет равно $\tau_k \approx \tau_n \cdot \frac{L}{c\Delta t}$.

11 Указание: считать, что всё количество теплоты, выделяемое при охлаждении алюминия, идёт на расплавление льда в объёме алюминиевого куба.

Ответ. Алюминиевый куб нужно нагреть до температуры несколько выше

$t = \frac{\rho_a \lambda}{\rho_{ал} c} \approx 140^\circ\text{C}$, ибо пока он будет охлаждаться и плавить лёд, часть тепла излучается и конвектируется в пространство.

12 Так как поршень ходит свободно, то давление слева и справа одинаково $p_1 = p_2$. Вода, в отличие от азота, при 100°C может находиться в жидком и газообразном состояниях. При этом давление её насыщенных паров равно $p_n = 101,3 \text{ кПа}$. Испарится ли в нашем случае вся вода? Предположим, что вся она испарилась, тогда какой объём занял бы её насыщенный пар? Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева:

$$p_n V_n = \frac{m_1}{M_1} RT \Rightarrow V_n = \frac{m_1 RT}{M_1 p_n}; \quad V_n = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 101,3 \cdot 10^3} = 3,4 \text{ л.}$$

Это больше, чем весь объём. Значит, испарится только часть воды, и пар будет насыщенным. Стало быть, давление слева и справа равно давлению насыщенных паров воды. Вычислим теперь объём, который займет азот:

$$p_n V_2 = \frac{m_2}{M_2} RT \Rightarrow V_2 = \frac{m_2 RT}{M_2 p_n}; \quad V_2 = \frac{10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 373}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 101,3 \cdot 10^3} = 1,1 \text{ л.}$$

$$V_2/V = 1,1/2 = 0,55 = 55\%, \text{ значит } V_1/V = 45\%.$$

Ответ. Поршень расположится так, что на долю азота придётся 55% всего объёма, а на долю воды – 45%.

13 При отсутствии центров кристаллизации воду можно охладить значительно ниже 0°C . Если в эту переохлажденную воду бросить соринку или крупинку льда (центры кристаллизации), то часть воды перейдёт в твёрдое состояние, и температура смеси повысится до 0°C за счёт тепла, выделившегося при кристаллизации. Масса воды и льда в течение процесса непрерывно изменяются, а теплоёмкости у них разные, поэтому уравнение теплового баланса записать непросто.

Воспользуемся тем, что внутренняя энергия является функцией состояния и не зависит от того, каким образом тело пришло в это состояние. Проведем мысленный опыт с переохлажденной водой (рис. 16). Сначала нагреем её до температуры 0°C . При этом вода получит количество теплоты Q_1 , которая пойдёт на увеличение её внутренней энергии:

$$Q_1 = U_0 - U_1 = c_m m(t_0 - t_1).$$

Теперь вновь возьмём переохлажденную воду с температурой t_1 и бросим в неё крупинку льда. Произойдет адиабатическая кристаллизация некоторой части воды массой m_n , и температура повысится до 0°C . Теперь подадим тепло в эту

двухфазную систему, находящуюся при 0°C , до полного расплавления льда. Она получит количество теплоты:

$$Q_2 = \lambda m_{\text{л}} = U_0 - U_2,$$

где U_2 – внутренняя энергия льда с водой при температуре 0°C . Очевидно, она равна U_1 , ибо крупинка льда не изменяет внутреннюю энергию системы. Сравнивая первое и второе уравнение, видим, что $Q_1 = Q_2$ (переохлажденная вода в обоих случаях переходит разными способами в другое состояние – воду при температуре 0°C). Значит,

$$c_{\text{в}} m(t_0 - t_1) = \lambda m_{\text{л}} \Rightarrow m_{\text{л}} = c_{\text{в}} m(t_0 - t_1) / \lambda \approx 0,13 \text{ кг}.$$

Температуру переохлажденной воды, при которой, она вся превратилась бы в лёд, найдём аналогичным образом:

$$c_{\text{в}} m(t_0 - t_x) = \lambda m \Rightarrow t_x = t_0 - \lambda / c_{\text{в}}. \quad t_x = 0 - 3,35 \cdot 10^5 / 4200 = -80^\circ\text{C}.$$

Ответ. В лёд превратится около 0,13 кг воды. Для полного превращения в лёд начальная температура переохлажденной воды должна быть минус 80°C . Но реально переохладить воду до температуры -80°C невозможно.

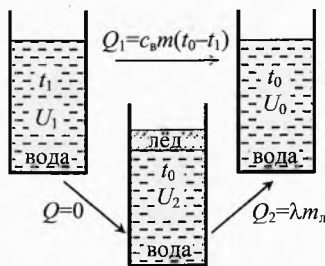


Рис. 16. Замерзание переохлажденной воды

14 $\rho_{\text{абс}} = \rho_{\text{н}} \cdot \varphi = 9,27 \text{ г/м}^3.$

15 Из определений относительной влажности и плотности:

$$\varphi_1 = \rho_1 / \rho_{\text{н}1}, \quad m_1 = \rho_1 \cdot V, \quad m_2 = \rho_{\text{н}2} \cdot V.$$

Из каждого кубометра выделится $m = m_1 - m_2 = V(\varphi_1 \cdot \rho_{\text{н}1} - \rho_{\text{н}2}) = 2,1 \text{ г росы}$.

16 В процессе изотермического сжатия после насыщения воздуха начнёт выпадать роса: $m_{\text{р}} = m_1 - m_2 = \rho_1 V_1 - \rho_{\text{н}} V_2 = \rho_{\text{н}} \varphi_1 V_1 - \rho_{\text{н}} V_1 / 5 = \rho_{\text{н}} V_1 (\varphi_1 - 0,2) \approx 7,5 \text{ г}.$

17 $V = mRT / (p_{\text{н}} M) = 31,4 \text{ (л)}.$

18 $\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{\text{н}1}}, \quad \rho_1 = \frac{m}{V_1}, \quad V_2 = \frac{V_1}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{p_2}{p_{\text{н}2}}, \quad p_2 = \frac{mRT_2}{V_2 M}, \quad p_{\text{н}2} = 101,3 \text{ кПа}.$ Решая совме-

стно, получим: $\varphi_2 = \frac{nRT_2 \rho_{\text{н}1} \varphi_1}{M p_{\text{н}2}} = 2,9\%.$

19 $\rho_1 = \rho_{\text{н}1} \varphi_1 > \rho_{\text{н}2} \Rightarrow \varphi_2 = 100\%, \quad \rho_2 = \rho_{\text{н}2}; \quad \Delta m / V = \rho_1 - \rho_2 = \varphi_1 \rho_{\text{н}1} - \rho_{\text{н}2} = 2,5 \text{ г/м}^3.$

20 $\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{\text{н}}}, \quad \varphi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{\text{н}}}, \quad \rho_1 = \frac{m}{V}, \quad \rho_2 = \frac{m + \Delta m}{V}, \Rightarrow \rho_2 = \frac{\Delta m \varphi_2}{V(\varphi_2 - \varphi_1)} = 6 \text{ г/м}^3.$

21 $p = p_{\text{возд}} + p_{\text{вод}}, \quad p_{\text{возд}} = \frac{m_{\text{возд}}}{M_{\text{возд}}} \frac{RT}{V}, \quad p_{\text{вод}} = \frac{m_{\text{вод}}}{M_{\text{вод}}} \frac{RT}{V}, \quad m = m_{\text{возд}} + m_{\text{вод}}, \quad \varphi = \frac{p_{\text{вод}}}{p_{\text{н}}}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{mRT - pVM_{\text{возд}}}{p_{\text{н}}V(M_{\text{вод}} - M_{\text{возд}})}.$$

22 На участке 1-2 пар не насыщен. Излом диаграммы свидетельствует о том, что в точке 2 пар стал насыщенным: $\varphi_2 = 100\%, \quad p_{\text{н}2} = p_{\text{н}}$. На участке 2-3 происходит изотермическое сжатие насыщенного пара ($\varphi_3 = 100\%$), пар постепенно конденсируется. В точке 1 относительная влажность: $\varphi_1 = p_{\text{н}1} / p_{\text{н}} = p_{\text{н}1} / p_{\text{н}2}$. Давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления водяного пара: $p_1 = p_{\text{н}1} + p_{\text{в}1}$. По закону Бойля–Мариотта для влажного воздуха и для водяного пара в точках 1 и 2: $p_1 V_1 = p_2 V_2; \quad p_{\text{н}1} V_1 = p_{\text{н}2} V_2$. Решая совместно эти уравнения, получим: $\varphi_1 = p_1 / p_2$.

Глава 7. Твёрдые тела

Для меня Бог ещё не существует, но существует созидательная сила, постоянно стремящаяся создать путём эволюции некий исполнительный орган божественного знания и силы, то есть достичь всеислия и всезнания; и каждый мужчина и женщина, рожденные на свет, – это новая попытка достичь этой цели...

Бернард Шоу (из письма Льву Толстому)

Мы живём на поверхности твёрдого тела – земного шара. Дома, машины, всевозможные инструменты – твёрдые тела. Да и наше физическое тело, хотя и состоит в основном из воды, тем не менее является твёрдым (мягким) телом.

От жидкости твёрдое тело внешне отличается тем, что имеет собственную форму (жидкость только в состоянии невесомости имеет собственную форму).

Твёрдые тела, в отличие от жидкостей, обладают прочностью, то есть способностью противодействовать изменению формы при наличии внешних сил. На твёрдое тело можно опереться, и оно не всегда развалится. О неподвижную жидкость или газ опереться нельзя за исключением случаев, связанных с поверхностным натяжением.

§ 54. Типы кристаллических решёток

Твёрдые тела, как правило, имеют кристаллическое строение, которое характеризуется правильным расположением частиц в строго определённых точках пространства. Если мысленно соединить эти точки прямыми, то образуется пространственный каркас, который называется **кристаллической решёткой**. Точки, в которых размещены частицы, называются **узлами кристаллической решётки**. В узлах воображаемой решётки могут находиться ионы, атомы, молекулы. Они совершают колебательные движения. С повышением температуры амплитуда колебаний возрастает, что проявляется в тепловом расширении тел, а при достаточно большом нагревании – в плавлении.

В зависимости от вида частиц и характера связи между ними различают четыре типа кристаллических решёток (структур): ионные, атомные, молекулярные и металлические.

Кристаллические решётки, в узлах которых находятся ионы, называются ионными. Их образуют вещества с ионной связью. Примером может

служить всем известная поваренная соль – хлорид натрия (NaCl). Каждый положительный ион натрия окружен шестью отрицательными ионами хлора, а каждый отрицательный ион хлора окружен шестью положительными ионами натрия. В целом система электронейтральна. Такому расположению соответствует наиболее плотная упаковка. Если ионы представить в виде шаров, размещенных в кристалле, то мелким шарам соответствуют ионы натрия, а крупным – хлора (рис. 1).

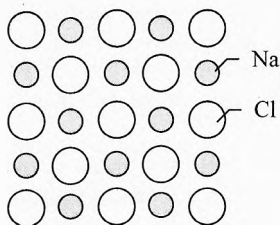


Рис. 1. Кристаллическая решётка NaCl

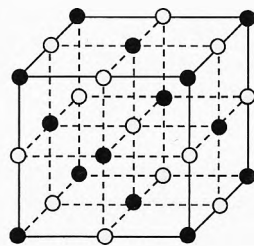


Рис. 2. Взаимное расположение атомов в кристаллической решётке

Очень часто кристаллические решётки изображают так, как показано на рис. 2, где указывается только взаимное расположение частиц, но не их размеры.

Число ближайших соседних частиц, вплотную примыкающих к данной частице в кристалле или в отдельной молекуле, называют **координационным числом**.

В решётке хлорида натрия координационные числа для обоих ионов равны 6. В кристалле хлорида натрия нельзя выделить отдельные ионные молекулы соли. Их нет. Весь кристалл можно рассматривать как гигантскую молекулу. Связи между ионами в таком кристалле прочны. Поэтому вещества с ионной решёткой обладают высокой твёрдостью. Они тугоплавки и малолетучи. Расплавы ионных кристаллов проводят электрический ток, так как плавление уменьшает прочность связи и геометрически правильную ориентацию.

Ионные кристаллы растворяются в жидкостях, состоящих из полярных молекул, например, в воде.

Кристаллические решётки, в узлах которых находятся атомы, называются **атомными**.

Атомы в таких решётках соединены между собой прочными ковалентными связями. Например, кристаллическая решётка алмаза состоит из атомов углерода, каждый из которых связан с четырьмя соседними атомами (координационное число равно 4). В решётке алмаза, как и в решётке NaCl , молекулы отсутствуют. Весь кристалл следует рассматривать как гигантскую макромолекулу.

Количество неорганических веществ с атомной кристаллической решёткой (Ge , Si и др.) велико. Они имеют высокие температуры плавления (для алмаза

$t_{\text{пл}}=3500^{\circ}\text{C}$), прочны, тверды и практически нерастворимы в воде. Атомная кристаллическая решётка характерна также для некоторых соединений с углеродом и кремнием.

Кристаллические решётки, в узлах которых расположены молекулы (полярные или неполярные), называются молекулярными.

Молекулы в таких решётках соединены между собой сравнительно слабыми межмолекулярными силами. Поэтому вещества с молекулярной решёткой имеют малую твёрдость и низкие температуры плавления, нерастворимы или малорастворимы в воде, их растворы почти не проводят электрический ток. Число неорганических веществ с молекулярными решётками невелико. Примерами их являются лёд, «сухой лёд» (CO_2), твёрдые галогеноводороды, твёрдые простые вещества: гелий He , фтор F_2 , хлор Cl_2 , йод I_2 , кислород O_2 , озон O_3 , фосфор P , и др. На рис. 3 изображена кристаллическая решётка йода I_2 .

Большинство кристаллических органических соединений имеют молекулярную решётку.

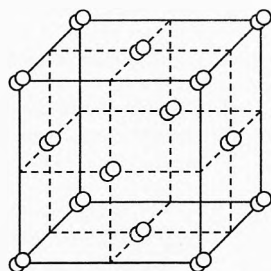


Рис. 3. Кристаллическая решетка йода I_2

Кристаллические решётки, в узлах которых находятся положительные ионы, а в междоузлиях коллективизированные валентные электроны, называются металлическими.

Атомы большинства металлов на внешнем энергетическом уровне содержат небольшое число электронов. Так, по одному электрону содержат 16 элементов (Au , Cu , Ag и др.), по два – 58 элементов (Mn , Fe , Co , Ni и др.), по три электрона – 4 элемента (Al , Ga , In , Tl). Лишь атомы германия (Ge), олова (Sn), свинца (Pb) имеют на внешнем уровне по 4 электрона, сурьма (Sb) и висмут (Bi) по пять, а полоний (Po) – шесть, но эти элементы не являются характерными металлами.

При нормальных условиях все металлы имеют кристаллическое строение. У всех металлов имеется избыток валентных орбиталей и недостаток электронов. При сближении атомов, в результате образования кристаллической решётки, валентные орбитали соседних атомов перекрываются, благодаря чему электроны свободно перемещаются, осуществляя связь между всеми атомами кристалла металла. Такой тип химической связи называется металлической.

Валентные электроны из-за небольшой энергии ионизации слабо удерживаются в атоме. Химическая связь в металлических кристаллах сильно делокализована, то есть электроны, осуществляющие связь, обобществлены («электронный газ») и перемещаются по всему куску металла, в целом электронейтрального. Металлическая связь характерна для металлов, находящихся в твёрдом и жидком состояниях. В парообразном состоянии молекулы металлов состоят из одно- или двухатомных молекул с ковалентной связью. Прочность связи в кристалле больше, чем в молекуле металла, а потому образование металлического кристалла (конденсация пара) идёт с высоким выделением энергии.

§ 55. Пространственная решётка

Элементарная ячейка. Основным свойством пространственной кристаллической решётки является трёхмерная периодичность.

В каждом кристалле можно указать три направления, вдоль которых кристаллическая решётка может переноситься так, что она переходит сама в себя – центры атомов (молекул, ионов) окажутся в аналогичных местах.

Такие переносы называются *трансляциями*.

Фигура наименьших размеров, при трансляции которой вместе с частицами, находящимися внутри неё, можно получить всю кристаллическую решётку, называется элементарной ячейкой кристалла.

Элементарная ячейка, в зависимости от структуры кристалла, может представлять собой куб, прямоугольный и косогольный параллелепипед.

Симметрия кристаллов. Кристаллические решётки классифицируются по наличию в них различных элементов симметрии.

*Симметрию кристаллических решёток можно разделить на 7 типов по форме параллелепипедов повторяемости (элементарных ячеек). Эти типы называют **сингониями**: триклинной, моноклинной, ромбической, тригональной, тетрагональной, гексагональной и кубической.*

Элементарные ячейки различаются не только сингонией, но и возможным расположением узлов (атомов, молекул, ионов) в центре граней или внутри ячейки. Таким образом, получается 14 решёток Браве (Огюст Браве (1811–1863) – французский кристаллограф, положил начало геометрической теории пространственных решёток кристаллов). В некоторых из них нет дополнительных узлов. Такие решётки называются примитивными. Сугубо примитивные решётки – это тригональная, триклинная и гексагональная. А кубическая, например, имеет три решётки Браве: примитивную, центрированную по всем граням и объёмноцентрированную.

Кристаллы могут иметь форму различных призм, оснований которых могут быть: правильный треугольник, квадрат, параллелограмм и шестиугольник. В основе классификации кристаллов и объяснения их физических свойств может лежать не только форма элементарной ячейки, но и другие виды симметрии, например поворот вокруг оси.



Евграф Степанович Федоров (1853–1919)

***Осью симметрии** называют прямую, при повороте вокруг которой на 360° кристалл (или его решётка) несколько раз совмещается сам с собой. Число этих совмещений называют **порядком оси**.*

Существуют кристаллические решётки, обладающие осями симметрии второго, третьего, четвёртого и шестого порядка. Возможна симметрия кристаллической решётки относительно плоскости симметрии, а также комбинации различных видов симметрии.

Кристаллографические классы. При изучении физических свойств макроскопических кристаллов представляет интерес не относительное положение элементов структуры, а только их ориентация. Поэтому для описания макроскопических свойств, когда кристалл можно представить в виде сплошной среды, нужно знать все комбинации элементов симметрии, отличающиеся набором и взаимной ориентацией этих элементов.

Таким образом, всего выделено 32 кристаллографических класса, которые объединяются в 7 кристаллографических групп по сингониям. Всего же для 32 кристаллографических классов существуют 230 пространственных групп симметрии, охватывающих всевозможные кристаллические структуры, установленные немецким математиком Артуром Морицом Шенфлисом (1853–1928) и независимо от него русским минералогом и кристаллографом Евграфом Степановичем Федоровым в 1881 г., названные федоровскими группами.

✎ **Пример 1.** Кристаллы поваренной соли NaCl кубической кристаллической решётки состоят из чередующихся атомов (ионов) Na и Cl (рис. 2). Определить минимальное расстояние между их центрами. Молярная масса поваренной соли $M=0,0585$ кг/моль, а её плотность $\rho=2200$ кг/м³.

➔ **Решение.** Объёмная плотность вещества равна по определению отношению массы тела к его объёму $\rho=m/V$. Эта формула применима в однородном теле для больших и малых объёмов вплоть до элементарной ячейки

$$\rho = m_{\text{я}} / V_{\text{я}}. \quad (1)$$

Объём ячейки хлорида натрия, как видно из рис. 2:

$$V_{\text{я}} = (2d)^3. \quad (2)$$

Ячейку можно получить сечением в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях того, что изображено на рис. 2: спереди и сзади, слева и справа, сверху и снизу. Так что в ячейке (двигая которую в трёх плоскостях, можно получить весь кристалл) содержится один целый ион в центре, шесть половинок на гранях, двенадцать четвертинок на ребрах и восемь осмьюшек на вершинах ячейки.

Выразим теперь её массу. Предположим для определённости, что в её центре находится ион хлора (белый шарик на рис. 2), тогда число ионов хлора будет равно одному иону плюс двенадцать четвертинок на серединах ребер. Итого число ионов Cl в ячейке $1+12 \cdot 1/4=4$.

Теперь подсчитаем число ионов натрия в ячейке. Как видно из рис. 2 (черные шарики), в ячейку входит шесть половинок ионов натрия на гранях и восемь осмьюшек на вершинах. Итого число ионов Na в ячейке $6 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1/8 = 4$.

Таким образом, в кубической ячейке NaCl содержится по четыре иона хлора и натрия. Масса ячейки будет равна массе четырех молекул NaCl

$$m_{\text{я}} = 4m_0 = 4M/N_A. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\rho = \frac{4M}{N_A (2d)^3} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4M}{\rho N_A}};$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0,0585}{2200 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} \approx 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2,8 \text{ Å}.$$

✓ **Ответ.** Наименьшее расстояние между центрами ионов в кристалле поваренной соли равно 2,8 Å или $2,8 \cdot 10^{-10}$ м.

§ 56. Анизотропия. Монокристаллы. Поликристаллы. Аморфные тела

Анизотропия кристаллов. Многие твёрдые тела, в том числе и кристаллические, неодинаково проявляют некоторые свои свойства по разным направлениям. В таких случаях говорят об *анизотропии свойств*. Она связана с различным характером взаимодействия элементов структуры твёрдого тела по разным направлениям. Например, природный полимер – древесина в продольном направлении имеет большую прочность на сжатие и на растяжение, чем в поперечном.

Монокристаллы. Кристаллические тела могут быть монокристаллами и поликристаллами.

Монокристалл – это одиночный кристалл, имеющий макроскопическую упорядоченную кристаллическую решётку.

Монокристаллы обладают различной твёрдостью, теплопроводностью и другими свойствами по разным осям. Обычно монокристаллы имеют правильную геометрическую форму.

Поликристаллы. Большинство природных и искусственно полученных кристаллов представляют собой поликристаллы.

Тело называется поликристаллическим, если оно представляет совокупность сросшихся друг с другом, хаотически ориентированных относительно друг друга, маленьких кристалликов.

Дело в том, что для образования кристалла требуются центры кристаллизации, например посторонние включения и другие неоднородности среды. Таких центров по всему объёму материала возникает, как правило, великое множество. Каждый кристаллик растёт в соответствии с принципом наименьшего действия. Все они строго определённой формы, но расположены друг относительно друга случайным образом. Поэтому *поликристаллы изотропны*, т. е. их свойства проявляются одинаково по всем направлениям.

Полиморфизм. Очень многие вещества в кристаллическом состоянии могут существовать в двух или более фазовых разновидностях (модификациях), отличающихся физическими свойствами. Это явление называется *полиморфизмом*.

Полиморфизм кристаллов (от греч. *polymorphes* – многообразный) – способность вещества существовать в различных кристаллических структурах, называемых полиморфными модификациями (их обозначают греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

Каждая модификация устойчива в определённом интервале температур и давлений. Из 9 кристаллических фаз льда только одна устойчива при атмосферном давлении. Остальные 8 фазовых состояний льда существуют при высоких давлениях и имеют плотность большую, чем у воды. Одна из них при давлении $2 \cdot 10^9$ Па имеет температуру плавления $+80^\circ\text{C}$, т. е. существует «горячий лёд».

Упорядоченное расположение атомов или молекул в кристалле определяется действием сил межатомного и межмолекулярного взаимодействия. Тепловое движение атомов и молекул нарушает эту упорядоченную структуру. При каждом со-

четании давления и температуры реализуется тот тип укладки частиц, который в данном случае наиболее устойчив и энергетически выгоден.

Превращения кристаллов одного и того же вещества с различным типом решётки друг в друга происходят в соответствии с фазовыми переходами типа плавления и испарения. Каждому давлению соответствует определённая температура, при которой оба типа кристаллов сосуществуют. При изменении этих условий происходит фазовый переход.

На рис. 4 изображена фазовая диаграмма углерода. Различие в упаковке атомов углерода в решётке графита и алмаза определяет существенные различия их физических свойств.

У многих кристаллов неустойчивое, в данных условиях, фазовое состояние может сохраняться длительное время, поскольку благодаря плотной упаковке частиц и малому числу дефектов перестройка кристаллической решётки весьма затруднена.

Например, алмаз при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении не превращается самопроизвольно в более устойчивый при этих условиях графит. Поэтому алмазы, образованные при высоких температурах и давлениях, можно использовать в обычных земных условиях. Однако, нагревание алмазов при низком атмосферном давлении увеличивает вероятность их превращения в графит. В истории известен случай, когда бриллиантовые украшения, пролежавшие долго в тайнике, сделанном в печке, превратились в графит.

Получение искусственных алмазов из графита имеет большую практическую и экономическую ценность. Полиморфные превращения графита в алмаз происходят в течение нескольких часов при давлении 10 ГПа и температуре 2000°C.

Аморфные тела. Среди тел, которые принято считать твёрдыми, потому что они сохраняют форму и обладают прочностью, есть и такие, которые существенно отличаются от кристаллов (рис. 5). Такие тела называются аморфными («лишенными формы»).

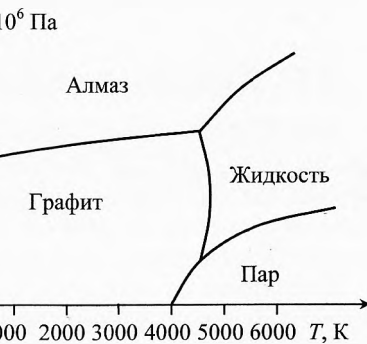


Рис. 4. Фазовая диаграмма углерода

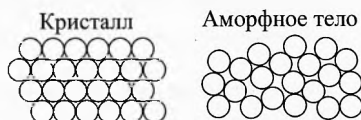


Рис. 5. Сравнение атомарной решётки кристаллов и аморфных тел

Аморфные твёрдые тела способны сохранять форму. Строгой кристаллической решётки у них нет. Некоторая закономерность наблюдается лишь для молекул и атомов, расположенных по соседству. Такой порядок называется **ближним порядком**. Он не повторяется по всем направлениям и не сохраняется на больших расстояниях, как у кристаллических тел.

* Бриллиант — это ограненный алмаз, которому посредством обработки придана специальная форма, максимально выявляющая его естественный блеск.

Нарушений в структуре связей частиц во много раз больше, чем в кристаллах. Поэтому они не имеют определённой температуры при переходе из твёрдого состояния в жидкое, а по мере нагревания размягчаются, становясь жидкими. Сначала разрушаются самые слабые связи, потом более крепкие и т. д.

К аморфным телам относятся: стекло, пластилин, смола, янтарь (природная смола), канифоль, обсидиан (вулканическое стекло), многие искусственные материалы, известные под названием пластмасс. Аморфные тела изотропны.

§ 57. Взаимодействие молекул

Между молекулами существуют силы взаимодействия. Об этом свидетельствует ряд явлений: прилипание друг к другу хорошо отшлифованных твёрдых тел, смачивание твёрдых тел жидкостями. Если бы между молекулами исчезли силы притяжения, то твёрдые и жидкие тела, вследствие хаотического движения молекул, превратились бы в газообразные.

Молекулярные силы проявляются только тогда, когда расстояния между молекулами малы, порядка эффективных диаметров самих молекул. При увеличении расстояния между ними в несколько раз силы становятся практически равными нулю.

Молекулы состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронных облаков. Ядра двух молекул и их электронные облака отталкиваются. Ядро одной молекулы притягивается к электронному облаку второй и наоборот. Таким образом, между молекулами одновременно существуют как силы притяжения, так и силы отталкивания, имеющие электрическую природу. Между полярными молекулами (у которых центр отрицательного и положительного зарядов не совпадают) возникает сила притяжения, быстро убывающая с увеличением расстояния обратно пропорционально расстоянию в седьмой степени (рис. 6):

$$F_{\text{притяж}} = \frac{a}{r^7}.$$

Если неполярные молекулы H_2 , N_2 , O_2 , и др. (у которых центр отрицательного и положительного заряда совпадают) деформируются по каким-либо причинам, то между ними возникает сила притяжения, убывающая с увеличением расстояния по тому же закону, что и у полярных молекул. Если неполярные молекулы недеформированы, то они не взаимодействуют между собой.

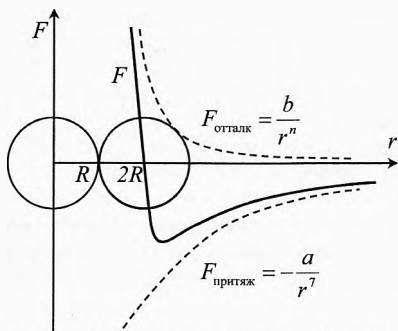


Рис. 6. Сила взаимодействия молекул

Сила отталкивания между молекулами возникает при меньших расстояниях, чем сила притяжения, и изменяется с расстоянием значительно резче:

$$F_{\text{отт}} = \frac{b}{r^n},$$

где n – для разных веществ находится в интервале от 9 до 15; коэффициенты a и b зависят от особенностей строения электронных облаков молекул данного вещества.

При расстоянии между центрами соседних молекул, равном $r=2R$ (где R – эффективный радиус молекулы), притяжение и отталкивание уравниваются. В конденсированном веществе среднее расстояние между центрами молекул равно $d=2R$ (где d – эффективный диаметр молекулы). Если расстояние между центрами молекул больше $2R$, то преобладает сила притяжения, в противном случае – сила отталкивания.

В случае, когда $F_{\text{отт}} = \frac{b}{r^9}$, можно показать, что при $r = d\sqrt[9]{9} = 1,134 \cdot d$ молекулы притягиваются с максимальной результирующей силой F_{max} . При $r = 1,5d$ сила притяжения уменьшается почти в 3 раза, при $r=2d$ – в 16 раз, при $r=3d$ – почти в 230 раз.

Межмолекулярные силы являются короткодействующими.

Если же расстояние уменьшить до $r=0,9d$, то возникает результирующая сила отталкивания $F \approx 5|F_{\text{max}}|$, а при $r=0,7d$ – результирующая сила отталкивания в 140 раз превышает максимальную силу притяжения молекул: $F \approx 140|F_{\text{max}}|$.

Как видно из проведённого анализа, результирующая сила взаимодействия между молекулами изменяется несимметрично с расстоянием, но при малых отклонениях от $d=2r$ в ту или другую сторону она изменяется практически линейно с изменением расстояния.



Роберт Гук
(1635–1703)

Поэтому для любого твёрдого тела при достаточно малых деформациях возникающая сила упругости прямо пропорциональна деформации.

Этот закон открыт английским естествоиспытателем Робертом Гуком. Результирующая деформация тела равна:

$$\Delta l = \Delta d \cdot N,$$

где Δd – изменение расстояния между соседними молекулами, N – число молекул на всю длину тела l .

§ 58. Закон Гука

Закон Гука. Деформацию сжатия и растяжения можно характеризовать абсолютным удлинением Δl , равным разности длин образца после деформации и до неё:

$$\Delta l = l - l_0$$

В СИ абсолютное удлинение измеряется в метрах. Очевидно, что при растяжении абсолютное удлинение положительно, а при сжатии – отрицательно (рис. 7).

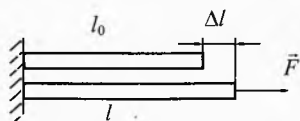


Рис. 7. Растяжение образца

Более важной характеристикой, определяющей степень деформированности тела, является относительное удлинение.

Относительное удлинение характеризует степень деформированности тела, оно равно отношению абсолютного удлинения к длине недеформированного образца:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%. \quad (4)$$

При малых деформациях безразлично писать $\frac{\Delta l}{l_0}$ или $\frac{\Delta l}{l}$.

При растяжении или сжатии образца между молекулами соседних поперечных слоёв возникают силы притяжения (отталкивания), то есть возникает напряжённое состояние тела.

Механическое напряжение – физическая величина, определяющая степень взаимодействия между любыми двумя соседними поперечными слоями деформированного внешними силами образца. Механическое напряжение равно отношению модуля силы упругости к площади сечения образца, перпендикулярной вектору силы

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}. \quad (5)$$

Механическое напряжение измеряется в единицах давления, то есть в паскалях Па (СИ).

Опыт показывает, что при малых деформациях любого твёрдого тела механическое напряжение, возникающее в образце, прямо пропорционально относительному удлинению образца (закон Гука в дифференциальной форме).

$$\sigma = E \cdot |\epsilon| \quad (6)$$

Комбинируя (4), (5) и (6), получим:

$$F_{\text{упр}} = \frac{ES}{l_0} \cdot |\Delta l| \quad (7)$$

Сравнивая выражение (7) с формулой закона Гука в интегральной форме $F_{\text{упр}} = k|\Delta l|$, видим, что жёсткость тела равна:

$$k = \frac{ES}{l_0}$$

То есть жёсткость тела зависит от материала, площади поперечного сечения и длины образца.

Коэффициент E в законе Гука называется модулем нормальной упругости (или модулем Юнга). Модуль Юнга характеризует упругие свойства вещества, он равен напряжению, при котором длина образца увеличилась бы в 2 раза ($\epsilon=1$), если бы выполнялся закон Гука при больших деформациях.

Следует заметить, что малая деформация – понятие относительное: для одних материалов деформация в 1% является малой (резина, сталь), а для других – недопустимо большой, при которой образец разорвется (стекло, чугун).

Коэффициент Пуассона. Растяжение или сжатие продольного стержня сопровождается изменением его поперечных размеров (рис. 8). При продольном растяжении стержень даёт поперечное сжатие, при продольном сжатии – поперечное расширение.

Обозначим через β коэффициент относительного сжатия (расширения) при продольном растяжении (сжатии) ϵ . Он равен отношению изменению поперечного размера стержня к поперечному размеру в недеформированном состоянии:

$$\beta = \frac{\Delta d}{d_0}$$

При продольном растяжении стержня ($\Delta l > 0$) коэффициент β отрицателен ($\Delta d < 0$), а при сжатии ($\Delta l < 0$) – положителен ($\Delta d > 0$).

Абсолютное значение отношения поперечной деформации к продольной при малых деформациях называется коэффициентом Пуассона μ .

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\epsilon} \right| \quad \text{или} \quad \mu = \left| \frac{\Delta d \cdot l_0}{d_0 \cdot \Delta l} \right|$$

где $\Delta l = l - l_0$ и $\Delta d = d - d_0$ продольная и поперечная деформация образца.

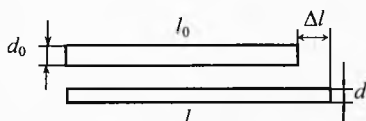


Рис. 8. Поперечное сжатие при продольном растяжении

Коэффициент Пуассона характеризует степень изменения толщины стержня от степени изменения его длины в области упругой деформации. Для большинства однородных изотропных тел коэффициент Пуассона близок к $1/3$.

Исходя из того, что при продольном растяжении ($\Delta l > 0$) объём стержня должен несколько увеличиться ($\Delta V > 0$), а при сжатии ($\Delta l < 0$) – уменьшиться ($\Delta V < 0$), нетрудно показать, что для любого тела $\mu < 1/2$.

Деформация сдвига. Пусть на образец толщиной d к верхней горизонтальной поверхности площадью S приложена касательно сила \vec{F}_τ , стремящаяся сдвинуть образец вправо (рис. 9). Пусть нижнее основание образца закреплено неподвижно. Под действием такой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга, и каждая физическая прямая (т. е. линия, связанная с определёнными частицами твёрдого тела) ab , перпендикулярная поверхности, к которой приложена сила \vec{F}_τ , поворачивается на некоторый угол φ . При малом значении угла φ :

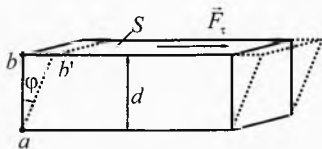


Рис. 9. Деформация сдвига

$$\varphi = \frac{bb'}{d},$$

где $d=ab$ – толщина образца, а bb' – абсолютная величина сдвига верхнего слоя относительно нижнего.

Отсюда видно, что угол сдвига φ характеризует относительный сдвиг, поэтому, в пределах выполнимости закона Гука, справедливо следующее соотношение.

При малых деформациях сдвига твёрдого тела касательное напряжение прямо пропорционально углу сдвига:

$$\sigma_\tau = G\varphi,$$

где $\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}$ – касательное напряжение, созданное силой \vec{F}_τ на поверхности S .

Коэффициент G называется модулем сдвига (модуль касательной упругости). Он характеризует упругие свойства материала на сдвиг и численно равен касательному напряжению образца, при котором относительный сдвиг составил бы 1 радиан, в пределах выполнимости закона Гука.

Понятно, что для большинства веществ такие большие сдвиги в пределах прямой пропорциональности невозможны.

Тем не менее, модуль сдвига G является важной характеристикой упругих свойств материала на сдвиг. От него, в частности, зависит скорость поперечных волн в данном материале.

Практически для всех изотропных поликристаллических материалов упругие константы: модуль Юнга E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ , связаны соотношением:

$$E \approx 2G(1 + \mu).$$

Откуда видно, что для изотропных кристаллов модуль Юнга примерно в 2,5 раза больше модуля сдвига.

§ 59. Диаграмма растяжения. Пластичность и хрупкость. Запас прочности

Диаграмма растяжения. Зависимость относительного удлинения образца от возникающего в нём напряжения при нагрузке является одной из важнейших характеристик механических свойств твёрдых тел.

Графическое изображение этой зависимости называется диаграммой растяжения (рис. 10). По оси ординат откладывается механическое напряжение σ , возникающее в образце, а по оси абсцисс – относительное удлинение ε .

При небольших деформациях удлинение прямо пропорционально напряжению; после снятия нагрузки размеры тела полностью восстанавливаются. Это – область применения закона Гука (участок OA).

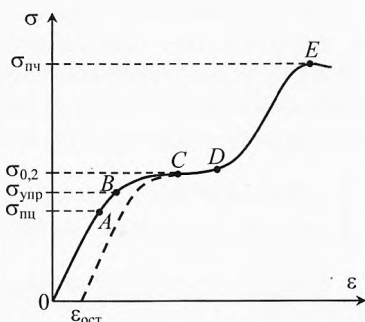


Рис. 10. Удлинение при растяжении

Максимальное напряжение, при котором выполняется закон Гука, называется **пределом пропорциональности** $\sigma_{пц}$.

