

В.А. Колесников

ФИЗИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**СДАЁМ
БЕЗ
ПРОБЛЕМ!**

ЕГЭ
2021

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ

**ПОДРОБНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
РАЗНОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ**



**СДАЁМ
БЕЗ ПРОБЛЕМ!**



В.А. Колесников

ФИЗИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



**Москва
2020**

УДК 373.5:53
ББК 22.3я721
К60

Колесников, Владимир Александрович.
К60 ЕГЭ 2021. Физика: решение задач / В. А. Колесников. —
Москва : Эксмо, 2020. — 416 с. — (ЕГЭ. Сдаём без про-
блем).

ISBN 978-5-04-112811-1

Издание содержит теоретические сведения по всем разделам физики и подробные решения задач разного уровня сложности.

Пособие окажет неоценимую помощь учащимся при подготовке к ЕГЭ по физике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373.5:53
ББК 22.3я721

ISBN 978-5-04-112811-1

© Колесников В. А., 2020
© Оформление. ООО «Издательство
«Эксмо», 2020

ОТ АВТОРА

По мнению автора, несомненным достоинством ЕГЭ по физике является то, что в заданиях отражен весь курс физики средней школы, а не отдельные ее, причем довольно «заезженные», части, как это бывает, когда вариант или билет содержит максимально 5–7 вопросов и задач. Другой несомненный плюс — это большое количество заданий с графическим отображением условия, что приближает эти задания к реальной подаче материала в физике и технике.

В первой части экзаменационной работы представлены задания с кратким ответом. Во второй части собраны задания повышенной сложности с требованием предоставить достаточно подробное их решение.

Подводя итог вышеизложенному, автор хочет донести до сознания старшеклассников следующие очевидные выводы. С введением ЕГЭ по физике:

- 1) требования к глубокому знанию всех без исключения разделов физики возрастают;
- 2) требования к умению работать с графическими и табличными данными и умению их анализировать и делать на их основании выводы возрастают;
- 3) не отменяются и не ослабляются требования к умению и навыкам решать стандартные конкурсные задания по физике, а также задания повышенной сложности.

Цель предлагаемой вниманию читателей книги — помочь выпускнику-абитуриенту подготовиться к успешной сдаче как ЕГЭ, так и обычного вступительного экзамена по физике в вузы. Книга может быть полезна тем, кто по-

ступает в вузы, где физика не является профилирующим предметом и на вступительных экзаменах предлагаются несложные задания, и тем, кто поступает в вузы с углубленной программой по физике и соответственно на вступительных экзаменах получит не только стандартные задания, но и задания повышенной сложности.

Пособие состоит из четырнадцати разделов, в каждом из которых в сжатом виде представлены основные теоретические сведения по определенному разделу физики. В каждом разделе рассматриваются методы решения наиболее важных и распространенных типов заданий, соответствующих уровню заданий с кратким или развернутым ответом на ЕГЭ по физике. Как правило, это задания, требующие для своего решения глубокого понимания физических законов, умения применять знания из различных разделов физики, а также хорошей математической подготовки.

Задания, иллюстрирующие определенный метод решения, размещены в порядке возрастания сложности. Приводится подробное решение заданий, с тем чтобы у учащихся с любой сколь угодно малой подготовкой не осталось ни единого неясного вопроса. Ученики с высоким уровнем подготовки естественно могут пропустить скучные и очевидные с их точки зрения детали решения. Ученики, не ставящие перед собой высоких целей в освоении физики, могут пропустить трудные с их точки зрения задания.

Вдумчивая работа с книгой позволит учащимся овладеть основными методами и идеями заданий любого уровня сложности, что в свою очередь обеспечит им хорошие и отличные оценки в школе, при сдаче ЕГЭ или вступительного экзамена по физике. Удачи вам!

В книге используются общепринятые математические знаки: \in — знак принадлежности; \cup — знак объединения; \Rightarrow — знак «следует»; \Leftrightarrow — знак равносильности.

РАЗДЕЛ 1

КИНЕМАТИКА

1. Основные понятия кинематики

Механическим движением тела называют изменение с течением времени его положения в пространстве относительно других тел. В кинематике изучается движение тел без исследования причин, вызывающих это движение.

Если все точки тела двигаются одинаково и при этом прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается параллельно самой себе, то такое движение называется **поступательным**.

В ряде задач размерами тела можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на которое перемещается тело. В этом случае говорят о **материальной точке**. Понятия поступательного движения и материальной точки позволяют описывать движение только одной точки тела.

Движение тела в пространстве происходит вдоль линии, которая называется **траекторией**. Для описания движения тела надо указать какое-либо другое тело, относительно которого происходит движение. Его называют **телом отсчета**. Связанная с телом отсчета **система координат**, а также **часы для отсчета времени** образуют **систему отсчета**. Движение всегда описывается в какой-либо системе отсчета.

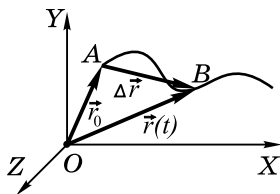


Рис. 1

Вектор $\Delta\vec{r} = \overline{AB}$ (см. рис. 1), направленный от положения точки в начальный момент времени к ее положению в конечный момент, называется **вектором перемещения**.

При движении по произвольной замкнутой траектории вектор перемещения $\Delta\vec{r} = 0$. Зная начальное положение точки, определяемое вектором \vec{r}_0 , и вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, всегда можно определить положение точки как

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}. \quad (1.1)$$

Отсюда следует, что $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ и, следовательно, координаты вектора перемещения равны:

$$x(t) - x_0; y(t) - y_0; z(t) - z_0.$$

Пройденный путь S — это расстояние, пройденное точкой вдоль траектории. Пройденный путь — скалярная величина, принимающая только неотрицательные значения $S(t) \geq 0$. Пройденный путь — неубывающая функция времени, т. е. $t_2 > t_1 \Rightarrow S(t_2) \geq S(t_1)$. Модуль вектора перемещения Δr и пройденный путь S в общем случае не совпадают. Например, тело, совершив один полный оборот по окружности радиусом R , пройдет путь $S = 2\pi R$, модуль вектора перемещения в этом случае равен нулю.

2. Прямолинейное равномерное движение

Прямолинейное равномерное движение — это такое движение, при котором точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения. Характеристикой этого движения является **постоянная скорость**

$$\vec{v} = \Delta\vec{r} / \Delta t, \quad (1.2)$$

где $\Delta\vec{r}$ — перемещение, совершенное за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$. Полагая $t_0 = 0$, получаем

$$\vec{v} = \Delta \vec{r} / t \Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{v} t.$$

Во многих случаях для описания прямолинейного движения можно ограничиться одной осью координат, направив ее вдоль прямой, по которой движется материальная точка. Тогда

$$x(t) = x_0 + v_x t, \quad (1.3)$$

где $v_x = \text{const.}$ (1.4)

Для равномерного прямолинейного движения модуль вектора перемещения и пройденный путь S совпадают, поэтому в соответствии с формулой (1.2)

$$S = vt, \quad (1.5)$$

где v — модуль скорости.

На рис. 2 и 3 приведены графики зависимости проекции скорости и координаты от времени для материальной точки, совершающей прямолинейное равномерное движение. Графики построены для $v_x > 0$ и $x_0 > 0$.

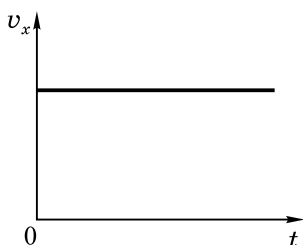


Рис. 2

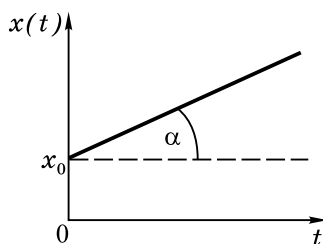


Рис. 3

Из свойств линейной функции следует, что тангенс угла α , образуемого прямой $x(t) = x_0 + v_x t$ с осью абсцисс, равен проекции скорости:

$$\operatorname{tg} \alpha = v_x. \quad (1.6)$$

3. Неравномерное движение

При **неравномерном прямолинейном движении** материальной точки существуют такие **равные промежутки времени**, за которые точка совершает неравные перемещения. При неравномерном движении нельзя говорить о постоянной скорости. Характеристикой неравномерного движения является вектор средней скорости

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \Delta \vec{r} / t, \quad (1.7)$$

где $\Delta \vec{r}$ — перемещение, совершенное за промежутков времени $\Delta t = t - t_0 = t$ (при $t_0 = 0$).

При решении задач используется понятие **средней скорости на всем пути (средняя путевая скорость)**

$$v_s = S / t, \quad (1.8)$$

где S — пройденный путь за промежутков времени t .

При неравномерном движении скорость в данный момент времени или в данной точке траектории называют мгновенной скоростью. Мгновенную скорость находят как предел отношения перемещения, совершенного за бесконечно малый промежуток времени Δt , к этому бесконечно малому промежутку времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \vec{r}'(t), \quad (1.9)$$

т. е. **вектор мгновенной скорости — это производная по времени от вектора $\vec{r}(t)$** , задающего положение материальной точки на траектории (см. рис. 1).

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения точки. Вектор скорости \vec{v} определяется тремя проекциями (координатами) v_x , v_y , v_z , т. е. $\vec{v}(v_x; v_y; v_z)$. Проекции вектора \vec{r} равны x , y , z , т. е. $\vec{r}(x; y; z)$. Векторное равенство (1.9) равносильно системе

$$v_x = x'(t), \quad v_y = y'(t), \quad v_z = z'(t). \quad (1.10)$$

Другими словами, **проекция мгновенной скорости есть производная по времени от соответствующей координаты.**

Модуль вектора скорости $\vec{v}(v_x; v_y; v_z)$ вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.11)$$

В общем случае скорость точки изменяется во времени. Быстроту изменения скорости характеризует вектор ускорения

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}'(t), \quad (1.12)$$

где $\Delta \vec{v}$ — изменение скорости за промежуток времени Δt , т. е. **вектор ускорения есть производная от вектора мгновенной скорости по времени.**

С учетом того, что проекции вектора ускорения равны a_x, a_y, a_z , а проекции вектора скорости равны v_x, v_y, v_z , получаем систему

$$a_x = v'_x(t), \quad a_y = v'_y(t), \quad a_z = v'_z(t). \quad (1.13)$$

Таким образом, **проекция ускорения есть производная по времени от соответствующей проекции скорости.** Из формул (1.10) и (1.13) следует, что **проекция ускорения есть вторая производная от координаты по времени:**

$$a_x = x''(t), \quad a_y = y''(t), \quad a_z = z''(t). \quad (1.14)$$

Модуль вектора ускорения $\vec{a}(v_x; v_y; v_z)$ вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.15)$$

4. Равнопеременное движение

Равнопеременным называется движение, в котором скорость за любые равные промежутки времени изменяется одинаково. Из определения следует, что вектор

изменения скорости $\Delta \vec{v}$ направлен вдоль одной прямой, т. е. траекторией движения является прямая. Характеристикой равнопеременного движения является постоянное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = \text{const}, \quad (1.16)$$

где \vec{v}_0 — начальная скорость; $(\vec{v} - \vec{v}_0)$ — изменение скорости за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t$ ($t_0 = 0$).

Из формулы (1.16) следует, что скорость при равнопеременном движении изменяется по линейному закону от времени:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (1.17)$$

Если координатную ось X направить вдоль прямой, по которой движется точка, то для проекций ускорения a_x и скорости v_x на эту ось получим формулы:

$$a_x = \text{const}, \quad (1.18)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \quad (1.19)$$

где v_{0x} — проекция начальной скорости.

Согласно формуле (1.10) $v_x = x'(t)$, т. е. $x(t)$ — первообразная функция $v_x(t)$. Поэтому

$$x(t) = \int v_x(t) dt + x_0 = \int (v_{0x} + a_x t) dt + x_0 = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Итак, в равнопеременном движении координата изменяется по **квадратичному закону** от времени:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (1.20)$$

где x_0 — начальная координата материальной точки.

Из формул (1.19) и (1.20) можно получить соотношение между проекцией скорости и координатой в равнопеременном движении. Из (1.19) $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$, подставляя это в (1.20), получаем

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0), \quad (1.21)$$

где $(x - x_0)$ — проекция вектора перемещения.

На рис. 4, 5, 6 представлены графики зависимостей проекции ускорения, скорости и координаты от времени. Графики построены для $a_x > 0$, $v_{0x} > 0$, $x_0 > 0$.

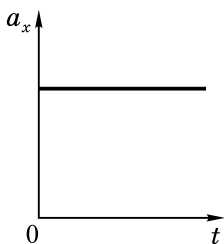


Рис. 4

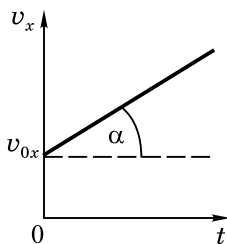


Рис. 5

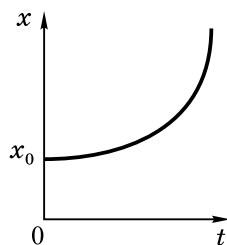


Рис. 6

Из свойств линейной функции следует, что тангенс угла α , образуемого прямой $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$ с осью абсцисс (см. рис. 5), равен проекции ускорения:

$$\operatorname{tg} \alpha = a_x. \quad (1.22)$$

График зависимости координаты от времени в равнопеременном движении — парабола (см. рис. 6).

Частными случаями равнопеременного движения являются **равноускоренное** и **равнозамедленное** движения. При **равноускоренном** движении вектор мгновенной скорости и вектор ускорения **сонаправлены** $\vec{v}(t) \uparrow \uparrow \vec{a}$. Следствием этого является возрастание модуля скорости (см. рис. 7).

При **равнозамедленном** движении вектор мгновенной скорости и вектор ускорения **противоположно направлены** $\vec{v}(t) \downarrow \uparrow \vec{a}$. Следствием этого является убывание модуля скорости (см. рис. 8). В обоих этих случаях модуль вектора перемещения равен пройденному пути. В общем случае равнопеременного движения модуль вектора перемещения отличается от пройденного пути.

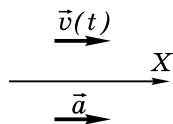


Рис. 7

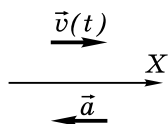


Рис. 8

5. Движение тела, брошенного вертикально

Вблизи своей поверхности Земля сообщает телам одинаковое ускорение \vec{g} , направленное вертикально вниз (ускорение свободного падения). Его модуль $g=9,81$ м/с².

Если тело в поле тяжести Земли падает вертикально вниз без начальной скорости, то такое движение называют свободным падением. Для описания свободного падения можно (хотя это и не обязательно) ввести ось координат, направленную вертикально вниз, а ее начало поместить в начальную точку движения (см. рис. 9). Тогда $x_0=0$, $v_{0x}=0$, $a_x=g$ и законы движения запишутся в следующем виде:

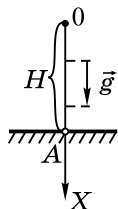


Рис. 9

$$\begin{cases} v_x(t) = gt, \\ x(t) = gt^2/2. \end{cases} \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

Пусть тело свободно падает с высоты H . Используя законы движения, выражаемые формулами (1.23) и (1.24), определим время падения и конечную скорость. Координата точки падения (точка А на рис. 9) $x_A=H$. С другой стороны, ее можно выразить по формуле (1.24). Получаем уравнение

$$x_A = H = gt_A^2/2 \Rightarrow t_A = \sqrt{2H/g},$$

где t_A — время падения.

Конечную скорость находим по формуле (1.23)

$$v_A = gt_A = g\sqrt{2H/g} = \sqrt{2gH}.$$

Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью \vec{v}_0 , то для описания такого движения удобно ввести ось координат, направленную вертикально вверх с началом в точке бросания (см. рис. 10).

Тогда $x_0=0$, $v_{0x}=v_0$, $a_x=-g$ и законы движения запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 - gt, \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - gt^2/2. \end{cases} \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) и (1.26) описывают движение тела не только при его движении вверх, но и при его движении вниз. Связано это с тем, что ускорение тела на всем пути равно \vec{g} . Причем ни модуль ускорения, ни его направление не изменяются. Поэтому нет необходимости, изучая движение тела, брошенного вертикально вверх, рассматривать сначала движение вверх, а затем вниз.

Точка B — точка максимального подъема, в ней скорость $v_x=0 \Rightarrow v_0 - gt_B=0$, где t_B — время движения до точки B ; $t_B=v_0/g$.

При падении тела на землю его координата:

$$x=0 \Rightarrow v_0 t_n - gt_n^2/2 = 0 \Rightarrow t_n(v_0 - gt_n/2) = 0 \Rightarrow t_n = 0,$$

$$\text{или } t_n = 2v_0/g,$$

где t_n — полное время движения. Корень $t_n=0$ не подходит по смыслу задачи.

Сравнивая время подъема $t_B=v_0/g$ с полным временем движения тела $t_n=2v_0/g$, получаем $t_n=2t_B$. Следовательно, время подъема тела равно времени падения.

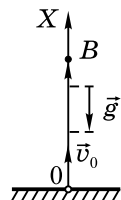


Рис. 10

Из уравнения (1.25) нетрудно найти конечную скорость тела

$$v_{\kappa}(t) = v_0 - gt_n = v_0 - g(2v_0 / g) = -v_0.$$

Модуль конечной скорости равен модулю начальной.

Для определения максимальной высоты подъема можно воспользоваться формулой (1.20):

$$H = x_B = v_0 t_B - \frac{gt_B^2}{2} = v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Высоту H можно определить иначе, воспользовавшись формулой (1.21).

Вектор перемещения \overline{OB} (см. рис. 10) имеет проекцию на ось X , равную $x_B - x_0 = H$, следовательно,

$$v_B^2 - v_0^2 = -2g(x_B - x_0) \Rightarrow 0^2 - v_0^2 = -2gH \Rightarrow H = v_0^2 / 2g.$$

6. Движение тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли

Тело, брошенное под углом к горизонту в поле тяжести Земли, движется по криволинейной траектории. Это движение можно разложить на два независимых прямолинейных движения, происходящих в горизонтальном и вертикальном направлениях X и Y (см. рис. 11). Если не учитывать сопротивление воздуха, то можно утверждать, что в любой момент времени ускорение тела равно \vec{g} .

Так как проекции ускорения \vec{g} равны $a_x = 0$ и $a_y = -g$, то в горизонтальном направлении тело движется равномерно, а в вертикальном — равнопеременно. В выбранной системе координат начальные координаты $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а начальные скорости

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

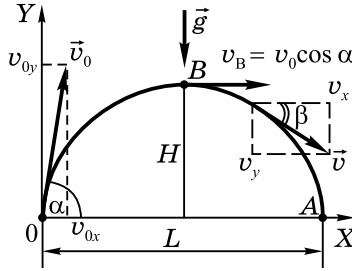


Рис. 11

Законы движения в горизонтальном направлении записываются в виде:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, & (1.27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t = (v_0 \cos \alpha)t. & (1.28) \end{cases}$$

Законы движения в вертикальном направлении:

$$\begin{cases} v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - gt, & (1.29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2 / 2 = (v_0 \sin \alpha)t - gt^2 / 2. & (1.30) \end{cases}$$

Выразив из (1.28) $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ и подставив в (1.30), получим уравнение траектории

$$\begin{aligned} y(x) &= v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = \\ &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \end{aligned}$$

Так как y есть квадратичная функция от x , то траектория движения — парабола.

В точке падения A $y_A = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha t_A - gt_A^2 / 2 = 0$, где t_A — **полное время движения тела**. Решая это уравнение, находим

$$t_A = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (1.31)$$

Горизонтальная дальность полета

$$\begin{aligned}
 L &= x_A = v_0 \cos \alpha t_A = \\
 &= v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.
 \end{aligned}
 \quad (1.32)$$

При заданной начальной скорости v_0 дальность L полета максимальна, когда максимален $\sin 2\alpha$, т. е. когда $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. Итак, $L = L_{\max} = v_0^2/g$ при $\alpha = 45^\circ$.

В точке максимального подъема (точка B на рис. 11)

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha - gt_B = 0 \Rightarrow t_B = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

где t_B — время движения до точки B .

Сравнивая t_B с полным временем движения t_A , находим $t_A = 2t_B$. Следовательно, **время подъема тела равно времени падения.**

Отметим, что в точке B в нуль обращается v_y , а $v_x = v_0 \cos \alpha$, поэтому полная скорость $v_B = v_x = v_0 \cos \alpha$, причем вектор \vec{v}_B направлен горизонтально.

Максимальная высота подъема

$$\begin{aligned}
 H &= y_B = v_0 \sin \alpha t_B - \frac{gt_B^2}{2} = \\
 &= v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}.
 \end{aligned}
 \quad (1.33)$$

Вектор полной скорости \vec{v} в любой точке траектории имеет проекции v_x и v_y , т. е. $\vec{v} = \vec{v}(v_x; v_y)$. Поэтому модуль полной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.34)$$

В частности, в точке падения A имеем $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, а $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_A = -v_0 \sin \alpha$, поэтому

$$v_A = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (-v_0 \sin \alpha)^2} = v_0.$$

Итак, модули конечной и начальной скоростей равны.

Острый угол β , который образует вектор скорости \vec{v} с горизонтом в любой точке траектории, может быть найден по одной из формул:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \beta &= |v_y|/v_x; \\ \sin \beta &= |v_y|/v, \quad \cos \beta = |v_x|/v.\end{aligned}\tag{1.35}$$

7. Относительность движения. Закон сложения скоростей

Движение тела можно изучать в различных системах отсчета. Рассмотрим неподвижную систему отсчета и систему отсчета, которая движется относительно неподвижной. Скорость тела можно выразить, используя классический закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{\text{отн}},\tag{1.36}$$

где \vec{v} — скорость тела относительно неподвижной системы отсчета; \vec{u} — скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной; $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость тела относительно подвижной системы отсчета.

Классический закон сложения скоростей используется при скоростях, много меньших скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Как и скорость, кинематические характеристики движения (траектория, перемещение, пройденный путь, ускорение) зависят от того, в какой системе отсчета рассматривается движение. Существуют, однако, системы отсчета (инерциальные), в которых ускорение не изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Автомобиль двигался из пункта A в пункт B со скоростью $v_1=40$ км/ч, а обратно из B в A со скоростью $v_2=60$ км/ч. Определите среднюю путевую скорость автомобиля на всем пути и скорость перемещения, если автомобиль в пункте B : а) мгновенно развернулся и поехал назад; б) простоял в течение времени, равного половине времени движения из B в A .

Решение

а) Расстояние между A и B равно l . Пройденный автомобилем путь $S=2l$. Движение из A в B равномерное, поэтому время движения $t_1=l/v_1$, аналогично время движения из B в A $t_2=l/v_2$. Полное время движения $t=t_1+t_2$, средняя путевая скорость

$$v_s = \frac{s}{t} = \frac{2l}{t_1+t_2} = \frac{2l}{l/v_1+l/v_2} = \frac{2l}{l(1/v_1+1/v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = 48 \text{ км/ч.}$$

При возвращении в исходную точку вектор перемещения $\Delta \vec{r} = 0$, поэтому средняя скорость перемещения $\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta \vec{r}/t = 0$;

б) В этом случае полное время движения включает в себя слагаемое $t_3 = \frac{1}{2}t_2 = \frac{l}{2v_2}$.

Поэтому

$$v_s = \frac{2l}{t_1+t_2+t_3} = \frac{2l}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{2v_2}} = \frac{4v_1v_2}{3v_1+2v_2} = 40 \text{ км/ч.}$$

Поскольку перемещение остается равным нулю, то и $\vec{v}_{\text{ср}} = 0$.

2. Материальная точка совершает два последовательных перемещения. Вектор первого перемещения направлен под углом $\alpha_1=30^\circ$ к оси OX , причем на этом участке точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью $v_1=10$ м/с. Вектор второго перемещения направлен под углом $\alpha_2=90^\circ$ к оси OX , и его модуль вдвое больше модуля первого перемещения. Движение на втором участке прямолинейное равномерное со скоростью $v_2=20$ м/с. Найдите среднюю скорость перемещения и среднюю скорость на всем пути.

Решение

На рис. 12 изображено движение точки. \overline{AC} — первое перемещение, \overline{CB} — второе перемещение. Вектор полного перемещения $\Delta\vec{r} = \overline{AB}$. Найдем его модуль. $\angle ACB = \beta$ — внешний угол $\triangle A_1C_1C$, поэтому он равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Итак, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ$. Пусть модуль первого перемещения $AC = S$, тогда модуль второго перемещения $BC = 2S$. Из $\triangle ACB$ по теореме косинусов

$$\begin{aligned}\Delta r = AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \beta} = \\ &= \sqrt{S^2 + (2S)^2 - 2 \cdot S \cdot 2S \cdot \cos 120^\circ} = S\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Так как движение на участке AC равномерное, то время, за которое совершено перемещение \overline{AC} , равно $t_1 = S / v_1$. Время, за которое совершено перемещение \overline{CB} , равно $t_2 = 2S / v_2$. Полное время движения

$$t = t_1 + t_2 = S / v_1 + 2S / v_2 = S(2v_1 + v_2) / v_1 v_2.$$

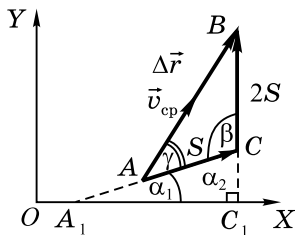


Рис. 12

По определению, средняя скорость перемещения $\vec{v}_{\text{cp}} = \Delta \vec{r} / t$, а ее модуль

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta r}{t} = \frac{S\sqrt{7}}{S(2v_1 + v_2)/v_1v_2} = \frac{\sqrt{7}v_1v_2}{2v_1 + v_2} = 13,2 \text{ м/с.}$$

Найдем направление вектора \vec{v}_{cp} . Он образует угол γ с вектором \overrightarrow{AC} . Из $\triangle ABC$ по теореме синусов

$$\begin{aligned} \frac{2S}{\sin \gamma} &= \frac{\Delta r}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2S \sin \beta}{\Delta r} = \frac{2S}{S\sqrt{7}} \sin 120^\circ = \\ &= \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow \gamma = \arcsin \sqrt{\frac{3}{7}} = 25,4^\circ. \end{aligned}$$

Угол, который образует вектор средней скорости с осью OX , равен $\gamma + \alpha_1 = 55,4^\circ$.

Средняя скорость v_s на всем пути есть весь пройденный путь, отнесенный к полному времени движения, поэтому

$$v_s = \frac{S + 2S}{t} = \frac{3S}{t} = \frac{3S}{S(2v_1 + v_2)/v_1v_2} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2} = 15 \text{ м/с.}$$

3. Тело движется равноускоренно. Его начальная скорость v_1 , а конечная — v_2 . Найдите среднюю скорость тела. В предположении, что начальная скорость равноускоренного движения равна нулю, найдите отношение путей, проходимых телом за последовательные равные промежутки времени.

Решение

При равноускоренном движении координата $x(t)$ и пройденный путь $S(t)$ совпадают, если положить начальную координату равной нулю. Тогда $S(t) = v_1 t + at^2 / 2$, где a — ускорение тела; t — промежуток времени, за который пройден путь S , при этом скорость изменилась

от v_1 до v_2 и $v_2 = v_1 + at \Rightarrow at = v_2 - v_1$ Средняя путевая скорость $v_s = \frac{S}{t} = v_1 + \frac{at}{2} = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2}$. В рассматриваемом случае пройденный путь равен модулю вектора перемещения, поэтому $v_{cp} = v_s$. Полученный результат справедлив только тогда, когда движение является равноускоренным или равнозамедленным.

При $v_1 = 0$ путь, проходимый за промежуток времени Δt , равен $S_1 = S(\Delta t) = a\Delta t^2 / 2$. Путь, проходимый за время $2\Delta t$,

$$S(2\Delta t) = 4a\Delta t^2 / 2;$$

$$S(3\Delta t) = \frac{9a\Delta t^2}{2}; \dots S((n-1)\Delta t) = \frac{(n-1)^2 a\Delta t^2}{2}; S_n = \frac{n^2 a\Delta t^2}{2},$$

где $n \in N$.

Путь, проходимый за второй промежуток времени Δt ,

$$S_2 = S(2\Delta t) - S(\Delta t) = \frac{4a\Delta t^2}{2} - \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{3a\Delta t^2}{2}.$$

Путь, проходимый за третий промежуток времени Δt ,

$$S_3 = S(3\Delta t) - S(2\Delta t) = \frac{9a\Delta t^2}{2} - \frac{4a\Delta t^2}{2} = \frac{5a\Delta t^2}{2}.$$

Путь, проходимый за n -й промежуток Δt ,

$$\begin{aligned} S_n &= S(n\Delta t) - S((n-1)\Delta t) = \frac{n^2 a\Delta t^2}{2} - \frac{(n-1)^2 a\Delta t^2}{2} = \\ &= \frac{a\Delta t^2}{2} (n^2 - (n-1)^2) = \frac{a\Delta t^2}{2} (2n+1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 : S_3 : \dots S_n &= \frac{a\Delta t^2}{2} : \frac{3a\Delta t^2}{2} : \frac{5a\Delta t^2}{2} : \dots : \frac{a\Delta t^2}{2} (2n+1) = \\ &= 1 : 3 : 5 \dots (2n+1). \end{aligned}$$

Отношение путей, проходимых телом за равные последовательные промежутки времени в равноускоренном движении с начальной скоростью, равной нулю, равно отношению последовательных нечетных чисел натурального ряда.

4. Когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон поезда. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2 . На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд двигался равноускоренно, длина вагонов одинакова.

Решение

Так как поезд отходил от платформы, то его начальная скорость $v_0=0$. Пусть пассажир опоздал на время τ , тогда в момент, когда пассажир вбежал на платформу, скорость поезда $v=a\tau$. Отсчет времени начнем с момента появления пассажира на платформе и проследим за положением точки A (в координатной системе, изображенной на рис. 13, l — длина вагона).

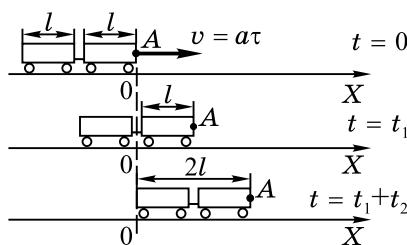


Рис. 13

Закон движения поезда

$$x(t) = x_0 + vt + at^2 / 2 = vt + at^2 / 2 = a\tau t + at^2 / 2.$$

При $t=t_1$

$$x(t_1) = x_A = l = a\tau t_1 + at_1^2 / 2. \quad (1)$$

При $t=t_1+t_2$

$$x(t_1+t_2)=x_A=2l=a\tau(t_1+t_2)+a(t_1+t_2)^2/2. \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на (1), получим

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{\tau(t_1+t_2)+(t_1+t_2)^2/2}{\tau t_1+t_1^2/2} \Rightarrow \\ 2\tau t_1+t_1^2 &= \tau t_1+\tau t_2+\frac{t_1^2}{2}+t_1 t_2+\frac{t_2^2}{2} \Rightarrow \\ \tau(t_1-t_2) &= \frac{t_2^2}{2}+t_1 t_2-\frac{t_1^2}{2} \Rightarrow \tau = \frac{t_2^2+2t_1 t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}. \end{aligned}$$

5. Тело начинает двигаться из точки O без начальной скорости по прямой с постоянным ускорением a . Через промежуток времени τ после начала движения тело оказывается в точке B , причем в ней происходит изменение направления ускорения на противоположное, а его модуль возрастает вдвое. Через какое время после начала движения тело окажется в точке C , лежащей по другую сторону от начальной точки движения O , такой, что $OB=OC$?

Решение

Сделаем чертеж, иллюстрирующий условие задачи. Для этого направим координатную ось X вдоль прямой, по которой движется тело, как показано на рис. 14. Ее начало поместим в точку O , следовательно, начальная координата $x_0=0$. Запишем законы движения на участке OB . Так как проекция ускорения $a_x=a$ и $v_0=0$, то $v(t)=at$, $x(t)=at^2/2$. В момент времени $t=\tau$ тело окажется в точке B , его скорость $v_B=a\tau$, а его координата $x_B=a\tau^2/2$. Несмотря на то что в точке B ускорение изменяет направление, тело еще некоторое время продолжит свое движение в прежнем направлении, двигаясь равнозамедленно. После того как скорость обратится в нуль, оно начнет двигаться в обратном направлении.

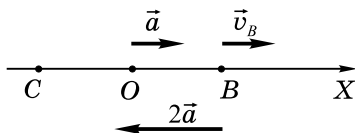


Рис. 14

В точке B естественно начать новый отсчет времени. Проекция ускорения $a_x = -2a$, начальная координата x_B , начальная скорость v_B . Закон движения тела

$$x(t) = x_B + v_B t + a_x t^2 / 2 = a\tau^2 / 2 + a\tau t - 2a\tau^2 / 2 = a\tau^2 / 2 + a\tau t - a\tau^2. \quad (1)$$

Когда тело окажется в точке C , его координата $x_C = -x_B = -a\tau^2 / 2$. Формула (1) выражает координату тела в любой момент времени при движении с ускорением $a_x = -2a$, в том числе и координату точки C . Поэтому можно составить уравнение $a\tau^2 / 2 + a\tau t - a\tau^2 = -a\tau^2 / 2$, где t — время движения на участке от B к C . Переносим все члены в одну часть и сокращая на $a \neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно t : $t^2 - \tau t - \tau^2 = 0$. Его дискриминант $D = \tau^2 - 4(-\tau^2) = 5\tau^2$, а его корни $t_{1,2} = (\tau \pm \tau\sqrt{5}) / 2 = \tau(1 \pm \sqrt{5}) / 2$. Здесь $t_2 < 0$, что не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t = t_1 = \tau(1 + \sqrt{5}) / 2$. Тело окажется в точке C через время $t_1 + \tau = \tau(1 + \sqrt{5}) / 2 + \tau = \tau(3 + \sqrt{5}) / 2 \approx 2,6\tau$ после начала движения.

6. За последнюю секунду свободно падающее тело пролетело $3/4$ всего пути. Сколько времени падало тело и с какой высоты? Найти конечную скорость (см. рис. 15).

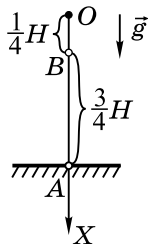


Рис. 15

Решение

Для описания свободного падения воспользуемся формулами (1.23) и (1.24).

Тогда

$$v_x(t)=gt \text{ и } x(t)=gt^2/2.$$

Пусть t_n — полное время движения тела, следовательно,

$$x_A = H = gt_n^2/2.$$

Время движения до точки B $t_n - \Delta t$, где $\Delta t = 1$ с — время движения на участке BA . Так как $x_B = H/4$, то

$$H/4 = g(t_n - \Delta t)^2/2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} H = gt_n^2/2, \\ H/4 = g(t_n - \Delta t)^2/2, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} H = gt_n^2/2, \\ H = 2g(t_n - \Delta t)^2, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{gt_n^2}{2} = 2g(t_n - \Delta t)^2 &\Rightarrow \frac{t_n^2}{(t_n - \Delta t)^2} = 4 \Rightarrow \frac{t_n}{(t_n - \Delta t)} = \\ = 2 &\Rightarrow t_n = 2(t_n - \Delta t) \Rightarrow t_n = 2\Delta t = 2 \text{ с}. \end{aligned}$$

Искомая высота $H = gt_n^2/2 = 19,6$ м, а конечная скорость

$$v_A = gt_n = 19,6 \text{ м/с}.$$

7. Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$. Через $\tau = 5$ с от начала движения аэростата из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Начальная скорость аэростата равна нулю (см. рис. 16).

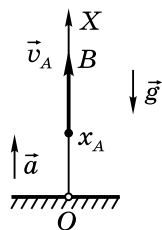


Рис. 16

Решение

Так как аэростат движется равноускоренно, то его скорость и координата выражаются формулами

$$v(t)=v_0+at=at; \quad x(t)=x_0+v_0t+at^2/2=at^2/2.$$

Через время $\tau=5$ с аэростат, а вместе с ним и предмет будут иметь скорость $v_A=a\tau$ и координату $x_A=a\tau^2/2$. Предмет далее движется в поле тяжести с постоянным ускорением \vec{g} , проекция которого на ось X — $a_x=-g$. Время удобно отсчитывать от момента, когда предмет выпал из аэростата. Тогда v_A и x_A — это начальные скорость и координата предмета. Используя формулу (1.20), запишем закон движения предмета:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0t + gt^2/2 = \\ &= x_A + v_At - gt^2/2 = a\tau^2/2 + a\tau t - gt^2/2. \end{aligned}$$

В тот момент, когда предмет упал на землю, его координата $x=0$, а время движения — t_n . Получаем уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= a\tau^2/2 + a\tau t_n - gt_n^2/2 \Rightarrow gt_n^2 - 2a\tau t_n - a\tau^2 = 0, \\ D/4 &= (a\tau)^2 + ag\tau^2 = (a\tau)^2(1 + g/a). \end{aligned}$$

Корни квадратного уравнения:

$$t_n = (a\tau \pm a\tau\sqrt{1+g/a})/g = \tau(a/g)(1 \pm \sqrt{1+g/a}).$$

Так как $t_n > 0$, то время движения предмета

$$t_n = \tau(a/g)(1 + \sqrt{1+g/a}); \quad t_n \approx 3,4 \text{ с.}$$

8. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз с высоты H . Найти эти скорости, если известно, что к моменту встречи один из мячей пролетел путь $H/3$.

Решение

Мяч, брошенный с поверхности земли, до точки встречи движется равнозамедленно, поэтому он проходит путь $H/3$. Несмотря на то что другой мяч движется равноускоренно, ускорения обоих мячей одинаковы и равны вектору \vec{g} (см. рис. 17).

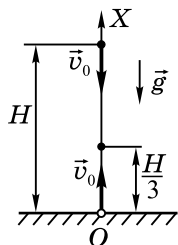


Рис. 17

Введем вертикальную координатную ось X , ее начало поместим на поверхности земли. Для мяча, находившегося на земле, $a_x = -g$, $v_{0x} = v_0$, $x_0 = 0$, поэтому его координата изменяется по закону

$$x(t) = v_0 t - gt^2 / 2.$$

Для мяча, находившегося на высоте H , в той же системе координат $a_x = -g$, $v_{0x} = -v_0$, $x_0 = H$. Его координата выражается формулой

$$x(t) = H - v_0 t - gt^2 / 2.$$

В момент встречи пути, пройденные мячами, различны, однако их координаты одинаковы и равны $H/3$. По условию задачи время движения мячей до точки встречи одинаково. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} H/3 = v_0 t - gt^2 / 2, \\ H/3 = H - v_0 t - gt^2 / 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим $2H/3 = H - gt^2$. Время движения до встречи $t = \sqrt{H/3g}$. Из первого уравнения системы находим

$$v_0 = (H/3 + gt^2/2) / t = \sqrt{3gH} / 2.$$

9. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии от основания башни он упадет? Какова его конечная

скорость? Какой угол образует вектор конечной скорости с горизонтом (см. рис. 18)?

Решение

В любой точке траектории на камень действует сила тяжести, которая сообщает ему ускорение свободного падения \vec{g} . Движение камня раскладываем на два независимых прямолинейных движения, происходящих в горизонтальном OX и вертикальном OY направлениях. Начало координатной системы O находится на поверхности земли у основания башни.

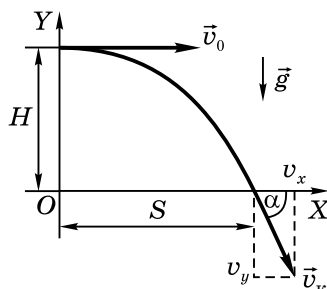


Рис. 18

Проекция ускорения \vec{g} на ось OX равна нулю, поэтому в горизонтальном направлении камень движется прямолинейно равномерно. Проекция ускорения \vec{g} на ось OY $g_y = -g = \text{const}$, поэтому движение в вертикальном направлении является равнопеременным (равноускоренным). В выбранной координатной системе начальные координаты камня $x_0 = 0$, $y_0 = H$, начальные скорости $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Законы равномерного движения в горизонтальном направлении записываются в виде: $v_x(t) = v_{0x} = v_0$; $x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0t$. Законы движения в вертикальном направлении: $v_y(t) = v_{0y} + g_yt = -gt$; $y(t) = y_0 + v_{0y}t + g_yt^2/2 = H - gt^2/2$.

В точке падения камня его координата y обращается в нуль; получаем уравнение $H - gt_n^2/2 = 0$, где t_n — время падения. Из последнего уравнения находим, что

$H = gt_n^2/2 \Rightarrow t_n = \sqrt{2H/g}$. Из рис. 18 следует, что расстояние S от основания башни до точки падения равно координате x точки падения:

$$S = x = v_0 t_n = v_0 \sqrt{2H/g} = 22,6 \text{ м.}$$

Вектор конечной скорости \vec{v}_k направлен по касательной к траектории, его проекция на горизонтальное направление $v_x = v_0$. Проекция на вертикальное направление $v_y = -gt_n = -g\sqrt{2H/g} = -\sqrt{2gH}$.

Модуль $v_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 24,3 \text{ м/с}$. Для определения угла α из прямоугольного треугольника найдем:

$$\cos \alpha = v_x / v_k \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{v_0}{v_k} = \arccos 0,41 = 65,8^\circ.$$

10. На горе с углом наклона α к горизонту бросают мяч с начальной скоростью v_0 перпендикулярно склону горы. Найдите время полета мяча. На каком расстоянии от точки бросания упадет мяч?

Решение

Для решения задачи можно сложное движение разложить на движение в горизонтальном и вертикальном направлениях и ввести систему координат, изображенную на рис. 11. Однако в этой и подобных задачах удобно вводить систему координат, показанную на рис. 19. Тогда $a_x = g \sin \alpha$, $a_y = -g \cos \alpha$, т. е. движения вдоль X и Y оказываются равнопеременными. Законы движения запишутся в виде $x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2 / 2 = (g \sin \alpha t^2) / 2$ ($x_0 = 0$ и $v_{0x} = 0$), $y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2 / 2 = v_0 t - (g \cos \alpha t^2) / 2$ ($y_0 = 0$ и $v_{0y} = v_0$).

В точке падения A $y_A = 0 \Rightarrow v_0 t_n - (g \cos \alpha t_n^2) / 2 = 0$, где t_n — время полета мяча,

$$t_n (v_0 - (g \cos \alpha t_n) / 2) = 0 \Rightarrow t_n = 2v_0 / (g \cos \alpha).$$

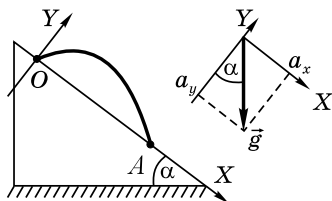


Рис. 19

Расстояние от точки бросания до точки падения

$$AO = x_A = (g \sin \alpha t_n^2) / 2 = (2v_0^2 \sin \alpha) / (g \cos^2 \alpha).$$

11. Дан график зависимости скорости тела от времени. Движение прямолинейное (см. рис. 20). Постройте графики зависимости ускорения, координаты и пройденного пути от времени. Начальная координата тела равна нулю.

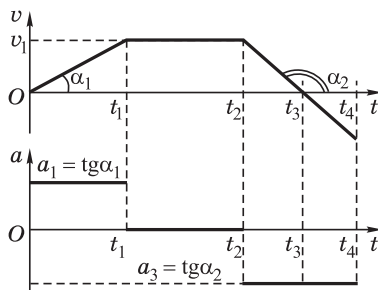


Рис. 20

Решение

При $t \in [0; t_1]$ скорость изменяется по линейному закону

$$v(t) = v_0 + a_1 t, \text{ где } v_0 = 0 \text{ и } a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{const} > 0.$$

Следовательно, движение является равнопеременным.

При $t \in [t_1; t_2]$ $v_1 = \operatorname{const}$ (равномерное движение) и $a_2 = 0$.

При $t \in [t_2; t_4]$ зависимость скорости от времени линей-

ная. Если за начало отсчета времени принять момент времени t_2 , то эта зависимость может быть представлена в виде $v(t)=v_1+a_3t$, где $a_3=\operatorname{tg} \alpha_2=\operatorname{const}<0$ (так как $\alpha_2>\pi/2$). Зависимость $a(t)$ представлена на рис. 20. Построим график зависимости $x(t)$.

При $t \in [0; t_1]$ $x(t)=x_0+v_0t+a_1t^2/2=a_1t^2/2$ — парабола.

При $t \in [t_1; t_2]$ $x(t)=x_1+v_1t$ (время отсчитывается от t_1) — прямая линия.

При $t \in [t_2; t_4]$ $x(t)=x_2+v_1t+a_3t^2/2$ (время отсчитывается от t_2) — парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a_3<0$ (см. рис. 21).

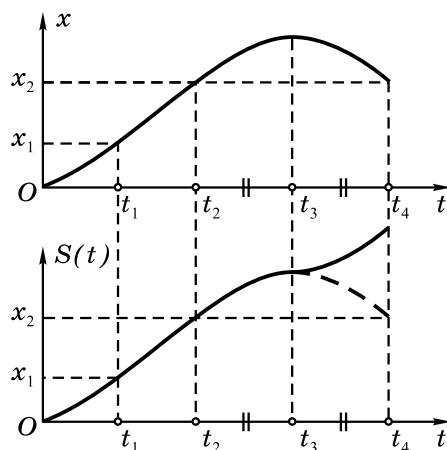


Рис. 21

По условию задачи $v(t)$ — непрерывная функция во всех точках, включая t_1 и t_2 . Так как $v=x'(t)$, то функция $x(t)$ должна иметь производную в точках t_1 и t_2 , поэтому прямая $x(t)=x_1+v_1t$ является касательной к параболам в точках t_1 и t_2 . Так как $v=x'$ и $v(t_3)=0$, то в точке t_3 функция $x(t)$ имеет экстремум (максимум). Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 21.

Для построения графика пройденного пути от времени надо учесть, что движение является прямолинейным

и, пока тело удаляется от начала координат, $x(t)$ и $S(t)$ совпадают. При $t \in [t_3; t_4]$ координата уменьшается, но пройденный путь продолжает возрастать (пройденный путь — неубывающая функция времени). Так как $a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 < |\operatorname{tg} \alpha_2| = |a_2|$, то парабола на участке $t \in [t_2; t_4]$ проходит более круто, чем на участке $[0; t_1]$. Зависимость $S(t)$ представлена на рис. 21.

12. Движение материальной точки описывается уравнениями $x(t) = 5 \cos 2t$ см, $y = 5 \sin 2t$ см. Определить скорость, ускорение и траекторию уравнения точки.

Решение

Определим траекторию. Для этого необходимо получить зависимость, содержащую x и y и не содержащую время t . В каждой задаче этот вопрос решается с учетом конкретного вида зависимостей $x(t)$ и $y(t)$. В данной задаче эффективнее всего возвести каждое уравнение в квадрат и результаты сложить:

$$\begin{cases} x^2 = 25 \cos^2 2t \\ y^2 = 25 \sin^2 2t \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow x^2 + y^2 = 25(\cos^2 2t + \sin^2 2t) \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 = 5^2.$$

Сравнивая полученный результат с уравнением окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, приходим к выводу, что траектория движения точки — окружность с центром в начале координат $O(0; 0)$ и радиусом $R = 5$ см.

Проекции скорости на оси X и Y :

$$v_x = x'(t) = (5 \cos 2t)' = -5 \cdot 2 \sin 2t = -10 \sin 2t;$$

$$v_y = y'(t) = (5 \sin 2t)' = 5 \cdot 2 \cos 2t = 10 \cos 2t.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 \cos^2 2t + 10^2 \sin^2 2t} = 10 \text{ см/с}.$$

Проекции ускорения на оси X и Y :

$$a_x = v'_x = (-10 \sin 2t)' = -10 \cdot 2 \cos 2t = -20 \cos 2t;$$

$$a_y = v'_y = (10 \cos 2t)' = -10 \cdot 2 \sin 2t = -20 \sin 2t.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2 \cos^2 2t + 20^2 \sin^2 2t} = 20 \text{ см/с}^2.$$

- 13.** Капли дождя, падающие вертикально, падают на стекло окна вагона, движущегося со скоростью $u = 36$ км/ч, и оставляют на нем след под углом 60° к вертикали. Определите скорость падения капель v .

Решение

Рассмотрим движение капли в системе отсчета, связанной с движущимся вагоном (см. рис. 22, а). Пусть $v_{\text{отн}}$ — скорость капли в этой подвижной системе отсчета. Используя закон сложения скоростей, получим

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{\text{отн}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}).$$

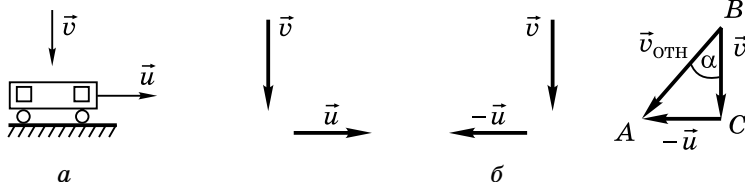


Рис. 22

Построим вектор $\vec{v}_{\text{отн}}$ (см. рис. 22, б).

Итак, в системе отсчета, связанной с вагоном, капля имеет скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$, направленную под углом α к вертикали. Модули векторов \vec{u} и $-\vec{u}$ равны, поэтому из $\triangle ABC$:

$$v = \frac{u}{\operatorname{tg} \alpha} = 20,8 \text{ км/ч} = 5,8 \text{ м/с}.$$

14. В точках A и B находятся моторная лодка и катер, движущиеся с заданными постоянными скоростями $\vec{v}_л$ и $\vec{v}_к$ (см. рис. 23). Определить графически, каким будет наименьшее расстояние между лодкой и катером.

Решение

Перейдем в систему отсчета, связанную с лодкой. Скорость этой системы отсчета $\vec{u} = \vec{v}_л$, скорость катера относительно этой системы отсчета $\vec{v}_{отн}$, тогда из закона сложения скоростей

$$\vec{v}_к = \vec{v}_л + \vec{v}_{отн} \Rightarrow \vec{v}_{отн} = \vec{v}_к - \vec{v}_л = \vec{v}_к + (-\vec{v}_л).$$

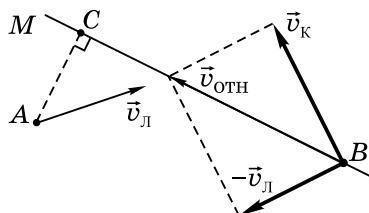


Рис. 23

На рис. 23 построен вектор $\vec{v}_{отн}$. Итак, в системе отсчета, связанной с лодкой, лодка покоится, а катер движется относительно нее со скоростью $\vec{v}_{отн}$, направленной вдоль прямой BM .

Из точки A опускаем перпендикуляр AC на BM , длина которого и есть кратчайшее расстояние между телами в системе отсчета, связанной с лодкой. В классической механике расстояние между точками не зависит от системы отсчета, поэтому длина AC есть минимальное расстояние между лодкой и катером в любых системах отсчета.

РАЗДЕЛ 2

ДИНАМИКА

Динамика — это часть механики, в которой изучаются **причины возникновения ускорения у тел и способы его вычисления**. Основу динамики составляют три закона Ньютона. Эти законы применяют при изучении как поступательного, так и вращательного движения тел.

1. Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона утверждает: существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной, если на него не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются).

Системы отсчета, рассматриваемые в первом законе Ньютона, называются **инерциальными**. При изучении многих явлений систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной. Инерциальными являются системы отсчета, связанные с телами, которые по отношению к земной поверхности покоятся или движутся прямолинейно равномерно.

Системы отсчета, связанные с ускоренно движущимися телами, называют **неинерциальными**. Законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета не выполняются. В школьном курсе физики рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

2. Второй закон Ньютона

В динамике установлено, что изменение движения тела, т. е. возникновение у тела ускорения, обусловлено взаимодействием этого тела с другими телами. Все раз-

нообразии взаимодействий в природе современная физика сводит к четырем основным видам: **гравитационному, электромагнитному, ядерному и слабому.**

Количественная мера взаимодействия есть сила. Сила — векторная величина. Она характеризуется точкой приложения, направлением и числовым значением (модулем).

Когда на тело действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, которая производит такое же действие, что и несколько сил. Такую силу называют **равнодействующей (резльтирующей)**. Если $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ — силы, приложенные к телу, то их равнодействующая

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.1)$$

Свойство физических тел изменять под действием сил свое движение за некоторый промежуток времени называется **инертностью тел**. Масса тела есть количественная мера инертности. Масса не является векторной величиной.

Второй закон Ньютона утверждает, что ускорение, приобретаемое телом, пропорционально приложенной силе \vec{F} и обратно пропорционально массе тела m :

$$\vec{a} = \vec{F}/m. \quad (2.2)$$

Если на тело действует несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то в формуле (2.2) \vec{F} — равнодействующая этих сил.

Второй закон Ньютона показывает, что ускорение тела определяется действующими на него силами, причем вектор ускорения \vec{a} направлен так же, как и вектор равнодействующей сил \vec{F} . С точки зрения математики уравнение (2.2) равносильно уравнению

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.3)$$

Последнее равенство равносильно системе трех скалярных равенств

$$F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z, \quad (2.4)$$

где F_x, F_y, F_z — проекции вектора \vec{F} и a_x, a_y, a_z — проекции вектора \vec{a} на координатные оси.

3. Основное уравнение динамики

Можно дать иную формулировку второго закона Ньютона, введя понятия импульса тела и импульса силы.

Импульсом тела называют векторную величину, равную произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что вектор импульса тела направлен так же, как и вектор скорости.

Импульсом постоянной силы называют произведение силы на время ее действия: $\vec{F}t$.

Вектор импульса силы сонаправлен с вектором силы.

Изменение импульса тела и импульс силы связаны между собой:

$$Ft = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \quad (2.6)$$

где $m\vec{v}_0$ — начальный импульс тела; $m\vec{v}$ — его конечный импульс.

Векторная величина $\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$ есть изменение импульса тела. Равенство (2.6) называют **основным уравнением динамики: изменение импульса тела равно импульсу действующей на него силы**. Вектор $\Delta\vec{p}$ направлен так же, как и вектор \vec{F} .

Импульс силы $\vec{F}(t)$, изменяющейся во времени, численно равен площади криволинейной трапеции $ABCD$ (см. рис. 24). Из свойств интегрального исчисления следует, что

$$S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt. \quad (2.7)$$

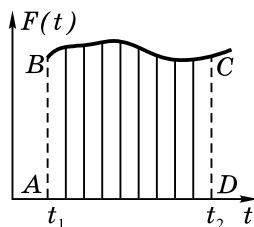


Рис. 24

Важным следствием основного уравнения динамики является то, что одна и та же сила за равные промежутки времени изменяет импульс тел на одну и ту же величину независимо от их масс.

4. Третий закон Ньютона

Любое действие тел друг на друга носит взаимный характер, т. е. если тело 1 действует на тело 2, то обязательно и тело 2 действует на тело 1. **Третий закон Ньютона утверждает: все тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению.**

Три закона Ньютона справедливы в инерциальных системах отсчета.

При рассмотрении механического движения тел приходится иметь дело с тремя видами сил: силой тяготения, силой упругости, силой трения.

5. Закон всемирного тяготения.

Сила тяжести. Вес тела

Закон всемирного тяготения утверждает: тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними. Гравитационные силы притяжения между телами вычисляются по формуле

$$F_1 = F_2 = F_r = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.8)$$

где r — расстояние между телами;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — постоянная всемирного тяготения (гравитационная постоянная).

Силы притяжения направлены вдоль прямой, соединяющей тела. Формула (2.8) используется, когда размеры тел m_1 и m_2 много меньше расстояния между ними (т. е. для описания взаимодействия между материальными точками). Данную формулу можно использовать для вычисления силы притяжения между однородными шарами, расположенными на любых расстояниях. В этом случае в формуле (2.8) r — расстояние между центрами шаров.

Аналогично используется формула (2.8) для вычисления силы притяжения между шаром и материальной точкой, расположенной вне шара.

Рассмотрим тело массой m , расположенное у поверхности Земли. Со стороны Земли на тело действует сила притяжения $F_r = G \frac{m M_3}{R_3^2}$, где M_3 и R_3 — масса и радиус Земли.

По второму закону Ньютона

$$F_r = ma \Rightarrow a = G \frac{M_3}{R_3^2}.$$

Таким образом, ускорение, сообщаемое телу Землей, не зависит от массы тела. Его называют **ускорением свободного падения** и обозначают g . Итак,

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2} = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad (2.9)$$

где масса Земли $M_3 = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, а ее радиус $R_3 = 6400 \text{ км}$.

Силу притяжения тела к Земле называют **силой тяжести**. Ее модуль можно найти по формуле

$$G \frac{mM_3}{R_3^2} = mg. \quad (2.10)$$

Вес тела — это сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или подвес. Из определения следует, что вес тела приложен к **опоре или подвесу**, а не к телу. С точки зрения физики вес и сила тяжести не одно и то же: они всегда приложены к разным телам. Они могут быть равны по модулю, а могут и отличаться. Это связано с тем, что сила тяжести не зависит от того, движется тело или покоится, а вес тела зависит от ускорения, с которым движется опора или подвес.

6. Сила упругости. Закон Гука

Под действием сил форма и размеры тела могут изменяться, в этом случае говорят о **деформации тела**. Растяжение, сжатие, изгиб, кручение — виды деформации тел. **Сила упругости** возникает при деформации тела и направлена в сторону, противоположную смещению частиц при деформации. В дальнейшем будем рассматривать силу упругости, возникающую при растяжении или сжатии.

Проекция силы упругости на направление, вдоль которого тело сжимается или растягивается, вычисляется по закону Гука

$$(F_{\text{упр}})_x = -kx, \quad (2.11)$$

где $x = \Delta l = l - l_0$ — удлинение тела; k — коэффициент упругости (в случае пружины k называют коэффициентом жесткости пружины).

Модуль силы упругости

$$F_{\text{упр}} = k|x|. \quad (2.12)$$

7. Сила трения

Трением называют взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению. Сила трения направлена вдоль поверхности соприкосновения. **Сила трения** представляет собой касательную составляющую силы реакции опоры.

На рис. 25 \vec{R} — сила реакции опоры, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения (касательная составляющая \vec{R}) и \vec{N} — нормальная составляющая силы реакции:

$$\vec{R} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}. \quad (2.13)$$

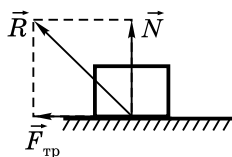


Рис. 25

О **силе трения покоя** говорят, когда тело пытаются сдвинуть, прикладывая к нему силу, однако движение еще не началось. Началу движения препятствует сила трения покоя, всегда направленная противоположно возможному перемещению тела. Ее модуль удовлетворяет неравенству

$$0 \leq F_{\text{тр.п}} \leq F_{\text{тр.мах}}, \quad (2.14)$$

причем $F_{\text{тр.мах}} = \mu P$. Здесь μ — коэффициент трения, а P — модуль силы нормального давления на опору (поверхность).

Сила \vec{P} приложена не к телу, а к поверхности, на которой находится тело. В соответствии с третьим законом Ньютона поверхность действует на тело с силой \vec{N} , модуль которой равен P . Поэтому $F_{\text{тр.мах}} = \mu N$.

Если тело скользит по поверхности, то на него действует **сила трения скольжения**. Она направлена в сторо-

ну, противоположную скорости тела. Модуль силы трения скольжения

$$F_{\text{тр.мах}} = \mu P = \mu N. \quad (2.15)$$

Таким образом, **максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения**. На рис. 26 изображено тело массой m , находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности. К телу прикладывают силу \vec{F} в горизонтальном направлении. Если приложенная сила \vec{F} невелика, то тело покоится, так как началу движения препятствует сила трения покоя $F_{\text{тр.п}}$. Проецируя на ось X приложенные к телу силы, по второму закону Ньютона получим $F - F_{\text{тр.п}} = 0 \Rightarrow F_{\text{тр.п}} = F$.

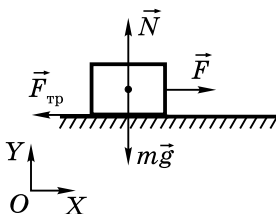


Рис. 26

При увеличении силы \vec{F} будет возрастать и сила трения покоя, достигнув в некоторый момент своего максимального значения, равного силе трения скольжения. После этого тело начинает скользить, на него действует сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$.