При дальнейшем увеличении нагрузки деформация становится нелинейной. Тем не менее, при небольших нелинейных деформациях, после снятия нагрузки форма и размеры тела практически сохраняются (участок AB диаграммы).

Максимальное напряжение, при котором не возникают заметные остаточные деформации, называют **пределом упругости** $\sigma_{упр}$.

Предел упругости превышает предел пропорциональности лишь на сотые доли процента.

При напряжениях, превышающих предел упругости $\sigma_{упр}$, образец не восстанавливает прежней формы после снятия нагрузки. Такие деформации называются остаточными или пластическими. В области пластической деформации (участок BC) относительное удлинение растёт в большей степени, чем напряжение.

Напряжение $\sigma_{0,2}$ (ордината точки C), после снятия которого остаточная деформация составляет 0,2%, называется (условным) **пределом текучести**.

Если в области пластических деформаций снять нагрузку, то размеры тела не будут равны первоначальным. Разгрузка изображена пунктирной кривой. У тела сохраняется остаточная деформация $\epsilon_{\text{ост}}$.

На горизонтальном участке CD материал «течёт» – деформация возрастёт при неизменном напряжении.

Дальнейшее растяжение образца приводит к резкому возрастанию механического напряжения (участок DE), которое достигает максимума, затем уменьшается, и образец разрывается.

||| *Максимальное напряжение, при достижении которого образец разрывается, называется **пределом прочности** ($\sigma_{\text{пч}}$).*

Пластичность. Хрупкость. Упругость. Материалы, у которых область текучести CD значительна, и которые могут без разрушения выдерживать большие деформации, называются пластичными. Таковы медь, пластилин, золото, тесто, глина.

||| ***Пластичность** – это способность тел не разрушаться при больших деформациях.*

Противоположна свойству пластичности хрупкость.

||| *Материал называется **хрупким**, если он разрушается даже при небольших деформациях.*

Изделия из стекла и фарфора хрупкие, так как они разбиваются на куски при падении на пол даже с небольшой высоты. Чугун, мрамор, янтарь также обладают повышенной хрупкостью и, наоборот, сталь, медь, свинец не являются хрупкими. У всех хрупких материалов напряжение очень быстро растёт с увеличением деформации, они разрушаются при весьма малых деформациях. Так, чугун разрушается при относительном удлинении $\epsilon \approx 0,45\%$. У стали же при $\epsilon \approx 0,45\%$ деформация остаётся упругой, и разрушение происходит при $\epsilon \approx 15\%$.

Твёрдое тело из любого материала при достаточно малых деформациях ведет себя как упругое. Все тела в той или иной степени могут испытывать и пластические деформации.

Материалы, которые обнаруживают упругие свойства при больших деформациях, называются упругими.

||| ***Упругость** – свойство тела восстанавливать свою форму и объём (твёрдые тела) либо только объём (жидкости и газы) после прекращения действия внешних сил или других причин (например, нагрева-ние), вызвавших деформацию тела.*

Запас прочности. Для того чтобы машины и различные сооружения (здания, мосты, тоннели) были достаточно надежны, при их проектировании задаётся определённый запас прочности. Все эти сооружения должны работать в области упругих деформаций.

Запасом прочности (или коэффициентом безопасности) называется отношение предела пропорциональности $\sigma_{пч}$ данного материала к максимальному напряжению σ_{\max} , которое будет испытывать деталь конструкции в работе:

$$n = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_{\max}}$$

В зависимости от требуемой надёжности коэффициент безопасности различных деталей и конструкций выбирают обычно в пределах от 2 до 10.

Коэффициент запаса прочности часто определяют как отношение предела прочности $\sigma_{пч}$ к максимальному рабочему напряжению σ_{\max} :

$$n_2 = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_{\max}}$$

Существуют и другие варианты определения коэффициента запаса прочности в зависимости от назначения объекта и условий его функционирования.

Таблица 9. Упругие свойства металлов

Металл	Модуль Юнга E , ГПа	Модуль сдвига G , ГПа	Коэффициент Пуассона μ
Алюминий	69–72	25–26,5	0,31
Вольфрам	350–400	125–155	0,3
Железо	195–205	77–80	0,28
Золото	78–83	28,5	0,4
Индий	10,5	–	0,46
Медь	110–130	120	0,38
Молибден	300–330	73–77	0,31
Никель	200–220	16–19	0,3–0,4
Олово	41–55	225	0,33
Свинец	14–18	27–29,5	0,45
Серебро	72–83,5	–	0,37
Хром	280–315	110	0,31
Цинк	110–130	37	0,3–0,35
Стали	190–210	77–81	0,28–0,31
Алюминиевые сплавы	70–72,5	27–28	0,31–0,33
Титановые сплавы	110–120	42–45	0,31–0,34
Латунь (сплав меди, олова и цинка)	102–115	–	–
Бронза (сплав меди и цинка)	73,5–130	–	–

Деформация изгиба сводится к деформации сжатия и растяжения. В середине бруска существует практически недеформированный слой, называемый нейтральным слоем. Близкие к нему слои деформируются существенно меньше, чем внешние слои. Поэтому детали машин и конструкций, работающих на изгиб, выгодно делать полыми. Кости животных и птиц имеют трубчатое строение. Это обеспечивает достаточную прочность скелета при данной массе.

Деформация кручения сводится к деформации сдвига и растяжения. Она применяется в так называемых торсионных подвесках ходовой части машин, при изготовлении ниток, верёвок, канатов и тонких волокон.

Таблица 10. Прочность и пластичность металлов

Металл	Состояние, степень чистоты	$\sigma_{0,2}$, МПа	$\sigma_{пл}$, МПа	ε_r , %	Ψ , %	HB , МПа
Алюминий	Отожженное, 99,5% <i>Al</i>	30	80	35	80	250
Вольфрам	Деформированное, 99,95% <i>W</i>	760	1000	0	0	4150
Железо	Отожженное, особой чистоты	170	290	50	90	800
Золото	Отожженное	40	150	40	90	220
Медь	Отожженное	70	215	60	75	1000
Свинец	Отожженное	5	14–18	50	100	—
Серебро	Отожженное	20–30	140–180	45	90	500
Цинк	Отожженное	100	125	12	—	—

В табл. 10: ε_r – относительное удлинение при разрыве; Ψ – относительное сужение – отношение уменьшения площади поперечного сечения образца после разрыва к начальной площади; HB – твёрдость по Бринелю, определяемая вдавливанием стального шарика в испытуемый материал, как среднее напряжение, приходящееся на единицу поверхности сферического отпечатка.

§ 60. Тепловое расширение твёрдых тел и жидкостей

В процессе нагревания твёрдых тел и жидкостей их объём, как правило, возрастает. При данной температуре молекулы твёрдых тел и жидкостей в основном совершают колебательные движения около определённых средних положений.

На рис. 11 представлена зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух атомов (молекул) от расстояния r между ними.

Изобразим на потенциальной кривой значения полной энергии

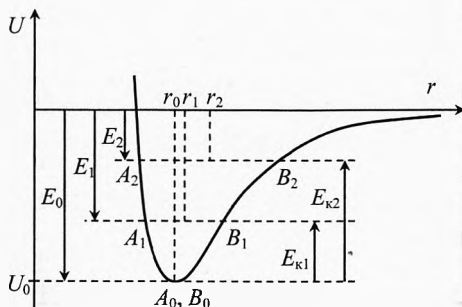


Рис. 11. Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов

молекулы при разных температурах. Часть графика, находящаяся ниже оси абсцисс, называется потенциальной ямой.

Здесь E_0 – нулевая энергия – минимальная энергия молекулы при абсолютном нуле, при этом кинетическая энергия молекул равна нулю; E_1 и E_2 – полная энергия молекулы при температурах T_1 и T_2 , причём $T_2 > T_1$; $E_{к1}$ и $E_{к2}$ – максимальная кинетическая энергия молекул при температурах T_1 и T_2 .

Из графика видно, что при температуре близкой к абсолютному нулю молекулы совершают малые колебания со средним расстоянием между центрами молекул, равным r_0 . На этом расстоянии силы притяжения и отталкивания между атомами уравновешены. Молекула может находиться только в пределах потенциальной ямы.

При повышении температуры тела энергия и амплитуда колебаний молекул возрастают. Крайние положения центра молекулы при T_1 (A_1 и B_1) и при T_2 (A_2 и B_2) будут расположены несимметрично относительно r_0 . Точка B смещается вправо больше, чем точка A влево. Причём, чем выше температура, тем эта разница значительнее.

Отсюда следует, что среднее расстояние между центрами молекул увеличивается с ростом температуры. Это увеличение происходит по всему объёму тела. Поэтому при нагревании тело растёт в размерах, если нет сдерживающих внешних сил. Если бы потенциальная кривая была симметрична, то теплового расширения не существовало.

Мы объяснили качественно механизм теплового расширения, но получить количественную зависимость объёма от температуры твёрдого или жидкого тела из анализа потенциальной кривой не удаётся. Поэтому обратимся к результатам эксперимента.

Таблица 11. Температурный коэффициент объёмного расширения жидкостей β , 10^{-3} К^{-1} при $p=101325 \text{ Па}$

Вещество	$T, \text{ К}$	β	Вещество при $T=273 \text{ К}$	β	Смеси	$T, \text{ К}$	β
Вода	273	−0,064	Бензол	1,237	Бензин Б70	313	1,496
	283	0,070	Глицерин	0,505	Керосин Т-1	293	0,955
	293	0,182	Метил. спирт	1,199	Масло МС-20	303	0,638
	323	0,449	Пентан	1,605	Масло МК-22	323	0,886
	373	0,752	Серная кислота	0,576	Масло транс-форматорное	273	0,680
Ртуть	323	0,1819	Уксусная кисл.	1,0171		393	0,790
	373	0,1825	Фенол	1,090	Воздух (газ)	273	3,67
	573	0,1868	Этиловый спирт	1,20		373	3,67
	1073	0,188	Этиловый эфир	1,656			

Оказывается, что при небольших изменениях температуры относительное изменение объёма прямо пропорционально изменению температуры

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta t, \quad \Delta V = V - V_0; \quad \Delta t = t - t_0, \quad \Rightarrow \quad V - V_0 = V_0 \beta (t - t_0),$$

$$V = V_0(1 + \beta(t - t_0)), \quad (8)$$

где V_0 – объём тела при температуре t_0 ;

V – объём тела при температуре t ;

β – температурный коэффициент объёмного расширения.

Обратим внимание на то, что при разных t_0 коэффициент β несколько отличается для одного и того же вещества. Поэтому в табл. 11 коэффициент β нужно брать именно для того интервала температур, на котором протекает процесс.

Для твёрдых тел можно аналогично ввести понятие линейного теплового расширения. Относительное линейное тепловое расширение тела в определённом интервале температур прямо пропорционально изменению температуры тела:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta t, \quad l = l_0(1 + \alpha(t - t_0)), \quad (9)$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения;

l_0 – длина тела при температуре t_0 ;

l – длина тела при температуре t .

Учитывая, что объём куба равен $V = l^3$, а $V_0 = l_0^3$, из (8) получим:

$$l^3 = l_0^3(1 + \beta \Delta t). \quad (10)$$

Решая совместно (9) и (10), получим:

$$l_0^3(1 + \alpha \Delta t)^3 = l_0^3(1 + \beta \Delta t); \quad (1 + \alpha \Delta t)^3 = (1 + \beta \Delta t).$$

Откуда $\beta = 3\alpha + 3\alpha^2 \Delta t + \alpha^3 \Delta t^2$. Для всех твёрдых тел $\alpha \sim 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ (K}^{-1}\text{)}$ при температурах порядка комнатных, поэтому можно пренебречь вторым и третьим членами последней формулы.

|| Коэффициент теплового объёмного расширения β в три раза больше коэффициента теплового линейного расширения α .

$$\beta \approx 3\alpha$$

Аналогично, увеличение площади поверхности при возрастании температуры определяется по формуле

$$S = S_0(1 + \gamma(t - t_0))$$

Кoeffициент теплового поверхностного расширения γ в два раза больше коoeffициента теплового линейного расширения β .

Таблица 12. Зависимость температурного коoeffициента линейного расширения твёрдых тел α , 10^{-6} K^{-1}

Элемент	Температура, К										
	5	10	30	50	100	200	300	400	500	600	800
Серебро	0,0177	0,111	3,36	7,94	14,7	17,8	18,9	19,5	20,2	21,0	23,1
Алюминий	—	0,051	1,04	3,62	12,3	20,2	23,3	24,5	26,2	28,1	32,6
Золото	0,026	0,228	4,22	7,65	11,5	13,3	14,0	14,5	15,0	15,5	16,5
Алмаз	—	$4 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	0,004	0,05	0,45	1,0	1,80	2,53	3,09	3,83
Медь	0,009	0,021	1,00	3,87	10,0	15,2	16,7	17,3	17,9	18,6	20,1
Железо	0,017	0,040	0,22	1,00	5,09	9,96	12,0	1,32	14,4	15,5	16,5
Никель	0,02	0,05	0,26	1,64	6,61	11,4	13,0	13,7	14,9	16,9	16,7
Свинец	0,11	3,02	17,0	21,8	25,4	27,3	28,5	29,6	31,73	33,3	—
Вольфрам	$4,4 \cdot 10^{-4}$	0,007	0,2	0,8	2,3	4,1	4,6	4,6	4,6	4,7	4,8

Анализ зависимости температурного коoeffициента линейного расширения α представляет немалый интерес (табл. 12). Отметим только то, что бросается в глаза сразу: 1) при низких температурах (5–10 К) коoeffициент α на несколько порядков меньше, чем при комнатных и более высоких температурах; 2) при температуре, стремящейся к абсолютному нулю, коoeffициент α у всех веществ стремится к нулю.

Пример 2. Алюминиевый шарик массой $m=50$ г опущен на нити в керосин. Насколько изменится сила натяжения нити, если всю систему нагреть на $\Delta T=50$ К?

Решение. Температурный коoeffициент объёмного расширения керосина в 14 раз больше, чем у алюминия. Поэтому выталкивающая сила Архимеда F_A уменьшится в основном из-за уменьшения плотности керосина.

Найдём плотность керосина после нагревания:

$$\rho_{k0} = \frac{m_k}{V_{k0}} \text{ и } \rho_k = \frac{m_k}{V_k}, \quad V_k = V_{k0}(1 + \beta_k \Delta T).$$

$$\text{Решая совместно, получим: } \rho_k = \frac{\rho_{k0}}{(1 + \beta_k \Delta T)} \quad \text{или} \quad \rho_k \approx \rho_{k0}(1 - \beta_k \Delta T).$$

До нагревания сила натяжения нити равна:

$$F_{H0} = mg - F_{A0} = mg - \rho_{k0} \cdot gV = mg(1 - \rho_{k0}/\rho_{ал}).$$

$$\text{После нагревания} \quad F_H = mg(1 - \rho_k/\rho_{ал}) = mg \cdot \left(1 - \frac{\rho_{k0}(1 - \beta_k \Delta T)}{\rho_{ал}} \right).$$

$$\text{Изменение силы натяжения: } \Delta F_H = F_H - F_{H0} = mg \cdot \frac{\rho_{k0} \beta_k \Delta T}{\rho_{ал}}.$$

Из таблиц возьмем: $\beta_k = 0,955 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$; $\rho_{k0} = 0,80 \text{ г/мл}$; $\rho_{ал} = 2,7 \text{ г/мл}$.

Значит, сила натяжения нити увеличилась на $\Delta F_H = 7 \text{ мН}$. \blacktriangleleft

§ 61. Получение и применение кристаллов

Слово кристалл, в переводе с греческого *kristallos* означало первоначально лёд. Древние полагали, что горный хрусталь (бесцветный кристалл кварца), впервые обнаруженный в Альпах, есть не что иное, как простой лёд, навсегда застывший в горах, вследствие сильных холодов.

Всем известные драгоценные камни – это монокристаллы, которые ценились и ценятся за свою красоту, прочность и редкость. Причём природные камни изумруд, рубин, сапфир и др. драгоценные минералы с микровключениями ценятся даже выше, чем чистые синтетические кристаллы. Ранее они использовались только в ювелирном деле.

Развитие науки и техники привело к тому, что многие природные кристаллы стали очень нужными для изготовления деталей приборов, машин и др. Возникла задача разработки технологии искусственного изготовления монокристаллов многих элементов и химических соединений. Современная история создания искусственных самоцветов началась в 1857 г., когда французский химик Марк Годен, сплавив сульфат калия и алюминия с хроматом калия получил кристалл рубина массой 1 карат (0,2 г).

Существуют различные методы выращивания монокристаллов: кристаллизация из расплава, кристаллизация из раствора, выращивание «с флюсом» – кристаллизация из раствора в расплаве. С 1896 г. французский ученый Август Вернель первым применил метод плавления в пламени для искусственного выращивания монокристаллов таких, как корунд, шпинель и др. Главное внимание в этом процессе уделяется соотношению между дефектами в затравочном кристалле и условиями, при которых выращивается буля. Затравка должна быть чистым монокристаллом, ибо дефекты в затравке наследуются выращиваемым кристаллом. Основное несовершенство данного метода в том, что между горячей областью пламени, где находится расплавленная вершина були, и более холодной нижней частью существует градиент температур.

Выращивание монокристаллов многих веществ затруднено из-за плохой растворимости и/или высокой температуры плавления. Например, для получения кристалла рубина нужно расплавить порошок оксида алюминия, а его температура плавления равна 2030°C. Порошок оксида алюминия подается из бункера дискретными дозированными порциями в кислородно-водородное пламя, плавится и в виде капель падает на стержень из тугоплавкого материала. На стержне вырастает кристалл рубина (рис. 12).

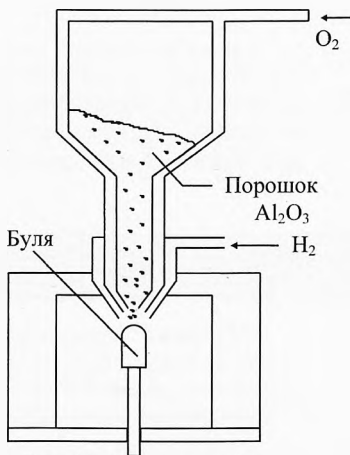


Рис. 12. Выращивание кристалла рубина

* Буля – это кристалл почти цилиндрической формы, полученный каким-либо искусственным методом.

Применение кристаллов очень разнообразно. Около 80% всех добываемых природных алмазов и все искусственные используются в промышленности. Синтетические алмазы не используются в ювелирной промышленности, потому что не удаётся сделать их прозрачными, как природные, но по твёрдости они не уступают природным. Синтетические рубины и другие драгоценные камни по механическим и оптическим свойствам практически не отличаются от соответствующих природных минералов, но знатоки предпочитают природные, если хватает средств. В недорогих ювелирных изделиях используются только синтетические рубины. Алмазные инструменты применяются для обработки деталей и самых твёрдых материалов (от бормашинок в кабинетах стоматологов (зубная ткань — одно из самых прочных соединений на Земле, и только алмазный бур может успешно просверлить отверстие в зубе) до буровых инструментов при разведке и добыче полезных ископаемых). *Алмаз — король камней*, он твёрже любого твёрдого материала, встречающегося на Земле. У него самая высокая оценка по десятибалльной шкале твёрдости Мооса. Алмазы служат опорными камнями в хронометрах высшего класса для морских судов и в других особо точных приборах. На алмазных подшипниках нет следов износа даже после 25 млн. оборотов.

Из 1 кг синтетического рубина изготавливают около 40 тысяч опорных камней для часов. Нитеводители из рубиновых стержней на фабриках химического волокна не изнашиваются, а стеклянные служат всего несколько дней. Большое применение имеют также рубиновые фильеры для протягивания нитей, проволоки различной толщины (до 0,01 мм). Фильера представляет собой кристалл конической формы, в котором при помощи лазера пробивается отверстие нужного диаметра.

Рубиновые стержни нашли применение в рубиновых лазерах.

Используется и биологическое действие некоторых кристаллов. Наиболее замечательным очистителем воды является опал халцедоновый чёрный.

Очень большая роль выпала на долю кристаллов в современной электронике. Большинство полупроводниковых дискретных элементов, микросхем, микропроцессоров выполнены из кристаллов германия и кремния с добавками других элементов.

§ 62. Дефекты в кристаллах.

Способы повышения прочности твердых тел

Поликристаллическими телами являются все металлические изделия — стальные каркасы зданий, мостов, рамы автомобилей, рельсы, станки, металлическая посуда и многое другое.

Важнейшей задачей науки и производства является создание достаточно прочных, надежных и экологически чистых машин и оборудования с минимальным металлопотреблением на единицу данной продукции.

Теоретический предел прочности многих материалов в десятки и сотни раз превосходит значения, получаемые при испытании реальных образцов. Причина расхождения теории и эксперимента — наличие внутренних и поверхностных дефектов в строении поликристаллических тел.

Дефекты в кристаллах – это устойчивые нарушения правильного расположения атомов или ионов в узлах кристаллической решетки, соответствующие минимуму потенциальной энергии кристалла.

Дефекты бывают точечные, линейные, поверхностные и объемные.

К точечным дефектам, размеры которых порядка атомных, относятся вакансии (незаполненные места), межузельные атомы, примесные атомы замещения и внедрения, а также их мелкие скопления.

Линейными (одномерными) дефектами являются цепочки точечных дефектов, дислокации. Дислокация в переводе с латинского означает смещение, перемещение – дефекты кристаллической решетки, искажающие правильное расположение атомных плоскостей. Дислокации отличаются от других дефектов в кристаллах тем, что значительное нарушение регулярного чередования атомов сосредоточено в малой окрестности некоторой линии, пронизывающей кристалл.

Простейшими видами дислокаций являются краевая и винтовая. В идеальном кристалле соседние атомные плоскости параллельны на всем своем протяжении. Если одна из атомных плоскостей обрывается внутри кристалла (рис. 13а), возникает краевая дислокация, край «лишней» полуплоскости является ее осью; схема расположения атомов в ядре при дислокации показана на рис. 13б.

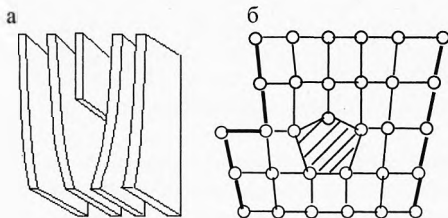


Рис. 13. Краевая дислокация

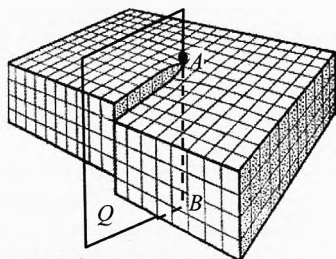


Рис. 14. Винтовая дислокация

При винтовой дислокации происходит частичный сдвиг атомных слоев по плоскости Q вдоль линии AB (рис. 14). На поверхности кристалла образуется ступенька, проходящая от точки A до края кристалла. Такой частичный сдвиг нарушает параллельность атомных слоев, кристалл как бы превращается в одну атомную плоскость, закрученную по винту вокруг линии AB .

Если переход от верхних горизонтов к нижним осуществляется поворотом по часовой стрелке, то дислокация называется правой, а если поворотом против часовой стрелки – левой.

При наличии в кристалле дислокаций и многих других нарушений упаковки разрушение кристалла облегчается, так как вместо одновременного разрыва всех связей между атомами двух плоскостей нужно разорвать меньшее количество связей.

Большинство современных методов упрочнения материалов базируются не на выращивании чистых кристаллов, что очень трудно, а на внедрении дополнительных дефектов, которые затрудняют перемещение других дефектов в кристаллах. Так, для увеличения прочности и/или других свойств стали применяется легирование – введение в расплав небольших добавок хрома, вольфрама, кремния, титана, никеля, марганца, молибдена и др.

Прочность можно увеличить и способами обработки металлов: термообработка,ковка, дробеструйная обработка и др., а также особенностью способа получения кристалла, например – высокоскоростной кристаллизацией.

То, что посторонние включения сильно влияют на свойства кристаллов, известно давно. Медь – первый металл, который люди использовали для изготовления орудий труда, но она малоприспособна в деле из-за своей мягкости. Однако было сделано важное открытие: если к меди добавить олово, то получается материал более прочный и лучше подходящий для изготовления оружия и орудий труда. Так наступил бронзовый век (с конца 4-го тысячелетия до начала 1-го тысячелетия до н. э.), который затем сменился железным веком.

И, наконец, о примесях. Кристалл оксида алюминия (Al_2O_3) бесцветен, но малые добавки хрома (0,05%) делают его розовым и превращают в рубин, который используется при изготовлении рубиновых лазеров. Большие добавки хрома в рубиновых лазерах не используются, так как это приводит к самогашению лазерного излучения. А при изготовлении ювелирных рубинов добавляют до 1,0% окиси хрома (Cr_2O_3) с целью увеличения насыщенности цвета. Из бесцветного кристалла Al_2O_3 можно получить сапфиры голубых и синих оттенков, добавляя в него различные сочетания примесей железа, титана и кобальта (0,2 – 0,3)%.

Лирическое отступление о том, как создаются материалы с заданными свойствами

Как-то в поезде по дороге в Москву автор встретился с лауреатом Ленинской и Государственной (Сталинской) премий, который оказался специалистом по броне. Он рассказал, что, получив задачу на создание еще более прочной брони, читает новые публикации на эту тему до тех пор, пока не пойдут одни повторы. Из огромного материала он выбирает ничтожное количество действительно ценной информации, подключает свои знания и способности. Он соединяет мысленно железо с теми или иными добавками и зрительно представляет, как атомы расположатся в пространстве, как они будут взаимодействовать. И после многочисленных мысленных экспериментов выбирает наиболее удачный и даёт предложение на изготовление пробы, и с минимумом опытов достигает хороших результатов. Образцы испытываются на полигоне. Добраться до испытаний непросто, потому что немало других конкурентов, но в конечном итоге лучшее пробивает себе дорогу.

§ 63. Физические свойства металлов

Металлическая связь имеет некоторое сходство с ковалентной, поскольку в их основе лежит обобществление валентных электронов. Однако электроны, осуществляющие ковалентную связь, находятся вблизи атомов и прочно связаны с ними. Механическое воздействие на кристалл с ковалентной связью вызывает смещение отдельных слоев атомов, в результате связи разрываются и кристалл разрушается. Электроны же, осуществляющие металлическую связь, свободно перемещаются по всему кристаллу и принадлежат всем его атомам. Поэтому механическое воздействие на кристалл с металлической связью вызывает смещение атомов, однако, вследствие свободного перемещения электронов по кристаллу, разрыва связей не происходит. «Электронный газ», как дети в семье, создает прочность металлической кристаллической структуре.

Для металлов характерна высокая пластичность. Она уменьшается в ряду Au, Ag, Cu, Sn, Pb, Zn, Fe. Золото, например, можно прокатывать в листы толщиной $8 \cdot 10^{-5}$ мм (50 атомных слоев!) и вытягивать в очень тонкие нити (из 0,5 г золота получают нить длиной 1 км). Тонкая золотая фольга подаётся в некоторых дорогих ресторанах как дополнение ко вторым блюдам, ибо золото благотворно влияет на работу желудочно-кишечного тракта, что улучшает состояние организма. По этой же причине золотые зубы лучше железных. Человек постепенно их съедает и вставляет новые, что ухудшает финансовое состояние, но улучшает работу ЖКТ. У людей со стальными вставными зубами имеется немаловажное преимущество. Стальные зубы значительно крепче золотых. Не обладают пластичностью Вi и Мп – это хрупкие металлы.

Для всех металлов характерен металлический блеск и непрозрачность, это связано с наличием свободных электронов, их экранирующим действием. Цвет многих металлов серый.

Наличием свободных электронов обусловлена хорошая электропроводность и теплопроводность металлов. Последняя обусловлена высокой подвижностью свободных электронов и колебательным движением ионов, благодаря чему происходит быстрое выравнивание температуры в массе кристалла. Наибольшая теплопроводность у серебра и меди, наименьшая – у висмута и ртути. В обычных условиях теплопроводность у большинства металлов изменяется в той же последовательности, что и электропроводность.

Различна плотность металлов.

Она тем меньше, чем меньше атомная масса элемента – металла и чем больше радиус его атома. Самый легкий из металлов – литий (плотность 530 кг/м^3), самый тяжелый – осмий (плотность 22600 кг/м^3). Металлы с плотностью до 5000 кг/м^3 называются легкими, остальные – тяжелыми.

Разнообразны температуры плавления и кипения металлов (рис. 15).

Металлы, плавящиеся при температуре ниже 1000°C называются легкоплавкими (наиболее легкоплавка ртуть, $t_{\text{пл}} = -38,9^\circ\text{C}$). Металлы, плавящиеся при температуре выше 1000°C , называются тугоплавкими (самый тугоплавкий – вольфрам, $t_{\text{пл}} = 3390^\circ\text{C}$).

Большой разброс в температурах плавления и кипения объясняется различием прочности связи между атомами в металлах.

Исследования показали, что в чистом виде металлическая связь характерна лишь для щелочных и щелочноземельных металлов. У других, особенно переходных, часть валентных электронов локализована, то есть осуществляет ковалентные связи между соседними атомами. А поскольку ковалентная связь прочнее металлической, то у переходных металлов температуры плавления и кипения существенно выше, чем у щелочных и щелочноземельных.

Металлы отличаются по твердости. Самый твердый – хром (режет стекло), а самые мягкие – рубидий, цезий (режутся ножом). Металлы имеют кристаллическое строение. Большинство из них кристаллизуется в кубическую решетку.

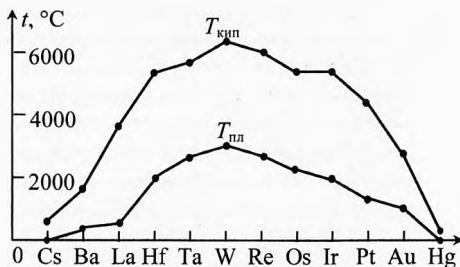


Рис. 15. Температуры кипения и плавления металлов

§ 64. Жидкие кристаллы

В 1889 г. австрийский ботаник Фридрих Рихард Корнелиус Рейнитцер (1857–1927) открыл жидкокристаллическое состояние вещества. При нагревании кристалл холестерилбензоата плавится при температуре 145°C и превращается в мутную жидкость. При дальнейшем нагревании до температуры 179°C она внезапно становится прозрачной. В интервале от 145°C до 179°C она является жидким кристаллом. Молекулы в ней расположены упорядоченно, и она имеет свойства кристалла. В то же время она течёт, принимает форму сосуда, образует капли, правда не сферические, а вытянутые, то есть имеет свойства и жидкости, и кристалла. Но при температуре 179°C порядок исчезает, происходит как бы второе плавление (жидкого кристалла) и холестерилбензоат превращается в обычную жидкость.

Аналогично ведут себя и другие вещества, в которых наблюдается жидкокристаллическое строение на определенном интервале температур (специфичном для каждого вещества) с температурой фазового перехода от -20°C до $+400^{\circ}\text{C}$. Молекулы жидкокристаллического состояния вещества содержат очень большое число атомов и имеют, как правило, вытянутую форму с длиной, на порядок большей толщины. Но размеры молекул остаются микроскопическими, например, длина – 40Å , а толщина – 5Å .

Существуют три типа жидких кристаллов с тремя различными видами порядка расположения молекул в них.

На рис. 14 а и б схематически изображены молекулы двух из них в виде палочек (хотя форма их значительно сложнее).

Жидкие кристаллы, в которых центры молекул расположены хаотично, но продольные оси примерно параллельны, называются нематическими кристаллами (нематики от греч. *nematos* – нить) (рис. 16 а).

Возможен линейный порядок другого вида. Здесь, кроме одинаково ориентированного продольно-осевого расположения (рис. 16 б), молекулы образуют правильно чередующиеся слои. Это смектические жидкие кристаллы (смектики в переводе с греч. *smegma* – мыло). Хорошим примером смектиков служит мыльный раствор, в котором тонкие слои из молекул мыла чередуются с тонкими слоями молекул воды. С такой структурой связано моющее действие раствора: слои легко скользят относительно друг друга, частицы мыла отнимают грязь и отдают её воде.

Наиболее сложно устроены холестерики (греч. *chole* – желчь и *stereos* – твердый). Порядок расположения в них похож на нематический, но молекулы холестерика отличаются от молекул нематика тем, что имеют на своем конце выступающий отросток из одного или нескольких атомов. Из-за него «укладка молекул» по длине сопровождается закручиванием структуры молекул вокруг оси, перпендикулярной их продольным осям.

Термин же «холестерик» возник потому, что подобная структура является характерной для жидких кристаллов, образуемых эфирами холестерина. Из-за особенностей своего строения молекулы холестерина имеют способность прилипать к

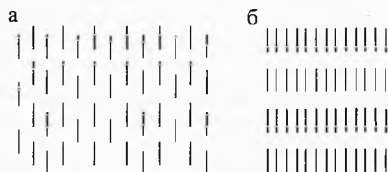


Рис. 16. Нематические и смектические жидкие кристаллы

стенкам кровеносных сосудов человека. В избыточных количествах (особенно с возрастом) холестерина способствуют сужению сосудов, что ведет к нарушению кровоснабжения мозга кислородом, в результате чего развивается атеросклероз, слабеет память.

Далеко не каждое вещество, имеющее молекулы удлинённой формы, может быть жидким кристаллом. В среднем на каждые 200 сложных органических соединений приходится одно, способное к образованию жидких кристаллов. Тем не менее их уже насчитывается несколько тысяч.

В отличие от твердых кристаллов, где дальний порядок трехмерный, в жидких кристаллах дальний порядок существует лишь в одном направлении. Опыт показывает, что электрические, магнитные, оптические и другие свойства жидких кристаллов различны в разных направлениях.

Особенно интересно, что оптические свойства жидких кристаллов можно изменять воздействием электрических и магнитных полей, изменением температуры, давления и т. д.

На практике используются очень тонкие слои жидкого кристалла 1 (рис. 17), заключенные между пленкой поляризатором 2 и пленкой-отражателем 4, разделенными изолирующими прокладками 3. Под действием электрического поля в жидком кристалле поворачивается плоскость поляризации света, что делает ячейку непрозрачной. Такого типа ячейки используются в устройствах индикации информации. Сотни таких ячеек образуют циферблат электронных часов. Они используются в калькуляторах, цифровых и измерительных приборах, устройствах автоматики, экранах мобильных устройств, LCD-мониторах и телевизорах и др. В дальнейшем практическое применение жидких кристаллов будет еще более широким и нестандартным. Например, фирма Sony изобрела удивительные очки, в которых вместо обычных линз используются жидкокристаллические панели. Их можно подключать к карманному электронному блоку и использовать в качестве экранов стереотелевизоров с виртуальным размером диагонали около 20 м. При этом вы становитесь «участником» событий, разыгрываемых на экране. Эти устройства можно использовать в устройствах виртуальной реальности. Отметим, что основным сырьём для изготовления жидких кристаллов являются отходы мясокомбинатов и др. предприятий пищевой промышленности.

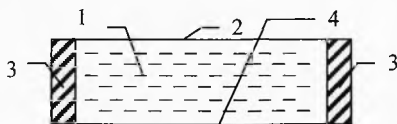


Рис. 17. Жидкие кристаллы

§ 65. Кристаллы и жизнь

Кристалл – символ неживой природы, но простейшие живые организмы – вирусы – могут соединяться в кристаллы, где они не обнаруживают никаких признаков живого. Однако при благоприятных условиях (внутри клеток живого организма) они начинают двигаться, размножаться. *Жизнь появляется там и тогда, где и когда для этого появляются условия.*

Кристалл и живой организм – примеры крайних возможностей природы. В кристалле неизменными остаются не только сами атомы и молекулы, но, как правило, и их взаимное расположение в пространстве. В живом же организме постоянно изменяется не только расположение, но и химический состав: одни химические соединения разлагаются на более простые, другие, наоборот, синтезируются

из простых, непрерывно идут процессы ассимиляции и диссимиляции. Одни клетки отмирают, другие нарождаются. Но при всех процессах организм остаётся сам собой, хотя, к примеру, человек полностью обновляется за 3 года, кроме железа в крови. Более того, потомки каждого живого организма наследуют многие черты отца и матери, и с помощью преемственности поколений природа даёт шанс бессмертия роду.

Значит, в организме как-то записывается вся информация, причём, как оказалось, в каждой клетке! Воспроизведение точной копии живого организма называется *клонированием*. В 1996 году клонированием выращена овца. В дальнейшем были проведены успешные эксперименты по клонированию различных млекопитающих с использованием ядер, взятых из взрослых соматических клеток животных (мышь, коза, свинья, корова), а также взятых у мёртвых животных и у замороженных на несколько лет.

Носителями «программы» являются молекулы ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота). У человека такие молекулы имеют диаметр 20\AA , а длину несколько сантиметров, укладываясь спирально клубком внутри клеток. Наблюдать их можно с помощью микроскопа. Молекулы ДНК управляют процессами жизнедеятельности клетки и являются носителями всех наследственных признаков организма.

В то же время, представляя собой двойную спираль из небольшого числа сравнительно простых соединений, повторяющихся в строго определённом для данного вида порядке, с точки зрения физики, молекулы ДНК – это особый вид твёрдого тела – одномерные, аperiodические кристаллы. Следовательно, кристаллы – это не только символ неживой природы, но и основа жизни на Земле.



Упражнения

- 1** Под действием силы в 100 Н проволока, длиной 5 м и сечением $2,5\text{ мм}^2$, удлинилась на 1 мм . Определить напряжение и модуль Юнга.
- 2** Стальная проволока сечением $2,5\text{ мм}^2$ и длиной 10 см сложена вдвое и подсоединена к грузу. Какова жёсткость системы? $E=2,2 \cdot 10^{11}\text{ Па}$.
- 3** Металлический стержень, расположенный вертикально, поднимают вверх под действием силы, приложенной к верхнему концу стержня, с ускорением 2 м/с^2 . Масса стержня 8 кг . Определить силу натяжения в поперечном сечении, которое делит его в отношении $1:2$ от верхнего конца.
- 4** К железному тросу длиной $l=10\text{ м}$ и диаметром $d=2\text{ см}$ подвешен груз массой $m=1\text{ т}$. Определить удлинение троса. Модуль Юнга $E=2 \cdot 10^{11}\text{ Па}$; плотность железа $\rho=7,9 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$.
- 5** Определить модуль Юнга алюминия, если груз массой $m=210\text{ кг}$, подвешенный к алюминиевому стержню поперечного сечения $S=150\text{ мм}^2$, даёт относительную деформацию $0,020\%$, то есть $\Delta l/l=2,0 \cdot 10^{-4}$.
- 6** При какой наименьшей длине железный стержень, будучи подвешен за один конец, разорвется под действием собственной тяжести? Предел прочности $\sigma_{\text{пч}}=5,88 \cdot 10^8\text{ Па}$, $\rho=7,9 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$.
- 7** При океанологических исследованиях для взятия пробы грунта со дна океана на стальном тросе опускают особый прибор. Какова предельная глубина

погружения при коэффициенте безопасности $n=3$? Массой прибора пренебречь. Недостающие данные взять из таблиц.

8 Найти диаметр стального стержня крюка подъемного крана, чтобы при равномерном подъеме груза весом $P=25$ кН напряжение не превышало $\sigma=6,0 \cdot 10^7$ Па.

9 Толщина биметаллической пластинки, составленной из одинаковых половинок стали и цинка, равна $d=10$ мм. Определить радиус кривизны R пластинки при повышении температуры на $\Delta t=11^\circ\text{C}$. Коэффициент линейного расширения цинка $\alpha_1=25 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, а стали – $\alpha_2=12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

10 К стальной пластине толщиной $d=1$ см и площадью поверхности $S=0,01 \text{ м}^2$ приложена касательно сила $F_\tau=400$ Н (рис. 18). Чему равен угол сдвига? На сколько атомных диаметров сместился верхний слой молекул пластины относительно нижнего? Модуль сдвига $G=80$ ГПа. Диаметр атома железа $d_0=3,5 \text{ Å}$.

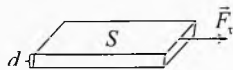


Рис. 18. Деформация сдвига

11 Стеклоанная колба при 0°C вмещает 250 см^3 ртути. Сколько ртути выльется, если нагреть колбу с ртутью до 100°C ? $\alpha_{\text{ст}}=9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. $\beta_{\text{рт}}=1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

12 Стальной стержень жёстко закреплён между двумя поверхностями. Какое напряжение возникнет в нём при нагреве на 1°C ? $E=220$ ГПа; $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

13 Насколько маятниковые часы будут уходить вперед за сутки при $t_0=0^\circ\text{C}$, если они выверены при $t=20^\circ\text{C}$. Линейное расширение материала маятника $\alpha=0,000012 \text{ K}^{-1}$.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

1 $\sigma = \frac{F}{S} = 40 \text{ МПа}$; $E = \frac{\sigma l}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

2 $k = \frac{E \cdot 2S}{l/2} = 2,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$.

3 $T = \frac{2}{3} m(a + g) = 64 \text{ Н}$.

4 Растяжением стержня за счёт собственного веса пренебрежём (его масса равна всего $m_{\text{ст}} = \rho \cdot V = \rho \cdot l \cdot (\pi d^2/4) = 25 \text{ кг}$), то есть будет считать, что $F \approx mg$. Тогда:

$$\begin{cases} \sigma = F/S, \\ \sigma = E \frac{\Delta l}{l}, \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{mg}{ES} = \frac{4mg}{\pi d^2 E}; \quad \Delta l = \frac{4mgl}{\pi d^2 E} \approx 1,6 \text{ мм}.$$

5 $\frac{mg}{S} = E \frac{\Delta l}{l}; \Rightarrow E = \frac{mgl}{S \Delta l} = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

6 $\sigma_{\text{пч}} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho l S g}{S}; \Rightarrow l = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{\rho g} = 7,6 \text{ км}$.

7 Однородный трос оборвется вверх. Предельная сила упругости должна быть в n раз больше разности между силой тяжести троса и силой Архимеда.

$$\sigma_{\text{пл}} = n \frac{F_{\text{т}} - F_{\text{а}}}{S} = n \frac{\rho_{\text{ст}} l S g - \rho_{\text{вод}} l S g}{S}; \Rightarrow l = \frac{\sigma_{\text{пл}}}{n g (\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{вод}})} = 2,9 \text{ км.}$$

Ответ. Предельная глубина погружения 2,9 км.

$$\text{8 } \sigma = \frac{P}{S}, S = \frac{\pi d^2}{4}; \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma}} = 2,3 \text{ см.}$$

9 При нагревании обе полоски стремятся расширяться, причём цинковая в большей степени, чем стальная. Грани, которыми они соединены, вынуждены расширяться одинаково. При этом в цинковой полоске возникает упругое напряжение из-за сжатия её стальной полоской, и, наоборот, стальная полоска испытывает упругую деформацию растяжения (рис. 19). Будем считать в оценочном варианте, что свободные грани полосок расширяются при нагревании практически свободно. Запишем для них закон линейного расширения: $l_1 = l(1 + \alpha_1 \Delta t)$, $l_2 = l(1 + \alpha_2 \Delta t)$, где l – длина пластинки до нагревания. С другой стороны, длины свободных граней l_1 и l_2 после нагревания можно выразить через радиус кривизны и др. геометрические параметры: $l_1 = (R + d/2)\varphi$, $l_2 = (R - d/2)\varphi$.

Решим совместно эти четыре уравнения:

$$\frac{R + d/2}{R - d/2} = \frac{1 + \alpha_1 \Delta t}{1 + \alpha_2 \Delta t} \Rightarrow R = \frac{d(1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t / 2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t};$$

$$\Rightarrow R \approx \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t} \approx 7 \text{ м.}$$

Ответ. Радиус кривизны пластинки равен примерно 7 м.

10 Предположим, что деформация упругая. Тогда касательное напряжение σ_{τ} прямо пропорционально углу сдвига φ : $\sigma_{\tau} = G \cdot \varphi$, где $\sigma_{\tau} = F_{\tau}/S$. Значит, $\varphi = F_{\tau}/(G \cdot S)$; $\varphi = 5 \cdot 10^{-7} \text{ рад} = 0,1''$. Угол составляет всего 0,1 угловой секунды, значит деформация упругая. Линейное смещение: $x = \varphi \cdot d$; $x = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 50 \text{ \AA}$. Тогда относительное смещение $N = x/d_0$; $N = 14$, то есть верхний слой молекул сместился относительно нижнего всего на 14 атомных слоев.

$$\text{11 } V_{\text{рт}} = V_0(1 + \beta_{\text{рт}}\Delta t); V_{\text{ст}} = V_0(1 + 3\alpha_{\text{ст}}\Delta t); V_{\text{рт}} - V_{\text{ст}} = V_0(\beta_{\text{рт}} - 3\alpha_{\text{ст}})\Delta t = 3,8 \text{ см}^3.$$

Ответ. Из колбы выльется около 4 см³ ртути.

$$\text{12 } \sigma = E \cdot \Delta l / l_0; \Delta l = l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \Delta t; \Rightarrow \sigma = E \alpha \Delta t = 2,64 \text{ МПа.}$$

13 Воспользоваться формулой Гюйгенса ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$) для двух случаев и зависимостью длины маятника от температуры:

$$l = l_0(1 + \alpha t); \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{l}{l_0}} = \sqrt{1 + \alpha t} \approx 1 + 0,5\alpha t; \Delta \tau_{\text{сут}} = \tau_{\text{сут}} \cdot \frac{T - T_0}{T_0} = 0,5\alpha t \cdot \tau_{\text{сут}} \approx 10 \text{ с;}$$

Ответ. Часы будут отставать за сутки на 10 с.

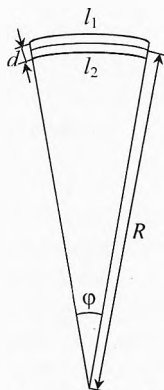


Рис. 19. Изгиб биметаллической пластинки

Глава 8. Поверхностное натяжение

Я хочу научить вас тому, чего не знаю сам.

Иоганн Вольфганг Гёте

§ 66. Газ и жидкость

Любая жидкость может превращаться в газ (испаряться). Любой газ можно превратить в жидкость (сконденсировать) при температуре ниже критической.

Чем отличается жидкое состояние вещества от газообразного? В первую очередь – плотностью. Плотность жидкостей в сотни и тысячи раз больше, чем газа при атмосферном давлении. Молекулы жидкости находятся практически вплотную (расстояния между центрами соседних молекул того же порядка, что и размеры молекул). Но, сжав газ при температуре выше критической до плотности жидкости, мы не получим жидкость. Если давление снять, то молекулы сразу разлетятся, а жидкий азот или кислород при комнатных условиях останется жидким, хотя и будет быстро испаряться.

Вещество переходит в жидкое состояние, когда энергия молекулярного притяжения становится больше кинетической энергии хаотического движения молекул. Разница в критических температурах обусловлена разной энергией притяжения молекул разных веществ, находящихся в радиусах действия молекулярных сил. Чем меньше энергия притяжения молекул данной жидкости, тем ниже критическая температура.

Строгие формулы для вычисления молекулярных сил ещё не получены и вряд ли когда-нибудь будут получены, поэтому нет уравнения состояния жидкости, подобно уравнению состояния идеального газа. Но многие свойства жидкости изучены экспериментально.

Молекулы жидкости, как и молекулы газа, совершают непрерывное хаотическое движение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул определяет температуру тела и вычисляется по той же формуле, что и для газа:

$$E_k = \frac{3}{2} kT.$$

Хотя амплитуда колебаний молекул жидкости ограничена молекулярными силами, тем не менее молекулы могут перескакивать с одного места на другое. Поэтому жидкость обладает свойством текучести. Молекулярные движения позволяют различным жидкостям смешиваться (диффузия). Однако в жидкостях диффузия происходит значительно медленнее, чем в газах.

При нагревании жидкости, как и газы, расширяются, но гораздо менее заметно.

Сжимаемость жидкостей во много раз меньше, чем газов при нормальных условиях. Для уменьшения в 2 раза объёма газа, взятого при нормальных условиях, нужно изотермически повышать давление до 2-х атмосфер. А чтобы сжать воду всего на 1% объёма, нужно создать давление 200 атм, а ртуть – 2500 атм. Это свидетельствует о том, что молекулы жидкости расположены вплотную друг к другу и при попытке сжатия резко возрастают силы межмолекулярного отталкивания. Поэтому жидкости, в отличие от газов, сохраняют свой объём, а на границе с газом или паром образуют свободную поверхность.

В поле силы тяжести жидкость принимает форму сосуда, в который она налита. При свободном падении жидкость имеет собственную шарообразную форму, обусловленную силами поверхностного натяжения молекул. Ниже будут рассмотрены явления, связанные с существованием у жидкости свободной поверхности, – так называемые поверхностные явления.

§ 67. Поверхностная энергия

Почему форма мыльных пузырей сферическая? Почему в орбитальном космическом комплексе вылитая вода принимает форму шариков, а капли дождя почти сферичны? Почему малые капли любой жидкости при контакте между собой сливаются в одну?

Дело в том, что взаимодействие молекул в глубине жидкости с другими молекулами симметрично по всем направлениям. Поверхностный же слой жидкости слабо взаимодействует с другой фазой (паром и/или воздухом). Из-за этого часть молекул граничного ряда переходит внутрь жидкости, пока сила отталкивания со стороны второго ряда не уравнивает притяжение наружного ряда к внутренним рядам молекул (3-му, 4-му и т. д.). Аналогично уйдет внутрь часть молекул 2-го, 3-го и других близких к поверхности рядов молекул. Но с каждого последующего слоя их уходит всё меньше и меньше.

Таким образом, поверхностный слой жидкости, состоящий из нескольких рядов молекул, оказывается в растянутом состоянии по сравнению с внутренними. В поверхностном слое между молекулами возникает сила притяжения. Эта сила, направленная по касательной к поверхности, называется *силой поверхностного натяжения*.

Внутри жидкости молекулы располагаются на расстоянии, при котором минимальна (максимально отрицательна) энергия их взаимодействия. А это наблюдается на расстоянии между центрами молекул, равными эффективному диаметру молекул, когда средняя сила взаимодействия приблизительно равна нулю.

В поверхностном же слое расстояние между молекулами несколько больше, а значит, больше и энергия взаимодействия. Разность между энергией взаимодействия молекул поверхностного слоя и энергией взаимодействия такого же количества молекул, находящихся внутри жидкости, называется поверхностной энергией. Поверхностная энергия прямо пропорциональна площади поверхности и зависит от рода жидкости.

Из механики известно, что для любой консервативной силы (работа которой определяется только начальным и конечным положениями и не зависит от характера перехода) вводится понятие потенциальной энергии. Работа консервативной силы равна изменению потенциальной энергии, обусловленной этой силой, взятой с обратным знаком

$$A_{\text{конс}} = -\Delta E_{\text{п}}.$$

Нетрудно догадаться, что сила поверхностного натяжения является консервативной, а поверхностная энергия – потенциальной. Действительно, поверхностная энергия зависит от характера сил молекулярного взаимодействия и от числа молекул в поверхностном слое. Характер сил поверхностного натяжения определяется родом вещества и в однородной жидкости проявляется одинаково. Число молекул в поверхностном слое для данной жидкости прямо пропорционально её площади, ибо толщина его в любом месте под поверхностью одинакова (несколько молекулярных слоев). Поэтому поверхностная энергия прямо пропорциональна площади поверхности

$$E_{\text{п}} = \sigma \cdot S.$$

Коэффициент поверхностного натяжения σ в СИ измеряется в Дж/м².

Коэффициент поверхностного натяжения σ (или просто поверхностное натяжение) характеризует зависимость поверхностной энергии от характера взаимодействия молекул поверхностного слоя между собой и с контактируемой внешней фазой (средой). Поверхностное натяжение равно поверхностной энергии, приходящейся на единицу поверхности (удельная свободная поверхностная энергия).

При любом способе изменения площади свободной поверхности изменение поверхностной энергии будет равно произведению поверхностного натяжения на изменение площади поверхности:

$$\Delta E_{\text{п}} = E_{\text{п}2} - E_{\text{п}1} = \sigma S_2 - \sigma S_1 = \sigma \Delta S,$$

$$\Delta E_{\text{п}} = \sigma \Delta S.$$

Для увеличения площади поверхности сторонняя сила должна совершать положительную работу $A_{\text{ст}}$. И если нет других энергетических изменений в данной жидкости, то работа внешней силы будет равна (согласно закону сохранения энергии) изменению поверхностной энергии: $A_{\text{ст}} = \Delta E$. Эта работа при медленном равномерном увеличении поверхности совершается

только против сил поверхностного натяжения, значит, равна по модулю и противоположна по знаку работе сил поверхностного натяжения: $A_{\text{ст}} = -A_{\text{п}}$.

Таким образом, работа сил поверхностного натяжения равна изменению поверхностной энергии, взятому с обратным знаком:

$$A_{\text{п}} = -\Delta E_{\text{п}}$$

Силы поверхностного натяжения стремятся (в соответствии с принципом наименьшего действия) уменьшить площадь свободной поверхности (поверхностную энергию).

Капли определенной жидкости при контакте сливаются в одну потому, что при этом уменьшается общая поверхность и поверхностная энергия*.

Всем известно, что чем стоять – лучше сидеть, а чем сидеть – лучше лежать. Эта фраза отражает известный в науке принцип наименьшего действия, который можно сформулировать следующим образом.

Система, предоставленная самой себе, стремится к минимуму потенциальной энергии.

Любая жидкость при свободном падении и отсутствии внешних сил (будь то в космическом корабле на орбите или в трубке с откачанным воздухом на земле, а при малых скоростях и в воздухе) принимает сферическую форму. Это обусловлено тем, что в соответствии с принципом наименьшего действия, капли стремятся принять форму с минимальным значением энергии поверхностного натяжения, которая пропорциональна площади поверхности тела. А при данном объеме тела площадь поверхности будет минимальной, когда оно принимает форму шара.

§ 68. Сила поверхностного натяжения

Поверхностное натяжение σ имеет кроме энергетического определения и силовое. Получим его, а заодно и формулу для вычисления силы поверхностного натяжения. Рассмотрим мыльную плёнку (рис. 1), образованную

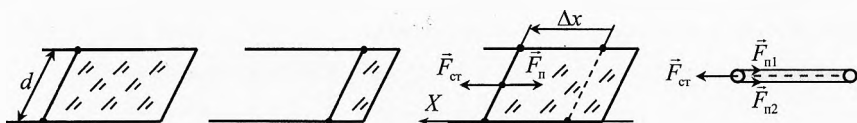


Рис. 1. Мыльная плёнка

* Надо отметить, что очень большая капля не устойчива и поэтому она разрывается на множество мелких капель.

на прямоугольнике с одной подвижной перекладиной длиной d . При отсутствии трения и внешних сил поверхность будет сокращаться, и подвижная перекладина притянется к неподвижной. Это происходит потому, что в поверхностном слое плёнки действует сила притяжения между молекулами касательно к её поверхности, стремящаяся уменьшить площадь поверхности.

Суммарная касательная к поверхности сила притяжения всех молекул поверхностного слоя называется *силой поверхностного натяжения*. Эта сила одинакова по любой оси, касательной к поверхности жидкости, ибо молекулы поверхностного слоя растягиваются одинаково во все стороны. Наиболее сильно взаимодействуют молекулы 1-го слоя, в ниже лежащих слоях сила притяжения уменьшается, а к 6-му – 10-му слою средняя сила притяжения становится равной 0 (см. рис. 2). Толщина поверхностного слоя воды $(2 \div 4) \cdot 10^{-7}$ см.

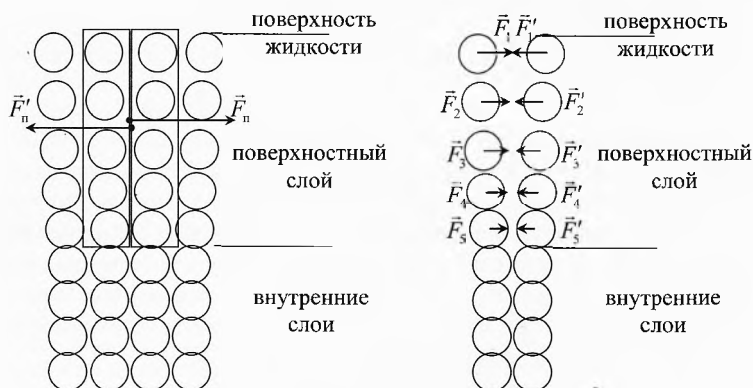


Рис. 2. Поверхностный слой жидкости

Растянем плёнку, приложив к перекладине внешнюю силу $F_{\text{ст}}$, равную по модулю силе поверхностного натяжения (рис. 1).

Так как плёнка растягивается по длине d планки, а у плёнки два поверхностных слоя (сверху и снизу), то силу поверхностного натяжения нужно брать на длине $l = 2d$.

Пусть перекладина сместилась на Δx , тогда сила поверхностного натяжения совершила отрицательную работу $A_n = -F_n \Delta x$. При этом площадь плёнки увеличилась на $\Delta S = l \cdot \Delta x$, а поверхностная энергия – на

$$\Delta E_n = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot l \cdot \Delta x.$$

Поскольку $A_n = -\Delta E_n$, то $-F_n \cdot \Delta x = -\sigma \cdot l \cdot \Delta x \Rightarrow$

$$F_n = \sigma l.$$

Сила поверхностного натяжения равна произведению поверхностного натяжения на длину участка поверхности, на котором рассматривается действие этой силы.

Из этой формулы следует силовое определение *поверхностного натяжения* σ :

$$\sigma = \frac{F_n}{l}.$$

Поверхностное натяжение σ определяет силу, обусловленную межмолекулярными взаимодействиями поверхностного слоя. Поверхностное натяжение равно силе поверхностного натяжения, приложенной к единице длины контура, ограничивающего поверхность данной фазы.

Эта сила направлена касательно поверхности и перпендикулярно ограничивающему контуру.

Энергетическое и силовое определения поверхностного натяжения для жидкостей совпадают. Для твёрдых тел они не эквивалентны.

Поверхностное натяжение может быть выражено в Н/м, что не противоречит выражению этой величины в Дж/м². Действительно:

$$1 \text{ Дж/м}^2 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/м}^2 = 1 \text{ Н/м}.$$

Поверхностное натяжение представляет собой основную термодинамическую характеристику поверхностного слоя жидкостей и твёрдых тел на границе с различными фазами (газами, жидкостями, твёрдыми телами).

**Таблица 8. Поверхностное натяжение воды
в зависимости от температуры**

$t, ^\circ\text{C}$	0	20	50	100	150	200	250	300	350	374
$\sigma, \text{мН/м}$	75,5	72,88	67,77	58,91	48,68	37,77	26,13	14,29	3,64	0

**Таблица 9. Поверхностное натяжение некоторых жидкостей σ , мН/м,
в зависимости от температуры t , $^\circ\text{C}$**

Температура \ Вещество	0	10	20	30	40	50	100
Бензол	-	30,24	28,88	27,49	26,14	24,88	-
Этиловый спирт	24,4	23,6	22,8	21,9		20,1	15,5
Глицерин	-	-	59,4	59,0		58,0	54,2
Ацетон	26,2	25,0	23,7	22,5		19,9	-
Уксусная кислота	-	-	27,8	26,8		24,8	19,8
Анилин	45	44	42,9	41,8	40,7	39,5	33,7
Нитробензол	46,6	45,2	43,9	42,7	41,5	40,2	34,4
Эфир диэтиловый	19,4	18,2	17,0	15,8		13,5	8,0

Поверхностное натяжение входит в полтора десятка уравнений физики, физической и коллоидной химии, электрохимии. Поверхностное натяжение измерено для многих чистых веществ и смесей (растворов, расплавов) в широком интервале температур, давлений, составов жидкостей и для различной природы граничной фазы. Для твёрдых тел измерения сопряжены с большими трудностями.

Поверхностное натяжение большинства веществ очень чувствительно к наличию примесей в самой фазе и в граничащей фазе. Поверхностное натяжение всех веществ уменьшается с повышением температуры и при критической температуре становится равным 0 (см. табл. 8 и 9).

§ 69. Примеры решения задач на поверхностное натяжение

✎ **Пример 1.** Оценить среднюю силу притяжения соседних молекул воды в поверхностном слое, если $\sigma=73$ мН/м. Число слоев молекул в поверхностном слое взять равным $z=5$. Диаметр молекулы воды $d=3,2 \cdot 10^{-10}$ м. (рис. 3).

➔ **Решение.** Средняя сила взаимодействия двух соседних молекул равна отношению силы поверхностного натяжения на некоторой длине l к количеству молекул в поверхностном слое на этой длине

$$F_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{н}}}{N}; \quad F_{\text{н}} = \sigma \cdot l; \quad N = z \cdot N_1,$$

где N_1 – число молекул в поверхностном слое на этой длине l :

$$N_1 = \frac{l}{d} \Rightarrow N = z \cdot \frac{l}{d}.$$

$$\text{Тогда } F_{\text{ср}} = \frac{\sigma \cdot l \cdot d}{z \cdot l} = \frac{\sigma \cdot d}{z} \Rightarrow F_{\text{ср}} = \frac{\sigma \cdot d}{z}$$

$$F_{\text{ср}} = \frac{73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м} \cdot 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}}{5} \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ Н} = 5 \text{ пН.} \quad \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Средняя касательная к поверхности сила взаимодействия двух молекул воды в поверхностном слое равна 5 пН.

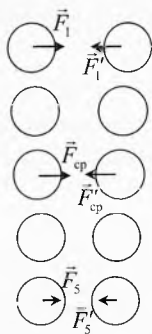


Рис. 3. Поверхностный слой

✎ **Пример 2.** Оценить, при каком радиусе форма ртутных капель, лежащих на стекле, будет близкой к сферической. Поверхностное натяжение ртути при 25 °С равно $\sigma=465$ мН/м. Плотность ртути $\rho=1,36 \cdot 10^4$ кг/м³.

➔ **Решение.** Как известно, ртуть не смачивает стекло. Это означает, что силы межмолекулярного взаимодействия молекул ртути между собой значительно больше, чем молекул ртути с молекулами стекла. Поэтому можно пренебречь энергией молекулярного взаимодействия ртути со стеклом.

На каплю, лежащую на столе, кроме силы тяжести действует и сила реакции опоры со стороны стола, поэтому капля деформируется и принимает такую форму, чтобы сумма потенциальной энергии силы тяжести относительно стола и поверхностной энергии была минимальной (рис. 4).

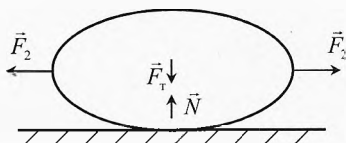


Рис. 4. Капля ртути на стекле

Каждый нижний слой жидкости является опорой для вышележащего. Поэтому он действует силой реакции на вышележащий слой, т. е. создаёт на него давление. Таким образом, благодаря неподвижной опоре, внутри жидкости создаётся давление (гидростатическое), максимальное у нижнего слоя и убывающее в направлении к верхнему. По закону Паскаля давление в жидкости одинаково на данной высоте по всем направлениям. Силы гидростатического давления \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , действующие на жидкость в горизонтальном направлении, приводят к её растеканию.

Растеканию жидкости на опоре препятствуют силы поверхностного натяжения, которые стремятся сократить площадь поверхности капли. Если капля маленькая, сила тяжести мала, поэтому мала сила реакции опоры и гидростатическое давление в капле. Значит, малы и силы давления \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , вызывающие её растекание. Поэтому малые капли росы на листьях и ртути на стекле практически сферичны.

Оценим радиус капель, близких по форме к сферичным.

Как написано выше, капля принимает такую форму, что сумма энергии силы тяжести и энергии поверхностного натяжения минимальна. Энергия силы тяжести уменьшается при деформации капли (понижается высота центра тяжести), а поверхностная энергия минимальна, когда капля имеет сферическую форму. Капля будет близкой к сферической, когда поверхностная энергия E_n значительно превосходит энергию силы тяжести, скажем, на один порядок (в 10 раз). Тогда полная потенциальная энергия будет составлять от поверхностной всего 10%. Итак, примем

$$E_n = 10E_\tau. \quad (1)$$

$$E_n = S_n \sigma; S_n = 4\pi r^2; \Rightarrow E_n = 4\pi r^2 \cdot \sigma \quad (2)$$

$$E_\tau = mgh_n; h_n = r; m = \rho V; V = \frac{4}{3}\pi r^3; \Rightarrow E_\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho g r. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим: $4\pi r^2 \cdot \sigma = 10 \cdot \frac{4}{3}\pi r^4 \cdot \rho g$;

$$r = \sqrt{\frac{3\sigma}{10\rho g}}; \quad r = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,465 \text{ Н/м}}{10 \cdot 1,36 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}} \approx 1 \text{ мм.}$$

✓ **Ответ.** Ртутные капли радиусом порядка 1 мм и менее на стекле будут по форме близки к сферическим.

✎ **Пример 3.** Для определения поверхностного натяжения воды была использована пипетка с диаметром выходного отверстия $d=2$ мм. Масса $N=40$ капель оказалась равной $m=1,9$ г. Каким, согласно этим данным, получится значение коэффициента поверхностного натяжения воды?

→ **Решение.** Под давлением воздуха при сжатии резинового наконечника пипетки на выходном отверстии образуется капля. Молекулы воды, находящиеся по периметру выходного отверстия пипетки, притягиваются к молекулам стекла сильнее, чем между собой, поэтому не отрываются. Их нижележащие соседи не отрываются благодаря силе поверхностного натяжения в поверхностном слое воды.

При увеличении размера капли сила тяжести может стать больше силы поверхностного натяжения. В этом случае у отверстия пипетки образуется шейка из молекул воды чуть меньшего диаметра, чем выходное отверстие пипетки, и капля отрывается (рис. 5). Обратим внимание, что в шейке капли молекулы воды отрываются от молекул воды. То есть результат не зависит от сорта стекла.

Будем считать периметр шейки примерно равным периметру выходного отверстия пипетки. Тогда:

$$F_n \approx F_T; F_n = \sigma \cdot l; l = \pi \cdot d; F_T = m_1 g; m_1 = m/N; \Rightarrow \sigma \cdot \pi d = \frac{m}{N} g;$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{mg}{\pi d \cdot N}}; \quad \sigma = \frac{1,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 40} = 0,0741 \text{ Н/м}.$$

Поскольку диаметр пипетки нам дан с одной значащей цифрой, то ответ следует округлить до одной значащей цифры, т. к. даже вторая цифра сомнительна из-за точности измерения диаметра пипетки. ←

✓ **Ответ.** Поверхностное натяжение воды равно $\sigma=0,07$ Н/м.

Примечание. Из решения задачи следует, что максимальная масса капли, которая ещё может удержаться на пипетке диаметром d :

$$\boxed{m_1 = \frac{\pi d \cdot \sigma}{g}}.$$

$$\text{В нашем примере: } m_1 = \frac{\pi d \cdot \sigma}{g} = \frac{3,14 \cdot 0,002 \cdot 0,0741}{9,8} = 47,5 \text{ мг}.$$



Рис. 5. Капля на пипетке

§ 70. Явления смачивания и несмачивания

Смачивание – это группа процессов, происходящих при взаимодействии жидкости с поверхностью твёрдого тела или другой жидкости и проявляющиеся в растекании жидкости по твёрдому телу, возникновении менисков в капиллярных каналах, вытеснении одной жидкости другой, образовании капель жидкости на поверхности или пузырьков в жидкости, в проникновении жидкости в капиллярно-пористые тела.

Рассмотрим каплю жидкости (например, масла) на поверхности другой жидкости (например, воды). Капля по форме напоминает чечевицу (рис. 6). Рассмотрим условие равновесия малого участка воды длиной δl на границе воздух-вода-масло (этот участок A перпендикулярен плоскости рисунка). Поперечный размер участка A равен примерно радиусу действия молекулярных сил (5–10 слоев молекул).

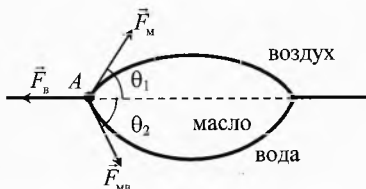


Рис. 6. Капля масла на воде

На него действуют три силы поверхностного натяжения (силой тяжести в данном случае можно пренебречь):

$$\vec{F}_B + \vec{F}_M + \vec{F}_{MB} = 0,$$

где $F_B = \sigma_B \cdot \delta l$ – сила, с которой действует поверхностный слой воды на участок A ;
 $F_M = \sigma_M \cdot \delta l$ – сила, с которой действует поверхностный слой масла на участок A ;
 $F_{MB} = \sigma_{MB} \cdot \delta l$ – сила, с которой действует поверхностный слой масла с водой на участок A ;

σ_B , σ_M , σ_{MB} – коэффициенты поверхностного натяжения на границе вода-воздух, масло-воздух, масло-вода;

В проекции на вертикальную и горизонтальную оси:

$$F_M \sin \theta_1 = F_{MB} \sin \theta_2, \quad (4)$$

$$F_B = F_M \cos \theta_1 + F_{MB} \cos \theta_2. \quad (5)$$

где θ_1 и θ_2 – так называемые *краевые углы*.

Или для коэффициентов поверхностного натяжения:

$$\sigma_M \sin \theta_1 = \sigma_{MB} \sin \theta_2, \quad (6)$$

$$\sigma_B = \sigma_M \cos \theta_1 + \sigma_{MB} \cos \theta_2. \quad (7)$$

Решая уравнения (6) и (7), получим выражения для углов чечевицы:

$$\cos \theta_1 = \frac{\sigma_B^2 + \sigma_M^2 - \sigma_{MB}^2}{2\sigma_B \sigma_M}; \quad \cos \theta_2 = \frac{\sigma_B^2 + \sigma_{MB}^2 - \sigma_M^2}{2\sigma_B \sigma_{MB}}.$$

Равновесие возможно только при условии, когда $\sigma_B \leq \sigma_M + \sigma_{MB}$, как это видно из (7) (ибо $\cos \theta_1 \leq 1$ и $\cos \theta_2 \leq 1$). В этом случае капля действительно имеет форму чечевицы. Если же $\sigma_B > \sigma_M + \sigma_{MB}$, то не существует углов удовлетворяющих условию (7). Равновесие капли невозможно, и она растекается по поверхности воды. Примером может служить плёнка бензина или керосина, на поверхности воды. В этом случае говорят, что бензин полностью смачивается водой.

Аналогично ведет себя капля жидкости на поверхности твёрдого тела. Разница только в том, что поверхность твёрдого тела не деформируется (рис. 7). Равнодействующая сил поверхностного натяжения уравновешивается силой нормально-

го давления или натяжения на границе жидкости с твёрдым телом. Поэтому вместо условий (4) и (5) надо требовать обращения в нуль лишь касательной составляющей:

$$F_{\tau} = F_{\text{ж}} \cos \theta + F_{\text{тж}}.$$

Или для коэффициентов поверхностного натяжения:

$$\sigma_{\tau} = \sigma_{\text{ж}} \cos \theta + \sigma_{\text{тж}}. \quad (8)$$

где σ_{τ} , $\sigma_{\text{ж}}$, $\sigma_{\text{тж}}$ – коэффициенты поверхностного натяжения на границе тело-воздух, жидкость-воздух, тело-жидкость.

Из (8) получим выражение, которое называется *уравнением Юнга*^{*}:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{\tau} - \sigma_{\text{тж}}}{\sigma_{\text{ж}}}. \quad (9)$$

где θ – *краевой угол*, отсчитываемый от смачиваемой поверхности в сторону смачивающей жидкости.

При $\frac{\sigma_{\tau} - \sigma_{\text{тж}}}{\sigma_{\text{ж}}} > 1$, то есть при $\sigma_{\tau} > \sigma_{\text{ж}} + \sigma_{\text{тж}}$, условие

(9) невыполнимо, и капля не может находиться в равновесии. Она растекается по поверхности тела, покрывая его тонкой плёнкой (например, керосин на поверхности жести или стекла). В этом случае говорят, что жидкость полностью смачивает поверхность твёрдого тела.

Если коснуться золотым кольцом ртутной капли, то кольцо покроется тонким слоем ртути и очистить кольцо можно будет только химическими методами, например, потерять кольцо серой.

В другом случае, когда $\frac{\sigma_{\tau} - \sigma_{\text{тж}}}{\sigma_{\text{ж}}} < -1$, то есть $\sigma_{\text{тж}} > \sigma_{\tau} + \sigma_{\text{ж}}$, условие (9) так же

невыполнимо. При этом жидкость стягивается в шаровую каплю, несколько сплюснутую силой тяжести (например, капля ртути на поверхности стекла или капля воды на поверхности парафина). В этом случае говорят, что жидкость не смачивает поверхность твёрдого тела.

Краевой угол θ является мерой смачивания. Его значение зависит от соотношения *энергии адгезии* (энергии прилипания) и *энергии когезии* жидкости (энергии взаимодействия молекул жидкости между собой).

Если *энергия взаимодействия молекул жидкости с молекулами поверхности твёрдого тела* (энергия адгезии) больше, чем *энергия взаимодействия молекул жидкости между собой* (энергия когезии), то капля растекается, площадь прилипания (адгезии) больше площади диаметрального сечения капли. В этом случае краевой угол острый. Если же энергия адгезии меньше энергии когезии, т. е. если молекулы жидкости между собой взаимодействуют энергичнее, чем с молекулами твёрдого тела, то площадь прилипания (адгезии) будет меньше площади диамет-



Рис. 7. Капля жидкости на твёрдом теле



Томас Юнг (1773–1829)

* Юнг Томас – выдающийся английский физик. В 2 года научился бегло читать, к 14 годам изучил дифференциальное исчисление (по Ньютону).

рального сечения капли. Для *твёрдых смачиваемых поверхностей* краевой угол острый ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), для *несмачиваемых* – краевой угол тупой ($\theta > 90^\circ$). Неравновесные условия, загрязнения поверхности, повышение температуры и др. факторы исключают возможность полного смачивания или полного его отсутствия, т. е. $\theta \neq 0^\circ$ и $\theta \neq 180^\circ$.

На значение θ влияет качество поверхности. Шероховатость смачиваемой поверхности улучшает её смачивание, а несмачиваемой – снижает. Часто наблюдается задержка установления краевого угла, называемая гистерезисом (запаздыванием) смачивания, которая появляется при движении капель, при воздействии внешних сил, из-за шероховатости поверхности и т. д.

Значение краевого угла θ можно определять, например, по форме и размеру капель на плоской поверхности, в капиллярах и на нитях.

Смачивание играет важную роль в промышленности и в быту. На его изменении основаны многие технологические процессы: флотация, полиграфические и металлургические процессы, нефтедобыча, смазка, пайка, лужение, склеивание и др. Несколько подробнее напишем о лужении и флотации.

Лужение – это покрытие металлических изделий, главным образом железа и меди, оловом.

Железный лист протаскивают через ванну с расплавленным оловом. Оно покрывает тонким слоем поверхность железа благодаря большой энергии взаимодействия молекул олова с молекулами железа (большой энергии адгезии). Получается белая жёсть, устойчивая к коррозии. Лужение посуды известно с давних времен и даже вошло в иносказательном виде в известное выражение «у него луженая глотка».

Флотация (от франц. flottation – плавание на поверхности воды) – метод отделения одних минералов от других в водной среде, основанный на способности частиц одних минералов прилипать к воздушным пузырькам и переходить вместе с ними в пенный слой (концентрат), других – оставаться во взвешенном состоянии в воде (так называемые хвосты).