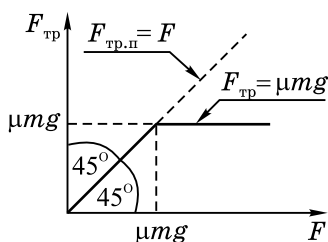


Рис. 27

При этом приложенная сила \vec{F} продолжает возрастать, в то время как сила трения скольжения остается постоянной. График зависимости силы трения от приложенной силы приведен на рис. 27.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Через неподвижный блок переброшена нерастяжимая нить. На концах этой нити подвешены грузы равных масс M . На один из грузов поставили груз массой m . Определить ускорение движения грузов, силу натяжения нити, силу давления груза m на M , а также силу давления на ось блока. Массой блока и нити можно пренебречь.

При решении этой задачи подробно разбираются основные этапы решения задач по динамике.

Решение

1. Сделаем рисунок к данной задаче (см. рис. 28).

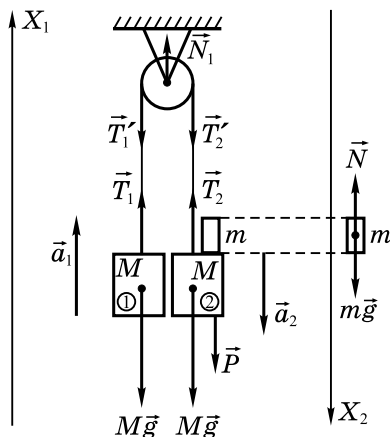


Рис. 28

2. Укажем силы, приложенные к каждому телу системы. К телу 1 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения (упругости) нити \vec{T}_1 . К телу 2 приложены: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T}_2 и сила давления \vec{P} со стороны тела m . Поскольку система движется с ускорением, то $P \neq mg$. **Так как массой блока и нити можно пренебречь, то сила натяжения одинакова по модулю во всех точках нити, т. е. $T_1 = T_2 = T$.**

К телу m (оно нарисовано отдельно) приложены: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} со стороны тела 2. По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{P}$, а модули этих сил равны, т. е. $P = N$.

3. Определяем направление движения каждого тела системы и выбираем соответствующие оси координат. В данной задаче очевидно, что тело 2 и тело m двигаются вертикально вниз с ускорением \vec{a}_2 , а тело 1 поднимается вверх с ускорением \vec{a}_1 . **Так как нить нерастяжима, то модули этих ускорений равны, т. е. $a_1 = a_2 = a$.** В некоторых задачах сразу трудно указать, как направлены ускорения тел. Тогда делают предположение о направлении ускорений тел системы. В ходе решения задачи это предположение либо подтверждается, либо опровергается. Координатные оси, как правило, выбирают по направлению ускорений. В данной задаче выбраны вертикальные оси X_1 и X_2 .

4. Для каждого тела системы записываем второй закон Ньютона, проецируя силы и ускорения на соответствующие оси:

$$\begin{aligned} \text{для тела 1} & \left\{ \begin{aligned} T - Mg &= Ma, \\ \text{для тела 2} & \left\{ \begin{aligned} -T + Mg + P &= Ma, \text{ так как } P = N \Rightarrow \\ \text{для тела } m & \left\{ \begin{aligned} mg - N &= ma, \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} T - Mg &= Ma, & (1) \\ -T + Mg + P &= Ma, & (2) \\ mg - N &= ma. & (3) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

5. Из полученной системы уравнений (или одного уравнения) выражаем неизвестные физические величины.

Сложив все уравнения системы, найдем

$$mg = a(2M + m) \Rightarrow a = \frac{m}{2M + m}g.$$

Из уравнения (1) $T = Mg + Ma = \frac{2M(M + m)g}{2M + m}.$

Из уравнения (3) сила давления

$$P = mg - ma = mg - m \frac{mg}{2M + m} = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

Как отмечалось выше, $P \neq mg$, так как опора (тело 2) движется вниз с ускорением.

Для нахождения силы давления на ось блока рассмотрим силы, действующие на него. Взаимодействие блока с нитью дает две силы натяжения T'_1 и T'_2 , причем $T'_1 = T'_2 = T_1 = T_2 = T$. Кроме того, на блок действует сила реакции \vec{N}_1 со стороны оси. Запишем второй закон Ньютона для блока: проецируя силы на ось X_1 , получим $N_1 - 2T = 0$ (так как у блока нет ускорения, его массой можно пренебречь.) Значит, $N_1 = 2T$. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой \vec{N}'_1 блок давит на ось. Итак,

$$N'_1 = 2T = \frac{4M(M + m)g}{2M + m}.$$

2. К пружине, коэффициент жесткости которой равен $k = 0,3$ кН/м, подвешена гиря массой $m = 0,6$ кг. Найдите удлинение пружины в случае подъема гири с постоянным ускорением $a = 0,2$ м/с². Как изменится деформация пружины в случае опускания гири с тем же по модулю ускорением?

Решение

Тело движется вверх с ускорением (см. рис. 29).

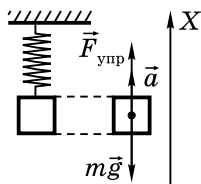


Рис. 29

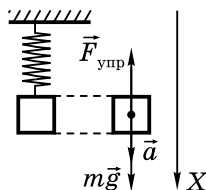


Рис. 30

На гирию действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, возникающая вследствие удлинения пружины. Для проекций сил на ось X по второму закону Ньютона $F_{\text{упр}} - mg = ma$. По закону Гука $F_{\text{упр}} = k\Delta l$, где Δl — удлинение пружины. Тогда

$$k\Delta l - mg = ma \Rightarrow \Delta l = m(g + a)/k = 0,02 \text{ м.}$$

При движении гири вниз с ускорением (см. рис. 30) пружина деформирована на $\Delta l' > 0$ и получаем уравнение

$$mg - k\Delta l' = ma \Rightarrow \Delta l' = m(g - a)/k = 0,192 \text{ м.}$$

3. На наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, положили тело массой m . Определите, с каким ускорением будет двигаться тело. Чему равна сила трения, действующая на него? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ (см. рис. 31).

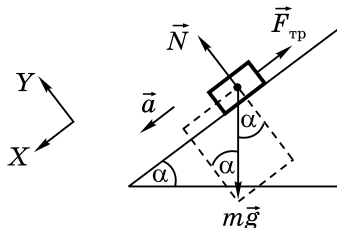


Рис. 31

Решение

К телу приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Очевидно, что при небольших углах α тело на наклонной плоскости покоится и его ускорение $a=0$. В этом случае на него действует сила трения покоя. По второму закону Ньютона, записанному для оси X , получаем $mgsin\alpha - F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow F_{\text{тр}} = mgsin\alpha$. При увеличении угла α тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости с ускорением \vec{a} , причем на него действует сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Силу реакции N легко найти, записав второй закон Ньютона для оси Y :

$$N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha.$$

Для оси X в этом случае получим

$$\begin{aligned} mgsin\alpha - F_{\text{тр}} &= ma \Rightarrow mgsin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \end{aligned}$$

Тело будет покоиться на наклонной плоскости, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения μN , т. е. $mgsin\alpha < \mu mg\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha < \mu$. Если $tg\alpha > \mu$, тело скользит ускоренно вниз по наклонной плоскости. При $tg\alpha = \mu$ тело будет покоиться на наклонной плоскости, если ему не сообщена начальная скорость. Если тело обладает начальной скоростью, направленной вниз параллельно наклонной плоскости, то оно будет скользить равномерно.

- Определите ускорение тел в системе, показанной на рис. 32. Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью $\mu=0,1$. Массой блока и нити можно пренебречь. Нить нерастяжима. Масса грузов $m_1=1,5$ кг, $m_2=0,5$ кг. Сила \vec{F} образует угол $\alpha=30^\circ$ к горизонту, а ее модуль равен 10 Н. Начальная скорость грузов равна нулю.

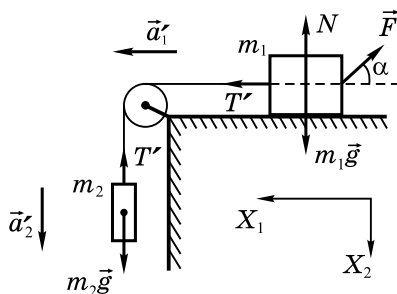


Рис. 32

Решение

При решении задач подобного типа мы не можем сразу определить, как направлена сила трения. Для решения этого вопроса поступают следующим образом. Предполагают, что трения вообще нет, и решают более простую задачу. Тогда силы, приложенные к грузам, будут соответствовать рис. 32 (T — модуль силы натяжения нити). Так как трения нет, то можно сделать произвольное предположение о направлении ускорений a_1' и a_2' , например, как показано на рис. 32. Учитывая, что $a_1' = a_2' = a'$, по второму закону Ньютона для осей X_1 и X_2 получаем систему

$$\begin{cases} T' - F \cos \alpha = m_1 a', \\ m_2 g - T' = m_2 a' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 g - F \cos \alpha = a' (m_1 + m_2) \Rightarrow a' = \frac{m_2 g - F \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Подставив числовые значения, найдем $a' = -1,75 \text{ м/с}^2$. Таким образом, если трения нет, то ускорения на самом деле направлены противоположно осям X_1 и X_2 (см. рис. 32).

Появление трения может уменьшить модуль ускорения или обратить ускорение в нуль, но не может изменить его на противоположное. Значит, грузы имеют одинаковые по модулю ускорения a , направленные, как показано на рис. 33.

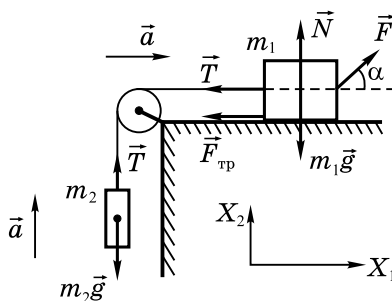


Рис. 33

Теперь можно указать направление силы трения. По второму закону Ньютона получаем систему:

$$+ \begin{cases} F \cos \alpha - T - F_{\text{тр}} = m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha - m_2 g - F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$.

По оси X_2 для груза m_1 получаем

$$N + F \sin \alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow N = m_1 g - F \sin \alpha.$$

Подставляя последнее выражение в уравнения для $F_{\text{тр}}$ и a , находим

$$\begin{aligned} a &= \frac{F \cos \alpha - m_2 g - \mu (m_1 g - F \sin \alpha)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{F (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - g (m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2} = 1,4 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

5. Определить ускорение каждого из тел в системе, изображенной на рис. 34. Нити нерастяжимы. Массой блоков и нитей можно пренебречь. Трения нет. Масса грузов $m_1 = 0,1$ кг, $m_2 = 0,6$ кг. Угол $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Силы, приложенные к телам m_1 и m_2 , изображены на рис. 34. Модуль силы натяжения нити 1 равен T_1 ,

а нити 2 — T_2 . Предполагая, что ускорения тел \vec{a}_1 и \vec{a}_2 направлены, как показано на рис. 34, введем оси координат X_1 и X_2 и запишем второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_1, \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_1, \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2. \end{cases} \quad (2)$$

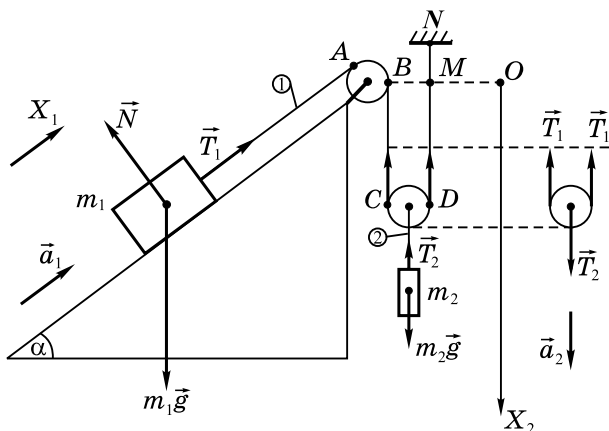


Рис. 34

В этой системе содержится 4 неизвестных: T_1 , T_2 , a_1 , a_2 . Запишем второй закон Ньютона для подвижного блока: $T_2 - 2T_1 = 0$ (массой блока можно пренебречь), следовательно,

$$T_2 = 2T_1. \quad (3)$$

Пусть $x_1(t)$ — координата первого тела; $x_A = \text{const}$ — координата точки A, в которой нить 1 начинает касаться блока; Δl_1 — длина нити между точками касания A и B; $x_2(t)$ — координата центра подвижного блока; Δl_2 — длина нити между точками касания C и D, Δl_3 — длина нити между точками M и N; L — длина нити 1. Тогда

$$L = (x_A - x_1(t)) + \Delta l_1 + 2x_2(t) + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \text{const.}$$

$$\text{Производная } L'(t) = 0 \Rightarrow -x_1'(t) + 2x_2'(t) = 0.$$

Еще раз дифференцируя это равенство, получим $-x_1''(t) + 2x_2''(t) = 0$. Так как $x_1''(t) = a_1$, а $x_2''(t) = a_2$, то

$$a_1 = 2a_2. \quad (4)$$

Это уравнение называют **уравнением кинематической связи**. В разобранных ранее задачах уравнение кинематической связи представляло собой простейшее равенство $a_1 = a_2$.

Подставляя (4) в (1) и (3) в (2), получим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin \alpha = 2m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T_1 - 2m_1 g \sin \alpha = 4m_1 a_2, \\ m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(m_2 - 2m_1 \sin \alpha) = a_2(4m_1 + m_2) \Rightarrow a_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{4m_1 + m_2} g.$$

$$a_2 = 4,9 \text{ м/с}^2, \quad a_1 = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

6. Клин с углом наклона α при основании движется в горизонтальном направлении с ускорением a . С каким ускорением a_0 относительно наклонной плоскости будет двигаться груз массой m , помещенный на нее? Трения нет. Найти силу давления груза на наклонную плоскость (см. рис. 35).

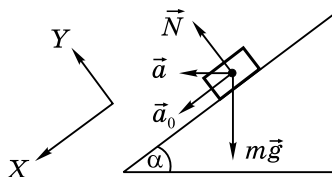


Рис. 35

Решение

Ускорение груза \vec{a}_r относительно системы отсчета, связанной с Землей, ускорение клина \vec{a} и ускорение груза относительно клина \vec{a}_0 связаны соотношением

$\vec{a}_T = \vec{a} + \vec{a}_0$, причем \vec{a}_0 все время направлено параллельно поверхности клина (см. рис. 35).

Приложенные к грузу силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} – сообщают грузу ускорение \vec{a}_T относительно Земли. Вводим координатные оси X и Y и записываем второй закон Ньютона для проекций сил и ускорений на эти оси:

$$\begin{aligned} \text{по оси } X_1 \quad & \begin{cases} mgsin\alpha = ma_{rx}, \\ \text{по оси } Y \quad \begin{cases} N - mg\cos\alpha = ma_{ry}, \text{ где } a_{rx} = a_x + a_{0x}, \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

причем $a_x = a \cos\alpha$, $a_{0x} = a_0$;

$$a_{ry} = a_y + a_{0y}, \text{ где } a_y = a \sin\alpha, a_{0y} = 0.$$

Тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} mgsin\alpha = m(a \cos\alpha + a_0), \\ N - mg\cos\alpha = ma \sin\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = g \sin\alpha - a \cos\alpha, \\ N = m(g \cos\alpha + a \sin\alpha). \end{cases}$$

Сила давления груза на плоскость $P = N$. При достаточно больших ускорениях клина $a_0 = g \sin\alpha - a \cos\alpha < 0$, т. е. груз относительно клина будет подниматься вверх.

7. При скоростном спуске лыжник скользил вниз по склону с углом наклона $\alpha = 45^\circ$, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0,1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости: $F = kv^2$, где $k = 0,7$ кг/м. Какова максимальная скорость лыжника, если его масса $m = 100$ кг?

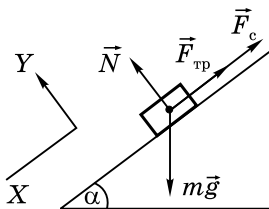


Рис. 36

Решение

На лыжника действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} , сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$ и сила сопротивления $F_c = kv^2$, направленная в сторону, противоположную скорости (см. рис. 36).

Для проекций на оси X и Y получаем систему:

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} - F_c = ma, \\ N - mg \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Так как $F_c = kv^2$, то ускорение лыжника при его разгоне не будет постоянным, т. е. $a = a(t)$. Так как ускорение есть производная от скорости, то максимальное значение скорости соответствует тому, что ускорение $a = v'(t) = 0$. Тогда система приводится к виду:

$$\begin{cases} N = mg \cos \alpha, \\ mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - kv_{\text{max}}^2 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения

$$v_{\text{max}} = \sqrt{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/k} = 29,8 \text{ м/с}.$$

8. Поезд, подъезжая к станции со скоростью $v_0 = 72 \text{ км/ч}$, начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время торможения поезда до полной остановки, при котором предметы не падают с полок ($\mu = 0,1$) (см. рис. 37)?

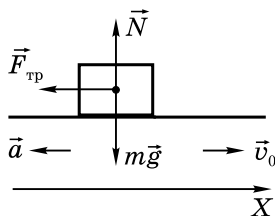


Рис. 37

Решение

На тело массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . Тело, не падающее с полки, имеет ускорение относительно поезда равное нулю. Ускорение предмета относительно системы отсчета, связанной с Землей, равно ускорению поезда \vec{a} . Так как оно направлено горизонтально, то его появление вызвано действием силы трения покоя между полкой и телом. По второму закону Ньютона $-F_{\text{тр}} = -ma \Rightarrow a = F_{\text{тр}}/m$. Скорость поезда изменяется по закону $v(t) = v_0 - at$. В момент остановки $0 = v_0 - at_{\text{т}}$, где $t_{\text{т}}$ — время торможения поезда. Выразим $t_{\text{т}} = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{F_{\text{тр}}/m} = \frac{mv_0}{F_{\text{тр}}}$. Время торможения минимально, если сила трения покоя максимальна и равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$:

$$(t_{\text{т}})_{\text{min}} = \frac{v_0}{\mu g} = 20,4 \text{ с.}$$

9. На подставке лежит тело, подвешенное к потолку с помощью пружины. В начальный момент времени пружина не деформирована. Подставку начинают опускать вниз с ускорением \vec{a} . Через какое время тело оторвется от подставки? Коэффициент жесткости пружины равен k , масса тела m (см. рис. 38).

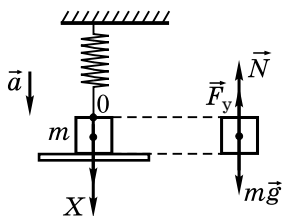


Рис. 38

Решение

В начальный момент времени пружина не деформирована, поэтому сила упругости равна нулю. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . Введем координатную ось X , начало которой совместим с положением тела в начальный момент времени. Когда подставка начнет двигаться вниз, пружина удлинится и возникнет сила упругости, модуль которой $F_{\text{упр}} = kx$, где x — деформация пружины, равная координате тела. По второму закону Ньютона $mg - N - F_{\text{упр}} = ma$. В момент отрыва тела от подставки $N = 0 \Rightarrow mg - kx_1 = ma_1$, где x_1 — координата тела в момент отрыва. Значит, $x_1 = (mg - ma) / k$. С другой стороны, координату подставки $x(t)$ можно выразить из законов равнопеременного движения $x(t) = x_0 + v_0 t + at^2 / 2 = at^2 / 2$. Получаем уравнение

$$\frac{mg - ma}{k} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m}{k} \left(\frac{g}{a} - 1 \right)}.$$

10. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени приведен на рис. 39. Найти угол наклона плоскости к горизонту и максимальную высоту подъема шайбы.

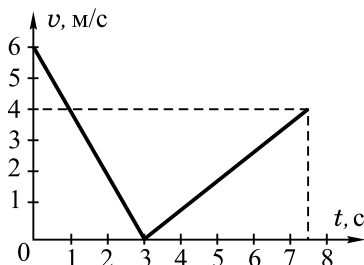


Рис. 39

Решение

Из графика на рис. 39 следует, что начальная скорость шайбы $v_0 = 6$ м/с, время подъема шайбы $t_1 = 3$ с, время спуска $t_2 = 7,5 - 3 = 4,5$ с, конечная скорость шайбы $v_k = 4$ м/с. Рассмотрим движение шайбы вверх. Действующие на шайбу силы изображены на рис. 40. Здесь $m\vec{g}$ — сила тяжести; \vec{N} — сила реакции опоры; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения скольжения. Эти силы определяют ускорение шайбы \vec{a}_1 . Найдём его, используя второй закон Ньютона. Для этого введём стандартную в таких задачах координатную систему, направив ось X вверх вдоль наклонной плоскости, и спроецируем силы.

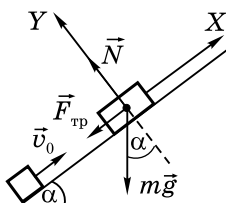


Рис. 40

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{по оси } X & -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma_1, \\ \text{по оси } Y & N - mg \cos \alpha = 0, \\ & F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N = mg \cos \alpha, \\ F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha, \\ -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_1, \end{cases}$$

где μ — коэффициент трения скольжения; a_1 — проекция ускорения.

Из этой системы находим $a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Знак минус указывает на то, что ускорение \vec{a}_1 направлено

противоположно выбранной оси. Так как ускорение шайбы постоянно, то проекция скорости выражается формулой $v_x(t) = v_0 + a_1 t = v_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t$. В момент времени $t = t_1 = 3$ с $v_x = 0$ и получаем уравнение

$$v_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t_1 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим движение шайбы вниз. На этом участке начало отсчета времени соответствует моменту, когда шайба начинает движение вниз. Силы, приложенные к шайбе, не изменились, лишь сила трения скольжения изменила направление. Координатные оси удобно направить как показано на рис. 41.

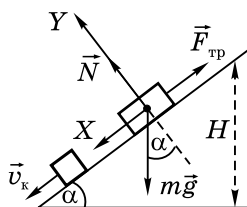


Рис. 41

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma_2, \\ N - mg \cos \alpha = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N, \end{cases} \Rightarrow a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha);$$

где a_2 — проекция ускорения при движении вниз.

Проекция скорости выражается формулой $v_x = v_{0x} + a_2 t = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t$.

В момент времени $t = t_2 = 4,5$ с $v_x = v_k$. Получаем уравнение

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t_2 = v_k. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему с двумя неизвестными α и μ :

$$\begin{cases} v_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t_1 = 0, \\ g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t_2 = v_{\kappa}, \end{cases} \Rightarrow \pm \begin{cases} \sin \alpha + \mu \cos \alpha = v_0 / (gt_1), \\ \sin \alpha - \mu \cos \alpha = v_{\kappa} / (gt_2), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin \alpha = \left(\frac{v_0}{t_1} + \frac{v_{\kappa}}{t_2} \right) \frac{1}{g}, \\ 2\mu \cos \alpha = \left(\frac{v_0}{t_1} - \frac{v_{\kappa}}{t_2} \right) \frac{1}{g}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin \left(\left(\frac{v_0}{t_1} + \frac{v_{\kappa}}{t_2} \right) \frac{1}{2g} \right), \\ \mu = \left(\frac{v_0}{t_1} - \frac{v_{\kappa}}{t_2} \right) \frac{1}{2g \cos \alpha}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 8,5^\circ; \mu = 0,06.$$

Рассмотрим движение шайбы вниз и воспользуемся формулой (1.21) для равнопеременного движения. Получаем $v_{\kappa}^2 = 2a_2(x_{\kappa} - x_0)$, где $x_{\kappa} - x_0 = l$ — расстояние, пройденное шайбой вдоль наклонной плоскости, $l = v_{\kappa}^2 / 2a_2$, а максимальная высота подъема

$$H = l \sin \alpha = \frac{v_{\kappa}^2 \sin \alpha}{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = \frac{v_{\kappa}^2}{2g(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 1,7 \text{ м.}$$

11. Материальная точка массой m движется с постоянной скоростью v по окружности. Определите изменение импульса точки за $1/4$ периода обращения.

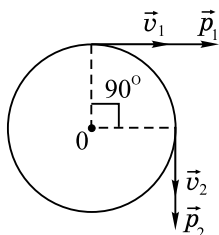


Рис. 42

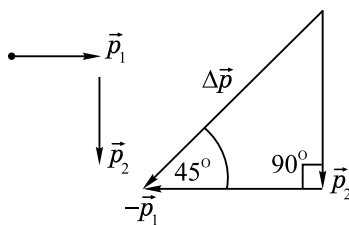


Рис. 43

Решение

Начальный импульс точки \vec{p}_1 , его модуль $p_1 = mv_1 = mv$. За четверть периода радиус, соединяющий материаль-

ную точку с центром окружности, поворачивается на 90° . Конечный импульс \vec{p}_2 , его модуль $p_2 = mv_2 = mv$ ($v_1 = v_2 = v$). Изменение импульса точки $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \neq 0$. $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$ (см. рис. 42).

На рис. 43 показано построение вектора $\Delta\vec{p}$ по правилу треугольника. В образовавшемся прямоугольном треугольнике катеты равны mv , а гипотенуза

$$\Delta p = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = \sqrt{2}mv.$$

Вектор $\Delta\vec{p}$ направлен под углом 45° к вектору \vec{p}_2 .

- 12.** Две частицы, масса которых m и $2m$, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями, модуль которых равен v . На частицы в течение некоторого времени действуют одинаковые силы. При этом частица m начинает двигаться в обратном направлении со скоростью, модуль которой v (см. рис. 44). Как будет двигаться частица массой $2m$?

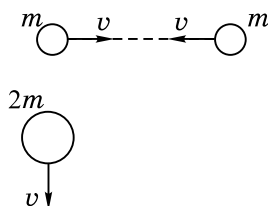


Рис. 44

Решение

Начальный импульс частицы m равен \vec{p}_0 (см. рис. 44), причем $p_0 = mv$. Конечный ее импульс \vec{p} , причем $p = mv$. Изменение импульса частицы массой m :

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} + (-\vec{p}_0).$$

Вектор $\Delta\vec{p}$ построен на рис. 45. Его модуль $\Delta p = 2mv$. По условию задачи импульсы сил, действовавших на ча-

стицы, равны, поэтому импульс частицы $2m$ изменится также на $\Delta \vec{p}$. Ее начальный импульс \vec{p}_0' ($p_0' = 2mv$). Конечный импульс $p' = 2mu$, где u — конечная скорость. Так как $\vec{p}' - \vec{p}_0' = \Delta \vec{p}$, то $\vec{p}' = \vec{p}_0' + \Delta \vec{p}$. Вектор \vec{p}' построен на рис. 46.

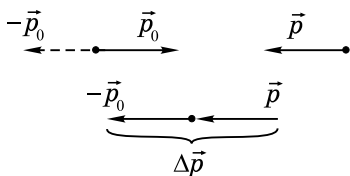


Рис. 45

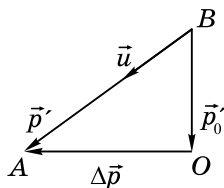


Рис. 46

В $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90^\circ$) $AO = BO = 2mv$, поэтому:

$$\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ \text{ и } AB = p' = AO\sqrt{2} = 2mv\sqrt{2}.$$

Скорость частицы $2m$ направлена под углом 45° к направлению первоначального движения. Модуль скорости находим из условия

$$2mv\sqrt{2} = 2mu \Rightarrow u = v\sqrt{2}.$$

- 13.** Автомобиль массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг, который двигался со скоростью $v_0 = 72$ км/ч, в момент времени $t = 0$ начинает тормозиться силой F , модуль которой изменяется по линейному закону, как показано на рис. 47, а. Через какой промежуток времени автомобиль остановится?

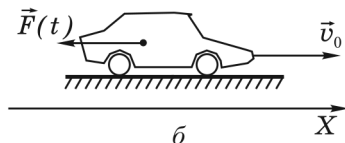
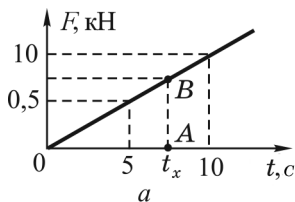


Рис. 47

Решение

Из рис. 47 следует, что $F(t)=kt$, где $k=\frac{10^4 \text{ Н}}{10 \text{ с}}=10^3 \text{ Н/с}$.

Проекция на горизонтальную ось X (см. рис. 47, б) начального импульса автомобиля $p_0=mv_0$, конечный импульс $p_{\text{к}}=0$. Изменение импульса $\Delta p=p_{\text{к}}-p_0=-mv$ вызвано импульсом действовавшей на автомобиль силы $F(t)$. При этом модуль импульса переменной силы численно равен

площади ΔAOB : $S=\frac{1}{2} \cdot AO \cdot AB=\frac{1}{2} \cdot t_x \cdot (kt_x)=\frac{1}{2} \cdot kt_x^2$, где

t_x — время торможения. Проекция импульса силы на ось

X равна $-\frac{1}{2}kt_x^2$; из основного уравнения динамики

$$-mv_0=-\frac{1}{2}kt_x^2 \Rightarrow t_x=\sqrt{\frac{2mv_0}{k}}=8,9 \text{ с}.$$

РАЗДЕЛ 3

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

1. Закон сохранения импульса системы

Импульсом системы тел называют векторную сумму

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n, \quad (3.1)$$

где $m_i\vec{v}_i$ — импульсы тел, входящих в систему.

Силы, с которыми взаимодействуют тела системы, называются **внутренними силами системы**. В любой системе сумма всех ее внутренних сил равна нулю, что является следствием третьего закона Ньютона.

Силы, которые действуют на тела системы со стороны других тел, не входящих в эту систему, называются **внешними силами**. Сумма внешних сил, действующих на систему, не обязательно равна нулю. Если сумма внешних сил равна нулю, то систему называют **замкнутой**, если эта сумма отлична от нуля, то систему называют **незамкнутой**.

Для замкнутой системы выполняется закон сохранения импульса: векторная сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, остается постоянной при любых движениях и взаимодействиях тел системы.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из тел, масса которых равна m_1, m_2, \dots, m_n , а скорости $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ соответственно. Импульс такой системы назовем начальным, $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$. В результате взаимодействия между телами их скорости изменяются и становятся равными $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_n$. Импульс системы

тел после взаимодействия называют конечным. В рассматриваемом случае это

$$\vec{P}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 + \dots + m_n \vec{v}'_n.$$

По закону сохранения импульса $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ или

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 + \dots + m_n \vec{v}'_n. \quad (3.2)$$

На практике редко встречаются системы, на которые не действуют внешние силы. Тем не менее можно указать несколько случаев, когда сохраняется импульс незамкнутой системы или его проекция на какое-либо направление.

1. Существует направление, на которое сумма проекций внешних сил равна нулю. Тогда импульс системы как вектор может и не сохраняться, но сохраняется проекция импульса на указанное направление.

2. Действие внешних сил на систему рассматривается за малый промежуток времени $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда при условии, что внешние силы принимают конечные значения, импульс внешних сил $F_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$, и, следовательно, импульс системы в течение времени $\Delta t \rightarrow 0$ сохраняется.

2. Центр масс системы

Центр масс системы — это точка, радиус-вектор которой вычисляется по формуле

$$\vec{R}_c(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t) + \dots + m_n \vec{r}_n(t)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (3.3)$$

где m_1, m_2, \dots, m_n — масса тел, входящих в систему; $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_n(t)$ — радиусы-векторы этих тел (см. рис. 48).

Продифференцировав равенство (3.3) по времени, получим

$$\vec{R}'_c(t) = \frac{m_1 \vec{r}'_1(t) + m_2 \vec{r}'_2(t) + \dots + m_n \vec{r}'_n(t)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

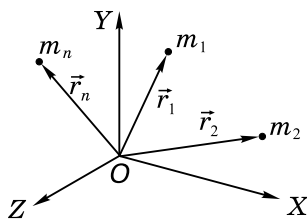


Рис. 48

Как известно, производная от радиуса-вектора по времени есть мгновенная скорость, поэтому $\vec{r}_1'(t) = \vec{v}_1(t)$, а $\vec{R}_c'(t) = \vec{u}(t)$, где $\vec{u}(t)$ — скорость центра масс системы,

$$\vec{u}(t) = \frac{m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) + \dots + m_n \vec{v}_n(t)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (3.4)$$

Отметим, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n = M$ — масса всей системы, а $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \vec{P}$ — импульс системы. Тогда из (3.4) легко получаем

$$M\vec{u} = \vec{P}. \quad (3.5)$$

Следовательно, центр масс системы можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всей системы, и импульсом, равным импульсу всей системы.

Для центра масс системы можно записать основное уравнение динамики $\Delta \vec{P} = (\vec{F}_{\text{внут}} + \vec{F}_{\text{внеш}}) \Delta t$. Здесь $\vec{F}_{\text{внут}}$ — сумма всех внутренних сил системы, для любой системы равная нулю, а $\vec{F}_{\text{внеш}}$ — сумма всех внешних сил, действующих на систему. Таким образом, можно утверждать, что **центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.** Последнее утверждение называется **теоремой о движении центра масс системы.**

Если сумма внешних сил равна нулю (замкнутая система), то центр масс движется равномерно. В частном случае, если у него нет начальной скорости, центр масс покоится. Важно отметить, что тела, входящие в систему, могут при этом совершать разнообразные движения, центр масс же не будет изменять своего положения.

3. Механическая работа. Мощность

Механической работой постоянной силы называют скалярную величину

$$A = FS \cos \alpha, \quad (3.6)$$

где F — модуль силы, приложенной к телу; S — модуль совершенного телом перемещения; α — угол между векторами \vec{F} и \vec{S} (см. рис. 49).

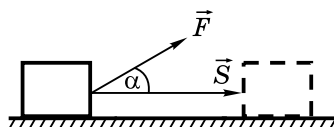


Рис. 49

Как видно из определения, механическая работа есть скалярное произведение векторов \vec{F} и \vec{S} :

$$A = \vec{F} \vec{S}. \quad (3.7)$$

Механическая работа — алгебраическая величина, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от угла α . Так, при $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ)$ $A > 0$, а при $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ]$ $A < 0$; если направление силы перпендикулярно направлению перемещения, т. е. $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$; если $\alpha = 0$, то $A = FS$; при $\alpha = 180^\circ$ $A = -FS$.

Если сила — переменная величина, то ее работа численно равна площади криволинейной трапеции $ABCD$, изображенной на рис. 50.

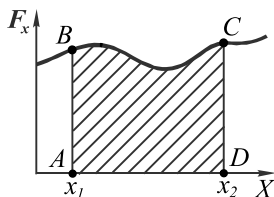


Рис. 50

Здесь по оси X отложена проекция вектора перемещения \vec{S} , а по оси ординат — проекция силы \vec{F} на направление перемещения. Таким образом, **работу переменной силы** можно вычислить по формуле

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx. \quad (3.8)$$

Если к телу приложено несколько сил, то работа равнодействующей сил равна алгебраической сумме работ, совершенных каждой силой:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (3.9)$$

Мощностью называют работу, совершенную за 1 с. В случае когда работа совершается равномерно во времени, мощность постоянна:

$$N = A / \Delta t, \quad (3.10)$$

где Δt — время, за которое совершена работа A .

В общем случае мощность изменяется с течением времени, и ее мгновенное значение находят как производную от работы по времени:

$$N(t) = A'(t). \quad (3.11)$$

Мощность можно также рассчитать по формуле

$$N = Fv, \quad (3.12)$$

где F — модуль силы; v — модуль скорости тела.

Коэффициент полезного действия (КПД) механизма есть отношение полезной работы $A_{\text{п}}$ к затраченной $A_{\text{з}}$, т.е.

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} 100\%. \quad (3.13)$$

КПД любого механизма меньше 100%.

4. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия тела — это скалярная физическая величина, характеризующая движущееся тело. Кинетическая энергия тела, масса которого m , а скорость v ,

$$W_{\text{к}} = mv^2 / 2. \quad (3.14)$$

Учитывая, что модуль импульса тела $p = mv$, выражаем скорость как $v = p / m$ и получаем, что кинетическая энергия

$$W_{\text{к}} = p^2 / (2m). \quad (3.15)$$

Под действием приложенной силы у тела возникает ускорение, а, значит, изменяется скорость от начальной v_1 до конечной v_2 . Начальная кинетическая энергия тела $W_{\text{к1}} = mv_1^2 / 2$, конечная $W_{\text{к2}} = mv_2^2 / 2$. Изменение кинетической энергии есть разность между конечным и начальным значениями: $\Delta W = W_{\text{к2}} - W_{\text{к1}}$.

Теорема о кинетической энергии утверждает, что изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей сил, приложенных к телу:

$$\Delta W = W_{\text{к2}} - W_{\text{к1}} = mv_2^2 / 2 - mv_1^2 / 2 = A. \quad (3.16)$$

5. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия — это энергия взаимодействия тел. Система тел обладает потенциальной энергией, если тела взаимодействуют посредством сил, называемых **потенциальными (консервативными)**. Основным свойством потенциальных сил является независимость работы, которую эти силы совершают, от траектории движения тела. **Работа потенциальных сил зависит от начальной и конечной точек движения. Работа потенциальных сил при перемещении тела по замкнутой траектории равна нулю.**

Работа потенциальных сил A равна изменению потенциальной энергии, взятому со знаком минус:

$$A = -\Delta W_p = -(W_{p2} - W_{p1}), \quad (3.17)$$

где W_{p1} и W_{p2} — начальное и конечное значения потенциальной энергии, ΔW_p — ее изменение.

Потенциальная энергия зависит от координат взаимодействующих тел, поэтому ее значение зависит от того, где выбран нулевой уровень.

В механике рассматриваются два вида потенциальной энергии: **потенциальная энергия тела в гравитационном поле (поле тяжести) и потенциальная энергия упругой деформации.**

Потенциальная энергия тела массой m , находящегося на высоте h над поверхностью Земли,

$$W_p = mgh. \quad (3.18)$$

При этом предполагается, что нулевой уровень потенциальной энергии находится на поверхности Земли. Отметим, что формула (3.18) справедлива у поверхности Земли, когда \vec{g} можно считать постоянной величиной.

По закону Гука при упругой деформации проекция силы упругости $F_{\text{уп}} = -kx$, где x — величина деформации, а k — коэффициент упругости. Для вычисления ее работы воспользуемся формулой (3.8):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{упр}}(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right).$$

В этом случае работу можно представить как изменение величины

$$W_{\text{упр}} = kx^2 / 2, \quad (3.19)$$

которую называют **потенциальной энергией упругой деформации**.

6. Полная механическая энергия

Механическая энергия представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергии:

$$W = W_p + W_k. \quad (3.20)$$

Закон сохранения механической энергии утверждает, что полная механическая энергия тел, взаимодействующих с силами тяготения или силами упругости, остается неизменной при любых движениях тел системы, т. е.

$$W_p + W_k = \text{const}. \quad (3.21)$$

Полная механическая энергия сохраняется не всегда. На систему или в системе могут действовать силы трения, силы сопротивления. Такие силы являются непотенциальными (неконсервативными). Работа A этих сил приводит к уменьшению полной механической энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A, \quad (3.22)$$

где W_1 и W_2 — начальное и конечное значения механической энергии, причем $W_2 < W_1$. Следует также иметь в виду, что работа сил трения и сопротивления отрицательна, т. е. $A < 0$, так как эти силы всегда направлены противоположно вектору перемещения. При этом начальная механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию (выделяется в виде

теплоты). По закону сохранения энергии можно записать, что

$$W_1 = W_2 + Q, \quad (3.23)$$

где W_1 — начальная, а W_2 — конечная механическая энергия системы; Q — количество выделившейся теплоты.

7. Упругие и неупругие столкновения

Во многих задачах физики рассматриваются упругие и неупругие столкновения (удары). Если при столкновении механическая энергия системы сохраняется, то столкновение называется **упругим (абсолютно упругим)**; если механическая энергия системы не сохраняется, то говорят о **неупругом столкновении**. Достаточным признаком неупругого столкновения является движение тел как одного целого после столкновения. В этом случае говорят об **абсолютно неупругом столкновении**. Однако столкновение может быть упругим и тогда, когда после него тела двигаются раздельно. При этом неупругость столкновения оговаривается в условии задачи либо следует из ее условия.

После упругого столкновения тела обязательно движутся раздельно. Упругость столкновения должна быть четко оговорена в условии задачи или явным образом из него следовать.

Поскольку столкновения рассматриваются между телами, образующими, как правило, замкнутую систему, то для количественного описания упругих столкновений используются законы сохранения механической энергии и импульса системы, а для описания неупругих столкновений применяется только закон сохранения импульса системы.

Из свойств столкновений следует, что при упругих столкновениях теплота не выделяется, а при неупругих

столкновениях механическая энергия систем частично или полностью переходит во внутреннюю.

Столкновения также подразделяются на **центральные** и **нецентральные**. При центральных столкновениях скорости тел до и после столкновения направлены вдоль одной и той же прямой (линии центров). При нецентральных столкновениях скорости тел после столкновения отклоняются от своего первоначального направления.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Снаряд, который летел в горизонтальном направлении со скоростью v , разрывается на два осколка массой m_1 и m_2 . Скорость осколка массой m_1 равна v_1 и направлена вертикально вверх. Определите модуль и направление скорости осколка массой m_2 (см. рис. 51).

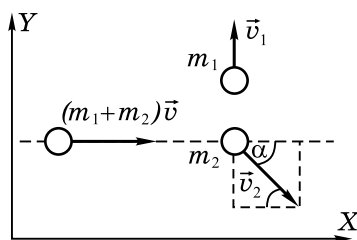


Рис. 51

Решение

На систему, состоящую из двух осколков массой m_1 и m_2 , в горизонтальном направлении X внешние силы не действуют, поэтому импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется, т. е. $P_{1x} = P_{2x}$. В вертикальном направлении Y на систему действует внешняя сила — сила тяжести. Но поскольку время разрыва снаряда

мало, сохраняется импульс системы и в вертикальном направлении, т. е. $P_{1y}=P_{2y}$. Начальный импульс системы в направлении X $P_{1x}=(m_1+m_2)v$, конечный импульс $P_{2x}=m_2v_2 \cos \alpha$. Начальный импульс системы в направлении Y — $P_{1y}=0$, конечный — $P_{2x}=m_1v_1 - m_2v_2 \sin \alpha$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)v = m_2v_2 \cos \alpha, \\ 0 = m_1v_1 - m_2v_2 \sin \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2v_2 \cos \alpha = (m_1+m_2)v, \\ m_2v_2 \sin \alpha = m_1v_1. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

После деления уравнения (2) системы на уравнение (1) найдем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1v_1}{(m_1+m_2)v} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_1v_1}{(m_1+m_2)v}.$$

Возведя в квадрат уравнения (1) и (2) системы, а затем их складывая, найдем что

$$\begin{aligned} (m_2v_2)^2 \cos^2 \alpha + (m_2v_2)^2 \sin^2 \alpha &= ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1v_1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_2v_2)^2 &= ((m_1+m_2)v)^2 + (m_1v_1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{(m_1+m_2)^2 v^2 + m_1^2 v_1^2} / m_2. \end{aligned}$$

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородная доска массой m и длиной L . Человек, масса которого $2m$, переходит с одного конца доски на ее середину. На сколько при этом сместится доска (см. рис. 52)?

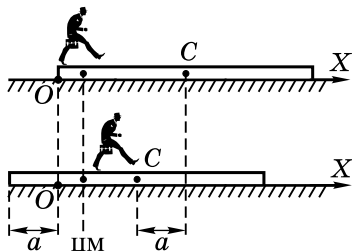


Рис. 52

Решение

В горизонтальном направлении на систему «человек — доска» внешние силы не действуют, поэтому центр масс (ЦМ) этой системы остается на месте. Введем горизонтальную ось X , ее начало поместим в точку O . Тогда $x_{\text{ч}}=0$, $x_{\text{с}}=L/2$, где $x_{\text{ч}}$ — координата человека, $x_{\text{с}}$ — координата ЦМ доски. По формуле (3.3) находим положение ЦМ системы «человек — доска»:

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{x_{\text{ч}}2m + x_{\text{с}}m}{3m} = \frac{(L/2)m}{3m} = \frac{L}{6}.$$

Во втором случае $x'_{\text{ч}} = \frac{L}{2} - a$, $x'_{\text{с}} = \frac{L}{2} - a$, где a — смещение доски.

$$\begin{aligned} x'_{\text{ЦМ}} &= \frac{x'_{\text{ч}}2m + x'_{\text{с}}m}{3m} = \frac{(L/2 - a)2m + (L/2 - a)m}{3m} = \\ &= \frac{3(L/2 - a)}{3m} = \frac{L}{2} - a. \end{aligned}$$

Так как центр масс системы остался на месте, то

$$x_{\text{ЦМ}} = x'_{\text{ЦМ}} \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{L}{2} - a \Rightarrow a = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{1}{3}L.$$

3. Конькобежец, разогнавшись до скорости v_0 , въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня въедет конькобежец, если склон горы составляет угол α с горизонтом и коэффициент трения коньков о лед равен μ ?

Решение

В точке 1 (см. рис. 53) начальная механическая энергия конькобежца $W_1 = W_{p1} + W_{k1} = mv_0^2/2$. В точке 2 механическая энергия конькобежца

$$W_2 = W_{p2} + W_{k2} = mgh.$$

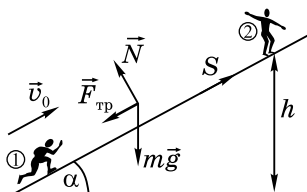


Рис. 53

В процессе движения на конькобежца действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (консервативная сила), сила реакции опоры \vec{N} (сразу отметим, что работа этой силы $A_N = NS \cos 90^\circ = 0$), сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (неконсервативная сила). Механическая энергия конькобежца изменяется, причем

$$W_2 - W_1 = A_{\text{тр}}. \quad (1)$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \text{ где } N = mg \cos \alpha \Rightarrow F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha.$$

Определим работу силы трения

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= F_{\text{тр}} S \cos 180^\circ = -F_{\text{тр}} S = \\ &= -(\mu mg \cos \alpha) h / \sin \alpha = -\mu mgh \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Подставив в (1), получим уравнение относительно h :

$$\begin{aligned} mgh - \frac{mv_0^2}{2} &= -\mu mgh \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow gh(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{v_0^2}{2g(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha)}. \end{aligned}$$

4. Из духового ружья стреляют в спичечный коробок, лежащий на расстоянии $l = 30$ см от края стола. Пуля массой $m = 1$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 150$ м/с, пробивает коробок и вылетает из него со скоростью $v_0/2$. Масса коробка $M = 50$ г. При каких значениях коэффициента трения μ между коробком и столом коробок упадет со стола?

Решение

После попадания пули в коробок он приобретает скорость \vec{u} . Найдем эту скорость, используя сохранение импульса системы «коробок — пуля» в горизонтальном направлении. До попадания пули импульс системы $P_{1x} = mv_0$, сразу после попадания $P_{2x} = mv_0/2 + Mu$:

$$P_{1x} = P_{2x} \Rightarrow mv_0 = mv_0/2 + Mu \Rightarrow u = mv_0/(2M).$$

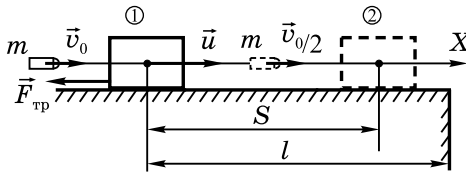


Рис. 54

Рассмотрим отдельно движения коробка. В положении 1 (см. рис. 54) его механическая энергия $W_1 = Mu_2/2$ (нулевое значение потенциальной энергии здесь выбрано на поверхности стола). В положении 2 $W_2 = 0$ (коробок остановился). Механическая энергия коробка изменилась на значение работы силы трения

$$W_2 - W_1 = A_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Вычислим работу силы трения при движении по горизонтальной поверхности. В данном случае $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu Mg \Rightarrow A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} S \cos 180^\circ = -\mu MgS$, где S — путь, пройденный коробком до остановки. Подставив в (1), получим

$$0 - \frac{Mu^2}{2} = -\mu MgS \Rightarrow S = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{(mv_0/2M)^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v_0^2}{8M^2 \mu g}.$$

Коробок упадет со стола, если

$$S \geq l \Rightarrow \frac{m^2 v_0^2}{8M^2 \mu g} \geq l \Rightarrow \mu \leq \frac{v_0^2}{8gl} \left(\frac{m}{M} \right)^2; \quad \mu \leq 0,38.$$

5. Шарик массой m свободно падает с высоты H на горизонтальную плоскость и отскакивает от нее. При ударе о плоскость выделяется количество теплоты, равное Q . Найти высоту, на которую подпрыгнет шарик после удара, а также среднюю силу, с которой шарик действует на плоскость, если время удара равно Δt (см. рис. 55).

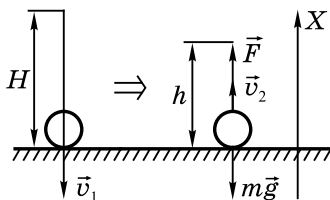


Рис. 55

Решение

На высоте H механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии, $W_1 = mgH$. Пусть шарик подпрыгивает после удара на высоту h , тогда его механическая энергия в этой точке $W_2 = mgh$. Закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты запишем в виде

$$W_1 = W_2 + Q \Rightarrow mgH = mgh + Q \Rightarrow h = H - Q/(mg).$$

Пусть скорость шарика перед ударом равна v_1 , тогда его механическая энергия перед ударом $W_1' = mv_1^2/2$. По закону сохранения механической энергии $W_1 = W_1' \Rightarrow mgH = mv_1^2/2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$. Пусть \vec{v}_2 — скорость шарика после удара, тогда его механическая энергия после удара $W_2' = mv_2^2/2$. Так как $W_2 = W_2'$, то $v_2 = \sqrt{2gh}$.

Импульс шарика перед ударом $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, а его проекция на вертикальное направление X равна $p_{1x} = -mv_1$. Импульс шарика после удара $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, его проекция $p_{2x} = mv_2$. В соответствии с основным уравнением динамики изменение импульса тела равно импульсу действующей силы. Во время удара на шарик действуют: сила

тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны плоскости \vec{F} . Проекция этих сил $F - mg$, а ее импульс

$$(F - mg)\Delta t = p_{2x} - p_{1x} \Rightarrow (F - mg)\Delta t = mv_2 - (-mv_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow F = m(v_1 + v_2)/\Delta t + mg = m\left(\left(\sqrt{2gH} + \sqrt{g(H - Q/mg)}\right)/\Delta t + g\right)$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю средней силой шарик действует на плоскость.

6. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в брусок, подвешенный на нити длиной $l = 4$ м, и застревает в нем. Определить угол α , на который отклонится брусок, если масса пули $m = 20$ г, а бруска $M = 5$ кг. Определите количество теплоты, выделившееся при попадании пули в брусок (см. рис. 56).

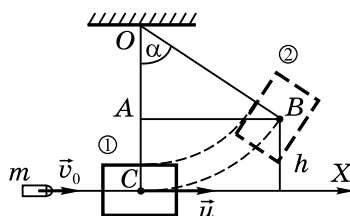


Рис. 56

Решение

Попадание пули в брусок — это пример неупругого столкновения. После попадания пули скорость бруска и пули \vec{u} . Найдем ее, используя сохранение импульса системы пуля-брусок в горизонтальном направлении X . Получим $mv_0 = (m + M)u \Rightarrow u = mv_0/(m + M)$.

В состоянии 1 механическая энергия системы $W_1 = (M + m)u^2/2$, а в состоянии 2 $W_2 = (m + M)gh$. После попадания пули на участке 1–2 механическая энергия сохраняется, т. е.

$$W_1 = W_2 \Rightarrow (M+m)u^2/2 = (m+M)gh \Rightarrow h = u^2/(2g).$$

Проведем $AB \perp OC$. В $\triangle AOB$ $AO = l - h$, $OB = l$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{AO}{OB} = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{u^2}{2gl} = \\ &= 1 - \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \frac{v_0^2}{2gl} = 0,97 \Rightarrow \alpha = 14^\circ. \end{aligned}$$

До попадания пули в брусок механическая энергия системы $W' = mv_0^2/2 > W_1$ (так как столкновение неупругое). Поэтому количество выделившейся теплоты

$$\begin{aligned} Q &= W' - W_1 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)}{2} \left(\frac{mv_0}{M+m} \right)^2 = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{M}{M+m} \right) = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{1}{1+m/M} \right). \end{aligned}$$

При $m \ll M$ $Q = mv_0^2/2 = 1600$ Дж.

7. Пружина, массой которой можно пренебречь, стоит на столе вертикально. Длина пружины l . С высоты H над столом ($H > l$) падает небольшой шарик массой m и попадает на пружину. Максимальная скорость шарика при движении вниз равна v_m . Найдите коэффициент жесткости пружины k .

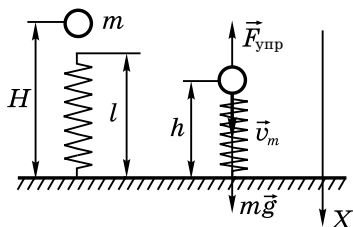


Рис. 56

Решение

До попадания на пружину шарик свободно падает с ускорением свободного падения \vec{g} (см. рис. 57). Скорость шарика при этом возрастает. Когда шарик оказался на пружине, на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $F_{\text{упр}} = k\Delta x$, где Δx — сжатие пружины. По второму закону Ньютона ускорение шарика $a = (mg - F_{\text{упр}}) / m = g - (F_{\text{упр}} / m) < g$, причем ускорение шарика не постоянно. Пока проекция ускорения на ось X положительна, скорость шарика возрастает. Скорость достигает максимального значения в тот момент, когда ее производная, т. е. ускорение, обращается в нуль. Из условия $a = 0$ находим

$$mg - F_{\text{упр}} = 0 \Rightarrow mg = F_{\text{упр}} = k(l - h), \quad (1)$$

где h — высота, на которой оказался шарик в момент, когда его скорость максимальна.

В начальной точке движения механическая энергия шарика равна его потенциальной энергии в поле тяжести земли $W_1 = mgH$. На высоте h механическая энергия состоит из потенциальной энергии в поле тяжести Земли, кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации: $W_2 = mgh + mv_m^2 / 2 + k(l - h)^2 / 2$. По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow mgH = mgh + mv_m^2 / 2 + k(l - h)^2 / 2. \quad (2)$$

Выразим из уравнения (1) $h = l - mg / k$ и подставим в уравнение (2). Получим

$$mgH = mgh + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{(mg)^2}{2k} \Rightarrow k = \frac{mg^2}{-v_m^2 + 2g(H - l)}.$$

8. Два небольших упругих шарика подвешены на нитях $l_1 = 10$ см и $l_2 = 5$ см так, что они соприкасаются, линия их центров горизонтальна, а нити вертикальны. Масса шариков $m_1 = 4$ г и $m_2 = 20$ г. Шарик массой m_1

отклоняют на угол $\alpha = 60^\circ$ от вертикали и отпускают. На какие углы отклонятся нити после абсолютно упругого соударения шариков?

Решение

При отклонении нити с первым шариком на угол α он поднимется на высоту h от начального уровня (см. рис. 58). Найдем связь между α и h . Из $\triangle OAB$ $OB = l_1 \cos \alpha$,

$$BD = OD - OB = l_1 - l_1 \cos \alpha = l_1(1 - \cos \alpha) = h. \quad (1)$$

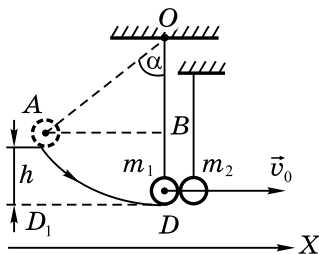


Рис. 58

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне DD_1 . Механическая энергия шарика в точке A равна его потенциальной энергии в этой точке: $W_A = m_1 gh$. Механическая энергия шарика m_1 в точке D равна его кинетической энергии в этой точке: $W_D = m_1 v_0^2 / 2$, где v_0 — скорость перед столкновением со вторым шариком. По закону сохранения механической энергии $W_D = W_A \Rightarrow m_1 gh = m_1 v_0^2 / 2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$.

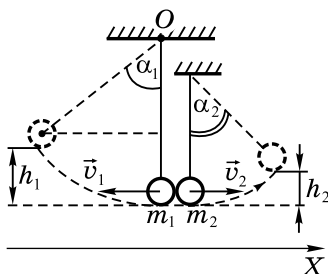


Рис. 59

Скорости шариков после столкновения равны v_1 и v_2 соответственно (см. рис. 59). Рассмотрим систему, состоящую из двух шариков. Механическая энергия этой системы перед столкновением равна кинетической энергии шарика m_1 : $W_0 = m_1 v_0^2 / 2$; механическая энергия системы сразу после столкновения равна сумме кинетических энергий шариков: $W_k = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2$.

Импульс системы перед столкновением шариков равен импульсу шарика m_1 , его проекция на горизонтальное направление X $P_0 = m_1 v_0$. Импульс системы после столкновения $P_k = m_2 v_2 + (-m_1 v_1) = m_2 v_2 - m_1 v_1$. Так как столкновение абсолютно упругое, то механическая энергия и импульс сохраняются, т. е. $W_0 = W_k$ и $P_0 = P_k$. Получаем систему уравнений относительно v_1 и v_2 :

$$\begin{cases} m_1 v_0^2 / 2 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2, \\ m_1 v_0 = m_2 v_2 - m_1 v_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 (v_0^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2, \\ m_1 (v_0 + v_1) = m_2 v_2. \end{cases}$$

После деления первого уравнения системы на второе находим $v_0 - v_1 = v_2$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\begin{aligned} m_1 (v_0 + v_1) &= m_2 (v_0 - v_1) \Rightarrow (m_1 + m_2) v_1 = (m_2 - m_1) v_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 \text{ и } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0. \end{aligned}$$

Так как $m_2 > m_1$, то $v_1 > 0$ и, следовательно, предположение о направлении скорости \vec{v}_1 верно.

Далее рассматриваем движение каждого шарика отдельно. Используя закон сохранения механической энергии, получаем $m_1 v_1^2 / 2 = m_1 g h_1$, где h_1 — наибольшая высота подъема шарика m_1 после столкновения. Находим $h_1 = v_1^2 / (2g)$. По формуле (1) находим

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 &= 1 - \frac{h_1}{l_1} = 1 - \frac{v_1^2}{2gl_1} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{v_0^2}{2gl_1} = \\
 &= 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{2gh}{2gl_1} = 1 - \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 (1 - \cos \alpha) = \frac{7}{9} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \alpha_1 = \arccos \frac{7}{9} = 38,9^\circ.
 \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_2 &= 1 - \frac{h_2}{l_2} = 1 - \frac{v_2^2}{2gl_2} = 1 - \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{v_0^2}{2gl_2} = \\
 &= 1 - \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{2}{gl_2} 2gh = 1 - 4(1 - \cos \alpha) \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 = \\
 &= \frac{89}{90} \Rightarrow \alpha_2 = \arccos \frac{89}{90} = 8,5^\circ.
 \end{aligned}$$

9. Два идеально гладких шара одинакового радиуса и массы покоятся, касаясь друг друга, на гладкой горизонтальной поверхности. Третий шар того же радиуса и массы налетает на них со скоростью v_0 , двигаясь по той же поверхности вдоль прямой, касающейся обоих шаров. Найти скорость шаров после столкновения (см. рис. 60).

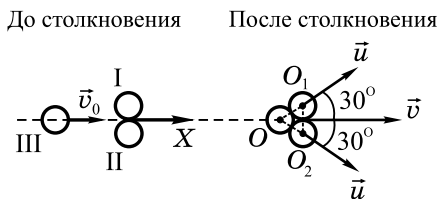


Рис. 60

Решение

Пусть v — скорость третьего шара, а u — модуль скорости первого и второго шаров после столкновения; $\triangle OO_1O_2$ — равносторонний, поэтому $\angle OO_1O_2 = 60^\circ$.

При абсолютно упругом столкновении сохраняются механическая энергия системы и ее импульс. Механическая энергия системы до столкновения есть кинетическая энергия первого шара $W_1 = mv_0^2/2$. Механическая энергия системы после столкновения

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mu^2.$$

Импульс системы до столкновения в направлении X $P_{1x} = mv_0$, после столкновения

$$P_{2x} = mv + 2mu \cos 30^\circ = mv + \sqrt{3}mu.$$

Так как $W_1 = W_2$ и $P_{1x} = P_{2x}$, то получаем систему:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} mv_0^2/2 = mv^2/2 + mu^2, \\ mv_0 = mv + \sqrt{3}mu, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0^2 - v^2 = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (v_0 - v)(v_0 + v) = 2u^2, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 + v = \frac{2}{\sqrt{3}}u, \\ v_0 - v = \sqrt{3}u, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)u, \\ 2v = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2\sqrt{3}v_0}{5}, \\ v = -\frac{v_0}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, третий шар после столкновения изменяет направление движения на противоположное.