Для успешной флотации физико-химические свойства поверхности минералов усиливают флотационными реагентами. Флотацию осуществляют во флотационных машинах. Различают флотацию масляную, пленочную, пенную. Флотация – основной метод обогащения полезных ископаемых.

В горных породах кроме полезных минералов значительную часть может составлять пустая порода. Руду мелют в порошок и помещают во флотационную ванну с добавлением реагента (обычно дешёвые сорта масла), который обладает способностью смачивать частицы полезного ископаемого и не смачивать пустую руду (хвосты). Покрытые тонкой плёнкой частицы полезного минерала не смачиваются водой. Через флотационную ванну прокачивают воздух. Пузырьки воздуха вытесняют воду с несмачиваемой поверхности частиц полезного минерала, и эти частицы оказываются прилипшими к воздушным пузырькам. При достаточно малой массе частицы пузырёк вместе с ней всплывает на поверхность воды флотационной ванны. Так образуется пена, содержащая концентрат, обогащенный ценным минералом. Частицы пустой породы (хвосты), смачиваемые водой, остаются на дне ванны.

§ 71. Капиллярные явления

К капиллярным явлениям обычно относят явления, связанные искривлением поверхности жидкости, граничащей с другой средой (твёрдым телом, другой жидкостью или газом).

Наиболее распространенный пример капиллярных явлений – поднятие или опускание жидкости в узких трубках (капиллярах, от лат. *capilla* – волос) и в пористых средах, обуславливающее, например, миграцию воды в почве. Эти явления вызываются добавочным, так называемым капиллярным давлением p_k , создаваемым поверхностным натяжением на искривленной поверхности (мениске) жидкости в капилляре.

Капиллярное давление в цилиндрической трубке. Вычислим добавочное капиллярное давление для узкой цилиндрической трубки радиуса R , жидкость в которой частично смачивает материал трубки, то есть краевой угол острый $\theta < 90^\circ$. При этом жидкость поднимается по капилляру. Молекулы жидкости взаимодействуют с молекулами твёрдого тела капилляра более энергично, чем между собой, и стремятся вверх. Подъем жидкости происходит до тех пор, пока сила поверхностного натяжения, действующая по периметру трубки между молекулами жидкости, не уравнивается силой тяжести поднятой жидкости. В проекции на вертикальную ось Y (рис. 8):

$$(F_n)_y + (F_\tau)_y = 0; \Rightarrow F_n \cdot \cos \theta - F_\tau = 0,$$

где $F_n = 2\pi R \sigma$; $F_\tau = mg$; $m = \rho V$; $V = \pi R^2 \cdot h$.

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}. \quad (10)$$

Учитывая, $R = r \cdot \cos \theta$, где r – радиус мениска, получим:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Видно, что высота подъема жидкости в капилляре тем больше, чем больше поверхностное натяжение жидкости и меньше её плотность и радиус капилляра. Сила поверхностного натяжения растягивает жидкость (в данном случае), и давление в точке C под поверхностным слоем будет меньше, чем над ним в точке D . Эта разница и есть добавочное капиллярное давление.

Давление в точке A равно давлению в точке B , т. к. точки находятся на одинаковом уровне в сообщающихся сосудах с однородной жидкостью:

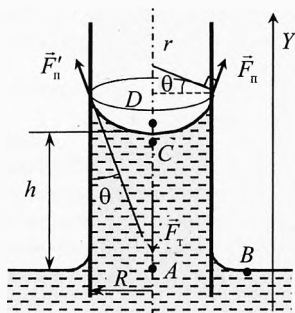


Рис. 8. Капиллярное давление в трубке

$$p_A = p_B.$$

Но $p_B = p_{\text{атм}}$, давление в точке A складывается из атмосферного давления $p_{\text{атм}}$, давления столба поднявшейся жидкости $p_h = \rho gh$ и капиллярного давления:

$$p_{\text{атм}} = p_{\text{атм}} + \rho gh + p_k \Rightarrow p_k = -\rho gh. \quad (11)$$

Знак « $-$ » означает, что сила поверхностного натяжения в данном случае не сжимает, а растягивает жидкость и уменьшает давление по сравнению с наружным. В случае несмачивания сила поверхностного натяжения будет сжимать жидкость, и капиллярное давление будет положительным. Проверьте это сами.

$$\text{Заметим, что из (10) следует: } \rho gh = \frac{2\sigma \cos \theta}{R}.$$

Подставляя этот результат в (11), получим:

$$p_k = \pm \frac{2\sigma \cos \theta}{R}.$$

Знак « $+$ » в случае несмачивания (рис. 9), а знак « $-$ » при смачивании (рис. 8). Чем больше поверхностное натяжение жидкости и меньше радиус капилляра, тем больше капиллярное давление.

Закон Лапласа. Рассмотрим небольшой участок границы раздела двух сред (жидкости и газа или двух жидкостей). Пусть радиусы кривизны этой поверхности во взаимно перпендикулярных плоскостях равны r_1 и r_2 (рис. 10). Из-за кривизны поверхности появляется разность давлений по обе стороны поверхности. Эта разность давлений, вызванная поверхностным натяжением, называется *капиллярным давлением*:

$$p_k = p_2 - p_1.$$

Зависимость капиллярного давления от радиусов кривизны поверхности установил в 1806 г. французский астроном, физик и математик Пьер Симон Лаплас:

$$p_k = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (12)$$

где σ — поверхностное натяжение на границе раздела двух сред.

Величина $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ называется *средней кривизной поверхности*.

Выражение (12) называется *законом Лапласа*.

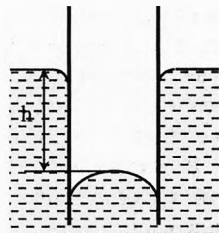


Рис. 9. Несмачиваемая поверхность

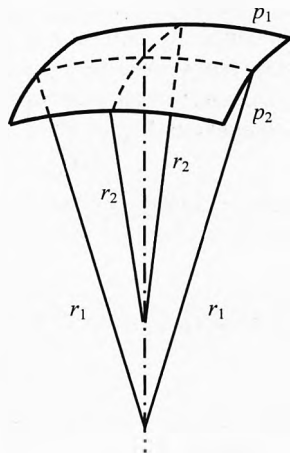


Рис. 10. Закон Лапласа

Капиллярное давление, обусловленное силой поверхностного натяжения на границе раздела двух сред, равно произведению поверхностного натяжения на среднюю кривизну поверхности.

В случае шарообразной капли ($r_1=r_2$) закон Лапласа даёт

$$p_{\text{шар}} = \frac{2\sigma}{r} \quad (13)$$

Тот же результат будет для воздушного пузырька в жидкости (рис. 11).

Для мыльного пузырька разность давлений воздуха внутри и вне пузыря вдвое больше по сравнению с тем, что даёт формула (13):

$$p_{\text{пуз}} = \frac{4\sigma}{r}$$

Это связано с тем, что оболочка пузыря имеет две поверхности: внутреннюю и наружную (см. рис. 12).

Капиллярное давление между двумя близко расположенными параллельными плоскостями при полном смачивании (рис. 13) $p_k = -\sigma/r$. Действительно, вдоль плоскости кривизна равна 0, т. е. $r_1 = \infty$, а поперек $r_2 = r$.

Если смачивание неполное, то $p_k = -\frac{\sigma \cos \theta}{r}$. Докажите.

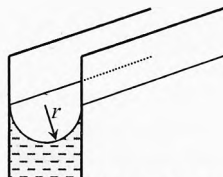
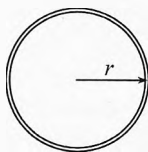
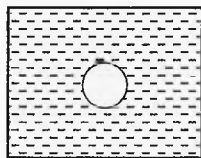


Рис. 11. Пузырь в жидкости Рис. 12. Мыльный пузырь Рис. 13. Вода между стёклами

✎ **Пример 4.** В капиллярной трубке радиусом 0,5 мм жидкость поднялась на 11 мм (рис. 14). Найти плотность данной жидкости, если её поверхностное натяжение $\sigma=22$ мН/м. Жидкость полностью смачивает материал трубки.

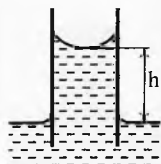


Рис. 14. Определить плотность

→ **Решение.** При полном смачивании: $|p_k| = |p_h|$

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho gh \Rightarrow \rho = \frac{2\sigma}{rgh}, \quad \rho = \frac{2 \cdot 22 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8 \cdot 11 \cdot 10^{-2}} \approx 800 \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right).$$

✓ **Ответ.** Плотность жидкости примерно равна 800 кг/м^3 .

✎ **Пример 5.** Внутренний диаметр трубки ртутного барометра равен 3 мм (рис. 15). Какую поправку надо внести в показания барометра, если учитывать капиллярное опускание ртути? Считать, что стекло ртутью не смачивается. $\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$.

➡ **Решение.** Согласно уравнению Лапласа,

$$p_k = \frac{2\sigma}{r}. \quad p_k = \frac{2 \cdot 0,5 \text{ Н/м}}{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 6,7 \cdot 10^2 \text{ Па} = 5 \text{ мм рт. ст.}$$

✓ **Ответ.** К показаниям барометра нужно добавлять 5 мм рт. ст.

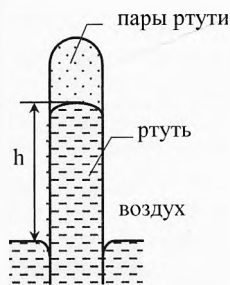


Рис. 15. Ртутный барометр

✎ **Пример 6.** Как зависит период колебаний свободно падающих капель, оторвавшихся с пипетки от плотности ρ , поверхностного натяжения жидкости σ и радиуса капли R ? Оценить период оклебания капли радиуса $R=3 \text{ мм}$, поверхностное натяжение $\sigma=0,073 \text{ Н/м}$

➡ **Решение.** Отрывающаяся капля имеет форму эллипсоида. Сила поверхностного натяжения по периметру в вертикальной плоскости из-за меньшего радиуса кривизны будет больше (в момент отрыва) силы поверхностного натяжения в горизонтальном центральном сечении. Поэтому капля начнет сжиматься в вертикальной плоскости и расширяться в горизонтальной (рис. 16). Максимальная скорость изменения её формы будет наблюдаться, когда капля станет шарообразной. По инерции она будет продолжать деформироваться, так что горизонтальный размер станет больше вертикального, и будет увеличиваться до тех пор, пока сила поверхностного натяжения в горизонтальной плоскости, превышающая силу в вертикальной плоскости, не прекратит деформацию капли. Это соответствует половине периода колебаний. Далее капля начнет сжиматься в горизонтальной плоскости, а в вертикальной – расширяться, пока не достигнет начальной формы. Таким образом, возникнут свободные колебания капли.

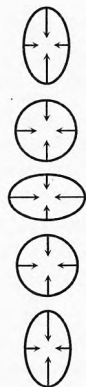


Рис. 16. Колебания капли

Колебания носят сложный двухмерный характер, поэтому в качестве оценочного решения воспользуемся методом размерности. Период колебаний зависит от циклической частоты:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Циклическая частота зависит от заданных в условии задачи физических параметров колебательной системы:

$$\omega = \sigma^\alpha \rho^\beta R^\gamma.$$

где α, β, γ – численные коэффициенты.

Размерности правой и левой частей последнего уравнения должны совпадать:

$$[\omega] = \text{с}^{-1}; [\sigma] = \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}; [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}; [R] = \text{м};$$

$$\text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{с}^{-2})^\alpha \cdot (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^\beta \cdot \text{м}^\gamma;$$

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^{\alpha+\beta} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{м}^{\gamma-3\beta};$$

$$-1 = -2\alpha, \quad 0 = \alpha + \beta, \quad 0 = \gamma - 3\beta;$$

$$\Rightarrow \alpha = 1/2, \quad \beta = -1/2, \quad \gamma = -3/2.$$

Значит, с точностью до безразмерного коэффициента порядка единицы формулы для циклической частоты колебания и периода примут вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3}}; \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{1000 \cdot 0,003^3}{0,073}} = 0,12 \text{ с.} \leftarrow$$

✓ **Ответ.** Период колебаний капли составляет около 0,1 с.



Упражнения

1 Определить поверхностную энергию мыльного пузыря диаметром $d=50$ мм. $\sigma=0,04$ Н/м.

2 Как действует фитиль, полотенце?

3 Десять маленьких капель ртути осторожно объединили в одну большую каплю. Изменилась ли при этом температура ртути?

4 Оценить относительную ошибку, которую допускают при измерении атмосферного давления ртутным барометром, имеющим барометрическую трубку внутренним диаметром $d=5$ мм. Занижает или завышает показания такой барометр? Какова относительная ошибка при измерении атмосферного давления по высоте столбика ртути, если коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma=0,48$ Н/м, а плотность ртути $\rho=13,6 \cdot 10^3$ кг/м³? Атмосферное давление равно 760 мм рт. ст.

5 Из капельницы накапали равные массы сначала холодной воды, а затем горячей. Как и во сколько раз изменилось поверхностное натяжение σ , если в первом случае было 40 капель, а во втором 48? Плотность воды считать оба раза одинаковой.

6 На какую высоту поднимется вода ($\sigma=73$ мН/м) между параллельными пластинками, находящимися на расстоянии 0,2 мм друг от друга, если пластины полностью смачиваются водой (краевой угол $\theta = 0$)?

7 Нарисовать форму поверхности воды в предыдущей задаче, если при ширине пластин $l=10$ см расстояние между ними меняется от $d_1=0,2$ до $d_2=0,4$ мм.

8 Вывести закон Лапласа для избыточного давления внутри сферического мыльного пузырька в воздухе: $\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$, где r – радиус пузырька.

9 Вывести закон Лапласа для давления под искривленной границей раздела двух сред: $p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$, где r_1 и r_2 – радиусы кривизны поверхности в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Решения, указания и ответы для самоконтроля

2 $E_n = \sigma \cdot 2S = 2\sigma\pi d^2 \approx 0,6$ мДж. Коэффициент 2 обусловлен тем, что у мыльного пузыря две поверхности: внешняя и внутренняя.

2 Фитиль смачивается спиртом, когда очередная порция спирта сгорит, фитиль смачивается новой порцией спирта; при касании полотенцем мокрой поверхности ворсинки полотенца смачиваются жидкостью, и жидкость уходит в полотенце.

3 Повысилась, т.к. $E_{n1} > E_{n2}$; $E_{n1} = \sigma \cdot 10 \cdot 4\pi r^2$; $E_{n2} = \sigma \cdot 4\pi R^2 = 4 \cdot 10^{2/3} \pi r^2 \sigma = 0,46 \cdot E_{n1}$.

4 Барометр показывает заниженный результат, так как ртуть не смачивает стекло, и её свободная поверхность из-за этого располагается ниже, чем в случае отсутствия поверхностного натяжения. Обозначим через x уровень понижения ртутного столба, тогда $\rho g x = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow x = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d} \approx 3$ мм. $\varepsilon = \frac{x}{h_0} \cdot 100\% \approx 0,4\%$.

Ответ. Барометр занижает показания. Относительная ошибка равна 0,4%.

5 Из условия равновесия капли перед отрывом: $\sigma_1 = \frac{mg}{\pi d \cdot N_1}$, $\sigma_2 = \frac{mg}{\pi d \cdot N_2}$.

Значит, поверхностное натяжение уменьшилось в $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{N_2}{N_1} = 1,2$ раза.

6 По закону Лапласа (в данном случае $r_1 = r = d/2$, $r_2 = \infty$): $p_* = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma}{d/2}$.

Условие равновесия воды между пластинами: $p_* = \rho g h$.

Значит, вода поднимется на $h = \frac{2\sigma}{\rho g d} = 7,4$ см.

7 Высота подъема жидкости зависит от расстояния между пластинами: $h = \frac{2\sigma}{\rho g d}$.

Расстояние между пластинами линейно увеличивается от d_1 до d_2 : $d = d_1 \left(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot \frac{x}{l} \right)$.

Значит, форма поверхности воды будет гиперболическая, причём уровень будет ниже там, где находится наиболее широкий участок клина (рис. 17):

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d_1 \left(1 + \frac{d_2 - d_1}{d_1} \cdot \frac{x}{l} \right)}; \quad h = \frac{7,4 \text{ (см)}}{1 + x/l}.$$

8 Избыточное давление ($\Delta p = p - p_0$) внутри пузырька можно найти из условия равновесия двух полусферических частей пузырька (рис. 18). Эти полусферы расталкиваются за счёт избыточного давления газа внутри пузырька силой $F = \Delta p \cdot \pi r^2$.

Силой, удерживающей их, является сила поверхностного натяжения. Поскольку у мыльного пузырька есть две поверхности (внешняя и внутренняя), то эта сила действует на двойной длине периметра сферы: $F_n = 4\sigma\pi r$.

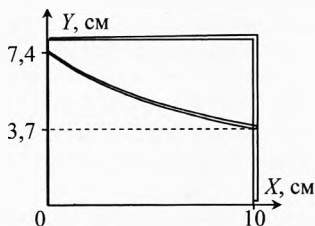


Рис. 17. Гипербола между стёклами

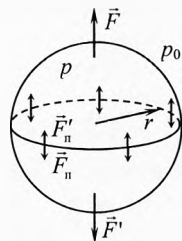


Рис. 18. Закон Лапласа в пузырьке

Из условия равновесия ($F_{\text{н}}=F$), получим: $\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$.

Этот результат соответствует формуле Лапласа, если вместо r_1 и r_2 подставить r и получившийся результат умножить на 2 (из-за того, что у мыльного пузыря две поверхности).

9 Выделим маленький элемент поверхности размером Δx на Δy (см. рис. 19). На этот элемент действуют две пары сил, обусловленные кривизной поверхности. Эти силы должны быть уравновешены разностью давлений по разные стороны поверхности:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_1' + \vec{F}_2 + \vec{F}_2' + \vec{F} = 0.$$

Проекция силы \vec{F}_1 на ось Z равна

$$F_{1z} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1/2).$$

Учитывая, что $\sin \frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\Delta x}{2r_1}$, и что сила по-

верхностного натяжения пропорциональна длине участка, на который она действует $F_1 = \sigma \cdot \Delta y$, полу-

чим: $F_{1z} = \sigma \frac{\Delta x \Delta y}{2r_1}$. Аналогично, $F_{2z} = \sigma \frac{\Delta x \Delta y}{2r_2}$.

Учитывая, что $\vec{F}_{1z} = \vec{F}_{1z}'$, $\vec{F}_{2z} = \vec{F}_{2z}'$ и что $F = p \cdot \Delta x \Delta y$, после сокращения получим формулу Лапласа:

$$2 \cdot \sigma \frac{\Delta x \Delta y}{2r_1} + 2 \cdot \sigma \frac{\Delta x \Delta y}{2r_2} - p \cdot \Delta x \Delta y = 0; \Rightarrow p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

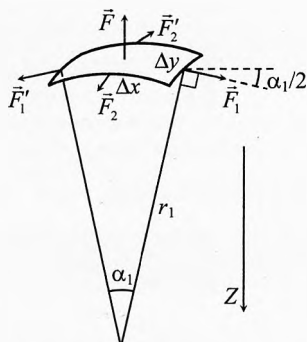


Рис. 19. Закон Лапласа

Глава 9. Экспериментальные задания

Истина одна, а число заблуждений – бесконечно.

Альберт Эйнштейн

Решать экспериментальные задачи не менее важно, чем теоретические (аналитические и качественные). Развивается не только мышление, но и руки человека, координация движений, внимательность и много других качеств.

В любой экспериментальной задаче самое главное – это *теоретическая проработка идеи и методов решения*. Если Вам придётся разрабатывать какое-нибудь устройство (например, измерительный прибор), то заказчика в первую очередь интересует диапазон, в котором измеряет этот прибор, а также погрешности, которые он допускает. Поэтому при выполнении экспериментальных заданий Вы должны отыскать наиболее удобный метод измерения требуемой величины, а также рассчитать погрешности измерений, по возможности минимизируя их. Кроме этого, заказчика может интересовать дешевизна решения задачи, техническая и экологическая безопасность устройства и возможность использования его в тех или иных климатических условиях работы.

Обычно устройства разрабатываются с учетом всех требований, главным из которых является оптимальное *соотношение цена-качество*. Например, на олимпиаде Вы можете подробно описать решение задачи, но если для этого Вам понадобится 5 часов работы, а на выполнение одной задачи даётся всего 2,5 часа, то Вы, очевидно, проиграте.

Решая экспериментальную задачу, Вы должны:

- 1) описать метод решения;
- 2) наглядно изобразить установку, электрическую схему и т.п.;
- 3) провести измерения, причём на участках, где функция изменяется достаточно резко, делать измерения почаще;
- 4) начертить таблицы, построить графики, выполнить необходимые вычисления;
- 5) и обязательно сделать оценку погрешности измерений, хотя бы в самом простом варианте.

Если хватает времени, то желательно провести измерения другим методом, что позволит более адекватно оценить измеряемую величину.

§ 72. Измерение физических величин

Точность измерений физических величин. Получение точных значений физических величин при их измерении – важная задача.

Теоретически сумма масс двух тел равна их общей массе: $m_1 + m_2 = m_{12}$, а измеренная практически она может оказаться больше или меньше из-за погрешности каждого измерения. Точность измерений характеризуется погрешностью.

Абсолютная погрешность измерения – это разность между найденным на опыте и истинным значением физической величины:

$$\Delta x = x - x_{\text{ист}}$$

«Погрешность» измерений и «ошибка» измерений – синонимы. Слово «грех» – это перевод греческого слова *αμαρτια*, которое буквально означает промах, ошибка, непопадание в цель.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}$$

или

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} \cdot 100\%$$

Относительная погрешность вычисляется в частях от единицы или в процентах от 100%.

Выделяют два вида погрешности: случайные и систематические.

Систематические погрешности прямых измерений.

Систематические погрешности – погрешности, которые сохраняют значение и знак во время опыта.

Они обусловлены ошибками приборов и постановкой опыта (неравноплечность весов, неравномерность разбивки шкал приборов, установка нуля и другие).

Оценка систематических погрешностей производится с учётом анализа особенности методики, паспортной точности приборов и проведения контрольных опытов.

Металлические линейки достаточно точны, погрешность миллиметрового деления $\leq 0,05$ мм, а сантиметрового деления $\leq 0,1$ мм, она примерно равна погрешности отсчёта на глаз (0,1–0,2 деления шкалы). Погрешности деревянных и пластмассовых линеек неизвестны и могут быть большими (до 5 мм при длине линейки 30 см).

Систематические погрешности электрических приборов (амперметров, вольтметров и др.) определяются классом точности и выражены обычно в процентах. Амперметр класса 0,2 имеет максимальную абсолютную погрешность не более 0,2% полной шкалы прибора. На всех участках шкалы эта погрешность одинакова.

Поэтому, если имеется возможность, нужно использовать диапазон, где стрелка отклоняется ближе к концу шкалы, тогда относительная погрешность измерений окажется меньше.

Шкалы измерительных приборов изготовлены так, что *одно деление приблизительно равно максимальной погрешности прибора*.

В научных публикациях принято приводить не максимальную, а стандартную (среднеквадратичную) погрешность. Строгих формул перевода максимальной погрешности в стандартную нет.

Приблизительно можно считать стандартную систематическую погрешность равной половине максимальной

$$\Delta_{\text{сист}} \approx \Delta_{\text{макс}}/2.$$

Как уменьшить систематические погрешности? Усовершенствовать приборы или использовать приборы лучшего качества, использовать более точные разновески, изменить методику измерения и т.д.

Случайные погрешности прямых измерений.

Случайные погрешности – погрешности, которые непредсказуемым образом изменяют свою величину и знак от опыта к опыту.

Случайные погрешности обусловлены трением, люфтами в механических приспособлениях, тряской, несовершенством объекта измерения.

Как уменьшить случайные погрешности? Многократным повторением опытов. Количество измерений необходимо обдумать.

Никогда не измеряйте только один раз!

Если в результате 2–3 измерений получаются одинаковые значения, то этого количества достаточно. Если нет, то понять и устранить причину; если не удаётся, то провести много измерений.

Если систематические погрешности пренебрежимо малы, то наилучшим значением измеряемой величины является среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Этому результату соответствует стандартная или среднеквадратичная погрешность

$$\Delta x_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

где $(x_i - \bar{x})$ – отклонение i -го измерения от среднего значения.

Результат опыта записывается в виде * :

* Истинное значение измеряемой величины никому неизвестно. Но с помощью измерений мы можем найти окрестность, внутри которой находится истина. Кроме того истинного значения может не существовать, например невозможно определить истинную толщину бруска, так как его толщина может отличаться на сотни тысяч слоёв молекул в разных поперечных сечениях бруска.

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{или} \quad \bar{x} - \Delta x \leq x_{\text{ист}} \leq \bar{x} + \Delta x.$$

Оценка полной погрешности измерений. В реальных опытах присутствуют как систематические, так и случайные ошибки. Полную погрешность можно вычислить по теореме Пифагора (рис. 1):

$$\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (\Delta x_{\text{случ}})^2}.$$

Обратим внимание на важную особенность этой формулы. Пусть случайная погрешность в 2 раза меньше систематической ($\Delta x_{\text{случ}} = \Delta x_{\text{сист}}/2$), тогда:

$$\Delta x_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + \left(\frac{\Delta x_{\text{сист}}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} (\Delta x_{\text{сист}})^2 \approx 1,12 \cdot \Delta x_{\text{сист}}.$$

Оказывается, что в школьных опытах сами погрешности редко удаётся оценить с точностью лучшей 10–20%. Но в нашем случае с такой точностью $\Delta x_{\text{полн}} \approx \Delta x_{\text{сист}}$. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину большей. Значит, если, например, случайная ошибка в 2 раза меньше систематической, то нет смысла проводить многократные измерения, так как полная погрешность при этом практически не изменится. Измерения достаточно провести 2–3 раза, и убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

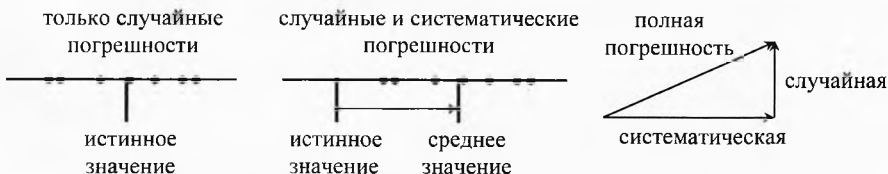


Рис. 1. Случайные и систематические погрешности

Обработка результатов косвенных измерений. Измерения делятся на прямые и косвенные. Мы рассмотрели прямые измерения. Рассмотрим результаты косвенных измерений.

Если косвенно измеряемая величина $A = B \pm C$, где B и C – независимые величины, то наилучшее значение A равно сумме (разности) наилучших значений B и C :

$$\bar{A} = \bar{B} \pm \bar{C}. \quad (1)$$

В этом случае стандартная абсолютная погрешность равна

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta B)^2 + (\Delta C)^2}.$$

Тогда относительная погрешность:

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\sqrt{\Delta B^2 + \Delta C^2}}{\bar{B} \pm \bar{C}}.$$

Если $A=B \cdot C \cdot D$ или $A = \frac{B \cdot C}{D}$, где B , C и D – независимые величины, то лучшими будут значения:

$$\bar{A} = \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{C}}{\bar{D}}. \quad (2)$$

В этих случаях относительная погрешность ε равна:

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}. \quad (3)$$

А стандартная погрешность:

$$\Delta A = \bar{A} \cdot \varepsilon_A = \bar{A} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}.$$

В случае, если величины B , C и D – зависимы, то сначала надо подсчитать A_i для каждого опыта, а потом найти среднее значение A .

Например, если вычисляем газовую постоянную, то сначала надо посчитать ее значение для каждого опыта отдельно:

$$R_i = \frac{p_i V_i}{\nu_i T_i},$$

а потом вычислить среднее значение:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + \dots + R_n}{n}.$$

Стандартная относительная погрешность будет вычисляться также по формуле (3):

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \nu}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где p , V , ν , T – давление, объем, количество вещества и температура газа, взятые из опыта, в котором газовая постоянная была максимально близка к ее среднему значению \bar{R} , или из опыта, в котором относительная погрешность измеряемых величин минимальна.

Пример 1. Измерить плотность тела.

Дано.

$$\begin{array}{l} m = (350 \pm 8) \text{ г} \\ V = (181 \pm 5) \text{ см}^3 \\ \rho = ? \end{array}$$

→ Решение. По определению плотности тела:

$$\rho = \frac{m}{V}; \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}; \bar{\rho} = \frac{350 \text{ г}}{181 \text{ см}^3} = 1,93 \text{ г/см}^3.$$

$$\Delta \rho = \bar{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2};$$

$$\Delta\rho = 1,93 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{350}\right)^2 + \left(\frac{5}{181}\right)^2} = 0,067 \approx 0,07 \text{ (г/см}^3\text{)}.$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0,07}{1,93} \approx 0,04 = 4\%.$$

✓**Ответ.** Плотность тела $\rho = (1,93 \pm 0,07) \text{ г/см}^3$ измерена с относительной погрешностью 4%.

Примечание. При обработке измерений по формулам (1) и (2) *следует все измеряемые величины определять приблизительно с одинаковой точностью*. Например, если объём измеряется с точностью 1%, а масса – 0,5%, то его плотность определяется с точностью

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} = 1,1\% \approx 1\%.$$

Если же массу измерить с точностью 0,01%, то плотность будет определена практически с той же погрешностью. Поэтому тратить время и силы на измерение массы с точностью 0,01%, очевидно, не имеет смысла.

Точность записи результатов. Любая физическая величина известна с определенной погрешностью. Например, масса тела $m = (1,245 \pm 0,003) \text{ г}$ означает, что точной является цифра «4», а «5» – приближенной. Масса тела может быть в интервале $1,242 \leq m \leq 1,248$.

|| Существует правило, согласно которому погрешности следует округлять до двух значащих цифр, если первая из них является «1», а вторая «4», «5», «6» или «7», и до одной значащей цифры в остальных случаях.

Так правильно писать ± 3 ; $\pm 0,2$; $\pm 0,08$; $\pm 0,14$ и так далее.

Неверно $\pm 3,2$; $\pm 0,23$.

Не следует округлять $\pm 0,14$ до $\pm 0,1$, ибо в этом случае пренебрегают 30% погрешности, и истинное значение измеряемой величины может не попасть в этот интервал.

§ 73. Пример выполнения экспериментального задания

Задание. Определить атмосферное давление воздуха с помощью установки, сконструированной самостоятельно.

Оборудование: штатив с двумя муфтами и лапками, линейка измерительная, сосуд с водой, лампы дневного света диаметром 25 и 35 мм.

Методические указания: возьмем сгоревшую лампу дневного света длиной 105 см и диаметром 35 мм и отсоединим от неё один цоколь. То же самое сделаем с лампой диаметром 25 мм, длина которой $l \approx 108 \text{ см}$.

Как отрезать один цоколь? Можно обмотать край стекла проводом, пропустить по нему электрический ток от ЛАТРа (школьного автотрансформатора), отключить источник тока и сразу накрыть нагретый цокль мокрой тряпкой, и цокль легко отсоединится.

Возможный вариант выполнения задания.

Приготовим заранее сосуд с водой, чтобы температура воды и воздуха в комнате были одинаковыми. Закрепим на штативе широкую трубку цоклем вниз и нальем в неё воды. Поместим в неё узкую трубку открытым концом вниз и закрепим её второй лапкой. Дольём воды в широкую трубку доверху (рис. 2).

Чтобы погрешность измерений высоты столба была минимальной желательно в качестве линейки использовать стальной метр.

Измерим линейкой высоту H столба воды в широкой трубке от верхнего уровня воды до уровня воды в тонкой трубке. Желательно, чтобы H была около одного метра, чтобы не прикладывать линейку второй раз и тем самым уменьшить погрешность прямых измерений. Далее измерим высоту столба воздуха в узкой трубке h_r .

Когда тонкая трубка была в воздухе, воздух занимал полный её объём $V_0 = S \cdot l$, и давление его было равно атмосферному. Если узкую трубку опустить в широкую, внизу узкой трубки появится слой воды высотой h . Объём воздуха в ней уменьшится до $V = S \cdot h_r$, где $h_r = l - h$ – высота воздуха в тонкой трубке, из-за того, что давление возрастёт за счёт столба жидкости и станет равным $p = p_a + \rho g H$.

Согласно закону Бойля–Мариотта:

$$p_a V_0 = (p_a + \rho g H) V \quad \text{или} \quad p_a l = (p_a + \rho g H)(l - h) \Rightarrow p_a = \rho g H(l - h)/h.$$

Проведем ряд измерений, результат которых занесём в таблицу.

N	H , см	l , см	h , см	p_a , кПа
1	85,0	108,5	8,5	98,1
2	81,5		8,0	100,4
3	75,0		7,5	99,1
4	60,0		6,1	98,8
5	50,5		5,0	102,5

Среднее атмосферное давление:

$$\bar{p}_a = \frac{p_{a1} + p_{a2} + p_{a3} + p_{a4} + p_{a5}}{5}; \quad \bar{p}_a = \frac{98,1 + 100,4 + 99,1 + 98,8 + 102,5}{5} = 98,8 \text{ кПа.}$$

Случайная среднеквадратичная погрешность давления:

$$\Delta p_{a,сл} = \sqrt{\frac{(p_{a1} - \bar{p}_a)^2 + (p_{a2} - \bar{p}_a)^2 + (p_{a3} - \bar{p}_a)^2 + (p_{a4} - \bar{p}_a)^2 + (p_{a5} - \bar{p}_a)^2}{5}} = 1,6 \text{ кПа.}$$

Рассчитаем относительную систематическую погрешность, например, для опыта №4, где давление оказалось максимально близким к значению \bar{p}_a :

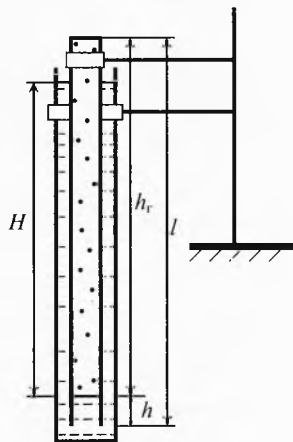


Рис. 2. Определение атмосферного давления

$$\varepsilon_{p,\text{сист}} = \sqrt{\varepsilon_p^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_H^2 + \varepsilon_{(l-h)}^2 + \varepsilon_h^2}.$$

Относительные погрешности плотности воды и ускорения свободного падения малы по сравнению с относительными погрешностями измерений других величин, поэтому можно ими пренебречь. Тогда:

$$\varepsilon_{p,\text{сист}} \approx \sqrt{\varepsilon_H^2 + \varepsilon_{(l-h)}^2 + \varepsilon_h^2}, \quad \varepsilon_H = \frac{\Delta H}{H_4}, \quad \varepsilon_{(l-h)} = \frac{\sqrt{(\Delta l)^2 + (\Delta h)^2}}{l - h_4}, \quad \varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h_4},$$

где $\Delta l = 1$ мм, $\Delta h = 1$ мм, $\Delta H = 2$ мм.

$$\varepsilon_H = \frac{2 \text{ мм}}{600 \text{ мм}} = 0,003; \quad \varepsilon_{(l-h)} = \frac{\sqrt{(1 \text{ мм})^2 + (1 \text{ мм})^2}}{1085 \text{ мм} - 61 \text{ мм}} = 0,0014, \quad \varepsilon_h = \frac{1 \text{ мм}}{61 \text{ мм}} = 0,016.$$

Поскольку $\varepsilon_h \gg \varepsilon_H$ и $\varepsilon_h \gg \varepsilon_{(l-h)}$, значит основной вклад в систематическую погрешность вносит погрешность измерения высоты h :

$$\varepsilon_{p,\text{сист}} \approx \varepsilon_h = 0,016; \quad \Delta p_{a,\text{сист}} = \varepsilon_p \cdot \bar{p}_a; \quad \Delta p_{a,\text{сист}} = 1,6 \text{ кПа}.$$

Тогда полная абсолютная погрешность измерения давления:

$$\Delta p_a = \sqrt{\Delta p_{a,\text{сл}}^2 + \Delta p_{a,\text{сист}}^2}; \quad \Delta p_a = \sqrt{1,6^2 + 1,6^2} = 2,26 \text{ кПа} \approx 2 \text{ кПа}$$

$$p_a = \bar{p}_a \pm \Delta p_a, \quad p_a = (99 \pm 2) \text{ кПа}.$$

Ответ. Атмосферное давление воздуха $p_a = (99 \pm 2)$ кПа измерено с относительной погрешностью 2%.

Условная оценка выполнения задания (в баллах из 15-ти)

Теоретическое решение: 5

Рисунок экспериментальной установки: 2

Использование максимального значения l : 1

Использование максимального значения h : 1

Получение результата с погрешностью

$\varepsilon \leq 3\%$ 3

$3\% < \varepsilon \leq 6\%$ 2

$6\% < \varepsilon \leq 10\%$ 1

Оценка погрешностей измерений 3

В нашем примере оценка оказалась равной 15 баллов, чего и Вам желаем.

§ 74. Газовые законы

Условия экспериментальных задач

1 Оценить давление, которое можно создать, сжимая руками пластиковую бутылку с водой.

Оборудование: пластиковая бутылка с водой, пробирка, миллиметровая бумага, скотч, ножницы, барометр (один на аудиторию).

2 Оценить давление воздуха в воздушном шарике.

Оборудование: воздушный шар, кусок органического стекла, набор грузов известной массы, лист миллиметровой бумаги, фломастер.

Рекомендации для организаторов. Воздушный шарик лучше брать диаметром 15 – 20 см в надутом состоянии, а его форма не должна быть вытянутой. Шарик следует брать достаточно мягкий. В любом случае его не следует надувать слишком сильно. Примерный размер куса органического стекла 15×15 см, тол-

щина 3 мм. Для проведения работы достаточно 3–4 груза массой от 100 г до 500 г. Если используются нестандартные грузы, то необходимо выдать весы для их взвешивания. Фломастер должен оставлять на органическом стекле четкий след.

3 Измерить двумя способами атмосферное давление.

Оборудование: стеклянная трубка внутренним диаметром 1,2 мм, пробирка, линейка, пластилин, стакан с водой.

4 Измерить давление воздуха в шаре после откачивания из него воздуха.

Оборудование: недеформируемый шар для взвешивания воздуха, сосуд с водой, насос ручной двойного действия, зажим, резиновая трубка, мензурка, барометр (один на класс).

5 Определить универсальную газовую постоянную.

Оборудование: манометр, недеформируемый шар для взвешивания воздуха, весы, набор гирь, насос, барометр (один на класс).

6 Определить температуру воздуха в комнате.

Оборудование: пробирка, линейка измерительная, полоска миллиметровой бумаги, стеклянная трубка с известным внутренним диаметром (2,8 мм), пластилин, кастрюля со льдом и водой, мензурка, проволока, марлевый тампон для протирания пробирки.

Возможные решения предложенных задач

1 Закрепить вдоль пробирки с помощью скотча полоску миллиметровой бумаги. Сделать из пробирки «картезианского водолаза», поместив её вверх дном в бутылку с водой (рис. 3а). Закрывать бутылку и сжать её (рис. 3б). Провести измерения расстояний l_0 , h_0 , l и h в этих двух состояниях.

Неровностью дна пробирки можно пренебречь. По закону Бойля–Мариотта:

$$(p_a + \rho g h_0) S l_0 = (p_x + \rho g h) S l,$$

где p_a – атмосферное давление (определить по комнатному барометру), p_x – искомое давление, ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения, l_0 и l – высота столба воздуха в пробирке, h_0 и h – разность уровней воды в бутылке и пробирке. Все длины можно измерить миллиметровой бумагой.

Отсюда найдём искомое давление p_x : $p_x = (p_a + \rho g h_0) l_0 / l - \rho g h$.

Избыточное давление, создаваемое руками: $\Delta p = p_x - p_a = p_a \cdot \frac{l_0 - l}{l} + \rho g h_0 \cdot \frac{l_0}{l} - \rho g h$.

2 Надуть воздушный шарик. Положить на шарик кусок органического стекла, а сверху поставить первый груз. Обрисовать фломастером границу касания шарика с органическим стеклом. Повторить эксперимент для остальных грузов. Используя миллиметровую бумагу, измерить площадь контуров, нарисованных на органическом стекле. Вес груза уравновешен силой, с которой воздух в шарике давит на площадку: $mg = pS$. Отложить на графике в координатах m , S экспериментально найденные точки. Провести через эти точки прямую. Чтобы не учитывать

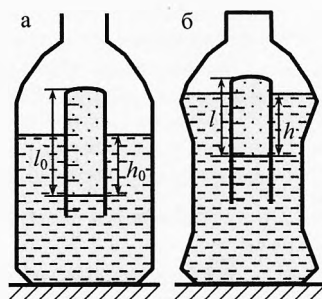


Рис. 3. Картезианский водолаз

массу пластинки, прямую можно сдвинуть на значение S_0 площади пятна, создаваемого пластинкой без грузов. Таким образом, давление в шарике определяется по формуле: $p = \Delta mg / \Delta S$.

Примечание. Под p в данном случае понимается избыточное давление по сравнению с атмосферным. На самом деле давление воздуха в шаре $p_a + \Delta mg / \Delta S$.

3 I способ. Закрыть один конец трубки пластилином. Погрузить её открытым концом вводу, сохраняя вертикальное положение. Измерить уровень воды в трубке.

II способ. Набрав в трубку столбик воды, не касающийся ни одного из торцов трубки, и закрыв один из торцов пластилином, измерить высоту столба воздуха, заключенного в закрытой части трубки при её вертикальном и горизонтальном положениях.

В обоих случаях для определения атмосферного используется закон Бойля–Мариотта: $p_0 V = \text{const}$.

Примечание. Оба способа (особенно второй) дают высокую погрешность измерения из-за малой плотности воды.

4 Откачать насосом воздух из шара. С помощью зажима зажать трубку, присоединенную к шару, и опустить её свободный конец в сосуд с водой. Открыть зажим. Измерить мензуркой объём воды V_w , вошедшей в шар. При этом давление воздуха в шаре снова стало атмосферным.

Заполнить пустой шар водой и с помощью мензурки измерить объём этой воды, а значит и полный объём V_w шара.

По закону Бойля–Мариотта для воздуха в шаре в откачанном состоянии (при давлении p и объёме V_w), и после того как в него вошла вода (давление воздуха в шаре стало атмосферным, а его объём равным $(V_w - V_a)$): $p V_w = p_a (V_w - V_a)$.

Тогда искомое давление: $p = p_a \cdot \frac{V_w - V_a}{V_w}$, где p_a – измеряется барометром.

5 I способ. Шар для взвешивания воздуха соединить через манометр с насосом (в режиме откачивания). Применяя уравнение Клапейрона–Менделеева для воздуха в шаре до откачки (при атмосферном давлении p_0) и после откачки, получить:

$$p_0 V = \frac{m_0}{M} RT; \quad p_1 V = \frac{m_1}{M} RT. \quad \text{Отсюда} \quad R = \frac{(p_0 - p_1) V M}{T(m_0 - m_1)}.$$

Разность давлений $(p - p_0)$ измерить манометром, разность масс m_0 и m_1 определить путём взвешивания шара до и после откачки, температуру измерить термометром, $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха.

II способ. Можно увеличить точность измерений, если накачать шар с помощью насоса (в режиме накачки) до давления p_2 . Тогда, разность масс шара будет более заметной. В этом случае расчётная формула примет вид: $R = \frac{(p_2 - p_1) V M}{T(m_2 - m_1)}$.

6 Для этого достаточно из пробирки, стеклянной трубки и пластилина сделать «газовый термометр», отделив объём внутри системы от наружного при помощи

капли воды, пущенной в трубочку. При этом очень важно, чтобы пробирка изнутри была сухой, а опыт проводился довольно быстро, пока незаметно испарение капли.

Температуру можно найти, отградуировав «термометр». В верхней части кастрюли с водой и льдом температура равна 0°C . Температура вблизи дна равна 4°C (при этой температуре плотность воды максимальна). Рассчитав изменение объёма при нагревании до комнатной температуры, найти её значение.

Примечание. Поскольку сам «газовый термометр» имеет большой размер, то поместить его вблизи дна довольно тяжело. Если же вместо газового термометра использовать обычный спиртовой термометр, но с затертой (закрашенной) шкалой, то точность заметно повысится, даже если в наличии есть всего 1 стакан воды со льдом.

§ 75. Свойства жидкостей

Условия экспериментальных задач

1 Определить давление насыщенного водяного пара, находящегося при температуре $t_1=60^{\circ}\text{C}$, если известны атмосферное давление и давление насыщенного пара при комнатной температуре t_2 .

Оборудование: сосуд с горячей водой; сосуд с водой при комнатной температуре; пробирка; пробка; термометр; линейка.

2 Определить относительную влажность воздуха.

Оборудование: жидкостный манометр, резиновые трубки, стакан с водой, пипетка, термометр, резиновая груша, линейка измерительная, справочник по физике.

3 Оценить размер молекул олеиновой кислоты.

Оборудование: 0,15%-ный раствор олеиновой кислоты в спирте, пипетка, линейка измерительная, весы, набор гирь, сосуд с дистиллированной водой, лycopодий или тальк, небольшой стаканчик.

4 Определить поверхностное натяжение жидкости.

Оборудование: сосуд с жидкостью, линейка измерительная, набор гирь, чувствительная пружина, проволоочное кольцо, нить.

5 Определить средний размер капилляров фильтровальной бумаги, считая коэффициент поверхностного натяжения известным.

Оборудование: лист фильтровальной бумаги, линейка измерительная, сосуд с водой.

6 Определить коэффициент поверхностного натяжения σ_x неизвестной жидкости.

Оборудование: весы без разновесов, пипетка, два стакана, вода, неизвестная жидкость, материал для уравнивания весов (песок или лист бумаги).

Рекомендации для организаторов. В качестве неизвестной жидкости лучше всего использовать этиловый спирт. В принципе подойдёт любая жидкость, с коэффициентом поверхностного натяжения сильно отличающимся от воды. Однако необходимо предостеречь от использования масел, так как должна быть возмож-

ность чисто отмыть пипетку от этой жидкости. В крайнем случае можно использовать мыльную воду.

7 Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости (плотность жидкости считать известной).

Оборудование: капилляр, емкость с жидкостью (например, раствор глицерина с водой), шприц, миллиметровая бумага.

Возможные решения предложенных задач

1 Поместить пробирку вверх дном в сосуд с горячей водой. Выждав некоторое время (~10 минут), дожидаясь того, что в пробирке возникает насыщенный пар при температуре $t_1=60^\circ\text{C}$. Измерить длину l_1 части пробирки, в которой находится влажный воздух (рис. 4а). Затем прикрыть пробирку пробкой и перенести её в сосуд с водой, находящейся при комнатной температуре t_2 . Пробирка по-прежнему остаётся

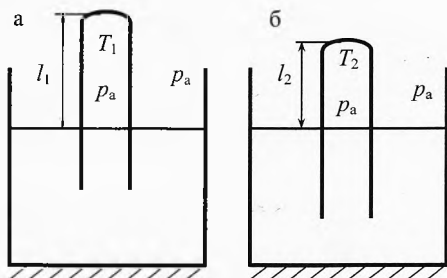


Рис. 4. Давление насыщенного пара

вверх дном. Вынуть пробку. Примерно через 10 мин в пробирке установится давление насыщенного пара p_2 и температура t_2 . Пусть при этом длина пробирки, свободная от воды, равна l_2 (рис. 4б).

Поскольку количество сухого воздуха ν в пробирке не меняется, можно записать для парциального давления сухого воздуха в двух рассмотренных случаях:

$$(p_a - p_1)l_1 S = \nu RT_1, \quad (4)$$

$$(p_a - p_2)l_2 S = \nu RT_2, \quad (5)$$

где S — площадь отверстия пробирки, $T_1 = t_1 + 273$ К, $T_2 = t_2 + 273$ К, p_a — атмосферное давление.

Решая уравнения (4) и (5), найти искомое давление: $p_1 = p_a - (p_a - p_2) \cdot \frac{T_1 l_2}{T_2 l_1}$.

Примечание. Пробирку желательно располагать так, чтобы уровень воды в сосуде и пробирке совпадали. В этом случае не потребуется учитывать давление, создаваемое разностью этих уровней.

2 Относительная влажность воздуха определяется по формуле: $\varphi = \frac{p}{p_n}$,

где p — парциальное давление водяного пара в воздухе, p_n — давление насыщенного водяного пара при этой температуре (определить по справочнику).

Из-за трудности прямого измерения парциального давления водяного пара можно заменить его измерением приращения давления в опыте по доведению ненасыщенного атмосферного воздуха до насыщения испарением воды в герметичном сосуде.

Атмосферное давление складывается из давления p_a сухого воздуха и парциального давления p водяных паров:

$$p_a = p_b + p.$$

Если в герметичный сосуд влить небольшое количество воды (рис. 5), то вследствие её испарения водяной пар станет насыщенным, давление влажного воздуха станет равным:

$$p_1 = p_b + p_n.$$

Решая совместно, получим относительную влажность воздуха:

$$\varphi = 1 - \frac{p_1 - p_a}{p_n}.$$

Для определения разности давлений с помощью линейки найдём перепад высот h столбов воды в манометре: $p_1 - p_a = \rho g h$.

Итак, относительная влажность воздуха: $\varphi = 1 - \frac{\rho g h}{p_n}$.

3 Наиболее простой метод оценки размеров молекул основан на свойстве некоторых веществ образовывать на поверхности тончайшие плёнки толщиной в одну молекулу. Измерив толщину такой плёнки, можно принять её равной диаметру молекулы.

Если на поверхности воды капнуть немного раствора олеиновой кислоты в спирте, спирт растворяется в воде и частично испаряется, а олеиновая кислота образует на поверхности воды молекулярную плёнку. Для наблюдения плёнки и измерения её площади поверхность воды предварительно посыпают лycopodium или тальком.

Олеиновая кислота уменьшает поверхностное натяжение воды, поэтому плавающие частицы вещества перемещаются от места падения капли к краям плёнки, что приводит к появлению «окна» (рис. 6).

Для определения массы капли раствора необходимо с помощью пипетки накапать в стаканчик столько раствора, чтобы его масса была существенно больше погрешности измерения весов. Отметим, что масса всех капель, падающих с пипетки, одинакова и определяется только поверхностным натяжением раствора и диаметром шейки пипетки.

Тогда масса олеиновой кислоты в одной капле раствора будет равна.

$$m = \frac{m_N}{N} \cdot 0,0015,$$

где m_N — масса N капель раствора.

Определив массу олеиновой кислоты m в капле раствора, площадь поверхности «окна» S и зная плотность олеиновой кислоты ρ , оценить размер молекулы:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{m}{\rho \cdot S}.$$

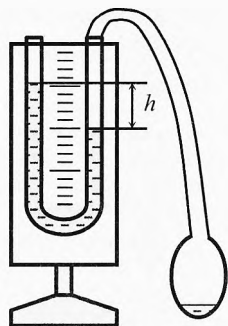


Рис. 5. Относительная влажность воздуха

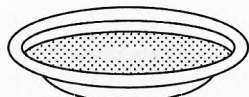


Рис. 6. Размер молекулы

4 Поверхностное натяжение σ можно определить как отношение силы поверхностного натяжения F к длине l границы жидкости с проволокой на всей длине соприкосновения, равной двойной длине проволоки: $\sigma = \frac{F}{l}$.

Силу поверхностного натяжения можно определить, измерив с помощью чувствительной пружины силу, которую нужно приложить, чтобы оторвать проволочное кольцо с поверхности жидкости. Для этого пружину прикрепляем к проволоке тремя нитями.

При извлечении из жидкости кольца с внешним и внутренним диаметрами d_1 и d_2 жидкостная плёнка разрывается на длине $\pi(d_1 + d_2)$, приблизительно можно считать, что $d_1 \approx d_2$, так как проволока тонкая, а кольцо – широкое. Поэтому для поверхностного натяжения получится выражение: $\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{\pi(d_1 + d_2)}$. В этой

формуле сила упругости пружины определяется по закону Гука $F_{\text{упр}} = kx$, где k – жесткость пружины, x – её удлинение при вытягивании кольца из исследуемой жидкости.

Жесткость пружины k можно определить в отдельном опыте, используя разновес и линейку.

Более точно можно определить силу упругости, не измеряя жесткость пружины. Заметив её удлинение при вытягивании кольца, нагрузить пружину до такого же удлинения разновесом. В этом случае сила упругости равна весу разновесок:

$$F_{\text{упр}} = mg.$$

5 Опустить край листа бумаги в жидкость, располагая лист в вертикальной плоскости. Измерить высоту поднятия воды h . Найти радиус капилляров по формуле: $r = \frac{2\sigma}{\rho gh}$. Поверхностное натяжение определяется заранее экспериментально.

6 Два сосуда уравновесить на весах. Далее в один из них накапать определенное количество капель (N_b) воды, а во второй – неизвестную жидкость до тех пор, пока весы снова не уравновесятся. Поскольку масса m_0 капли, которая ещё удерживается на пипетке, пропорциональна коэффициенту поверхностного натяжения σ : $m_0 \sim \sigma$, а общая масса капель пропорциональна их количеству в сосуде:

$m \sim m_0 \cdot N$, то: $\sigma_x = \sigma_b \frac{N_b}{N_x}$, где N_x – число капель неизвестной жидкости.

7 Найти радиус r капилляра. Для этого набрать в шприц определенный объём V жидкости, часть которой с помощью иглы передить в капилляр, и измерить миллиметровой бумагой высоту h столба жидкости. Освободить капилляр от жидкости и вновь заполнить его жидкостью из шприца. Так повторить до тех пор, пока в шприце не закончится вся жидкость. Просуммировав высоту столба жидкости в капилляре для каждого измерения (допустим, получилась высота H), можно найти радиус капилляра:

$$V = H \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}.$$

Опустить капилляр в емкость с жидкостью. За счёт сил поверхностного натяжения жидкости поднимается в капилляре на некоторую высоту h . Этот подъем

жидкости можно связать с избыточным давлением: $\frac{2\sigma}{r} = \rho gh$. Окончательное выражение для определения коэффициента поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{\rho gh}{2} \sqrt{\frac{V}{\pi H}}.$$

§ 76. Свойства твёрдых тел

Условия экспериментальных задач

1 Определить модуль Юнга стальной проволоки.

Оборудование: штатив с двумя лапками для крепления оборудования, два стальных стержня, стальная проволока (диаметром 0,26 мм), линейка, динамометр, пластилин, булавка.

Примечание. Коэффициент жесткости проволоки круглого сечения зависит от модуля Юнга и геометрических размеров проволоки следующим образом:

$k = E \cdot \frac{S}{l_0}$, где l_0 – длина проволоки, а S – площадь поперечного сечения.

2 Исследовать зависимость прогиба деревянной рейки прямоугольного сечения от:

- 1) силы F , действующей на свободный конец рейки;
- 2) длины l незакрепленной части рейки;
- 3) толщины h рейки.

Оборудование: две деревянные рейки одинаковой ширины, но разной толщины, динамометр, струбцина, капроновый шнур, миллиметровая бумага.

3 Изучить зависимость прочности нити на разрыв от её длины (в диапазоне длин от 5 см до 2 м) двумя способами.

Первый способ (расточительный): нить заранее разрезается на куски разной длины и определяется их прочность.

Второй способ (экономный): берется кусок нити некоторой максимальной длины, находится его прочность, затем более длинный из получившихся кусков используется для определения прочности при новой длине и т.д.

Объяснить различия в результатах (если они есть), полученных этими двумя способами.

Оборудование: нить, штатив, ножницы, линейка, набор грузов известной массы.

Рекомендации для организаторов. В качестве нити следует взять либо достаточно тонкую хлопчатобумажную нить, либо шерстяную пряжу. Длины нити, выдаваемой участникам, должно хватить для измерения каждым из способов не менее трёх раз. Необходимо заранее проверить, что нить не однородна по прочности вдоль всей длины.

4 Определить модуль упругости стали.

Оборудование: стальная проволока, микрометр, линейка измерительная, груз известной массы, два штатива, небольшая доска, два гвоздя.

5 Исследовать зависимость жесткости пружины, самостоятельно изготовленной из медной проволоки, от длины получившейся пружины и её диаметра.

Оборудование: медная проволока диаметром 1–2 мм, цилиндрические стержни различных диаметров (например, 1, 2 и 3 см) линейка измерительная, набор гирь, штатив с двумя лапками, нить.

Возможные решения предложенных задач

1 Собрать установку, схематически изображенную на рис. 7. К правому концу стержня прикрепить динамометр, а к торцевой части стержня с помощью пластилина прикрепить булавку (она будет играть роль стрелки). По вертикально поставленной линейке определить смещение Δh правого конца стержня при разных значениях приложенной силы F . Удлинение Δl проволоки определить из пропорции

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{\Delta h}{l}. \quad (6)$$

Из-за дополнительного удлинения проволоки на Δl сила натяжения проволоки согласно закону Гука увеличится на:

$$\Delta T = k \cdot \Delta l. \quad (7)$$

Увеличение силы натяжения найти из уравнения моментов сил:

$$l_1 \cdot \Delta T = l \cdot \Delta F. \quad (8)$$

Воспользоваться выражением для коэффициента жесткости, приведённым в условии задания. После преобразования (6), (7) и (8) получится: $E = \frac{l_0}{S} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \cdot \frac{\Delta F}{\Delta h}$.

2 Сложить рейки в виде бутерброда (плоскость к плоскости) и прижать струбциной один конец к столу. Рейки должны располагаться в горизонтальной плоскости перпендикулярно краю стола. Допустим, более тонкая рейка оказалась снизу. Накинуть на её свободный конец капроновую петлю (рис. 8).

1) За ту же петлю зацепить динамометр, к которому приложить силу F . Снять зависимость прогиба δ рейки от силы F . Прогиб нижней рейки относительно верхней (прямой) измерить с помощью миллиметровой бумаги. Искомая зависимость имеет вид: $\delta \propto F$.

2) Меняя расстояние l от петли до закрепленного края реек, снять зависимость прогиба δ от l . Она имеет вид: $\delta \propto l^3$.

3) Поменять местами верхнюю и нижнюю рейки. Повторить измерения из пункта 2). Сравнить серии измерений пунктов 2) и 3). Найти зависимость δ от толщины h рейки: $\delta \propto h^{-3}$.

Обобщить результаты измерений всех пунктов: $\delta \propto F \left(\frac{l}{h}\right)^3$.

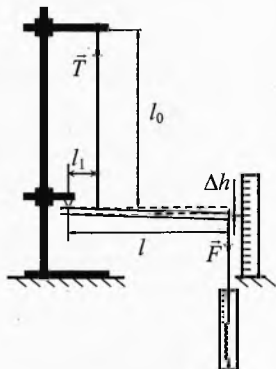


Рис. 7. Модуль Юнга

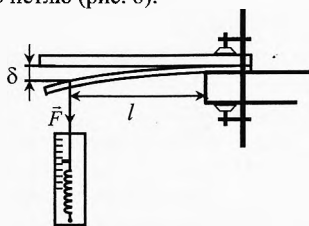


Рис. 8. Прогиб рейки

Примечание. Теоретическая зависимость прогиба рейки, изучаемая в курсе сопротивления материалов, выглядит следующим образом: $\delta = \frac{4}{E} \frac{F}{b} \left(\frac{l}{h}\right)^3$, где b – ширина рейки, E – модуль Юнга.

3 В обоих способах нить выбранной длины закрепить в штативе и нагружать грузами до тех пор, пока она не разорвется.

Прочность нити на различных участках неодинакова, и при «расточительном» способе на любой длине куса прочность колеблется относительно некоторого среднего значения случайным образом. При «экономном» способе нить сперва рвется на самом слабом участке, затем – на самом слабом из оставшихся, и так далее. В результате возникает «зависимость», порождающая впечатление, что прочность нити растёт по мере уменьшения длины куска.

4 Забить гвозди в доску на максимально возможном расстоянии. Натянуть между ними проволоку. Проволоку сильно натягивать не нужно, но и не допускать её провисания. Закрепить доску в штативах (рис. 9). Зацепить груз на середину проволоки и измерить высоту h его опускания.

Поскольку груз неподвижен, то сумма сил по вертикали равна нулю:

$$2 \cdot T \cdot \sin \alpha = mg,$$

где m – масса груза, T – сила натяжения нити, α – угол провисания проволоки под тяжестью груза.

Из закона Гука следует, что $T = \frac{ES}{l} \Delta l$, где E – модуль упругости стали (модуль Юнга), $S = (\pi d^2)/4$ – площадь сечения проволоки, d – её диаметр (измерить с помощью микрометра), l – длина проволоки,

$$\Delta l = 2 \left(\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{l}{2} \right)$$

– удлинение проволоки. Учитывая, что $\frac{h}{l} \ll 1$, получить*:

$$\Delta l = l \left(\sqrt{1 + \left(2 \frac{h}{l}\right)^2} - 1 \right) \approx 2 \frac{h^2}{l}.$$

Итак, выражение для модуля упругости проволоки: $E = \frac{2Tl^2}{\pi d^2 h^2}$.

5 Для самостоятельного решения.

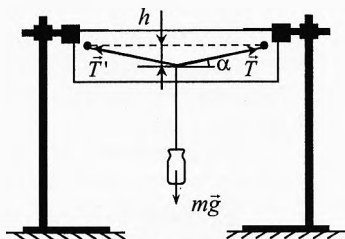


Рис. 9. Модуль упругости стали

* Здесь нужно воспользоваться формулой: $(1+x)^n \approx 1 + n \cdot x$, где $x \ll 1$.

§ 77. Термодинамика

Условия экспериментальных задач

1 Определить температуру воды, при которой её плотность максимальна.

Оборудование: стакан с водой при температуре $t=0^{\circ}\text{C}$; металлическая подставка; термометр; ложечка; часы; маленький стакан.

2 Смешивая снег с солью, определить концентрацию соли, необходимую для получения минимальной температуры смеси.

Оборудование: калориметр, термометр, весы с разновесами, снег или колотый лёд, поваренная соль.

3 Определить удельную теплоту парообразования L воды. Принять удельную теплоёмкость воды $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$.

Оборудование: стаканы из стекла и пенопласта, вода, кипятильник, термометр, секундомер, линейка, лист бумаги.

4 Измерить температуру куска льда.

Оборудование: кусок льда (выдаётся по требованию), спиртовой термометр с закрашенной шкалой, секундомер, стакан из пенопласта, миллиметровая бумага, вода.

Рекомендации для организаторов. Лёд можно приготовить в морозильной камере холодильника. Температура льда должна быть около -10°C .

5 Определить удельную теплоту плавления льда.

Оборудование: лёд, горячая вода, мензурка, калориметр, ложка, термометр.

6 Определить удельную и молярную теплоёмкости данного Вам металла.

Оборудование: калориметр, сосуд с водой, мензурка, калориметрические тела (стальные, алюминиевые, медные, свинцовые), весы, набор гирь, термометр, чайник с кипящей водой.

7 Определить удельную теплоту плавления льда.

Оборудование: калориметр, сосуд с кусочками плавающего льда, сосуд с тёплой водой ($m_{\text{в}}=0,2 \text{ кг}$, $t_{\text{в}}=60^{\circ}\text{C}$), мензурка, термометр.

8 Исследовать процесс остывания воды, нагретой до 80°C , в комнате. Оценить часть теплоты, уносимую парами воды по отношению к общей теплопередаче.

Оборудование: внутренний и внешний стаканы калориметра, сосуд с тёплой водой, бумага, термометр, часы.

9 Определить удельную теплоту растворения соли.

Оборудование: калориметр, термометр лабораторный, чайная ложечка, сосуд с водой, мензурка, навески соли по 5 г.

Возможные решения предложенных задач

1 Помешивая ложечкой воду в стакане, добиться выравнивания её температуры по всему объёму. Затем поставить стакан на подставку и исследовать зависимость температуры воды вблизи дна стакана от времени. Вначале температура

растёт, а затем вблизи искомого значения 4°C остаётся постоянной в течение примерно 10 минут, после чего опять начинает возрастать.

2 Приготовить некоторое количество навесков соли.

Взвесить на весах калориметр, затем наполовину заполнить его снегом и вновь взвесить. Таким образом, по разнице показаний весов определить массу снега.

Будем порциями добавлять соль в калориметр, перемешивая содержимое и контролируя температуру смеси. Результаты занести в таблицу и построить график зависимости температуры смеси от количества соли в ней.

Из анализа графика определить количество соли, добавленной к снегу, для получения минимальной температуры.

Определить концентрацию соли. Выполнить оценку погрешности измерений.

3 Для уменьшения тепловых потерь стеклянный стакан поместить в пенопластовый. Налить в стеклянный стакан воду, измерить начальный уровень h_1 .

Стакан должен быть высокий, а начальный уровень воды h_1 должен быть не более 70–80% высоты стакана, чтобы вода не выливалась во время кипения.

Опустить в стакан с водой кипятыльник, накрыть стакан листом бумаги с вырезанным отверстием, вставить в отверстие термометр, включить кипятыльник, измерить время τ_1 , за которое вода нагреется от температуры $t_1=85^{\circ}\text{C}$ до температуры $t_2=95^{\circ}\text{C}$. Часть тепла ушла в окружающее пространство, а часть пошла на нагревание воды:

$$Q_1 = P \cdot \tau_1 = \Phi_{\text{т.п.}} \cdot \tau_1 + cm(t_2 - t_1),$$

где P – мощность кипятыльника, m – масса воды, $\Phi_{\text{т.п.}}$ – поток тепловых потерь.

Довести воду до кипения, убрать лист бумаги и включить секундомер. Пусть вода покипит в течение времени τ_2 , после чего выключить кипятыльник и измерить уровень h_2 воды, оставшейся в стакане. Поскольку поток тепловых потерь остался примерно такой же, как и в первом случае, то

$$Q_2 = P \cdot \tau_2 = \Phi_{\text{т.п.}} \cdot \tau_2 + L\Delta m,$$

где Δm – масса испарившейся воды. Очевидно, что $\frac{\Delta m}{m} = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$.

Окончательный результат: $L = c(t_2 - t_1) \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \left(\frac{h_1}{h_1 - h_2} \right)$.

4 Изготовить из миллиметровой бумаги и прокалывать шкалу термометра. Для этого налить воду в стакан, поместить туда же некоторое количество льда, при этом воду не следует перемешивать! Температура смеси воды и льда равна 0°C . Измеряя эту температуру на поверхности воды (точнее уровень спирта h_1 в термометре), найти первую реперную точку (рис. 10а).

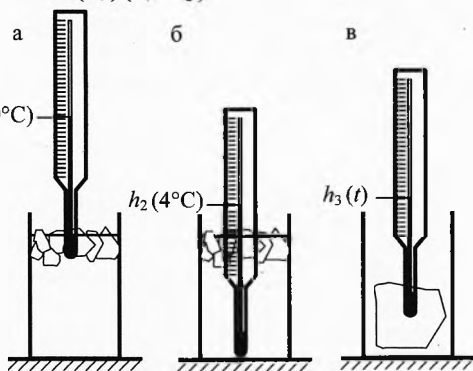


Рис. 10. Градуирование термометра

Через некоторое время конвекция в стакане прекратится, и температура воды вблизи дна стабилизируется. Поскольку плотность воды максимальна при 4°C , то, опустив термометр на дно и измерив уровень спирта h_2 в термометре, получить вторую реперную точку (рис. 10б).

Шкала термометра линейна, цена её деления: $\frac{4^{\circ}\text{C}}{h_2 - h_1}$.

Опустить термометр в выданный кусок льда и измерить уровень h_3 спирта в капилляре термометра (рис. 10в). Вычислить температуру льда по формуле:

$$t = \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_1} \cdot 4^{\circ}\text{C}.$$

5 Для определения удельной теплоты плавления льда можно опустить его в воду и измерить понижение её температуры в результате таяния льда. Записать уравнение теплового баланса для случая таяния льда массой $m_{\text{л}}$ в воде массой $m_{\text{в}}$, находящемся в стакане массой $m_{\text{с}}$:

$$m_{\text{л}}\lambda + c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{к}} - 0) = (c_{\text{б}}m_{\text{б}} + c_{\text{с}}m_{\text{с}})(t_{\text{б}} - t_{\text{к}}).$$

Трудности выполнения данной работы связаны с отсутствием весов и отсутствием сведений о теплоёмкости стакана калориметра.

Теплоёмкость стакана можно исключить налив в него такое количество воды массой $m_{\text{в1}}$ с температурой $t_{\text{в1}}$, отличной от температуры стакана $t_{\text{с1}}$, чтобы изменение его температуры было такое же, как и первом случае ($t_{\text{к1}} - t_{\text{с1}} = t_{\text{б}} - t_{\text{к}}$):

$$c_{\text{в}}m_{\text{в1}}(t_{\text{в1}} - t_{\text{к1}}) = c_{\text{с}}m_{\text{с}}(t_{\text{к1}} - t_{\text{с1}}).$$

Тогда:

$$\lambda = c_{\text{в}} \left(\frac{m_{\text{в}}(t_{\text{б}} - t_{\text{к}}) + m_{\text{в1}}(t_{\text{в1}} - t_{\text{к1}})}{m_{\text{л}}} - t_{\text{к}} \right).$$

Масса воды и льда определяется с помощью мензурки.

Для уменьшения погрешности измерений необходимо использовать максимальное из возможных значений массы тающего льда. Менее точно, но более быстро решение можно получить, наливая в стакан большое количество воды и пренебрегая теплоёмкостью сосуда.

6 Определить удельную теплоёмкость c металла можно с помощью уравнения теплового баланса. Необходимые данные надо взять из опыта и таблиц.

Определить значение молярной массы M вещества, пользуясь таблицей Менделеева, а затем рассчитать молярную теплоёмкость металла по формуле: $C = c \cdot M$.

Из классической теории теплоёмкости известно, что молярные теплоёмкости всех металлов должны быть примерно одинаковы (закон Дюлонга–Пти):

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{i}{2} \frac{R \Delta T}{\Delta T} = \frac{i}{2} R,$$

где $i=6$ – число степеней свободы.

Следовательно, $C=3R=25$ Дж/(моль·К). Это неплохо согласуется с экспериментом, для многих веществ (но не для всех).

7 Теплую воду следует перелить в калориметр и сразу же опускать в неё один за другим кусочки льда ($m_{\text{л}}, t_{\text{л}}=0^{\circ}\text{C}$) до тех пор, пока температура воды с расплавленным льдом не достигнет комнатной температуры t_0 .

Записать уравнение теплового баланса для этого случая, учитывая, что температура калориметра не изменилась:

$$\lambda m_{\text{л}} + c m_{\text{л}}(t_0 - 0) = c m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t_0); \Rightarrow \lambda = \frac{c(m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t_0) - m_{\text{л}} t_0)}{m_{\text{л}}}.$$

Удельную теплоёмкость воды найти в справочнике. Начальную массу воды $m_{\text{в}}$ и льда $m_{\text{л}}$ определить с помощью мензурки, измерив начальный и конечный объём воды и умножив на соответствующую плотность.

8 Налить горячую воду в калориметр. Накрывать калориметр листом бумаги, в котором вырезано отверстие для термометра, и исследовать зависимость температуры T_1 воды от времени t_1 остывания.

Налить такое же количество горячей воды в калориметр, но не накрывать его листом. Исследовать зависимость температуры T_2 воды от времени t_2 остывания, как и в первом случае.

Построить графики данных зависимостей: $T_1(t_1)$ и $T_2(t_2)$.

Поток тепла Φ_1 , проходящий через стенки калориметра, в первом случае ($\Phi_1 < 0$): $\Phi_1 = \frac{\delta Q_1}{\Delta t_1} = \frac{C \Delta T_1}{\Delta t_1}$, где $\Delta T_1 < 0$ – изменение температуры воды за небольшой промежуток времени Δt_1 , C – суммарная теплоёмкость воды и калориметра.

Во втором случае кроме теплопередачи через стенки калориметра тепло уходит ещё и за счёт испарения воды ($\Phi_2 < 0$): $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_{\text{и}} = \frac{\delta Q_2}{\Delta t_2} = \frac{C \Delta T_2}{\Delta t_2}$, где $\Delta T_2 < 0$ – изменение температуры воды за небольшой промежуток времени Δt_2 , $\Phi_{\text{и}} < 0$ – поток тепла, уходящего за счёт испарения воды.

Итак, отношение потока тепла, обусловленного испарением воды, к общему потоку уходящего тепла во втором случае: $\frac{\Phi_{\text{и}}}{\Phi_2} = 1 - \frac{\Delta T_1 \Delta t_2}{\Delta T_2 \Delta t_1}$.

Вычисляя это отношение для разных участков температур, построить график его зависимости от температуры воды.

9 Удельная теплота растворения равна количеству теплоты, необходимому для растворения 1 кг соли:

$$\lambda_{\text{раств}} = Q / m_{\text{с}}.$$

Налить в калориметр воду, предварительно измерив мензуркой её объём $V_{\text{в}}$. Измерить её температуру. Измерить температуру воды после растворения одного, двух, трёх, и т.д. навесок соли.

Количество теплоты рассчитать по формуле:

$$Q = c_{\text{в}} m_{\text{в}} |\Delta t| = c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} |\Delta t|,$$

где $\rho_{\text{в}}$, $c_{\text{в}}$ – плотность и удельная теплоёмкость воды, Δt – изменение температуры воды ($\Delta t < 0$). Итак,

$$\lambda_{\text{раств}} = \frac{c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} |\Delta t|}{m_{\text{с}}}.$$

Построить график зависимости температуры воды от количества растворённой соли $t(m_{\text{с}})$. Определив по графику среднее значение $\frac{|\Delta t|}{m_{\text{с}}}$ (тангенс угла наклона графика), вычислить удельную теплоту растворения соли.

Глава 10. Задачи российских физических олимпиад

Если не пытаться сделать нечто за пределами того, чем вы овладели в совершенстве, Вам никогда не вырасти над собой.

Рональд Осборн

Деление задач на олимпиадные и неолимпиадные условно. Некоторые задачи для абитуриентов более трудны, чем отдельные задачи, предлагавшиеся на разных турах российских олимпиад. К истинно олимпиадным задачам относятся такие, у которых сформулировано условие так, что сразу не видно, что дано, и порой не очень ясно, что нужно найти. В таких задачах, как правило, мало вычислений, но трудно выявить связь явлений, особенно в задачах, где нужно применять элементы симметрии, относительность движения, задачи с фазовыми переходами, с использованием неинерциальных систем отсчёта.

На олимпиадах предлагают также задачи, требующие серьезного применения математического аппарата. Часто встречаются задачи с несколькими вариантами решений. На заключительном этапе Российской и на международных олимпиадах могут предложить задачи в теоретическом плане, выходящие за программу школьного курса физики.

В последнее время большие требования стали предъявлять не только к правильной идее решения задачи, но и к верному конечному (численному) результату. Стали актуальны следующие тезисы: *«Идея стоит три копейки, главное – её материальное воплощение»*, *«Инженер отвечает за цифру»*.

Ниже приведены условия и решения задач теоретического тура региональных, окружных и заключительного этапов Всероссийской олимпиады по физике разных лет.

Решения многих задач в данной книге в той или иной степени отличаются от авторских. Предпринято это с целью представить их в доступном для понимания виде возможно более широкому кругу читателей.

Главная цель включения олимпиадных задач в книгу показать, что решение любых сложных задач опирается на известные каждому учащемуся законы и что любую задачу решить можно.

Обучение более качественно, когда учишься на трудных задачах. Развитие человека в любой области знаний идёт через тяжёлый труд. Мы старались облегчить Вам этот труд.