10. Упругий шарик бросают с высоты h вниз на горизонтальную плоскость со скоростью v_0 под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали. На какую максимальную высоту подни-

мется шарик после абсолютно упругого удара о плоскость (см. рис. 61)?

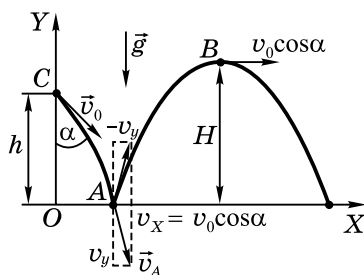


Рис. 61

Решение

Падение шарика с высоты h происходит с постоянным ускорением \vec{g} . Движение шарика по параболе раскладываем на два независимых прямолинейных движения: по горизонтали (ось OX) движение равномерное ($a_x=0$) и по вертикали (ось OY) — равноускоренное ($a_y=-g=\text{const}$).

Скорость движения по горизонтали $v_x(t)=\text{const}$. При абсолютно упругом ударе в точке A скорость по горизонтали не изменяется ни по величине, ни по направлению, а скорость движения по вертикали сохраняется по модулю, но изменяет знак. В итоге после удара в точке A шарик отскакивает с такой же по модулю скоростью v_A . Потери механической энергии шарика не происходит. Его дальнейшее движение — движение по параболе с сохранением проекции скорости на ось X . Поэтому в точке B — точке наивысшего подъема — полная скорость $v_B=v_x=v_0 \cos \alpha$.

В точке C — начальной точке движения — полная механическая энергия $W_C=mgh+mv_0^2/2$. В точке B $W_B=mgH+m(v_0 \cos \alpha)^2/2$, где H — наибольшая высота подъема. По закону сохранения механической энергии

$$W_C = W_B \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = h + \frac{v_0^2}{2g} (1 - \cos^2 \alpha) = h + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = h + \frac{v_0^2}{4g}.$$

11. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность (см. рис. 62).

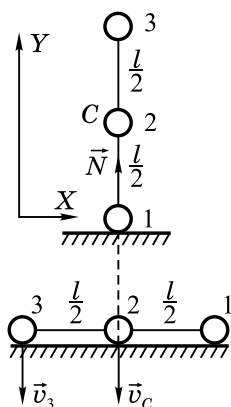


Рис. 62

Решение

Найдем положение центра масс системы. Вводим ось OY , координаты шариков $y_1=0$, $y_2=l/2$, $y_3=l$. Координата центра масс $y_C = (my_x + my_2 + my_3) / (3m) = l/2$, т. е. центр масс этой системы находится посередине стержня. Внешние силы, приложенные к системе: сила тяжести $3m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} — направлены в любой момент времени вертикально. По этой причине центр масс системы движется только по вертикали, по вертикали направлена и скорость \vec{v}_C центра масс в момент падения.

Тогда $v_{Cx}=0$, где v_{Cx} — проекция скорости \vec{v}_C на горизонталь. С другой стороны, $v_{Cx}=(mv_{3x}+mv_{2x}+mv_{1x})/(3m)$, где v_{1x} , v_{2x} , v_{3x} , — проекции скоростей шариков на ось X , причем $v_{2x}=v_{Cx}=0$. Тогда $0=(v_{3x}+v_{1x})/3 \Rightarrow v_{3x}=-v_{1x}$. Так как длина стержня неизменна, последнее равенство возможно лишь при $v_{3x}=-v_{1x}=0$. Следовательно, в момент падения скорости всех шариков направлены вертикально вниз, причем $v_{1y}=v_1=0$, $v_{3y}=-v_3$, $v_{2y}=v_{Cy}=-v_C$. Так как $v_{2y}=(mv_{1y}+mv_{2y}+mv_{3y})/(3m)$, то $-v_C=(-v_3-v_C)/3 \Rightarrow v_3=2v_C$.

Начальная механическая энергия системы есть потенциальная энергия центра масс системы $W_1=3mgl/2$. Механическая энергия системы в момент падения есть сумма кинетических энергий второго и третьего шариков $W_2=mv_3^2/2+mv_2^2/2=m(2v_C)^2/2+mv_C^2/2=5mv_C^2/2$.

По закону сохранения механической энергии

$$W_1=W_2 \Rightarrow 3mgl/2=5mv_C^2/2 \Rightarrow v_C=\sqrt{3gl/5}.$$

Искомая скорость верхнего шарика $v_3=2v_C=2\sqrt{3gl/5}$.

12. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массой m_1 с углублением полусферической формы радиусом R . Из точки A без трения соскальзывает маленькая шайба массой m_2 . Найти максимальную скорость бруска при его последующем движении (см. рис. 63).

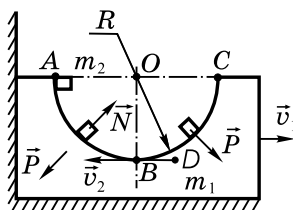


Рис. 63

Решение

При движении по дуге AB на шайбу со стороны бруска действует сила реакции \vec{N} ; по третьему закону Ньютона шайба действует на брусок с такой же по модулю силой \vec{P} , которая прижимает брусок к стенке, и он остается неподвижным. После прохождения шайбой точки B на участке BC сила \vec{P} имеет ненулевую проекцию на горизонтальное направление. В результате у бруска появляется ускорение, направленное от стенки, и после первого прохождения шайбой точки B брусок отрывается от стенки. При этом движение бруска является ускоренным (но не равноускоренным), и такая ситуация сохраняется до тех пор, пока шайба, спускаясь по дуге BC , второй раз не пройдет точку B . После этого движение бруска становится замедленным. Таким образом, максимум скорости бруска соответствует второму прохождению шайбой через точку B . Нулевое значение потенциальной энергии выбираем на горизонтальном уровне BD . В начале движения в точке A шайба обладает механической энергией $W_A = m_2 g R$. При первом прохождении шайбы через точку B механическая энергия шайбы $W_B = m_2 v_0^2 / 2$, где v_0 — скорость шайбы в этот момент. Так как трения нет, а брусок еще неподвижен, то механическая энергия шайбы сохраняется $W_A = W_B \Rightarrow m_2 g R = m_2 v_0^2 / 2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$. Рассмотрим теперь систему движущихся тел шайба-брусок. Начальная механическая энергия системы $W_1 = m_2 v_0^2 / 2$, а проекция импульса на горизонтальное направление X $P_{1x} = m_2 v_0$. Когда шайба второй раз проходит точку B , механическая энергия системы $W_2 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2$, а ее импульс $P_{2x} = -m_2 v_2 + m_1 v_1$, где v_2 и v_1 — скорости шайбы и бруска. После отрыва бруска от стенки в горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, поэтому проекция импульса системы на горизонтальное направление сохраняется. Из-за отсутствия трения сохраняется и механическая энергия системы:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_{1x} = P_{2x} \\ W_1 = W_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m_2 v_0 = -m_2 v_2 + m_1 v_1 \\ \frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} m_2 (v_0 + v_2) = m_1 v_1 \\ m_2 (v_0 - v_2)(v_0 + v_2) = m_1 v_1^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_0 - v_2 = v_1 \\ m_2 (v_0 + v_2) = m_1 v_1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_2 (v_0 + v_2) = m_1 (v_0 - v_2) &\Rightarrow v_2 = v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 = v_0 - v_1 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 \sqrt{2gR}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Это и есть максимальная скорость бруска.

РАЗДЕЛ 4

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

1. Криволинейное движение материальной точки

Материальная точка может двигаться не только по прямолинейной траектории, но и по криволинейной. Например, в разделе 1 рассматривалось движение тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести Земли. Было показано, что движение происходит по криволинейной траектории — параболе. Любое криволинейное движение обладает следующими свойствами:

1. Вектор мгновенной скорости в любой точке криволинейной траектории направлен по касательной.

2. Материальная точка при движении по криволинейной траектории обладает ускорением. Это связано с тем, что направление скорости изменяется. При криволинейном движении ускорение не равно нулю даже в случае, когда модуль скорости — постоянная величина.

3. В каждой точке криволинейной траектории движение происходит по дуге окружности, причем радиус окружности меняется от точки к точке. На рис. 64 изображена криволинейная траектория, по которой движется материальная точка. В точках A , B , C , D движение происходит по дугам окружностей, радиусы которых r_1 , r_2 , r_3 , r_4 соответственно.

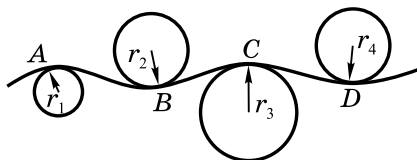


Рис. 64

2. Кинематика равномерного движения по окружности

Наиболее простым криволинейным движением является **равномерное движение по окружности**. При равномерном движении по окружности точка за любые равные промежутки времени проходит равные дуги, т.е. модуль скорости v является постоянной величиной. При движении по окружности скорость \vec{v} называют **линейной скоростью**.

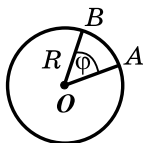


Рис. 65

Положение материальной точки на окружности определяется углом φ между подвижным радиусом $R=OB$, проведенным к точке, и неподвижным радиусом OA (см. рис. 65). Скорость изменения угла поворота радиуса OB определяется **угловой скоростью**:

$$\omega = \varphi / t, \quad (4.1)$$

где t — время поворота радиуса OB на угол φ , при равномерном движении по окружности $\omega = \text{const}$.

Время, за которое совершается один полный оборот, называется **периодом обращения** T . За один период T угол поворота радиуса $\varphi = 2\pi$, поэтому угловая скорость

$$\omega = 2\pi / T. \quad (4.2)$$

За один период T точка проходит путь, равный длине окружности, поэтому модуль линейной скорости $v = S / t = 2\pi R / T = (2\pi / T)R$, или

$$v = \omega R. \quad (4.3)$$

Частота обращения (вращения) ν — это число оборотов по окружности в единицу времени:

$$v = 1 / T = \omega / 2\pi. \quad (4.4)$$

Как и любое криволинейное движение, равномерное движение по окружности происходит с ускорением, которое направлено по радиусу к центру окружности. Это ускорение называют **нормальным, или центростремительным**; его модуль можно вычислить по одной из формул:

$$a_n = v\omega = \omega^2 R = v^2 / R = (2\pi / T)^2 R = (2\pi v)^2 R. \quad (4.5)$$

3. Неравномерное движение по окружности

В общем случае при движении точки по окружности ее скорость может изменяться не только по направлению, но и по модулю. В этом случае говорят о **неравномерном движении по окружности**. Материальная точка, совершающая неравномерное движение по окружности, помимо центростремительного ускорения, обладает ускорением \vec{a}_τ , направленным по касательной к окружности. Оно называется **касательным, или тангенциальным ускорением**. Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по модулю. На рис. 66 показаны центростремительное и тангенциальное ускорения в произвольной точке окружности.

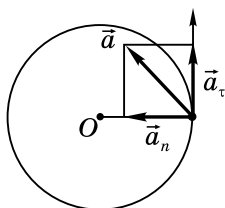


Рис. 66

При неравномерном движении по окружности полное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (4.6)$$

Так как $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, то по теореме Пифагора модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (4.7)$$

Как уже отмечалось, движение по произвольной криволинейной траектории можно рассматривать как движение по дугам окружностей различного радиуса. Отсюда следует, что в любой точке криволинейной траектории материальная точка обладает центростремительным и тангенциальным ускорениями.

Важным частным случаем криволинейного движения является качение обруча радиусом R , ось которого перемещается с постоянной скоростью \vec{v} (см. рис. 67).

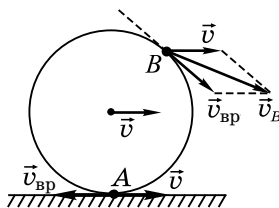


Рис. 67

При этом каждая точка обруча участвует в двух движениях: равномерном прямолинейном со скоростью \vec{v} и вращательном относительно оси обруча со скоростью $\vec{v}_{\text{вп}}$. Траекторией точек обруча будет являться не окружность, а кривая, которая называется циклоидой. Скорость произвольной точки B $\vec{v}_B = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вп}}$, причем она направлена не по касательной к окружности, а по касательной к циклоиде.

Если обруч катится **без проскальзывания**, то точка A должна быть в покое относительно поверхности соприкосновения. Как и для любой другой точки, $\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вп}}$. Из рис. 67 видно, что модуль $v_A = v - v_{\text{вп}} = 0 \Rightarrow$

$$v_{\text{вп}} = v. \quad (4.8)$$

При движении без проскальзывания скорость вращательного движения равна скорости поступательного движения обруча.

Для нахождения модуля полного ускорения каждой точки обруча можно поступить следующим образом. Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с осью обруча и движущуюся со скоростью \vec{v} . В этой системе отсчета каждая точка обруча участвует только во вращательном движении вокруг оси обруча со скоростью $\vec{v}_{\text{вр}}$. Значит, у каждой точки будет только центростремительное ускорение $a_n = v_{\text{вр}}^2 / R = v^2 / R$. Во всех инерциальных системах отсчета полное ускорение точки одинаково (см. главу 1). Следовательно, и в системе отсчета, связанной с Землей, $a = a_n = v^2 / R$.

5. Примеры решения заданий с кратким или развернутым ответом

1. На горизонтальном диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, находится тело массой m . Расстояние тела от оси вращения равно R . Коэффициент трения тела о диск μ . Диск начинают медленно раскручивать вокруг горизонтальной оси. Построить график зависимости силы трения, действующей на тело, от угловой скорости вращения ω .

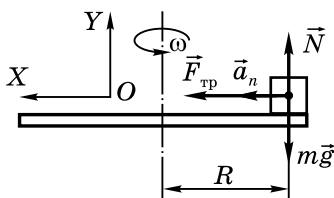


Рис. 68

Решение

На тело действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны диска \vec{N} , сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$

(см. рис. 68). Пока тело покоится относительно диска, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя. В системе отсчета, связанной с Землей, тело движется по окружности радиусом R и, следовательно, обладает центростремительным ускорением \vec{a}_n , направленным по радиусу к центру окружности. Введем систему координат XOY , ось Y направлена вертикально, а ось X — по радиусу окружности. Запишем второй закон Ньютона для проекций на оси Y и X :

$$\text{по оси } Y \left\{ \begin{aligned} N - mg &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\text{по оси } X \left\{ \begin{aligned} F_{\text{тр}} &= ma_n, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где $a_n = \omega^2 / R$.

Как видно, в данном случае центростремительное ускорение сообщается телу силой трения покоя. Из уравнения (2) находим

$$F_{\text{тр}} = m\omega^2 R. \quad (3)$$

Отсюда видно, что с ростом угловой скорости вращения ω должна возрастать сила трения покоя, сообщая телу центростремительное ускорение, необходимое для движения по окружности радиусом R . Известно, что сила трения покоя — ограниченная величина, поэтому при определенных значениях угловой скорости тело не сможет удерживаться на окружности радиусом R и начнет скользить по диску. При этом на него будет действовать сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg. \quad (4)$$

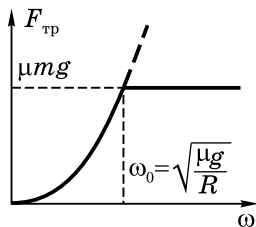


Рис. 69

Формула (3) — это квадратичная зависимость $F_{\text{тр}}$ от ω , график этой зависимости — парабола (см. рис. 69). Формула (4) представляет собой зависимость вида $y=b=\text{const}$, поэтому ее график — прямая.

Угловая скорость ω_0 , при которой начинается скольжение, может быть найдена из условия, что сила трения покоя достигла своего максимального значения, равного силе трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \Rightarrow m\omega_0^2 R = \mu mg \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\mu/R}.$$

2. С самолета, летящего горизонтально со скоростью $v_0=720$ км/ч, отделяется тело. Найти центростремительное и тангенциальное ускорения тела, а также радиус кривизны траектории движения тела в точке, которой оно достигнет через 5 с после начала движения; сопротивлением воздуха можно пренебречь (см. рис. 70).

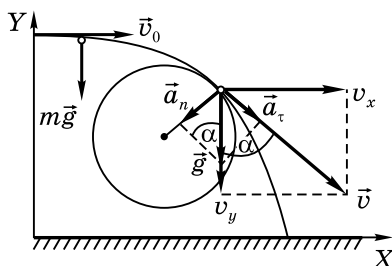


Рис. 70

Решение

После отделения от самолета начальная скорость тела равна v_0 . Движение происходит под действием только одной силы — силы тяжести $m\vec{g}$, которая сообщает телу полное ускорение \vec{g} . Траектория движения тела — парабола. Проекции полного ускорения \vec{g} на горизонтальную и вертикальную оси X и Y : $a_x=0$ и $a_y=-g$, поэтому скорость по оси X $v_x(t)=v_0$, а скорость по оси Y

$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = -gt$. Через $t=5$ с полная скорость тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$. Разложим вектор полного ускорения тела \vec{g} на направление, перпендикулярное скорости \vec{v} , и направление, совпадающее с направлением скорости. Получим соответственно центростремительное \vec{a}_n и тангенциальное \vec{a}_τ ускорения, причем $\vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{g}$ и $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$. Тогда $a_n = g \sin \alpha$, где $\sin \alpha = v_x / v$. Итак,

$$a_n = g(v_x/v) = g\left(v_0/\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\right) = 9,5 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = 2,4 \text{ м/с}^2$.

Так как центростремительное ускорение $a_n = v^2 / R$, то

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 + (gt)^2}{g\left(v_0/\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\right)} = \frac{(v_0^2 + (gt)^2)^{3/2}}{gv_0} = 4455 \text{ м}.$$

3. Найти высоту орбиты спутника, висящего над одной точкой экватора планеты. Продолжительность суток на планете T , ее масса M , а радиус R .

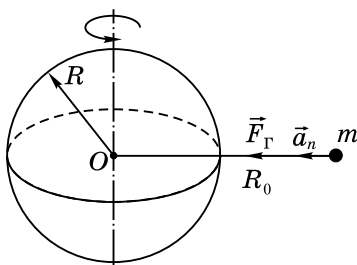


Рис. 71

Решение

Радиус орбиты спутника R_0 . Для того чтобы спутник все время находился над одной точкой экватора, его период обращения по орбите вокруг планеты должен равняться времени оборота планеты вокруг своей оси, т. е.

Т. Центростремительное ускорение a_n спутнику на орбите сообщает гравитационная сила $F_r = GmM/R_0^2$, где m — масса спутника, R_0 — расстояние от центра планеты O (см. рис. 71). По второму закону Ньютона

$$F_r = ma_n \Rightarrow F_r = G \frac{mM}{R_0^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R_0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{GMT^2 / (4\pi^2)}.$$

Высота спутника над поверхностью планеты

$$h = R_0 - R = \sqrt[3]{GMT^2 / (4\pi^2)} - R.$$

4. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты равна ρ . Определить, каков период обращения этой планеты вокруг собственной оси (см. рис. 72).

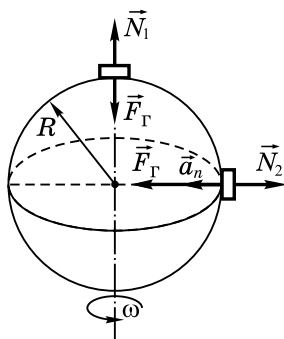


Рис. 72

Решение

На полюсе на тело массой m действуют силы: гравитационная сила $F_r = GMm/R^2$ (M — масса планеты, R — ее радиус), \vec{N}_1 — сила реакции, равная по модулю весу на полюсе. Так как тело покоится то $F_r - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F_r$. На экваторе гравитационная сила и сила реакции опоры N_2 сообщают телу центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 R$, где T — продолжительность суток на планете. По второму закону Ньютона

$$F_r - N_2 = ma_n \Rightarrow N_2 = F_r - ma_n.$$

Модуль N_2 равен весу на экваторе. По условию

$$N_1 = 2N_2 \Rightarrow F_r = 2(F_r - ma_n) \Rightarrow F_r = 2ma_n \Rightarrow \\ \Rightarrow G \frac{Mm}{R^2} = 2m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \Rightarrow G \frac{M}{R^3} = \frac{8\pi^2}{T^2}.$$

Учитывая, что $M = \rho V$, где $V = (4/3)\pi R^3$ — объем планеты, после подстановки получаем $T = \sqrt{6\pi/(\rho G)}$.

5. Две звезды движутся вокруг общего центра масс с постоянными по модулю скоростями v_1 и v_2 и периодом T . Найти массу звезд и расстояние между ними (см. рис. 73).

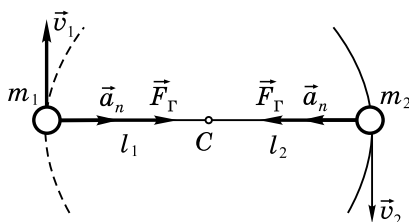


Рис. 73

Решение

Положение центра масс двух тел массой m_1 и m_2 , расположенных на расстоянии L , можно определить, используя формулу (3.3). Тогда $l_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$, а $l_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$. Когда

речь идет о вращении планеты вокруг звезды, то масса звезды много больше массы планеты, $m_1 \gg m_2 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$.

Поэтому $l_1 = \frac{(m_2/m_1)L}{1 + (m_2/m_1)} \rightarrow 0$, т. е. центр масс такой системы

совпадает со звездой, и вращение планеты происходит вокруг звезды. В нашей задаче массы звезд сравнимы, поэтому вращение происходит вокруг точки C , удаленной от звезд на расстояния l_1 и l_2 . Итак, звезда массой m_1 движется по окружности радиусом l_1 с цен-

тром в точке C . За период T звезда совершает полный оборот, проходя путь, равный длине окружности $2\pi l_1$. Модуль ее скорости $v_1 = 2\pi l_1 / T \Rightarrow l_1 = v_1 T / (2\pi)$. Аналогично находим радиус окружности, по которой движется звезда массой m_2 : $l_2 = v_2 T / (2\pi)$. Расстояние между звездами $L = l_1 + l_2 = (T / 2\pi)(v_1 + v_2)$.

На звезду массой m_1 действует гравитационная сила $F_r = G \frac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $a_n = v_1^2 / l_1$ (см. рис. 73). По второму закону Ньютона

$$F_r = m_1 a_n \Rightarrow G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1 \frac{v_1^2}{l_1} \Rightarrow m_2 = v_1^2 \frac{L^2}{l_1 G} = \frac{v_1 T}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2.$$

На звезду массой m_2 действует такая же по модулю гравитационная сила $G \frac{m_1 m_2}{L^2}$, которая сообщает ей центростремительное ускорение $\frac{v_2^2}{l_2}$. Получаем уравнение

$$G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_2 \frac{v_2^2}{l_2} \Rightarrow m_1 = v_2^2 \frac{L^2}{l_2 G} = \frac{v_2 T}{2\pi G} (v_1 + v_2)^2.$$

6. Груз массой m , привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти разность сил натяжения нити в нижней и верхней точках траектории (см. рис. 74).

Решение

В нижней точке окружности (точка A) к грузу приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T}_A , которые сообщают ему центростремительное ускорение $a_n = v_A^2 / R$, где v_A — скорость груза в точке A ; R — длина нити. По второму закону Ньютона

$$T_A - mg = m(v_A^2 / R) \Rightarrow T_A = mg + m(v_A^2 / R).$$

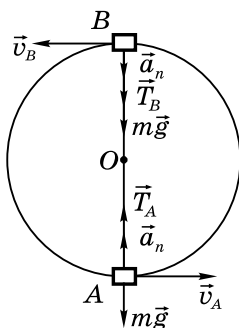


Рис. 74

В точке B к грузу приложены силы: сила натяжения нити \vec{T}_B и сила тяжести $m\vec{g}$, сообщающие грузу центростремительное ускорение $a_n = v_B^2/R$. По второму закону Ньютона

$$T_B + mg = m(v_B^2/R) \Rightarrow T_B = m(v_B^2/R) - mg.$$

Поэтому

$$T_A - T_B = 2mg + m \frac{v_A^2}{R} - m \frac{v_B^2}{R} = 2mg + \frac{m}{R}(v_A^2 - v_B^2). \quad (1)$$

В точке A механическая энергия груза равна его кинетической энергии: $W_A = m(v_A^2/2)$. В точке B механическая энергия есть сумма потенциальной и кинетической энергий: $W_B = mg \cdot 2R + m(v_B^2/2)$. В процессе движения на груз действуют консервативная сила $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Ее модуль изменяется от точки к точке, но на любом бесконечно малом перемещении вектор силы натяжения перпендикулярен вектору перемещения. Работа силы натяжения нити при перемещении по любой дуге окружности равна нулю. Следовательно, механическая энергия груза сохраняется:

$$\begin{aligned} W_A &= W_B \Rightarrow m \frac{v_A^2}{R} = 2mgR + m \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \frac{v_A^2}{R} - m \frac{v_B^2}{R} = 2mgR \Leftrightarrow v_A^2 - v_B^2 = 4gR. \end{aligned}$$

Подставив последнее выражение в (1), найдем

$$T_A - T_B = 2mg + \frac{m}{R}(v_A^2 - v_B^2) = 2mg + \frac{m}{R}(4gR) = 6mg.$$

7. Какой минимальной скоростью должен обладать в нижней точке шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l , чтобы он мог совершить полный оборот в вертикальной плоскости?

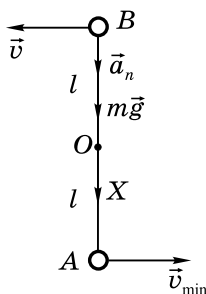


Рис. 75

Решение

Шарик должен достигнуть точки B , имея при этом скорость v , достаточную для движения по окружности радиуса l (см. рис. 75). Механическая энергия шарика в точке A $W_A = mv_{\min}^2/2$, в точке B $W_B = mv^2/2 + mg \cdot 2l$. По закону сохранения механической энергии

$$W_A = W_B \Rightarrow mv_{\min}^2/2 = mv^2/2 + mg \cdot 2l. \quad (1)$$

В самом общем случае в точке B на шарик действуют сила тяжести и сила натяжения нити T . По второму закону Ньютона для проекции на ось X находим, что

$$T + mg = ma_n = m(v^2/l). \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что минимум скорости в точке A соответствует минимуму скорости v в точке B . Из уравнения (2) следует, что минимум v соответствует минимуму модуля силы натяжения, который ра-

вен нулю. Уравнение (2) при этом приводится к виду $mg = mv^2/l \Rightarrow mv^2 = mgl$. Подстановка в (1) дает

$$mv_{\min}^2/2 = mgl/2 + mg \cdot 2l \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{5gl}.$$

8. На горизонтальной поверхности находится гладкая полусфера радиусом R . С верхней ее точки без начальной скорости соскальзывает тело. Определить время движения тела после отрыва от полусферы (см. рис. 76).

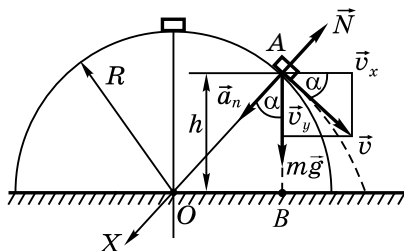


Рис. 76

Решение

Во время скольжения тела по полусфере на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} , направленная вдоль продолжения радиуса. Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение $a_n = v^2/R$, направленное к центру полусферы (v — скорость в какой-либо точке полусферы). Спроецировав силы на ось X , по второму закону Ньютона получаем

$$mg \cos \alpha - N = m(v^2/R) \Rightarrow N = mg \cos \alpha - m(v^2/R). \quad (1)$$

Так как скорость тела возрастает, то в некоторой точке A сила \vec{N} обратится в нуль, т. е. тело оторвется от поверхности полусферы.

Пусть высота, на которой происходит отрыв, равна h . Механическая энергия тела в верхней точке движения $W_1 = mgR$. Механическая энергия в точке отрыва $W_2 = mgh + mv^2/2$. Так как трения нет, то

$$W_1 = W_2 \Rightarrow mgR = mgh + mv^2/2 \Rightarrow v^2 = 2g(R-h). \quad (2)$$

В $\triangle OAB$ $OA=R$, а $AB=h$, поэтому

$$\cos \alpha = AB / OA = h / R. \quad (3)$$

Подставив значения v^2 и $\cos \alpha$ из уравнений (2) и (3) в уравнение (1), получим: $0 = mg(h/R) - m(2g(R-h)/R)$ (в точке отрыва $N=0$) $\Rightarrow 2(R-h) = h \Rightarrow h = (2/3)R$.

В момент отрыва скорость тела

$$v = \sqrt{2g(R-h)} = \sqrt{2g \frac{1}{3}R} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

После отрыва от полусферы движение происходит только под действием силы тяжести, причем скорость тела $\vec{v} = \vec{v}_0$ сначала направлена под углом α к горизонту (см. рис. 77). Значит, тело движется по параболе.

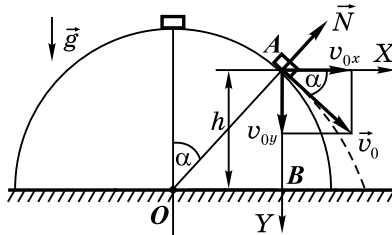


Рис. 77

Начальные координаты тела $x_0=0$, $y_0=0$. Начальные скорости $v_{0x}=v_0 \cos \alpha$, $v_{0y}=v_0 \sin \alpha$. Закон движения по оси Y $y(t)=y_0+v_{0y}t+a_y t^2/2=v_0 \sin \alpha \cdot t + gt^2/2$.

В момент падения $y(t_{\pi})=h \Rightarrow v_0 \sin \alpha \cdot t_{\pi} + gt_{\pi}^2/2=h$, где t_{π} — искомое время. Получаем квадратное уравнение $gt_{\pi}^2 + 2v_0 \sin \alpha \cdot t_{\pi} - 2h = 0$, корни которого

$$t_{\pi} = \left(-v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh} \right) / g.$$

Берем положительный корень

$$t_{\pi} = \frac{-v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}}{g} =$$

$$= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin \alpha)^2}} - 1 \right) \approx 0,7 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

9. Тележка массой m совершает мертвую петлю, скатываясь с минимально необходимой для этого высоты (см. рис. 78). С какой силой тележка давит на рельсы в точке A , радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью? Трением пренебречь.

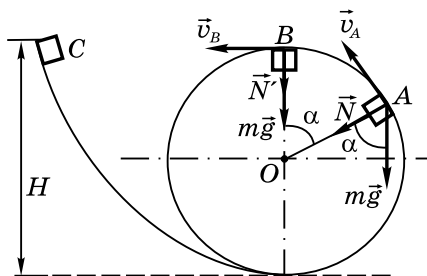


Рис. 78

Решение

Прежде всего выясним, какова минимальная высота, необходимая для совершения тележкой мертвой петли. Для этого должны выполняться следующие условия:

1. Тележка должна оказаться в точке B . Механическая энергия в начальной точке движения $W_C = mgH$. В точке B механическая энергия $W_B = mg \cdot 2R + mv_B^2/2$. Так как трения нет, то

$$W_C = W_B \text{ или } mgH = mg \cdot 2R + mv_B^2/2. \quad (1)$$

2. В точке B тележка должна обладать центростремительным ускорением, необходимым для движения по окружности радиусом R . В точке B на тележку действу-

ют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N}' , которые сообщают тележке центростремительное ускорение a_n . По второму закону Ньютона

$$mg + N' = ma_n = m(v_B^2/R). \quad (2)$$

3. Как видно из уравнений (1) и (2), минимум высоты соответствует $N'=0$. Из уравнения (2) $mv_B^2 = mgR$. После подстановки в (1) получим

$$mgH = 2mgR + mgR/2 \Rightarrow H = 5R/2.$$

Из рис. 78 следует, что точка A находится на высоте

$$R + R \cos \alpha = R(1 + \cos \alpha).$$

Механическая энергия тележки в точке A :

$$W_A = mgR(1 + \cos \alpha) + mv_A^2/2,$$

а в точке C : $W_C = mgH = mg(5/2)R$. Так как $W_C = W_A$, то

$$\begin{aligned} mg(5/2)R &= mgR(1 + \cos \alpha) + mv_A^2/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_A^2 = gR(3 - 2\cos \alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

В точке A на тележку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} , направленная по радиусу к центру. Эти силы сообщают тележке центростремительное ускорение a_n . Спроецировав силы на ось, направленную по радиусу к центру, получаем

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha + N &= ma_n = m(v_A^2/R) \Rightarrow N = m \frac{v_A^2}{R} - mg \cos \alpha = \\ &= \frac{mgR(3 - 2\cos \alpha)}{R} - mg \cos \alpha = 3mg(1 - \cos \alpha) = 6mg \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой тележка давит на рельсы.

10. Спуск с горы представляет собой дугу AB окружности радиусом $R=10$ м с плавным выездом на горизонтальную поверхность BC . Поверхность горы гладкая,

а горизонтальная поверхность шероховатая с коэффициентом трения $\mu=0,15$. На каком расстоянии от конца горы останутся санки, если в точке A их полное ускорение равно по модулю g ? Радиус, проведенный в точку A , образует с вертикалью угол $\alpha=60^\circ$ (см. рис. 79).

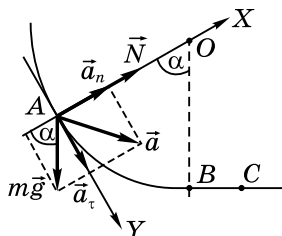


Рис. 79

Решение

В точке A на санки действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . В направлении X (по радиусу к центру) эти силы сообщают санкам центростремительное ускорение \vec{a}_n ($a_n = v_A^2/R$). В направлении Y (по касательной к окружности) эти силы сообщают санкам тангенциальное ускорение \vec{a}_τ , причем $mg\sin\alpha = ma_\tau \Rightarrow a_\tau = g\sin\alpha$.

Так как модуль полного ускорения $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$, то

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2 \alpha} = g\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = g\cos\alpha.$$

С другой стороны, $a_n = v_A^2/R \Rightarrow v_A^2/R = g\cos\alpha$; находим квадрат скорости в точке A : $v_A^2 = Rg\cos\alpha$.

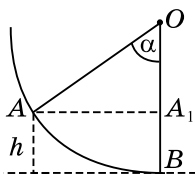


Рис. 80

В точке А механическая энергия равна сумме кинетической $W_{\text{кА}} = mv_A^2/2$ и потенциальной $W_{\text{рА}} = mgH$ (см. рис. 80). Определяем $h = A_1B = OB - OA_1 = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$.

Итак, механическая энергия в точке А:

$$\begin{aligned} W_A &= mv_A^2/2 + mgR(1 - \cos \alpha) = \\ &= (mgR \cos \alpha)/2 + mgR(1 - \cos \alpha) = \\ &= mgR((\cos \alpha)/2 + 1 - \cos \alpha) = mgR(1 - (\cos \alpha)/2). \end{aligned}$$

В момент остановки конечная механическая энергия $W=0$. Изменение механической энергии равно работе силы трения на горизонтальном участке BC: $\Delta W = A_{\text{тр}}$, где $A_{\text{тр}} = -\mu mgx$ (x — расстояние, пройденное санками). Получаем уравнение

$$\begin{aligned} -mgR(1 - (\cos \alpha)/2) &= -\mu mgx \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (R/\mu)(1 - (\cos \alpha)/2) = 3R/(4\mu) = 50 \text{ м.} \end{aligned}$$

11. Резиновый жгут, длина которого l и масса m , имеет коэффициент жесткости k . Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус вращающегося кольца.

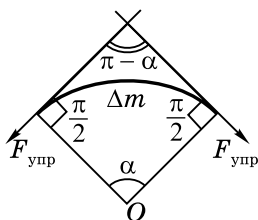


Рис. 81

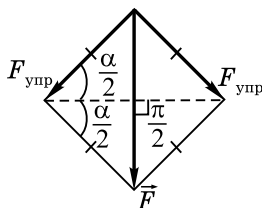


Рис. 82

Решение

Увеличение длины кольца $\Delta x = 2\pi R - l$, где R — радиус вращающегося кольца. Модуль силы упругости, возникающей в кольце, $F_{\text{упр}} = k\Delta x = k(2\pi R - l)$. Выберем элемент кольца, соответствующий малому центральному углу α и вращающийся с угловой скоростью ω (см. рис. 81).

Центральному углу в 1 радиан соответствует масса жгута, равная $m / (2\pi)$, поэтому масса выделенного элемента $\Delta m = m\alpha / (2\pi)$. Центробежное ускорение этому элементу сообщают силы упругости, приложенные со стороны других частей кольца. Найдём равнодействующую этих сил \vec{F} , проводя векторное сложение по правилу параллелограмма (см. рис. 82). Построенный параллелограмм — ромб, поэтому $(1/2)F = F_{\text{упр}} \sin(\alpha/2) \Rightarrow F = 2F_{\text{упр}} \sin(\alpha/2)$.

При малых углах, выраженных в радианах, выполняется равенство $\sin \alpha = \alpha$. Поэтому $F = 2F_{\text{упр}}(\alpha/2) = F_{\text{упр}}\alpha$. По второму закону Ньютона $F = \Delta m a_n$, где центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$. После подстановки имеем

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}}\alpha &= \Delta m \cdot \omega^2 R \Rightarrow k(2\pi R - l)\alpha = \frac{m}{2\pi}\alpha\omega^2 R \Rightarrow \\ &\Rightarrow R = \frac{2\pi kl}{4\pi^2 k - m\omega^2}. \end{aligned}$$

РАЗДЕЛ 5

СТАТИКА. ГИДРОСТАТИКА

1. Основные понятия статики

Статика — это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тел. В статике, изучаемой в школе, рассматривается система плоских сил, т. е. таких сил, векторы которых посредством параллельного переноса могут быть перемещены в одну плоскость. Во многих задачах статики, в отличие от задач динамики, важно знать точки приложения сил.

Плечо силы есть кратчайшее расстояние от оси вращения (точки вращения) до линии действия силы. Чтобы найти плечо силы, надо из точки вращения опустить перпендикуляр на линию действия силы, а затем измерить его длину (см. рис. 83).

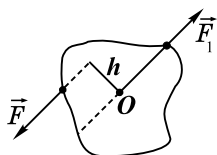


Рис. 83

Момент силы относительно некоторой точки вращения — это произведение модуля силы на ее плечо h :

$$M = \pm Fh. \quad (5.1)$$

Момент силы считается положительным, если сила вращает тело по часовой стрелке, и отрицательным, если сила вращает тело против часовой стрелки. Момент ненулевой силы равен нулю, если ее плечо $h=0$. Как видно из рис. 83, это будет в том случае, когда прямая, вдоль

которой направлен вектор силы \vec{F}_1 , проходит через точку вращения.

2. Условия равновесия тел

Если тело находится в равновесии, то выполняется два условия равновесия:

1. Векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (5.2)$$

Условие (5.2) равносильно тому, что сумма проекций всех сил на любое направление равна нулю. Если выбрать произвольную ось X , то получим

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} = 0, \quad (5.3)$$

где F_{ix} — проекции сил, приложенных к телу, на произвольную ось X .

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, относительно любой точки равна нулю:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = 0. \quad (5.4)$$

Это условие равносильно тому, что сумма моментов сил, вращающих тело по часовой стрелке, равна модулю моментов сил, вращающих тело против часовой стрелки.

Рассмотрим важный частный случай, когда тело находится в равновесии под действием трех попарно непараллельных сил. Тогда можно утверждать, что прямые, вдоль которых направлены векторы этих сил, пересекаются в одной точке. Действительно, две непараллельные прямые обязательно пересекутся в какой-либо точке A . Если третья прямая не проходит через эту точку, то третья сила будет иметь ненулевой момент относительно точки A , в то время как моменты двух других сил равны нулю. Значит, суммарный момент сил относительно точки A будет отличен от нуля, и, следовательно, тело не будет находиться в равновесии. Это противоречит усло-

вию задачи. Разумеется, аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда к телу приложено более трех попарно непараллельных сил.

3. Центр масс. Центр тяжести тела

Во многих задачах статики требуется определить положение центра масс или центра тяжести тела.

Центром масс тела называют точку пересечения прямых, вдоль которых должны быть направлены силы, вызывающие поступательное движение тела. (Другое определение центра масс, равносильное рассмотренному, изучалось в разделе 3.)

Частным случаем поступательного движения является движение под действием силы тяжести (при условии, что телу не было предварительно сообщено вращательное движение). Так как сила тяжести действует на все точки тела, а тело при этом движется поступательно, то можно утверждать, что равнодействующая всех этих сил при любом положении тела проходит через центр масс. Центр масс тела, когда оно находится в поле тяжести, называют **центром тяжести тела**.

Центр тяжести однородного тела совпадает с его геометрическим центром, например центр тяжести однородного стержня находится в середине стержня, центр тяжести однородного шара — в центре шара, центр тяжести однородного плоского параллелограмма (и, в частности, прямоугольника) — в точке пересечения его диагоналей.

4. Свойства жидкостей

В этом разделе речь пойдет о жидкостях и о тех специфических законах, которым подчиняется жидкость, находящаяся в равновесии. Этот раздел механики жидкостей называют **гидростатикой**. Жидкости, в отличие

от твердых тел, легко изменяют свою форму и принимают форму того сосуда, в котором они находятся. Это связано с **текучестью жидкостей**: способностью слоев жидкостей перемещаться друг относительно друга без какого-либо сопротивления. Между слоями жидкости отсутствует трение (в том числе и трение покоя). Другим важным свойством жидкостей является **очень малая сжимаемость**. Сжатию жидкостей препятствуют возникающие в них силы упругости. В состоянии равновесия из-за отсутствия сил трения покоя сила реакции жидкости всегда направлена перпендикулярно поверхности раздела.

Важную роль в гидростатике играет давление

$$p = F / S, \quad (5.5)$$

где F — модуль силы, а S — площадь, перпендикулярно которой эта сила действует.

Перечислим основные законы, которым подчиняется жидкость в равновесии.

Закон Паскаля: жидкости передают оказываемое на них давление одинаково по всем направлениям. Закон Паскаля справедлив и для газов, содержащихся в замкнутых сосудах.

Распределение давления жидкости в поле тяжести. Давление столбика жидкости высотой h

$$p = \rho gh. \quad (5.6)$$

Это давление называют гидростатическим.

Закон сообщающихся сосудов: свободные поверхности однородной покоящейся жидкости в сообщающихся сосудах произвольной формы находятся на одном уровне.

На рис. 84 изображены сообщающиеся сосуды. Свободные поверхности — это те поверхности жидкости, которые контактируют с атмосферой. Если бы поверхность жидкости в одном из сосудов находилась на другом уровне, то у основания этого сосуда гидростатиче-

ское давление отличалось бы от давления у оснований других сосудов. Поэтому жидкость не смогла бы находиться в равновесии. В законе сообщающихся сосудов имеется в виду, что внешнее давление на свободные поверхности во всех сосудах одинаково. В противном случае поверхности жидкости будут находиться на разных уровнях.

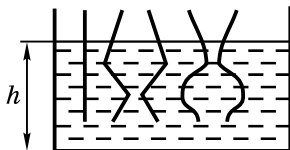


Рис. 84

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Направлена эта сила вертикально вверх и приложена в центре масс погруженной части.

Причиной возникновения выталкивающей (архимедовой) силы является разность сил давлений, действующих на нижнюю и верхнюю грани. Обусловлена эта разность зависимостью гидростатического давления от глубины погружения.

Закон Архимеда позволяет сформулировать **условия плавания тел**, сравнивая выталкивающую силу $\vec{F}_{\text{Ар}}$, действующую на погруженное тело, с силой тяжести $m\vec{g}$ этого тела. Если $F_{\text{Ар}} < mg$, тело тонет; если $F_{\text{Ар}} = mg$, тело плавает внутри жидкости; если $F_{\text{Ар}} > mg$, тело всплывает.

Более удобным критерием плавания **сплошных тел** является сравнение их плотности ρ с плотностью жидкости $\rho_{\text{ж}}$. Если $\rho > \rho_{\text{ж}}$, тело тонет; если $\rho = \rho_{\text{ж}}$, тело плавает внутри жидкости; если $\rho < \rho_{\text{ж}}$, тело всплывает. Для тел, имеющих полости, можно ввести среднюю плотность $\rho_{\text{ср}}$ и далее сравнивать ее с плотностью $\rho_{\text{ж}}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Груз массой m , подвешенный на проволоке, отклоняется на угол α от вертикального положения силой, действующей в горизонтальном направлении. Определить эту силу и силу натяжения проволоки (см. рис. 85).

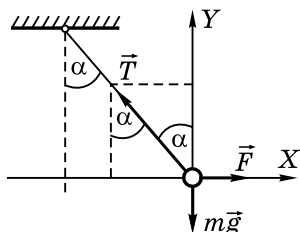


Рис. 85

Решение

К грузу приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения проволоки \vec{T} и сила \vec{F} . По условию задачи под действием этих сил груз находится в равновесии, поэтому сумма проекций этих сил на любые направления равна нулю. Удобно выбрать вертикальную и горизонтальную оси Y и X . Спроецировав силы на выбранные оси, получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{по оси } X \begin{cases} F - T \sin \alpha = 0, \\ \text{по оси } Y \begin{cases} T \cos \alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F \\ T \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = F/mg \Rightarrow F = mg \operatorname{tg} \alpha, T = mg/\cos \alpha. \end{aligned}$$

2. Ручка стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. При этом ручка давит на крышку пенала с силой $N_1 = 1,96$ Н. Когда пенал перевернули, сила давле-

ния ручки на крышку пенала возросла до $N_2 = 2,36$ Н. Какова масса ручки? (Рис. 86 и 87.)

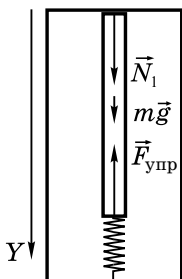


Рис. 86

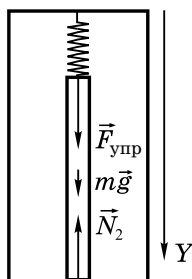


Рис. 87

Решение

Прежде всего отметим, что по третьему закону Ньютона сила давления ручки на крышку пенала равна по модулю силе давления крышки на ручку.

На рис. 86 указаны силы, действующие на ручку в первом случае. Здесь $m\vec{g}$ — сила тяжести, \vec{N}_1 — сила давления крышки на ручку, $\vec{F}_{\text{упр}}$ — сила упругости пружины. Проецируя силы на вертикальное направление Y , получаем условие равновесия ручки

$$N_1 + mg - F_{\text{упр}} = 0. \quad (1)$$

На рис. 87 показаны силы, обеспечивающие равновесие ручки во втором случае. Отметим, что длина пенала и ручки неизменны, а потому неизменна и деформация пружины. Следовательно, модуль силы упругости во втором случае таков же, как и в первом. Условия равновесия запишутся в виде

$$mg + F_{\text{упр}} - N_2 = 0. \quad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), получаем

$$2mg + N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow m = (N_2 - N_1) / 2g = 0,02 \text{ кг.}$$

3. Шар лежит в щели ABC , образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально. Найти угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает силу тяжести, действующую на шар. Трением пренебречь (см. рис. 88).

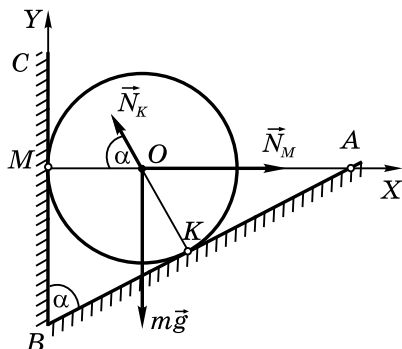


Рис. 88

Решение

В точке O (центр шара) на шар действует сила тяжести $m\vec{g}$, в точках M и K — силы реакции \vec{N}_M и \vec{N}_K , направленные по радиусам шара. Запишем первое условие равновесия на горизонтальную и вертикальную оси X и Y :

$$\begin{cases} \text{по оси } X & N_M - N_K \cos \alpha = 0, \\ \text{по оси } Y & N_K \sin \alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_M = N_K \cos \alpha, \\ mg = N_K \sin \alpha. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем, что $mg / N_M = \operatorname{tg} \alpha$. По условию задачи $mg / N_M = 1 / 2$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha = 1 / 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,6^\circ$.

4. Лестница длиной $l = 3$ м стоит, упираясь верхним концом в гладкую стену, а нижним — в пол. Лестница наклонена к полу под углом $\alpha = 60^\circ$; ее масса $m = 15$ кг. На лестнице на расстоянии $a = 1$ м от ее верхнего конца стоит человек массой $M = 60$ кг.

Определить силы реакции стен и пола, действующие на лестницу. При каких значениях коэффициента трения лестницы о пол лестница не падает (см. рис. 89)?

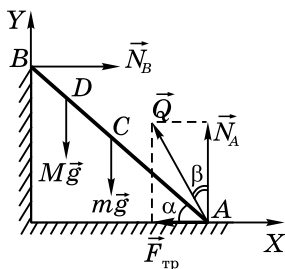


Рис. 89

Решение

К лестнице приложены силы: в середине (точка C) — сила тяжести лестницы $m\vec{g}$; в точке D приложен вес человека, равный его силе тяжести $M\vec{g}$; в точке B — сила реакции стенки \vec{N}_B ; точке A — сила реакции пола \vec{N}_A и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Пока лестница не падает, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения покоя. Запишем первое условие равновесия на осях:

$$\begin{cases} \text{по оси } X & N_B - F_{\text{тр}} = 0, \\ \text{по оси } Y & N_A - mg - Mg = 0. \end{cases}$$

Второе условие равновесия, записанное относительно точки A ,

$$N_B l \sin \alpha - Mg(l - a) \cos \alpha - mg(l/2) \cos \alpha = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} N_B = F_{\text{тр}}, \\ N_A = (M + m)g, \\ N_B \sin \alpha = gl \cos \alpha \left(M(1 - a/l) + m/2 \right). \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$N_B = \frac{(M(1-a/l) + m/2)g \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \left(M \left(1 - \frac{a}{l} \right) + \frac{m}{2} \right) g \operatorname{ctg} \alpha = F_{\text{тр}} = 275 \text{ Н.}$$

$$N_A = (m + M)g = 750 \text{ Н.}$$

Пол действует на лестницу с силой $\vec{Q} = \vec{N}_A + \vec{F}_{\text{тр}}$. По теореме Пифагора $Q = \sqrt{N_A^2 + F_{\text{тр}}^2} = \sqrt{(275)^2 + (750)^2} \approx 800 \text{ Н}$. Сила \vec{Q} образует с вертикалью угол β , причем $\operatorname{tg} \beta = F_{\text{тр}} / N_A \approx 0,37 \Rightarrow \beta \approx 20^\circ$. Лестница не падает, если сила трения покоя не достигла своего максимального значения $F_{\text{тр.ск}} = \mu N_A = \mu(m + M)g$, где μ — коэффициент трения, т. е. $F_{\text{тр}} < \mu(m + M)g$. Подставив $F_{\text{тр}}$, получим

$$\left(M \left(1 - \frac{a}{l} \right) + \frac{m}{2} \right) g \operatorname{ctg} \alpha < \mu(m + M)g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu > \frac{(M(1-a/l) + m/2) \operatorname{ctg} \alpha}{m + M}.$$

В данном случае $\frac{a}{l} = \frac{1}{3}$, поэтому

$$\mu > \frac{(2M/3 + m/2) \operatorname{ctg} \alpha}{m + M} = 0,22.$$

Лестница не будет падать при любом положении человека на ней (предельный случай $a=0$),

$$\mu > \frac{(M + m/2) \operatorname{ctg} \alpha}{m + M} = 0,54.$$

5. Контейнер в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h и длиной l стоит на опорах малых размеров. Левая опора, в отличие от правой, сделана на

роликах, которые обеспечивают пренебрежимо малое трение. Чтобы сдвинуть контейнер вправо, нужно толкать его с силой \vec{F}_1 , приложенной к середине левой стороны, а чтобы сдвинуть влево, нужно толкать с силой \vec{F}_2 , приложенной к центру правой стороны. Найти массу контейнера.

Решение

Рассмотрим первый случай. Силы, действующие на контейнер, представлены на рис. 90. Здесь \vec{N}_2 и \vec{N}_1 — силы реакции опоры, $\vec{F}_{1\text{тр}}$ — сила трения. Запишем условия равенства нулю суммы моментов сил относительно точки A:

$$F_1 h / 2 + mgl / 2 - N_1 l = 0. \quad (1)$$

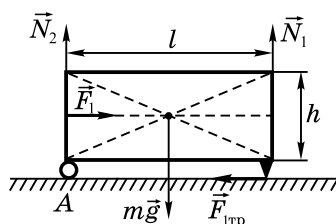


Рис. 90

Спроецировав силы на горизонтальное направление, получаем $F_1 - F_{1\text{тр}} = 0 \Rightarrow F_1 = F_{1\text{тр}}$. Учитывая, что скольжение началось,

$$F_{1\text{тр}} = \mu N_1 \Rightarrow F_{1\text{тр}} = \mu N_1 \Rightarrow N_1 = F_{1\text{тр}} / \mu.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим

$$F_1 h / 2 + mgl / 2 - F_1 l / \mu = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим второй случай (см. рис. 91). Здесь \vec{N}'_1 и \vec{N}'_2 — силы реакции опоры, $\vec{F}_{2\text{тр}}$ — сила трения. Условие моментов относительно точки A запишется в виде:

$mg/2 - F_2 h/2 - N'_1 l = 0$. Так как $F_2 = F_{2\text{тр}} = \mu N'_1$, то после подстановки получим уравнение

$$mg/2 - F_2 h/2 - F_2 l/\mu = 0. \quad (3)$$

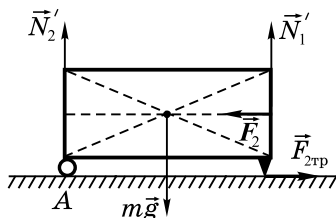


Рис. 91

Уравнения (2) и (3) образуют систему:

$$\begin{cases} F_1 h/2 + mg/2 - F_1 l/\mu = 0, \\ mg/2 - F_2 h/2 - F_2 l/\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 F_2 h/2 + F_2 mg/2 - F_1 F_2 l/\mu = 0, \\ F_1 mg/2 - F_1 F_2 h/2 - F_1 F_2 l/\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F_1 F_2 \frac{h}{2} = F_1 mg \frac{l}{2} - F_2 mg \frac{l}{2} \Rightarrow m = \frac{2F_1 F_2 h}{gl(F_1 - F_2)}.$$

6. В однородном диске радиусом R проделаны два отверстия радиусами $R/2$ и $R/4$, как показано на рис. 92. Определите положение центра тяжести диска.

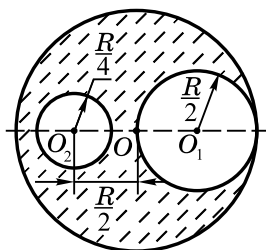


Рис. 92

Решение

Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести расположен на оси симметрии диска левее точки O . Если бы отверстий не было, то центр тяжести диска располагался бы в точке O . Диск можно представить состоящим из трех частей: из диска с центром в точке O_1 радиусом $R/2$, диска радиусом $R/4$ с центром в точке O_2 и оставшейся части, центр тяжести которой отстоит от точки O на расстоянии x .

Масса первого диска

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 h = \rho \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 h = \rho \pi \frac{R^2}{4} h,$$

где ρ — плотность диска, h — его толщина. Момент, создаваемый первым диском относительно точки O ,

$$M_1 = m_1 g \frac{R}{2} = \rho \frac{\pi R^2}{4} h g \frac{R}{2} = \rho \pi h g \frac{R^3}{8}.$$

Масса второго диска

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 h = \rho \pi \left(\frac{R}{4} \right)^2 h = \rho \pi \frac{R^2}{16} h.$$

Его момент относительно точки O

$$M_2 = -m_2 g \frac{R}{2} = -\rho \frac{\pi R^2}{16} h g \frac{R}{2} = -\rho \pi h g \frac{R^3}{32}.$$

Масса оставшейся части

$$m_3 = \rho V_3 = \rho \left(\pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} - \pi \frac{R^2}{16} \right) h = \rho \pi \frac{11R^2}{16} h,$$

а момент этой части $M_3 = -m_3 g x = -\rho \pi \frac{11R^2}{16} h g x$.

При равновесии $M_1 + M_2 + M_3 = 0$,

$$\rho \pi \frac{R^3}{8} h g - \rho \pi \frac{R^3}{32} h g - \rho \pi \frac{11R^2}{16} h g x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R - R = 22x \Rightarrow x = \frac{3R}{22}.$$

7. В цилиндрический сосуд налиты равные массы ртути и воды. Общая высота двух слоев жидкости $H=29,2$ см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути $\rho_1=13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_2=10^3$ кг/м³ (см. рис. 93).

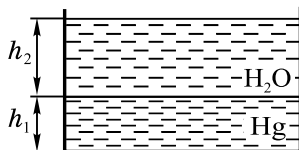


Рис. 93

Решение

Пусть h_1 — высота столба ртути, а h_2 — высота столба воды. По условию задачи $h_1 + h_2 = H$.

Масса ртути в цилиндре

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S h_1,$$

где S — площадь основания цилиндра. Масса воды $m_2 = \rho_2 S h_2$. По условию задачи $m_1 = m_2 \Rightarrow \rho_1 S h_1 = \rho_2 S h_2$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = H, \\ \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = (\rho_1 / \rho_2) h_1, \\ h_1 (1 + \rho_1 / \rho_2) = H, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{H}{1 + \rho_1 / \rho_2} = \frac{H \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}; h_2 = \frac{H \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Давление ртути $p_1 = \rho_1 g h_1 = \frac{H \rho_2 \rho_1 g}{1 + \rho_1 / \rho_2};$

давление воды $p_2 = \rho_2 g h_2 = \frac{H \rho_2 \rho_1 g}{1 + \rho_1 / \rho_2};$

давление жидкостей на дно сосуда

$$p = p_1 + p_2 = 2H \rho_2 \rho_1 g / (\rho_1 + \rho_2) = 5,3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

8. Ртуть находится в U-образной трубке, площадь сечения левого колена которой в три раза меньше, чем правого. Уровень ртути в узком колене расположен на расстоянии $l=30$ см от верхнего конца трубки (см. рис. 94). На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если левое колено доверху заполнить водой?

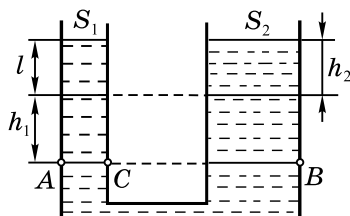


Рис. 94

Решение

После доливания воды уровень ртути в левом колене опустится на h_1 ; над границей раздела «ртуть — вода» (AC) будет находиться столбик воды высотой $l+h_1$. В то же время уровень ртути в правом колене поднимется на h_2 . На любом уровне давления должны быть одинаковы, и в частности на уровне ACB.

В левом колене давление на этом уровне $p_1 = \rho_{\text{в}} g(l + h_1)$, где $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м³, а в правом — $p_2 = \rho_{\text{р}} g(h_2 + h_1)$, где $\rho_{\text{р}} = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³ — плотность ртути. Тогда $p_1 = p_2 \Rightarrow \rho_{\text{в}} g(l + h_1) = \rho_{\text{р}} g(h_2 + h_1)$.

Поскольку жидкости несжимаемы, то уменьшение объема ртути в левом колене равно его увеличению в правом, т. е. $S_1 h_1 = S_2 h_2$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_{\text{в}} g(l + h_1) = \rho_{\text{р}} g(h_2 + h_1), \\ S_1 h_1 = S_2 h_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{\rho_{\text{в}} l}{\rho_{\text{р}} \left(1 + \left(\frac{\rho_{\text{р}}}{\rho_{\text{в}}} - 1\right) S_2 / S_1\right)} = 0,06 \text{ см.}$$

9. В вертикально расположенном сосуде с сечениями $2S$ и S находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой проволокой длиной h . Найти силу натяжения проволоки, если пространство между поршнями заполнено водой. Трением пренебречь. Концы сосуда открыты в атмосферу. Плотность воды равна ρ (см. рис. 95).

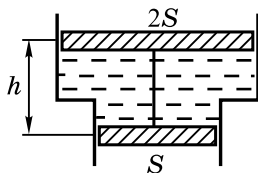


Рис. 95

Решение

Силы, действующие на поршни, представлены на рис. 96.

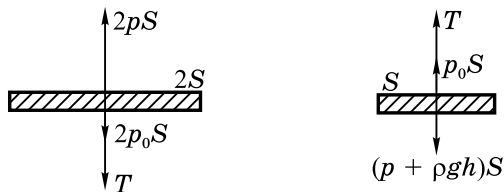


Рис. 96

На верхний поршень действуют: сила натяжения проволоки T , сила атмосферного давления $p_0 \cdot 2S = 2p_0S$, и сила давления со стороны воды $2pS$, где p — давление воды под верхним поршнем. Условия равновесия этого поршня

$$2pS - 2p_0S - T = 0. \quad (1)$$

Давление воды над нижним поршнем отличается от давления воды под верхним поршнем на величину ρgh . Поэтому сила давления воды на нижний поршень равна $(p + \rho gh)S$. Кроме того, на этот поршень действует сила

атмосферного давления $p_0 S$ и сила натяжения проволоки T . Условия равновесия

$$T + p_0 S - (p + \rho gh) S = 0. \quad (2)$$

Перепишем уравнения (1) и (2) в виде системы

$$\begin{cases} 2pS = 2p_0 S + T, \\ pS + \rho ghS = p_0 S + T, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2pS = 2p_0 S + T, \\ 2pS + \rho 2ghS = 2p_0 S + 2T. \end{cases}$$

После вычитания этих уравнений находим $T = 2\rho ghS$.

10. Однородное тело плавает в керосине так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема тела. Определить объем погруженной части при плавании тела в воде. Плотность керосина $\rho_k = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_v = 10^3 \text{ кг/м}^3$ (см. рис. 97).

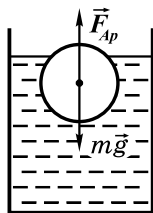


Рис. 97

Решение

На тело, плавающее в керосине, действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила \vec{F}_{Ap} . Так как тело плавает, то $mg = F_{Ap}$.

Пусть V — объем всего тела. Выразим выталкивающую силу $F_{Ap} = m_k g$, где m_k — масса керосина в объеме $0,92V$. Поэтому $F_{Ap} = \rho_k \cdot 0,92Vg$. Обозначим объем погруженной части тела при плавании в воде V_x . В воде на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила \vec{F}'_{Ap} . Из условия плавания получаем $mg = F'_{Ap}$, где $F'_{Ap} = m_v g = \rho_v V_x g$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} mg = \rho_{\kappa} \cdot 0,92Vg \\ mg = \rho_{\text{в}} V_x g \end{cases} \Rightarrow \rho_{\kappa} \cdot 0,92Vg = \rho_{\text{в}} V_x g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{0,92\rho_{\kappa}V}{\rho_{\text{в}}} = 0,92 \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_{\text{в}}} V = 0,74V.$$

11. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Какова плотность тела?

Решение

Вес тела в воздухе численно равен силе тяжести, действующей на тело (выталкивающей силой воздуха мы здесь пренебрегаем). Для определения веса в воде тело, подвешенное, например, на динамометре, погружается в воду. В воде на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}_{\text{Ар}}$ и сила упругости (натяжения) \vec{T} (см. рис. 98).

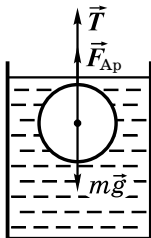


Рис. 98

Из условия равновесия можно записать:

$$T + F_{\text{Ар}} - mg = 0 \Rightarrow T = mg - F_{\text{Ар}}.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой тело действует на подвес (динамометр). По определению это и есть вес тела. Значит, **вес в жидкости есть разность между силой тяжести и выталкивающей силой.**

По условию задачи

$$mg = 3(mg - F_{\text{Ар}}). \quad (1)$$

Пусть ρ_x — плотность тела, а V — его объем, тогда $m = \rho_x V$. Выталкивающая сила $F_{\text{Ар}} = m_{\text{в}} g = \rho_{\text{в}} V g$, где $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды. После подстановки значений $F_{\text{Ар}}$ в (1) получаем

$$\begin{aligned}\rho_x V g &= 3(\rho_x V g - \rho_{\text{в}} V g) \Rightarrow \rho_x = 3(\rho_x - \rho_{\text{в}}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\rho_{\text{в}} = 2\rho_x \Rightarrow 3\rho_{\text{в}}/2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

12. Тонкая однородная палочка плотностью $\rho = 0,64 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ закреплена шарнирно одним концом и опущена в воду. Палочка находится в равновесии, отклонившись на некоторый угол от вертикали (см. рис. 99). Какая часть палочки находится в воде?

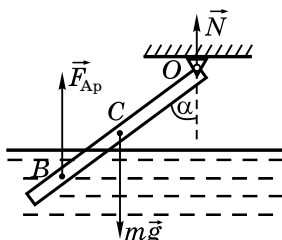


Рис. 99

Решение

В точке C (середина палочки) приложена сила тяжести $m\vec{g}$. В точке B (середина погруженной части) приложена выталкивающая сила $\vec{F}_{\text{Ар}}$. В точке O приложена сила \vec{N} , действующая на палочку со стороны шарнира. Пусть O — точка вращения, тогда сумма моментов сил относительно этой точки равна нулю. Момент силы

N равен нулю. Момент силы тяжести $M_{mg} = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha$,

где l — длина палочки. Момент выталкивающей силы $M_{\text{Ар}} = F_{\text{Ар}}(l - x/2) \sin \alpha$, где x — длина погруженной части.

Получаем уравнение

$$F_{\text{Ап}} \left(l - \frac{x}{2} \right) \sin \alpha - m g \frac{l}{2} \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Выталкивающая сила $F_{\text{Ап}} = m_{\text{в}} g = \rho_{\text{в}} V_{\text{п}} g = \rho_{\text{в}} S x g$, где S — площадь поперечного сечения палочки. Массу палочки представим в виде $m = \rho S l$. Подставим это в уравнение (1) и получим

$$\begin{aligned} \rho_{\text{в}} S x g \left(l - \frac{x}{2} \right) \sin \alpha - \rho g S \frac{l^2}{2} \sin \alpha &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{в}} x l - \rho_{\text{в}} \frac{x^2}{2} - \rho \frac{l^2}{2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{в}} x^2 - 2\rho_{\text{в}} x l + \rho l^2 &= 0 \Rightarrow x^2 - 2l x + \rho l^2 / \rho_{\text{в}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_{1,2} = l \pm l \sqrt{1 - \rho / \rho_{\text{в}}} = l (1 \pm \sqrt{0,64}) = l (1 \pm 0,8);$$

$x_1 = 1,8l > l$, что противоречит условию задачи; $x_2 = 0,2l$, что и является ответом задачи.

13. В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высотой l и сечением S . При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом была совершена? Сечение стакана $5S$, начальная высота воды в стакане l , плотность бруска $\rho = 0,5\rho_0$, где ρ_0 — плотность воды.

Решение

Пусть брусок плавает в воде (см. рис. 100). Вертикально вниз на него действует сила тяжести $mg = \rho S l g$, а вертикально вверх действует выталкивающая сила $F_{\text{Ап}} = \rho_0 S l_{\text{п}} g$, где $l_{\text{п}}$ — высота погруженной части бруска. Из условия плавания следует, что $mg = F_{\text{Ап}} \Rightarrow \rho S l g = \rho_0 S l_{\text{п}} g \Rightarrow l_{\text{п}} = (\rho / \rho_0) l = 0,5l$, что и отражено на рис. 100.

Пусть на брусок действовали силой F , направленной вниз. Под действием этой силы брусок сместится на расстояние x от нулевого уровня (см. рис. 101). При этом брусок вытеснит объем воды, равный Sx . В результате уровень воды в стакане повысится на y , причем y находим из уравнения $Sx = (5S - S)y \Rightarrow y = x / 4$. Следовательно, смещение бруска на x приведет к тому, что длина погруженной части бруска возрастет на $y + x = 5x / 4$. Для того чтобы весь брусок оказался под водой, надо выполнить условие $5x / 4 = l / 2 \Rightarrow x = 2l / 5 = 0,4l$. Уровень воды при этом поднимется на $y = x / 4 = 0,1l$, что и отображено на рис. 101.

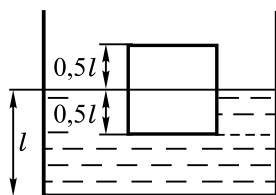


Рис. 100

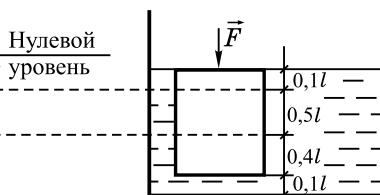


Рис. 101

Как уже отмечалось, для погружения бруска к нему надо приложить силу F , причем при медленном равномерном погружении модуль этой силы равен разности между выталкивающей силой, действующей на брусок, и силой его тяжести:

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{Ар}} - mg = \rho_0 S(l/2 + x)g - \rho S l g = \\ &= \rho_0 S(l/2 + x)g - 0,5\rho_0 S l g = \rho_0 S x g. \end{aligned}$$

Как видно, эта сила линейно зависит от x — смещения бруска. При полном погружении бруска $F = F(0,4l) = 0,4\rho_0 S l g$.

После того как брусок погружен, дальнейшее погружение бруска на $0,1l$ не приводит к изменению силы F . График зависимости силы F приведен на рис. 102.

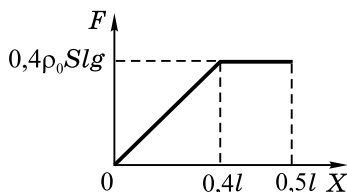


Рис. 102

Как известно, работа переменной силы равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком $F(x)$. Окончательно получаем

$$A = \frac{0,1l + 0,5l}{2} 0,4\rho_0 S l g = 0,12\rho_0 S l^2 g.$$

14. Стальной кубик (плотность $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$) плавает в ртути (плотность $\rho_2 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$). Поверх ртути наливается вода так, что она покрывает кубик. Какова высота h слоя воды? Длина ребра кубика $a = 10 \text{ см}$ (см. рис. 103).

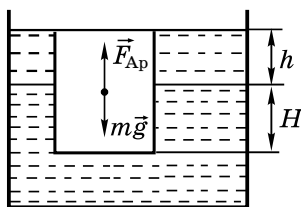


Рис. 103

Решение

На кубик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $\vec{F}_{\text{Ар}}$. Из условия плавания получаем $mg = F_{\text{Ар}}$, где $m = \rho_1 a^3$, $F_{\text{Ар}} = (m_{\text{в}} + m_{\text{р}})g$, где $m_{\text{в}}$ и $m_{\text{р}}$ — соответственно масса воды и ртути, содержащаяся в объеме, вытесненном кубиком;

$$m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} S h = \rho_{\text{в}} a^2 h, \quad m_{\text{п}} = \rho_2 S h = \rho_2 a^2 H, \quad F_{\text{Ар}} = \\ = a^2 g (\rho_{\text{в}} h + \rho_2 H).$$

Заметим, что $h + H = a$, поэтому получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} h + H = a, \\ (\rho_{\text{в}} h + \rho_2 H) a^2 g = \rho_1 a^3 g, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + H = a, \\ \rho_{\text{в}} h + \rho_2 H = \rho_1 a, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} H = a - h, \\ \rho_{\text{в}} h + \rho_2 (a - h) = \rho_1 a, \end{cases} \Rightarrow h = \frac{a(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_{\text{в}}} \approx 4,6 \text{ см.}$$

РАЗДЕЛ 6

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

В молекулярной физике ряд свойств макроскопических тел и тепловых процессов, протекающих в них, объясняются на основе представлений о молекулярном строении вещества.

В основе молекулярно-кинетической теории (МКТ) строения вещества лежат три главных утверждения:

1. Все тела состоят из огромного количества мельчайших частиц — молекул (атомов). Массы молекул $m_0 \approx 10^{-26}$ кг, а их размеры $d \approx 10^{-10}$ м.

2. Молекулы вещества находятся в непрерывном беспорядочном тепловом движении. При этом молекулы имеют различные по направлению и модулю скорости. Например, при температуре $t=0^\circ$ большая часть молекул газов имеет скорости $v \sim 10^2 \div 10^3$ м/с.

3. Молекулы вещества взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие между молекулами возникает из-за того, что в состав молекул (атомов) входят отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ядра. На расстоянии порядка 2–3 диаметров молекулы силы притяжения преобладают над силами отталкивания. Когда расстояние между молекулами становится сравнимым с диаметром молекулы, силы отталкивания начинают преобладать над силами притяжения. При этом силы отталкивания быстро возрастают с уменьшением расстояния между молекулами.

Из-за наличия сил взаимодействия молекулы обладают потенциальной энергией взаимодействия W_p .

2. Основные физические величины, используемые в молекулярной физике

В молекулярной физике часто используются следующие физические величины:

1. Молекулярная масса (атомная масса) — это отношение массы молекулы (атома вещества) m_0 к $1/12$ массы атома углерода:

$$M = \frac{m_0}{m_{0C}/12}, \quad (6.1)$$

где $m_{0C} = 1,995 \cdot 10^{-26}$ кг — масса атома углерода.

Атомные массы вычислены и проставлены в периодической системе Менделеева.

2. Моль вещества — это количество вещества, содержащее столько же молекул, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода. Из этого определения следует, что моли различных веществ содержат одинаковое число молекул (число Авогадро):

$$N_A = \frac{0,012 \text{ кг}}{1,995 \cdot 10^{-26} \text{ кг}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ (моль)}^{-1}.$$

3. Количество вещества (число молей) ν равно отношению числа молекул N в данном теле к постоянной Авогадро N_A :

$$\nu = N / N_A \quad (6.2)$$

4. Молярная масса вещества — это масса одного моля вещества. Молярную массу вещества находят по формуле

$$\mu = M \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \quad (6.3)$$

где M — молекулярная (атомная) масса вещества.

Так как моль любого вещества содержит число Авогадро молекул N_A , а масса одного моля равна молярной

массе вещества μ , то массу молекулы вещества m_0 можно вычислить по формуле

$$m_0 = \mu / N_A. \quad (6.4)$$

Количество вещества

$$\nu = N / N_A = m / \mu, \quad (6.5)$$

где m — масса вещества.

5. Концентрация молекул — это отношение числа молекул N к объему V , в котором они распределены:

$$n = N / V. \quad (6.6)$$

3. Среднее значение квадрата скорости молекул

В силу беспорядочности движения молекул скорости отдельных молекул могут принимать любые значения v_1, v_2, \dots, v_N . В молекулярной физике большое значение имеет **среднее значение квадрата скорости молекул**, определяемое формулой

$$\overline{v^2} = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) / N, \quad (6.7)$$

где N — число молекул. Черта над v^2 означает не вектор, а среднее значение.

Величину, равную $v = \sqrt{\overline{v^2}}$, называют **среднеквадратичной скоростью**.

Среднее значение квадрата скорости можно выразить как

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

где $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ — средние значения квадратов проекций скоростей.

Вследствие беспорядочного движения молекул

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \overline{v^2} / 3. \quad (6.8)$$

Через среднее значение квадрата скорости выражается средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул

$$\overline{W}_k = m_0 \overline{v^2} / 2, \quad (6.9)$$

где m_0 — масса молекулы.

4. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Идеальный газ — это газ, взаимодействие между молекулами которого пренебрежимо мало. Идеальный газ можно представить как набор огромного числа молекул, которые взаимодействуют только при столкновениях. Размеры молекул идеального газа пренебрежимо малы по сравнению со средним расстоянием между ними. Молекулы изменяют направление своего движения благодаря упругим столкновениям, между столкновениями они движутся прямолинейно равномерно.

Кроме столкновений между собой, молекулы идеального газа упруго сталкиваются со стенками сосуда. Поскольку число ударов молекул о стенки огромно, газ создает непрерывное давление p на стенки сосуда, причем соотношение

$$p = nm_0 \overline{v^2} / 3 \quad (6.10)$$

называют **основным уравнением молекулярно-кинетической теории**.

Это уравнение полезно знать и в других формах, например:

$$m_0 n = m_0 \frac{N}{V} = \frac{m}{V} = \rho,$$

где m — масса газа, а ρ — его плотность;

$$p = \rho \overline{v^2} / 3. \quad (6.11)$$

Основное уравнение МКТ можно преобразовать следующим образом:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} n \cdot 2 \left(\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} \right),$$

но $\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \overline{W}_k$ — средняя кинетическая энергия молекулы. В итоге получаем

$$p = 2n \overline{W}_k / 3. \quad (6.12)$$

Подставляя в последнюю формулу концентрацию $n = N / V$, находим

$$pV = 2N \overline{W}_k / 3. \quad (6.13)$$

При этом в формуле (6.13) произведение $N \overline{W}_k$ есть **суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул W_k** . Окончательно получаем

$$pV = 2W_k / 3. \quad (6.14)$$

5. Параметры состояния вещества. Температура

Так как любое физическое тело состоит из огромного числа молекул, то практически невозможно описать движение каждой молекулы. Систему, состоящую из очень большого числа частиц, описывают **макроскопическими величинами**, характеризующими всю систему в целом. Для газов это давление p , объем V и температура T — **параметры состояния**.

Температура характеризует состояние **теплового равновесия**: такого состояния, при котором все макроскопические параметры сколь угодно долго остаются неизменными. Разность температур указывает на направление процессов теплообмена: тепловая энергия переходит от тел с большей температурой к телам с меньшей температурой.

В молекулярной физике и термодинамике температуру, как правило, выражают по шкале Кельвина (**абсолютная температура**) по формуле $T = (t^\circ + 273) \text{ К}$, где t° — температура, измеряемая по шкале Цельсия.

Оказалось, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул пропорциональна абсолютной температуре:

$$\overline{W}_k = m_0 \overline{v^2} / 2 = 3k_B T / 2, \quad (6.15)$$

где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ — постоянная Больцмана.

Таким образом, **абсолютная температура есть мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул.**

6. Уравнение состояния идеального газа. Закон Дальтона

Параметры состояния p , V , T не являются независимыми: один из них можно выразить через два других, например $p = f(V, T)$. **Уравнение, связывающее между собой параметры состояния системы, называется уравнением состояния.** В школьном курсе физики уравнение состояния изучается для **идеального газа**.

Подставим в формулу (6.13) выражение для средней кинетической энергии поступательного движения молекул $\overline{W}_k = 3k_B T / 2$. Получим

$$pV = Nk_B T. \quad (6.16)$$

Данное уравнение связывает между собой параметры состояния p , V , T и поэтому является **уравнением состояния идеального газа, в которое входит полное число молекул N .**

Разделив обе части уравнения (6.16) на объем V , найдем $p = \frac{N}{V} k_B T$, $\frac{N}{V} = n$ — концентрация молекул.

Поэтому

$$p = nk_B T \quad (6.17)$$

уравнение состояния, в которое входит концентрация молекул n .

Выразив полное число молекул N из (6.5) как $N = \nu N_A$ и подставив в (6.16), найдем, что $pV = \nu(N_A k_B)T$. Произведение

$$\begin{aligned} N_A k_B &= 6,02 \cdot 10^{23} \text{ (моль)}^{-1} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = \\ &= 8,3 \text{ Дж (моль} \cdot \text{К)} = R \end{aligned}$$

называют **газовой постоянной**.

Окончательно получаем

$$pV = \nu RT \quad (6.18)$$

уравнение состояния, в которое входит количество вещества ν .

Подставив в (6.18) $\nu = m / \mu$,

$$pV = mRT / \mu, \quad (6.19)$$

где m — масса газа, а μ — его молярная масса.

Уравнение (6.19) — это **уравнение Менделеева — Клапейрона** для идеальных газов. Оно наиболее часто используется при решении задач.

Полученные уравнения относятся к одному газу. В ряде задач приходится иметь дело со смесью химически не реагирующих газов. Давление, производимое только одной составляющей смеси газов, называется ее **парциальным давлением**. Для смеси газов выполняется **закон Дальтона**: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений составляющих смеси. Закон Дальтона отражает тот факт, что размерами молекул идеального газа можно пренебречь, и поэтому каждая составляющая занимает весь объем сосуда V .

7. Объединенный газовый закон. Законы идеальных газов

Параметры состояния идеального газа могут изменяться в результате различных процессов, производимых над ним. Если при этом масса газа остается постоянной, то из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что $pV/T = mR/\mu = \text{const}$, т. е. параметры состояний 1 и 2 связаны уравнением

$$p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2, \quad (6.20)$$

которое называют **объединенным газовым законом**, или **уравнением Клапейрона**.

Если при $m = \text{const}$ остается постоянным один из параметров состояния, а два других изменяются, то говорят, что в газе **протекает изопроцесс**.

Если $m = \text{const}$ и $T = \text{const}$, то процесс называется **изотермическим**. Из уравнения Клапейрона получаем **закон Бойля — Мариотта**

$$pV = \text{const} \text{ или } p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (6.21)$$

Графиком этого процесса в осях V, p является гиперболой $p(V) = \frac{\text{const}}{V}$, которую называют **изотермой**. На рис. 104 приведены графики двух изотермических процессов для одной массы газа, но при различных температурах T_1 и T_2 .

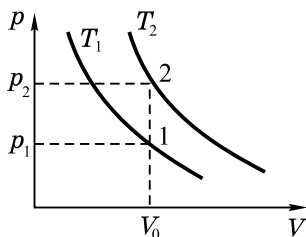


Рис. 104

Выберем объем V_0 и найдем соответствующие ему состояния в обоих процессах. В состоянии 1 имеем p_1, V_0, T_1 ; в состоянии 2 — p_2, V_0, T_2 . Так как масса газа не меняется, то, применив уравнение Клапейрона, получим $p_1 V_0 / T_1 = p_2 V_0 / T_2$. Отсюда $T_2 = T_1(p_2 / p_1) > T_1$, так как $p_2 / p_1 > 1$. Таким образом, **чем выше изотерма в осях V и p , тем более высокой температуре она соответствует.**

Если $m = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то процесс называется **изобарным**. Из уравнения Клапейрона следует, что в изобарном процессе

$$V/T = \text{const} \Rightarrow V(T) = \text{const} \cdot T, \quad (6.22)$$

т. е. объем пропорционален абсолютной температуре T (**закон Гей-Люссака**). График этого процесса в осях T, V — прямая, которую называют **изобарой**. На рис. 105 изображены две изобары для одной и той же массы газа, но построенные для разных давлений p_1 и p_2 . Продолжение изобар проходит через начало координат, однако надо иметь в виду, что при низких температурах об идеальном газе говорить нельзя. Зафиксируем температуру T_0 и найдем соответствующие ей состояния в обоих процессах. Параметры состояния 1: p_1, V_1, T_0 . Параметры состояния 2: p_2, V_2, T_0 . Переход из состояния 1 в состояние 2 происходит при постоянной температуре, т. е. является изотермическим, поэтому по закону Бойля — Мариотта $p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_2 = p_1 V_1 / V_2 < p_1$, так как $V_1 / V_2 < 1$. Таким образом, **чем выше расположена изобара в осях T, V , тем меньшему давлению она соответствует.**

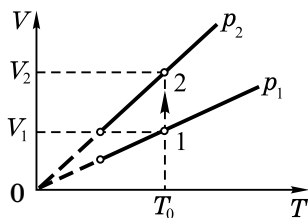


Рис. 105

Если $m = \text{const}$ и $V = \text{const}$, то процесс называют **изохорным**. Из уравнения Клапейрона следует, что в изохорном процессе

$$p/T = \text{const} \Rightarrow p = \text{const} \cdot T, \quad (6.23)$$

т.е. давление пропорционально абсолютной температуре (**закон Шарля**). График изохорного процесса в осях T , p — прямая, которую называют **изохорой**.

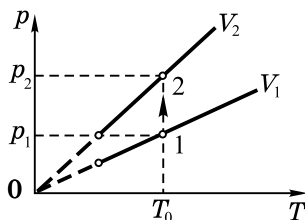


Рис. 106

На рис. 106 изображены две изохоры для одной и той же массы, но построенные для разных объемов V_1 и V_2 . Выбрав температуру T_0 и состояния 1 и 2 на изохорах, как и в предыдущем случае, получим

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow V_2 = V_1 p_1 / p_2 < V_1,$$

так как $p_1 / p_2 < 1$. Отсюда следует, что **чем выше изохора расположена в осях T , p , тем меньшему объему она соответствует**.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Баллон, содержащий азот N_2 под давлением $p_1 = 15 \cdot 10^4$ Па и при температуре $t_1 = 27$ °С, имеет массу $M_1 = 97$ кг. Когда часть азота была израсходована, при температуре $t_2 = -3$ °С давление в баллоне ста-

ло равным $p_2 = 6 \cdot 10^4$ Па, а масса баллона оказалась $M_2 = 93,5$ кг. Сколько молей азота осталось в баллоне?

Решение

В состоянии 1 азот в баллоне имел следующие параметры: p_1 , V , T_1 , где V — объем баллона. Масса азота в баллоне m_1 . Свяжем эти параметры уравнением Менделеева — Клапейрона: $p_1 V = m_1 R T_1 / \mu$. В состоянии 2 параметры газа: p_2 , V , T_2 , а масса газа m_2 , поэтому $p_2 V = m_2 R T_2 / \mu$. Отметим, что объем газа не изменился, однако переход из состояния 1 в состояние 2 нельзя назвать изохорным, так как изменяется масса газа. Разделив первое уравнение на второе, найдем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}.$$

Изменение общей массы баллона происходит за счет уменьшения массы азота, поэтому $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$. Получаем систему уравнений, в которой задано отношение масс m_1 и m_2 и их разность:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}, \\ m_1 - m_2 = M_1 - M_2, \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}, \\ m_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = M_1 - M_2, \end{array} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow m_2 = \frac{M_1 - M_2}{\frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} - 1}. \end{aligned}$$

Отметим, что $T_1 = (273 + 27) \text{ К} = 300 \text{ К}$; $T_2 = (273 - 3) \text{ К} = 270 \text{ К}$. Находим, что $m_2 = 2,8$ кг. Молярная масса азота N_2 $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Значит, в баллоне осталось $\nu_2 = m_2 / \mu = 100$ молей азота.

2. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой m . Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном цилиндра пружиной с жестко-

стью k . При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H ? В обоих случаях пружина растянута. Молярная масса газа равна μ (см. рис. 107).

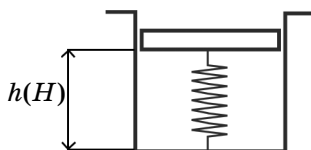


Рис. 107

Решение

Силы, действующие на поршень, представлены на рис. 108. На поршень действуют: сила тяжести $M\vec{g}$, где M — масса поршня; сила атмосферного давления $\overrightarrow{p_0 S}$, где p_0 — атмосферное давление, S — площадь поршня; сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, причем ее модуль по закону Гука $F_{\text{упр}} = k(l - x_0)$, где x_0 — длина нерастянутой пружины, l — ее длина в деформированном состоянии; сила давления газа под поршнем $\overrightarrow{p S}$, где p — давление газа.

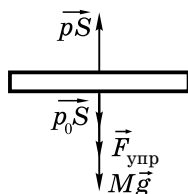


Рис. 108

При равновесии поршня $pS - p_0S - Mg - F_{\text{упр}} = 0$. Когда поршень расположен на высоте h , $F_{\text{упр}} = k(h - x_0)$, $p = p_1$, получаем уравнение

$$p_1S - p_0S - Mg - k(h - x_0) = 0. \quad (1)$$

Когда поршень находится на высоте H ,

$$p_2 S - p_0 S - Mg - k(H - x_0) = 0. \quad (2)$$

После вычитания уравнений (1) и (2) находим

$$(p_1 - p_2)S + k(H - h) = 0. \quad (3)$$

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона в состоянии 1:

$$p_1 V_1 = p_1 S h = m R T_1 / \mu \Rightarrow p_1 = m R T_1 / (\mu S h).$$

Аналогично можно выразить давление p_2 в состоянии 2: $p_2 = \frac{m}{\mu S H} R T_2$. После подстановки значений давления в уравнение (3) получим

$$\frac{m}{\mu S} R S \left(\frac{T_1}{h} - \frac{T_2}{H} \right) = k(h - H) \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{kH(H - h)\mu}{mR}.$$

3. В цилиндре с площадью сечения $S = 5 \text{ см}^2$ под поршнем массой $M = 1 \text{ кг}$ находится некоторый газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1,5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы. При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1,2$ раза. Определить силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное давление $p_0 = 100 \text{ кПа}$.

Решение

Рассмотрим силы, действующие на поршень в положении 2: $M\vec{g}$ — сила тяжести; $\overline{p_2 S}$ — сила давления газа под поршнем; $\overline{p_0 S}$ — сила атмосферного давления; \vec{F} — результирующая сила со стороны уступов (см. рис. 109). Так как поршень находится в равновесии, то, спроецировав силы на вертикальное направление Y , получим

$$p_2 S - F - Mg - p_0 S = 0 \Rightarrow F = p_2 S - Mg - p_0 S. \quad (1)$$

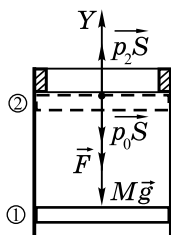


Рис. 109

Для определения давления газа в состоянии 2 сравним параметры состояний 1 и 2 газа: p_1 , V_1 , T_1 ; и p_2 , V_2 , T_2 . Переход газа из состояния 1 в состояние 2 происходит при $m = \text{const}$, поэтому можно применить уравнение Клапейрона:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{V_2} = p_1 n \frac{1}{k} = p_1 \frac{n}{k}.$$

Для определения давления газа в состоянии 1 придется еще раз рассмотреть равновесие поршня (см. рис. 110).

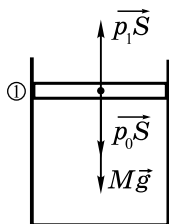


Рис. 110

Условия равновесия запишутся в виде

$$p_1 S - p_0 S - Mg = 0 \Rightarrow p_1 = p_0 + Mg/S.$$

Значит, $p_2 = \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{n}{k}$. Подставив это в уравнение (1), найдем

$$F = \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{n}{k} S - Mg - p_0 S =$$

$$= (p_0 S + Mg) \frac{n}{k} - (p_0 S + Mg) = \left(\frac{n}{k} - 1 \right) (p_0 S + Mg) = 15 \text{ Н.}$$

4. На рис. 111 представлен график изменения состояния идеального газа в осях V , p . Изобразить этот график в осях T , V .

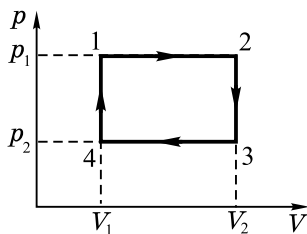


Рис. 111

Решение

Участки 1–2 и 3–4 — изобары. По закону Гей-Люссака в изобарном процессе объем пропорционален абсолютной температуре, $V = cT$, где $c = \text{const}$. Поэтому графики участков 1–2 и 3–4 — прямые, продолжения которых проходят через начало координат. Так как $p_1 > p_2$, то изобара 1–2 располагается ниже, чем изобара 3–4.

Участки 2–3 и 4–1 — изохоры, $V_2 = \text{const}$ и $V_1 = \text{const}$. Их графиками в осях T , V являются прямые, параллельные оси T . Окончательный вид графика представлен на рис. 112.

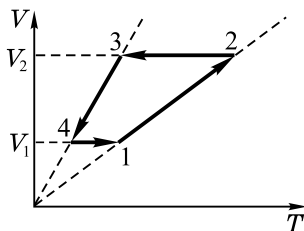


Рис. 112

5. Моль идеального газа участвует в процессе, изображенном на рис. 113. Продолжения отрезков прямых 1–2 и 3–4 проходят через начало координат, а кривые 1–4 и 2–3 являются изотермами. Изобразить этот процесс в координатах T, V (T — ось ординат) и найти объем V_3 , если известны объемы V_1 и $V_2=V_4$.

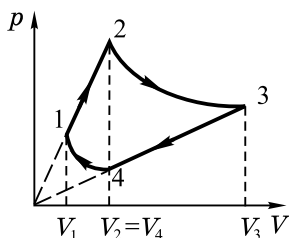


Рис. 113

Решение

На участке 1–2 давление линейно зависит от объема $p=\alpha_1 V$, где $\alpha_1=\text{const}$.

Кроме того, в любом состоянии на этом участке выполняется уравнение Менделеева — Клапейрона $pV=RT$ (по условию задан один моль). Подставляя в это уравнение $p=\alpha_1 V$, получаем $\alpha_1 V^2=RT \Rightarrow T(V)=\alpha_1 V^2/R$. Графиком этого процесса в осях V, T является парабола 1–2 (см. рис. 114).

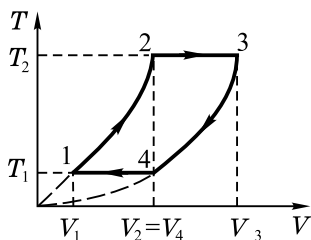


Рис. 114

Аналогично на участке 3–4 $p=\alpha_2 V$, где $\alpha_2=\text{const}$, причем $0<\alpha_2<\alpha_1$, поэтому $T(V)=\alpha_2 V^2/R$. График этого про-

цесса — парабола, изображенная на рис. 114. По условию задачи участки 2–3 и 4–1 — изотермы, причем, как следует из рис. 113, $T_2 > T_1$. Графики этих процессов в осях V, T — прямые. Окончательный вид процесса представлен на рис. 114.

Так как точки 2 и 3 расположены на одной изотерме, то по закону Бойля — Мариотта $p_2 V_2 = p_3 V_3$. Аналогично получаем, что $p_1 V_1 = p_4 V_4$. После деления этих равенств находим

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_3}{p_4} \cdot \frac{V_3}{V_4}. \quad (1)$$

Так как на участке 1–2 $p = \alpha_1 V$, то $p_2 / p_1 = V_2 / V_1$. Аналогично находим, что $p_3 / p_4 = V_3 / V_4$. Заменяя в равенстве (1) отношение давлений отношением объемов, получаем

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2 V_4}{V_1} = \frac{V_2^2}{V_1}.$$

6. В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l=0,9$ м находится столбик воздуха, ограниченный сверху столбиком ртути высотой $h=30$ см. Ртуть доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно поворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Какова высота оставшегося столбика ртути? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па (см. рис. 115).

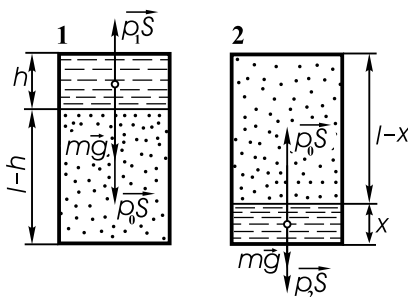


Рис. 115

Решение

Укажем параметры состояния воздуха: в состоянии 1 — p_1 , $V_1 = S(l-h)$, T ; в состоянии 2 — p_2 , $V_2 = S(l-x)$, T . Здесь S — площадь поперечного сечения трубки, T — температура воздуха, которую во всех задачах данного типа считают одинаковой, равной температуре окружающей среды, x — высота оставшегося столбика ртути. Так как масса воздуха в трубке не изменяется, то переход из состояния 1 в 2 является изотермическим, и по закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_1(l-h) = p_2(l-x). \quad (1)$$

Выразим p_1 и p_2 . В состоянии 1 на столбик ртути действуют силы: $m\vec{g}$ — сила тяжести столбика ртути, $\overline{p_0 S}$ — сила атмосферного давления и $\overline{p_1 S}$ — сила давления воздуха. Получаем, что $p_1 S - p_0 S - mg = 0$. Выразив $m = \rho V = \rho S h$ (ρ — плотность ртути), находим

$$p_1 = p_0 + mg / S = p_0 + \rho g h.$$

В состоянии 2 условия равновесия столбика ртути запишутся в виде: $p_0 S - p_2 S - mg = 0 \Rightarrow p_2 = p_0 - mg / S = p_0 - \rho g x$. Подставив в (1), получим $(p_0 + \rho g h)(l-h) = (p_0 - \rho g x)(l-x)$. Раскрыв скобки, приходим к квадратному уравнению $\rho g x^2 - (p_0 + \rho g l)x + h(\rho g h + p_0 - \rho g l) = 0$.

Вынесем из последних двух членов этого уравнения множитель $\rho g l$, получим

$$\begin{aligned} \rho g x^2 - \rho g l \left(\frac{p_0}{\rho g l} + 1 \right) x + \rho g h l \left(\frac{h}{l} + \frac{p_0}{\rho g l} - 1 \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - l x \left(\frac{p_0}{\rho g l} + 1 \right) + h l \left(\frac{h}{l} + \frac{p_0}{\rho g l} - 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\rho g l$ — это давление столбика ртути высотой l , поэтому, если его выражать в мм рт. ст., оно будет численно равно l , выраженному в миллиметрах. В данном случае $\rho g l = 900$ мм рт. ст. Давление

$$p_0 = 10^5 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.}, \text{ поэтому } \frac{p_0}{\rho g l} = \frac{760}{900} = \frac{38}{45}, \frac{h}{l} = \frac{1}{3}.$$

Подставляя в последнее уравнение $h=30$ см и $l=90$ см, получаем $x^2 + 166x + 480 = 0$, корни которого $x_1 = 163$ см и $x_2 = 3$ см. Первый корень явно противоречит условию задачи, поэтому окончательно $x = 3$ см.

7. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1 = 10^5$ Па, во втором — при $p_2 = 0,6 \cdot 10^5$ Па. Объем первого баллона $V_1 = 10^{-3}$ м³, а второго $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м³. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна. Объемом трубки можно пренебречь.

Решение

Газ, находившийся в сосуде объемом V_1 , имел параметры состояния p_1 , V_1 , T , а газ, находившийся в сосуде объемом V_2 , — p_2 , V_2 , T . После того как открыли кран, образовалась смесь газов, причем каждая составляющая будет создавать парциальное давление p'_1 и p'_2 соответственно. По закону Дальтона давление смеси

$$p = p'_1 + p'_2. \quad (1)$$

Для определения p'_1 рассмотрим конечное состояние газа, находившегося в сосуде объемом V_1 . Параметры его состояния p'_1 , $V = (V_1 + V_2)$, T . Так как масса газа и температура не изменялись, то переход из начального в конечное состояние является изотермическим. По закону Бойля — Мариотта $p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2) \Rightarrow p'_1 = p_1 V_1 / (V_1 + V_2)$.

Аналогично можно определить парциальное давление газа, находившегося во втором сосуде: $p'_2 = p_2 V_2 / (V_1 + V_2)$. Подставляя в (1), найдем давление, установившееся в сосуде:

$$p = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} + \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

8. Сосуд объемом $V=30 \text{ дм}^3$ разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми перегородками. В левую часть вводят $m_1=30 \text{ г}$ водорода, в среднюю $m_2=160 \text{ г}$ кислорода и в правую $m_3=70 \text{ г}$ азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую — водород и азот. Какое давление установится в каждой части сосуда, если в нем поддерживается постоянная температура $T=300 \text{ К}$?

Решение

На рис. 116 показано начальное распределение газов в сосуде и направление диффузии газов. На рис. 117 представлено окончательное распределение газов в сосуде.

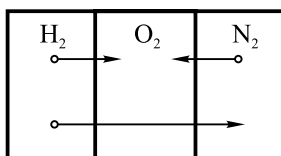


Рис. 116

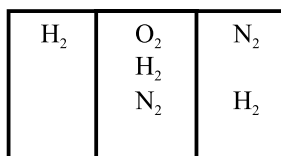


Рис. 117

Как следует из рис. 117, после установления равновесия водород распределен по всему сосуду, поэтому $p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT$, где p_1 — давление водорода, а $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — его молярная масса. Находим $p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Таким будет давление в левой части сосуда.

После установления равновесия азот распределен в объеме $2V/3$. Из уравнения состояния $p_3 \cdot \frac{2}{3} V = \frac{m_3}{\mu_3} RT$ находим давление азота $p_3 = \frac{3m_3}{2\mu_3} \cdot \frac{RT}{V}$, где $\mu_3 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярная масса азота. После под-

становки находим $p_3 = 0,31 \cdot 10^6$ Па. Давление в правой части сосуда есть сумма парциальных давлений водорода и азота: $p'_3 = p_1 + p_3 = 1,6 \cdot 10^6$ Па.

Кислород распределен только в $V/3$. Из уравнения состояния находим его давление $p_2 = \frac{3m_2}{2\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}$, где $\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. После подстановки находим $p_2 = 1,3 \cdot 10^6$ Па. Давление в средней части сосуда равно сумме парциальных давлений всех газов: $p''_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 2,9 \cdot 10^6$ Па.

9. На рис. 118 изображен замкнутый процесс, который совершает некоторая масса кислорода. Известно, что максимальный объем, который занимал газ в этом процессе, $V_{\max} = 16,4$ дм³. Определить массу газа и его объем в точке 1.

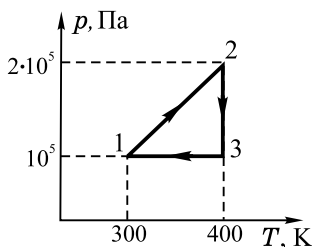


Рис. 118

Решение

Из условия задачи $p_2/p_1 = 2$, а $\frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{3}$, т. е. $\frac{p_2}{p_1} \neq \frac{T_2}{T_1}$.

Значит, процесс 1–2 не является изохорным, продолжение прямой 1–2 не проходит через начало координат. Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow V = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{p}.$$

Следовательно, объем максимален в состоянии, где максимально отношение T/p , т. е. в точке 3. Итак, $V_{\max}=V_3$. Применив уравнение Менделеева — Клапейрона к состоянию в точке 3, получим

$$p_3 V_3 = \frac{m}{\mu} R T_3 \Rightarrow m = \frac{p_3 V_3 \mu}{R T_3},$$

где $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода. После подстановки найдем $m = 16 \cdot 10^{-3}$ кг. Так как 1–3 — изобара, то по закону Гей-Люссака

$$V_1/T_1 = V_3/T_3 \Rightarrow V_1 = V_3 T_1/T_3 = 12,3 \text{ дм}^3.$$

10. Вертикально расположенный цилиндр, закрытый с обеих сторон, разделен тяжелым теплонепроницаемым поршнем на две части; обе части сосуда содержат одинаковое количество воздуха. При одинаковой температуре воздуха в обеих частях $T_1 = 400$ К давление p_2 в нижней части сосуда вдвое больше давления p_1 в верхней части. До какой температуры T_2 надо нагреть воздух в нижней части сосуда, чтобы объемы верхней и нижней частей стали одинаковыми (см. рис. 119)?

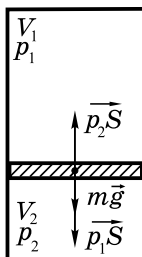


Рис. 119

Решение

Параметры состояния воздуха в нижней части сосуда связаны уравнением $p_2 V_2 = \nu R T_1$. Для верхней части сосуда получаем уравнение $p_1 V_1 = \nu R T_1$ (здесь ν — оди-

наковое количество вещества в обеих частях сосуда; V_2 , V_1 — объемы нижней и верхней частей, p_2 и p_1 — давления в них). Приравнивая левые части уравнений, находим, что $p_2 V_2 = p_1 V_1$. По условию $p_2 = 2p_1$, поэтому $2p_1 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow V_1 = 2V_2$. Пусть V — объем всего сосуда, тогда $V_1 + V_2 = V \Rightarrow V_2 = V/3$, $V_1 = 2V/3$. Из условия равновесия поршня под действием сил давления $p_2 S$, $p_1 S$ и силы тяжести поршня Mg находим

$$p_2 S - p_1 S - Mg = 0 \Rightarrow p_2 - p_1 = Mg/S. \quad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) будет выполняться для любых значений давлений.

Когда поршень делит объем цилиндра на две равные части, параметры состояния воздуха под поршнем p'_2 , $V'_2 = V/2$, T_2 связаны с начальными параметрами p_2 : $V_2 = V/3$, T_1 уравнением Клапейрона:

$$\frac{p_2 V_2}{T_1} = \frac{p'_2 V'_2}{T_2} \Rightarrow p'_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V_2}{V'_2} p_2 = \frac{2}{3} p_2 \frac{T_2}{T_1}.$$

Так как поршень теплонепроницаем, а нагревают воздух в нижней части сосуда, то температура в верхней части

$$T_1 = \text{const} \Rightarrow p_1 V_1 = p'_1 V'_1, \quad V'_1 = \frac{1}{2} V \Rightarrow p'_1 = p_1 \frac{V_1}{V'_1} = \frac{4}{3} p_1.$$

Подставляя в уравнение (1) p'_2 и p'_1 , получим

$$\frac{2}{3} p_2 \frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3} p_1 = \frac{Mg}{S}. \quad (2)$$

Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), находим

$$p_2 - p_1 = \frac{2}{3} p_2 \frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3} p_1.$$

Подставляя $p_2=2p_1$, получим

$$2p_1 - p_1 = \frac{2}{3}2p_1 \frac{T_2}{T_1} - \frac{4}{3}p_1 \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = \frac{7}{4}T_1 = 700 \text{ К.}$$

- 11.** Некоторая масса газа занимает объем V_1 при давлении p_1 и температуре T_1 . Затем газ при постоянном объеме нагревают до температуры $T_2=2T_1$. После этого происходит расширение газа при постоянном давлении до объема $V_2=4V_1$. Из получившегося состояния газ возвращают в начальное в ходе процесса $pV^n=\text{const}$. Найти показатель степени n .

Решение

Наглядное представление об этом замкнутом процессе дает рис. 120.

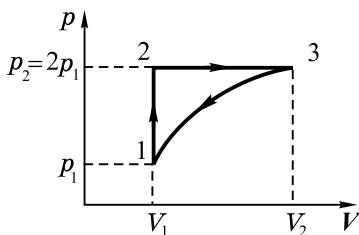


Рис. 120

На участке 1–2

$$V_1 = \text{const} \Rightarrow p \sim T \Rightarrow p_2 = 2p_1, T_2 = 2T_1.$$

На участке 2–3

$$p_2 = \text{const} \Rightarrow V \sim T \Rightarrow T_3 = 4T_2 = 8T_1, V_2 = 4V_1.$$

На участке 3–1

$$\begin{aligned} p_1 V_1^n &= p_3 V_3^n \Rightarrow p_1 V_1^n = 2p_1 (4V_1)^n \Rightarrow V_1^n = 2 \cdot 2^{2n} V_1^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = 2^{2n+1} \Rightarrow 2n+1=0 \Rightarrow n = -1/2. \end{aligned}$$

РАЗДЕЛ 7

ТЕРМОДИНАМИКА. НАСЫЩЕННЫЕ И НЕНАСЫЩЕННЫЕ ПАРЫ

1. Основные термодинамические величины

Теория тепловых процессов, в которой не учитывается молекулярное строение вещества, называется **термодинамикой**. Основу термодинамики составляют два закона, выражающих свойства энергии в тепловых процессах. Основными величинами в термодинамике являются внутренняя энергия U , количество теплоты Q , термодинамическая работа A .

2. Внутренняя энергия

Внутренняя энергия макроскопического тела равна сумме кинетических энергий молекул и потенциальных энергий взаимодействия молекул друг с другом. В общем случае внутренняя энергия тела зависит от температуры T и объема V .

В **идеальном одноатомном газе** молекула движется поступательно, не взаимодействуя с другими молекулами. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\overline{W}_k = m_0 \overline{v^2} / 2 = (3/2) k_B T$, а число молекул $N = \nu N_A = (m / \mu) N_A$. Поэтому внутренняя энергия

идеального одноатомного газа $U = N \overline{W}_k = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} N_A k_B T$.

Учитывая, что произведение числа Авогадро N_A на по-

стоянную Больцмана k_B равно газовой постоянной R , окончательно получаем:

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (7.1)$$

Формула (7.1) показывает, что внутренняя энергия идеального одноатомного газа зависит только от температуры ($U \sim T$). Это свойство справедливо и для многоатомных идеальных газов, но коэффициент пропорциональности отличен от $3/2$. Это связано с тем, что сложные молекулы совершают не только поступательное, но и вращательное движения.

3. Количество теплоты. Уравнение теплового баланса

Количество теплоты Q — это энергия, которую тело получает или отдает в процессах теплообмена (теплопередачи), т. е. без совершения работы. Если $Q > 0$, то тело теплоту получает; если $Q < 0$, то отдает.

При $Q = 0$ тело теплоту не получает и не отдает. Термодинамический процесс, в котором происходит изменение параметров состояния P , V , T без подвода или отвода теплоты ($Q = 0$), называется **адиабатным**.

Для вычисления количества теплоты, которое надо сообщить телу массой m с удельной теплоемкостью c для нагревания его от начальной температуры t_1 до конечной t_2 используют формулу

$$Q = cm(t_2 - t_1) = cm(T_2 - T_1). \quad (7.2)$$

Произведение $cm = C$ называют **теплоемкостью тела**. Формулу (7.2) можно переписать в виде $Q = C(t_2 - t_1)$. Если тело охлаждается ($t_2 < t_1$), то количество теплоты Q , рассчитанное по формуле (7.2), отрицательно, что соответствует выделению теплоты.

В некоторых случаях удобно использовать **молярную теплоемкость** c_μ — теплоемкость одного моля вещества. При этом количество теплоты вычисляется по формуле $Q = c_\mu \nu (t_2 - t_1)$, где $\nu = m / \mu$ — количество вещества. Как нетрудно видеть, теплоемкость всего тела $C = c_\mu \nu$, а удельная теплоемкость $c = c_\mu / \mu$.

Тело получает или отдает теплоту при переходе из одного агрегатного состояния в другое.

Процесс превращения жидкости в пар называется парообразованием, обратный процесс — **конденсацией**. Для превращения жидкости в пар ей необходимо сообщить количество теплоты

$$Q_{\text{п}} = rm, \quad (7.3)$$

где m — масса жидкости, а r — удельная теплота парообразования при данной температуре; при конденсации пара происходит выделение такого же количества теплоты

$$|Q_{\text{к}}| = rm \text{ или } Q_{\text{к}} = -rm (Q_{\text{к}} < 0).$$

При определенной температуре (**температуре плавления**) кристаллические тела могут переходить в жидкое состояние. Этот процесс называется плавлением, обратный процесс — кристаллизацией. Для того чтобы расплавить тело массой m , ему необходимо сообщить количество теплоты

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m, \quad (7.4)$$

где λ — удельная теплота плавления вещества; при кристаллизации выделяется такое же количество теплоты

$$|Q_{\text{к}}| = \lambda m \text{ или } Q_{\text{кр}} = -\lambda m (Q_{\text{кр}} < 0).$$

При теплообмене между телами количество теплоты Q_1 , отдаваемое более нагретым телом, взятое по модулю, равно количеству теплоты Q_2 , получаемому более холодным телом. При этом $Q_1 < 0$, а $Q_2 > 0$, поэтому

$$|Q_1| = Q_2 \Leftrightarrow -Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow Q_1 + Q_2 = 0. \quad (7.5)$$

Это уравнение называется **уравнением теплового баланса**. Уравнение теплового баланса применяют и в том случае, когда в теплообмене участвует более двух тел.

4. Работа в термодинамике

Работу, которую совершает газ над окружающими телами при его расширении, называют **термодинамической работой**. Если происходит расширение газа, то термодинамическая работа положительна: $A > 0$. Когда газ сжимают, то внешние силы производят положительную работу: $A_{\text{внеш}} > 0$. Термодинамическая работа газа при его сжатии отрицательна: $A < 0$. Работа внешних сил и термодинамическая работа равны по модулю и всегда отличаются знаком: $A = -A_{\text{внеш}}$.

В дальнейшем, говоря о термодинамической работе, мы будем подразумевать работу, совершаемую идеальным газом.

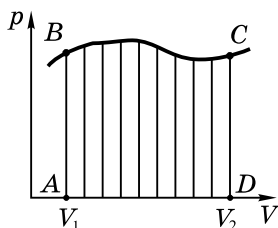


Рис. 121

Для определения работы газа в произвольном процессе $p(V)$ необходимо построить график этого процесса в осях p, V . **Работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 численно равна площади криволинейной трапеции $ABCD$ (см. рис. 121):**

$$A = S_{ABCD} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (7.6)$$

5. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам

Первый закон термодинамики — это закон сохранения энергии, примененный к тепловым явлениям. Согласно этому закону, количество теплоты Q , переданное системе, идет на изменение ее внутренней энергии ΔU и на работу A , которую система совершает над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A. \quad (7.7)$$

В формуле (7.7) изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$, где U_2 — конечное значение внутренней энергии, а U_1 — ее начальное значение.

Из первого закона термодинамики следует, что внутренняя энергия системы изменяется при совершении работы и при передаче количества теплоты. При этом важно понимать, что в каждом состоянии система обладает определенной внутренней энергией. Количество теплоты и работа показывают, как изменяется внутренняя энергия системы.

Рассмотрим применение первого закона термодинамики к различным процессам в идеальных газах.

1. Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Так как $U \sim T$, то в изотермическом процессе $U = \text{const}$, т. е. внутренняя энергия не меняется. Поэтому $\Delta U = 0$ и первый закон термодинамики для процесса запишется в виде $Q = A$ (вся сообщенная газу теплота идет на совершение работы).

2. Изохорный процесс ($V = \text{const}$). Так как $V = \text{const}$, то $A = 0$ и первый закон термодинамики запишется в виде $Q = \Delta U$ (вся сообщенная газу теплота идет на изменение внутренней энергии).

3. Изобарный процесс ($p = \text{const}$). В этом процессе сообщенная газу теплота расходуется как на изменение внутренней энергии, так и на совершение работы. Для вычисления работы в изобарном процессе можно вос-

пользоваться графиком зависимости $p(V)$ (см. рис. 122) и найти, что

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \quad (7.8)$$

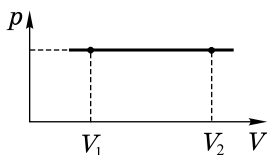


Рис. 122

В изобарном процессе работа равна произведению давления на изменение объема ΔV .

На примере трех рассмотренных процессов видно, что термодинамическая работа зависит от того, в каком процессе она совершается.

4. Адиабатный процесс. По определению, в этом процессе $Q=0$, поэтому первый закон термодинамики записывается в виде $A = -\Delta U = U_1 - U_2$, где U_1 и U_2 — соответственно начальное и конечное значения внутренней энергии. Если $A > 0$ (газ расширяется), то $\Delta U = -A < 0 \Rightarrow U_2 - U_1 < 0 \Rightarrow U_2 < U_1 \Rightarrow T_2 < T_1$. Итак, при адиабатном расширении температура газа уменьшается. Наоборот, адиабатное сжатие приводит к увеличению температуры. Для идеального одноатомного газа

$$A = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2),$$

где T_1 и T_2 — начальное и конечное значения температуры.

5. Замкнутый процесс (цикл). В ходе замкнутого процесса газ возвращается в состояние с исходными параметрами p , V , T . Пример замкнутого процесса приведен на рис. 123. Так как газ возвращается в исходное состояние с той же температурой, то $\Delta U = 0$. Первый закон термодинамики для замкнутого процесса запишется в виде $Q = A$, где A — работа за цикл. **В замкнутом процессе работа**

численно равна площади фигуры, ограниченной графиком $p(V)$ (см. рис. 123).

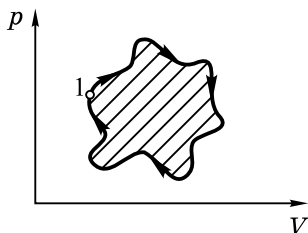


Рис. 123

6. Теплоемкость идеального газа в изохорном и изобарном процессах

Пусть над 1 моле идеального газа совершается изохорный процесс: $V = \text{const}$. Теплоемкость 1 моля идеального газа (молярная теплоемкость) $c_V = Q / \Delta T$, где ΔT — изменение температуры газа. Количество теплоты, сообщенное газу, $Q = \Delta U$, поэтому теплоемкость газа в изохорном процессе

$$c_V = \Delta U / \Delta T. \quad (7.9)$$

Если газ одноатомный, то

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Следовательно, для идеального одноатомного газа

$$c_V = 3R / 2. \quad (7.10)$$

Пусть над 1 моле идеального газа совершается изобарный процесс: $p = \text{const}$. Молярная теплоемкость в этом процессе

$$c_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} = c_V + \frac{A}{\Delta T} = c_V + \frac{p\Delta V}{\Delta T}.$$

Для твердых и жидких веществ объем мало зависит от температуры, т. е. $\Delta V / \Delta T \rightarrow 0$. Поэтому для твердых и жидких веществ $c_p = c_v$.

Для идеальных газов $\Delta V / \Delta T \neq 0$. Запишем уравнение Менделеева—Клапейрона для начального и конечного состояний в изобарном процессе. Мы получим, что $pV_1 = RT_1$ и $pV_2 = RT_2$. После вычитания этих уравнений найдем

$$p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) \Rightarrow p\Delta V = R\Delta T \Rightarrow \Delta V / \Delta T = R/p \neq 0.$$

Следовательно, $c_p = c_v + R$ или

$$c_p - c_v = R. \quad (7.11)$$

Полученная формула справедлива для любых идеальных газов. Из нее также следует, что $c_p > c_v$.

Если газ является одноатомным, то

$$c_p = 5R / 2. \quad (7.12)$$

7. Второй закон термодинамики. Тепловые машины

Кельвин сформулировал второй закон термодинамики в применении к **тепловым машинам**. Тепловые машины преобразуют тепловую энергию в работу. Все тепловые машины работают по замкнутому процессу (циклу). Согласно второму закону термодинамики в формулировке Кельвина **невозможно осуществить замкнутый процесс, единственным результатом которого было бы превращение в механическую работу теплоты, взятой у какого-нибудь тела, без того, чтобы произошли какие-либо изменения в других телах**. Отсюда следует, что в замкнутом процессе всю полученную теплоту невозможно преобразовать в работу. Часть этой теплоты неизбежно будет передана какому-либо другому телу.

Независимо от конструктивных особенностей любая тепловая машина содержит **нагреватель, рабочее тело,**

холодильник. Рабочим телом у тепловых машин является газ или пар, который совершает работу при расширении. **Нагреватель** — это тело, от которого рабочее тело получает теплоту. **Холодильник** — это тело, которому рабочее тело неизбежно передаст часть теплоты, полученной от нагревателя.

Как было показано, работа в замкнутом процессе равна общему количеству теплоты за цикл: $A=Q$. Количество теплоты $Q=Q_{\text{н}}+Q_{\text{х}}$, где $Q_{\text{н}}>0$ — теплота, получаемая от нагревателя, $Q_{\text{х}}<0$ — теплота, отдаваемая холодильнику. Тогда работа $A=Q_{\text{н}}+Q_{\text{х}}$ или

$$A = Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|. \quad (7.13)$$

Другими словами, работа, которую совершает тепловая машина за цикл, равна разности между теплотой, полученной от нагревателя, и теплотой, отданной холодильнику.

Эффективность преобразования теплоты в работу количественно оценивается при помощи коэффициента полезного действия тепловой машины (КПД):

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}}. \quad (7.14)$$

Если КПД необходимо выразить в процентах, то η умножают на 100%.

Максимальным КПД обладает идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, состоящему из двух изотерм 1–2 и 3–4 и двух адиабат 2–3 и 4–1 (см. рис. 124), причем

$$\eta_{\text{max}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} = 1 - \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}, \quad (7.15)$$

где $T_{\text{н}}$ — температура нагревателя, $T_{\text{х}}$ — температура холодильника.

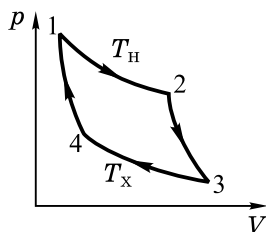


Рис. 124

Из формулы (7.15) следует, что для увеличения КПД тепловой машины необходимо увеличить разность между температурами нагревателя и холодильника.

8. Свойства реального газа

Реальный газ отличается от идеального тем, что в нем нельзя пренебречь взаимодействием молекул. Рассмотрим изотермическое сжатие реального газа: $T_1 = \text{const}$ (см. рис. 125). При больших объемах свойства реального газа близки к свойствам идеального (участок $a-b$ на изотерме $T_1 = \text{const}$ и участок $c-d$ на изотерме $T_2 = \text{const}$, $T_2 > T_1$). Газ на этих участках называют **ненасыщенным паром**. При дальнейшем сжатии из-за возрастающего взаимодействия между молекулами газ начнет конденсироваться (объем V_1 на изотерме $T_1 = \text{const}$ и V'_1 на изотерме $T_2 = \text{const}$, причем при $T_2 > T_1$ $V'_1 < V_1$). Образуется система, состоящая из жидкости и пара (участки $V_1 - V_2$ и $V'_1 - V'_2$ на изотермах). При постоянном объеме количество молекул, покидающих жидкость, равно количеству молекул, возвращающихся в нее. Такое состояние называется **динамическим равновесием**. Пар, находящийся при фиксированной температуре и объеме в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным**. Давление и плотность насыщенного пара не зависят от объема и остаются постоянными в процессе дальнейшего сжатия. При объемах V_2 и V'_2 весь

пар превращается в жидкость. Отметим, что при $T_2 > T_1$ $V'_2 > V_2$. Таким образом, с ростом температуры длина горизонтального участка уменьшается и при температуре $T_{кр}$, называемой критической, обращается в нуль. При температуре выше критической пар невозможно превратить в жидкость никаким сжатием.