§ 78. МКТ. Тепловое расширение. Температура.

Уравнение состояния идеального газа

1 (1992, III, 10). В горизонтально расположенном цилиндре сечением S под тонким поршнем находится ν молей сжатого воздуха (рис. 1). Поршень удерживается на расстоянии l от дна цилиндра. Затем поршень отпускают, и он начинает без трения двигаться в цилиндре. На какое расстояние d сместится поршень к моменту достижения им максимальной скорости? Внешнее давление p_0 – атмосферное. Процесс расширения считать изотермическим. Температура комнатная.

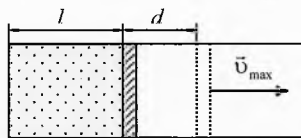


Рис. 1. Максимальная скорость

Решение. Давление газа под поршнем вначале

$$p_n = \frac{\nu RT_0}{lS} \quad (1)$$

больше атмосферного p_0 . В процессе движения на поршень действует сила давления газа $F_1 = pS$, сила атмосферного давления $F_2 = p_0S$ и сила сопротивления воздуха F_c , относительно которого начал двигаться поршень. Он будет двигаться с ускорением, пока сила давления газа F_1 не уравновесится силой атмосферного давления F_2 и силой сопротивления воздуха F_c .

В момент достижения поршнем максимальной скорости: $F_1 = F_2 + F_c$.

Так как F_c неизвестна, то перейдем к неравенству $F_1 > F_2$ или

$$pS > p_0S \Rightarrow p > p_0. \quad (2)$$

Так как процесс считается изотермическим, то $p_n l S = p(l+d)S$.

Подставляя сюда (1) и (2), получим: $\frac{\nu RT}{S} > p_0(l+d) \Rightarrow d < \frac{\nu RT}{p_0 S} - l$.

Данный процесс реально не является изотермическим, т. к. при расширении газ совершает положительную работу и охлаждается. Поэтому давление его будет уменьшаться по мере движения быстрее, чем при изотермическом процессе, значит, смещение d будет ещё меньше.

Ответ. К моменту достижения максимальной скорости поршень сместится на расстояние $d < \frac{\nu RT}{p_0 S} - l$.

Примечание. Мы часто решаем задачи-сказки, где отвлекаются от многих факторов и предлагают учесть только одну-две зависимости. Но порой не даются данные по факторам, пренебречь которыми нельзя. В этом случае, если мы хотим получить более правдоподобный ответ нужно учесть все существенные факторы, а потом перейти к неравенству в связи с невозможностью количественного учета факторов из-за отсутствия данных по ним, что мы и продемонстрировали при решении задачи. В жизни, как и в искусстве, всё переменчиво, и важно знать не только конкретный результат, но и тенденцию развития процесса.

2 (1992, IV, 10). Воздух, заполняющий кубический резервуар, находится при нормальных условиях. Длина ребра резервуара $a=1$ м. Его разделили на две равные части, поместив тонкий поршень (рис. 2а). В левую половину резервуара наливают воду. Её уровень достиг высоты $h=a/2$. На какое расстояние x сместился при этом поршень? Трения нет. Давлением пара можно пренебречь. Температура постоянна.

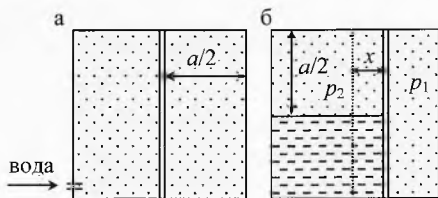


Рис. 2. Сжатие воздуха водой

Решение. Обозначим p_0 – давление воздуха в резервуаре без воды, p_1 и p_2 – давление воздуха соответственно справа и слева от поршня во втором состоянии (рис. 2б). Запишем закон Бойля–Мариотта для правой и левой частей:

$$p_0 \frac{a^3}{2} = p_1 \left(\frac{a}{2} - x \right) a^2, \quad p_0 \frac{a^3}{2} = p_2 \left(\frac{a}{2} + x \right) a^2.$$

$$\text{Откуда получим: } p_1 = p_0 \cdot \frac{a}{a - 2x} \quad \text{и} \quad p_2 = p_0 \cdot \frac{a}{x + a/2}.$$

$$\text{Условие равновесия поршня во втором состоянии: } p_1 a^2 = p_2 a^2 + \frac{1}{2} \rho g \frac{a}{2} \frac{a^2},$$

где последнее слагаемое – дополнительное давление со стороны воды.

Итак, $p_1 = p_2 + \rho g a/8$. Заметим, что $\rho g a/8 = 1250 \text{ Па} \ll p_2$. Поэтому $p_1 \approx p_2$. Подставляя сюда выражения для p_1 и p_2 , получим: $a - 2x \approx a/2 + x$, $\Rightarrow x \approx a/6 \approx 0,166 \text{ м}$.

Ответ. Поршень сместится примерно на 17 см.

Примечание. Желаящие могут решить задачу более строго, но результат, в пределах погрешностей, будет тем же, так стоит ли ломать копыта? Основная цель при решении задач – получить правильный результат, верным и, по возможности, более коротким путём. Часто это получается при решении в общем виде, но далеко не всегда.

3 (1995, III, 10). Оценить при нормальных условиях разность плотностей воздуха у пола и потолка комнаты, высота которой $h=3$ м. Молярную массу воздуха считать равной $M=29$ г/моль.

Решение. Из уравнения Клапейрона–Менделеева и определения плотности:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad pV = \frac{m}{M} RT; \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{pM}{RT}.$$

Следовательно, разность плотностей у пола и потолка равна:

$$\Delta \rho = \rho_{\text{пол}} - \rho_{\text{пот}} = \frac{M(p_{\text{пол}} - p_{\text{пот}})}{RT} = \frac{M \Delta p}{RT}.$$

Разность давлений $\Delta p = \rho g h = \frac{pM}{RT} g h$. Подставляя это выражение в предыду-

щее уравнение, получим: $\Delta \rho = \frac{pM^2}{(RT)^2} g h \approx 0,5 \text{ г/м}^3$.

Проверим размерность $\Delta \rho$, так как расчётная формула довольно сложна и возможна ошибка в выполненных преобразованиях.

$$[\Delta\rho] = \frac{(\text{Н/м}^2) \cdot (\text{кг/моль})^2 \cdot (\text{Н/кг}) \cdot \text{м}}{(\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)})^2 \cdot \text{К}^2} = \frac{\text{кг} \cdot (\text{Н} \cdot \text{м})^2}{\text{м}^3 \cdot (\text{Дж})^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ. Разность плотностей воздуха у потолка и пола комнаты при нормальных условиях равна $0,5 \text{ г/м}^3$.

4 (1995, III, 10). В горизонтально лежащей трубе, герметично закрытой с одного конца, находится поршень, который может свободно в ней двигаться (рис. 3). Диаметр трубы $d=1 \text{ см}$, масса поршня $m=100 \text{ г}$. Из пространства между поршнем и закрытым концом трубы откачан воздух, другой конец трубы открыт в атмосферу, давление которой $p=10^5 \text{ Па}$. В начальный момент поршень удерживался на расстоянии $x_0=10 \text{ см}$ от закрытого конца трубы. Затем его отпустили. Найти время, за которое поршень достиг закрытого конца трубы.

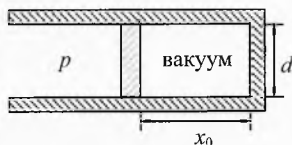


Рис. 3. Схлопывание вакуума

Решение. Запишем II закон Ньютона для поршня: $ma=F$, где $F=pS$, $S=\pi d^2/4$.

$$\text{Тогда ускорение поршня: } a = \frac{F}{m} = \frac{pS}{m} = \frac{\pi d^2 p}{4m}.$$

$$\text{Так как ускорение постоянно, то } x_0 = \frac{at^2}{2}. \text{ Следовательно, время } t = \sqrt{\frac{2x_0}{a}}.$$

$$\text{Подставляя выражение для ускорения, получим: } t = \sqrt{\frac{8x_0 m}{\pi d^2 p}} \approx 0,05 \text{ с}.$$

Ответ. Поршень достигнет закрытого конца трубы за $0,05 \text{ с}$.

5 (1998, III, 10). В герметичном сосуде находится воздух при $t=0^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении (рис. 4), которое равно внешнему. На стенке сосуда имеется клапан в форме правильного треугольника ABC со стороной $a=2 \text{ см}$, который может открываться наружу, вращаясь вокруг неподвижной оси AB . Клапан удерживается в закрытом положении пружиной жесткостью $k=60 \text{ Н/м}$, прикрепленной к нему в точке C и растянутой на $\Delta l=3 \text{ см}$. Ось пружины перпендикулярна плоскости клапана. На сколько градусов надо нагреть воздух в сосуде, чтобы клапан открылся?

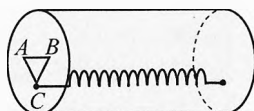


Рис. 4. Треугольный клапан

Решение. Для открытия клапана нужно, чтобы результирующий момент сил давления воздуха с обеих сторон стал больше момента силы упругости пружины. Сила давления воздуха прилагается к центру масс клапана, находящемуся в точке пересечения медиан: $(p-p_a)S \cdot \frac{h}{3} = k\Delta l \cdot h$; $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Процесс в сосуде изохорный, поэтому $p=p_a \cdot T/T_0$.

$$\text{Решая эти уравнения, получим: } \Delta T = T - T_0 = \frac{4\sqrt{3}k\Delta l T_0}{a^2 p_a} \approx 85 \text{ К}.$$

6 (2000, III, 10). Оценить выталкивающую силу, действующую на Вас со стороны воздуха в данный момент. Молярная масса воздуха $M=29$ г/моль. Давление, температуру воздуха, массу своего тела и другие необходимые данные задайте сами.

Решение. Выталкивающая сила $F_A = \rho_a \cdot g \cdot V$. Пусть объём Вашего тела $V=60$ л и Вы находитесь в нормальных условиях: $p_a=101,3$ кПа, $T=273$ К. Плотность воздуха найдём, используя уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$p_a V = \frac{m}{M} RT; \Rightarrow \rho_a = \frac{m}{V} = \frac{p_a M}{RT}, \quad F_A = \frac{p_a M g V}{RT} \approx 0,76 \text{ Н.}$$

7 (2001, III, 10). Изогнутая в форме кольца трубка постоянного внутреннего сечения расположена в вертикальной плоскости (рис. 5). Неподвижная заглушка A и свободно перемещающийся столбик ртути B делят трубку на 2 части. В большей по объёму части находится вдвое большее число молей идеального газа, чем в меньшей. В начале температура газа в меньшей части трубки была $T_1=260$ К, в большей – $T_2=410$ К, ртуть находилась в положении, при котором радиус, проведённый к ней из центра трубки составлял с горизонтом угол $\alpha_1=30^\circ$. До какой одинаковой температуры T' нужно довести газы в трубке, чтобы ртуть переместилась в положение C , которому соответствует угол $\alpha_2=60^\circ$? Масса газа во много раз меньше массы ртути. Длина столбика ртути и диаметр внутреннего сечения трубки значительно меньше радиуса кольца из трубки. Давление паров ртути не учитывать.

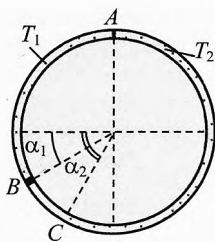


Рис. 5. Столбик ртути

Решение. Пусть p_1 и p'_1 – давление газа в меньшей части сосуда в начале и в конце эксперимента, p_2 и p'_2 – в большей; V – полный объём трубки, m – масса столбика ртути, ν – число молей в меньшей части сосуда, S – площадь внутреннего сечения трубки.

$$\text{В начале эксперимента: } p_1 \frac{1}{3} V = \nu RT_1; \quad p_2 \frac{2}{3} V = 2\nu RT_2; \quad p_2 = p_1 + \frac{mg \cos \alpha_1}{S}.$$

$$\text{В конце эксперимента: } p_1 \frac{5}{12} V = \nu RT'; \quad p'_2 \frac{7}{12} V = 2\nu RT'; \quad p'_2 = p'_1 + \frac{mg \cos \alpha_2}{S}.$$

$$\text{Решая эти уравнения, получим, что } T' = \frac{35 \cos \alpha_2 (T_2 - T_1)}{12 \cos \alpha_1} \approx 253 \text{ К.}$$

8 (1993, V, 10). Два одинаковых теплоизолированных сосуда соединены друг с другом тонкой короткой теплоизолированной трубкой с краном K , закрытым в начальный момент (рис. 6). В первом сосуде под поршнем массой m при температуре T_0 находится идеальный одноатомный газ, молярная масса которого равна μ . Во втором сосуде газа нет, и поршень, масса которого равна $m=M/2$, лежит на дне сосуда. Объём между поршнем и верхней крышкой в каждом сосуде вакуумирован. Кран открывают, газ из первого сосуда

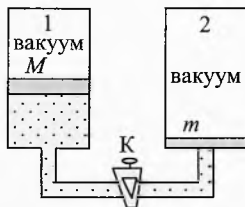


Рис. 6. Перетекание газа

устремляется под поршень второго, и тот начинает подниматься. Вычислить температуру газа после установления равновесия в сосудах. При равновесии между поршнем и крышкой во втором сосуде остаётся свободное пространство. Можно считать, что масса газа составляет 0,1 массы большого поршня ($\nu\mu=0,1M$, где ν – число молей газа). Трением можно пренебречь.

Решение. Учитывая, что центр тяжести газа находится в середине сосуда, запишем закон сохранения энергии для начального и конечного положений:

$$MgH_0 + \mu\nu \cdot g \frac{H_0}{2} + \frac{3}{2} \nu RT_0 = mgH + \mu\nu \cdot g \frac{H}{2} + \frac{3}{2} \nu RT.$$

Давление газа под поршнем массой M равно $p_{\text{верх}} = Mg/S$, к нижней части сосуда за счёт собственного веса газа давление линейно возрастает до значения $p_{\text{низ}} = (M + \mu\nu)g/S$. Поэтому среднее давление газа в сосуде в начальном и конечном положениях равно:

$$p_0 = \frac{(M + \mu\nu/2)g}{S} \quad \text{и} \quad p = \frac{(m + \mu\nu/2)g}{S}.$$

Запишем уравнение состояния газа в начальном и конечном положениях:

$$p_0 \cdot SH_0 = \nu RT_0 \quad \text{и} \quad p \cdot SH = \nu RT.$$

Подставляя последние четыре уравнения в первое, получим: $T = T_0$.

Примечание. В авторском решении этой задачи масса газа учтена только в законе сохранения энергии, но не учтена в расчёте среднего давления газа. Поэтому авторское решение не совпадает с нашим.

9 (1998, V, 11). Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплонепроницаемой перегородкой A . В перегородке A и в одной из стенок B имеется большое количество маленьких отверстий общей площадью S в каждой. В первой части сосуда включили нагреватель мощности P (рис. 7). Сосуд заполнен аргоном и помещен в атмосферу аргона. Внешнее давление p_0 и температура T_0 поддерживаются неизменными. Оценить установившиеся значения давлений (p_1 и p_2). Сделать числовые оценки при $P=20$ Вт, $S=10$ мм², $p_0=10^5$ Па, $T_0=300$ К. Молярная масса аргона $M=0,040$ кг/моль.

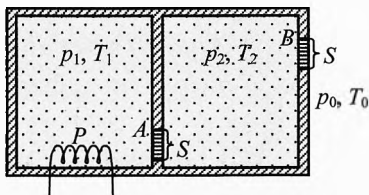


Рис. 7. Динамическое равновесие

Решение. Среднеквадратичная скорость молекул в газе равна

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (3)$$

Будем считать, что в сторону каждой из стенок летит $1/6$ часть молекул. Тогда число ударов молекул о стенку сосуда площадью S за единицу времени

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} S, \quad (4)$$

где n – концентрация молекул.

В установившемся режиме должно выполняться равенство потоков молекул сквозь перегородку A (и стенку B). Тогда для перегородки A имеем

$$\frac{1}{6} n_1 \bar{v}_1 S = \frac{1}{6} n_2 \bar{v}_2 S, \quad \text{или} \quad n_1 \bar{v}_1 = n_2 \bar{v}_2. \quad (5)$$

Аналогично для стенки B :

$$n_2 \bar{v}_2 = n_0 \bar{v}_0. \quad (6)$$

Мощность переносимая молекулами, уходящими из 1-й части сосуда сквозь поры перегородки, равна сумме мощности P нагревателя и мощности, переносимой молекулами, приходящими из 2-й части сосуда в 1-ю:

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} \left(\frac{m \bar{v}_1^2}{2} \right) = P + \frac{\Delta N_2}{\Delta t} \left(\frac{m \bar{v}_2^2}{2} \right). \quad (7)$$

Аналогично для стенки B :

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} \left(\frac{m \bar{v}_2^2}{2} \right) = P + \frac{\Delta N_0}{\Delta t} \left(\frac{m \bar{v}_0^2}{2} \right). \quad (8)$$

Учитывая, что общая площадь отверстий в перегородке A и стенке B одинакова, из уравнений (4), (5) и (6) получим:

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta t} = \frac{\Delta N_1}{\Delta t} = \frac{\Delta N_2}{\Delta t}. \quad (9)$$

Решая совместно уравнения (3) – (9), получим:

$$p_1 = p_0 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}, p_2 = p_0 \sqrt{\frac{T_2}{T_0}}, T_2 = T_0 \left[1 + \frac{4P}{p_0 S} \sqrt{\frac{M}{3RT_0}} \right], T_1 = 2T_2 - T_0.$$

Подставив числовые значения, находим:

$$T_2 = 355 \text{ К}, T_1 = 410 \text{ К}, p_2 = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Па}, p_1 = 1,17 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

§ 79. Фазовые переходы. Влажность воздуха.

Поверхностное натяжение.

Упругие деформации твёрдых тел

10 (1999, III, 11). В цилиндрическом теплоизолированном сосуде под поршнем находится только перегретая вода при температуре $t_1 = 110^\circ\text{C}$. Определить, на какую высоту H (относительно исходного положения) поднимется поршень после вскипания жидкости и установления термодинамического равновесия в системе. Начальная высота слоя воды $h = 1$ см. Считать, что теплоёмкость воды не зависит от температуры. Массой поршня и его трением о стенки сосуда пренебречь. Внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па.

Решение. Запишем уравнение теплового баланса: $c_v m(t_1 - t_0) = L \Delta m$, где $m = \rho_w S h$ – масса воды, $t_0 = 100^\circ\text{C}$, $c_v = 4200$ Дж – теплоёмкость воды, $\rho_w = 1000$ кг/м³ – плотность воды. Работа испаряющейся воды по отодвиганию атмосферы уже заложена в теплоту парообразования $L = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Уравнение Клапейрона–Менделеева для образовавшегося пара:

$$p_0 S H = \frac{\Delta m}{M} R T_0; \Rightarrow H = \frac{\rho_w h c_v (t_1 - t_0) R T_0}{L p_0 M} \approx 31 \text{ (см)}.$$

Как видно из ответа изменением уровня воды можно пренебречь ($\Delta h \approx 0,3$ мм).

11 (2000, III, 10). Дюралюминиевую линейку длиной $l = 30$ см изгибают так, что она образует полуокружность. Какова должна быть толщина d линейки, чтобы

она не лопнула? Модуль Юнга для дюралюминия $E=70$ ГПа, прочность на разрыв $\sigma_{\text{пч}}=0,45$ ГПа. Считать, что вплоть до разрыва деформации в дюралюминии остаются упругими.

Решение. При изгибе внешняя часть линейки растягивается, а внутренняя сжимается. Середина линейки не деформируется. Линейка лопнет, когда во внешнем слое молекул напряжение достигнет предельного.

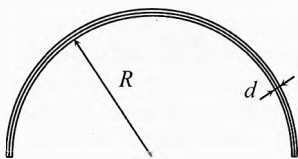


Рис. 8. Изгиб линейки

Согласно закону Гука: $\sigma = E \frac{\Delta l}{l}$. Эта формула

применима только для малых деформаций. Используем её, в оценочном варианте, до достижения предела прочности (рис. 8).

Удлинение внешнего слоя: $\Delta l = l - l_0 = \pi(R + d/2) - \pi R = \pi d/2$.

Линейка не лопнет, если $\sigma_{\text{пч}} > \sigma$ или $\sigma_{\text{пч}} > E \frac{\pi d}{2l}$, $\Rightarrow d < \frac{2l\sigma_{\text{пч}}}{\pi E} \approx 1,2$ мм.

Ответ. Линейка не лопнет, если её толщина менее 1,2 мм.

Примечание. Поскольку на самом деле любой материал, в том числе и сталь, обладает текучестью, то при достаточно медленном сгибании может не лопнуть линейка и большей толщины.

12 (2000, III, 10). В насыщенный пар воды при температуре $t=100^\circ\text{C}$ поместили металлическую пластину, охлажденную до очень низкой температуры. Оценили начальную скорость роста толщины слоя намерзающего льда.

Решение. Попадая на пластину, насыщенный пар конденсируется, охлаждается и там же превращается в лёд, отдавая энергию пластине. В начальный момент скорость нарастания льда будет максимальной. По мере увеличения толщины льда скорость нарастания во много раз замедлится, поскольку теплопроводность льда на 2 порядка ниже теплопроводности металлов. Скорость нарастания льда:

$$\frac{\Delta h}{\tau} = \frac{\Delta V}{S\tau} = \frac{\Delta m}{\rho_{\text{л}} S\tau}, \text{ где } \Delta m = \Delta z \cdot m_0 - \text{масса осевшего за время } \tau \text{ льда, } \Delta z - \text{количество}$$

молекул воды, попадающих на пластинку за время τ , m_0 – масса одной молекулы воды.

Будем считать, что в сторону пластины летит в среднем $1/6$ часть молекул:

$$\Delta z = \frac{\Delta N}{6} = \frac{nS\bar{v}\tau}{6}.$$

Здесь \bar{v} – средняя арифметическая скорость молекул: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$.

Концентрация молекул пара $n = p/(kT)$.

$$\text{Тогда: } \frac{\Delta h}{\tau} = \frac{m_0 n \bar{v}}{6\rho_{\text{л}}} = \frac{m_0 p}{6\rho_{\text{л}} kT} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \frac{p}{6\rho_{\text{л}}} \sqrt{\frac{8m_0}{\pi kT}} = \frac{p}{3\rho_{\text{л}}} \sqrt{\frac{2M}{\pi RT}}; \quad \frac{\Delta h}{\tau} \approx 7 \text{ см/с.}$$

Примечание. Получилось довольно большое число, но речь идёт только о самом начале конденсации, и по мере нарастания льда скорость его нарастания будет резко уменьшаться. Поэтому лучше записать ответ в виде $\frac{\Delta h}{\tau} \approx 70$ мкм/мс.

§ 80. Работа, теплота, внутренняя энергия. I начало термодинамики. Поток тепла

13 (1992, III, 11). В цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится идеальный одноатомный газ (рис. 9). Поршень удерживается на высоте h от дна сосуда легкой нитью. Сила натяжения нити равна F . Какое количество теплоты необходимо подвести к газу, чтобы поршень начал подниматься? Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

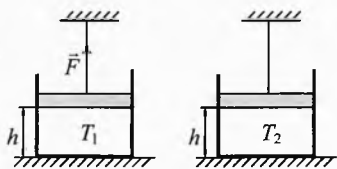


Рис. 9. Нагреть до начала подъёма

Решение. Количество теплоты нужно подводить изохорно до тех пор, пока сила натяжения нити не станет равной нулю. При этом давление в сосуде увеличится на $\Delta p = F/S$. Т. к. процесс изохорный, $Q = \Delta U = 1,5\nu R\Delta T$. Записав уравнение Клапейрона–Менделеева для двух состояний газа, получим $Sh\Delta p = \nu R\Delta T$. Решая совместно три уравнения, окончательно получим: $Q = 1,5Fh$.

Ответ. Газ должен получить количество теплоты $Q = 1,5Fh$.

14 (1993, III, 10). Для получения сверхвысоких температур используется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра («ствола») и поршня, своего рода «пули», влетающей в цилиндр с открытого конца. Оценить верхний предел температуры аргона, подвергнутого сжатию, если «пуля» массой $m = 100$ г влетает в ствол, имеющий объём $V_0 = 200$ см³ с начальной скоростью $v_0 = 250$ м/с. Начальная температура и давление аргона соответственно равны $T_0 = 300$ К и $p_0 = 1$ атм. Газ можно считать идеальным.

Решение. Будем считать процесс адиабатным. В этом случае кинетическая энергия пули идёт на увеличение внутренней энергии газа:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T,$$

где $\Delta T = T - T_0$ – изменение температуры газа, количество вещества $\nu = p_0 V_0 / RT_0$.

Таким образом: $\Delta T = mv_0^2 T_0 / 3p_0 V_0$; $\Delta T = 31250$ К.

Теперь вычислим верхний предел температуры:

$$T = T_0 + \Delta T; \quad T = 300 + 31250 = 31550 \approx 3,2 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

Ответ. Можно достичь температуры аргона около $3,2 \cdot 10^4$ К.

15 (1994, III, 10). Два шарика одинаковых радиусов r и массой m каждый нагреваются в неодинаковых условиях: один подвешен на непроводящей тепло нити, другой лежит на непроводящей тепло подставке (рис. 10). Сначала температура шариков одинакова. Затем каждому из них сообщили одинаковое количество теплоты Q . При этом температура первого шарика повысилась на Δt_1 , а второго – на Δt_2 . Определить удельную теплоёмкость материала, из которого изготовлены шарики, считая изменения температуры малыми.

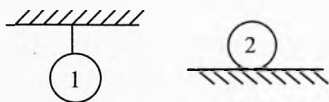


Рис. 10. Как проще нагреть: вверх или вниз?

Решение. При нагревании радиусы шариков увеличиваются: $\Delta r_1 = \alpha \Delta t_1$, $\Delta r_2 = \alpha \Delta t_2$, где α – температурный коэффициент расширения. При этом центр тяжести первого шарика понижается относительно точки подвеса на Δr_1 , а второго – повышается на Δr_2 . Запишем закон сохранения энергии для первого и второго шариков: $Q = cm\Delta t_1 - mg\Delta r_1$, знак минус поставлен потому, что механическая энергия первого шарика уменьшается; $Q = cm\Delta t_2 + mg\Delta r_2$.

Решая совместно эти уравнения, получим ответ: удельная теплоёмкость материала шариков $c = \frac{Q}{2m} \left(\frac{1}{\Delta t_2} + \frac{1}{\Delta t_1} \right)$.

16 (2000, III, 10). В вертикальном цилиндре находится вода массой $m=1,0$ г. К её поверхности прилегает поршень площадью $S=100$ см². Воду в цилиндре стали нагревать. В момент времени, когда температура достигла $t_0=100^\circ\text{C}$, вода закипела и стала медленно испаряться. Начиная с этого момента времени, система поддерживалась при температуре t_0 .

а) Какое количество теплоты нужно подвести к воде, чтобы она полностью испарилась?

б) На какую высоту H при этом поднимется поршень?

Если теперь на поршень, находящийся на высоте H от дна, положить небольшой груз массой 1 г, то

в) На какое расстояние ΔH сместится поршень?

г) Какая работа над газом в сосуде будет совершена при этом?

д) Какова масса поршня, если атмосферное давление равно 740 Тор?

Трением между стенками цилиндра и поршнем пренебречь.

Решение. а) Поскольку вода закипела при $t_0=100^\circ\text{C}$, то суммарное давление, создаваемое атмосферой и поршнем, равно давлению насыщенных паров воды при этой температуре. То есть $p=101,3$ кПа или 760 Тор.

Обратим внимание на то, что работа пара против сил внешнего давления (атмосферы и поршня) входит в значение удельной теплоты парообразования $L=2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

$$Q=Lm, \quad Q=2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} \cdot 10^{-3} \text{ кг}=2,3 \text{ кДж.}$$

б) Поршень остановится после того, как вся вода выкипит, и пар останется насыщенным при той же температуре. Согласно уравнению состояния $pV=\frac{m}{M}RT$,

$$\text{где } V=H \cdot S. \text{ Тогда: } H=\frac{mRT}{MSp}; \quad H=\frac{10^{-3} \text{ кг} \cdot 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 373 \text{ К}}{0,018 \text{ кг/моль} \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Па}}=0,17 \text{ м}=17 \text{ см.}$$

в) При изотермическом процессе даже незначительное увеличение давления приведет к уменьшению объема и конденсации пара. При этом поршень будет опускаться, пока вся вода не сконденсируется, то есть на $\Delta H=-17$ см.

г) Работа, совершенная над газом: $A_{\text{ст}}=-p \cdot \Delta V \approx -p(0-SH)=pSH$; $A_{\text{ст}} \approx 0,17 \text{ кДж.}$

д) $p=p_{\text{атм}}+m_{\text{порш}} \cdot g/S; \Rightarrow m_{\text{порш}}=(p-p_{\text{атм}}) \cdot S/g; \quad m_{\text{порш}} \approx 2,7 \text{ кг.}$

17 (2000, III, 11). На горизонтальной поверхности под вакуумным колоколом стоит теплоизолированный сосуд с двумя поршнями (рис. 11). Между ними, а также между нижним поршнем и дном сосуда находятся одинаковые массы идеального одноатомного газа. Верхний поршень массой m теплоизолирован, и на нём стоит гиря такой же массы. Нижний поршень теплопроводящий и его масса равна $2m$. Система находится в термодинамическом равновесии, её температура $T_1=320$ К. Гирю быстро снимают. Какая температура установится в системе? Трением поршней о стенки сосуда и теплоёмкостью системы поршни-сосуд можно пренебречь. Масса газа много меньше m .

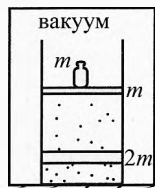


Рис. 11. С гирей было теплее

Решение. После быстрого снятия гири начнется неравновесный процесс, в начале которого оба поршня сдвинутся вверх. Поэтому уравнение состояния для газа можно применять только в начальном и конечном положениях. В конечном состоянии оба поршня будут неподвижны.

Суммарная механическая и внутренняя энергия двух поршней и газа под ними будет неизменной в любой момент времени, так как система теплоизолирована:

$$E_0 + U_0 = E + U; \quad mg \frac{V_{10} + V_{20}}{S} + 2mg \frac{V_{20}}{S} + 2 \cdot \frac{3}{2} \nu RT_0 = mg \frac{V_1 + V_2}{S} + 2mg \frac{V_2}{S} + 2 \cdot \frac{3}{2} \nu RT. \quad (9)$$

Условие равновесия поршней в обоих положениях:

$$\begin{cases} 2mg = p_{10}S, \\ 4mg = p_{20}S, \end{cases} \quad (10) \quad \begin{cases} mg = p_1S, \\ 3mg = p_2S. \end{cases} \quad (11)$$

Согласно уравнению состояния для обеих частей в двух случаях имеем:

$$p_{10}V_{10} = \nu RT_0; \quad p_{20}V_{20} = \nu RT_0; \quad \Rightarrow \quad p_{10}V_{10} = p_{20}V_{20}; \quad (12)$$

$$p_1V_1 = \nu RT; \quad p_2V_2 = \nu RT; \quad \Rightarrow \quad p_1V_1 = p_2V_2. \quad (13)$$

Уравнение состояния газа между поршнями в начальном и конечном состояниях:

$$\frac{p_{10}V_{10}}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T}. \quad (14)$$

Решая совместно (9), (10), (11), (12), (13) и (14), получим: $T=0,85T_0=272$ К.

18 (2002, III, 10). На столе стоит цилиндр со свободно перемещающимся поршнем и гирей на нём (рис. 12). Под поршнем при температуре T находятся в равновесии ν молей воды и 2ν молей её насыщенного пара. Какое количество теплоты Q надо сообщить системе вода-пар, чтобы объём пара увеличился в 2 раза? Молярная теплота испарения воды при температуре T равна L . Пар можно считать идеальным газом с молярной теплоёмкостью при постоянном объёме $C_V=3R$.

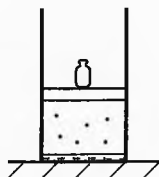


Рис. 12. Испарение воды и нагревание пара

Указание. При нагревании сначала испарится вся вода при постоянных давлении p и температуре T , а затем при постоянном давлении температура получившегося пара (3ν) увеличится на $\Delta T=T/3$.

Ответ. $Q=Q_{\text{исп}}+Q_{\text{нагр.пара}}=\nu L+\Delta U+A_r=\nu L+3\nu \cdot C_V \Delta T+3\nu \cdot p \Delta V=\nu L+4\nu RT$.

19 (2002, III, 11). С идеальным одноатомным газом провели цикл, состоящий из изобарного расширения 1-2, изотермического сжатия 2-3 и процесса 3-1, в котором молярная теплоёмкость газа остаётся постоянной и равной R (рис. 13). Какую работу совершил газ в процессе 1-2, если в процессе 3-1 он совершил работу A ?

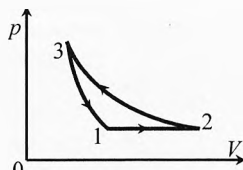


Рис. 13. Работа газа

Решение. Искомая работа $A_{12} = \nu R(T_2 - T_1)$. Запишем I начало термодинамики для участка 3-1: $Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31}$.

$\Delta U_{31} = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3)$. По условию: $Q_{31} = \nu R(T_1 - T_3)$. Учитывая, что $A_{31} = A$, получим:

$$\nu R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3) + A; \Rightarrow A = -\frac{\nu R}{2} (T_3 - T_1).$$

$$\text{Так как } T_2 = T_3, \text{ то } A = -\frac{\nu R}{2} (T_2 - T_1); \Rightarrow A_{12} = 2A.$$

20 (2003, III, 11). Для определения значения постоянной адиабаты γ неидеального газа экспериментатор Глюк провел изобарный 1-2 и изохорный 1-3 процессы, в ходе которых внутренняя энергия газа изменялась на одно и то же малое значение (рис. 14). Оказалось, что в изохорном процессе изменение температуры вдвое больше, чем в изобарном, и что в изобарном процессе треть теплоты, полученная газом, пошла на совершение работы против внешних сил. Чему равно значение γ для исследуемого Глюком газа?

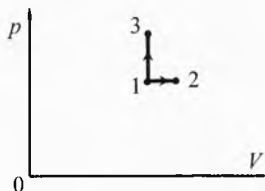


Рис. 14. Постоянная адиабаты

Решение. В изохорном процессе теплота Q_{13} пошла на увеличение его внутренней энергии: $Q_{13} = \Delta U = C_V \Delta T$; $\Rightarrow C_V = \Delta U / (\Delta T)$.

В изобарном процессе теплота Q_{12} , полученная газом пошла на увеличение внутренней энергии и работу против внешних сил:

$$Q_{12} = \Delta U + A = \Delta U + Q_{12}/3; \Rightarrow Q_{12} = \frac{3}{2} \Delta U.$$

По определению теплоёмкость при $p = \text{const}$: $C_p = Q_{12} / \Delta T = 3 \Delta U / (\Delta T)$.

Тогда постоянная адиабаты равна: $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 3$.

21 (1992, IV, 11). В теплоизолированном цилиндре, лёгкий поршень которого удерживается неподвижно двумя одинаковыми гири, находится один моль одноатомного газа (рис. 15). Начальная температура газа равна T_1 . Давление воздуха вне цилиндра равно нулю. Как изменится температура газа, если одну из гирь снять, а затем, через некоторое время поставить обратно? Поршень может скользить в цилиндре без трения.

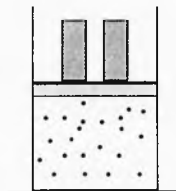


Рис. 15. От перестановки гири стало теплее

Решение. Так как цилиндр теплоизолирован и нет работы внешних сил, можно применить закон сохранения энер-

гии. Сумма механической и внутренней энергии сразу после снятия гири в положении 1 и в установившемся положении 2 с одной гирей:

$$U_1 + E_1 = U_2 + E_2 \Rightarrow U_1 - U_2 = E_2 - E_1 \Rightarrow \nu C(T_1 - T_2) = mg\Delta h_{12}.$$

Учтём, что $p_2 = mg/S$, а также, что в начальном и конечном состояниях $p_1 = p_3 = 2mg/S$, значит $p_1 = p_3 = 2p_2$.

Высота подъёма поршня после снятия гири: $\Delta h_{12} = (V_2 - V_1)/S$.

Уравнение состояния газа в положении 1 и 2: $p_1 V_1 = \nu R T_1$, $p_2 V_2 = \nu R T_2$.

Учитывая, что $p_2 V_1 = 0,5 p_1 V_1 = 0,5 \nu R T_1$, из полученных уравнений найдём:

$$\nu C(T_1 - T_2) = (V_2 - V_1)p_2 \Rightarrow \nu C(T_1 - T_2) = \nu R T_2 - 0,5 \nu R T_1.$$

Учитывая, что молярная теплоёмкость одноатомного газа $C = (3/2)R$, получим:

$$T_2 = 0,8 T_1. \quad (15)$$

Теперь запишем закон сохранения энергии для перехода из состояния 2 в состояние 3, когда положили снова вторую гирю. Поскольку внешняя сила ставит гирю на более высоком уровне, чем снимала, то она увеличила внутреннюю энергию системы. Значит, температура в конечном состоянии 3 должна оказаться выше, чем в исходном состоянии 1, и тем более в промежуточном состоянии 2, где газ охладился, совершив положительную работу. Пусть механическая энергия в момент, когда вновь положили вторую гирю, равна E'_2 . Тогда

$$U_2 + E'_2 = U_3 + E_3 \Rightarrow \nu C(T_3 - T_2) = -mg\Delta h_{23} \Rightarrow \nu C(T_3 - T_2) = p_3 S(V_2 - V_3)/S.$$

Уравнение состояния газа в положении 3: $p_3 V_3 = \nu R T_3$.

Проведя далее аналогичные преобразования (как в первом случае) получим:

$$T_3 = 1,4 T_2. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), получим: $T_3 = 1,4 \cdot 0,8 T_1 = 1,12 T_1$. Значит, $T_3 - T_1 = 0,12 T_1$.