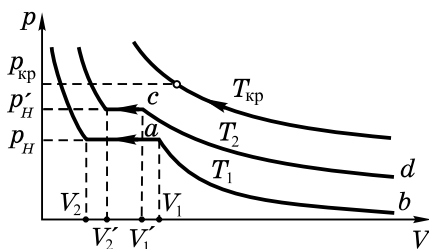


Рис. 125

Давление насыщенного пара с ростом температуры возрастает быстрее, чем давление ненасыщенного пара (см. рис. 126). Это объясняется тем, что с ростом температуры не только возрастает средняя кинетическая энергия молекул пара, но и растет их концентрация.

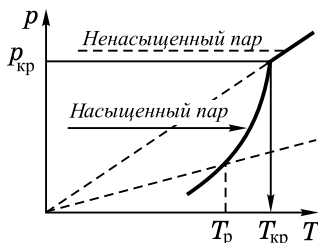


Рис. 126

При объемах, меньших V_2 , весь пар превращается в жидкость, давление которой резко возрастает при незначительном уменьшении объема.

9. Влажность воздуха

Известно, что одной из важнейших составляющих атмосферного воздуха являются водяные пары. Влажный воздух принято характеризовать следующими параметрами:

- **плотность водяных паров (абсолютная влажность)** — масса водяных паров в 1 м^3 воздуха;
- **упругость водяных паров p** — парциальное давление водяных паров;
- **относительная влажность воздуха:**

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\% = \frac{\rho}{\rho_n} \cdot 100\%, \quad (7.16)$$

где p_n — давление, а ρ_n — плотность насыщенных водяных паров при данной температуре. Из рис. 126 видно, что ненасыщенные водяные пары становятся насыщенными при их охлаждении. Соответствующая этому переходу температура называется **точкой росы T_p** .

Парообразование может происходить при любой температуре жидкости. Если этот процесс происходит с поверхности жидкости, то его называют **испарением**. Однако возможен процесс, когда пузырьки насыщенного пара образуются по всему объему жидкости с последующим всплыванием их на поверхность. Этот процесс называют **кипением**. При кипении давление насыщенного пара должно быть равно внешнему давлению. Важно знать, что давление насыщенных водяных паров при 100°C равно нормальному атмосферному давлению, т. е. $p_n = p_0 = 10^5 \text{ Па}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Идеальный газ, масса которого m и молярная масса μ , расширяется изобарно при некотором давлении. Начальная температура газа T_1 , конечная T_2 . Определить работу, совершаемую газом.

Решение

Работа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

$$\text{и } pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \Rightarrow A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Оказалось, что работу в изобарном процессе можно выразить не только через изменение объема по формуле $A = p\Delta V$, но и через изменение температуры: $A = (m / \mu) R\Delta T$. Полученный результат следует иметь в виду, так как он часто используется при решении более сложных задач.

2. Гелий (He) нагревается при постоянном давлении. При этом ему сообщено $Q = 20$ кДж теплоты. Определить изменение внутренней энергии газа и совершенную им работу.

Решение

Так как по условию задачи $p = \text{const}$, то совершаемая газом работа $A = p\Delta V = (m / \mu) R\Delta T$, где m — масса газа, μ — его молярная масса, ΔT — изменение температуры.

Гелий — одноатомный газ, поэтому его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T$, а ее изменение $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R\Delta T$.

Сравнивая формулы для работы A и изменения внутренней энергии ΔU , получаем, что $\Delta U = (3 / 2)A$.

Запишем первый закон термодинамики для этого процесса:

$$Q = \Delta U + A = (3 / 2)A + A = (5 / 2)A.$$

Следовательно, работа $A = (5/2)Q = 8$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta U = (3/2)A = 12$ кДж.

3. Температура некоторой массы m идеального газа с молярной массой μ меняется по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2 . Поглощается или выделяется теплота при таком процессе?

Решение

Процесс $T = \alpha V^2$ не является ни изобарным, ни изохорным, ни, тем более, изотермическим. Запишем для любого состояния в этом процессе уравнение Менделеева — Клапейрона: $pV = (m/\mu)RT$. Так как $T = \alpha V^2$, то после подстановки получим зависимость давления от объема в виде $p(V) = \alpha(m/\mu)RV$. График этой зависимости представлен на рис. 127.

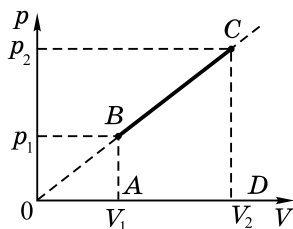


Рис. 127

Совершенная газом работа

$$A = S_{ABCD} = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{m}{\mu} R V_1 + \alpha \frac{m}{\mu} R V_2 \right) (V_2 - V_1) = \frac{\alpha m}{2 \mu} R (V_2^2 - V_1^2).$$

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся первым законом термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Так как газ расширяется, то его работа $A > 0$. Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально изменению

температуры: $\Delta U \sim \Delta T$. Так как $T = \alpha V^2$ и объем возрастает, то возрастает и температура, поэтому $\Delta U > 0$. Тогда и $Q > 0$, что соответствует поглощению газом теплоты.

4. При адиабатном сжатии 1 моля одноатомного газа внешними силами была совершена работа A . Во сколько раз увеличилась среднеквадратичная скорость молекул этого газа, если начальная температура газа равна T_1 ?

Решение

Первый закон термодинамики для адиабатного процесса записывается в виде $0 = \Delta U + A_r$, где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A_r — работа газа в этом процессе. Так как газ сжимают, то $A < 0$, в то же время внешние силы совершают положительную работу A , причем $A_r = -A$. Следовательно, $0 = \Delta U - A \Rightarrow A = \Delta U = U_2 - U_1$. Внутренняя энергия 1 моля идеального одноатомного газа $U = 3RT/2$, поэтому $A = 3RT_2/2 - 3RT_1/2$. Отсюда выражаем конечную температуру газа $T_2 = T_1 + 2A/(3R)$.

Средняя кинетическая энергия молекул

$$m_0 \overline{v^2}/2 = 3k_B T/2,$$

где T — температура. Тогда среднеквадратичная скорость

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{1 + \frac{2A}{3RT_1}}.$$

5. Какое количество теплоты получит 1 моль идеального одноатомного газа при изобарном нагревании от некоторой начальной температуры и последующем адиабатном расширении, если при адиабатном расширении газ совершает работу A , а в конечном состоянии температура равна начальной?

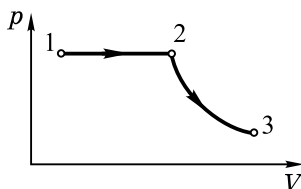


Рис. 128

Решение

Построим график зависимости давления от объема в осях p, V (см. рис. 128): 1–2 — изобарное нагревание, сопровождаемое увеличением объема; 2–3 — адиабатное расширение. Работа в адиабатном процессе

$$A = \Delta U = -(U_3 - U_2) = U_2 - U_3 = 3R(T_2 - T_3) / 2 = 3R(T_2 - T_1) / 2, \text{ т. к. } (T_3 = T_1).$$

$$\text{Следовательно, } T_2 - T_1 = 2A / (3R). \quad (1)$$

Количество теплоты, полученное газом в изобарном процессе,

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + A_{1-2} = (U_2 - U_1) + p\Delta V = \\ &= 3RT_2 / 2 - 3RT_1 / 2 + R(T_2 - T_1) = \\ &= 3R(T_2 - T_1) / 2 + R(T_2 - T_1) = 5R(T_2 - T_1) / 2 \end{aligned}$$

(см. задания 1 и 2).

Подставляя из формулы (1) разность температур

$$T_2 - T_1, \text{ находим, что } Q = \frac{5}{2}R \cdot \frac{2A}{3R} = \frac{5}{3}A.$$

6. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T , охлаждается изохорно так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Молярная масса газа μ . Определить совершенную газом работу.

Решение

График указанного процесса приведен на рис. 129. Здесь 1–2 — изохора, 2–3 — изобара.

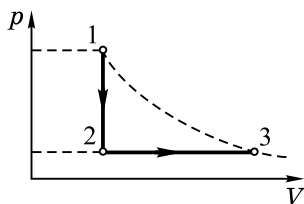


Рис. 129

Искомая работа $A = A_{1-2} + A_{2-3}$, где A_{1-2} — работа на участке 1–2, а A_{2-3} — работа на участке 2–3. На участке 1–2 $V = \text{const}$, поэтому $A_{1-2} = 0$. На участке 2–3 $p = \text{const}$ и $A = A_{2-3} = p_2(V_3 - V_2)$.

Выражения подобного вида преобразовывают так, чтобы выделить произведение давления на объем в состоянии, в котором задана температура: $A = p_2(V_3 - V_2) = p_3(V_3 - V_2) = p_3 V_3(1 - V_2/V_3)$ (здесь учтено, что $p_2 = p_3$).

Из уравнения Менделеева — Клапейрона для состояния (3) находим, что

$$p_3 V_3 = (m/\mu)RT; \quad A = (m/\mu)RT(1 - V_2/V_3) = (m/\mu)RT(1 - V_1/V_3), \quad (1)$$

так как $V_1 = V_2$. Из состояния 1 в состояние 3 можно переходить по изотерме 1–3 (в этом случае говорят, что точки 1 и 3 расположены на одной изотерме). По закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{n}.$$

После подстановки в формулу (1) получим $A = (m/\mu)RT(1 - 1/n)$.

7. Один моль идеального газа изменяет свое состояние по циклу, изображенному на рис. 130, где линии 4–1 и 2–3 — изохоры, 3–4 — изобара, 1–2 — процесс с линейной зависимостью давления от объема. Температуры в состояниях 1, 2, 3, 4 равны соответственно

T_1, T_2, T_3, T_4 . Какую работу совершает газ за один цикл?

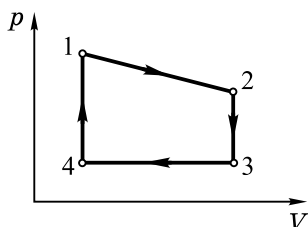


Рис. 130

Решение

В замкнутом процессе (цикле) работа равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла, т. е.

$$\begin{aligned} A = S_{1-2-3-4} &= \frac{(p_1 - p_4) + (p_2 - p_3)}{2} (V_3 - V_4) = \\ &= \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{2} (V_3 - V_4), \end{aligned}$$

так как $p_3 = p_4$.

В полученном выражении вынесем за скобки p_3 и V_3 , тогда формула для работы переписется в виде

$$A = \frac{p_3 V_3}{2} \left(\frac{p_1}{p_3} + \frac{p_2}{p_3} - 2 \right) \left(1 - \frac{V_4}{V_3} \right). \quad (1)$$

Для состояния 3 уравнение Менделеева — Клапейрона $p_3 V_3 = RT_3$. По закону Шарля для участков 2–3 и 4–1 получаем $-\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$ и $\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_1}{p_4} = \frac{T_1}{T_4}$. По закону Гей-Люссака для участка 3–4 находим $V_4 / V_3 = T_4 / T_3$.

Подставляя найденные отношения в формулу (1) для работы, получаем

$$A = \frac{RT_3}{2} \left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2 \right) \left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right) = \frac{R(T_3 - T_4)}{2} \left(\frac{T_1}{T_4} + \frac{T_2}{T_3} - 2 \right).$$

8. Тепловая машина имеет КПД $\eta = 40\%$. Каким станет КПД машины, если количество теплоты, потребляемое за цикл, увеличится на 20% , а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшится на 10% ?

Решение

По определению, $\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - |Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} = 0,4$, где

$Q_{\text{н}}$ — теплота, полученная от нагревателя, а $|Q_{\text{х}}|$ — теплота, отдаваемая холодильнику. Следовательно, отношение $|Q_{\text{х}}|/Q_{\text{н}} = 0,6$.

Во втором случае получаемая теплота $Q'_{\text{н}} = 1,2Q_{\text{н}}$ (возросла на 20%), а отдаваемая теплота $|Q'_{\text{х}}| = 0,9|Q_{\text{х}}|$ (уменьшилась на 10%). Новое значение

$$\eta' = \frac{|Q'_{\text{х}}|}{Q'_{\text{н}}} = 1 - \frac{0,9|Q_{\text{х}}|}{1,2Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}} \right) = 1 - \frac{3}{4} \cdot 0,6 = 0,55,$$

или 55% .

9. Найти коэффициент полезного действия тепловой машины, рабочим телом которой является 1 моль идеального одноатомного газа. Машина работает по циклу, изображенному на рис. 131, где линии 1–2 — изохора, 3–1 — изобара.

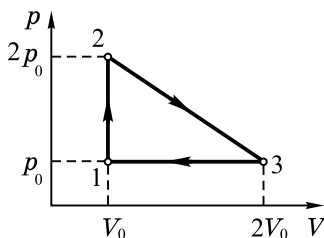


Рис. 131

Решение

Найдем температуру газа в состоянии 1, используя уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$p_0 V_0 = RT_1 \Rightarrow T_1 = p_0 V_0 / R.$$

Для состояния 2 получаем

$$2p_0 V_0 = RT_2 \Rightarrow T_2 = 2p_0 V_0 / R.$$

В состоянии 3:

$$2p_0 V_0 = RT_3 \Rightarrow T_3 = 2p_0 V_0 / R.$$

Тот факт, что $T_2 = T_3$, вовсе не означает, что 2–3 — изотермический процесс. Из рис. 131 видно, что это — процесс, в котором давление зависит от объема по линейному закону.

Работа газа за цикл численно равна площади прямоугольного треугольника: $A = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) / 2 = p_0 V_0 / 2$.

Рассмотрим участок 1–2, где $V_0 = \text{const}$. Используя первый закон термодинамики, получаем, что количество теплоты на этом участке

$$\begin{aligned} Q_{1-2} &= \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}RT_2 - \frac{3}{2}RT_1 = \\ &= \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R\left(\frac{2p_0 V_0}{R} - \frac{p_0 V_0}{R}\right) = \frac{3}{2}p_0 V_0 > 0. \end{aligned}$$

Газ на этом участке теплоту получает.

Рассмотрим участок 2–3. Первый закон термодинамики записывается в виде

$$Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}. \quad (1)$$

Изменение внутренней энергии на этом участке

$$\Delta U = U_3 - U_2 = 3R(T_3 - T_2) / 2 = 0.$$

Работа на участке 2–3 численно равна площади трапеции, ограниченной графиком процесса и прямыми $V = V_0$ и $V = 2V_0$. Итак,

$$A_{2-3} = \frac{2p_0 + p_0}{2}(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0 V_0.$$

Подставляя это в формулу (1), находим, что $Q_{2-3} = 3p_0V_0 / 2 > 0$. И на этом участке газ теплоту получает.

Рассмотрим участок 3–1, где $p_0 = \text{const}$. Количество теплоты

$$Q_{3-1} = \Delta U + A_{3-1}.$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = U_1 - U_3 = 3R(T_1 - T_3) / 2 = -3p_0V_0 / 2.$$

Работа $A_{3-1} = p_0\Delta V = p_0(V_0 - 2V_0) = -p_0V_0$. Таким образом, $Q_{3-1} = -5p_0V_0 / 2 < 0$. На этом участке газ теплоту отдает.

Теплота, полученная от нагревателя,

$$Q_H = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 3p_0V_0 / 2 + 3p_0V_0 / 2 = 3p_0V_0.$$

Коэффициент полезного действия $\eta = A / Q_H = 1 / 6$ или $\eta = 16,7\%$.

10. Найти КПД тепловой машины, работающей с ν молями одноатомного идеального газа по циклу, состоящему из адиабатного расширения 1–2, изотермического сжатия 2–3 и изохорного процесса 3–1 (см. рис. 132). Работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, равна A . Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT .

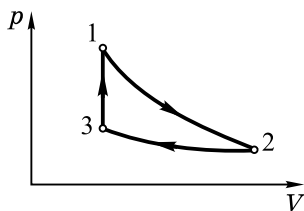


Рис. 132

Решение

Проследим за изменением температуры в этом цикле. При адиабатном расширении 1–2 температура газа уменьшается, поэтому $T_2 < T_1$. При изотермическом сжа-

тии 2–3 температура постоянна, поэтому $T_3 = T_2$. На изохоре 3–1 температура возрастает, поэтому $T_1 > T_3$. Таким образом, максимальная температура в цикле T_1 , а минимальная достигается на изотерме. Разность между максимальной и минимальной температурами $\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - T_3$.

По определению КПД тепловой машины $\eta = A_0 / Q_{\text{н}}$, где A_0 — работа за цикл, а $Q_{\text{н}}$ — теплота, полученная от нагревателя. Вычислить работу за цикл A_0 как площадь фигуры здесь не представляется возможным, так как в школе не изучают уравнение адиабатного процесса. Работу за цикл выразим как сумму работ на отдельных участках:

$$A_0 = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1}.$$

В адиабатном процессе 1–2 работа

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= -\Delta U = -(U_2 - U_1) = \frac{3}{2} \nu R T_1 - \frac{3}{2} \nu R T_2 = \\ &= \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \end{aligned}$$

Количество теплоты в этом процессе $Q_{1-2} = 0$.

При изотермическом сжатии 2–3 работа газа отрицательна и равна работе внешних сил над газом, взятой со знаком минус, т. е. $A_{2-3} = -A$. Количество теплоты на этом участке $Q_{2-3} = \Delta U + A_{2-3}$, причем $\Delta U = 0$. Поэтому $Q_{2-3} = -A < 0$. Здесь газ теплоту отдает.

На изохоре 3–1 работа $A_{3-1} = 0$, а количество теплоты

$$\begin{aligned} Q_{3-1} &= \Delta U = U_1 - U_3 = \frac{3}{2} \nu R T_1 - \frac{3}{2} \nu R T_3 = \\ &= \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_3) = \frac{3}{2} \nu R \Delta T > 0; \end{aligned}$$

на этом участке газ теплоту получает. Итак, работа за цикл $A_0 = (3/2) \nu R \Delta T - A$; теплота, полученная от нагревателя $Q_{\text{н}} = Q_{3-1} = (3/2) \nu R \Delta T$. После этого легко находим

$$\eta = \frac{(3/2) \nu R \Delta T - A}{(3/2) \nu R \Delta T} = 1 - \frac{2}{3} \frac{A}{\nu R \Delta T}.$$

- 11.** Теплоизолированный сосуд разделен на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда находится 1 моль идеального одноатомного газа, а в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружинкой, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Определить теплоемкость системы. Теплоемкостью сосуда, поршня и пружины можно пренебречь (см. рис. 133).

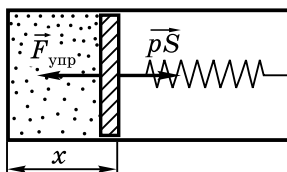


Рис. 133

Решение

По определению теплоемкость $c = Q / \Delta T$, где Q — количество теплоты, сообщенное газу, а ΔT — изменение его температуры. Выражая Q через изменение внутренней энергии ΔU и термодинамическую работу A , получим

$$c = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T}. \quad (1)$$

Как было показано в пункте 6 этого раздела, $\Delta U / \Delta T = c_V$, и поскольку дан 1 моль идеального одноатомного газа, то $c_V = 3R / 2$.

В результате нагревания газа поршень смещается на некоторое расстояние x . Пусть в этом состоянии давле-

ние газа p , температура T , а объем $V=Sx$, где S — площадь сечения поршня. Эти параметры связаны уравнением Менделеева — Клапейрона

$$pV=RT. \quad (2)$$

При этом на поршень действуют сила давления газа, pS и сила упругости пружины, модуль которой $F_{\text{упр}}=kx$, где k — коэффициент жесткости пружины, x — ее деформация. В любом равновесном состоянии выполняется равенство

$$pS - F_{\text{упр}} = 0 \Leftrightarrow pS = kx. \quad (3)$$

Разделив равенство (2) на (3), получим

$$\frac{V}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow \frac{Sx}{S} = \frac{RT}{kx} \Rightarrow T = \frac{kx^2}{R} = \frac{k}{R} \left(\frac{V}{S} \right)^2.$$

Подставляя это в равенство (2), находим зависимость давления от объема в этом процессе:

$$p(V) = \frac{RT}{V} = \frac{R}{V} \frac{k}{R} \left(\frac{V}{S} \right)^2 = \frac{k}{S^2} V. \quad (4)$$

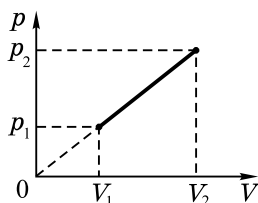


Рис. 134

Как видно, зависимость эта линейная, ее график представлен на рис. 134. Пусть газ расширяется от объема V_1 до объема V_2 . Тогда его давление изменяется от $p_1 = kV_1/S^2$ до $p_2 = kV_2/S^2$. Работа газа численно равна площади трапеции с основаниями p_1 и p_2 и высотой $(V_2 - V_1)$.

Итак,

$$A = \frac{(p_2 + p_1)}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{S^2} V_2 + \frac{k}{S^2} V_1 \right) (V_2 - V_1) = \\ = \frac{1}{2} \frac{k}{S^2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{S^2} V_2^2 - \frac{k}{S^2} V_1^2 \right).$$

Из равенства (4) следует, что $\frac{k}{S^2} V^2 = RT$, поэтому $A = \frac{RT_2 - RT_1}{2} = \frac{R}{2} \Delta T$. В равенстве (1) отношение $A / \Delta T = R / 2$, поэтому искомая теплоемкость $c = 3R / 2 + R / 2 = 2R$.

12. В длинной гладкой теплоизолированной трубе между двумя поршнями с одинаковой массой m находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0 . В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны $5v$ и v . До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Массой газа по сравнению с массой поршней можно пренебречь (см. рис. 135).

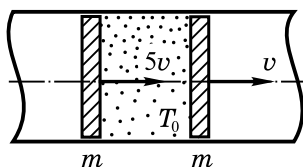


Рис. 135

Решение

Система, состоящая из двух поршней и 1 моля идеального газа, в начальный момент времени обладает энергией, равной сумме кинетических энергий поршней и внутренней энергии газа, т. е.

$$W_1 = m(5v)^2 / 2 + mv^2 / 2 + 3RT_0 / 2.$$

При этом начальный импульс системы направлен слева направо и его модуль равен $P_1 = 5mv + mv = 6mv$.

Так как начальная скорость левого поршня больше, чем правого, то газ между поршнями подвергается сжатию. При этом скорость правого поршня возрастает, а скорость левого — убывает. Так как система теплоизолирована, то сжатие газа приводит к росту его температуры. Отсюда следует, что температура перестает расти и достигает максимума в тот момент, когда прекращается сжатие, а это соответствует равенству скоростей поршней. Пусть скорость поршней в этот момент равна u . Энергия системы $W_2 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{3}{2}RT_{\max}$, а ее

импульс $P_2 = mu + mu = 2mu$.

Используя закон сохранения импульса и энергии, получаем систему

$$\begin{cases} P_1 = P_2, \\ W_1 = W_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6mv = 2mu, \\ \frac{26mv^2}{2} + \frac{3}{2}RT_0 = \frac{2mu^2}{2} + \frac{3}{2}RT_{\max}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v, \\ 26mv^2 + 3RT_0 = 2mu^2 + 3RT_{\max}, \end{cases} \Rightarrow T_{\max} = T_0 + \frac{8mv^2}{3R}.$$

13. В калориметре плавает в воде кусок льда. В калориметр опускают нагреватель постоянной мощности $P = 50$ Вт и начинают ежеминутно измерять температуру воды. В течение первой и второй минут температура воды не изменяется, к концу третьей минуты — увеличивается на $\Delta t_1 = 2^\circ\text{C}$, а к концу четвертой — еще на $\Delta t_2 = 5^\circ\text{C}$. Сколько граммов воды и льда было изначально в калориметре? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г, удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ Дж/(г \cdot $^\circ\text{C}$).

Решение

Найдем зависимость температуры t от времени τ . Из условия задачи следует, что начальная температура воды и льда в калориметре $t=0^\circ\text{C}$. В течение некоторого времени температура в калориметре не изменяется, так как вся сообщаемая теплота идет на плавление льда. Лед растает в момент времени $\tau_x \geq 2$ мин, после чего в калориметре образуется вода, масса которой $m_{\text{л}} + m_{\text{в}}$, где $m_{\text{л}}$ и $m_{\text{в}}$ — начальное количество льда и воды в калориметре.

При $\tau > \tau_x$ время нагревания воды равно $\tau - \tau_x$, сообщенная нагревателем теплота $Q = P(\tau - \tau_x)$. Это количество теплоты идет на нагревание воды от 0°C до некоторой температуры $t^\circ\text{C}$, поэтому $Q = c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})t$. Получаем равенство

$$P(\tau - \tau_x) = c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})t \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{P(\tau - \tau_x)}{c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})} = \frac{P}{c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})}\tau - \frac{P}{c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})}\tau_x.$$

Таким образом, при $\tau > \tau_x$ температура воды в калориметре есть линейная функция от времени t . График зависимости $t(\tau)$ представлен на рис. 136. Линейную зависимость на этом графике можно представить в виде $t(\tau) = k\tau + b$.

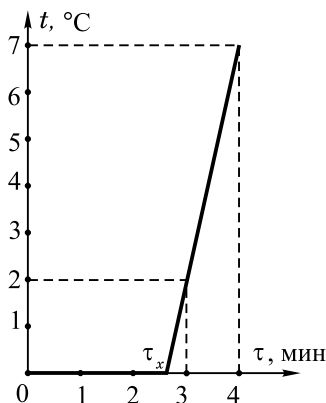


Рис. 136

Так как известны две точки, принадлежащие этой прямой, то можно найти коэффициенты k и b этой зависимости. При $\tau=3$ $t=2$, при $\tau=4$ $t=7$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3k+b=2, \\ 4k+b=7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5, \\ b=-13, \end{cases} \Rightarrow t(\tau)=5\tau-13.$$

Теперь легко определить момент времени τ_x , когда растает весь лед:

$$5\tau_x - 13 = 0 \Rightarrow \tau_x = 2,6 \text{ мин.}$$

Как уже отмечалось, при $\tau=\tau_x$ вся сообщаемая теплота $P\tau_x$ идет на плавление льда, поэтому

$$P\tau_x = \lambda m_{\text{л}} \Rightarrow m_{\text{л}} = P\tau_x / \lambda = 2,36 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 23,6 \text{ г.}$$

При $\tau=3$ мин=180 с имеем равенство

$$\begin{aligned} P(\tau - \tau_x) &= c(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})\Delta t_1 \Rightarrow m_{\text{в}} = \\ &= \frac{P(\tau - \tau_x)}{c\Delta t_1} - m_{\text{л}} = 119,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 119,3 \text{ г.} \end{aligned}$$

(Напомним, что $\Delta t_1 = 2$ °С.)

14. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массой $M=0,1$ кг, в который вмерзла свинцовая дробинка массой $m=5$ г. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Теплота плавления льда $\lambda=3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Температура воды в сосуде 0 °С; плотность льда $\rho_{\text{л}}=0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность свинца $\rho_{\text{св}}=11,3 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}}=10^3$ кг/м³.

Решение

Дробинка начнет тонуть, если средняя плотность льда вместе с дробинкой станет равной или больше плотности воды: $\rho_{\text{ср}} \geq \rho_{\text{в}}$. Пусть $M_{\text{л}}$ — масса оставшегося льда, тог-

да объем оставшегося куска $V = M_{\text{л}} / \rho_{\text{в}} + m / \rho_{\text{св}}$. Средняя плотность куска льда вместе с дробинкой

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{л}} + m}{V} = \frac{M_{\text{л}} + m}{M_{\text{л}} / \rho_{\text{л}} + m / \rho_{\text{св}}} = \rho_{\text{в}} \Rightarrow M_{\text{л}} = m \frac{1 - \rho_{\text{в}} / \rho_{\text{св}}}{\rho_{\text{в}} / \rho_{\text{л}} - 1} = 41 \text{ г.}$$

Таким образом, должна растаять масса льда $M - M_{\text{л}} = 59 \text{ г.}$ Для этого необходимо сообщить количество теплоты $Q = \lambda(M - M_{\text{л}}) = 19,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$

15. В комнате объемом $V = 50 \text{ м}^3$ воздух имеет температуру $t = 27^\circ \text{C}$ и относительную влажность $\phi_1 = 30\%$. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\alpha = 2 \text{ кг/ч}$, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $\phi_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров при $t = 27^\circ \text{C}$ $p_{\text{н}} = 3565 \text{ Па}$, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Решение

Относительная влажность воздуха $\phi_1 = p_1 / p_{\text{н}} = 0,3$. Здесь $p_1 = \phi_1 p_{\text{н}}$ — давление ненасыщенных водяных паров. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона $p_1 V = (m_1 / \mu) RT$, откуда масса водяных паров

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu}{RT} = \frac{\phi_1 p_{\text{н}} V \mu}{RT}.$$

После того как относительная влажность воздуха в комнате стала равна ϕ_2 , давление водяных паров $p_2 = \phi_2 p_{\text{н}}$. Масса водяных паров увеличилась и стала равной $m_2 = \frac{\phi_2 p_{\text{н}} V \mu}{RT}$. Следовательно, дополнительно испарилось $(m_2 - m_1)$ воды. Для этого потребовалось время

$$t = \frac{m_2 - m_1}{\alpha} = \frac{p_{\text{н}} V \mu}{\alpha RT} (\phi_2 - \phi_1) = 0,26 \text{ ч} = 15,5 \text{ мин.}$$

РАЗДЕЛ 8

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Электрический заряд и его свойства

Тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать **электрический заряд**. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами. Существует два вида зарядов: **положительные** и **отрицательные**. Заряды одного знака отталкиваются, а разных знаков — притягиваются. В электростатике изучают свойства неподвижных зарядов и электрических полей, ими создаваемых.

Существует минимальный электрический заряд, который называют **элементарным**. Им обладает элементарная частица — **электрон**. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд другой элементарной частицы — протона $|e| = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Тело заряжено в том случае, когда оно содержит избыточное количество элементарных частиц с одним знаком заряда. Заряд любого тела кратен элементарному:

$$q = \pm N|e|, \quad (8.1)$$

где N — натуральное число.

Значение заряда не зависит от скорости его движения.

Важнейшим законом электростатики является **закон сохранения заряда**: в замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.

2. Закон Кулона

Заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других заряженных тел, называют **точечным зарядом**.

Взаимодействие точечных зарядов описывается **законом Кулона**: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_K = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (8.2)$$

Здесь q_1 и q_2 — значения зарядов, r — расстояние между ними, k — коэффициент пропорциональности; в системе СИ $k = 1 / (4\pi\epsilon_0)$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. Таким образом, в системе СИ

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Силы взаимодействия между точечными зарядами направлены вдоль прямой, соединяющей заряды, и являются силами притяжения, если заряды противоположного знака, и силами отталкивания, если заряды одного знака. На рис. 137 изображено, как взаимодействуют два точечных заряда q_1 и q_2 противоположных знаков.

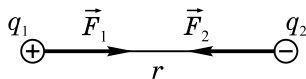


Рис. 137

3. Электростатическое поле

Неподвижные заряды создают в пространстве **электростатическое поле**. Главное свойство электростатического поля — его действие на помещенные в это поле электрические заряды с некоторой силой. Количествен-

ной характеристикой электростатического поля является вектор напряженности \vec{E} .

Напряженность электростатического поля есть векторная величина, равная отношению силы, действующей на точечный заряд q , внесенный в поле, к этому заряду:

$$\vec{E} = \vec{F}_K / q. \quad (8.3)$$

Из (8.3) следует, что действующая на заряд со стороны поля сила

$$\vec{F}_K = q\vec{E}. \quad (8.4)$$

Если $q > 0$, то направление вектора напряженности совпадает с направлением силы \vec{F}_K , действующей на заряд; если $q < 0$, то сила \vec{F}_K направлена противоположно вектору напряженности \vec{E} .

Напряженность поля не зависит ни от заряда q , внесенного в поле, ни от силы \vec{F}_K , действующей на него со стороны поля. Напряженность определяется зарядами, создающими поле, и расстоянием до точек пространства, в которых оно изучается.

Напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом Q :

$$E = k \frac{|Q|}{r^2}. \quad (8.5)$$

В случае когда поле создается не одним, а несколькими зарядами, для вычисления напряженности \vec{E} используют **принцип суперпозиции полей**, согласно которому

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \quad (8.6)$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ — напряженности, создаваемые каждым зарядом в рассматриваемой точке.

Если заряд не является точечным, то он может распределяться по объему заряженного тела, по поверхности, а также вдоль некоторой линии.

Во втором случае распределение заряда описывают **поверхностной плотностью заряда**

$$\sigma = Q / S, \quad (8.7)$$

где Q — заряд, а S — площадь, по которой этот заряд распределен.

Равномерно заряженная сфера радиусом R , на поверхности которой распределен заряд Q , создает электростатическое поле. Пусть r — расстояние, отсчитываемое от центра сферы. При $r < R$ (точки расположены внутри сферы) напряженность $\vec{E} = 0$. При $r > R$ (точки вне сферы) $E = k \frac{|Q|}{r^2}$. График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 138.

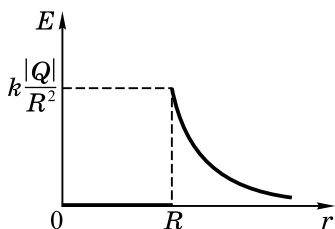


Рис. 138

Бесконечная равномерная заряженная плоскость создает по обе стороны поле, одинаковое по модулю и направлению. Такое поле называют **однородным**. Модуль напряженности этого поля

$$E = |\sigma| / (2\epsilon_0), \quad (8.8)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Для качественного описания электростатического поля используют силовые линии (линии напряженности).

Силовая линия электростатического поля — это линия, касательная к которой в каждой точке совпадает

с направлением вектора \vec{E} . Силовые линии на рисунках проводят, придерживаясь следующих правил:

1. Густота силовых линий (число линий на единицу площади) пропорциональна напряженности.

2. Силовые линии электростатического поля не замкнуты: они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; если отрицательных зарядов нет, то силовые линии, начинаясь на положительных зарядах, уходят в бесконечность; если отсутствуют положительные заряды, то силовые линии оканчиваются на отрицательных зарядах, приходя из бесконечности.

3. Силовые линии электростатического поля не пересекаются.

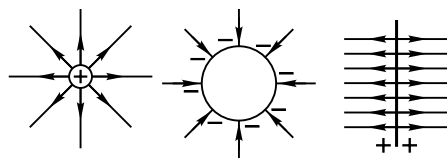


Рис. 139

На рис. 139 изображены силовые линии положительного точечного заряда, отрицательно заряженной (равномерно) сферы, положительно заряженной бесконечной плоскости.

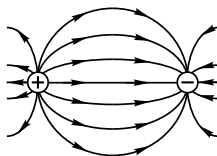


Рис. 140

На рис. 140 изображены силовые линии поля, создаваемого двумя точечными зарядами противоположного знака, равными по модулю.

4. Работа и потенциал электростатического поля

При перемещении заряда q в электростатическом поле сила, действующая на заряд со стороны поля, совершает работу. Работа силы электростатического поля **не зависит от траектории движения заряда** и определяется лишь начальной и конечной точками движения. Если заряд перемещается по замкнутой траектории, то работа равна нулю. Следовательно, сила электростатического поля (ее называют кулоновской силой) является консервативной (потенциальной) подобно гравитационной силе и силе упругости. Электростатическое поле — поле консервативных сил. Заряд q , внесенный в это поле, обладает потенциальной энергией W_p , которая пропорциональна величине заряда.

Потенциалом электростатического поля называют отношение потенциальной энергии заряда в поле к этому заряду:

$$\varphi = W_p / q. \quad (8.9)$$

Потенциал — скалярная величина, которая не зависит от заряда, внесенного в поле. Наряду с напряженностью потенциал является характеристикой поля. Он зависит только от зарядов, создающих поле, и от расстояния до точек пространства, в которых изучается поле.

Потенциальную энергию заряда q можно выразить как

$$W_p = q\varphi. \quad (8.10)$$

Работа консервативных сил $A = -\Delta W_p = -(W_{p2} - W_{p1}) = W_{p1} - W_{p2}$, где W_{p1} и W_{p2} — начальное и конечное значения потенциальной энергии. Таким образом, при перемещении заряда q в электростатическом поле из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 совершается работа $A = q\varphi_1 - q\varphi_2$, или

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (8.11)$$

Величину $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называют **разностью потенциалов**, или **напряжением**.

Значение потенциальной энергии и потенциала в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Например, потенциальная энергия двух точечных зарядов Q и q , расположенных на расстоянии r ,

$$W_p = k \frac{Qq}{r} + C, \quad (8.12)$$

где C — постоянная величина; ее выбирают так, чтобы при $r \rightarrow \infty$ $W_p = 0$. Этому условию удовлетворяет $C = 0$.

Пусть точечный заряд Q создает поле. Потенциал поля в точке, расположенной на расстоянии r от этого заряда,

$$\varphi = k \frac{Q}{r}. \quad (8.13)$$

Для нахождения потенциала поля φ , создаваемого несколькими зарядами, используют принцип суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \quad (8.14)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — потенциалы, создаваемые зарядами в рассматриваемой точке.

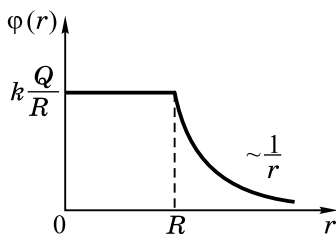


Рис. 141

Сфера радиусом R с равномерно распределенным зарядом Q на ее поверхности создает вне ее ($r > R$) потенциал $\varphi = k \frac{Q}{r}$. Внутри сферы и на ее поверхности ($r \leq R$) по-

тенциал во всех точках одинаков: $\varphi = k \frac{Q}{R}$ (равен потенциалу поверхности). График зависимости $\varphi(r)$ для $Q > 0$ приведен на рис. 141.

Потенциал электростатического поля убывает в направлении силовых линий. Это утверждение справедливо для **любого электростатического поля.**

Напряженность однородного электростатического поля вычисляется по формуле

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2) / d = u / d, \quad (8.15)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2) = u$ — разность потенциалов (напряжение) между точками поля, расположенными на расстоянии d вдоль силовой линии.

Еще одним способом качественного описания электростатического поля является проведение эквипотенциальных поверхностей.

Эквипотенциальная поверхность (в случае плоскости — эквипотенциальная линия) — это поверхность, потенциал всех точек которой одинаков. На рисунках эквипотенциальные поверхности проводят через равное число вольт. Важно отметить, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям. На рис. 142 изображены картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (пунктирная линия) для положительного точечного заряда и отрицательно заряженной плоскости.

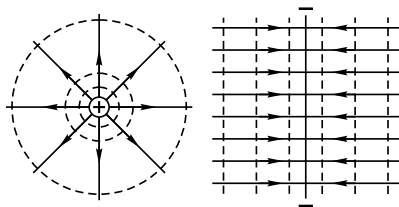


Рис. 142

В случае точечного заряда эквипотенциальные поверхности — сферы, в случае заряженной плоскости — плоскости.

5. Проводники и диэлектрики в электростатическом поле

В проводниках, к которым в первую очередь относятся металлы, имеются заряженные частицы, способные перемещаться внутри проводника под действием электрического поля. Такие частицы называют **свободными зарядами**. В металлах свободными зарядами являются электроны. В 1 см^3 металла содержится около 10^{23} свободных электронов. Поэтому проводники в электростатическом поле проявляют следующие свойства.

1. На концах незаряженного проводника после внесения его в электростатическое поле индуцируются (наводятся) заряды противоположных знаков. Это явление называют **электростатической индукцией**.

2. Электростатическое поле внутри как заряженного проводника, так и проводника, внесенного во внешнее поле, равно нулю.

3. Заряд проводника распределяется на его поверхности.

4. Все точки поверхности проводника имеют одинаковый потенциал.

5. Силовые линии электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника.

В диэлектриках также присутствуют свободные электроны, однако их концентрация составляет $10^3 \div 10^6 \text{ см}^{-3}$, т. е. значительно меньше, чем в металлах. Атомы и молекулы состоят из положительно заряженных частиц — ядер и отрицательно заряженных частиц — электронов. Ядра и электроны в нейтральных атомах образуют **связанные заряды**, которые не могут под действием электрического поля свободно перемещаться по диэлектрику. В неполярном диэлектрике центры распределения поло-

жительных и отрицательных зарядов в молекуле **совпадают, в полярном диэлектрике** — не совпадают. Молекула полярного диэлектрика представляет собой диполь — электронейтральную систему двух точечных зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку, и находящихся на некотором расстоянии друг от друга.

Внешнее электростатическое поле заставляет электроны смещаться против поля, положительные ядра — по направлению поля, т. е. из неполярного диэлектрика становится полярным. Внешнее поле оказывает также ориентирующее воздействие как на полярные, так и на неполярные молекулы: их связанные заряды смещаются в противоположные стороны, их собственное поле направлено против внешнего. Это явление называется **поляризацией диэлектрика** (см. рис. 143).

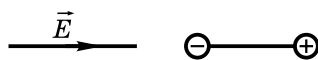


Рис. 143

Тепловое движение препятствует тому, что все молекулы будут ориентированы так, как показано на рис. 143. В результате на поверхности диэлектрика возникает связанный заряд. Внутри диэлектрика связанный заряд равен нулю (см. рис. 144).

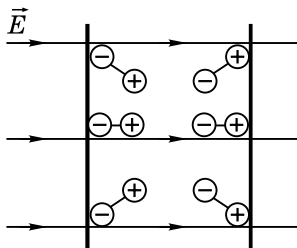


Рис. 144

Электрическое поле в диэлектрике существует, причем его напряженность в ϵ раз меньше напряженности

поля в вакууме; ε — диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon > 1$).

Сила взаимодействия точечных зарядов, расположенных внутри диэлектрика, в ε раз меньше, чем в вакууме. Напряженность и потенциал, создаваемые системами зарядов, находящимися внутри диэлектрика, также уменьшаются в ε раз по сравнению с вакуумом:

$$F'_K = F_K / \varepsilon, \quad E' = E_K / \varepsilon, \quad \varphi' = \varphi / \varepsilon.$$

Здесь F'_K, E', φ' — значения силы, напряженности и потенциала в диэлектрике.

6. Емкость. Плоский конденсатор

Емкостью проводника называют отношение заряда проводника Q к его потенциалу φ :

$$C = Q / \varphi. \quad (8.16)$$

Опыт показывает, что заряд проводника пропорционален его потенциалу. Поэтому емкость не зависит ни от заряда, ни от потенциала и определяется формой и размерами проводника. В частности, шар радиусом R и зарядом Q имеет потенциал поверхности

$$\varphi = k \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad \text{поэтому его емкость}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (8.17)$$

Емкостью двух проводников называют отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между этими проводниками:

$$C = \frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|} = \frac{|Q|}{|u|}. \quad (8.18)$$

Плоский конденсатор представляет собой две параллельные пластины, разделенные слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами пластин.

При зарядке конденсатора одна из его пластин (обкладок) получает положительный заряд, другая — равный по модулю отрицательный заряд.

Зарядом конденсатора называют модуль заряда одной из пластин.

Пусть S — площадь одной из пластин, тогда поверхностная плотность заряда на каждой из пластин $|\sigma| = |Q|/S$.

В вакууме каждая пластина создает поле с напряженностью

$$E_1 = E_2 = |\sigma|/(2\epsilon_0).$$

Результирующее поле пластин находим по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (см. рис. 145).

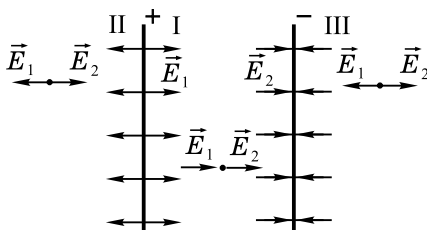


Рис. 145

Сложение векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в областях II и III (вне пластин) приводит к результату $\vec{E} = 0$. В области I (внутри конденсатора) напряженность удваивается по сравнению с напряженностью, создаваемой одной пластиной:

$$E = 2E_1 = |\sigma|/\epsilon_0. \quad (8.19)$$

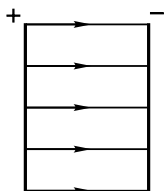


Рис. 146

Результирующее поле изображено на рис. 146. Поскольку поле в конденсаторе оказалось однородным, то его напряженность можно рассчитывать по формуле

$$E = u / d, \quad (8.20)$$

где u — разность потенциалов (напряжение на конденсаторе), d — расстояние между пластинами.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 S / d. \quad (8.21)$$

Когда все пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком, емкость возрастает в ϵ раз:

$$C = \epsilon C = \epsilon \epsilon_0 S / d. \quad (8.22)$$

Заряд конденсатора

$$q = Cu. \quad (8.23)$$

Заряженный конденсатор обладает энергией, которую вычисляют по формулам

$$W_p = qu / 2 = Cu^2 / 2 = q^2 / (2C). \quad (8.24)$$

Конденсаторы можно соединить последовательно и параллельно.

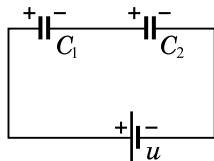


Рис. 147

При последовательном соединении (см. рис. 147):

1. Заряды конденсаторов одинаковы: $q_1 = q_2 = \dots = q_n$.
2. Общее напряжение равно сумме напряжений на конденсаторах: $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

3. Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}, \quad (8.25)$$

где C_i — емкость конденсаторов.

При $n=2$ удобно пользоваться формулой

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2).$$

При $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C_0$ (емкости всех конденсаторов равны C_0) $C = \frac{C_0}{n}$.

При параллельном соединении конденсаторов (см. рис. 148):

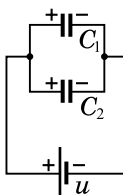


Рис. 148

1. Заряд батареи равен сумме зарядов конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

2. Напряжения на конденсаторах одинаковы:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u.$$

3. Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (8.26)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Четыре положительных заряда q, Q, q, Q связаны четырьмя нитями одинаковой длины, как показано на рис. 149. Определить углы между нитями.

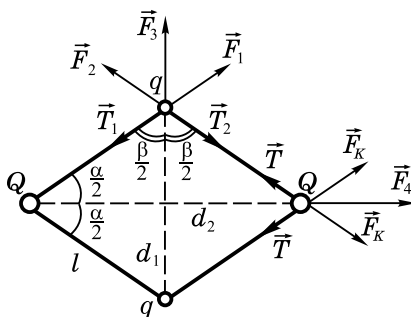


Рис. 149

Решение

Так как нити имеют одинаковую длину l , то заряды расположены в вершинах ромба, углы которого α и β . По теореме косинусов меньшая диагональ ромба

$$d_1^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \alpha = 2l^2 (1 - \cos \alpha) = 4l^2 \sin^2 (\alpha/2).$$

Аналогично выражаем большую диагональ

$$d_2^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \beta = 4l^2 \sin^2 (\beta/2).$$

На заряд q действуют кулоновские силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 со стороны зарядов Q . Модули этих сил одинаковы, и по закону Кулона $F_1 = F_2 = F_K = k|q||Q|/l^2 = kqQ/l^2$ ($|q| = q, |Q| = Q$, так как по условию $Q > 0$ и $q > 0$). Кроме того, на заряд q действует сила отталкивания \vec{F}_3 со стороны другого заряда q , причем $F_3 = k \frac{q^2}{d_1^2} = k \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 (\alpha/2)}$. И, наконец, к заряду q приложены силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 ,

модули которых равны T , что является следствием симметрии рассматриваемой системы. Проецируя указанные силы на меньшую диагональ и учитывая, что заряд q находится в равновесии, получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2F_K \cos(\beta/2) + F_3 - 2T \cos(\beta/2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_3 &= 2(T - F_K) \cos(\beta/2). \end{aligned} \quad (1)$$

К заряду Q со стороны зарядов q приложены: две одинаковые по модулю силы $F_K = kqQ/l^2$, две силы натяжения нити, модули которых равны T , и сила отталкивания \vec{F}_4 со стороны другого заряда Q , причем $F_4 = k \frac{Q^2}{d_2^2} = k \frac{Q^2}{4l^2 \sin^2(\beta/2)}$. Проецируя эти силы на большую диагональ,

$$\begin{aligned} 2F_K \cos(\alpha/2) + F_4 - 2T \cos(\alpha/2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_4 &= 2(T - F_K) \cos(\alpha/2). \end{aligned} \quad (2)$$

Разделим уравнение (1) на уравнение (2), тогда

$$\frac{F_3}{F_4} = \frac{\cos(\beta/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Подставляя значения F_3 и F_4 , получаем

$$\frac{q^2 \sin^2(\beta/2)}{Q^2 \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\cos(\beta/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Так как $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$$\text{и } \cos \frac{\beta}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{а } \sin^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\frac{q^2 \cos^2(\alpha/2)}{Q^2 \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} \Rightarrow \left(\frac{q}{Q}\right)^2 = \operatorname{tg}^3(\alpha/2) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \sqrt[3]{(q/Q)^2} = (q/Q)^{2/3} \Rightarrow \alpha/2 = \operatorname{arctg}(q/Q)^{2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \operatorname{arctg}(q/Q)^{2/3}$$

2. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $Q \gg q$. Определить силу, растягивающую кольцо (см. рис. 150).

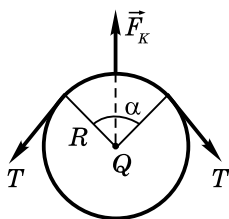


Рис. 150

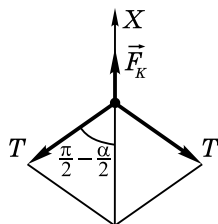


Рис. 151

Решение

Так как $q \ll Q$, то можно пренебречь взаимодействием между отдельными элементами кольца и рассматривать взаимодействие только между элементами кольца и зарядом Q . Выделим на кольце точечный заряд Δq , расположенный на дуге кольца, соответствующей малому углу α , тогда $\Delta q = \frac{q}{2\pi} \alpha$. На элемент кольца действуют

со стороны заряда Q кулоновская сила отталкивания \vec{F}_K :
 $F_K = k \frac{|\Delta q||Q|}{R^2} = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha$ и силы T , растягивающие кольцо (см. рис. 150).

Записав условие равновесия на ось X (см. рис. 151), получим

$$F_K - 2T \cos(\pi/2 - \alpha/2) = 0 \Rightarrow F_K - 2T \sin(\alpha/2) = 0.$$

Так как угол α мал, то $\sin \alpha (\alpha / 2) = \alpha / 2$ и последнее уравнение запишется в виде $k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2} \alpha - 2T = 0 \Rightarrow T = k \frac{|q||Q|}{2\pi R^2}$.

3. На вертикальной пластине больших размеров равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м². На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массой $m = 2$ г, несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти заряд шарика, если нить образует с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$ (см. рис. 152).

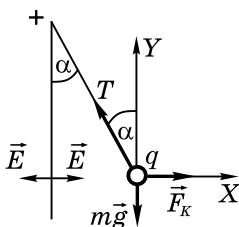


Рис. 152

Решение

Пластина создает однородное поле, напряженность которого $E = \sigma / (2\epsilon_0)$. Поле действует на заряд q с силой $F_K = Eq = q\sigma / (2\epsilon_0)$. Кроме того, на заряд действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Вводим оси X и Y и записываем условия равновесия:

$$\begin{cases} F_K - T \sin \alpha = 0, \\ T \cos \alpha - mg = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F_K, \\ T \cos \alpha = mg, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg \operatorname{tg} \alpha = q\sigma / (2\epsilon_0) \Rightarrow q = (2\epsilon_0 mg \operatorname{tg} \alpha) / \sigma = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

4. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд Q . Определить напряженность и потенциал в центре кольца, а также в точке, отстоящей на расстоянии h от центра кольца по перпендикуляру к его плоскости.

Решение

Будем считать, что $Q > 0$. Заряд, распределенный по кольцу, нельзя назвать точечным на небольших расстояниях от кольца. Разобьем заряд Q на точечные заряды $q = Q / N$, где N — число этих зарядов. Каждый точечный заряд создает в центре кольца напряженность, модуль которой $E = kq / R^2$.

1. Два точечных заряда, расположенных на концах одного диаметра, создают в центре кольца напряженность $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ (см. рис. 153). Применив аналогичный прием ко всем точечным зарядам, находящимся на кольце, находим, что напряженность в центре кольца $\vec{E}_O = 0$.

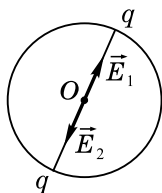


Рис. 153

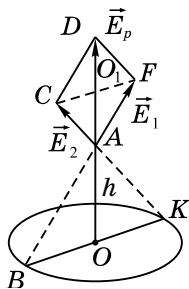


Рис. 154

Каждый заряд q в центре кольца создает потенциал $\varphi = kq / R$, по принципу суперпозиции

$$\varphi_0 = N\varphi = Nkq / R = kQ / R.$$

2. Пусть $AO = h$ (см. рис. 154). В точке A диаметрально противоположные точечные заряды создают напряженности $E_1 = E_2 = kq / (AB)^2 = kq / (R^2 + h^2)$, $\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Четырехугольник $ACDF$ — ромб, поэтому

$$\angle CAD = \angle DAF = \angle BAO = \angle KAO,$$

т. е. вектор \vec{E}_p направлен вдоль AO ;

$$E_p = 2AO_1 = 2E_1 \cos \angle CAD.$$

Из $\triangle BAO$: $\cos \angle BAO = \cos \angle CAD = AO/AB = h/\sqrt{R^2 + h^2}$.

Поэтому $E_p = 2E_1 h/\sqrt{R^2 + h^2}$. Следующая пара точечных зарядов дает такой же вектор \vec{E}_p , и т.д. В точке A получим $N/2$ векторов \vec{E}_p .

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{N}{2} E_p = \frac{N}{2} 2E_1 \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \\ &= Nk \frac{q}{R^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} = k \frac{Qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Каждый заряд q создает в точке A потенциал

$$\varphi = kq/\sqrt{R^2 + h^2}.$$

Потенциал точки A :

$$\varphi_A = N\varphi = kQ/\sqrt{R^2 + h^2}.$$

5. Две плоские одинаковые пластины, площадью S каждая, находятся на расстоянии d , малом по сравнению с их размерами. На одной из пластин находится заряд $+q$, на другой $+3q$. Определить: 1) силу взаимодействия между пластинами; 2) напряженность электрического поля, создаваемого этой системой; 3) разность потенциалов между пластинами; 4) работу по перемещению заряда Q из точки A в точку B , если $AB=l$ и задан угол α между AB и нормалью к пластинам (см. рис. 155).

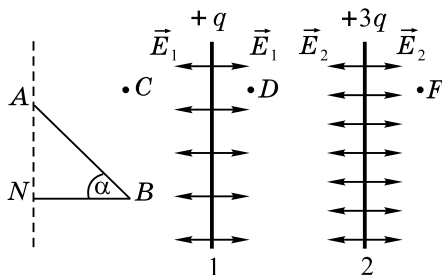


Рис. 155

Решение

1. Пластина 1 создает по обе стороны однородное поле, модуль напряженности которого $E_1 = \sigma_1 / (2\epsilon_0) = q / (2\epsilon_0 S)$. Пластина 2 создает поле с напряженностью $E_2 = \sigma_2 / (2\epsilon_0) = 3q / (2\epsilon_0 S)$. Распределенный на пластине 2 заряд $3q$ находится в однородном поле с напряженностью \vec{E}_1 . Разобьем заряд $3q$ на точечные заряды Δq_i . Сила, действующая на заряд Δq_i , $F_1 = \Delta q_i E_1$. На заряд $3q$ действует сила

$$F_K = \sum \Delta q_i E_1 = E_1 \sum \Delta q_i = E_1 \cdot 3q = \frac{q}{2\epsilon_0 S} 3q = \frac{3q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

По третьему закону Ньютона такая же по модулю сила действует на пластину 1. Итак, между пластинами действует сила отталкивания

$$F_K = 3q^2 / (2\epsilon_0 S).$$

2. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность поля в любой точке $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

В точке C (слева от пластины 1)

$$E_C = E_1 + E_2 = \frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{3q}{2\epsilon_0 S} = \frac{2q}{\epsilon_0 S}.$$

В точке D (между пластинами)

$$E_D = E_2 - E_1 = \frac{3q}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

В точке F (справа от пластины 2)

$$E_F = E_1 + E_2 = 2q / (\epsilon_0 S).$$

Результирующее поле представлено на рис. 156.

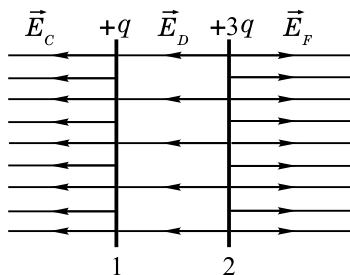


Рис. 156

3. Так как поле между пластинами однородно, то разность потенциалов между пластинами $u = E_D d = qd / (\epsilon_0 S)$.

4. Работа электростатических сил при перемещении заряда Q из точки A в точку B $A = Q(\varphi_A - \varphi_B)$. Точки A и N расположены на одной эквипотенциальной поверхности, т. е. $\varphi_A = \varphi_N$ (см. рис. 155). Вместе с тем $\varphi_N < \varphi_B$, так как потенциал электростатического поля убывает в направлении силовых линий. Значит,

$$\varphi_B - \varphi_N = E_C(x_N - x_B) = E_C l \cos \alpha,$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \varphi_N - \varphi_B = -(\varphi_B - \varphi_N) = -E_C l \cos \alpha.$$

$$A = -QE_C l \cos \alpha = -\frac{2qQ}{\epsilon_0 S} l \cos \alpha.$$

Если q и Q одного знака, то $A < 0$, т. е. при перемещении заряда из A в B необходимо совершать работу против сил электростатического поля.

6. Две заряженные частицы, массы которых равны m , а заряды q , движутся из бесконечности навстречу друг другу со скоростями v и $2v$. Найти мини-

мальное расстояние, на которое могут сблизиться частицы. Гравитационное взаимодействие не учитывать.

Решение

В процессе сближения на частицы действуют кулоновские силы отталкивания, что приводит к уменьшению скоростей частиц. Так как модули начальных скоростей различны, то минимальное расстояние r_{\min} между частицами будет в тот момент, когда их относительная скорость обратится в нуль. Это соответствует тому, что частицы в этот момент имеют одинаковые скорости $u \neq 0$. Так как частицы образуют замкнутую систему, то ее импульс сохраняется, т. е. $P_1 = P_2$, где $P_1 = 2mv - mv = mv$ — начальный импульс системы, а $P_2 = mu + mu = 2mu$ — конечный импульс. Так как на частицы в процессе сближения действуют только кулоновские силы отталкивания, являющиеся консервативными, то механическая энергия системы сохраняется, т. е. $W_1 = W_2$. $W_1 = mv^2 / 2 + m(2v)^2 / 2 = 5mv^2 / 2$ — начальная механическая энергия системы. $W_2 = mu^2 / 2 + mu^2 / 2 + kq^2 / r_{\min} = mu^2 + kq^2 / r_{\min}$ — конечная механическая энергия системы. Получаем систему

$$\begin{cases} mv = 2mu, \\ \frac{5mv^2}{2} = mu^2 + k \frac{q^2}{r_{\min}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v/2, \\ \frac{5mv^2}{2} = \frac{mv^2}{4} + k \frac{q^2}{r_{\min}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9mv^2}{4} = k \frac{q^2}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{4kq^2}{9mv^2}.$$

7. На тонком закрепленном кольце радиусом R равномерно распределен положительный заряд $q > 0$. Какую наименьшую скорость нужно сообщить находящейся в центре кольца частице массой m с отрицательным зарядом $-q$, чтобы она могла удалиться от кольца в бесконечность?

Решение

В центре кольца механическая энергия заряженной частицы складывается из ее кинетической энергии и потенциальной энергии, которой она обладает в электростатическом поле, создаваемом зарядом, распределенным по кольцу, т. е. $W_1 = mv_0^2/2 + (-q)\phi_0$, где v_0 — скорость частицы в центре кольца, ϕ_0 — потенциал поля в этой точке. На очень большом расстоянии от кольца электростатическое поле практически не действует на частицу, т. е. ее потенциальная энергия обращается в нуль. Минимальная начальная скорость частицы соответствует тому, что, замедляясь под действием притяжения к кольцу, частица на бесконечности будет иметь скорость, равную нулю. Следовательно, на бесконечности механическая энергия частицы $W_2 = 0$.