Ответ. Температура газа увеличится на $0,12 T_1$.

22 (1992, V, 10). В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем при температуре окружающей среды находится воздух (рис. 16). Поршень медленно смещают от положения равновесия, поднимая его на высоту H . Затем ждут, пока температура воздуха в сосуде снова станет равной температуре окружающей среды. После этого сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На какое расстояние опустится поршень к тому времени, когда его колебания прекратятся? Теплоёмкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Давление воздуха снаружи считать малым.

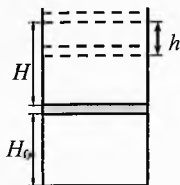


Рис. 16. Колебания поршня

Решение. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального состояния: $pV = \nu RT_0$, учитывая, что давление газа $p = mg/S$, а его объём $V = H_0 S$, получим:

$$mgH_0 = \nu RT_0, \quad (17)$$

где m – масса поршня. После того, как он окончательно остановится то же уравнение примет вид:

$$mg(H_0 + H - h) = \nu RT_1. \quad (18)$$

Так как второй процесс адиабатический, то, согласно закону сохранения энергии, можно записать:

$$mgh = \frac{5}{2} \nu R(T_1 - T_0). \quad (19)$$

Решая совместно уравнения (17), (18) и (19), получим: $h = 5H/7$.

Ответ. Поршень опустится на $5/7$ от первоначальной высоты его подъёма H .

23 (1996, III, 10). В теплоизолированном, вертикально расположенном цилиндре, закрытом теплопроницаемым поршнем, находится гелий (рис. 17). На поршень, который может перемещаться в цилиндре без трения, кладут гирию. Новое установившееся давление в цилиндре становится в два раза больше первоначально: $p=2p_0$. Считая газ идеальным, определить отношение конечного объема гелия к начальному. Внешнее давление на поршень отсутствует.

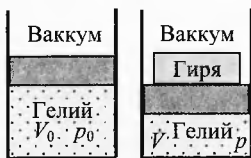


Рис. 17. Не квазистатическое сжатие

Решение. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний ν молей гелия:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad 2p_0 V = \nu R T.$$

Приращение внутренней энергии газа равно убыли потенциальной энергии поршня и гири, общая масса которых равна m :

$$\frac{3}{2} \nu R (T - T_0) = mg \frac{V_0 - V}{S},$$

где S — площадь поршня. Учитывая, что во втором состоянии сила тяжести поршня и гири уравновешивается силой давления гелия $mg = 2p_0 S$, и решая совместно все уравнения, находим $V/V_0 = 0,7$.

Ответ. Конечный объем гелия составляет 70% от начального.

24 (1997, IV, 10). В системе показанной на рис. 18, под поршнями массами m и $2m$ находится один моль идеального одноатомного газа. Над поршнями вакуум. Геометрические размеры показаны на рисунке. Поршень $2m$ закреплен, а поршень m свободен, затем поршень $2m$ освобождают. Оба поршня могут перемещаться в вертикально расположенных цилиндрах без трения. Удар поршня m с верхним дном цилиндра происходит совершенно упруго. Какого максимально большого отношения T_K/T_0 можно достигнуть, если изменять b (T_K — конечная равновесная температура газа, а T_0 — начальная)? Принять, что стенки цилиндров и поршни не обмениваются теплом с газом. На рисунке S — площадь поршня, V' — объем трубы, соединяющей сосуда.

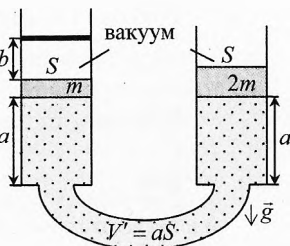


Рис. 18. Перемещаемая перегородка

Решение. Изменять b означает поднимать или опускать верхнее дно в левом цилиндре. Из закона сохранения энергии ясно, что отношение температур окажется максимальным при максимальном уменьшении механической энергии системы, а это будет, когда поршень $2m$ ляжет на нижнее дно правого цилиндра, т. е. когда его смещение максимально и равно a . Для этого давление газа в конечном положении не должно превышать $2mg/S$. С другой стороны надо подобрать такое значение b , при котором потенциальная энергия поршня массой m также будет минимальной. Значит, мы можем уменьшать значение b , увеличивая конечное давление газа, только до тех пор, пока оно не станет равным $2mg/S$.

Закон сохранения энергии для начального и конечного положений:

$$mga + 2mga + \frac{3}{2} \nu R T_0 = mg(a + b) + \frac{3}{2} \nu R T_K.$$

Уравнение состояния газа в начальном и конечном положениях:

$$\frac{mg}{S} \cdot 3aS = \nu RT_0 \quad \text{и} \quad \frac{2mg}{S} \cdot (2a+b)S = \nu RT_k.$$

Решая совместно три уравнения, получим ответ: $b=a/8$, $(T_k/T_0)_{\max} \approx 17/12$.

25 (1998, V, 10). Водяной пар массой $m=1$ г находится в теплоизолированной камере объёмом $V=39$ л при температуре $T=300$ К. В той же камере имеется вода, масса которой меньше массы пара. В процессе адиабатного сжатия температура пара возрастает на $\Delta T=1$ К, а часть воды испаряется. Насколько при этом увеличится масса пара? Теплоёмкостью воды пренебречь. Известно также, что при малых изменениях температуры ΔT насыщенного пара от значения 300 К его давление изменяется на $\Delta p=k\Delta T$, где $k=2 \cdot 10^2$ Па/К. Удельная теплота испарения воды $L=2,37$ МДж/кг.

Решение. Пусть изменение массы пара равно Δm , изменение давления равно Δp , а изменение объёма $\Delta V < 0$.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний:

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M} RT, \quad (p+\Delta p) \cdot (V+\Delta V) = \frac{m+\Delta m}{M} R(T+\Delta T); \\ \Rightarrow V \cdot \Delta p + p \Delta V &\approx \frac{\Delta m}{M} RT + \frac{m}{M} R \cdot \Delta T. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно I началу термодинамики для адиабатического процесса:

$$0 = Q = Q_{\text{исп}} + \Delta U_p + A \quad \Rightarrow \quad 0 = L \cdot \Delta m + \frac{6}{2} \frac{m}{M} R \Delta T + p \Delta V. \quad (21)$$

Учитывая, что $\Delta p = k \Delta T$, из (20) и (21) получим: $\Delta m = \frac{kMV - 4mR}{LM + RT} \cdot \Delta T \approx 2,4$ мг.

26 (2003, IV, 11). Экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что почти у всех известных ему изопроцессов (изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического) графики зависимости давления от объёма имеют соответствующие названия: изохора, изобара, изотерма, адиабата. У процесса же, в ходе которого не изменяется внутренняя энергия, такого названия нет. Глюк решил восполнить этот пробел и назвал отмеченную зависимость «изоэргой». Далее он решил сравнить ход «изоэрги» с изотермой и адиабатой для реального одноатомного газа при условиях, близких к нормальным. На рис. 19а приведены результаты его исследований. Выяснить, какому из трёх процессов 1-2, 1-3 или 1-4 соответствует «изоэрга», какому – изотерма, а какому – адиабата.

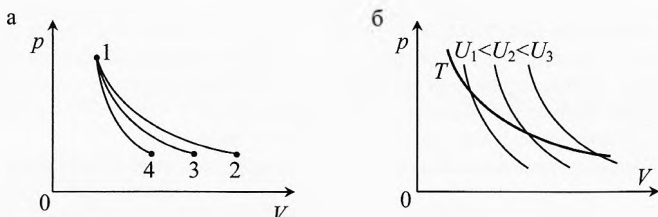


Рис. 19. Адиабата, «изоэрга» и изотерма неидеального газа

Решение. 1) Рассмотрим изотермическое расширение реального газа. Кинетическая энергия молекул однозначно определяется температурой ($E_k = \frac{3}{2}kT$) и, следовательно, остаётся постоянной.

При нормальных условиях расстояния между молекулами существенно превышают их размер, поэтому между молекулами преобладают силы притяжения. При расширении газа против этих сил совершается положительная работа и потенциальная энергия молекул газа увеличивается. Следовательно, при перемещении вдоль изотермы в сторону больших объёмов внутренняя энергия газа увеличивается, при этом изотерма последовательно пересекает «изозерги» со всё большей энергией (рис. 196), а это означает, что в точке пересечения изотермы с «изозергой» наклон изотермы относительно оси $0V$ меньше.

2) При адиабатическом расширении газа его внутренняя энергия уменьшается на величину работы, совершенной газом: $\Delta U = -\Delta A$. Следовательно, при перемещении вдоль адиабаты в сторону больших объёмов мы переходим к «изозергам» с всё меньшей внутренней энергией, а это означает, что в точке пересечения наклон адиабаты относительно оси $0V$ больше.

Таким образом, кривая 1-2 является изотермой, кривая 1-3 – «изозергой», а кривая 1-4 – адиабатой.

§ 81. Уравнение теплового баланса. Поток тепла

27 (2003, III, 9). В калориметр с горячим чаем бросили кубик льда, температура которого 0°C . После установления теплового равновесия температура чая понизилась на $\Delta t_1 = 12^\circ\text{C}$. Когда в калориметр бросили другой такой же кубик льда, температура чая понизилась ещё на $\Delta t_2 = 10^\circ\text{C}$. Насколько понизится температура чая, если в него бросить точно такой же третий кубик? Теплоёмкостью калориметра, теплообменом с окружающей средой и примесями заварки в чае пренебречь.

Решение. $\Delta t_2 = t_1 - t_2$; $\Delta t_3 = t_2 - t_3$; $cm\Delta t_1 = \lambda m_{\text{л}} + c m_{\text{л}}(t_1 - 0)$; $c(m + m_{\text{л}})\Delta t_2 = \lambda m_{\text{л}} + c m_{\text{л}}(t_2 - 0)$;
 $c(m + 2m_{\text{л}})\Delta t_3 = \lambda m_{\text{л}} + c m_{\text{л}}(t_3 - 0)$; $\Rightarrow \Delta t_3 = \frac{\Delta t_2 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{3\Delta t_1 - \Delta t_2} \approx 8,5^\circ\text{C}$.

28 (1993, V, 9). В термос с водой, температура которой $t = 40^\circ\text{C}$, опустили бутылочку с детским питанием. Там бутылочка нагревается до температуры $t_1 = 36^\circ\text{C}$, затем её вынимают и в термос опускают другую точно такую же бутылочку. До какой температуры она нагреется? Перед погружением в термос температура обеих бутылочек $t_0 = 18^\circ\text{C}$.

Решение. Пусть теплоёмкость воды в термосе равна C , а теплоёмкость бутылочки C_6 . Так как процесс происходит в термосе, то он практически адиабатный, поэтому пренебрежем потерями тепла.

Запишем уравнение теплового баланса для обоих случаев: $C(t - t_1) = C_6(t_1 - t_0)$.

Начальной температурой для второго процесса будет t_1 : $C(t_1 - t_2) = C_6(t_2 - t_0)$.

Разделим первое уравнение на второе: $\frac{t - t_1}{t_1 - t_2} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \Rightarrow t_2 = \frac{t_1^2 - 2t_1t_0 + tt_0}{t - t_0}$.

Подставив данные получим: $t_2=32,8^\circ\text{C}\approx 33^\circ\text{C}$. Учитывая, что процесс нагревания бутылочек довольно долгий и небольшие потери тепла всё-таки неизбежны, ответ округлить лучше в меньшую сторону.

Ответ. Температура второй бутылочки, вероятно, будет в интервале $t_2\in(32;33)^\circ\text{C}$.

29 (1993, IV, 11). В теплоизолированном цилиндрическом сосуде легкий теплопроводящий поршень A и тяжелый поршень B образуют два отсека (рис. 20). Длина каждого отсека $l=40$ см, и в каждом из них находится 1 моль идеального одноатомного газа. Первоначально система находится в тепловом равновесии. Затем газ медленно нагревают, сообщая ему количество теплоты $Q=200$ Дж. Определить наименьшую силу трения между поршнем A и стенками сосуда, при которой поршень A ещё останется неподвижным. Поршень B может перемещаться без трения.

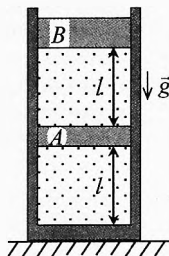


Рис. 20. Сила трения поршня

Решение. Пусть T_0 и T – температуры газа до и после нагревания, S – площадь поршня. Давление в верхнем отсеке не меняется и равно $p_1 = \frac{\nu RT_0}{lS}$.

Давление в нижнем отсеке увеличится и станет равным $p_2 = \frac{\nu RT}{lS}$.

Минимальная сила трения, при которой поршень A останется неподвижным:

$$F_{\text{тр}} = (p_2 - p_1)S = \nu R(T - T_0)/l. \quad (28)$$

Процесс в нижнем отсеке изохорный, а в верхнем – изобарный, поэтому

$$Q_{\text{н}} = \frac{3}{2} \nu R(T - T_0), \quad Q_{\text{в}} = \left(\frac{3}{2} R + R\right) \nu (T - T_0); \Rightarrow Q = Q_{\text{н}} + Q_{\text{в}} = 4 \nu R(T - T_0). \quad (29)$$

Решая совместно (28) и (29), получим $F_{\text{тр}} = \frac{Q}{4l} = 125$ Н.

Ответ. Наименьшая сила трения равна 125 Н.

30 (1993, V, 11). Пространство между двумя большими горизонтально расположенными пластинами, находящимися на расстоянии l друг от друга, заполнено воздухом (рис. 21). Температура нижней пластины поддерживается равной T_1 , верхней – равной $T_2 < T_1$. Считая воздух идеальным газом, определить, при какой разности температур $(T_1 - T_2)$ в системе возникает конвекция. Теплообменом между соседними слоями воздуха при конвекции можно пренебречь. В отсутствии конвекции температура меняется с высотой по линейному закону. Молярную теплоёмкость воздуха при постоянном объёме C_V и его молярную массу M считайте известными.

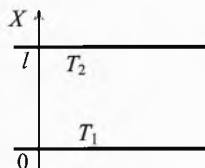


Рис. 21. Конвекция воздуха

Решение. Направим ось X от нижней пластины, температура которой T_1 , к верхней, температура которой T_2 , $T_2 < T_1$, иначе нет речи о конвекции. Распределение температуры с высотой выражается зависимостью:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2)x/l. \quad (30)$$

Распределение давления воздуха между пластинами $p(x)=p_0-\rho gx$; учитывая, что $\rho=pM/RT$, получим:

$$p(x)=p_0-\frac{Mpg}{RT}\cdot x, \quad (31)$$

где p_0 – давление воздуха у нижней пластины ($x=0$), ρ – средняя плотность воздуха между пластинами. Она выражена через среднее значение давления, среднюю температуру и молярную массу воздуха.

Уравнения (30) и (31) описывают стационарное состояние воздуха между пластинами. Пусть теперь небольшой объём воздуха, находящийся у нижней пластины начинает всплывать; при достаточном градиенте температур это обязательно произойдет, так как плотность воздуха верхних слоев больше. Пусть этот объём воздуха поднимется за некоторое время на высоту dx , причём процесс происходит адиабатически. Оценим на сколько упадет температура воздуха во всплывающем объёме. Работа, совершаемая этим воздухом, плюс изменение его внутренней энергии равны нулю, согласно I началу термодинамики для адиабатного процесса:

$$\delta Q=p\cdot dV+vC_V\cdot dT=0, \quad (32)$$

где v – количество вещества, всплывающего воздуха, $C_V=2,5R$ – молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, а dV и dT – малые изменения объёма и температуры. Согласно уравнению состояния $\frac{pV}{T}=\text{const}$. Прологарифмируем это выражение:

$$\ln p+\ln V-\ln T=\text{const}.$$

А теперь продифференцируем:

$$d(\ln p+\ln V-\ln T)=\frac{dp}{p}+\frac{dV}{V}-\frac{dT}{T}=0. \quad (33)$$

Выразим dV из (32) и подставим в (33): $\frac{dp}{p}=\frac{vC_V\cdot dT}{pV}+\frac{dT}{T}$.

Учитывая, что $pV=vRT$, получим: $dT=\frac{RTdp}{p(C_V+R)}$. Поскольку $dp=-\frac{Mpg}{RT}dx$,

как это можно получить, продифференцировав (31), то изменение температуры воздуха, всплывающего на высоту dx , получим подстановкой последнего выраже-

ния в предыдущее: $dT=-\frac{Mg}{C_V+R}dx$.

Конвекция начнется в том случае, если понижение температуры всплывающего объёма воздуха будет меньше понижения температуры окружающего воздуха, связанного с распределением (30): $dT(x)=-\frac{T_1-T_2}{l}dx$. Это означает, что если

температура поднявшегося воздуха на высоту x окажется больше температуры внешнего воздуха на этом уровне, то конвекционный поток будет подниматься и дальше. Аналитически запись этого условия имеет вид:

$$\frac{T_1-T_2}{l}>\frac{Mg}{C_V+R} \Rightarrow T_1-T_2>\frac{2Mgl}{7R}.$$

Ответ. Конвекция воздуха между пластинами возникнет, если разность температур между ними $T_1-T_2>\frac{2Mgl}{7R}$.

31 (1994, IV, 9). Засушливый июль 1981 года. Самолет противопожарной службы сфотографировал село Верхние Колдобы Усть-Колдобинского района. На снимке (рис. 22) видны четыре неглубоких пруда. Пересохли все втекающие в них ручейки. Определить, какой из прудов пересохнет последним, если в момент съемки пруды содержали $V_1=200 \text{ м}^3$, $V_2=30 \text{ м}^3$, $V_3=500 \text{ м}^3$ и $V_4=2 \text{ м}^3$ воды соответственно. Можно считать, что каждый из прудов имеет практически горизонтальное дно.



Рис. 22. *Высыхание Верхнеколдобинских прудов*

Указание. В засушливую погоду интенсивность испаряемой воды из водоема прямо пропорциональна площади водной поверхности. Значит у всех прудов будет одна и та же скорость уменьшения их глубины. Поэтому позже всех пересохнет самый глубокий пруд.

Ответ. Последним пересохнет первый Верхнеколдобинский пруд.

32 (1995, IV, 10). Одноатомный газ в количестве $\nu=1$ моль находится в теплоизолированном цилиндре с поршнем. Дно цилиндра заряжено зарядом q , а поршень — зарядом $(-q)$. Газ медленно получает от нагревателя количество теплоты Q . Насколько изменится температура газа? Считать, что электрическое поле однородно, трения нет, диэлектрическую проницаемость газа принять равной единице.

Решение. Если диаметр поршня во много раз превосходит расстояние между поршнем и дном, то электрическое поле можно считать однородным. Тогда сила притяжения между поршнем и дном не будет изменяться при небольших перемещениях. Сила атмосферного давления на поршень снаружи и сила тяжести поршня тоже постоянны, поэтому процесс будет изобарным. Согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T.$$

Отсюда следует, что температура газа повысится на $\Delta T = 2Q/(5\nu R)$.

33 Вычислить давление газа в предыдущей задаче, его работу при подъёме на $\Delta h = 2$ см и изменение температуры, если масса поршня $m = 10$ кг, площадь поперечного сечения $S = 100$ см², заряд $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл, атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па.

Решение. Сила давления газа \vec{F}_r уравнивает силу атмосферного давления \vec{F}_a , силу тяжести \vec{F}_t и силу электрического притяжения \vec{F}_s (рис. 23):

$$F_r = F_a + F_s + F_t.$$

Разделив это уравнение на площадь поршня, получим:

$$p = p_a + p_s + p_t.$$

Давление, обусловленное силой тяжести

$$p_t = mg/S; \quad p_t = 10 \cdot 10 / 10^{-2} = 10^4 \text{ Па}.$$

Давление на газ благодаря действию электрического притяжения

$$p_s = F_s/S = qE/S.$$

$$\text{Напряженность, создаваемая дном } E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Из двух последних уравнений получим:

$$p_s = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S^2} = \frac{(4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 1 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12}) \cdot (0,01)^2} = 9 \text{ кПа}.$$

Тогда давление газа под поршнем $p = p_a + p_s + p_t \approx 120$ кПа.

Работа газа $A = p \Delta V = p S \Delta h = 24$ Дж.

Изменение температуры газа: $A = \nu R \Delta T \Rightarrow \Delta T = A/(\nu R) = 2,9$ К.

Ответ. Давление газа равно 120 кПа, он совершил работу 24 Дж, при этом газ нагрелся на 2,9 К.

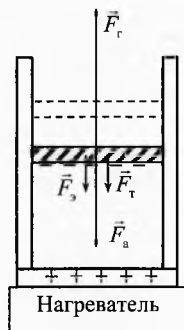


Рис. 23. Заряд на поршне и дне

34 (1996, IV, 11). В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Сила трения о стенки цилиндра при перемещении поршня превышает сумму его веса и силы внешнего давления на поршень. Цилиндр начинают медленно нагревать, причём за время расширения газ получил количество теплоты Q как за счёт нагрева, так и за счёт части выделившегося тепла при трении поршня. Затем цилиндр охладил, отобрав от газа такое же количество теплоты Q . Во сколько раз изменилось давление в цилиндре за время от начала расширения до завершения охлаждения газа, если объём за то же время увеличился в два раза?

Указание. Расширение газа происходит изобарно при давлении p_1 и увеличении температуры от T_1 до T_2 . Затем газ охлаждается от температуры T_2 до температуры T_3 изохорно, т. к. по условию задачи сила трения поршня больше суммы силы тяжести и силы внешнего давления. Записав уравнение Клапейрона для трёх состояний газа, а также первое начало термодинамики для обоих процессов, и решив их совместно, получите ответ.

Ответ. Давление уменьшилось в $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2i}{i-2} = 6$ раз.

35 (1996, V, 11). В кастрюлю поместили воду и лёд при температуре 0°C и закрыли её крышкой. Масса воды и льда одинакова. Через 2 ч 40 мин весь лёд растаял. Температура воздуха в комнате 25°C . Удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг. Удельная теплоёмкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К).

а. Через какое время температура воды повысится на 1°C ?

б. Через какое время вода нагреется от 20°C до 21°C ?

Ответ. Вода нагреется от 0°C до 1°C за 4,0 мин; нагревание воды от 20°C до 21°C произойдет за 22 мин.

36 (1997, IV, 9). Во время ремонта магазина были установлены новые рамы с двойными стеклами для витрин толщиной $d_1=5$ мм и $d_2=10$ мм. Воздух между ними хорошо перемешивается. Какова его температура между стеклами, если в магазине температура $t_1=20^\circ\text{C}$, а снаружи $t_2=-10^\circ\text{C}$?

Решение. Здесь возможны два варианта решения: тонкое стекло использовать внутри, а толстое – снаружи и наоборот. Рассмотрим первый вариант решения, ибо снаружи желательно ставить более прочное стекло (рис. 24).

В установившемся режиме поток тепла через первое и второе стекла одинаков $\Phi_1=\Phi_2$. Поток тепла прямо пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине стекла:

$$\Phi_1=k(t_1-t)/d_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2=k(t-t_2)/d_2,$$

где t – температура воздуха между стеклами, одинаковая по всему объёму благодаря хорошему перемешиванию.

Решая совместно эти три уравнения получим:

$$k(t_1-t)d_1=k(t-t_2)d_2 \Rightarrow t=(t_1d_2+t_2d_1)/(d_1+d_2), \quad t=10^\circ\text{C}.$$

Для второго варианта аналогично получим: $t=(t_1d_1+t_2d_2)/(d_2+d_1)$, $t=0^\circ\text{C}$.

Ответ. Температура между стеклами витрины равна 10°C , если толстое стекло поставлено снаружи, а тонкое внутри магазина, иначе температура будет 0°C .

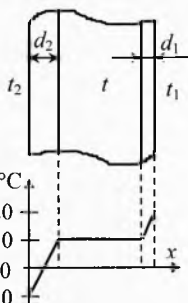


Рис. 24. Витрина из двойного стекла

37 (1997, V, 9). К ртутному термометру на уровне деления $t_x=30^\circ\text{C}$ прикреплен маленький нагреватель (рис. 25), температура которого поддерживается постоянной и равной 500°C . Через некоторое время после установления теплового режима столбик ртути проходит через деление $t_0=20^\circ\text{C}$ со скоростью $v_0=0,1$ град/с. Найти через какое время температура достигнет 26°C считая теплопроводность ртути во много раз больше теплопроводности стекла. Теплоёмкостью стекла можно пренебречь, а тепловой поток считать пропорциональным разности температур.

Решение. Скорость движения столбика ртути пропорциональна количеству теплоты в единицу времени, то есть мощности, подводимой к ртути: $v \sim P$. В свою очередь мощность прямо пропорциональна разности температур ΔT между нагревателем и ртутью и обратно пропорциональна расстоянию Δx между нагревателем и ртутью:

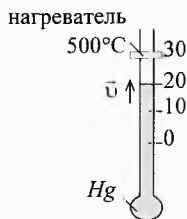


Рис. 25. Скорость нагрева ртути

$$P \sim \Delta T / \Delta x.$$

Выразим Δx через показания термометра:

$$\Delta x = k(t_x - t),$$

где k – масштаб шкалы термометра, а t – текущее показание термометра.

По условию разность температур ΔT нагревателя и ртути почти неизменна (т.к. 500–20 или 500–30 отличаются несущественно), поэтому скорость движения столбика ртути обратно пропорциональна разности температур от $t_x=30^\circ\text{C}$ до текущей температуры t : $v \sim (1/\Delta t)$ или $\Delta t \sim 1/v$. Обозначим $y=1/v$ и построим график (рис. 26): $y \sim \Delta t$.

По оси абсцисс отложим расстояние между нагревателем и концом столбика ртути, но не в единицах длины, а в единицах температурной шкалы, т. е. в $^\circ\text{C}$. По оси ординат отложим для удобства величину обратную скорости нарастания температуры. Благодаря этому график получается линейный, и что самое главное площадь под графиком измеряется в единицах времени и равна времени перехода от 20°C (на графике это 10) до 26°C (на графике это 4). Первая реперная точка взята: $y_0=1/v_0=10 \text{ c}/^\circ\text{C}$; $\Delta t_0=t_x-t_0=30-20=10(^\circ\text{C})$. При Δx , а значит и Δt , стремящемся к нулю, скорость движения столбика ртути многократно возрастает из-за близости высокотемпературного нагревателя, а обратная величина $1/v$ тоже стремится к 0.

Не трудно вычислить $\tau=0,5(y_0+y)(\Delta t_0-\Delta t)=0,5 \cdot 14 \cdot 6=42 \text{ с}$.

Ответ. Температура ртути достигнет 26°C за 42 с.

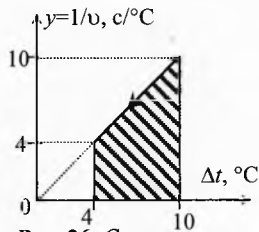


Рис. 26. Скорость нагрева термометра

38 (1998, IV, 10) Найти для воды молярную теплоту парообразования L_2 при температуре T_2 , зная молярную теплоту парообразования L_1 при температуре T_1 , если в обоих случаях атмосферное давление одинаково. Считать, что молярная теплоёмкость воды C_v в интервале температур $T_1 < T < T_2$ постоянна, а водяной пар является идеальным газом с молярной теплоёмкостью при постоянном объёме $C_v=3R$.

Решение. Проведём с водой, температура которой T_1 , мысленно два процесса:

1) Нагреем воду до температуры T_2 , а потом испарим её при температуре T_2 . При этом воде необходимо передать тепло $Q_1=C_v \cdot v(T_2-T_1)+L_2 \cdot v$.

2) Испарим воду при температуре T_1 , а потом нагреем получившийся водяной пар до температуры T_2 . Учитывая, что атмосферное давление неизменно, получим выражение для необходимого количества теплоты: $Q_2=L_1 \cdot v+C_p \cdot v(T_2-T_1)$, где $C_p=C_v+R$ – молярная теплоёмкость водяного пара при постоянном давлении.

Поскольку начальное и конечное состояния одинаковы для обоих процессов, то $Q_1=Q_2$. Тогда, $L_2=L_1-(C_v+4R)(T_2-T_1)$. Заметим, что чем больше температура, тем меньше теплота парообразования, причём при критической температуре $L=0$.

39 (1998, V, 11). Два высоких сосуда с водой соединены тонкими длинными трубками AB и CD , расположенными на расстоянии h друг от друга (рис. 27). Вода в сосудах поддерживается при температурах t_1 и t_2 ($t_1 > t_2$). Для поддержания неизменных температур в сосудах к более теплому сосуду приходится подводить тепло (мощность нагревателя P), а от холодного – отводить такую же мощность. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплопроводностью материала трубок, определить:

1) уровень жидкости, отсчитываемый от нижней трубки, на котором давление в обоих сосудах будет одинаково;

2) разность давлений Δp_{AB} и Δp_{CD} на концах трубок AB и CD ;

3) мощность P , подводимую к теплому сосуду (и отводимую от холодного);

Плотность воды зависит от её температуры t по закону $\rho = \rho_0 - \alpha(t - t_0)$, где ρ_0 , α и t_0 – постоянные величины. За время τ через любое сечение трубки протекает масса жидкости $\Delta m = k \Delta p \cdot \tau$, где Δp – разность давлений на концах трубки, k – некоторый известный коэффициент.

Решение. Через обе трубки за время τ протекают одинаковые массы воды. Поэтому

$$|\Delta p_{AB}| = \Delta p_{CD} = \Delta p.$$

Вода в верхней трубке перетекает из теплого сосуда в холодный, а в нижней – из холодного в теплый (циркуляция воды). В каждом из сосудов давление уменьшается с высотой по линейному закону. Так как $\rho_1(t_1) < \rho_2(t_2)$, то давление в теплом сосуде падает с высотой медленнее, чем в холодном. График зависимости давлений p_1 и p_2 в трубках от высоты представлен на рис. 28.

Из графика следует, что давления в сосудах одинаковы на уровне $h/2$. Отметим, что в установившемся режиме поверхность воды в теплом сосуде будет несколько выше, чем в холодном.

$$\Delta p = \Delta \rho g h / 2, \text{ где } \Delta p = p_2(t_2) - p_1(t_1) = \alpha(t_1 - t_2).$$

$$\text{Таким образом, } \Delta p = \alpha g \frac{h}{2} (t_1 - t_2).$$

$$\text{По условию задачи } \frac{\Delta m}{\tau} = k \Delta p = k \alpha g \frac{h}{2} (t_1 - t_2).$$

$$\text{Мощность } P, \text{ подводимая к теплому сосуду или отводимая от холодного, } P = c \frac{\Delta m}{\tau} (t_1 - t_2) = c k \alpha g \frac{h}{2} (t_1 - t_2)^2.$$

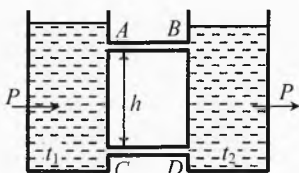


Рис. 27. Циркуляция воды

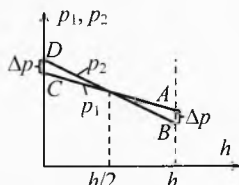


Рис. 28. Зависимость давлений в сосудах от высоты

40 (2000, IV, 9). На открытой площадке находятся три одинаковые банки со льдом, в которые помещены одинаковые электрические нагревательные элементы. В некоторый момент эти элементы включают в три разные розетки с напряжениями $U_1 = 380 \text{ В}$, $U_2 = 220 \text{ В}$ и $U_3 = 127 \text{ В}$. В первой банке весь лёд растаял за $t_1 = 2$ мин, а во второй – за $t_2 = 10$ мин. За какое время t_3 растает весь лёд в третьей банке? Начальная температура льда во всех банках 0°С . Сопротивление нагревательного элемента не зависит от силы протекающего тока. Считать, что в любой момент времени температура внутри каждой банки одинакова по всему объёму.

Решение. Чтобы лёд в банке таял, мощность P_n нагревательного элемента должна превышать по модулю тепловой поток Φ , уходящий из банки в окружающую среду:

$$P_n + \Phi > 0, \text{ где } P_n = \frac{U^2}{R}.$$

Количество теплоты, необходимое для плавления всего льда: $Q = (P_n + \Phi) \cdot \tau$.

В первом случае, $Q = \left(\frac{U_1^2}{R} + \Phi \right) \tau_1$. Во втором случае: $Q = \left(\frac{U_2^2}{R} + \Phi \right) \tau_2$.

Решая совместно эти уравнения, вычислим тепловой поток, уходящий в окружающую среду: $\Phi = -2,44 \cdot 10^4 / R$. Поскольку тепловой поток отрицателен, значит температура окружающей среды меньше 0°C .

Найдём минимальное напряжение источника, при котором лёд ещё плавится:

$$\frac{U^2}{R} - \frac{2,44 \cdot 10^4}{R} > 0, \Rightarrow U > \sqrt{2,44 \cdot 10^4} = 156 \text{ (В)}. \quad U_{\min} = 156 \text{ В.}$$

Поскольку в третьем случае напряжение источника $U_3 = 127 \text{ В}$ меньше минимально возможного, то в третьей банке лёд не растает.

41 (2000, IV, 9). Известно, что дистиллированную воду, очищенную от примесей, можно охладить без превращения в лёд ниже температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$. В зависимости от внешнего давления процесс кристаллизации воды может начаться при некоторой температуре $t_2 < t_1$. Образовавшийся при этом лёд отличается по своим физическим свойствам от обычного льда, температура которого 0°C . Определить удельную теплоту плавления льда (λ_2) при температуре $t_2 = -10^\circ\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды в интервале температур -10°C до 0°C равна $c_1 = 4,17 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}$; удельная теплоёмкость льда в этом же интервале температур равна $c_2 = 2,17 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}$. Удельная теплота плавления льда при 0°C : $\lambda_1 = 332 \text{ кДж/кг}$.

Решение. Проведем мысленно с водой два процесса: 1) переохладим воду на $\Delta t = -10^\circ\text{C}$, а потом кристаллизуем при температуре -10°C . Внутренняя энергия уменьшится на $\Delta U_1 = c_1 m \Delta t - \lambda_2 m$;

2) сначала заморозим воду при $t_0 = 0^\circ\text{C}$, а затем охладим на $\Delta t = -10^\circ\text{C}$. Внутренняя энергия уменьшится на $\Delta U_2 = -\lambda_1 m + c_2 m \Delta t$.

Поскольку исходные и конечные значения внутренней энергии в обоих случаях одинаковы (внутренняя энергия – функция состояния, её изменение при переходе из одного состояния в другое не зависит от способа перехода), то и их изменения одинаковы:

$$\Delta U_1 = \Delta U_2; \Rightarrow c_1 m \Delta t - \lambda_2 m = -\lambda_1 m + c_2 m \Delta t; \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 + (c_1 - c_2) \Delta t = 312 \text{ (кДж/кг)}.$$

42 (2003, V, 9). На поверхности озера Байкал зимой намерзает толстый слой льда. Предположим, что где-то в декабре толщина льда составляет $x = 80 \text{ см}$. Температура воздуха $t = -40^\circ\text{C}$. С какой скоростью v (мм/ч) увеличивается в этот период толщина слоя льда?

Для льда: плотность равна $0,92 \text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления 335 кДж/кг , коэффициент теплопроводности $\alpha = 2,2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{}^\circ\text{C)}$.

$$\text{Решение: } v = \frac{x}{\tau} = \frac{V}{S\tau} = \frac{m}{\rho S\tau}; \quad Q = \lambda m; \quad Q = \alpha \frac{S(t_0 - t)}{x} \tau; \Rightarrow v = \alpha \frac{(t_0 - t)}{\lambda \rho x} \approx 1,3 \text{ (мм/ч)}.$$

43 (2007, V, 11). Теплотрасса. ТЭЦ снабжает жилой район горячей водой под давлением 10 атм, имеющей на выходе из котельной температуру $t_0=120^\circ\text{C}$. Вода течет по стальной трубе радиуса $r=20$ см, покрытой слоем минеральной ваты толщиной $h=4$ см, теплопроводность которой $\alpha=0,08$ Вт/(м·К). Расход воды $\mu=100$ кг/с. Температура окружающего воздуха $t_c=-20^\circ\text{C}$. Теплопроводность стали на несколько порядков больше, чем у минеральной ваты. Найти температуру t_k воды в конце теплотрассы, если её длина: а) $l_1=10$ км; б) $l_2=100$ км.

Решение. Уходу тепла в атмосферу препятствуют стенки трубы и слой минеральной ваты. Из условия задачи ясно, что теплоизолирующими свойствами стенок стальной трубы можно пренебречь.

Рассмотрим малый участок трубы длиной Δx (рис. 29). Пусть с одной стороны от этого участка температура воды равна t , а с другой $t+\Delta t$, причём $\Delta t < 0$, так как вода по ходу движения охлаждается.

Поток тепла через этот участок прямо пропорционален разности температур воды и наружного воздуха и обратно пропорционален толщине минеральной ваты:

$$\Phi = \alpha \cdot \frac{(t - t_c)}{h} \cdot \Delta S,$$

где $\Delta S = 2\pi(R + h/2) \cdot \Delta x$ – средняя площадь поверхности минеральной ваты на участке трубы длиной Δx .