По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow mv_0^2/2 - q\phi_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2q\phi_0/m}. \quad (1)$$

В задании 4 было показано, что потенциал электростатического поля, создаваемого зарядом q , который распределен по кольцу, в центре этого кольца составляет $\phi_0 = kq/R$. Подставляя это в формулу (1), окончательно получаем $v_0 = q\sqrt{2k/(mR)}$.

8. Электрический диполь из двух жестко связанных зарядов $+q$ и $-q$ ($q > 0$), расположенных на расстоянии L друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС \mathcal{E} . Определить скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0 . Расстояние между пластинами конденсатора d , масса диполя m (см. рис. 157).

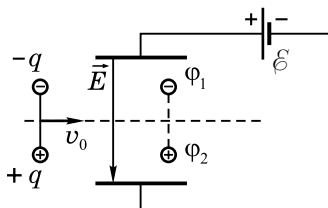


Рис. 157

Решение

Механическая энергия диполя вдали от конденсатора, где электрическое поле отсутствует, равна его кинетической энергии: $W_1 = mv_0^2/2$. В центре конденсатора, где электрическое поле однородно, механическая энергия диполя складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии в электрическом поле, т. е.

$$W_2 = mv^2/2 + ((-q)\varphi_1 + q\varphi_2).$$

Здесь v — искомая скорость, φ_1 и φ_2 потенциалы точек поля, в которых в рассматриваемый момент находятся заряды $-q$ и $+q$. Отметим, что $-q\varphi_1 + q\varphi_2 = -q(\varphi_1 - \varphi_2)$, причем $\varphi_1 > \varphi_2$, ибо вектор напряженности \vec{E} в любом электростатическом поле указывает направление, в котором потенциал поля убывает. Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = EL$, где напряженность однородного поля $E = \varepsilon/d$.

Итак,

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} - q \frac{\varepsilon}{d} L.$$

По закону сохранения механической энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - q \frac{\varepsilon}{d} L \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q\varepsilon L}{md}}.$$

9. В плоский конденсатор длиной $L = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15^\circ$ к пластинам. Электрон обладает энергией $W = 2,4 \cdot 10^{-16}$ Дж. Расстояние между

пластинами $d=1$ см. Определить напряжение на пластинах конденсатора u , при котором электрон при выходе из пластин будет двигаться параллельно им (см. рис. 158).

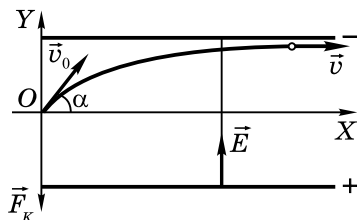


Рис. 158

Решение

Пусть v_0 — начальная скорость электрона. Его энергия $W = \frac{mv_0^2}{2}$, где m — масса электрона. На электрон действует со стороны поля сила $F_K = |e|E$, где E — напряженность поля.

В подобных задачах действием сил тяжести на элементарные частицы можно пренебречь. Разложим сложное движение электрона на два простых: вдоль оси X , параллельной пластинам, и вдоль оси Y , перпендикулярной пластинам. Начало системы координат O поместим в точку влета электрона в конденсатор. Начальные координаты электрона $x_0=0$, $y_0=0$; его начальные скорости $v_{0x}=v_0 \cos \alpha$, $v_{0y}=v_0 \sin \alpha$. Ускорение $a_x=0$, следовательно, в направлении X движение является прямолинейным равномерным. Ускорение $a_y = -F_K/m = |e|E/m = \text{const}$. Следовательно, движение по оси Y является равнопеременным.

Законы движения по оси X :

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

Законы движения по оси Y :

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - \frac{|e|E}{m} t,$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{|e|E t^2}{2m}.$$

Исключив из второго уравнения время $t = x / (v_0 \cos \alpha)$ и подставив его в последнее, получим

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{|e|E}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{|e|E}{2m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Это уравнение параболы. Мы доказали, что заряженная частица, влетевшая под углом к силовым линиям однородного поля, будет двигаться в этом поле по параболе.

В точке вылета $v_y = 0$, $x = L$, поэтому

$$\begin{cases} v_0 \sin \alpha - (|e|E/m)t = 0, \\ v_0 \cos \alpha \cdot t = L. \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения время пролета электрона через конденсатор: $t = L / (v_0 \cos \alpha)$. Из первого уравнения этой системы найдем напряженность поля в конденсаторе:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m v_0 \sin \alpha}{|e|t} = \frac{m v_0 \sin \alpha}{|e|L / (v_0 \cos \alpha)} = \frac{m v_0^2}{2|e|L} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{m v_0^2}{2} \frac{1}{|e|L} \sin 2\alpha = \frac{W}{|e|L} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Напряжение на пластинах $u = Ed$, т. е.

$$u = \frac{d}{L} \frac{W}{|e|} \sin 2\alpha = 150 \text{ В}.$$

10. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2 , соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением u . Определить напряжение на конденсаторах.

Решение

Пусть u_1 и u_2 — напряжения на конденсаторах, тогда заряды на них равны $C_1 u_1$ и $C_2 u_2$. Используя свойства последовательного соединения конденсаторов, получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 u_1 = C_2 u_2, \\ u_1 + u_2 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = (C_1/C_2) u_1, \\ u_1 + (C_1/C_2) u_1 = u, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = C_2 u / (C_1 + C_2), \\ u_2 = C_1 u / (C_1 + C_2). \end{cases}$$

11. Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 159.

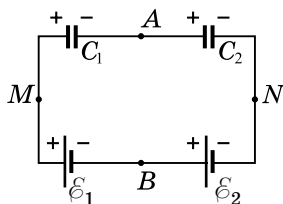


Рис. 159

Решение

Проставим дополнительно точки M и N на схеме. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно, напряжение на них равно разности потенциалов между точками M и N : $\varphi_M - \varphi_N = u$. В нашей задаче

$$+ \begin{cases} \varphi_M - \varphi_B = \varepsilon_1, \\ \varphi_B - \varphi_N = \varepsilon_2. \end{cases}$$

После сложения этих уравнений найдем, что

$$\varphi_M - \varphi_N = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = u.$$

Напряжение на конденсаторе C_1 $\varphi_M - \varphi_A = u_1$. Напряжение на конденсаторе C_2 $\varphi_A - \varphi_N = u_2$. Тогда по свойствам последовательного соединения конденсаторов можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ C_1 u_1 = C_2 u_2. \end{cases}$$

Воспользовавшись результатами задания 10, найдем

$$u_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) C_2 / (C_1 + C_2) \text{ и } u_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) C_1 / (C_1 + C_2).$$

Итак,

$$\begin{cases} \varphi_M - \varphi_B = \varepsilon_1 \\ \varphi_M - \varphi_A = u_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_1 - u_1 = \frac{\varepsilon_1 C_1 - \varepsilon_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

12. Конденсатор емкостью C_1 при помощи переключателя K присоединяют сначала к батарее с ЭДС ε , а потом к незаряженному конденсатору емкостью C_2 (см. рис. 160). Найти заряд, который появится на конденсаторе C_2 .

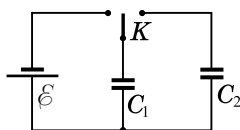


Рис. 160

Решение

Пусть ключ K находится в левом положении, тогда конденсатор C_1 подсоединен к источнику ЭДС; конденсатор C_2 от источника отключен. Конденсатор C_1 заряжается до напряжения ε , его заряд $q_0 = C_1 \varepsilon$.

Перебросив ключ в правое положение, мы отсоединяем источник от конденсаторов, образуется замкнутая цепь из двух конденсаторов C_1 и C_2 . Конденсатор C_1 будет разряжаться, конденсатор C_2 — заряжаться. Процесс перераспределения зарядов происходит до тех пор, пока

потенциалы верхних и нижних пластин конденсаторов не станут равными. Значит, и разности потенциалов (напряжения) на конденсаторах равны: $u_1 = u_2 = u$. На конденсаторе C_1 останется заряд $C_1 u$, а на конденсаторе C_2 появится заряд $C_2 u$. После отключения источника конденсаторы образуют замкнутую систему. По закону сохранения заряда

$$q_0 = C_1 u + C_2 u \Rightarrow C_1 \mathcal{E} = (C_1 + C_2) u \Rightarrow u = C_1 \mathcal{E} / (C_1 + C_2).$$

На конденсаторе C_2 появится заряд

$$q_2 = C_2 u = C_1 C_2 \mathcal{E} / (C_1 + C_2).$$

13. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $u_1 = 10$ В. Какой заряд будет на пластинах этого конденсатора, если к нему подключить другой конденсатор емкостью $C_2 = 6$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $u_2 = 20$ В? Соединены пластины, имеющие заряды разных знаков (см. рис. 161).

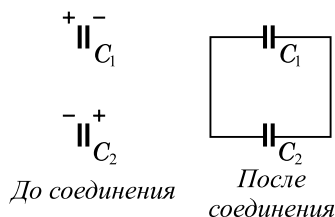


Рис. 161

Решение

До соединения заряд первого конденсатора $q_1 = C_1 u_1$, а заряд второго $q_2 = C_2 u_2$. После соединения пластин проводниками начинается перераспределение зарядов пластин. Как отмечалось в задании 12, этот процесс продолжается до выравнивания потенциалов правых и соответственно левых пластин. Значит, после перераспределения зарядов разности потенциалов на конденса-

торах равны u . Заряд первого конденсатора станет равным C_1u , а второго — C_2u .

Правые пластины конденсаторов (как и левые) образуют замкнутую систему, поэтому алгебраическая сумма их зарядов постоянна. До соединения сумма зарядов правых пластин $C_2u_2 - C_1u_1 > 0$, после соединения $C_1u + C_2u = (C_1 + C_2)u$. Получаем уравнение

$$C_2u_2 - C_1u_1 = (C_1 + C_2)u \Rightarrow u = (C_2u_2 - C_1u_1) / (C_1 + C_2).$$

Заряд первого конденсатора

$$q'_1 = C_1u = C_1(C_2u_2 - C_1u_1) / (C_1 + C_2) = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Правые пластины зарядятся положительно, а левые — отрицательно.

14. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от напряжения на конденсаторе по закону $\varepsilon = \alpha u$, где $\alpha = 1 \text{ В}^{-1}$. Параллельно этому конденсатору, который вначале не заряжен, подключают такой же конденсатор, но без диэлектрика, который заряжен до напряжения $u_0 = 156 \text{ В}$. Определить напряжение, которое установится на конденсаторах (см. рис. 162).

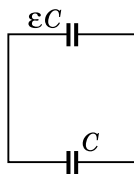


Рис. 162

Решение

C — емкость конденсатора без диэлектрика, Cu_0 — начальный заряд на нем, εC — емкость конденсатора с диэлектриком. После соединения конденсаторов на них устанавливается одинаковое напряжение u , заряды кон-

денсаторов станут равными Cu и $\varepsilon Cu = \alpha u^2 C$. По закону сохранения заряда получаем уравнение

$$Cu_0 = Cu + \alpha u^2 C \Rightarrow \alpha u^2 + u - u_0 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $u > 0$, находим

$$u = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha u_0}}{2\alpha} = 12 \text{ В.}$$

15. Между пластинами плоского воздушного конденсатора (расстояние между пластинами d , площадь каждой пластины S) вводится параллельно пластинам металлическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость получившегося конденсатора.

Решение

Предположим, что на пластины конденсатора, в который введена пластинка, подано напряжение. Так как электростатическое поле не проникает внутрь металлического проводника, то поле внутри конденсатора существует только в пространстве, не занятом пластинкой (см. рис. 163, а).

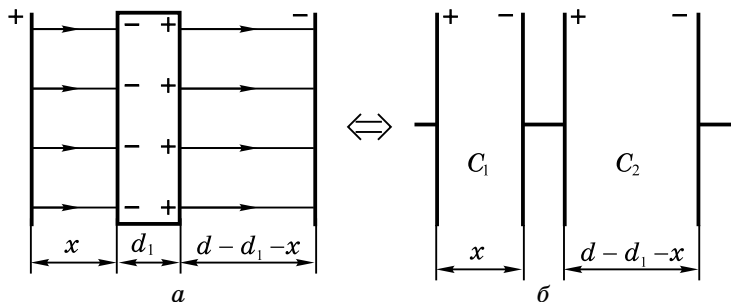


Рис. 163

На поверхности пластинки наводятся заряды разных знаков, но вся пластинка при этом является поверхностью равного потенциала (эквипотенциальной поверх-

ностью). Поэтому конденсатор с введенной металлической пластинкой эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рис. 163, б). Емкость

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{x}, \text{ а емкость } C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1 - x}.$$

Искомая емкость C вычисляется по формуле для последовательного соединения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d - d_1 - x}{\epsilon_0 S} = \frac{d - d_1}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1}.$$

Как видно, емкость C не зависит от x , т. е. от того, в каком месте введена пластинка. Если толщина пластинки мала ($d_1 \rightarrow 0$), то емкость конденсатора не изменяется.

16.В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между пластинами вводится параллельно им диэлектрическая пластинка, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора, если диэлектрическая проницаемость материала пластинки ϵ , площадь пластин и пластинки S .

Решение

Предположим, что на обкладки конденсатора с диэлектриком подано напряжение. Электрическое поле проникает в диэлектрик, что приводит к возникновению связанных зарядов на его поверхности. Если поверхность пластинки покрыть очень тонким проводящим слоем, то, как показано в задании 15, на его поверхностях появятся заряды противоположных знаков. Электрическое поле в конденсаторе не изменится, как не изменится и его емкость. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора, емкости которых: $C_1 = \epsilon_0 S / x$, $C_2 = \epsilon \epsilon_0 S / d_1$, $C_3 = \epsilon_0 S / (d - d_1 - x)$ (см. рис. 164). Общую емкость C находим по формуле

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S} + \frac{d-d_1-x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S} = \\ &= \frac{\varepsilon d + (1-\varepsilon)d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \varepsilon \varepsilon_0 S / (\varepsilon d + (1-\varepsilon)d_1).\end{aligned}$$

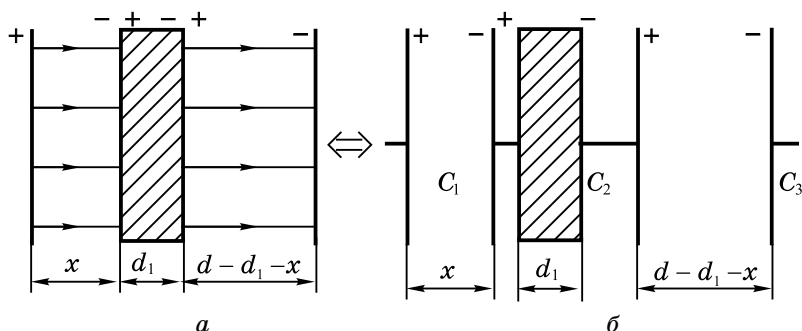


Рис. 164

Емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой не зависит от x , т. е. от того, где введена пластинка.

- 17.** Между пластинами плоского воздушного конденсатора параллельно им расположена пластинка из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Ее толщина вдвое меньше расстояния между пластинами конденсатора. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U . Пластинку извлекают из конденсатора после отключения источника. Какую работу при этом совершают силы электростатического поля конденсатора? Емкость конденсатора без пластины равна C_0 .

Решение

S — площадь пластин, d — расстояние между ними, тогда $C_0 = \varepsilon_0 S / d$. Когда диэлектрическая пластинка находится в конденсаторе, его емкость $C = \varepsilon \varepsilon_0 S / (\varepsilon d + (1-\varepsilon)d_1)$ (см. задание 16). При $\varepsilon=2$ и $d_1=d/2$ $C =$

$=4\epsilon_0 S / (3d) = (4/3)C_0$. Заряд конденсатора $Q = Cu = (4/3)C_0 u$, а его энергия $W_1 = Cu^2 / 2 = (2/3)C_0 u^2$. Если источник отключен, то при извлечении пластинки заряд конденсатора останется постоянным, а его емкость уменьшится до C_0 . Это приведет к увеличению энергии конденсатора, которая станет равной $W_2 = Q^2 / (2C_0) = (8/9)C_0 u^2$. Изменение энергии $\Delta W = W_2 - W_1 = (2/9)C_0 u^2 > 0$. Так как источник отключен, то работа консервативных сил электростатического поля $A = -\Delta W = -(2/9)C_0 u^2$. Внешние силы при этом будут производить равную по модулю положительную работу.

18. Определить заряды конденсаторов в схеме, показанной на рис. 165.

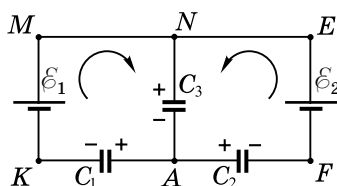


Рис. 165

Решение

Проставим знаки зарядов пластин. Обозначим напряжения на конденсаторах u_1 , u_2 , u_3 . Заряды каждого конденсатора: $q_1 = C_1 u_1$, $q_2 = C_2 u_2$, $q_3 = C_3 u_3$. Так как три пластины сходятся в одной точке А, непосредственно не подключенной к источникам, то их суммарный заряд равен нулю. Получаем уравнение:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 - C_3 u_3 = 0.$$

Обходя замкнутый контур $MNAKM$ по часовой стрелке, получаем уравнение $\mathcal{E}_1 = u_3 + u_1$. Обходя замкнутый контур $AFENA$ против часовой стрелки, получим уравнение $\mathcal{E}_2 = u_3 + u_2$.

Эти уравнения образуют систему

$$\begin{cases} C_1 u_1 + C_2 u_2 - C_3 u_3 = 0, \\ \mathcal{E}_1 = u_3 + u_1, \\ \mathcal{E}_2 = u_3 + u_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3, \\ u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3, \\ C_1 (\mathcal{E}_1 - u_3) + C_2 (\mathcal{E}_2 - u_3) - C_3 u_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим

$$u_3 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$u_1 = \mathcal{E}_1 - u_3 = \frac{C_2 \mathcal{E}_1 + C_3 \mathcal{E}_1 - C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$u_2 = \mathcal{E}_2 - u_3 = \frac{C_1 \mathcal{E}_2 + C_3 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Заряды конденсаторов найдем, умножив напряжения на соответствующие емкости.

РАЗДЕЛ 9

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. Электрический ток

Электрическим током называют упорядоченное движение свободных электрических зарядов вдоль проводника. За направление тока принимают направленное движение положительно заряженных частиц. Если ток образован движением отрицательно заряженных частиц, то направление тока считают противоположным направлению движения этих частиц.

Электрический ток может производить тепловые, химические и магнитные действия.

Количественной характеристикой тока является **сила тока**

$$I = \Delta q / \Delta t = \text{const}, \quad (9.1)$$

где Δq — заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время Δt .

Если сила тока с течением времени не меняется, то ток называют **постоянным**. Сила тока зависит от заряда q_0 частиц, образующих электрический ток, концентрации n этих частиц, скорости v их упорядоченного движения, площади S поперечного сечения проводника и выражается формулой

$$I = |q_0| n v S. \quad (9.2)$$

В общем случае ток не является постоянным, его мгновенное значение $i(t)$ есть производная от заряда $q(t)$ по времени:

$$i(t) = q'(t). \quad (9.3)$$

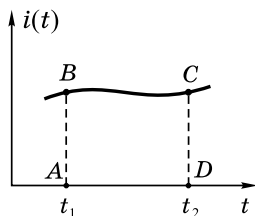


Рис. 166

Пусть задана произвольная зависимость тока от времени $i(t)$ (см. рис. 166). Заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, численно равен площади криволинейной трапеции $ABCD$:

$$q(t) = S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt. \quad (9.4)$$

Плотностью электрического тока называют отношение силы тока I к площади поперечного сечения проводника S :

$$j = I / S. \quad (9.5)$$

Для возникновения и существования постоянного электрического тока в веществе необходимы:

- 1) свободные заряды;
- 2) сила, действующая на заряды в определенном направлении.

В металлах, например, свободными зарядами являются свободные электроны. Для создания силы, действующей на заряды, к концам проводника прикладывают постоянную разность потенциалов. В результате в проводнике возникает электрическое поле, которое действует на свободные заряды с силой $F = |q_0|E$, где E — напряженность поля. Эта сила заставляет свободные заряды смещаться вдоль проводника.

2. Сопротивление проводника. Закон Ома для однородного участка цепи. Последовательное и параллельное соединение проводников

Проводник характеризуется своим **сопротивлением** R электрическому току. Сопротивление проводника зависит от его размеров, а также вещества, из которого он изготовлен, и рассчитывается по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (9.6)$$

где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения, ρ — удельное сопротивление.

Участок электрической цепи, не содержащий источников тока, называется **однородным**. Однородный участок цепи можно рассматривать как проводник сопротивлением R . Электрический ток на однородном участке протекает от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом.

Закон Ома утверждает, что сила тока в проводнике пропорциональна напряжению (разности потенциалов) на проводнике и обратно пропорциональна его сопротивлению:

$$I = u / R = (\varphi_1 - \varphi_2) / R. \quad (9.7)$$

Проводники можно соединять в электрической цепи последовательно и параллельно.

При последовательном соединении (см. рис. 167):

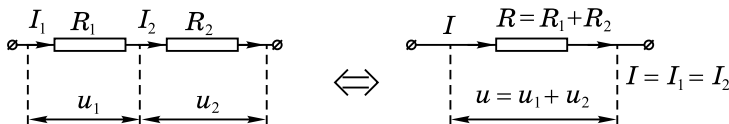


Рис. 167

1. Сила тока в проводниках одинакова:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I.$$

2. Напряжение равно сумме напряжений на проводниках:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

3. Общее сопротивление равно сумме сопротивлений проводников:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (9.8)$$

При параллельном соединении (см. рис. 168):

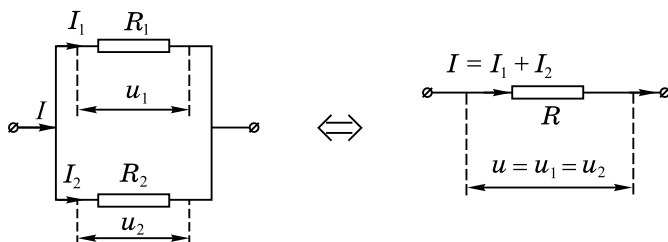


Рис. 168

1. Общий ток равен сумме токов, протекающих через проводники:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

2. Напряжение на проводниках одинаково:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n.$$

3. Сопротивление участка электрической цепи, состоящего из параллельно соединенных проводников, рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (9.9)$$

Из формулы (9.9) получаем два частных случая:

1) при $n=2$ $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$;

2) при $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R_0$ $R = R_0 / n$.

3. Работа и мощность тока

При перемещении заряда Δq по проводнику силы электрического поля совершают работу $A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q u$. В этом случае говорят, что **электрический ток совершает работу**. Если ток I постоянный, то за время Δt по проводнику протекает заряд $\Delta q = I \Delta t$ и работа электрического тока

$$A = I u \Delta t. \quad (9.10)$$

По закону Ома $I = u / R$, поэтому

$$A = \frac{u^2}{R} \Delta t. \quad (9.11)$$

Учитывая, что $u = IR$, получаем еще одну формулу для вычисления работы:

$$A = I^2 R \Delta t. \quad (9.12)$$

В случае когда проводник остается неподвижным, не совершается механическая работа и ток не производит химических действий, работа идет на увеличение внутренней энергии проводника. Проводник при этом нагревается. Итак, при протекании электрического тока в проводнике выделяется количество теплоты

$$Q = I u \Delta t = (u^2 / R) \Delta t = I^2 R \Delta t. \quad (9.13)$$

Последняя формула была установлена экспериментально и называется **законом Джоуля — Ленца**.

Мощностью электрического тока называется величина

$$P = A / \Delta t. \quad (9.14)$$

где A — работа тока, Δt — время, за которое эта работа совершена.

Мощность тока можно рассчитывать по одной из формул:

$$P = I u = I^2 R = u^2 / R. \quad (9.15)$$

4. Закон Ома для замкнутой электрической цепи

Замкнутая электрическая цепь содержит внешний проводник сопротивлением R и источник тока, который характеризуется электродвижущей силой (ЭДС) \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (см. рис. 169).

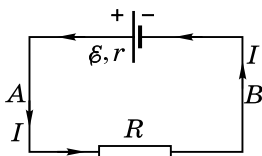


Рис. 169

При протекании электрического тока I на участке цепи от точки B к точке A (через источник) на заряды действуют силы **неэлектрической природы**. Эти силы называются **сторонними**. Под действием сторонних сил положительный заряд q перемещается от « $-$ » к « $+$ » источника, двигаясь против силы со стороны электрического поля внутри источника. Работа сторонних сил при перемещении заряда по замкнутому контуру не равна нулю.

Электродвижущая сила источника есть отношение работы сторонних сил, совершаемой по перемещению заряда по замкнутому контуру, к величине этого заряда:

$$\mathcal{E} = A_{\text{ст}} / q. \quad (9.16)$$

Работа сторонних сил $A_{\text{ст}} = \mathcal{E}q$, где $q = I\Delta t$, поэтому $A_{\text{ст}} = \mathcal{E}I\Delta t$. За счет этой работы на внутреннем и внешнем сопротивлениях выделяется теплота, равная по закону Джоуля — Ленца $Q = I^2(R + r)\Delta t$.

Так как $Q = A_{\text{ст}}$, то

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) выражает закон Ома для замкнутой электрической цепи. Величина $(R+r)$ называется **полным сопротивлением цепи**.

Из формулы (9.17) получаем, что $\mathcal{E} = IR + Ir$. Произведение $IR = u$ — напряжение на проводнике сопротивлением R , т. е. напряжение во внешней цепи. Произведение Ir — напряжение на внутреннем сопротивлении источника. Итак,

$$\mathcal{E} = u + Ir,$$

откуда следует, что напряжение во внешней цепи не равно \mathcal{E} ; $\mathcal{E} = u$ при $r=0$, т. е. когда внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

5. Электрический ток в жидкостях. Законы электролиза

Электрический ток может протекать не только в металлах, но и в расплавах и растворах электролитов, кислот, щелочей и солей. В растворах под влиянием электрического поля полярных молекул воды электро-нейтральная молекула распадается на положительно и отрицательно заряженные ионы (**явление электролитической диссоциации**). Упорядоченное движение ионов под действием электрического поля создает ток. У водных растворов и расплавов — **ионная проводимость**.

Концентрация заряженных ионов в растворах и расплавах увеличивается с ростом температуры, поэтому сопротивление электролитов с ростом температуры уменьшается.

В простейшем случае положительный ион, оказавшись на отрицательном электроде (катоде), присоединяет недостающие ему электроны. В результате на катоде выделяется из раствора вещество. Аналогичные процессы наблюдаются у положительного электрода (анода), к которому движутся отрицательно заряженные ионы. Процесс выделения на электроде вещества из раствора

при прохождении через него электрического тока называется **электролизом**.

Первый закон электролиза утверждает, что масса вещества, выделившаяся на электроде, пропорциональна заряду q , прошедшему через электролит:

$$m = kq, \quad (9.18)$$

где k — электрохимический эквивалент вещества.

Химический эквивалент вещества есть отношение молярной массы вещества μ к его валентности n .

Второй закон электролиза утверждает, что электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:

$$k = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right), \quad (9.19)$$

где $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль — постоянная Фарадея.

В случае постоянного тока из формул (9.18) и (9.19) находим

$$m = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right) q = \frac{1}{F} \left(\frac{\mu}{n} \right) I \Delta t. \quad (9.20)$$

6. Электрический ток в газах. Плазма

Молекулы газов электронейтральны, поэтому газы в обычных условиях не проводят электрический ток. Под действием различных внешних воздействий (нагревание, рентгеновские лучи, α -излучение) молекула газа распадается на положительно заряженный ион и отрицательно заряженный электрон. В газе могут образовываться и отрицательные ионы из-за присоединения электронов к нейтральным атомам.

Внешние источники, приводящие к появлению в газах свободных носителей зарядов, называют **ионизаторами**. Под действием электрического поля образовавшиеся

ся положительные ионы движутся к катоду, а электроны — к аноду, через газ протекает электрический ток (**газовый разряд**).

Электрический разряд, который происходит только в присутствии постоянно действующего внешнего ионизатора, называется **несамостоятельным**. При увеличении напряжения между анодом и катодом ток возрастает, но лишь до определенного максимального значения, называемого **током насыщения**. Ток насыщения соответствует тому, что все образовавшиеся под действием ионизатора положительные ионы и электроны достигают электродов. Начиная с некоторого значения напряжения электроны обладают достаточной энергией, чтобы ионизировать нейтральную молекулу (ионизация электронным ударом). Образующиеся новые свободные электроны также вызывают ионизацию других молекул газа. Происходит лавинообразное увеличение числа электронов и ионов и, как следствие, резко возрастает ток через газ. Зависимость тока, протекающего через газ, от напряжения между электродами представлена на рис. 170.

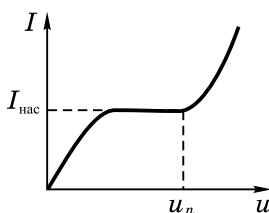


Рис. 170

При напряжении $u > u_n$ электрический разряд больше не зависит от внешнего ионизатора. Такой разряд называют **самостоятельным**. Самостоятельными в газах являются тлеющий, искровой и коронный разряды.

При электрическом разряде в газе наблюдается особое состояние вещества, называемое плазмой. **Плазма** — это частично или полностью ионизированный газ, в котором

концентрация положительных и отрицательных зарядов практически совпадает. Плазма является электронной системой.

7. Электрический ток в полупроводниках

К полупроводникам относят вещества, которые занимают промежуточное положение между проводниками, хорошо проводящими электрический ток, и диэлектриками (изоляторами), практически не проводящими ток. Полупроводниками являются: кремний Si, германий Ge, индий In, а также некоторые химические соединения.

В кристалле полупроводника, например кремния Si, соседние атомы образуют ковалентную связь, причем от каждого атома в образовании этой связи участвует по одному валентному электрону. Электроны, образующие ковалентные связи, могут перемещаться по всему кристаллу, оставаясь при этом связанными с атомами полупроводника. При низких температурах в полупроводнике практически нет свободных носителей зарядов и он не проводит электрический ток. При повышении температуры наступает разрыв части ковалентных связей и в полупроводнике появляются свободные электроны. Проводимость полупроводников, обусловленную наличием у них свободных электронов, называют **электронной проводимостью**.

В том месте кристалла полупроводника, где произошел разрыв ковалентной связи, образуется избыточный положительный заряд, называемый **дыркой**. Ковалентная связь может быть восстановлена присоединением связанного электрона, обеспечивавшего другие ковалентные связи. При этом на месте, где ковалентная связь восстанавливается, дырка исчезает, а там, где эта связь разрывается, образуется новая дырка. Если в полупроводнике отсутствует электрическое поле, движение дырок в нем происходит хаотично. При наличии электрического

поля дырки перемещаются упорядоченно в направлении поля, в этом случае говорят о дырочной проводимости. Общий ток в полупроводнике I равен сумме дырочного I_p и электронного I_n токов: $I = I_p + I_n$. Электронная и дырочная проводимости называются **собственной проводимостью** полупроводника. Из сказанного выше следует, что с ростом температуры электрическое сопротивление полупроводников уменьшается.

При наличии примесей в полупроводнике его сопротивление уменьшается. В этом случае говорят о **примесной проводимости**. При добавлении, например, в четырехвалентный германий Ge небольшого количества пятивалентного мышьяка As пятый валентный электрон атома мышьяка оказывается свободным, что приводит к резкому возрастанию концентрации свободных электронов. Примеси, подобные мышьяку, называют **донорными**, а полупроводники с донорными примесями называют **полупроводниками n -типа**. В полупроводниках n -типа концентрация свободных электронов много больше концентрации дырок. Свободные электроны в полупроводниках n -типа называют основными носителями, а дырки — **неосновными**.

При добавлении в четырехвалентный полупроводник трехвалентной примеси, например индия In, в полупроводнике образуются дырки. Такие примеси называют акцепторными, а полупроводники с акцепторными примесями — **полупроводниками p -типа**. В полупроводниках p -типа основными носителями являются дырки, а неосновными — электроны.

Контакт полупроводников p - и n -типов называют **p - n -переходом**. В результате диффузии основных носителей, т. е. электронов, из полупроводника n -типа в полупроводник p -типа, а дырок — в обратном направлении, образуется двойной заряженный слой толщиной $d \approx 10^{-7}$ м и разностью потенциалов $u \approx 0,5$ В (см. рис. 171).

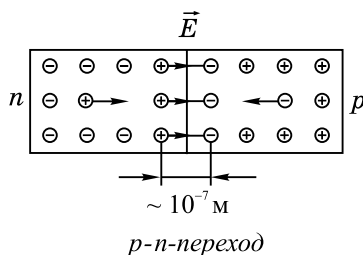


Рис. 171

В *p-n*-переходе возникает электрическое поле $E = \frac{u}{d} \approx 10^6 \text{ В/м}$, которое препятствует дальнейшей диффузии основных носителей.

Если полупроводник с *p-n*-переходом включить в электрическую цепь, как показано на рис. 172 (**прямой переход**), то результирующее поле $E_p = E_{\text{внеш}} - E$ способствует движению основных носителей через *p-n*-переход. Сопротивление *p-n*-перехода в этом случае мало, и в электрической цепи протекает ток.

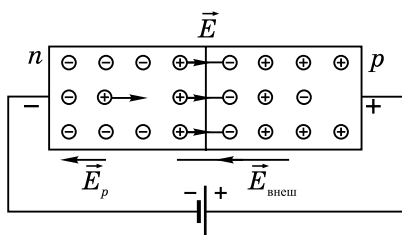


Рис. 172

Если полупроводник включить, как показано на рис. 173 (**обратный переход**), то результирующее поле $E_p = E_{\text{внеш}} + E$ препятствует движению основных носителей через *p-n*-переход. В цепи протекает незначительный ток (в ряде случаев им можно пренебречь), вызванный движением неосновных носителей через *p-n*-переход. Сопротивление *p-n*-перехода в этом случае очень большое.

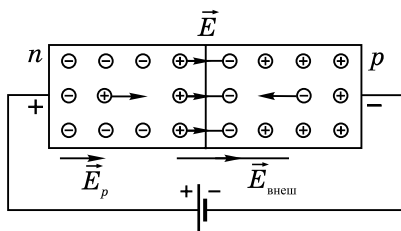


Рис. 173

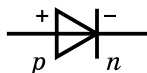


Рис. 174

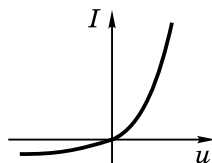


Рис. 175

Полупроводник с p - n -переходом обладает **односторонней проводимостью**: в прямом направлении сопротивление перехода значительно меньше, чем в обратном. Его можно использовать в качестве диода для выпрямления переменного тока. На электрических схемах полупроводниковый диод изображают, как показано на рис. 174. Зависимость тока от приложенного к диоду напряжения (вольтамперная характеристика) представлена на рис. 175.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ И РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. По медному проводу сечением $S=1 \text{ мм}^2$ протекает ток $I=10 \text{ мА}$. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника. Молярная масса меди $\mu=63,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, плотность $\rho=8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

Решение

По формуле (9.2) сила тока $I = |e|nSv$, где v — средняя скорость движения электронов. Чтобы определить концентрацию свободных электронов n , рассмотрим массу m меди. Ее объем $V = m / \rho$. В этом объеме содержится $N = (m / \mu) N_A$ атомов меди и такое же количество свободных электронов ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро). Концентрация

$$n = \frac{N}{V} = \left(\frac{m}{\mu} N_A \right) / \left(\frac{m}{\rho} \right) = \frac{\rho}{\mu} N_A = 0,84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{I}{|e|nS} = 7,4 \cdot 10^{-7} \text{ м/с} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}.$$

2. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размером $a \times a = 0,2 \times 0,2 \text{ м}^2$ и расстоянием между пластинами $d = 2 \text{ мм}$ присоединен к полюсам источника с ЭДС $\mathcal{E} = 750 \text{ В}$. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 0,08 \text{ м/с}$ вводят стеклянную пластинку толщиной $d = 2 \text{ мм}$. Какой ток будет протекать при этом в цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\epsilon = 7$ (см. рис. 176).

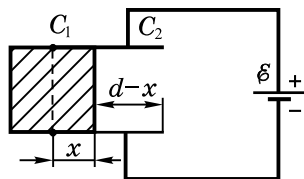


Рис. 176

Решение

Пусть в конденсатор введена часть стеклянной пластинки длиной $x = vt$. В этом случае к источнику подключены параллельно два конденсатора, электроемко-

сти которых C_1 и C_2 (см. рис. 176), причем $C_1 = \varepsilon \varepsilon_0 a x / d$, а $C_2 = \varepsilon_0 a (a - x) / d$.

Их общая емкость

$$C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a}{d} (\varepsilon x + a - x) = \frac{\varepsilon_0 a}{d} (a + vt(\varepsilon - 1)).$$

Заряд этой системы изменяется в зависимости от x и времени t :

$$q(t) = \oint (C_1 + C_2) = \oint \frac{\varepsilon_0 a}{d} (a + vt(\varepsilon - 1)).$$

В цепи будет протекать электрический ток

$$i(t) = q'(t) = \oint \frac{\varepsilon_0 a}{d} v(\varepsilon - 1) = \text{const.}$$

После подстановки числовых значений получим $i(t) = I = 3,2 \cdot 10^{-7}$ А.

3. Четыре одинаковых резистора соединены как показано на рис. 177. Сопротивление каждого резистора равно R . Определить сопротивление между точками A и B . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

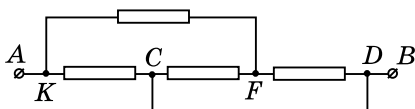


Рис. 177

Решение

При решении подобных задач надо найти точки, имеющие одинаковый потенциал, а затем их совместить. В рассматриваемой задаче по проводу, соединяющему точки C и D , протекает электрический ток, но $\varphi_C - \varphi_D = IR_{\text{пр}} = 0$, так как сопротивление провода $R_{\text{пр}} = 0 \Rightarrow \varphi_C = \varphi_D$. Совмещая точки C и D , получим эквивалентную схему (см. рис. 178).

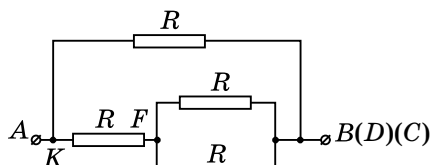


Рис. 178

Сопротивление участка KFC этой цепи равно $R + R/2 = 3R/2$. Общее сопротивление между точками A и B находим по формуле параллельного соединения двух проводников

$$R_{AB} = \frac{R \cdot 3R/2}{R + 3R/2} = \frac{3}{5}R.$$

4. Амперметр рассчитан на максимальный ток I_0 . Его сопротивление равно R_A . Какое сопротивление надо включить параллельно амперметру, чтобы им можно было измерять ток в n раз больший?

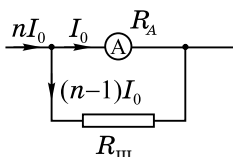


Рис. 179

Решение

Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется **шунтом**. Шунт включают параллельно амперметру (см. рис. 179). По условию задачи общий ток равен nI_0 , ток через амперметр I_0 , следовательно, через шунт протекает ток $nI_0 - I_0 = (n-1)I_0$. Так как напряжение на амперметре и шунте одинаково, то

$$I_0 R_A = (n-1)I_0 R_{\text{ш}} \Rightarrow R_{\text{ш}} = R_A / (n-1).$$

5. Вольтметром можно измерять максимальное напряжение u_0 . Его сопротивление равно R_V . Какое сопротивление надо включить последовательно с вольтметром, чтобы можно было измерять напряжение в n раз больше?

Решение

Сопротивление, о котором идет речь в условии задачи, называется **добавочным**. Его включают последовательно с вольтметром (см. рис. 180). По условию задачи общее напряжение nu_0 , причем напряжение на вольтметре u_0 . Следовательно, на добавочном сопротивлении напряжение равно $nu_0 - u_0 = (n-1)u_0$.

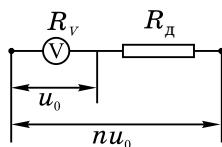


Рис. 180

Так как ток через вольтметр и добавочное сопротивление одинаков, то

$$u_0/R_V = (n-1)u_0/R_{\text{д}} \Rightarrow R_{\text{д}} = (n-1)R_V.$$

6. В схему включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра (см. рис. 181). Показание микроамперметров $I_1=100$ мкА и $I_2=99$ мкА; показания вольтметра $u_1=10$ В. Найти показания вольтметра u_2 .

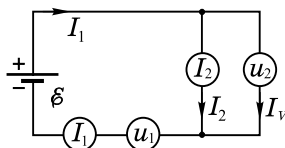


Рис. 181

Решение

Через первый вольтметр протекает ток I_1 . Следовательно, его сопротивление $R_V = u_1 / I_1$. По условию задачи таким же сопротивлением обладает второй вольтметр. Сила тока через второй вольтметр $I_V = I_1 - I_2$, поэтому он показывает напряжение

$$u_2 = I_V R_V = (I_1 - I_2) u_1 / I_1 = (1 - I_2 / I_1) u_1 = 0,1 \text{ В.}$$

7. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рис. 182. Сопротивление нагрузки и полное сопротивление реостата равны R . Нагрузка подключена к половине реостата. Входное напряжение, подаваемое на клеммы A и B , неизменно. Определить, как изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление увеличить в два раза.

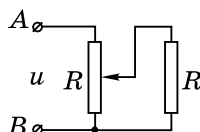


Рис. 182

Решение

Пусть входное напряжение равно u и нагрузка подключена к половине реостата. Соответствующая эквивалентная схема представлена на рис. 183. Общее сопротивление параллельно соединенных резисторов

$R/2$ и R $\frac{(R/2)R}{R/2 + R} = \frac{R}{3}$, общее сопротивление цепи

между точками A и B $\frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$. Общий ток в цепи $I_1 = u / (5R/6) = 6u / (5R)$.

Напряжение между точками C и D

$$u_1 = I_1 \frac{R}{3} = \frac{6u}{5R} \frac{R}{3} = \frac{2}{5}u.$$

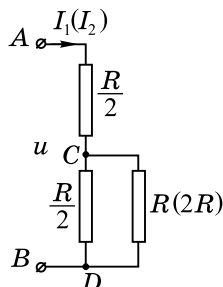


Рис. 183

Это и есть напряжение на нагрузочном резисторе R в первом случае.

Во втором случае сопротивление между точками C и D равно $\frac{(R/2)2R}{R/2+2R} = \frac{2}{5}R$. Общее сопротивление цепи $\frac{R}{2} + \frac{2}{5}R = \frac{9}{10}R$. Общий ток $I_2 = u / (9R/10) = 10u / (9R)$.

Напряжение на участке CD , равное напряжению на нагрузке во втором случае, $u_2 = I_2 \frac{2R}{5} = \frac{10u}{9R} \frac{2R}{5} = \frac{4}{9}u$.

Отношение напряжений на нагрузке $u_2 / u_1 = 10 / 9$.

8. На клеммы AB (см. рис. 184) подается такое меняющееся во времени напряжение, что напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону, представленному на рис. 185. Построить график зависимости напряжения от времени на клеммах MN .

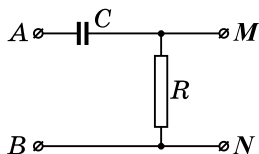


Рис. 184

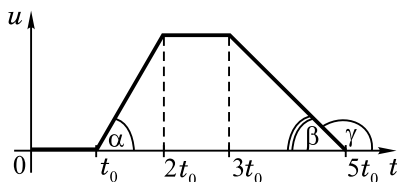


Рис. 185

Решение

Напряжение на клеммах AB — это напряжение на последовательно соединенных конденсаторе C и резисторе R . Напряжение на клеммах MN — это напряжение на резисторе R . Пусть напряжение на конденсаторе $u(t)$, тогда его заряд $q(t)=Cu(t)$. Следовательно, сила тока $i(t)$, протекающего через конденсатор и последовательно подключенный к нему резистор, равна производной от заряда по времени:

$$i(t)=q'(t)=(Cu(t))'=Cu'(t).$$

Напряжение на резисторе $u_{MN}=i(t)R=CRu'(t)$.

При $t \in [0, t_0]$ $u(t)=0 \Rightarrow u_{MN}=0$; при $t \in [t_0, 2t_0]$ $u(t)$ является линейной функцией времени, следовательно, производная от $u(t)$ есть константа, численно равная $\operatorname{tg} \alpha$ (см. рис. 185).

Значит, $u_{MN}=u_1=CR \operatorname{tg} \alpha$.

При $t \in [2t_0, 3t_0]$ $u(t)=\operatorname{const} \Rightarrow u'(t)=0 \Rightarrow u_{MN}=0$; при $t \in [3t_0, 5t_0]$ $u(t)$ — линейная функция времени, поэтому $u(t)=\operatorname{tg} \gamma=-\operatorname{tg} \beta < 0$. Значит, $u_{MN}=-CR \operatorname{tg} \beta$.

Из рис. 185 следует, что $\operatorname{tg} \beta=(\operatorname{tg} \alpha)/2$. График зависимости напряжения на клеммах MN представлен на рис. 186. Из графика видно, что в случае, когда напряжение на конденсаторе постоянно ($t \in [2t_0, 3t_0]$), ток $i(t)=0$, т. е. постоянный электрический ток через конденсатор не протекает.

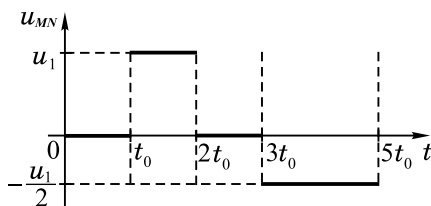


Рис. 186

9. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление $R_1=1$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $u_1=2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2=2$ Ом напряжение на зажимах $u_2=2,4$ В (см. рис. 187).

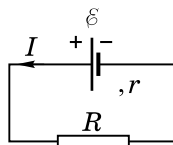


Рис. 187

Решение

Напряжение на зажимах аккумулятора u — это напряжение на внешнем сопротивлении R . По закону Ома для замкнутой цепи $\varepsilon = u + Ir$, где сила тока в цепи $I = u / R$. Используя условия задачи, составляем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varepsilon = u_1 + (u_1/R_1)r, \\ \varepsilon = u_2 + (u_2/R_2)r \end{cases} &\Rightarrow u_1 + \frac{u_1}{R_1}r = u_2 + \frac{u_2}{R_2}r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} \right) r = u_2 - u_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = (u_2 - u_1) / (u_1/R_1 - u_2/R_2) = 0,5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

10. Определить заряд конденсатора в схеме, изображенной на рис. 188, где $R_1=R_2=R_3=R_4=20$ Ом; $\varepsilon=500$ В; $r=10$ Ом; $C=10$ мкФ.

Решение

При решении подобных задач надо учитывать, что постоянный электрический ток через конденсатор не протекает. Стрелками на рисунке показано, как протекает ток в этой цепи. Для того чтобы найти заряд конденсатора, надо знать разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ на

его обкладках. Так как через резистор R_1 ток не протекает, то $\varphi_B - \varphi_D = 0 \Rightarrow \varphi_B = \varphi_D$. Так как точки D и N соединены проводом, сопротивление которого $R_{\text{пр}} = 0$, то $\varphi_D - \varphi_N = 0 \Rightarrow \varphi_N = \varphi_B$. Таким образом, разность потенциалов на обкладках конденсатора C $\varphi_A - \varphi_B = \varphi_A - \varphi_N$, а это есть напряжение на резисторе R_2 . Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, тогда сопротивление цепи между точками M и N $R_{MN} = 2RR / (2R + R) = 2R / 3$. Общий ток $I = \mathcal{E} / (2R / 3 + r) = 3\mathcal{E} / (2R + 3r)$. Разность потенциалов между точками

M и N $\varphi_M - \varphi_N = IR_{MN} = \frac{3\mathcal{E}}{2R + 3r} \cdot \frac{2}{3}R = \frac{2\mathcal{E}R}{2R + 3r}$. Сила тока

через последовательно соединенные резисторы R_2 и R_3

$I_2 = \frac{\varphi_M - \varphi_N}{R_2 + R_3} = \frac{\mathcal{E}}{2R + 3r}$. Разность потенциалов между точ-

ками A и N $\varphi_A - \varphi_N = \varphi_A - \varphi_B = I_2 R_2 = \frac{\mathcal{E}R}{2R + 3r}$.

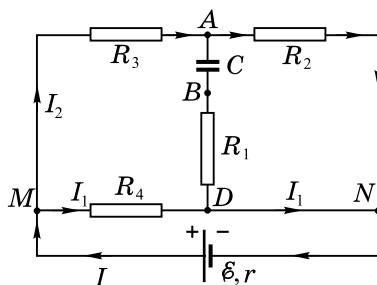


Рис. 188

Заряд конденсатора $q = C(\varphi_A - \varphi_B) = \mathcal{E}RC / (2R + 3r) \approx 1,43 \times 10^{-3}$ Кл.

11. Определить заряд и энергию конденсатора в схеме на рис. 189. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

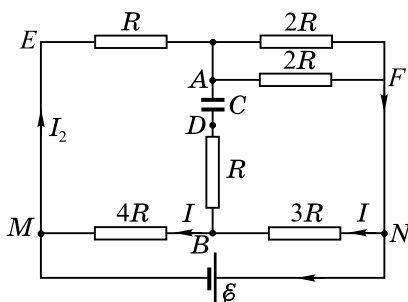


Рис. 189

Решение

Участок цепи между точками A и B содержит конденсатор, поэтому ток на этом участке отсутствует. Так как внутренним сопротивлением источника можно пренебречь, то разность потенциалов $\varphi_N - \varphi_M = \mathcal{E}$. Сила тока через последовательно соединенные резисторы $3R$ и $4R$ $I = \mathcal{E} / (7R)$. Тогда разность потенциалов

$$\varphi_N - \varphi_B = I \cdot 3R = 3\mathcal{E} / 7.$$

Общее сопротивление двух параллельно соединенных резисторов $2R$ равно $2R / 2 = R$. Тогда между точками F и E последовательно включены два резистора величиной R , причем разность потенциалов $\varphi_F - \varphi_E = \mathcal{E}$. Из свойств последовательного соединения

$$\varphi_A - \varphi_E = \varphi_F - \varphi_A = \mathcal{E} / 2.$$

Итак,
$$\begin{cases} \varphi_N - \varphi_B = 3 / 7, \\ \varphi_F - \varphi_A = / 2. \end{cases}$$
 Учтем, что $\varphi_F = \varphi_N$ и вычтем

из первого уравнения второе, тогда $\varphi_A - \varphi_B = -\mathcal{E} / 14 \Rightarrow \varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E} / 14$. Так как на участке между точками A и B тока нет, то $\varphi_B - \varphi_D = 0 \cdot R = 0 \Rightarrow \varphi_D = \varphi_B$. Разность потенциалов на конденсаторе $\varphi_D - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E} / 14$. Заряд конденсатора $q = C(\varphi_D - \varphi_A) = C(\varphi_B - \varphi_A) = C\mathcal{E} / 14$. Энергия конденсатора $W = C(\varphi_D - \varphi_A)^2 / 2 = C\mathcal{E}^2 / 392$.

12. Определить заряд конденсатора C в схеме, изображенной на рис. 190. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

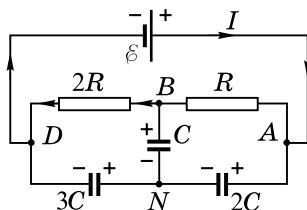


Рис. 190

Решение

Стрелками показано направление тока I в цепи (постоянный ток через конденсатор не протекает), причем $I = \varepsilon / (3R)$. Разность потенциалов между точками A и B $\varphi_A - \varphi_B = IR = \varepsilon / 3$, а разность потенциалов между точками B и D $\varphi_B - \varphi_D = I \cdot 2R = 2\varepsilon / 3$.

Пусть q_1 , q_2 , q_3 — модули зарядов конденсаторов C , $2C$, $3C$ соответственно. Предположим, что пластины конденсаторов заряжены так, как показано на рис. 190, где N — общая точка трех пластин, которые не подключены к источнику. Тогда их суммарный заряд равен нулю, т.е. $-q_1 - q_2 + q_3 = 0$.

Пусть u_1 , u_2 , u_3 — напряжения на конденсаторах. Тогда $q_1 = Cu_1$, $q_2 = 2Cu_2$, $q_3 = 2Cu_3$ и последнее уравнение приводим к виду

$$3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0.$$

Запишем очевидное алгебраическое равенство

$$(\varphi_B - \varphi_N) + (\varphi_N - \varphi_D) = \varphi_B - \varphi_D.$$

В этом равенстве $\varphi_B - \varphi_D = 2\varepsilon / 3$, $\varphi_B - \varphi_N = u_1$, а $\varphi_N - \varphi_D = u_3$, поэтому $u_1 + u_3 = 2\varepsilon / 3$.

Запишем еще одно равенство $(\varphi_A - \varphi_N) - (\varphi_B - \varphi_N) = \varphi_A - \varphi_B$. В этом равенстве $\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon / 3$, $\varphi_A - \varphi_N = u_2$, $\varphi_B - \varphi_N = u_1$, поэтому $u_2 - u_1 = \varepsilon / 3$.

Получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} 3u_3 - u_1 - 2u_2 = 0, \\ u_1 + u_3 = 2\varepsilon/3, \\ u_2 - u_1 = \varepsilon/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3u_3 + 2u_2, \\ 4u_3 - 2u_2 = 2\varepsilon/3, \\ 3u_2 - 3u_3 = \varepsilon/3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2\varepsilon/9, \\ u_2 = 5\varepsilon/9, \\ u_3 = 4\varepsilon/9. \end{cases}$$

Так как все напряжения положительны, то предположение о знаках зарядов на обкладках конденсатора C верно. Зная напряжения, находим заряды конденсаторов: $q_1 = 2C\varepsilon/9$, $q_2 = 10C\varepsilon/9$, $q_3 = 4C\varepsilon/9$.

13. Дана электрическая цепь, содержащая источник ЭДС. К источнику подключено внешнее сопротивление R . Найти полезную мощность и коэффициент полезного действия цепи (см. рис. 191).

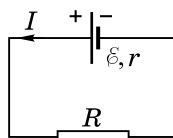


Рис. 191

Решение

Полезная мощность — это мощность, которая выделяется на внешнем сопротивлении R . Во всей цепи выделяется мощность, равная работе источника в единицу времени, т. е. εI , где I — сила тока в цепи. При этом на внутреннем сопротивлении источника выделяется мощность $I^2 r$.

По закону сохранения энергии

$$\varepsilon I = I^2 R + P_{\text{п}}, \quad (9.21)$$

где $P_{\text{п}}$ — полезная мощность. Формулу (9.21) удобно использовать при решении ряда задач.

Сила тока в цепи $I = \varepsilon / (R + r)$, поэтому полезная мощность

$$P_{\text{п}} = I^2 R = (\varepsilon / (R + r))^2 R.$$

Исследуем полезную мощность как функцию внешнего сопротивления R . Для этого найдем производную от полезной мощности

$$P'_\Pi = \left(\frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R \right)' = \mathcal{E}^2 \frac{R'(R+r)^2 - R((R+r)^2)'}{(R+r)^4} =$$

$$= \mathcal{E}^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \mathcal{E}^2 \frac{r-R}{(R+r)^3};$$

$P'_\Pi = 0$, если $r=R$. При $R < r$ $P'_\Pi > 0$, поэтому $P_\Pi(R)$ возрастает, а при $R > r$ $P'_\Pi < 0$, поэтому $P_\Pi(R)$ убывает. График зависимости $P_\Pi(R)$ представлен на рис. 192. Полезная мощность достигает максимального значения $\mathcal{E}^2 / (4r)$ при $R=r$.

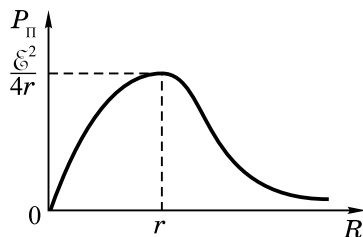


Рис. 192

Коэффициент полезного действия электрической цепи $\eta = P_\Pi / P$, где P — мощность, выделяющаяся во всей цепи. Так как $P_\Pi = I^2 R$, а $P = I^2 (R+r)$, то $\eta = R / (R+r)$. График зависимости η от внешнего сопротивления R представлен на рис. 193.

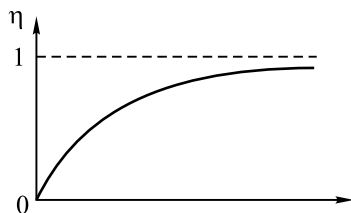


Рис. 193

14. Генератор мощностью P вырабатывает электроэнергию, которая передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых равно R . Напряжение генератора u . Определить отношение мощности, выделяемой на нагрузке у потребителя, к мощности генератора. Сопротивлением генератора пренебречь.

Решение

Провода и нагрузка подключены к генератору последовательно. Поэтому в цепи по проводам и нагрузке протекает одинаковый ток. Так как известны мощность генератора и вырабатываемое им напряжение, то $P = uI$, где I — сила тока в цепи. Следовательно, $I = P/u$. Тепловая мощность, которая выделяется на проводах, $P_{\text{пр}} = I^2 R$. Мощность, которая выделяется на нагрузке у потребителя, $P_{\text{п}} = P - P_{\text{пр}} = P - I^2 R$.

Искомое отношение

$$\frac{P_{\text{п}}}{P} = \frac{P - I^2 R}{P} = \frac{P - (P/u)^2 R}{P} = 1 - \frac{PR}{u^2}.$$

15. Конденсатор емкостью C , заряженный до разности потенциалов \mathcal{E} , подключается через большое сопротивление к батарее с ЭДС $5\mathcal{E}$. Определить количество тепла, которое выделится при зарядке конденсатора до напряжения $5\mathcal{E}$. Подключение конденсатора производится по схеме, изображенной на рис. 194.

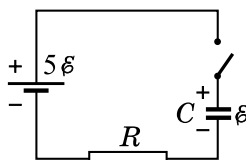


Рис. 194

Решение

Начальный заряд конденсатора $q_0 = C\varepsilon$. Когда конденсатор зарядится до напряжения 5ε , его заряд $q_1 = C \cdot 5\varepsilon$. При этом через источник пройдет заряд $\Delta q = q_1 - q_0 = 4C\varepsilon$. Источник, зарядив конденсатор, совершит работу

$$A = (5\varepsilon) \Delta q = (5\varepsilon) 4C\varepsilon = 20C\varepsilon^2.$$

Эта работа идет на выделение тепла в цепи и на увеличение энергии конденсатора $A = Q + \Delta W$, где $\Delta W = W_1 - W_0$. Начальная энергия конденсатора $W_0 = C\varepsilon^2 / 2$. Конечное значение энергии конденсатора $W_1 = C(5\varepsilon)^2 / 2 = 25C\varepsilon^2 / 2$. Поэтому $\Delta W = W_1 - W_0 = 25C\varepsilon^2 / 2 - C\varepsilon^2 / 2 = 12C\varepsilon^2$. Выделившаяся в цепи теплота $Q = A - \Delta W = 20C\varepsilon^2 - 12C\varepsilon^2 = 8C\varepsilon^2$.

16. В схеме на рис. 195 ключ K вначале разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсатор заряжается до напряжения u . Какое количество теплоты выделится к этому моменту времени на резисторе сопротивлением R ? ЭДС источника — ε , внутреннее сопротивление — r .

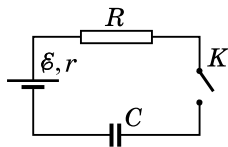


Рис. 195

Решение

Начальные заряд и энергия конденсатора $q_1 = 0$, $W_1 = 0$. После замыкания ключа конденсатор заряжается и в момент, когда напряжение на нем равно u , его заряд $q_2 = Cu$, а энергия $W_2 = Cu^2 / 2$. При этом на конденсатор через источник протекает заряд $\Delta q = q_2 - q_1 = Cu$, а сторонние силы источника совершают работу $A_{\text{ст}} = \varepsilon \Delta q = C\varepsilon u$. По закону сохранения энергии эта работа идет на увеличе-

ние энергии конденсатора и выделяется в виде теплоты на внутреннем сопротивлении и на резисторе R :

$$\begin{aligned} A_{\text{ст}} = \Delta W + Q &\Rightarrow Q = A_{\text{ст}} - \Delta W = A_{\text{ст}} - (W_2 - W_1) = \\ &= C\varepsilon u - Cu^2/2 = Cu(\varepsilon - u/2). \end{aligned}$$

Пока происходит зарядка конденсатора, по цепи протекает изменяющийся во времени ток $i(t)$. Однако в любой момент времени этот ток одинаков в сопротивлениях r и R . По закону Джоуля — Ленца при одинаковом токе количество выделившейся теплоты пропорционально сопротивлению резистора. Поэтому $Q_R = kR$ и $Q_r = kr$, где Q_R и Q_r — количества теплоты, выделившиеся в сопротивлениях R и r соответственно, а k — коэффициент пропорциональности.

Так как $Q = Q_R + Q_r = kR + kr = k(R + r)$, то

$$\begin{aligned} k &= Q/(R + r) \Rightarrow Q_R = kR = QR/(R + r) = \\ &= Cu(\varepsilon - u/2)R/(R + r). \end{aligned}$$

17. При никелировании изделия толщина слоя никеля росла со скоростью $v = 9 \cdot 10^{-9}$ м/с. Определить плотность тока при электролизе. Электрохимический эквивалент и плотность никеля равны соответственно $k = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, $\rho = 8,9 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Решение

Масса выделившегося при электролизе никеля

$$m = kq = kIt = kjSt,$$

где t — время протекания тока, j — его плотность, S — площадь изделия. С другой стороны, $m = \rho V = \rho Sh$, где h — толщина слоя никеля.

Итак, $\rho Sh = kjSt \Rightarrow \rho h/t = kj$, где $h/t = v$ — скорость роста покрытия; $\rho v = kj \Rightarrow j = \rho v/k = 267$ А/м².

18. В схеме, изображенной на рис. 196, $C_2 = 10$ мкФ, $R = 2$ кОм. Площадь пластин конденсатора $S = 100$ см², расстояние между ними $d = 5$ мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между пластинами конденсатора C_1 , равна $n = 2 \cdot 10^{12}$ пар носителей заряда за 1 с в 1 м³. Заряд носителей равен элементарному заряду $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Все образовавшиеся носители заряда достигают пластин конденсатора C_1 . Определить заряд конденсатора C_2 .

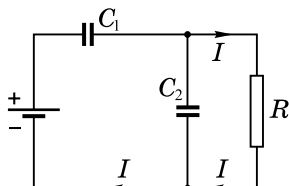


Рис. 196

Решение

В пространстве между пластинами конденсатора C_1 образуются положительно заряженные ионы и электроны, которые под действием электрического поля движутся в противоположных направлениях, создавая электрический ток, через резистор R . За промежуток времени Δt под действием рентгеновского излучения в объеме V образуется $N = nV\Delta t$ пар носителей зарядов. Так как $V = Sd$ и каждому положительно заряженному иону соответствует отрицательно заряженный ион, то переносимый за время Δt полный заряд $q = 2|e|N = 2|e|nSd\Delta t$. Следовательно, через резистор R протекает ток $I = q/\Delta t = 2|e|nSd$. Напряжение на резисторе $u = IR = 2|e|nSdR$ равно напряжению на конденсаторе C_2 . Поэтому его заряд $q_2 = C_2u = 2|e|nSdC_2R = 6,4 \cdot 10^{-13}$ Кл.

РАЗДЕЛ 10

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. Магнитное поле

Неподвижные электрические заряды создают вокруг себя электрическое поле. Движущиеся заряды создают также и **магнитное поле**. Основные свойства магнитного поля, установленные экспериментально, таковы:

1. Магнитное поле порождается электрическим током (движущимися зарядами).

2. Магнитное поле обнаруживается по действию на электрический ток (движущиеся заряды).

Магнитное поле существует вокруг любого проводника, по которому протекает электрический ток. Кроме того, магнитное поле создается постоянными магнитами. Важнейшей характеристикой магнитного поля является **вектор магнитной индукции \vec{B}** . **Линиями магнитной индукции** называют линии, касательные к которым направлены так же, как и вектор \vec{B} в данной точке поля. Как и силовые линии электрического поля, линии магнитной индукции проводят так, чтобы их густота была пропорциональна модулю вектора магнитной индукции. У линий магнитной индукции есть важное отличие от силовых линий электростатического поля: **линии магнитной индукции замкнуты**. Это свидетельствует о том, что у магнитного поля нет особых источников — магнитных зарядов. Магнитное поле является **вихревым**. В нем в отличие от потенциального поля (например, электростатического или поля тяжести Земли) работа при перемещении по замкнутой траектории не равна нулю и зависит от формы траектории.

Для магнитных полей справедлив **принцип суперпозиции**: в любой точке поля вектор магнитной индукции \vec{B} результирующего поля равен сумме векторов \vec{B}_i полей, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n. \quad (10.1)$$

2. Сила Ампера

Магнитное поле действует на проводник с током с силой, которую называют **силой Ампера**. Если длина прямолинейного проводника l , ток в проводнике I , индукция магнитного поля \vec{B} составляет угол α с проводником, то на проводник действует сила Ампера

$$F_A = BIl \sin \alpha. \quad (10.2)$$

Направление силы Ампера определяется по **правилу левой руки**: расположим левую руку так, чтобы линии магнитной индукции (их составляющие, перпендикулярные проводнику) входили в ладонь, а четыре вытянутых пальца показывали направление тока, тогда отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Ампера.

Сила Ампера перпендикулярна плоскости, проходящей через проводник и вектор магнитной индукции (см. рис. 197).

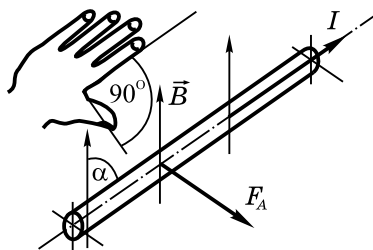


Рис. 197

Сила Ампера обращается в нуль, когда вектор магнитной индукции \vec{B} параллелен проводнику с током. Сила Ампера максимальна и равна BIl , когда вектор \vec{B} перпендикулярен проводнику.

3. Сила Лоренца

Магнитное поле действует на движущийся заряд с силой, которую называют **силой Лоренца**. Если q — величина заряда, \vec{v} — его скорость, \vec{B} — индукция магнитного поля, образующего с вектором скорости угол α , то на заряд действует **сила Лоренца**

$$F_{\text{Л}} = |q|vB\sin\alpha. \quad (10.3)$$

Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки: расположим левую руку так, чтобы линии магнитной индукции (их составляющие, перпендикулярные скорости) входили в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по вектору скорости, если заряд положительный, и против вектора скорости, если заряд отрицательный, тогда отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Лоренца.

Сила Лоренца перпендикулярна плоскости, проходящей через векторы \vec{v} и \vec{B} , т. е. $F_{\text{Л}} \perp \vec{v}$ и $F_{\text{Л}} \perp \vec{B}$ (см. рис. 198).

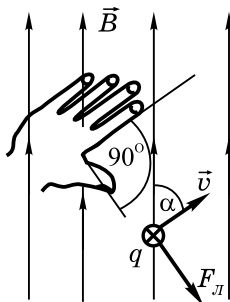


Рис. 198

Сила Лоренца обращается в нуль, когда вектор магнитной индукции \vec{B} параллелен вектору скорости заряда. Сила Лоренца максимальна и равна $|q|\nu B$, когда $\vec{B} \perp \vec{v}$.

4. Магнитный поток

Магнитным потоком (потоком магнитной индукции) Φ через плоскую поверхность площадью S , помещенную в однородное магнитное поле, называется величина

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (10.4)$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, α — угол между вектором \vec{B} и вектором нормали \vec{n} к поверхности (см. рис. 199).

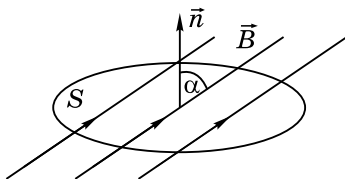


Рис. 199

Когда магнитное поле создается несколькими источниками, то из принципа суперпозиции следует, что результирующий магнитный поток

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n, \quad (10.5)$$

где Φ_i ($i=1, 2, \dots, n$) — магнитный поток, создаваемый каждым источником.

Если в каком-либо замкнутом контуре протекает ток I , то он создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току ($B \sim I$). При этом магнитное поле создает магнитный поток через площадь, ограниченную контуром. Этот магнитный поток называют **собственным магнитным потоком** Φ_c . Его величина пропорциональна

индукции B , а значит, и току I , протекающему в контуре, т. е.

$$\Phi_c = LI. \quad (10.6)$$

Коэффициент пропорциональности L в этом равенстве называют **индуктивностью контура**. Индуктивность зависит от геометрических размеров и формы контура, а также магнитных свойств среды, в которой находится контур.

Пусть произвольный контур находится во внешнем магнитном поле. Полный магнитный поток Φ , пронизывающий контур, состоит из потока внешнего поля $\Phi_{\text{вн}}$ и собственного магнитного потока Φ_c :

$$\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_c. \quad (10.7)$$

5. Закон электромагнитной индукции

Опытным путем было установлено **явление электромагнитной индукции**, состоящее в том, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур, образованный замкнутым проводником, в проводнике возникает **индукционный ток**, существующий в течение всего времени изменения магнитного потока.

Правило Ленца позволяет установить направление индукционного тока: индукционный ток в контуре направлен так, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего этот контур.

В более общем виде правило Ленца формулируется так: **индукционный ток всегда противодействует причине, вызвавшей его.**

Закон электромагнитной индукции утверждает: при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограничен-

ную этим контуром, а вызываемый ею ток противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t), \quad (10.8)$$

где \mathcal{E}_i — электродвижущая сила индукции, $\Phi'(t)$ — производная от магнитного потока по времени, которая и является скоростью изменения магнитного потока.

В случае, когда магнитный поток изменяется равномерно во времени, производную можно заменить отношением $\Delta\Phi / \Delta t$, где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока за время Δt . При этом $\Delta\Phi$ равно разности между конечным Φ_2 и начальным Φ_1 значениями магнитного потока, т. е. $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Тогда

$$\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi / \Delta t. \quad (10.9)$$

6. Электродвижущая сила самоиндукции

Согласно формуле (10.7) магнитный поток $\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_{\text{с}}$, подставляя это выражение в (10.8), получим

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'_{\text{вн}} - \Phi'_{\text{с}}. \quad (10.10)$$

В ряде случаев собственный магнитный поток можно не учитывать (при $L \rightarrow 0$), и тогда ЭДС индукции определяется только скоростью изменения внешнего магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'_{\text{вн}}.$$

В тех случаях, когда внешнее магнитное поле отсутствует, в контуре возникает ЭДС индукции только за счет изменения собственного магнитного потока. Ее называют ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с}}$. Из формулы (10.8) получаем, что $\mathcal{E}_i = -\Phi'_{\text{с}}$. Так как $\Phi_{\text{с}} = LI$, то $\mathcal{E}_{\text{с}} = -(LI)'$. В большинстве задач индуктивность контура $L = \text{const}$, поэтому

$$\mathcal{E}_{\text{с}} = -LI'(t), \quad (10.11)$$

где $I'(t)$ — производная от тока в контуре по времени, которую называют скоростью изменения силы тока.

В случае, когда ток изменяется равномерно во времени, ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_c = -L(\Delta I / \Delta t), \quad (10.12)$$

где ΔI — разность между конечным и начальным значениями тока, возникшая за время Δt .

Когда зависимость потока и тока от времени неизвестны, но изменение их во времени неравномерное, формулы (10.9) и (10.12) выражают средние значения ЭДС индукции и самоиндукции.

7. Вихревое электрическое поле.

ЭДС индукции в движущихся проводниках. энергия магнитного поля тока

Причиной возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является фундаментальный закон природы: переменное во времени магнитное поле порождает **вихревое электрическое поле**. Линии напряженности такого поля замкнуты. **Работа вихревого электрического поля** при перемещении заряда q по замкнутому контуру не равна нулю, а ее отношение к величине этого заряда есть ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = A / q. \quad (10.13)$$

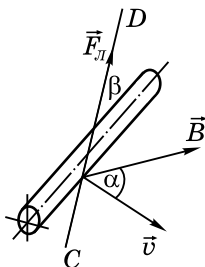


Рис. 200

ЭДС индукции возникает и в движущихся в магнитном поле проводниках. Рассмотрим прямолинейный проводник длиной l , который перемещается в магнитном поле с индукцией \vec{B} со скоростью \vec{v} , причем угол между векторами \vec{B} и \vec{v} равен α . Ось проводника образует с перпендикуляром CD к плоскости векторов \vec{v} и \vec{B} угол β (см. рис. 200).

На каждый свободный электрон внутри проводника действует сила Лоренца \vec{F}_L , направленная вдоль CD и равная $F_L = |e|vB\sin\alpha$, где $|e|$ — модуль заряда электрона. Работа этой силы при перемещении электрона с одного конца проводника на другой

$$A = F_L l \cos\beta = |e|vB\sin\alpha \cdot l \cos\beta = |e|vBl\sin\alpha \cos\beta.$$

ЭДС индукции здесь возникает из-за действия силы Лоренца:

$$\mathcal{E}_i = A/|e| = Bvl\sin\alpha \cos\beta.$$

Когда проводник перпендикулярен плоскости векторов \vec{B} и \vec{v} , $\beta=0$, тогда

$$\mathcal{E}_i = Bvl \sin\alpha. \quad (10.14)$$

Если по контуру с индуктивностью L протекает ток силой I , то созданное им магнитное поле обладает энергией

$$W_m = LI^2 / 2. \quad (10.15)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Прямолинейный однородный проводник, подвешенный на двух гибких проволочках одинаковой длины, может вращаться вокруг горизонтальной оси AC . Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле. Если по проводнику течет ток

$I_1 = 1$ А, проволочки отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30^\circ$. При какой силе тока они будут отклоняться на угол $\alpha_2 = 60^\circ$? Массой проволок можно пренебречь.

Решение

Предположим, что ток протекает, как показано на рис. 201. Вид сбоку представлен на рис. 202. На проводник действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (m — масса проводника), равнодействующая сил натяжения проволок \vec{T} , сила Ампера \vec{F}_A , направленная горизонтально. Условия равновесия проводника, записанные для горизонтальной и вертикальной осей X и Y , дают систему уравнений:

$$\begin{cases} \text{по оси } X & F_A - T \sin \alpha = 0, \\ \text{по оси } Y & T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T \sin \alpha = F_A, \\ T \cos \alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_A}{mg}.$$

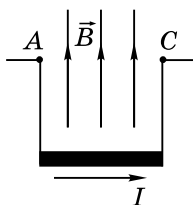


Рис. 201

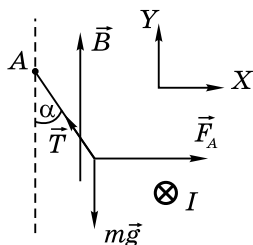


Рис. 202

В рассматриваемой задаче проводник перпендикулярен магнитному полю, поэтому $F_A = BIl \sin 90^\circ = BIl$.

Итак, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BIl}{mg}$. При токе I_1 $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{BI_1 l}{mg}$; при токе I_2

$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BI_2 l}{mg}$. Отношение тангенсов

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 3 \text{ А.}$$

2. Частица массой $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3,2 \times 10^{-19}$ Кл сначала ускоряется в электростатическом поле, проходя ускоряющую разность потенциалов $u = 2500$ В. Начальная скорость частицы равна нулю. Затем частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл, перпендикулярное вектору скорости. Найти изменение импульса частицы за время $t = (\pi / 2) \cdot 1,039 \cdot 10^{-3}$ с после влета в магнитное поле. Определить модуль центростремительного и тангенциального ускорения частицы в этот и последующие моменты времени.

Решение

Пусть в начальный момент времени заряженная частица находится в точке A электростатического поля, потенциал которой равен φ_A . Тогда энергия частицы — потенциальная энергия в электростатическом поле $W_A = W_{pA} = q\varphi_A$. В точке B энергия частицы состоит из потенциальной $W_{pB} = q\varphi_B$ и кинетической $W_{kB} = mv^2 / 2$, т. е. $W_B = q\varphi_B + mv^2 / 2$. По закону сохранения энергии

$$W_A = W_B \Rightarrow q\varphi_A = q\varphi_B + mv^2 / 2 \Rightarrow q(\varphi_A - \varphi_B) = mv^2 / 2.$$

Но $\varphi_A - \varphi_B = u \Rightarrow qu = mv^2 / 2$, и скорость частицы при ее влете в магнитное поле $v = \sqrt{2qu/m} = 4,9 \cdot 10^5$ м/с. В магнитном поле частица под действием силы Лоренца движется по окружности с постоянной по модулю скоростью v (см. рис. 203). По второму закону Ньютона $F_{\text{л}} = ma_n$, где сила Лоренца $F_{\text{л}} = qvB$, а центростремительное ускорение частицы $a_n = v^2 / R$. После подстановки получаем $qvB = mv^2 / R$, откуда радиус окружности

$$R = \frac{mv}{qB} = 510 \text{ м.}$$

Период обращения частицы по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = 2\pi \cdot 1,039 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

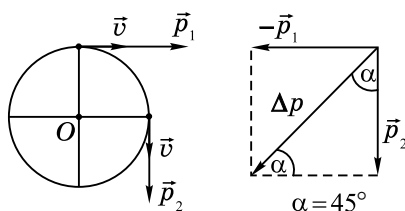


Рис. 203

Отношение времени движения t к периоду T :

$$\frac{t}{T} = \frac{(\pi/2) \cdot 1,039 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 1,039 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{4}T,$$

т. е. за указанное время частица проходит $1/4$ окружности, а ее вектор скорости поворачивается на 90° (см. рис. 203).

Изменение импульса $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$, где $p_1 = p_2 = mv$. Модуль вектора $\Delta p = \sqrt{2}p_1 = 4,6 \cdot 10^{21}$ кгм/с. Модуль центростремительного ускорения в любой точке окружности $a_n = v^2 / R = 4,7 \cdot 10^8$ м/с².

Так как сила Лоренца, действующая на частицу, направлена по радиусу окружности к центру, то тангенциальное ускорение в любой точке $a_t = 0$.

3. В однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} влетает со скоростью \vec{v} частица массой m и зарядом q . Угол между векторами скорости \vec{v} и магнитной индукции \vec{B} равен α . Как будет двигаться частица в магнитном поле (см. рис. 204)?

Решение

Будем для определенности считать заряд частицы положительным. Введем систему координат, ось X которой направлена вдоль поля, а плоскость YOZ перпендикулярна полю. Так как скорость \vec{v} перпендикулярна силе Лоренца \vec{F}_L , действующей на частицу, то сила Лоренца

работы не совершает и, следовательно, скорость остается постоянной по модулю. Так как $\vec{F}_L \perp \vec{B}$, то $\vec{F}_L \perp OX$. Проекция силы Лоренца на ось OX равна нулю, значит, в направлении поля у частицы нет ускорения и она движется равномерно прямолинейно со скоростью $v_x = v \cos \alpha$. Так как $v_x = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то угол α между векторами \vec{v} и \vec{B} будет оставаться постоянным. Поэтому и сила Лоренца $F_L = qvB \sin \alpha$ будет постоянной по модулю, причем вектор \vec{F}_L параллелен плоскости YOZ . Перпендикулярная вектору \vec{B} проекция скорости $v_1 = v \sin \alpha$ находится в плоскости, параллельной плоскости YOZ . Следовательно, в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , частица движется по окружности, радиус которой можно найти из второго закона Ньютона:

$$F_L = ma_n \Rightarrow qvB \sin \alpha = m \frac{v_1^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qvB \sin \alpha = m \frac{(v \sin \alpha)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

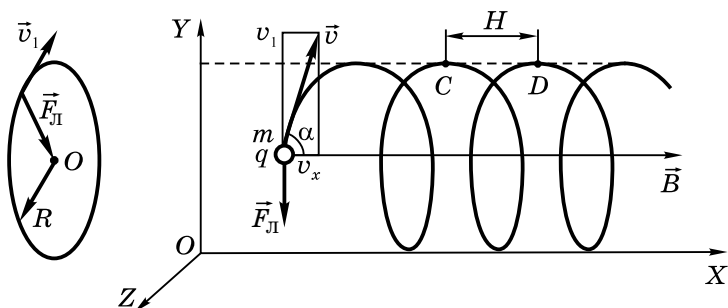


Рис. 204

Итак, в направлении поля частица движется прямолинейно равномерно со скоростью $v_x = v \cos \alpha$, а в плоскости, перпендикулярной полю, она описывает окружность радиусом $R = (mv \sin \alpha) / (qB)$. В итоге получаем сложное движение по винтовой линии. Шаг винтовой линии H —

это расстояние, на которое смещается частица в направлении поля за время одного оборота T по окружности, т.е. расстояние между точками C и D (см. рис. 204):

$$H = v_x T, \text{ где}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi \left(\frac{mv \sin \alpha}{qB} \right)}{v \sin \alpha} = 2\pi \frac{m}{qB};$$

$$H = v \cos \alpha \cdot 2\pi \frac{m}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

4. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем с напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности (см. рис. 205). Определить значение и направление индукции магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

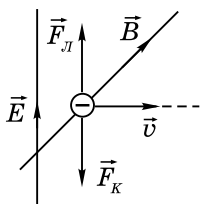


Рис. 205

Решение

Энергия электрона $W = m_e v^2 / 2$, где $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона, v — его скорость. Следовательно, $v = \sqrt{2W/m_e}$. Электростатическое поле действует на электрон с силой $F_K = |e|E$, где $|e|$ — модуль заряда электрона. Для того чтобы электрон не испытывал отклонений, необходимо скомпенсировать эту силу силой Лоренца \vec{F}_L , действующей со стороны магнитного поля.

Так как

$$|e|E = |e|vB \Rightarrow B = E/v = E\sqrt{m_e/(2W)} = 0,1 \text{ Тл.}$$

Вектор $\vec{B} \perp \vec{v}$ и $\vec{B} \perp \vec{E}$ (см. рис. 205).

5. По металлической ленте толщиной h течет ток I . Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , направленной перпендикулярно поверхности ленты (см. рис. 206). Определить разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n .

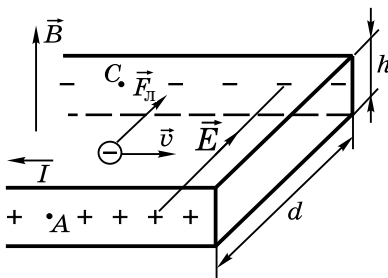


Рис. 206

Решение

В металле электрический ток — это направленное движение свободных электронов, причем

$$I = |e|nSv, \quad (1)$$

где $|e|$ — модуль заряда электрона, v — скорость упорядоченного движения электронов, $S = dh$ — площадь поперечного сечения ленты (d — ее ширина). Магнитное поле действует на свободные электроны с силой Лоренца, направленной перпендикулярно току в ленте, как показано на рисунке. Поскольку на одной из поверхностей ленты образуется избыток электронов, между торцами ленты возникнет электрическое поле \vec{E} , следовательно, между точками A и C будет существовать разность потенциалов. Перемещение электронов будет продолжаться до тех

пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена силой со стороны электрического поля, т. е.

$$F_K = F_L \Rightarrow |e|E = |e|vB \Rightarrow E = vB. \quad (2)$$

Скорость электронов выражаем из уравнения (1): $v = I / (|e|nS)$. Напряженность поля связана с разностью потенциалов соотношением $E = (\varphi_A - \varphi_C) / d$. Подставляя его в равенство (2), получаем

$$\frac{\varphi_A - \varphi_C}{d} = \frac{IB}{|e|ndh} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_C = \frac{IB}{|e|nh}.$$

6. Незаряженный металлический цилиндр вращается вокруг своей оси в магнитном поле с угловой скоростью ω . Индукция магнитного поля направлена вдоль оси цилиндра. Каково должно быть значение индукции магнитного поля, чтобы в цилиндре не возникло электрическое поле? Масса электрона m_e , его заряд e .

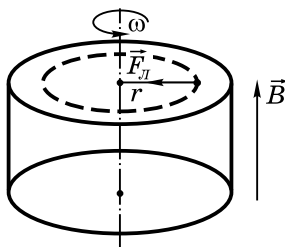


Рис. 207

Решение

Предположим, что цилиндр вращается против часовой стрелки, как показано на рис. 207. Электрическое поле внутри цилиндра не возникает, если отсутствует смещение свободных электронов. Это соответствует тому, что каждый свободный электрон движется по окружности с угловой скоростью ω . Линейная скорость электрона $v = \omega r$, где r — расстояние электрона до оси вращения. Следовательно, на каждый электрон действует

сила Лоренца $F_{\text{Л}} = |e|vB$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 r$, достаточное для движения по окружности радиусом r . Для того чтобы сила Лоренца была направлена к оси вращения, необходимо, чтобы индукция магнитного поля \vec{B} была направлена вверх, если цилиндр вращается против часовой стрелки, и вниз, если цилиндр вращается по часовой стрелке.

По второму закону Ньютона $F_{\text{Л}} = ma_n \Rightarrow |e|vB = m_e \omega^2 r$. Подставляя $v = \omega r$, находим, что $B = m_e \omega^2 / |e|$.

7. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S = 10^{-2}$ м², а сопротивление $R = 2$ Ом. Первоначально плоскость витка перпендикулярна линиям магнитной индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, $q = 7,5 \cdot 10^{-4}$ Кл. На какой угол повернули виток?

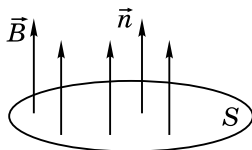


Рис. 208

Решение

Пусть нормаль \vec{n} к плоскости витка совпадает по направлению с вектором магнитной индукции \vec{B} (см. рис. 208). Начальный магнитный поток через площадь, ограниченную витком, $\Phi_1 = BS \cos 0^\circ = BS$. При повороте плоскости витка на угол α нормаль, связанная с витком, также поворачивается на угол α , поэтому магнитный поток становится равным $\Phi_2 = BS \cos \alpha$. Так как магнитный поток изменился, то в витке возникла ЭДС индукции. Однако закон изменения магнитного потока во време-

ни не задан. Нельзя утверждать также, что поток изменялся равномерно во времени. Поэтому для вычисления ЭДС индукции воспользуемся формулой $\mathcal{E}_i = -\Phi'(t)$. По витку протекает индукционный ток $i(t) = \mathcal{E}_i / R = -\Phi'(t) / R$. Заряд, протекающий по витку и регистрируемый галь-

ванометром, $q = S_{ABCD} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$. Здесь t_1 — начальный,

а t_2 — конечный моменты времени. После подстановки $i(t)$ получим

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\Phi'(t)}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \Phi'(t) dt = -\frac{1}{R} \Phi(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= -(\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) / R = -(\Phi_2 - \Phi_1) / R = -\Delta\Phi / R. \end{aligned}$$

Итак, независимо от того, как поворачивали виток, протекающий через замкнутый контур заряд вычисляется по формуле

$$q = -\Delta\Phi / R. \quad (1)$$

Формула выведена в предположении, что индуктивность контура (витка) пренебрежимо мала ($L \rightarrow 0$). Эта формула будет использована при решении других задач, в которых выполняется указанное условие.

В нашей задаче

$$\Delta\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1) = BS \cos \alpha - BS = BS(\cos \alpha - 1).$$

После подстановки в (1) находим

$$\begin{aligned} q &= -BS(\cos \alpha - 1) / R \Rightarrow 1 - \cos \alpha = qR / (BS) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \alpha = 1 - qR / (BS) = -0,5. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha = \arccos(-0,5) = 2\pi / 3 = 120^\circ$.

8. Проводящий плоский контур площадью $S = 200 \text{ см}^2$, в который включен конденсатор емкостью $C = 10,0 \text{ мкФ}$, расположен в однородном магнитном поле так, что вектор нормали к контуру образует с вектором

магнитной индукции угол $\alpha = 60^\circ$. Изменение магнитной индукции во времени описывается уравнением $B = 2 \cdot 10^{-2} \cos(\pi/4)t$ Тл. Определить энергию конденсатора в момент времени $t = 2$ с. Индуктивностью контура пренебречь.

Решение

По определению магнитный поток, пронизывающий контур, $\Phi(t) = B(t)S \cos \alpha$. Как видно, здесь изменение магнитного потока вызвано изменением магнитной индукции. ЭДС индукции в этом контуре

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\Phi'(t) = -(B(t)S \cos \alpha)' = -B'(t)S \cos \alpha = \\ &= -\left(2 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{4} t\right)' S \cos \alpha = 2 \cdot 10^{-2} \left(\sin \frac{\pi}{4} t\right) \left(\frac{\pi}{4}\right) S \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{2} S \pi \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} t. \end{aligned}$$

Поскольку в плоском конденсаторе расстояние между пластинами мало, то ЭДС индукции, возникшая в контуре и равномерно в нем распределенная, представляет собой напряжение на конденсаторе. Энергия конденсатора в любой момент времени

$$W = \frac{C \mathcal{E}_i^2}{2} = \frac{1}{8} C \left(S \pi \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} t \right)^2.$$

В момент времени $t = 2$ с $\sin(\pi/4)t = \sin(\pi/2) = 1$ и энергия конденсатора $W = (1/8)C(S\pi \cos \alpha)^2 = 1,23 \cdot 10^{-9}$ Дж.

9. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести проводящая перемычка массой m и длиной l . Скольжение происходит в однородном магнитном поле с индукцией B . Поле перпендикулярно плоскости перемещения перемычки. Вверху шины соединены резистором с сопротивлением R . Коэффициент трения скольжения между поверхностями шин и перемычки

равен μ ($\mu < \operatorname{tg} \alpha$). Пренебрегая сопротивлением шин и перемычки, найти ее установившуюся скорость. Перемычка перпендикулярна шинам (см. рис. 209).

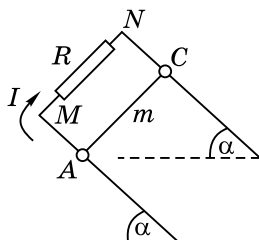


Рис. 209

Решение

Пусть установившаяся скорость перемычки равна v , тогда в перемычке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv$. Так как цепь замкнута, по ней протекает индукционный ток

$$I = \mathcal{E}_i / R = Blv / R.$$

Силы, действующие на перемычку: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны шин \vec{N} , сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($\vec{F}_{\text{тр}} = \mu N$) и сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля. Причем модуль силы Ампера $F_A = BIl \sin 90^\circ = BIl = B(Blv / R)l = B^2 l^2 v / R$. (Здесь учтено, что угол между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 90° .)

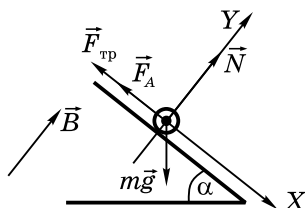


Рис. 210

Пусть индукция \vec{B} магнитного поля направлена так, как показано на рис. 210. Тогда при движении перемычки вниз по шинам поток внешнего магнитного поля че-

рез замкнутый контур $AMNC$ (см. рис. 209) возрастает. Следовательно, по правилу Ленца индукционный ток в контуре направлен так, чтобы созданное им магнитное поле стремилось скомпенсировать увеличение магнитного потока. Отсюда можно сделать вывод, что индукция магнитного поля, созданного индукционным током, направлена противоположно вектору \vec{B} . Используя правило буравчика, находим, что индукционный ток в контуре $AMNC$ направлен по часовой стрелке, если смотреть на этот контур сверху. На рис. 210 индукционный ток направлен к нам, поэтому сила Ампера, приложенная к перемычке, направлена вверх вдоль шин.

Введем оси координат X и Y и запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} \text{по оси } X & \begin{cases} mgsin\alpha - F_{\text{тр}} - F_A = 0, \\ \text{по оси } Y & \begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при постоянной скорости перемычки ее ускорение $a=0$. Из второго уравнения $N=mg\cos\alpha$, поэтому $F_{\text{тр}}=\mu N=\mu mg\cos\alpha$. Подставив это в первое уравнение, получим

$$mgsin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \frac{B^2 l^2 v}{R} = 0 \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 l^2} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

10. Металлический стержень AN , сопротивление единицы длины которого равно ρ , движется с постоянной скоростью v , перпендикулярной AN , замыкая два проводника OC и OD с пренебрежимо малыми сопротивлениями, образующими между собой угол α ; $OC=l$ и $AN \perp OC$. Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция B которого перпендикулярна плоскости системы. Найти полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения стержня AN от точки O до точки C (см. рис. 211).

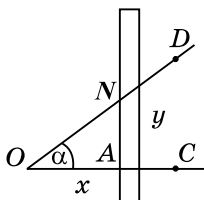


Рис. 211

Решение

Пусть $OA=x$, тогда длина части стержня AN , образующего замкнутый контур, $y=x \operatorname{tg} \alpha$. ЭДС индукции, которая возникает в подвижном стержне и действует во всем замкнутом контуре, $\mathcal{E}_i = Byv$. Индукционный ток в контуре $I = \mathcal{E}_i / R$, где R — сопротивление контура, равное сопротивлению участка стержня длиной y . Поэтому $R = \rho y$ и $I = Byv / (\rho y) = Bv / \rho = \text{const}$.

Таким образом, в контуре протекает постоянный ток. Выделяющаяся в нем мощность

$$\begin{aligned} P &= I^2 R = \left(\frac{Bv}{\rho} \right)^2 \rho y = \frac{(Bv)^2}{\rho} x \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{(Bv)^2}{\rho} (vt) \operatorname{tg} \alpha = \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg} \alpha t. \end{aligned}$$

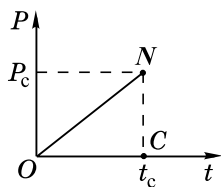


Рис. 212

Здесь учтено, что при равномерном движении стержня в любой момент времени $x = vt$. Таким образом, мощность, выделяющаяся в контуре, не является постоянной, а линейно возрастает с течением времени. Для того чтобы найти полное количество выделившейся теплоты,

построим график зависимости $P(t)$, который представляет собой прямую линию (см. рис. 212).

Время движения стержня до точки C $t_c = l/v$. Количество теплоты численно равно площади $\triangle OCN$, причем его катет

$$CN = P_c = P(t_c) = \frac{B^2 v^3}{\rho} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{l}{v} \right) = \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Итак, } Q = \frac{1}{2} P_c \cdot t_c = \frac{1}{2} \frac{(Bv)^2 l}{\rho} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{l}{v} \right) = \frac{B^2 v l}{2\rho} \operatorname{tg} \alpha.$$

11. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R . Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой H по закону $B = B_0(1 + \alpha H)$, где $\alpha = \text{const}$ (см. рис. 213).

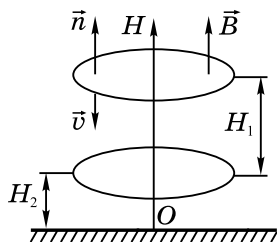


Рис. 213

Решение

Пусть \vec{n} — нормаль к плоскости кольца, тогда магнитный поток, созданный вертикальной составляющей магнитного поля, $\Phi = BS = B_0(1 + \alpha H)S$, где $S = \pi d^2 / 4$ — площадь контура. ЭДС индукции, возникающая в кольце,

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'(t) = -(B_0(1 + \alpha H)S)' = -B_0 S \alpha H'(t).$$

Производная $H'(t) = v_H$ — это проекция скорости кольца на ось H . Так как скорость кольца направлена против оси H , то $v_H = -v$, где v — модуль скорости кольца и $\mathcal{E}_i = B_0 S \alpha v$. По кольцу протекает индукционный ток $I = \mathcal{E}_i / R = B_0 S \alpha v / R$. В результате в кольце за промежуток времени Δt выделяется количество теплоты $Q = I^2 R \Delta t$.

На высоте H_1 кольцо обладает механической энергией $W_1 = mgH_1 + \frac{mv^2}{2}$, на высоте H_2

$$W_2 = mgH_2 + \frac{mv^2}{2} (v = \text{const}).$$

По закону сохранения энергии

$$\begin{aligned} W_1 = W_2 + Q &\Rightarrow mgH_1 = mgH_2 + I^2 R \Delta t \Rightarrow mg(H_1 - H_2) = \\ &= (B_0 S \alpha v / R)^2 R \Delta t \Rightarrow mg(H_1 - H_2) = ((B_0 S \alpha v)^2 / R) \Delta t. \end{aligned} \quad (1)$$

Разность $(H_1 - H_2)$ есть расстояние, пройденное кольцом при равномерном движении, поэтому $H_1 - H_2 = v \Delta t$, и уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} mgv \Delta t &= \frac{(B_0 S \alpha v)^2}{R} \Delta t \Rightarrow mg = \frac{(B_0 S \alpha)^2 v}{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{mgR}{(B_0 S \alpha)^2} = \frac{16mgR}{(B_0 \pi d^2 \alpha)^2}. \end{aligned}$$

12. Сверхпроводящее круглое кольцо радиусом r , имеющее индуктивность L , находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Первоначально плоскость кольца была параллельна вектору \vec{B} , а ток в кольце равен нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть кольцо так, чтобы его плоскость стала перпендикулярна линиям индукции?

Решение

Кольцо пронизывается как внешним магнитным потоком $\Phi_{\text{вн}}$, так и собственным магнитным потоком $\Phi_{\text{с}}$,

созданным током, протекающим по кольцу. Поэтому полный магнитный поток $\Phi = \Phi_{\text{вн}} + \Phi_{\text{с}}$, а ЭДС индукции в кольце

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\Phi'_{\text{вн}} - \Phi'_{\text{с}} = -\Phi'_{\text{вн}} - Li',$$

где i — скорость изменения тока.

Сопротивление сверхпроводящего кольца $R=0$, поэтому по закону Ома $\mathcal{E}_i = IR=0$. Отсюда следует, что $-\Phi'_{\text{вн}} - Li' = 0 \Rightarrow -\Phi'_{\text{вн}} = Li'$. Проинтегрировав это равенство от нуля до τ , где τ — время поворота кольца, найдем, что

$$\begin{aligned} -\int_0^{\tau} \Phi'_{\text{вн}} dt &= \int_0^{\tau} Li' dt \Rightarrow -\Phi_{\text{вн}}(t) \Big|_0^{\tau} = Li(t) \Big|_0^{\tau} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(\Phi_{\text{вн}}(\tau) - \Phi_{\text{вн}}(0)) = L(i(\tau) - i(0)). \end{aligned}$$

В начальный момент времени $i(0)=0$, $\Phi_{\text{вн}}(0) = BS \cos 90^\circ = 0$. В момент времени τ $\Phi_{\text{вн}}(\tau) = BS \cos 0^\circ = BS$, где $S = \pi r^2$, а ток $i(\tau) = I$. Таким образом, $-BS = LI \Rightarrow I = -BS/L$.

Начальная энергия магнитного поля кольца $W(0)=0$, конечное значение этой энергии $W(\tau) = LI^2/2$. Увеличение энергии произошло за счет работы внешних сил, поэтому

$$\Delta W = W(\tau) - W(0) = A \Rightarrow A = \frac{LI^2}{2} = \frac{(BS)^2}{2L} = \frac{(B\pi r^2)^2}{2L}.$$

13. В схеме, изображенной на рис. 214, в начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальное значение тока после замыкания ключа. Заданы L , C , \mathcal{E}_0 . Сопротивлением катушки и источника пренебречь.

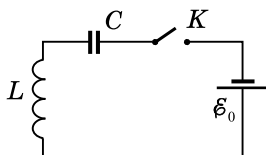


Рис. 214

Решение

ЭДС самоиндукции в катушке $\mathcal{E}_c = -Li'(t)$, где $i(t)$ — производная от тока по времени. Когда через катушку протекает максимальный ток, эта производная обращается в нуль. Следовательно, и $\mathcal{E}_c = 0$. Поэтому напряжение на конденсаторе в этот момент равно напряжению источника \mathcal{E}_0 . При этом заряд конденсатора $q = C\mathcal{E}_0$. Именно этот заряд протекает через источник, при этом работа сторонних сил $A_{\text{ст}} = q\mathcal{E}_0 = C\mathcal{E}_0^2$. Эта работа идет на изменение энергии конденсатора и катушки индуктивности, т. е. $A_{\text{ст}} = W_{\text{э}} + W_{\text{м}}$, где $W_{\text{э}} = C\mathcal{E}_0^2/2$ — энергия электрического поля конденсатора, а $W_{\text{м}} = LI_{\text{max}}^2/2$ — энергия магнитного поля катушки. Итак,

$$C\mathcal{E}_0^2 = C\mathcal{E}_0^2/2 + LI_{\text{max}}^2/2 \Rightarrow I_{\text{max}} = \mathcal{E}_0 \sqrt{C/L}.$$

14. Конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения u , разряжается через катушку с индуктивностью L и сопротивлением R . Какое количество теплоты выделится в катушке к моменту времени, когда сила тока в ней достигнет наибольшего значения I (см. рис. 215)?

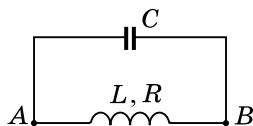


Рис. 215

Решение

В этом задании катушка не является идеальной, ее сопротивление $R \neq 0$. В любой момент времени разность потенциалов между точками A и B есть $\mathcal{E}_c + i(t)R$, где \mathcal{E}_c — ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке и равная $-Li'(t)$, а $i(t)R$ — напряжение на катушке, когда по ней протекает ток $i(t)$. В момент, когда ток достигает

максимума, производная $i'(t)=0$ и разность потенциалов между точками A и B становится равной IR .

Начальная энергия контура есть энергия конденсатора $W_1=Cu^2/2$. В рассматриваемый момент времени энергия контура распределена между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки:

$$W_2=C(\varphi_A-\varphi_B)^2/2+LI^2/2=C(IR)^2/2+LI^2/2.$$

Энергия контура не сохраняется, так как катушка обладает ненулевым сопротивлением и при протекании тока в ней выделяется теплота. По закону сохранения энергии

$$W_1=W_2+Q\Rightarrow W_1-W_2=\left(Cu^2-C(IR)^2-LI^2\right)/2.$$

РАЗДЕЛ 11

КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1. Основные свойства колебательных процессов

В природе и технике существуют процессы, в которых изменение во времени физических величин происходит периодически или приблизительно периодически. Такие процессы называют **колебаниями**. Простейшим примером колебаний являются **механические колебания** — движения тел, повторяющиеся точно или приблизительно через одинаковые промежутки времени.

Колебания, происходящие под влиянием внешних периодических воздействий (в механике — сил) на систему, называются **вынужденными колебаниями**.

Колебания, происходящие в системе без внешних периодических воздействий на нее, называются **свободными колебаниями**.

Несмотря на то, что колебания могут иметь различную физическую природу, они описываются одинаковыми величинами и уравнениями. Для описания колебаний используются величины, характеризующие колебательное движение в целом: период, частота и амплитуда колебаний.

Период колебаний T — это минимальный промежуток времени, через который колебательный процесс повторяется. Другими словами, период — это продолжительность одного колебания.

Частота колебаний ν — это число колебаний в единицу времени (в системе СИ за 1 с). Частота колебаний — величина, обратная периоду:

$$\nu = 1 / T. \quad (11.1)$$

Циклическая (круговая) частота ω — это число колебаний за 2π секунд:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T. \quad (11.2)$$

Частоту свободных колебаний называют **собственной частотой колебательной системы** и обозначают ω_0 .

Амплитуда колебаний $A > 0$ — это наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия. В случае, когда речь идет не о механических колебаниях, амплитуда колебаний указывает пределы изменения функции $x(t)$, которая характеризует колебательный процесс:

$$-A \leq x(t) \leq A.$$

Если амплитуда колебаний с течением времени убывает, то колебания называют **затухающими**.

2. Гармонические колебания

Из различных видов колебательных процессов (свободных и вынужденных) особый интерес представляют **гармонические колебания** — колебания, происходящие по закону синуса или косинуса от времени t . Они описываются формулами

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (11.3)$$

где $x(t)$ — функция, описывающая колебательный процесс.

Фазой колебаний называют величину

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (11.4)$$

где φ_0 — фаза колебаний в момент времени $t=0$, ее называют **начальной фазой колебаний**.

В случае механических колебаний функция $x(t)$ в формулах (11.3) представляет собой координату колеблющегося тела.

Пусть начальная фаза колебаний $\varphi_0=0$, тогда координата колеблющегося тела выражается формулой $x(t)=A \sin \omega t$. Из этой формулы следует, что в момент времени $t=0$ $x(t)=0$, т. е. тело находится в начале координат. Выясним, через какой **минимальный** промежуток времени t смещение тела станет равным амплитуде A . Получаем уравнение

$$\begin{aligned} x(t) = A &\Rightarrow A \sin \omega t = A \Rightarrow \sin \omega t = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4} T, \end{aligned}$$

где T — период колебаний.

Итак, тело смещается из положения равновесия на расстояние, равное амплитуде колебаний, за время, равное четверти периода колебаний. Легко доказать, что время движения в обратном направлении также равно четверти периода колебаний.

3. Скорость и ускорение тела, совершающего гармонические колебания

Пусть тело совершает гармонические колебания по закону

$$x(t)=A \cos (\omega t+\varphi_0).$$

Известно, что первая производная от координаты тела по времени есть проекция скорости этого тела на направление движения, поэтому скорость тела, совершающего гармонические колебания,

$$\begin{aligned} v_x(t)=x'(t) &=(A \cos (\omega t+\varphi_0))'=-A \sin (\omega t+\varphi_0) \cdot (\omega t+\varphi_0)'= \\ &=-A \omega \sin (\omega t+\varphi_0)=A \omega \cos (\omega t+\varphi_0+\pi / 2). \end{aligned}$$

Заменив $A \omega$ на v_m , получим

$$v_x(t)=v_m \cos (\omega t+\varphi_0+\pi / 2). \quad (11.5)$$

Следовательно, при гармонических колебаниях скорость тела не постоянна, а также совершает гармониче-

ские колебания с той же частотой ω , а значит, и периодом $T = 2\pi / \omega$, и амплитудой $v_m = A\omega$. Сравнивая формулы (11.3) и (11.5), получаем, что фазы колебаний скорости и координаты отличаются на $\pi / 2$. Из этого, в частности, следует, что, когда смещение тела от положения равновесия равно амплитуде, т. е. максимально, скорость тела обращается в нуль. И наоборот, когда тело проходит положение равновесия, т. е. смещение минимально, модуль скорости достигает максимального значения.

Вторая производная от координаты или первая производная от скорости по времени равны проекции ускорения тела, поэтому ускорение тела, совершающего гармонические колебания,

$$a_x(t) = v'(t) = (-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)(\omega t + \varphi_0)' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Заменив $A\omega^2$ на a_m , получим

$$a_x(t) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (11.6)$$

Следовательно, при гармонических колебаниях ускорение тела не постоянно, а совершает гармонические колебания с той же частотой ω и периодом T , что координата и скорость. Амплитуда колебаний ускорения $a_m = A\omega^2$. Сравнивая формулы (11.3), (11.5) и (11.6), приходим к выводу, что фазы колебаний ускорения и координаты отличаются на π (ускорение и координата колеблются в **противофазах**); фазы колебаний ускорений и скорости отличаются на $\pi / 2$. Из этого следует, что когда скорость тела максимальна (тело проходит положение равновесия), его ускорение обращается в нуль. И наоборот, когда скорость минимальна (смещение тела равно амплитуде), модуль ускорения тела достигает максимального значения.

Итак, при гармонических колебаниях тела его ускорение

$$a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2(A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -\omega^2 x(t),$$

т. е. пропорционально координате. В соответствии со вторым законом Ньютона причиной, вызывающей ускорение, является приложенная к телу сила $F = ma_x = -m\omega^2 x$. Следовательно, при гармонических колебаниях на тело должна действовать сила или равнодействующая сил, пропорциональная смещению тела и направленная к положению равновесия. Ее часто называют **возвращающей силой**, хотя это не особая сила, а равнодействующая реальных сил природы, обусловленных взаимодействием тела с другими телами.

4. Пружинный маятник

Рассмотрим в качестве примера колебания пружинного маятника. Он представляет собой груз массой m , расположенный на гладкой горизонтальной поверхности. Колебания происходят на пружине с коэффициентом жесткости k (см. рис. 216). Начало координат $x_0 = 0$ находится в точке, соответствующей положению равновесия груза, когда пружина не деформирована.

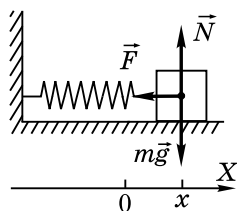


Рис. 216

Таким образом, смещение маятника совпадает с его координатой. В вертикальном направлении на маятник действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} , причем их проекции на горизонтальную ось X равны нулю. В горизонтальном направлении к маятнику приложена сила упругости \vec{F} , проекция которой на ось X в любой момент времени $F_x = -kx$ (закон Гука), где x — координата тела. По второму закону Ньютона $F_x = ma_x$, где

проекция ускорения a_x равна второй производной от координаты. После подстановки F_x и a_x получаем

$$-kx = mx'' \Rightarrow x'' + (k/m)x = 0.$$

Данное уравнение отличается от уравнений, которые решают в школе, тем, что в него входят неизвестная функция $x(t)$ и ее вторая производная. Такие уравнения называются **дифференциальными**. Обозначив положительную величину k/m через ω_0^2 , получим

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (11.7)$$

Нетрудно доказать подстановкой, что решениями этого уравнения будут функции $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Следовательно, пружинный маятник совершает свободные колебания, которые являются гармоническими. Одновременно было показано, что гармонические колебания любой физической природы описываются **дифференциальным уравнением** (11.7).

Собственная частота колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad (11.8)$$

а период

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (11.9)$$

Формулы (11.8) и (11.9) иллюстрируют общее свойство систем, совершающих свободные колебания: собственная частота и период колебаний зависят только от свойств системы (для пружинного маятника — от массы тела m и коэффициента жесткости пружины k). Что касается амплитуды и начальной фазы колебаний, то они определяются начальными условиями, т. е. тем, как возбуждены колебания.

Уравнение колебаний пружинного маятника можно получить иначе, воспользовавшись тем, что при отсутствии трения полная механическая энергия колеблющегося тела не изменяется. Механическая энергия маятника W скла-

дывается из кинетической энергии W_k и потенциальной энергии упругой деформации W_p , т. е. $W = W_k + W_p = \text{const}$, где $W_k = mv^2/2 = m(x')^2/2$, а $W_p = kx^2/2$. Найдем производную от полной энергии по времени:

$$\begin{aligned} W' &= \left(m(x')^2/2 + kx^2/2 \right)' = \left(m(x')^2/2 \right)' + \left(kx^2/2 \right)' = \\ &= \frac{m}{2} \left((x')^2 \right)' + \frac{k}{2} (x^2)' = \frac{m}{2} 2x'x'' + \frac{k}{2} 2xx' = \\ &= mx'x'' + kxx' = (mx'' + kx)x'. \end{aligned}$$

Так как полная механическая энергия не изменяется, то ее производная по времени $W' = 0$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} (mx'' + kx)x' &= 0 \Rightarrow mx'' + kx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x'' + (k/m)x &= 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = k/m$.

Таким образом, нами найдено дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

5. Математический маятник

Рассмотрим малые колебания математического маятника — небольшого шарика, совершающего колебания в вертикальной плоскости на невесомой нерастяжимой нити длиной l (см. рис. 217). При малых колебаниях угол отклонения нити не превышает 10° . Колебания маятника совершаются под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения (упругости) нити \vec{F} . Величиной, описывающей данный колебательный процесс, является угол $\alpha(t)$ — угол отклонения нити в момент времени t от вертикального равновесного положения.

Спроецируем действующие силы на ось X , направленную по касательной к дуге в точке, где в данный момент времени расположен маятник. Проекция силы натяжения равна нулю, а проекция силы тяжести рав-

на $-mg \sin \alpha$. Известно, что при малых углах α , выраженных в радианах, $\sin \alpha = \alpha$. В любой момент времени дуга $AB = l\alpha$, а касательное (тангенциальное) ускорение есть вторая производная от $l\alpha$ по времени, т. е. $a_t = l\alpha''$. По второму закону Ньютона

$$-mg \sin \alpha = m\alpha_t \Rightarrow -g\alpha = l\alpha'' \Rightarrow \alpha'' + (g/l)\alpha = 0.$$

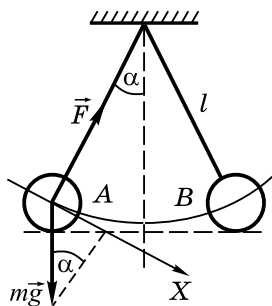


Рис. 217

Полагая $g/l = \omega_0^2$, получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний математического маятника

$$\alpha'' + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Его решение: $\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Собственная частота и период колебаний математического маятника не зависят от массы и выражаются формулами

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad (11.10)$$

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (11.11)$$

6. Свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре

В природе существуют не только механические колебания. Катушка индуктивности L и конденсатор C образуют **колебательный контур**, в котором происходят сво-

бодные колебания заряда конденсатора, тока и напряжения на конденсаторе (см. рис. 218).

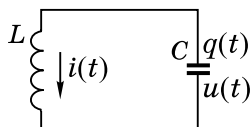


Рис. 218

Свободные колебания в этой системе возникают, например, после сообщения конденсатору заряда q_m , который затем разряжается через катушку, создавая ток в контуре.

Пусть в момент времени t заряд конденсатора $q(t)$, а ток в контуре $i(t)$. Полная энергия контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей: $W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}}$, где $W_{\text{э}} = q^2 / (2C)$ — энергия, сосредоточенная

в электрическом поле конденсатора, а $W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2}$ — энер-

гия, сосредоточенная в магнитном поле катушки. Таким образом, $W = q^2 / (2C) + Li^2 / 2$. Если сопротивление контура равно нулю, то полная энергия контура сохраняется: $W = \text{const}$.

Найдем производную по времени от полной энергии колебательного контура:

$$\begin{aligned} W' &= \left(\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \right)' = \left(\frac{q^2}{2C} \right)' + \left(\frac{Li^2}{2} \right)' = \frac{1}{2C} (q^2)' + \frac{L}{2} (i^2)' = \\ &= \frac{1}{2C} 2qq' + \frac{L}{2} 2ii' = \frac{qq'}{C} + Lii'. \end{aligned}$$

Учтем, что мгновенное значение тока есть производная по времени от заряда. Поэтому $i = q'$, а $i' = q''$. Следовательно,

$$W' = qq' / C + Lq'q'' = (q' / C + Lq'')q'.$$

Так как $W = \text{const}$, то $W' = 0$ и, следовательно,

$$(q/C + Lq'')q' = 0 \Rightarrow Lq'' + q/C = 0 \Rightarrow q'' + (1/(LC))q = 0.$$

Обозначив $1/(LC) = \omega_0^2$, получаем уравнение гармонических колебаний в контуре

$$q'' + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.12)$$

Решение этого уравнения:

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_m — амплитуда колебаний заряда.

Заряд конденсатора совершает гармонические колебания с частотой и периодом, вычисляемым по формулам

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (11.13)$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{формула Томсона}). \quad (11.14)$$

В любой момент времени напряжение на конденсаторе

$$\begin{aligned} u(t) &= q(t) / C = (q_m / C) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= u_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (11.15)$$

где $u_m = q_m / C$.

Из формулы (11.15) следует, что напряжение на конденсаторе совершает гармонические колебания с теми же частотой ω_0 и периодом T , что и заряд. Амплитуда колебаний напряжения $u_m = q_m / C$; фазы колебаний напряжения и заряда совпадают.

Ток в контуре

$$\begin{aligned} i(t) &= q'(t) = (q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0))' = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \text{ где } q_m \omega_0 = I_m. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ток в контуре совершает гармонические колебания с теми же частотой и периодом, что заряд и напряжение; фаза колебаний тока опережает фазу колебаний заряда и напряжения на $\pi/2$; амплитуда колебаний тока $I_m = q_m \omega_0$.

7. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденные колебания происходят, когда на систему действуют внешние периодические силы (воздействия). При вынужденных колебаниях в системе через некоторый промежуток времени устанавливаются колебания, частота которых равна частоте внешней периодической силы. В общем случае частота внешней силы не совпадает с собственной частотой колебаний системы. Если внешняя периодическая сила изменяется по гармоническому закону, то при совпадении ее частоты ω с собственной частотой колебаний системы ω_0 наступает **резонанс** — резкое возрастание амплитуды установившихся вынужденных колебаний. Итак, условие резонанса

$$\omega = \omega_0. \quad (11.16)$$

Разумеется, при выполнении условия (11.16) будут совпадать период внешней силы и период собственных колебаний системы, т. е. $T = T_0$.

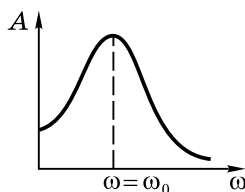


Рис. 219

На рис. 219 приведен график зависимости амплитуды вынужденных колебаний A от частоты ω внешней периодической силы.

8. Переменный электрический ток в цепи, содержащей резистор. Действующие значения тока и напряжения

Вынужденные колебания происходят в электрической цепи, содержащей источник, напряжение которого изменяется по гармоническому закону $u(t) = u_m \cos \omega t$, где u_m — амплитуда колебаний.

Рассмотрим вынужденные электрические колебания в цепи, содержащей активное (омическое) сопротивление R (см. рис. 220).

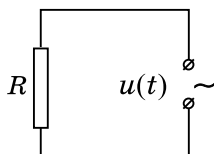


Рис. 220

Мгновенное значение тока

$$i(t) = u / R = (u_m \cos \omega t) / R = (u_m / R) \cos \omega t.$$

Следовательно, в проводнике с активным сопротивлением колебания силы тока происходят с той же частотой, что и колебания напряжения; по фазе они совпадают с колебаниями напряжения; амплитуда определяется равенством

$$I_m = u_m / R. \quad (11.17)$$

По закону Джоуля — Ленца в проводнике будет выделяться теплота, причем мгновенное значение мощности $p(t) = i^2 R = I_m^2 R \cos^2 \omega t$. Энергия, выделяющаяся в проводнике за период T ,

$$W = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T I_m^2 R \cos^2 \omega t dt = I_m^2 R \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_m^2 R T.$$

Переменный ток принято характеризовать **средней мощностью за период**

$$\overline{P} = W/T. \quad (11.18)$$

Средняя мощность переменного тока, выделяющаяся в активном сопротивлении,

$$\overline{P} = W/T = (1/2) I_m^2 R = (I_m / \sqrt{2})^2 R. \quad (11.19)$$

При этом величину

$$I_d = I_m / \sqrt{2} \quad (11.20)$$

называют **действующим значением тока**. Тогда

$$\overline{P} = I_d^2 R. \quad (11.21)$$

Аналогично можно ввести **действующее значение напряжения**

$$u_d = u_m / \sqrt{2}, \quad (11.22)$$

где u_m — амплитудное значение напряжения. Нетрудно получить, что

$$I_d = u_d / R. \quad (11.23)$$

9. Переменный электрический ток в цепи, содержащей конденсатор. Емкостное сопротивление

Рассмотрим вынужденные колебания в электрической цепи, содержащей конденсатор (см. рис. 221). Переменное напряжение на конденсаторе $u(t) = u_m \cos \omega t$. Пусть $q(t)$ — мгновенное значение заряда конденсатора, тогда $q(t) = C u_m \cos \omega t$.

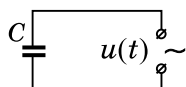


Рис. 221

Сила тока в цепи $i(t) = q'(t) = (Cu_m \cos \omega t)' = -Cu_m \sin \omega t = -u_m C \omega \cos(\omega t + \pi/2)$. Следовательно, колебания силы тока происходят с той же частотой, что и колебания напряжения; колебания силы тока опережают колебания напряжения на $\pi/2$; амплитуда колебаний тока $I_m = u_m C \omega$. Последнее выражение можно записать в форме, аналогичной закону Ома для постоянного тока:

$$I_m = \frac{u_m}{1/(\omega C)} = \frac{u_m}{X_C}, \quad (11.24)$$

где **емкостное сопротивление конденсатора переменному току**

$$X_C = 1 / (\omega C). \quad (11.25)$$

Если конденсатор отсутствует, то $C \rightarrow \infty$ и тогда $X_C = 0$. В отличие от активного сопротивления, на конденсаторе в цепи переменного тока энергия не выделяется. В течение четверти периода, когда конденсатор заряжается, энергия поступает в цепь. В следующую четверть периода, при разрядке конденсатора, эта энергия возвращается к источнику.

10. Переменный электрический ток в цепи, содержащей катушку индуктивности.

Индуктивное сопротивление

Рассмотрим вынужденные колебания в цепи, содержащей катушку индуктивности L (см. рис. 222).

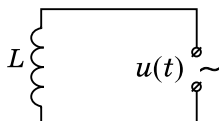


Рис. 222

В любой момент времени напряжение на катушке есть сумма внешнего напряжения $u(t)$ и ЭДС самоиндук-

ции \mathcal{E}_c , возникающей в катушке при протекании по ней переменного тока.