Через время τ вся вода массой $\Delta m = \mu \cdot \tau$ в этом участке переместится на Δx , при этом её температура изменится на Δt . Запишем уравнение теплового баланса:

$$c \cdot \Delta m \cdot \Delta t = -\Phi \cdot \tau.$$

Решая совместно последние четыре уравнения, получим:

$$c \cdot \mu \cdot \Delta t = -\alpha \cdot \frac{(t - t_c)}{h} \cdot 2\pi(R + h/2) \cdot \Delta x \quad \text{или} \quad \frac{\Delta t}{t - t_c} = -\frac{2\pi(R + h/2)\alpha}{c\mu h} \cdot \Delta x.$$

Переходя от Δt и Δx к dt и dx и учитывая, что $dt = d(t - t_c)$, проинтегрируем последнее выражение по длине от $x=0$ до $x=l$ и по температуре от $t=t_0$ до $t=t_k$:

$$\int_{t=t_0}^{t=t_k} \frac{d(t - t_c)}{t - t_c} = -\frac{2\pi(R + h/2)\alpha}{c\mu h} \cdot \int_0^l dx; \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{t_k - t_c}{t_0 - t_c}\right) = -\frac{2\pi(R + h/2)\alpha}{c\mu h} \cdot l.$$

Итак, температура воды в конце теплотрассы: $t_k = t_c + (t_0 - t_c) \cdot e^{-\frac{2\pi(R + h/2)\alpha}{c\mu h} \cdot l}$.

В случае а) $t_{k1} = -20 + 140 \cdot e^{-\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,22 \cdot 0,08}{4200 \cdot 100 \cdot 0,04} \cdot 10^4} = 111,1^\circ\text{C} \approx 111^\circ\text{C}$.

В случае б) $t_{k2} = -20 + 140 \cdot e^{-\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,22 \cdot 0,08}{4200 \cdot 100 \cdot 0,04} \cdot 10^5} = 52,5^\circ\text{C} \approx 53^\circ\text{C}$.

Видно, что при длине теплотрассы $l_1=10$ км температура воды понизилась незначительно, поэтому в случае а) можно решить задачу приближенно без использования интегрирования:

$$c \cdot \mu \cdot (t_{k1} - t_0) = -\alpha \cdot \frac{(t_0 - t_c)}{h} \cdot 2\pi(R + h/2) \cdot l_1 \Rightarrow t_{k1} = t_0 - (t_0 - t_c) \cdot \frac{2\pi(R + h/2)\alpha}{c\mu h} \cdot l_1;$$

$$t_{k1} = 120 - 140 \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,22 \cdot 0,08}{4200 \cdot 100 \cdot 0,04} \cdot 10^4 = 110,8^\circ\text{C} \approx 111^\circ\text{C}.$$

§ 82. Тепловые машины. Холодильник

44 (1999, III, 10). Цикл *A* состоит из линейного участка 1-2, адиабаты 2-3 и изотермы 3-1. Цикл *B* состоит из адиабаты 1-4, изотермы 4-2 и участка 2-1 (см. рис. 30). Известно, что КПД циклов *A* и *B* одинаковы, а минимальная температура в каждом из циклов составляет 25% от максимальной. Найти КПД этих циклов.

Решение. КПД цикла Карно 1-4-2-3 равен:

$$\eta = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} = 1 - \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}$$
 С другой стороны его КПД равен:

$$\eta = \frac{Q_{42} - |Q_{31}|}{Q_{42}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{42}}$$
 Сравнивая эти выражения и учитывая, что $T_{\text{х}} = 0,25 \cdot T_{\text{н}}$, получим: $|Q_{31}| = 0,25 Q_{42}$.

$$\eta_A = \frac{Q_{12} - |Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}}, \quad \eta_B = \frac{Q_{42} - |Q_{21}|}{Q_{42}} = 1 - \frac{|Q_{21}|}{Q_{42}}$$

Учитывая, что по условию $\eta_A = \eta_B$, получим, что $Q_{12} = \sqrt{|Q_{31}| \cdot Q_{42}} = 0,5 \cdot Q_{42}$.

Тогда $\eta_A = 1 - \frac{0,25 Q_{42}}{0,5 Q_{42}} = 0,5$. Для проверки вычислим: $\eta_B = 1 - \frac{0,5 Q_{42}}{Q_{42}} = 0,5$.

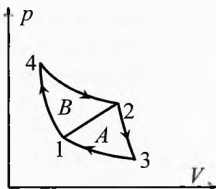


Рис. 30. КПД циклов

45 (2000, III, 10). Найти максимально возможный КПД цикла, в котором участвует идеальный одноатомный газ. На pV -диаграмме цикл имеет форму прямоугольного треугольника, левый катет которого — изохора, а верхний катет — изобара (рис. 31).

Решение. Газ получает тепло Q_{12} при изохорном и Q_{23} при изобарном нагревании:

$$Q_{\text{н}} = Q_{12} + Q_{23}, \text{ где } Q_{12} = \frac{3}{2} V_1 \cdot \Delta p; \quad Q_{23} = \frac{5}{2} (p_1 + \Delta p) \Delta V.$$

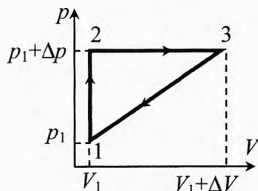


Рис. 31. Максимальный КПД

Работа газа за цикл равна площади треугольника 1-2-3: $A_{\text{г}} = \frac{1}{2} \Delta p \cdot \Delta V$.

$$\text{КПД цикла: } \eta = \frac{A_{\text{г}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{\Delta p \cdot \Delta V / 2}{\frac{3}{2} V_1 \cdot \Delta p + \frac{5}{2} (p_1 + \Delta p) \Delta V} = \frac{1}{3 \frac{V_1}{\Delta V} + 5 \left(\frac{p_1}{\Delta p} + 1 \right)}$$

Из последнего выражения видно, что КПД тем больше, чем меньше значения $\frac{p_1}{\Delta p}$ и $\frac{V_1}{\Delta V}$. В пределе $\frac{p_1}{\Delta p} = 0$ и $\frac{V_1}{\Delta V} = 0$ (напомним, что мы решаем задачи-сказки про идеальный газ): $\eta_{\text{max}} = 0,2$.

46 (2000, III, 9). В лаборатории, температура которой постоянна, находится пустая морозильная камера, на внутренних стенках которой намерзло $m = 5$ кг льда. Компрессор холодильника включается, когда температура в камере поднимается до $t_1 = -0,5^\circ\text{C}$. Через $\tau_1 = 10$ мин работы компрессора температура в холодильнике

понижается до $t_2 = -1,5^\circ\text{C}$, и компрессор автоматически отключается. Через $\tau_2 = 30$ минут камера вновь нагревается до температуры $-0,5^\circ\text{C}$, и цикл повторяется. Оценить, через какое время τ после отключения холодильника от сети весь лёд растает. Теплоёмкостью камеры можно пренебречь.

Указание. Поток тепла в камеру практически одинаков как в рабочем режиме, так и при размораживании.

Ответ. $\tau = \frac{\lambda \cdot \tau_2}{c_a(t_1 - t_2)} \approx 79$ часов. Масса льда m и время τ_1 — избыточные данные.

47 (2002, III, 10). Говорят, что в архиве лорда Кельвина обнаружили рукопись, в которой автор сравнивал два циклических процесса. От времени чернила выцвели, и положения осей давления и объёма восстановить не удалось. Однако из текста следовало, что процессы 1-4 и 2-3 являются изохорными, 4-2 и 3-1 — изобарными, а в процессе 1-2 давление зависит линейно от объёма (рис. 32). Кроме того, в тексте было сказано, что КПД цикла 1-2-3-1 $\eta_1 = 25\%$. Чему равен КПД η_2 цикла 1-4-2-1?

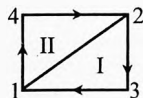


Рис. 32. КПД треугольников

Решение. Как видно из рисунка полезная работа A в циклах I и II одинакова и в определенном масштабе равна площади соответствующего треугольника.

В первом цикле: $\eta_1 = \frac{A}{Q_{н1}} = \frac{A}{Q_{н1} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}}$ — теплота, подведённая к га-

зу от нагревателя. То есть $\eta_1 = \frac{A}{\Delta U_{12} + A_{12}}$;

Во втором цикле: $\eta_2 = \frac{A}{Q_{н2}} = \frac{A}{Q_{н2} = Q_{14} + Q_{42} = \Delta U_{14} + (\Delta U_{42} + A_{42}) = \Delta U_{12} + A_{42}}$.

То есть $\eta_2 = \frac{A}{\Delta U_{12} + A_{42}}$. Заметим, что $A_{42} = A_{12} + A$.

Тогда, $\frac{1}{\eta_2} = \frac{\Delta U_{12} + A_{12} + A}{A} = \frac{\Delta U_{12} + A_{12}}{A} + 1 = \frac{1}{\eta_1} + 1$. Итак, $\eta_2 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + 1} = 20\%$.

48 (1993, IV, 10). Определить КПД цикла, показанного на рис. 33. Газ идеальный одноатомный. Участки 2-3 и 4-5 на чертеже представляют собой дуги окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 .

Решение. КПД цикла равен отношению работы газа за цикл $A_{ц}$ к количеству теплоты $Q_{н}$, полученного им от нагревателя за цикл. $\eta = A_{ц}/Q_{н}$. Газ получает тепло на участках 1-2-3-4-5, но вычислять его на этих участках неудобно. Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, полученное от нагревателя, равно работе газа и количеству теплоты $|Q_{х}|$, которое газ отдаёт холодильнику: $Q_{н} = A_{ц} + |Q_{х}|$. С учётом этого

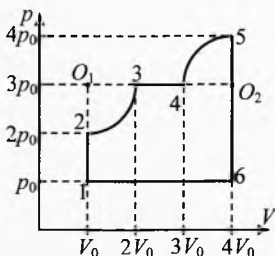


Рис. 33. КПД цикла

$$\eta = \frac{A_{ц}}{A_{ц} + |Q_{х}|}.$$

Работа газа за цикл равна площади этого цикла на pV -диаграмме. Из рисунка видно, что

$$A_u = (p_3 - p_1)(V_5 - V_1) = (3p_0 - p_0)(4V_0 - V_0) = 6p_0V_0.$$

Газ отдаёт тепло на участках 5-6 и 6-1:

$$|Q_x| = |Q_{56}| + |Q_{61}|,$$

$$\text{где } |Q_{56}| = |\Delta U_{56}| = \frac{3}{2} \nu R(T_5 - T_6); \quad |Q_{61}| = |\Delta U_{61}| + |A_{61}| = \frac{3}{2} \nu R(T_6 - T_1) + \nu R(T_6 - T_1);$$

$$\Rightarrow |Q_x| = \frac{3}{2} \nu R(T_5 - T_1) + \nu R(T_6 - T_1) = \frac{3}{2} (4p_0 4V_0 - p_0 V_0) + (p_0 4V_0 - p_0 V_0) = 25,5 p_0 V_0.$$

$$\text{Окончательно получим: } \eta = \frac{6 p_0 V_0}{(6 + 25,5) p_0 V_0} = \frac{4}{21} \approx 19\%.$$

Ответ. КПД цикла равен 19%.

49 (1993, V, 11). Рабочее вещество, внутренняя энергия которого U связана с давлением p и объёмом V соотношением $U = kpV$, совершает термодинамический цикл, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты (рис. 34). Работа, совершенная рабочим веществом во время изобарного процесса, в $n=5$ раз превышает работу внешних сил по сжатию вещества, совершенную ими при адиабатном процессе. КПД цикла равен $1/4$. Определить коэффициент k .

Решение. КПД цикла η равен отношению суммарной работы газа за цикл к количеству теплоты, полученному от нагревателя за тот же цикл. В нашем случае:

$$A_u = A_{12} - |A_{31}| = A_{12} - A_{12}/n = A_{12}(n-1)/n,$$

где A_{12} – работа газа на изобаре, A_{31} – работа газа на адиабате, равная по модулю и противоположная по знаку работе внешних сил по сжатию газа в адиабатном процессе 3-1.

Используя заданную зависимость внутренней энергии газа от давления и объёма и выражение для работы на изобаре 1-2, можно записать:

$$\Delta U_{12} = kp\Delta V, \quad A_{12} = p\Delta V, \quad \Rightarrow \Delta U_{12} = kA_{12}.$$

Тепло Q_n подводится только на изобаре 1-2. По I началу термодинамики:

$$Q_n = \Delta U_{12} + A_{12} = (k+1)A_{12}$$

$$\text{Тогда КПД цикла, } \eta = \frac{A_u}{Q_n} = \frac{n-1}{n(k+1)}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n-1}{n\eta} - 1; \quad k=2,176 \approx 2,2.$$

Ответ. Коэффициент k (зависящий от состава газа) равен 2,2.

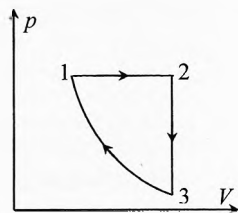


Рис. 34. Коэффициент для внутренней энергии

50 Каков возможный состав газа (рабочего тела) в предыдущей задаче? Число степеней свободы i для одноатомного газа $i_1=3$, для двухатомного – $i_2=5$, для трёхатомного (многоатомного) $i_3=6$.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа может быть вычислена по формуле: $U = (i/2)pV$. Таким образом, коэффициент $k=i/2$. Для одноатомного $k_1=1,5$, для двухатомного – $k_2=2,5$, для многоатомного $k_3=3$. Коэффициент 2,2 может получиться, если использовать смесь одно и двухатомных газов. Найдём, в какой пропорции они должны входить в смесь.

Внутренняя энергия равна сумме энергий каждого газа.

$$U=U_1+U_2 \text{ или } kpV=(i_1/2)p_1V+(i_2/2)p_2V; \Rightarrow 2kp=i_1p_1+i_2p_2.$$

Давление газа равно сумме парциальных давлений: $p=p_1+p_2$.

Решая совместно последние два уравнения, получим: $p_1=0,3p$; $p_2=0,7p$.

Можно также составить комбинацию из одноатомного и многоатомного газа, удовлетворяющую условию $k=2,2$ при этом давление одноатомного газа $p_1 \approx 0,53p$, а трёхатомного $p_2 \approx 0,47p$. Проверьте сами.

Имеется ещё бесчисленное количество смесей, удовлетворяющих условию $k=2,2$, состоящих из комбинаций одноатомного, двухатомного и многоатомного газов, присутствующих одновременно в смеси в различных пропорциях.

51 (1996, V, 5). Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно (рис. 35) между изотермами T и T_1 ($T_1 > T$). Холодильником является резервуар, температура которого постоянна и равна $T_2=200$ К ($T_2 < T$). Теплообмен между рабочим веществом и холодильником осуществляется посредством теплопроводности. Количество тепла, сбрасываемое в единицу времени холодильнику $q=\alpha(T-T_2)$, где $\alpha=1$ кВт/К. Теплообмен рабочего вещества осуществляется непосредственно при $T_1=800$ К. Полагая, что продолжительность изотермических процессов одинакова, а адиабатических весьма мала, найти температуру «холодной» изотермы T , при которой мощность P тепловой машины наибольшая. Определить наибольшую мощность тепловой машины.

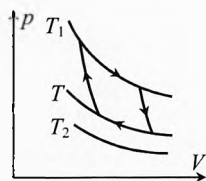


Рис. 35. Максимум мощности

Указание. Использовать первое начало термодинамики, определение КПД тепловой машины $\eta=A/Q_n$, и КПД цикла Карно.

Ответ. Температура холодной изотермы $T=\sqrt{T_1 T_2}=400$ К, максимальная мощность равна $P=\frac{\alpha(T-T_2)(T_1-T)}{2T}=100$ кВт.

52 (1999, IV, 11). Рабочим веществом тепловой машины является ν молей идеального одноатомного газа, которые совершают замкнутый цикл, состоящий из линейной зависимости давления p от объема V на участке 1-2, изобарического процесса 2-3 и линейной зависимости давления от объема 3-1 (рис. 36). Величины p_0 , V_0 считать известными. Найти: 1) объем V_3 и температуру T_3 в точке 3; 2) работу A газа за цикл; 3) коэффициент полезного действия тепловой машины.

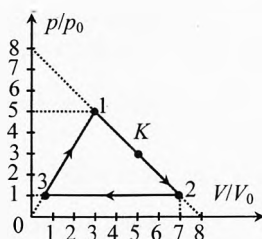


Рис. 36. Критическая точка при нагреве

Решение. Из графика находим:

$$V_1=3V_0, p_1=5p_0, V_2=7V_0, p_2=p_3=p_0;$$

$$V_3=p_3 \cdot (V_1/p_1)=0,6V_0; T_3=p_3 V_3/(\nu R)=0,6p_0 V_0/(\nu R).$$

$$\text{КПД цикла } \eta = \frac{A_n}{Q_n}, \text{ где } A_n = \frac{1}{2} (p_1 - p_3)(V_2 - V_3) = 12,8p_0 V_0 - \text{ работа газа за}$$

цикл (площадь треугольника 1-2-3); Q_n – количество теплоты, полученное газом от нагревателя.

На участке 2-3 газ отдаёт тепло, а на участке 3-1 получает:

$$Q_{31}=\Delta U_{31}+A_{31}=\frac{3}{2}(p_1 V_1 - p_3 V_3) + \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_1 - V_3) = 28,8p_0 V_0;$$

Покажем, что на участке 1-2 есть такая точка K с объёмом V_K , что при $V < V_K$ газ получает тепло, а при $V > V_K$ отдаёт. Для этого на участке 1-2 подсчитаем количество тепла δQ_{12} , необходимое для увеличения объёма газа на малую величину dV :

$$\delta Q_{12} = dU_{12} + \delta A_{12} = \frac{3}{2} [(p+dp)(V+dV) -$$

$$pV] + p \cdot dV \approx \frac{3}{2} (p \cdot dV + V \cdot dp) + p \cdot dV = \frac{5}{2} p \cdot dV + \frac{3}{2} V \cdot dp.$$

Поскольку на участке 1-2 давление $p = p_0(8 - V/V_0)$, значит: $dp = -(p_0/V_0) \cdot dV$.

$$\Rightarrow \delta Q_{12} = \frac{5}{2} p_0(8 - V/V_0) \cdot dV - \frac{3}{2} V \cdot (p_0/V_0) \cdot dV = (5 - V/V_0) 4p_0 \cdot dV.$$

В критической точке ($\delta Q_{12} = 0$): $V_K = 5V_0$; $p_K = 3p_0$.

То есть на участке 1- K газ получает тепло, а на участке K -2 отдаёт.

Итак, на участке 1- K газ получает количество теплоты

$$Q_{1K} = \Delta U_{1K} + A_{1K} = \frac{3}{2} (p_K V_K - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_1 + p_K)(V_K - V_1) = 8p_0 V_0;$$

Окончательно получим выражение для КПД цикла:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{31} + Q_{1K}} = \frac{12,8p_0 V_0}{28,8p_0 V_0 + 8p_0 V_0} = \frac{8}{23} \approx 0,35 \text{ или } 35\%.$$

Ответ. $V_3 = 0,6V_0$; $T_3 = 0,6p_0 V_0 / (vR)$; $A_{\text{ц}} = 12,8p_0 V_0$; КПД цикла равен 35%.

53 (1999, IV, 10) В тепловой машине ν молей идеального одноатомного газа совершают замкнутый цикл, состоящий из процессов 1-2 и 2-3, в которых давление p газа линейно зависит от занимаемого им объёма V , и изохорического процесса 3-1 (рис. 37). Величины p_0 и V_0 считайте известными. Найти:

- 1) температуру T_3 и давление p_3 газа в точке 3;
- 2) работу A , совершаемую газом за цикл;
- 3) коэффициент полезного действия η тепловой машины.

машини.

Указание: на участке 1-2 есть такая точка K с объёмом V_K , что при $V < V_K$ газ получает тепло, а при $V > V_K$ отдаёт.

Ответ. $p_3 = \frac{3p_0}{7}$; $T_3 = \frac{p_3 V_3}{\nu R} = \frac{9p_0 V_0}{7\nu R}$; $A = \frac{1}{2} (p_1 - p_3)(V_2 - V_3) = \frac{64p_0 V_0}{7}$; $\eta = 0,32$.

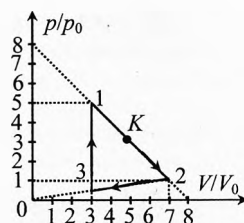


Рис. 37. Критическая точка при нагреве

54 (2001, V, 10). Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для $\nu = 1$ моль гелия в координатах p , V (рис. 38). Цикл состоял из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1. КПД данного цикла $\eta = 0,125$. Найти объём газа в изохорическом процессе, если на рисунке ось давления вертикальна, а ось объёма горизонтальна. Масштаб по оси объёма: 1 дел = 0,5 л; по оси давления: 1 дел = 5 кПа.

Решение. КПД цикла равен $\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{ц}}}$,

где $A_{\text{ц}}$ — работа, совершаемая газом за цикл: $A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{12} + A_{31}$;

Q_n – количество теплоты, полученное газом от нагревателя (то есть только при изотермическом расширении на участке 1-2): $Q_n = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = A_{12}$.

Следовательно,

$$\eta = \frac{A_n}{A_{12}} = \frac{A_n}{A_n - A_{31}}. \quad (46)$$

Работа, совершаемая газом за данный цикл, равна площади, ограниченной 1-2-3-1:

$$A_n \approx (81 + 0,5 \cdot 70) \text{ ед.} = 116 \text{ ед.} = 290 \text{ Дж},$$

где $1 \text{ ед.} = 5 \text{ кПа} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 2,5 \text{ Дж}$.

Работа газа на адиабатическом участке равна с обратным знаком изменению внутренней энергии на участке 3-1:

$$\begin{aligned} A_{31} &= -\Delta U_{31} = -\frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2} \nu R(T_2 - T_3), \\ \Rightarrow A_{31} &= -\frac{3}{2} V_2(p_2 - p_3). \end{aligned} \quad (47)$$

Из рисунка находим $p_2 - p_3 = 5 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Решая (46) и (47), получим:

$$V_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \frac{A_n}{p_2 - p_3} \approx 27 \text{ (л)}.$$

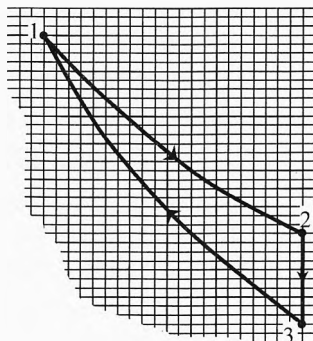


Рис. 38. Потерянные оси

55 (2002, V, 10). Летом при температуре в помещении $t_1 = 27^\circ\text{C}$ промышленный морозильник при работе на полную мощность поддерживал температуру в камере $t_2 = -23^\circ\text{C}$. Зимой температура в помещении упала до значения $t_3 = 7^\circ\text{C}$. Из-за отказа реле агрегат вновь заработал на полную мощность. Какой при этом стала температура t_x в камере? Считать агрегат идеальной машиной.

Решение. Идеальный холодильник работает по обратному циклу Карно. Холодильный коэффициент такой машины: $\xi = \frac{T_x}{T_n - T_x} = \frac{Q_x}{|A|}$,

Здесь $|A| = P\tau$ – работа, совершенная компрессором холодильника за время τ , Q_x – количество теплоты, отнятое от холодильной камеры за это же время, T_x – температура в холодильной камере, T_n – температура в помещении, P – полезная механическая мощность двигателя холодильника.

В установившемся режиме, когда температура в холодильнике постоянна (не нужно замораживать новые продукты), от холодильной камеры отнимается ровно столько тепла, сколько поступает в неё за счёт потока тепла через стенки: $Q_x = k \cdot (T_n - T_x) \cdot \tau$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от коэффициента теплопроводности материалов стенок, их толщины и площади.

$$\text{Итак, для обоих случаев: } \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{k(T_1 - T_2)}{P}; \quad \frac{T_x}{T_3 - T_x} = \frac{k(T_3 - T_x)}{P};$$

Из этих уравнений, получим: $T_x(T_1 - T_2)^2 = T_2(T_3 - T_x)^2$. Откуда получим два решения. Искомое решение $T_x = 232 \text{ К}$ или $t_x = -41^\circ\text{C}$. Второе решение $T_x = 338 \text{ К}$ или $t_x = +65^\circ\text{C}$ отвечает работе агрегата в качестве теплового насоса.

Приложение. Основные формулы

1. Основы молекулярно-кинетической теории вещества

Закон Дальтона: $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

Количество вещества: $\nu = \frac{N}{N_A}$; $\nu = \frac{m}{M}$.

Постоянная Авогадро: $N_A = \frac{0,012 \text{ (кг)}}{m_{0\text{C}}}$; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

Средняя масса молекул: $m_0 = \frac{m_{01} \cdot N_1 + m_{02} \cdot N_2 + \dots + m_{0n} \cdot N_n}{N}$.

Масса тела: $m = m_0 \cdot N$; $m = \nu \cdot M$.

Атомная единица массы: $1 \text{ а.е.м.} = 1,66056 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

Молярная масса вещества: $M = m_0 \cdot N_A$.

Количество молекул в теле: $N = \nu \cdot N_A$; $N = \frac{m}{M} \cdot N_A$.

Относительная молекулярная (атомная) масса: $M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12} m_{0\text{C}}}$; $m_0 = M_r \cdot 1 \text{ а.е.м.}$

Соотношение между молярной массой и молекулярной массой: $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}$.

Концентрация молекул, плотность: $n = \frac{N}{V}$; $\rho = \frac{m}{V}$; $\rho = m_0 \cdot n$.

Средняя молярная масса: $M = M_1 \cdot \frac{N_1}{N} + M_2 \cdot \frac{N_2}{N} + M_3 \cdot \frac{N_3}{N}$.

Распределение Максвелла по скоростям: $F(v) = A v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, где $A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}$.

Средняя арифметическая скорость молекул: $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N}$; $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_0}}$.

Среднеквадратичная скорость: $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\bar{v}^2}$; $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}}$; $\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$.

Среднеквадратичная скорость броуновской частицы: $\frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}$; $\bar{u}_{\text{кв}} = \bar{v}_{\text{кв}} \sqrt{\frac{m_0}{m}}$.

Закон Эйнштейна для круглой броуновской частицы: $\overline{\Delta x^2} = \frac{RT\tau}{3\pi\eta \cdot r \cdot N_A}$.

Количество столкновений одной молекулы с другими за время t : $z = \sqrt{2} \cdot n \bar{v} \pi d^2 t$.

Частота соударений молекулы с другими: $\nu = \frac{z}{t}$; $\nu = \sqrt{2} \cdot n \bar{v} \pi d^2$.

Средняя длина свободного пробега молекулы: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$.

Модуль перемещения молекулы за время t (N столкновений) $S = \lambda \cdot \sqrt{N}$; $S = \sqrt{\nu t} \cdot \lambda$.

Количество молекул, сталкивающихся со стенкой площадью S за время t : $z = \frac{1}{6} n S \bar{v} t$.

Уравнение Клаузиуса: $p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2$.

Основное уравнение МКТ газов: $p = \frac{2}{3} n \overline{E_k}$; $p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$.

2. Температура. Газовые законы

Температура по шкале Кельвина и Цельсия: $T = t + 273,15 \text{ К}$; $\Delta T = \Delta t$; $T - T_0 = t - t_0$.

Абсолютная температура, давление и концентрация газа: $T = \frac{p}{nk}$; $p = nkT$.

Кинетическая энергия, приходящаяся на каждую степень свободы молекулы: $\frac{1}{2} kT$.

Энергия поступательного движения молекулы: $\overline{E_k} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$; $\overline{E_k} = \frac{3}{2} kT$.

Энергия поступательного и вращательного движения молекулы: $\overline{E_k} = \frac{i}{2} kT$.

Число степеней свободы: для одноатомных молекул $i_1 = 3$; для двухатомных молекул $i_2 = 5$; для многоатомных молекул: $i_3 = 6$.

Универсальная газовая постоянная: $R = k \cdot N_A$; $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Термическое уравнение состояния идеального газа: $pV = \nu RT$.

Уравнение Клапейрона-Менделеева: $pV = \frac{m}{M} RT$.

Уравнение Клапейрона: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ или $\frac{pV}{T} = \text{const}$.

Закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс, $T = \text{const}$): $p_1 V_1 = p_2 V_2$ или $pV = \text{const}$.

Закон Шарля (изохорный процесс, $V = \text{const}$): $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ или $\frac{p}{T} = \text{const}$.

Закон Гей-Люссака (изобарный процесс, $p = \text{const}$): $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ или $\frac{V}{T} = \text{const}$.

Распределение Больцмана частиц в силовом поле: $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$; $p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$.

3. Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия идеального газа: $U = \frac{i}{2} \nu RT$; $U = \frac{i}{2} pV$.

Изменение внутренней энергии идеального газа: $\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$; $\Delta U = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$.

Закон Стефана-Больцмана: $j = \sigma T^4$; постоянная Стефана-Больцмана: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$.

Теплоёмкость тела: $C_v = \frac{Q}{\Delta t}$; $Q = C_v \Delta t$.

Удельная теплоёмкость: $c = \frac{Q}{m \Delta t}$; $Q = cm \Delta t$; $c = \frac{C_v}{m}$.

Молярная теплоёмкость: $C = \frac{Q}{\nu \Delta t}$; $Q = \nu C \Delta t$; $C = \frac{C_v}{\nu}$.

Работа газа при изобарном расширении (или сжатии): $A = p \Delta V$.

Работа сторонних сил и работа газа: $A_{\text{ср}} = -A$.

Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии): $Q = \Delta U + A$.

Изохорный процесс ($V = \text{const}$): $A_V = 0$; $\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$; $Q_V = \Delta U_V$; $C_V = \frac{i}{2} R$.

Изобарный процесс ($p = \text{const}$): $A_p = \nu R \Delta T$; $Q_p = \nu R \Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right)$; $C_p = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) R$.

Изотермический процесс ($T = \text{const}$): $A_I = \nu R T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$; $\Delta U = 0$; $Q_I = A_I$; $C_I = \infty$.

Адиабатный процесс ($Q_a = 0$): $A_a = -\Delta U$; $A_a = -\frac{i}{2} \nu R \Delta T$; $\Delta U = A_{a1}$; $C_a = 0$.

Уравнение Пуассона ($Q_a = 0$): $p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$ или $p \cdot V^\gamma = \text{const}$; $\frac{p^{(\gamma-1)}}{T^\gamma} = \text{const}$; $T \cdot V^{(\gamma-1)} = \text{const}$.

Показатель адиабаты в уравнении Пуассона: $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$; $\gamma = \frac{i+2}{i}$.

Политропический процесс ($C = \text{const}$): $p \cdot V^n = \text{const}$; показатель политропы: $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$.

Соотношение Роберта Майера: $C_p - C_V = R$; $C_p = C_V + R$.

Теплообмен в калориметре: $Q_{\text{отд}} + Q_{\text{получ}} = 0$ или $Q_{\text{получ}} = |Q_{\text{отд}}|$.

Молярная теплоёмкость твёрдого тела: $C = c \cdot M = 3R \approx 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Поток тепла: $\Phi = \frac{Q}{\tau}$; $\Phi = \alpha \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} \cdot S_\perp$; $\frac{Q}{\tau} = \alpha \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{l} \cdot S_\perp$.

Плотность потока тепла: $j = \frac{\Phi}{S_\perp}$; $j = \frac{Q}{\tau \cdot S_\perp}$; $j = \alpha \cdot \frac{T_1 - T_2}{l}$.

4. Тепловые машины

Коэффициент полезного действия (КПД): $\eta = \frac{A_n}{Q_n}$ или $\eta = \frac{A_n}{Q_n} \cdot 100\%$; $\eta = \frac{Q_n - |Q_x|}{Q_n}$ или $\eta = 1 - \frac{|Q_x|}{Q_n}$.

Работа двигателя за цикл: $A_n = Q_n - |Q_x|$ или $A_n = Q_n + Q_x$.

КПД идеального теплового двигателя (Цикл Карно): $\eta_{\text{ид}} = \frac{T_n - T_x}{T_n}$ или $\eta_{\text{ид}} = 1 - \frac{T_x}{T_n}$.

КПД реальных тепловых машин: $\eta < \eta_{\text{ид}}$.

Отопительный коэффициент: $\Psi = \frac{|Q_n|}{|A|}$ или $\Psi = \frac{|Q_n|}{|Q_n| - Q_x}$. Для идеальной машины, работающей по

обратному циклу Карно: $\Psi_{\text{ид}} = \frac{T_n}{T_n - T_x}$ или $\Psi = \frac{1}{\eta}$.

Холодильный коэффициент: $\xi = \frac{Q_x}{|A|}$. Для идеальной машины, работающей по обратному циклу Кар-

но: $\xi_{\text{ид}} = \frac{T_x}{T_n - T_x}$ или $\xi_{\text{ид}} = \frac{1 - \eta}{\eta}$.

Хладопроизводительность холодильной машины: $q = \frac{Q_x}{t}$.

5. Энтропия. Второе и третье начала термодинамики

Энтропия: $S = k \cdot \ln W$, где W — статистический вес макросостояния.

Изменение энтропии системы при любом процессе: $\Delta S = k \cdot \ln \frac{W_2}{W_1}$.

Изменение энтропии для обратимого процесса: $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Изменение энтропии для необратимого процесса: $dS > \frac{\delta Q}{T}$.

Энтропия изолированной системы (неравенство Клаузиуса): $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$.

Второе начало термодинамики: $\Delta S \geq 0$.

При обратимом изотермическом процессе: $Q_{12} = T \cdot (S_2 - S_1)$ при $T = \text{const}$.

КПД обратимых машин, работающих по циклу Карно (теорема Карно): $\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}$.

Вторая теорема Карно: $\eta_{\text{машины}} \leq \eta_{\text{Карно}}$.

Третье начало термодинамики (теорема Нернста): $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$.

Абсолютное значение энтропии: $S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} = \int_0^T \frac{C(T) \cdot dT}{T}$.

6. Агрегатные состояния вещества и фазовые переходы. Влажность

Удельная теплота плавления (кристаллизации). $Q_{\text{пл}} = \lambda m$; $Q_{\text{кр}} = -\lambda m$.

Удельная теплота растворения вещества: $Q_{\text{раств}} = \lambda_{\text{раств}} \cdot m$.

Удельная теплота парообразования (конденсации): $Q_{\text{исп}} = Lm$; $Q_{\text{конд}} = -Lm$, где $L = \frac{\Delta U + A}{m}$.

Уравнение Ван-дер-Ваальса: $(p + \frac{v^2 a}{V^2}) \cdot (\frac{V}{v} - b) = RT$.

Относительная влажность жидкого или твёрдого тела: $W_{\text{отн}} = \frac{m_{\text{в}}}{m}$.

Относительная влажность воздуха: $\varphi = \frac{p}{p_{\text{н}}}$; $\varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{н}}}$.

7. Твёрдые тела

Абсолютное удлинение тела: $\Delta l = l - l_0$.

Относительное удлинение тела: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ или $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%$.

Механическое напряжение при продольном растяжении (сжатии): $\sigma = \frac{F}{S}$.

Закон Гука при продольном растяжении (сжатии): $\sigma = E \cdot |\varepsilon|$; $F = k \cdot |\Delta l|$; $F = \frac{ES}{l_0} \cdot |\Delta l|$.

Жесткость тела и модуль Юнга: $k = ES / l_0$.

Коэффициент Пуассона, поперечная и продольная деформация: $\mu = \left| \frac{\beta}{\varepsilon} \right|$.

Закон Гука для касательного напряжения при деформации сдвига на угол φ : $\sigma_{\tau} = G\varphi$.

Модуль Юнга E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона μ : $E \approx 2G(1 + \mu)$.

Запас прочности, предел пропорциональности и максимальное напряжение: $n = \frac{\sigma_{\text{пл}}}{\sigma_{\text{г}}}$.

Температурный коэффициент линейного расширения: $l = l_0(1 + \alpha(t - t_0))$.

Температурный коэффициент поверхностного расширения: $S = S_0(1 + \gamma(t - t_0))$; $\gamma \approx 2\alpha$.

Температурный коэффициент объёмного расширения: $V = V_0(1 + \beta(t - t_0))$; $\beta \approx 3\alpha$.

8. Поверхностное натяжение

Поверхностная энергия, изменение поверхностной энергии: $E_n = \sigma \cdot S$; $\Delta E_n = \sigma \cdot \Delta S$.

Работа сил поверхностного натяжения: $A_n = -\Delta E_n$.

Сила поверхностного натяжения: $F_n = \sigma l$

Максимальная масса капли на пипетке диаметром d : $m_1 = \frac{\pi d \cdot \sigma}{g}$.

Высота подъема жидкости при смачивании капилляра радиуса R (или глубина опускания при несмачивании): $h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}$.

Капиллярное давление в цилиндрической трубке радиуса R : $p_k = \pm \frac{2\sigma \cos \theta}{R}$, где знак «+» в случае несмачивания, а знак «-» при смачивании.

Закон Лапласа: $p_k = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$.

Закон Лапласа для шарообразной капли: $p_{\text{шар}} = \frac{2\sigma}{r}$.

Закон Лапласа для сферического пузырька: $p_{\text{пуз}} = \frac{4\sigma}{r}$.

9. Измерение физических величин

Абсолютная погрешность измерения: $\Delta x = x - x_{\text{ист}}$.

Относительная погрешность: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}$ или $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} 100\%$.

Систематическая погрешность прямого измерения: $\Delta x_{\text{сист}} \approx \Delta x_{\text{макс}} / 2$.

Наилучшее значение: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Случайная погрешность: $\Delta x_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

Полная погрешность измерений: $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (\Delta x_{\text{случ}})^2}$.

Истинное значение: $x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \Delta x$ или $\bar{x} - \Delta x \leq x_{\text{ист}} \leq \bar{x} + \Delta x$.

Обработка результатов косвенных измерений:

при $A = B \pm C$ (где B и C независимы) наилучшее значение: $\bar{A} = \bar{B} \pm \bar{C}$; абсолютная и относительная

погрешности: $\Delta A = \sqrt{(\Delta B)^2 + (\Delta C)^2}$; $\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\sqrt{\Delta B^2 + \Delta C^2}}{\bar{B} \pm \bar{C}}$;

при $A = B \cdot C \cdot D$ или $A = \frac{B \cdot C}{D}$ (где B , C и D независимы) наилучшее значение: $\bar{A} = \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$ или

$\bar{A} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{C}}{\bar{D}}$; абсолютная и относительная погрешности: $\Delta A = \bar{A} \cdot \varepsilon = \bar{A} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2}$;

$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2}$.