Так как активным сопротивлением катушки пренебрегаем, то $u(t) + \mathcal{E}_c = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = -u(t)$. Пусть сила тока в цепи изменяется по гармоническому закону $i(t) = I_m \sin \omega t$, где I_m — амплитудное значение тока. ЭДС самоиндукции в катушке

$$\mathcal{E}_c = -Li' = -L(I_m \sin \omega t)' = -L\omega I_m \cos \omega t.$$

Напряжение на катушке $u = L\omega I_m \cos \omega t = L\omega I_m \sin(\omega t + \pi/2)$. Следовательно, колебания напряжения на катушке опережают колебания силы тока на $\pi/2$. Амплитуда напряжения $u_m = L\omega I_m \Rightarrow$

$$I_m = u_m / (L\omega). \quad (11.26)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$I_m = u_m / X_L, \quad (11.27)$$

где **индуктивное сопротивление катушки**

$$X_L = \omega L. \quad (11.28)$$

На катушке в цепи переменного тока энергия не выделяется.

Соотношения (11.24) и (11.27) справедливы не только для амплитудных, но и для действующих значений тока и напряжения.

11. Метод векторных диаграмм. Мощность переменного тока

Расчет токов и напряжений в более сложных электрических цепях переменного тока проводят с помощью **векторных диаграмм**.

Метод векторных диаграмм основан на том, что гармоническое колебание можно задать с помощью вектора, модуль которого равен амплитуде колебания, а угол, который образует вектор с некоторой осью, равен началь-

ной фазе колебаний. Сложение напряжений и токов, изменяющихся по гармоническому закону, сводится к сложению векторов, представляющих колебания напряжений и токов.

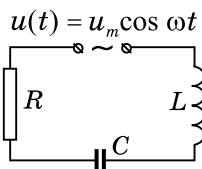


Рис. 223

Рассмотрим в качестве примера цепь (см. рис. 223), в которой все элементы включены последовательно, поэтому сила тока в любой момент времени на всех участках цепи одинакова, а сумма мгновенных значений напряжений на них равна значению приложенного напряжения $u(t) = u_m \cos \omega t$.

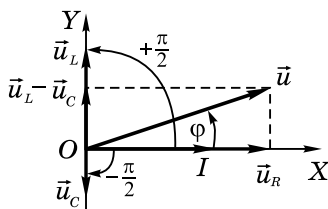


Рис. 224

В системе координат XOY зададим вектор колебания тока I координатами по осям OX и OY , т. е. $\vec{I}(I_m; 0)$, где I_m — амплитуда тока. Колебания напряжения на резисторе R совпадают по фазе с колебаниями тока, при этом амплитуда колебаний напряжения $u_m = I_m R$. Вектор $\vec{u}_R(I_m R; 0)$, показывающий колебания напряжения, располагается также вдоль оси OX . Колебания напряжения на конденсаторе отстают от колебаний тока на $\pi/2$, поэтому они представлены вектором \vec{u}_C , расположенным на оси OY (см. рис. 224). Амплитуда напряжения на конден-

саторе $u_c = I_m X_c = I_m / (\omega C)$, поэтому $\vec{u}_C = \vec{u}_C(0; -I_m / (\omega C))$. Колебания напряжения на катушке опережают колебания тока на $\pi / 2$, поэтому они обозначены вектором \vec{u}_L , направленным вдоль оси OY . Амплитуда колебаний $u_L = I_m X_L = I_m \omega L$. Вектор $\vec{u}_L = \vec{u}_L(0; I_m \omega L)$. Приложенное напряжение $u(t) = u_m \cos \omega t$ можно представить в виде вектора \vec{u} , и поскольку сумма всех напряжений на элементах цепи равна приложенному напряжению, то

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u}_R + \vec{u}_C + \vec{u}_L \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}(I_m R + 0 + 0; 0 - I_m / (\omega C) + I_m \omega L) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{u} = \vec{u}(I_m R; I_m (\omega L - 1 / (\omega C))).\end{aligned}$$

Модуль любого вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, поэтому

$$u_m = \sqrt{(I_m R)^2 + I_m^2 (\omega L - 1 / (\omega C))^2} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / (\omega C))^2}.$$

Для амплитуды тока I_m получаем формулу

$$I_m = u_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / (\omega C))^2} = u_m / Z, \quad (11.29)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / (\omega C))^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ — полное сопротивление цепи переменному току.

Геометрический метод построения вектора \vec{u} приведен на рис. 224. Из построения следует, что между колебаниями внешнего напряжения и колебаниями тока в цепи существует разность фаз, причем, как это следует из рис. 224,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_L - u_C}{u_R} = \frac{\omega L - 1 / (\omega C)}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (11.30)$$

Таким образом, если приложенное напряжение $u(t) = u_m \cos \omega t$, то сила тока в цепи $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, напряжение на конденсаторе $u_C(t) = (I_m / \omega C) \cos(\omega t - \varphi - \pi / 2)$, напряжение на катушке $u_L(t) = I_m \omega L \cos(\omega t - \varphi + \pi / 2)$.

Найдем мгновенную мощность, выделяющуюся в цепи переменного тока: $p(t)=i(t) u(t)=I_m \cos(\omega t - \varphi) u_m \cos \omega t$.

Средняя мощность за период T : $\bar{P} = \int_0^T p(t) dt / T$. Прове-

дя преобразования, получим $\bar{P} = (1/2) I_m u_m \cos \varphi$. Подставляя действующие значения тока и напряжения, приходим к формуле

$$\bar{P} = I_d u_d \cos \varphi, \quad (11.31)$$

где $\cos \varphi$ — сдвиг фаз между током и напряжением, который называют **коэффициентом мощности**.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Грузик на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой $A=2$ см и периодом $T=2$ с. В начальный момент времени грузик проходил положение равновесия. Определить скорость и ускорение грузика через $t_1=0,25$ с; трения нет.

Решение

Так как трения нет, то грузик совершает гармонические колебания, уравнение которых

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right),$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний. По условию задачи при $t=0$ $x=0$. Тогда $A \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Окончательно уравнение колебаний грузика записывается в виде

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \text{ Мгновенная скорость}$$

$$v(t) = x'(t) = \left(A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right)' = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

В момент времени $t=t_1$

$$v(t_1) = \frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = 6,28 \cdot 10^{-2} \cos \frac{\pi}{4} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Ускорение груза в любой момент времени

$$a(t) = v'(t) = \left(\frac{2\pi}{T} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right)' = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

В момент времени $t=t_1$

$$\begin{aligned} a(t_1) &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \sin \frac{\pi}{4} = -13,9 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.} \end{aligned}$$

2. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T=0,6$ с и амплитудой $A=10$ см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $A/2$: 1) из положения равновесия; 2) из крайнего положения.

Решение

Запишем уравнение гармонических колебаний точки:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right).$$

где φ_0 — начальная фаза колебаний.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ точка находится в начале координат $x_0=0$. Тогда для определения начальной фазы колебаний получаем уравнение $A \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$.

$$\text{Следовательно, } x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Пусть в момент времени $t=t_1$, после прохождения начала координат, точка имеет координату $x(t_1)=A/2$. Определяем время t_1 :

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}.$$

Время движения из точки с координатой $x_0=0$ до точки с координатой $x=A$ составляет $T/4$, поэтому время движения из точки с координатой $x=A/2$ до точки с координатой $x=A$

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}.$$

Средняя скорость на первом участке пути

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{A/2}{T/12} = \frac{6A}{T} = 0,1 \text{ м/с}.$$

Средняя скорость на втором участке пути

$$v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{A/2}{T/6} = \frac{3A}{T} = 0,05 \text{ м/с}.$$

3. Груз лежит на платформе, совершающей горизонтальные колебания с частотой $\nu=2$ Гц и амплитудой $A=1$ см. Будет ли груз скользить по платформе, если коэффициент трения груза о платформу равен 0,2?

Решение

Пусть груз покоится относительно платформы, совершая вместе с ней гармонические колебания, задаваемые формулой

$$x(t)=A \sin 2\pi\nu t.$$

Скорость груза $v(t)=x'(t)=(A \sin 2\pi\nu t)'=2\pi\nu A \cos 2\pi\nu t$.

Ускорение груза

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) = (2\pi\nu A \cos 2\pi\nu t)' = -(2\pi\nu)^2 A \sin 2\pi\nu t = \\ &= (2\pi\nu)^2 A \sin(2\pi\nu t + \pi) = a_m \sin(2\pi\nu t + \pi), \end{aligned}$$

где $a_m=(2\pi\nu)^2 A$ — амплитуда. Ясно, что эта величина есть максимальное значение ускорения, которым обладает груз, совершающий колебания вместе с платформой.

В вертикальном направлении на груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} со стороны платформы, причем $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$. Ускорение груза вызвано действием на него в горизонтальном направлении силы трения покоя со стороны платформы. По второму закону Ньютона $F_{\text{тр}}(t) = ma(t)$. Максимальное значение силы трения покоя соответствует максимальному значению ускорения $F_m = ma_m$. Если груз относительно платформы покоится, то $F_m < \mu N \Rightarrow ma_m < \mu mg \Rightarrow (2\pi\nu)^2 A < \mu g$.

Подставив числовые значения, проверим справедливость полученного неравенства:

$$2(3,14 \cdot 2)^2 10^{-2} < 0,2 \cdot 9,8 \Rightarrow 1,58 < 1,96.$$

Груз по платформе скользить не будет.

4. Определить период колебания тела массой m , подвешенного вертикально на пружине с коэффициентом жесткости k (рис. 225).

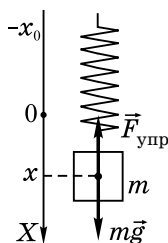


Рис. 225

Решение

Пусть груз находится в равновесии. К нему приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, модуль которой равен kx_0 , где $x_0 > 0$ — модуль деформации пружины. Из условия равновесия получаем уравнение

$$mg - kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = mg/k. \quad (1)$$

Поместим начало координат оси X в точку, соответствующую положению равновесия груза, тогда при колебаниях в любой момент времени деформация пружины равна $x + x_0$ (где x — текущая координата) и, следовательно, проекция силы упругости на ось X $F_x = -k(x + x_0)$. По второму закону Ньютона получим $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} = m\vec{a}$, а для проекций на ось X $mg - k(x + x_0) = ma_x$. Учитывая, что ускорение есть вторая производная от координаты $a_x = x''$, получаем $mg - k(x + x_0) = mx'' \Rightarrow mg - kx_0 = mx'' + kx$.

В соответствии с равенством (1) $mg - kx_0 = 0$, поэтому

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + (k/m)x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0^2 = k/m$.

Таким образом, получили уравнение гармонических колебаний. Следовательно, собственная частота колебаний груза $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Как видно, частота и период колебаний груза на вертикальной пружине оказываются такими же, как и при колебаниях на горизонтальной плоскости.

- 5.** Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A . Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2 . В результате колебания прекратились. Определить первоначальный период колебаний чашки (см. рис. 226).

Решение

Первоначально колебания чашки происходят с периодом $T = 2\pi\sqrt{m_1/k}$, где k — коэффициент жесткости пружины. При этом чашка колеблется около положения равновесия, в котором пружина деформирована на $x_0 = m_1g/k$ (см. задание 4).

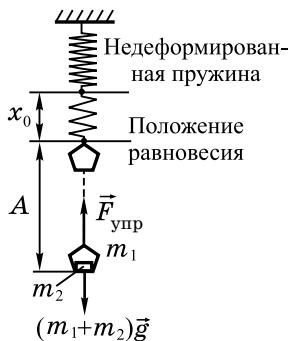


Рис. 226

При гармонических колебаниях чашки в крайнем нижнем положении ее скорость равна нулю, а модуль ускорения максимален. Однако, когда на чашку положили дополнительный груз и колебания прекратились, ускорение груза обратилось в нуль. По второму закону Ньютона получаем уравнение $F_{\text{упр}} - (m_1 + m_2)g = 0$, где модуль силы упругости $F_{\text{упр}} = k(x_0 + A)$. После подстановки имеем

$$k(x_0 + A) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow kx_0 + kA - m_1g - m_2g = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow kA = m_2g \Rightarrow k = m_2g/A.$$

Подставляя k в формулу для периода колебаний, находим

$$T = 2\pi\sqrt{m_1g/(m_2A)}.$$

6. На вертикально расположенной пружине с коэффициентом жесткости k подвешен груз массой m . Грузу сообщают начальную скорость v , направленную вертикально вниз. Определить период и амплитуду колебаний груза (см. рис. 226).

Решение

В задании 4 было показано, что груз в вертикальном направлении совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Колебания происходят относительно нового равновесного положения $x_0 = mg/k$. Найдем амплитуду колебаний.

В положении равновесия груз обладает кинетической энергией $W_{к1} = mv_0^2/2$ и потенциальной энергией упругой деформации $W_{y1} = kx_0^2/2$. Нулевое значение потенциальной энергии в поле тяжести выберем на уровне, соответствующем положению равновесия, т. е. $W_{p1} = 0$. Полная механическая энергия тела $W_1 = W_{к1} + W_{y1} + W_{p1} = mv_0^2/2 + kx_0^2/2$.

Пусть тело отклонилось от положения равновесия вниз на расстояние, равное амплитуде колебаний, тогда $v=0$ и кинетическая энергия тела $W_{к2}=0$. Потенциальная энергия упругой деформации $W_{y2} = k(x_0 + A)^2/2$, а потенциальная энергия в поле тяжести $W_{p2} = -mgA$. Полная механическая энергия $W_2 = W_{к2} + W_{y2} + W_{p2} = k(x_0 + A)^2/2 - mgA$.

По закону сохранения энергии

$$\begin{aligned} W_1 = W_2 &\Rightarrow mv_0^2/2 + kx_0^2/2 = k(x_0 + A)^2/2 - mgA \Rightarrow \\ &\Rightarrow mv_0^2 + kx_0^2 = kx_0^2 + 2kx_0A + kA^2 - 2mgA. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x_0 = mg/k$, находим $2kx_0A = 2mgA$. В итоге приходим к уравнению $kA^2 - mv_0^2 = 0 \Rightarrow A = v_0\sqrt{m/k}$.

7. К горизонтальной пружине прикреплено тело массой $M=10$ кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m=10$ г, летящая со скоростью $v=500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Амплитуда возникших при этом колебаний $A=0,1$ м. Найти период колебаний (см. рис. 227).

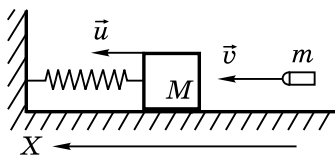


Рис. 227

Решение

Пусть \vec{u} — скорость тела сразу после попадания пули. В горизонтальном направлении X начальный импульс системы «тело — пуля» равен mv , а конечный импульс (сразу после попадания пули) — $(M+m)u$. По закону сохранения импульса

$$mv = (M+m)u \Rightarrow u = mv/(m+M).$$

После попадания пули механическая энергия системы

$$W_1 = \frac{(M+m)u^2}{2}.$$

При отклонении тела на расстояние, равное амплитуде A , скорость тела обращается в нуль, и механическая энергия системы W_2 равна потенциальной энергии упругой деформации, т. е. $W_2 = kA^2/2$, где k — коэффициент жесткости пружины. Так как трения нет, то механическая энергия при колебаниях сохраняется:

$$\begin{aligned} W_1 = W_2 &\Rightarrow (M+m)u^2 = kA^2 \Rightarrow k = \frac{(M+m)u^2}{A^2} = \\ &= \frac{(M+m)(mv/(M+m))^2}{A^2} = \frac{(mv)^2}{A^2(M+m)}. \end{aligned}$$

$$\text{Период колебаний } T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{2\pi}{A}\left(\frac{M+m}{mv}\right) = 1,26 \text{ с.}$$

8. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его

колебаний на поверхности Земли? Радиус Земли $R_3 = 6400$ км.

Решение

Период колебаний математического маятника длиной l на поверхности Земли равен $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Известно, что ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM_3/R_3^2$, где G — гравитационная постоянная, а M_3 — масса Земли. С увеличением расстояния от поверхности Земли ускорение свободного падения уменьшается, и на высоте $h = 10$ км оно составляет $g_1 = GM_3/(R_3 + h)^2$. Чтобы период колебаний остался неизменным, надо уменьшить длину маятника, сделав ее l_1 . Тогда период колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g_1}$. Так как по условию задачи $T_1 = T$, то $l_1/g_1 = l/g \Rightarrow l_1 = lg_1/g$. Уменьшение длины нити $l - l_1 = l(1 - g_1/g)$, и искомое отношение

$$\frac{l - l_1}{l} = 1 - \frac{g_1}{g} = 1 - \left(\frac{R_3}{R_3 + h} \right)^2 = 3 \cdot 10^{-3}.$$

9. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника, на расстоянии $l/2$ от нее по вертикали, в стене забит гвоздь. Найти период T колебаний маятника (см. рис. 228).

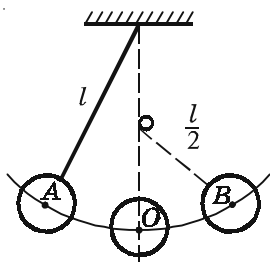


Рис. 228

Решение

На участке AO маятник совершает колебания на нити длиной l .

Период таких колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g}$, а время, затрачиваемое на прохождение дуги AO , $t_1 = T_1 / 4$. На участке OB маятник совершает колебания на нити длиной $l / 2$ с периодом $T_2 = 2\pi\sqrt{(l/2)/g} = 2\pi\sqrt{l/2g}$, причем время прохождения участка OB $t_2 = T_2 / 4$.

Пусть T — искомый период колебаний маятника, тогда

$$\begin{aligned} T/2 &= T_1/4 + T_2/4 = (T_1 + T_2)/4 \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= (T_1 + T_2)/2 = \pi\sqrt{l/g}(1 + 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

- 10.** При какой скорости поезда маятник длиной $l = 20$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если расстояние между стыками рельсов $L = 20$ м?

Решение

При прохождении колесами стыков на вагон и на маятник действует внешняя сила. Ее период равен времени прохождения вагоном расстояния между стыками, т.е. $T = L / v$, где v — скорость поезда. Частота колебаний этой внешней силы $\omega = 2\pi / T = 2\pi(v / L)$. Собственная частота колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Маятник особенно сильно раскачивается, когда наступает резонанс:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow 2\pi \frac{v}{L} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow v = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 22,3 \text{ м/с} \approx 80 \text{ км/ч.}$$

- 11.** Тонкое проволочное кольцо радиусом R имеет электрический заряд $Q > 0$. Как будет двигаться точечный заряд массой m , имеющий заряд $-q$ ($q > 0$), если в начальный момент времени он покоился в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $d \ll R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

Решение

Кольцо притягивает к себе заряд $-q$. Пусть в некоторый момент времени заряд находится на расстоянии $x < d \ll R$ от центра кольца и его скорость при этом $v = x'$. Кинетическая энергия заряда $mv^2/2 = m(x')^2/2$. Его потенциальная энергия — это потенциальная энергия в электростатическом поле кольца, равная $(-q)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — потенциал, создаваемый кольцом в точке расположения заряда. В разделе 8 было показано, что потенциал, создаваемый заряженным кольцом, $\varphi(x) = kQ/\sqrt{R^2 + x^2}$, где $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ (Н·м²)/Кл². Следовательно, потенциальная энергия заряда равна $-kqQ/\sqrt{R^2 + x^2}$.

Полная энергия заряда складывается из его кинетической и потенциальной энергий:

$$W = m(x')^2/2 - kqQ/\sqrt{R^2 + x^2}.$$

Отметим, что эта энергия в процессе движения заряда не изменяется, т. е. $W = \text{const}$.

Найдем производную от полной энергии заряда по времени:

$$\begin{aligned} W' &= \left(\frac{m(x')^2}{2} - k \frac{qQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)' = \\ &= \frac{m}{2} 2x'x'' - kqQ \left(-\frac{1}{2} \right) (R^2 + x^2)^{-3/2} 2xx' = \\ &= \left(mx'' + kqQx / \sqrt{(R^2 + x^2)^3} \right) x'. \end{aligned}$$

Так как $W = \text{const}$, то $W' = 0$, и после сокращения на x' получаем

$$mx'' + kqQx / \sqrt{(R^2 + x^2)^3} = 0. \quad (1)$$

Отметим, что $\sqrt{(R^2 + x^2)^3} = \sqrt{(R^2(1 + x^2/R^2))^3}$. Так как $x \ll R$, то отношение $(x/R)^2 \rightarrow 0$, и в этом приближении уравнение (1) приводится к виду

$$mx'' + kqQ \frac{x}{R^3} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{kqQ}{mR^3} x = 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{kqQ}{mR^3} > 0$.

Мы получили уравнение гармонических колебаний заряда, происходящих с частотой $\omega_0 = \sqrt{kqQ/(mR^3)}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{mR^3/(kqQ)}$.

12. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых проводящих пружин с общей жесткостью k . Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис. 229). К верхним концам пружин присоединен конденсатор емкостью C . Пренебрегая сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определить период колебаний системы в вертикальной плоскости.

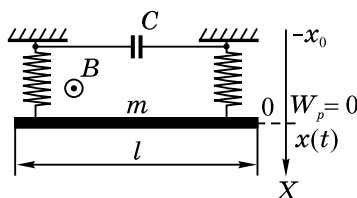


Рис. 229

Решение

При равновесии проводника $mg - kx_0 = 0$, где $x_0 = mg/k$ — начальная деформация пружин. Выберем ось координат X , направленную вертикально вниз. Ее начало поместим в точке, соответствующей положению равновесия,

тогда в любой момент времени деформация пружин равна $x+x_0$, где x — координата проводника. При колебаниях полная энергия системы складывается из:

- 1) кинетической энергии проводника

$$W_{\kappa}=mv^2/2=m(x')^2/2;$$

- 2) потенциальной энергии проводника в поле тяжести Земли $W_p=-mgx$ (нулевое значение потенциальной энергии соответствует положению равновесия проводника, т. е. когда проводник находится в начале координат);

- 3) потенциальной энергии упругой деформации пружин

$$W_y=k(x+x_0)^2/2;$$

- 4) электростатической энергии конденсатора

$$W_{\vartheta}=Cu^2/2,$$

где u — напряжение на конденсаторе.

Так как проводник движется в магнитном поле, то на его концах возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i=Blv=Blx'$. Поскольку сопротивлением проводника и пружин можно пренебречь, то в любой момент времени напряжение на конденсаторе равно ЭДС индукции, т. е. $u=\mathcal{E}_i$. Следовательно, $W_{\vartheta}=C(Blx')^2/2$.

Полная энергия системы

$$\begin{aligned} W &= W_{\kappa} + W_p + W_y + W_{\vartheta} = \\ &= m(x')^2/2 - mgx + k(x+x_0)^2/2 + C(Blx')^2/2. \end{aligned}$$

Вычислим производную от полной энергии по времени:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{m}{2} 2x'x'' - mgx' + \frac{k}{2} 2(x+x_0)x' + \frac{C(Bl)^2}{2} 2x'x'' = \\ &= mx'x'' - mgx' + k(x+x_0)x' + C(Bl)^2 x'x'' = \\ &= \left((m+C(Bl)^2)x'' + kx - (mg-kx_0) \right) x'. \end{aligned}$$

Напомним, что $mg - kx_0 = 0$, поэтому $W' = ((m + C(Bl)^2)x'' + kx)x'$.

Полная энергия системы сохраняется, т. е. $W = \text{const}$, следовательно, $W' = 0$. Подставляя и сокращая на x , получаем уравнение

$$\begin{aligned} (m + C(Bl)^2)x'' + kx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x'' + kx / (m + C(Bl)^2) &= 0 \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = k / (m + C(Bl)^2)$.

Итак, проводник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k / (m + C(Bl)^2)}$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{(m + C(Bl)^2) / k}.$$

13. Конденсатор емкостью $C = 50$ пФ сначала подключили к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В, а затем к катушке с индуктивностью $L = 5,1$ мкГн. Найти частоту колебаний, возникших в контуре, максимальное значение силы тока в контуре и его действующее значение (см. рис. 230).

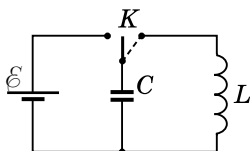


Рис. 230

Решение

На рис. 230 K — ключ, при помощи которого конденсатор C подключают к источнику ЭДС. При этом конденсатор заряжается до напряжения $u = \mathcal{E}$ и его заряд $q_m = C\mathcal{E}$. Затем при помощи ключа заряженный конденсатор подключают к катушке. В колебательном контуре возникают

колебания заряда, тока и напряжения на конденсаторе. Собственная частота колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 6,3 \cdot 10^7$ Гц.

Определить максимальное значение тока можно двумя способами.

1. Так как в контуре возникают гармонические колебания, то $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где φ_0 — начальная фаза колебаний. В момент времени $t=0$ $q(t) = q(0) = q_m = q_m \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0$. Итак, колебания заряда конденсатора описываются формулой $q(t) = q_m \cos \omega_0 t$. Ток в контуре $i(t) = q'(t) = (q_m \cos \omega_0 t)' = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2)$. Отсюда следует, что амплитуда тока $I_m = q_m \omega_0 = C\varepsilon \frac{1}{\sqrt{LC}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}} = 9,4 \cdot 10^{-3}$ А.

2. Начальная энергия контура $W_1 = C\varepsilon^2/2$ сосредоточена в электростатическом поле конденсатора. В тот момент, когда ток максимален, заряд конденсатора равен нулю, вся энергия контура сосредоточена в катушке: $W_2 = LI_m^2/2$. По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2 \Rightarrow C\varepsilon^2/2 = LI_m^2/2 \Rightarrow I_m = \varepsilon \sqrt{C/L}.$$

Действующее значение тока

$$I_d = I_m/\sqrt{2} = \varepsilon \sqrt{C/(2L)} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

14. Заряженный конденсатор замкнули на катушку индуктивности. Через какую часть периода после подключения энергия в конденсаторе будет равна энергии в катушке индуктивности?

Решение

Пусть C — емкость, L — индуктивность, а ω_0 — собственная частота контура. Заряд на конденсаторе изменяется по закону $q(t) = q_m \cos \omega_0 t$, поэтому его энергия в любой момент времени

$$W_c = (q(t))^2 / (2C) = (q_m^2 \cos^2 \omega_0 t) / (2C).$$

Ток в контуре $i(t) = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t$, а энергия, сосредоточенная в магнитном поле катушки,

$$W_m = Li^2/2 = (Lq_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t)/2.$$

По условию задачи

$$\begin{aligned} W_9 = W_m &\Rightarrow \frac{q_m^2 \cos^2 \omega_0 t}{2C} = \frac{Lq_m^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos^2 \omega_0 t = LC\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega_0^2 = 1/(LC)$, получим

$$\begin{aligned} LC\omega_0^2 &= 1 \Rightarrow \cos^2 \omega_0 t = \sin^2 \omega_0 t \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 + \cos 2\omega_0 t)/2 = (1 - \cos 2\omega_0 t)/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\cos 2\omega_0 t = 0 \Rightarrow 2\omega_0 t = \pi/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (4\pi/T)t = \pi/2 \Rightarrow t = T/8. \end{aligned}$$

15. Колебательный контур через ключ K подключен к источнику ЭДС с некоторым внутренним сопротивлением r (см. рис. 231). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают и в контуре возникают колебания с периодом T . При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора. Сопротивлением катушки можно пренебречь.

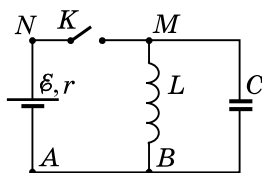


Рис. 231

Решение

1. Ключ замкнут. Пусть ЭДС источника равна \mathcal{E} . В стационарном режиме постоянный ток I протекает по контуру $NMBA$ и его значение $I = \mathcal{E} / r$.

2. Ключ разомкнут. В колебательном контуре возникают колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

В момент размыкания конденсатор не заряжен, а через катушку протекает ток I , равный амплитудному значению тока при колебаниях: $I_m = I$. При этом вся энергия контура сосредоточена в магнитном поле катушки: $W_m = LI_m^2/2$. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток через катушку равен нулю, и вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе, т.е.

$$W_{\text{э}} = Cu_m^2/2. \text{ Так как } W_m = W_{\text{э}},$$

$$\text{то } LI_m^2/2 = Cu_m^2/2 \Rightarrow u_m = I_m\sqrt{L/C}.$$

По условию задачи

$$\frac{u_m}{\mathcal{E}} = n \Rightarrow \frac{I_m\sqrt{L/C}}{\mathcal{E}} = n \Rightarrow \frac{(\mathcal{E}/r)\sqrt{L/C}}{\mathcal{E}} = n \Rightarrow nr = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Последнее уравнение и уравнение для T образуют систему

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{LC}, \\ nr = \sqrt{L/C}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LC = (T/(2\pi))^2, \\ L/C = (nr)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Cnr)^2 = (T/(2\pi))^2, \\ L = C(nr)^2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = T/(2\pi nr), \text{ а } L = Tnr / (2\pi).$$

16. Электрический паяльник мощностью 50 Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением 127 В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление диода при прямом направлении тока считать равным нулю, при обратном — бесконечности. Сопротивление паяльника постоянно.

Решение

В задаче речь идет о нахождении средней мощности. Заданные напряжения есть действующие значения напряжений.

Средняя мощность $\bar{P}_1 = 50$ Вт, на которую рассчитан паяльник, $\bar{P}_1 = u_1^2/R$, где $u_1 = 127$ В — действующее значение напряжения. Из последней формулы находим сопротивление паяльника $R = u_1^2/\bar{P}_1$.

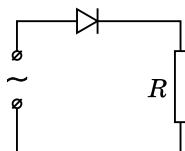


Рис. 232

При работе паяльника по схеме на рис. 232 действующее значение напряжения $u_2 = 220$ В. При этом в течение первой половины периода через паяльник течет ток, и в нем выделяется теплота $Q = \bar{P}_2 T/2 = (u_2^2/R)(T/2)$. В течение второй половины периода ток через паяльник не течет и теплота не выделяется. Следовательно, средняя

мощность за период $\bar{P} = \frac{Q}{T} = \frac{(u_2^2/R)(T/2)}{T} = \frac{u_2^2}{2R}$. Подстав-

ляя R , находим $\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{P}_1 \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 = 75$ Вт.

17. Участок цепи переменного тока (см. рис. 233) состоит из сопротивления R , соединенного последовательно с нагревательной спиралью, обладающей некоторой индуктивностью и активным сопротивлением. Действующие значения напряжений на всем участке, сопротивлений и спирали равны соответственно u_0 , u и u_1 . За сколько времени с помощью этой спирали температуру воды массой m можно повысить на ΔT ,

если удельная теплоемкость воды равна c ? Потерями теплоты пренебречь.

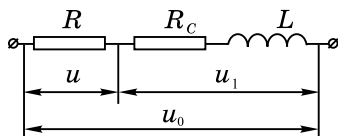


Рис. 233

Решение

На представленном участке цепи, где R_c — сопротивление спирали, L — ее индуктивность, заданы действующие напряжения. Так как соединение последовательное, то во всех элементах этого участка в любой момент времени ток одинаков. Колебания тока опишем вектором \vec{I} , модуль которого I . Направим этот вектор вдоль оси X (см. рис. 234). Колебания напряжения на сопротивлениях R_c и R по фазе совпадают с колебаниями тока, их амплитуды равны $u_c = IR_c$ и $u = IR$ и на векторной диаграмме также направлены вдоль оси X . Колебания напряжения \vec{u}_L на индуктивности опережают колебания тока на $\pi/2$, их амплитуда равна $IX_L = I\omega L = u_L$, и на векторной диаграмме вектор \vec{u}_L направлен вдоль оси Y . Напряжение на спирали $\vec{u}_1 = \vec{u}_L + \vec{u}_c$, напряжение во всей цепи $\vec{u}_0 = \vec{u}_1 + \vec{u}$ (соответствующие построения приведены на рис. 234).

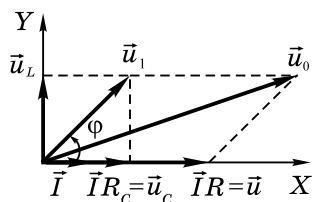


Рис. 234

По теореме косинусов $u_0^2 = u_1^2 + u^2 - 2u_1u \cos(\pi - \varphi) = u_1^2 + u + 2u_1u \cos \varphi$, где φ — сдвиг фаз между током и напряжением на участке, где включена спираль. Из по-

следнего уравнения $\cos \varphi = (u_0^2 - u_1^2 - u^2) / (2u_1u)$. Действующее значение тока $I = u / R$. Мощность, выделяемая на участке со спиралью,

$$\bar{P} = Iu_1 \cos \varphi = \left(\frac{u}{R} \right) u_1 \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2u_1u} = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R}.$$

Для нагревания воды на ΔT ей понадобится сообщить количество теплоты $Q = cm\Delta T = \bar{P}\tau$, где τ — время работы спирали. После подстановки получаем

$$cm\Delta T = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u^2}{2R} \tau \Rightarrow \tau = \frac{2cmR\Delta T}{u_0^2 - u_1^2 - u^2}.$$

РАЗДЕЛ 12

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

1. Основные понятия оптики

В оптике изучаются распространение и взаимодействие с веществом электромагнитных волн, длина которых лежит в диапазоне от 10^{-7} до 10^{-5} м. Внутри этого диапазона находится участок длин волн от $4 \cdot 10^{-7}$ до $7,6 \cdot 10^{-7}$ м, соответствующий видимому свету. В оптический диапазон, кроме видимого света, включаются инфракрасное излучение ($\lambda > 7,6 \cdot 10^{-7}$ м) и ультрафиолетовое излучение ($\lambda < 4 \cdot 10^{-7}$ м).

Направление распространения любых волн, в том числе и световых, определяется с помощью **лучей** — **линий, перпендикулярных волновым поверхностям и указывающих направление распространения энергии волн**. Таким образом, **световой луч** указывает направление распространения световой энергии.

Геометрической оптикой называется раздел оптики, в котором изучаются законы распространения световой энергии в прозрачных средах на основе представлений о световом луче. Законы геометрической оптики применяются в случаях, когда длина световой волны значительно меньше размеров препятствий, встречающихся на пути ее распространения.

2. Законы геометрической оптики

1. Закон прямолинейного распространения света: в однородной среде луч света распространяется прямолинейно.

2. Закон независимого распространения света: отдельные световые лучи не влияют друг на друга и распространяются независимо от других лучей.

3. Закон отражения света: падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения.

На рисунке 235: MN_1 — граница раздела двух сред; AB — падающий луч; BD — отраженный луч; CB — перпендикуляр к границе двух сред; по определению $\angle ABC = \alpha$ — угол падения, а $\angle CBD = \gamma$ — угол отражения, причем $\alpha = \gamma$.

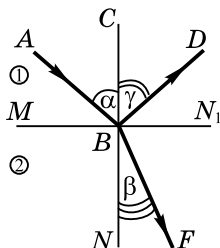


Рис. 235

Абсолютным показателем преломления n некоторой среды называют отношение скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с к скорости света v в этой среде:

$$n = c / v. \quad (12.1)$$

Если рассматриваются две среды с различными абсолютными показателями преломления, то среду с меньшим показателем преломления называют **оптически менее плотной**, а среду с большим показателем — **оптически более плотной**.

4. Закон преломления света: падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению показателя прелом-

ления второй среды к показателю преломления первой среды:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n. \quad (12.2)$$

Отношение $n_2 / n_1 = n$ называют **относительным показателем** преломления второй среды по отношению к первой. На рис. 235: BF — преломленный луч; $\angle NBF = \beta$ — угол преломления.

Преобразовав формулу (12.2) к виду $\sin \alpha = n \sin \beta$, можно сделать следующие выводы:

- если луч падает перпендикулярно границе раздела двух сред ($\alpha=0$), то он не преломляется ($\beta=0$);
- если луч переходит из среды оптически менее плотной в среду оптически более плотную ($n_2 > n_1 \Rightarrow n > 1$), то угол преломления меньше (или равен при $\alpha=0$) углу падения, т. е. $\beta \leq \alpha$ (см. рис. 235).

5. Принцип обратимости хода световых лучей: если при выходе светового луча из любой системы преломляющих и отражающих сред заставить световой луч отразиться точно назад, то он пройдет всю систему в обратном направлении тем же путем и вернется к своему источнику.

3. Полное (внутреннее) отражение света

Пусть свет распространяется из оптически более плотной среды 2 в оптически менее плотную среду 1. Угол падения равен α , а угол преломления равен β (см. рис. 236). Закон преломления запишется в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{(n_2/n_1)} = \frac{1}{n}, \quad \text{где } n = \frac{n_2}{n_1} > 1 \Rightarrow \sin \beta = n \sin \alpha. \quad \text{Так}$$

как $n > 1$, то $\beta > \alpha$ и при некотором угле падения $\alpha_0 < 90^\circ$ угол преломления β станет равным 90° . В этом случае преломленный луч скользит по поверхности раздела

двух сред, не проникая в среду 1. При $\alpha > \alpha_0$ существуют только падающий и отраженный лучи, преломленного луча нет. Это явление, когда луч из оптически более плотной среды не проникает в оптически менее плотную среду, называется **полным отражением**. Угол падения α_0 , при котором наступает полное отражение, называется **предельным углом полного отражения**. Его находят из условия, что угол преломления $\beta = 90^\circ$, поэтому

$$\sin \alpha_0 = 1 / n. \quad (12.3)$$

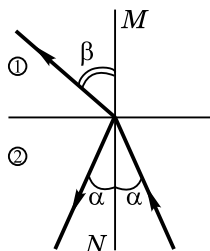


Рис. 236

4. Изображение в плоском зеркале

Сформулируем общее правило построения изображения в плоском зеркале (см. рис. 237). Пусть S — точечный источник света, MN — плоское зеркало. Выберем два луча SA и SB , падающих на зеркало MN . После отражения от зеркала лучи идут расходящимся пучком.

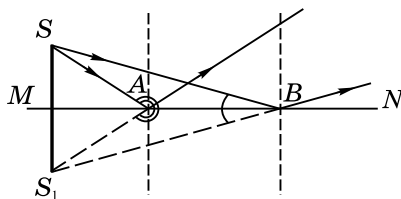


Рис. 237

В точке S_1 за зеркалом пересекаются их продолжения. Это и есть мнимое изображение точки S . Из законов от-

ражения следует, что $\angle SBA = \angle S_1BA$ и $\angle SAB = \angle S_1AB$, причем AB — общая сторона у $\triangle SAB$ и $\triangle S_1AB$, поэтому $\triangle SAB = \triangle S_1AB \Rightarrow SB = S_1B$, следовательно, MB — биссектриса угла при вершине равнобедренного $\triangle SS_1B$, поэтому MB — ось симметрии. Общий вывод таков: изображение предмета в плоском зеркале — мнимое и получается симметричным отражением предмета относительно плоскости зеркала.

5. Тонкие линзы

Свет может испытывать преломление не только на плоской границе двух сред, но и на сферических поверхностях. Важным случаем такого преломления является преломление в линзе.

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Линзы, которые посередине толще, чем у краев, называются **выпуклыми**, в противном случае линзы являются **вогнутыми**.

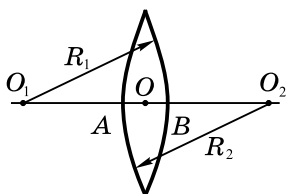


Рис. 238

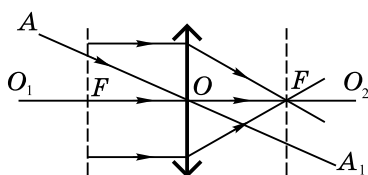


Рис. 239

На рис. 238 представлена выпуклая линза.

Когда наибольшая толщина линзы $AB \ll R_1$ и $AB \ll R_2$, линзу называют **тонкой**. В этом случае точки A и B — вершины сферических сегментов — можно считать совпадающими в точке O . Ее называют **оптическим центром линзы**. Любая прямая, проходящая через оптический центр линзы, называется **оптической осью**. Оптическая ось O_1O_2 называется **главной оптической осью**.

Установлено, что после прохождения через выпуклую линзу световые лучи отклоняются к ее главной оптической оси, поэтому выпуклые линзы называют **собирающими**. На рисунках и чертежах собирающие линзы изображаются, как показано на рис. 239.

После прохождения вогнутой линзы световые лучи удаляются от ее главной оптической оси, поэтому вогнутые линзы называют **рассеивающими**. На рисунках их изображают, как показано на рис. 240.

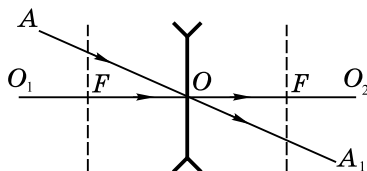


Рис. 240

Симметрично относительно плоскости линзы, на ее главной оптической оси, расположены особые точки линзы, которые являются ее **фокусами**. Расстояние от этих точек до плоскости линзы называют **фокусным расстоянием** F . Фокусное расстояние линзы зависит от радиусов кривизны R_1 и R_2 сферических поверхностей, образующих линзу, и показателя преломления n , вещества, из которого изготовлена линза. Фокусное расстояние линзы вычисляют по формуле

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (12.4)$$

У собирающих линз $F > 0$, у рассеивающих $F < 0$.

Величину $D = 1 / F$ называют **оптической силой линзы**.

Плоскость, проходящая через фокус линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называют **фокальной плоскостью линзы**.

Лучи света, распространяющиеся близко к главной оптической оси линзы (их называют параксиальными),

обладают рядом важных свойств. Перечислим эти свойства для **собирающих линз**:

1. Луч, распространяющийся вдоль любой оптической оси линзы, преломлений не испытывает (лучи AA_1 и O_1O_2 на рис. 239).

2. Световые лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в собирающей линзе пересекаются в одной точке — фокусе линзы F (см. рис. 239).

3. Лучи, падающие на линзу параллельным пучком, после преломления в линзе пересекаются в точке N , принадлежащей фокальной плоскости (см. рис. 241).

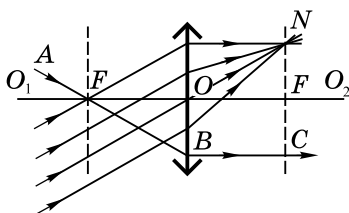


Рис. 241

4. Луч, проходящий через фокус линзы, после преломления в ней распространяется параллельно главной оптической оси (луч AB на рис. 241).

Перечислим наиболее важные свойства параксиальных лучей для **рассеивающих линз**:

1. Луч, распространяющийся вдоль любой оптической оси, преломлений не испытывает (лучи AA_1 и OO_1 на рис. 240).

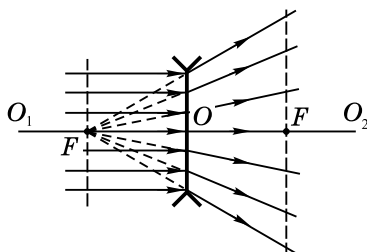


Рис. 242

2. Световые лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в линзе идут расходящимся пучком, причем их продолжения пересекаются в фокусе линзы (см. рис. 242).

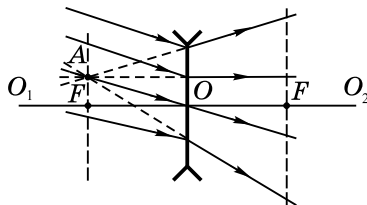


Рис. 243

3. Лучи, падающие на рассеивающую линзу параллельным пучком, после преломления в линзе образуют расходящийся пучок, причем продолжения преломленных лучей пересекаются в точке A фокальной плоскости линзы (см. рис. 243).

6. Изображение в тонкой линзе.

Формула тонкой линзы

Построим изображение предмета AB в тонкой собирающей линзе. Для определенности будем считать, что предмет AB находится на расстоянии $d > F$ от линзы (см. рис. 244). Проведем через точку A луч AD , параллельный главной оптической оси линзы. После преломления в линзе он проходит через фокус линзы F . Вторым луч AO возьмем проходящим через оптический центр O . Такой луч преломления в линзе не испытывает. Пересечение лучей DF и AO дает точку A_1 ; A_1B_1 — действительное обратное изображение предмета AB в линзе.

Выведем формулу, связывающую три величины: расстояние d от предмета до линзы, расстояние f от изображения до линзы и фокусное расстояние F . Из подобия

треугольников AOB и $A_1OB_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O}$. Из подобия

треугольников ODF и $A_1FB_1 \Rightarrow OD/A_1B_1 = OF/FB_1$. Так

как $OD = AB \Rightarrow AB/A_1B_1 = OF/FB_1$, приравнивая правые части пропорций, находим, что $BO/B_1O = OF/FB_1$.

Но $BO = d$, $B_1O = f$, $OF = F$, $FB_1 = B_1O - OF = f - F$, поэтому $d/f = F/(f - F) \Rightarrow d(f - F) = fF \Rightarrow df = dF + fF$.

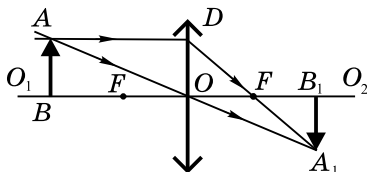


Рис. 244

Разделив последнее равенство на произведение dfF , получаем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (12.5)$$

Эта формула справедлива для всех тонких линз, как собирающих, так и рассеивающих, при любых взаимных расположениях предмета и линзы. В формуле (12.5) $F > 0$ у собирающей линзы и $F < 0$ у рассеивающей линзы; $f > 0$, если изображение действительное, и $f < 0$, если мнимое; $d > 0$ в случае действительной светящейся точки и $d < 0$, если источник мнимый (например, на линзу падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются в одной точке).

Из рис. 244 следует, что увеличение линзы $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f}{d}$.

В общем случае увеличение линзы находят по формуле

$$\Gamma = \left| \frac{A_1B_1}{AB} \right| = \left| \frac{f}{d} \right|. \quad (12.6)$$

7. Фотоаппарат

На законах геометрической оптики основано действие многих оптических приборов, в том числе и фотоаппарата. Фотоаппарат состоит из светонепроницаемой камеры, в передней части которой находится система линз, называемая **объективом** (см. рис. 245).

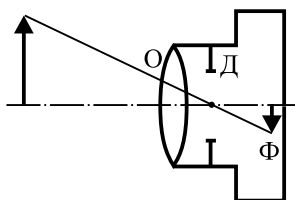


Рис. 245

Во многих случаях объектив можно считать тонкой собирающей линзой. Открывает и закрывает объектив специальный **затвор**. Время, в течение которого объектив остается открытым, называется временем экспозиции.

В задней части камеры расположена фотопленка, на которой при помощи объектива создается действительное изображение фотографируемого предмета. Фотографируемый объект может находиться на разных расстояниях от объектива. Для того чтобы изображение оказалось точно в плоскости фотопленки, объектив может перемещаться вдоль оптической оси. Этим осуществляется **наводка на резкость**.

Светочувствительная эмульсия фотопленки представляет собой кристаллы бромистого серебра. Кристаллы имеют конечные размеры, поэтому если изображения двух различных точек попадут на один и тот же кристалл, на фотопленке получится одна точка. Отсюда следует, что любая пленка имеет определенную **разрешающую способность**.

Поток световой энергии, проходящий через объектив, регулируется диафрагмой Д. Диафрагма позволяет также увеличить **четкость изображения**, или **глубину резкости**.

8. Зрение. Очки

Глаз человека имеет очень сложное строение. В целом глаз можно рассматривать как собирающую линзу с переменным фокусным расстоянием, с помощью которой получаются действительные обратные изображения предметов на сетчатке глаза. При этом расстояние от сетчатки до линзы (глаза) остается фиксированным.

Если предмет расположен далеко от глаза, то изображение на сетчатке нормального глаза получается без напряжения мышц глаза. При приближении предмета мышцы глаза рефлекторно изменяют его фокусное расстояние, в результате чего изображение предмета снова получается на сетчатке. Этот процесс называется **аккомодацией** глаза.

Минимальное расстояние от предмета до глаза, при котором можно рассматривать детали предмета без большого напряжения, называется **расстоянием наилучшего зрения**. Для нормального глаза оно равно 25 см.

В некоторых случаях глаз в ненапряженном состоянии создает изображение удаленного объекта не на сетчатке, а перед ней. В результате человек может резко видеть предметы, расположенные не дальше некоторого расстояния. Такой дефект зрения называют **близорукостью**.

В других случаях изображения удаленных предметов получаются за сетчаткой, и человек может резко видеть предметы, расположенные не ближе некоторого расстояния. Такой дефект называется **дальнозоркостью**.

Эти недостатки зрения можно компенсировать с помощью очков. При этом линзы очков должны создавать изображение предмета на таком расстоянии, с которого глаз может это изображение видеть резко. Кроме того, полученные с помощью линз изображения должны быть прямыми. Легко убедиться в том, что прямые изображения, создаваемые тонкими линзами, всегда мнимые.

Таким образом, линзы очков должны создавать прямые мнимые изображения на расстояниях, находящихся в пределах аккомодации глаза.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. На одно из зеркал падает луч, расположенный в плоскости, перпендикулярной линии пересечения зеркал. Найти угол отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал (см. рис. 246).

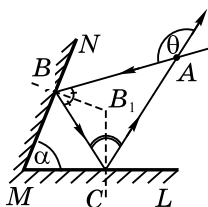


Рис. 246

Решение

MN и ML — плоские зеркала; AB — падающий на зеркало MN луч; $BB_1 \perp MN$; BC — падающий на зеркало ML луч; $CC_1 \perp ML$; AC — отраженный от двух зеркал луч; θ — искомый угол отклонения луча после двух отражений от зеркал.

В четырехугольнике $BMCB_1$

$$\angle MB B_1 = \angle M C B_1 = 90^\circ, \text{ поэтому}$$

$$\angle B M C + \angle B B_1 C = 180^\circ \Rightarrow \angle B B_1 C = 180^\circ - \angle B M C = 180^\circ - \alpha.$$

В треугольнике $B C B_1$

$$\angle B_1 B C + \angle B_1 C B = 180^\circ - \angle B B_1 C = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha.$$

Из закона отражения следует, что

$$\angle ABC = 2\angle B_1BC \text{ и } \angle ACB = 2\angle B_1CB.$$

Поэтому $\angle ABC + \angle ACB = 2(\angle B_1BC + \angle B_1CB) = 2\alpha$. Искомый угол отклонения θ является внешним по отношению к $\triangle BAC$, поэтому

$$\theta = \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha = 120^\circ.$$

2. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на $4,87^\circ$, укреплено плоское зеркало (см. рис. 247). С какого максимального расстояния человек, рост которого $h=170$ см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?

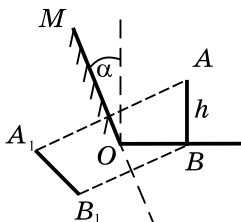


Рис. 247

Решение

Пусть AB — человек, стоящий у зеркала, тогда A_1B_1 — его изображение в зеркале MO (см. рис. 247). A_1B_1 и AB симметричны относительно зеркала MO . Ясно, что в этом случае человек видит свое изображение. Предельный случай получается, когда прямая AA_1 проходит через точку O (см. рис. 248). В $\triangle AOB$ $\angle AOB = \alpha$, поэтому искомое расстояние $OB = AB / \operatorname{tg} \alpha = h / \operatorname{tg} \alpha$.

Отметим, что угол α мал, поэтому $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ при условии, что α выражен в радианах:

$$\alpha = 4,87^\circ = (4,87 / 180) \cdot 3,14 \text{ рад} = 0,085 \text{ рад}.$$

Следовательно, $OB = h / \alpha = 20$ м.

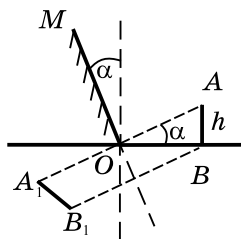


Рис. 248

3. Определить смещение луча после прохождения через плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=6$ см, имеющую показатель преломления $n=1,6$. Угол падения луча на пластинку $\alpha=60^\circ$ (см. рис. 249).

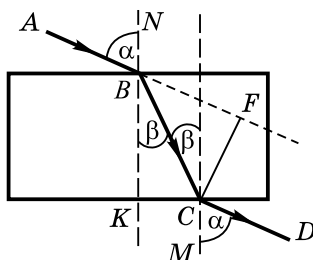


Рис. 249

Решение

AB — падающий на пластинку луч, BN — перпендикуляр в точке падения, α — угол падения, BC — преломленный луч, β — угол преломления, CM — перпендикуляр в точке падения луча на нижнюю грань пластинки. Так как $CM \parallel BN$, то луч падает на нижнюю грань пластинки под углом β . На основании обратимости хода световых лучей можно утверждать, что он выходит из пластинки под углом α . Итак, $AB \parallel CD$, однако происходит смещение луча на расстояние CF ($CF \perp AB$). Запишем закон преломления в точке B :

$$\sin \alpha / \sin \beta = n \Rightarrow \sin \beta = (\sin \alpha) / n = \sin \beta = 0,54 \Rightarrow \beta = 32,8^\circ;$$

$\angle KBF = \angle ABN = \alpha$ (вертикальные углы), поэтому $\angle CBF = \alpha - \beta$. Из $\triangle CBK$: $BC = BK / \cos \beta = d / \cos \beta$. Из $\triangle CBF$ смещение луча

$$CF = BC \sin \angle CBF = d \sin(\alpha - \beta) / \cos \beta = 3,3 \text{ см.}$$

4. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластины. Наблюдатель рассматривает предмет через пластину, причем луч зрения нормален к ней. Определить расстояние x от изображения предмета до ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластины $d = 4,5$ см, показатель преломления стекла $n = 1,5$.

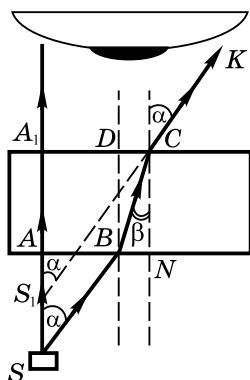


Рис. 250

Решение

Построим изображение предмета (см. рис. 250): S — предмет, SA — луч, падающий перпендикулярно пластине, SB — луч, падающий под углом α к пластине. Отметим, что лучи SA и SB должны попасть в глаз, поэтому угол α мал; BD — нормаль к пластине; $\angle DBC = \beta = \angle BCN$.

После прохождения пластины лучи SA и CK расходятся. Их продолжения пересекаются в точке S_1 , которая является мнимым изображением точки S . Искомое расстояние $A_1S_1 = x$.

Из $\triangle SAB$: $AB = SA \cdot \operatorname{tg} \alpha = l \operatorname{tg} \alpha$.

Из $\triangle CBD$: $CD = BD \cdot \operatorname{tg} \angle DBC = d \operatorname{tg} \beta$.

Отсюда $A_1C = A_1D + CD = AB + CD = l \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta$.

В $\triangle A_1S_1C$: $\angle A_1S_1C = \alpha$ (так как $S_1K \parallel SB$), поэтому

$$A_1S_1 = x = A_1C \operatorname{ctg} \alpha = \frac{A_1C}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{l \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = l + d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Изображение получается при допущении, что угол α мал, значит, мал и угол преломления β . Следовательно, $\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha = \sin \beta / \sin \alpha = 1/n$. Итак, $x = l + d/n = 18$ см.

5. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h , находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый диск так, что центр диска находится над источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч не выйдет через поверхность воды? Показатель преломления воды равен n .

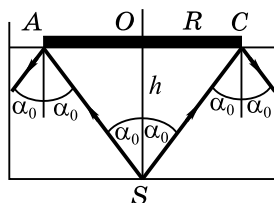


Рис. 251

Решение

Лучи, исходящие от источника S и попадающие на диск, отражаются от него и через поверхность воды не выходят (см. рис. 251). Если угол падения луча SA равен предельному углу полного отражения, то этот луч также не выходит через поверхность воды. Лучи, падающие на поверхность воды левее точки A , имеют угол падения больше α_0 и также не выходят через поверхность воды. Таким образом, для луча SA должно выполняться условие: $\sin \alpha_0 = 1/n$.

Из $\triangle AOS$: $\operatorname{tg} \alpha_0 = AO / SO = R / h$. С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \frac{(1/n)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0}} = \frac{(1/n)}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Приравнивая выражения для тангенсов, получаем

$$1/\sqrt{n^2 - 1} = R/h \Rightarrow R = h/\sqrt{n^2 - 1}.$$

6. На половину шара радиусом $r=2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n=\sqrt{2}$, падает параллельный пучок лучей. Определить радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L=4,82$ см от центра шара.

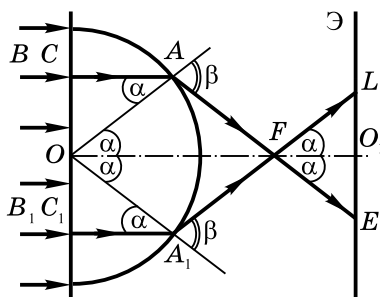


Рис. 252

Решение

Рассмотрим луч BC , падающий на плоскую поверхность (см. рис. 252). Он проникает в шар и, не отклоняясь, попадает на сферическую поверхность в точке A . OA — радиус шара; $\angle OAC$ — угол падения луча на сферическую поверхность, причем $\sin \alpha = OC / OA = OC / r$. Следовательно, по мере удаления падающего луча от оси симметрии OO_1 увеличивается угол падения α . В некоторой точке он становится равным предельному углу полного отражения: $\sin \alpha_0 = 1/n = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$. При этом угол преломления β равен 90° .

Из шара выйдут лишь те лучи пучка, которые падают на плоскую поверхность между точками C и C_1 . Они-то и образуют после преломления на сферической поверхности светлое пятно на экране, радиус которого равен $O_1E=O_1L$. При $\alpha=45^\circ$ AOA_1F — квадрат и

$$OF = OA\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow O_1F = OO_1 - OF = L - r\sqrt{2}.$$

В $\triangle O_1FE$: $\angle O_1FE = \alpha = 45^\circ$, поэтому

$$O_1E = O_1F = L - r\sqrt{2} = 2 \text{ см.}$$

7. В воду опущен прямоугольный стеклянный клин. Показатель преломления стекла $n=1,5$. При каких значениях угла α луч света, падающий нормально на грань AB , целиком достигнет грани AC ? Показатель преломления воды $n_{\text{в}}=1,33$ (см. рис. 253).

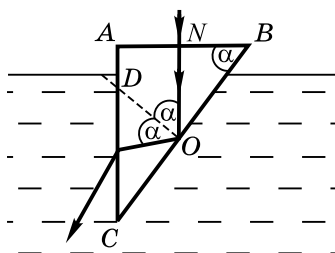


Рис. 253

Решение

Луч, падающий перпендикулярно грани AB , не преломляется. Пусть O — точка падения его на грань BC . DO — перпендикуляр, восстановленный в точке падения, тогда $\angle DON$ — угол падения, причем $\angle DON = \angle CBA = \alpha$. Луч целиком достигнет грани AC , если от грани BC он будет полностью отражаться. Для этого необходимо, чтобы $\alpha \geq \alpha_0$, где α_0 — угол полного отражения на границе «стекло — вода».

Отсюда, $\sin \alpha_0 = n_{\text{в}}/n = 0,89 \Rightarrow \alpha_0 = 62,5^\circ$. При $\alpha \geq 62,5^\circ$ луч света целиком достигнет грани AC .

8. Луч света падает на трехгранную стеклянную призму под углом α . Показатель преломления стекла n . Преломляющей угол призмы φ . Под каким углом луч выйдет из призмы и каков угол его отклонения от первоначального направления?

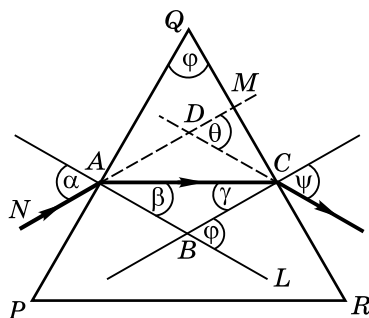


Рис. 254

Решение

NA — падающий луч (см. рис. 254); $AB \perp PQ$; AC — преломленный в призме луч; $\angle BAC = \beta$ — угол преломления; $BC \perp QR$; $\angle ACB = \gamma$; ψ — искомый угол выхода луча из призмы; $\angle CDM = \theta$ — угол отклонения луча. Проведенное построение показывает, что призма отклоняет падающий на нее луч к основанию. Запишем закон преломления в точках A и C :

$$\sin \alpha / \sin \beta = n, \quad (1)$$

$$\sin \gamma / \sin \psi = 1 / n. \quad (2)$$

Так как $AB \perp PQ$ и $BC \perp QR$, то $\angle CBL = \angle PQR = \varphi$; $\angle CBL$ — внешний угол $\triangle ABC$, поэтому он равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных:

$$\angle CBL = \angle BAC + \angle ACB \text{ или } \varphi = \beta + \gamma. \quad (3)$$

Из (1): $\sin \beta = (\sin \alpha) / n \Rightarrow \beta = \arcsin((\sin \alpha) / n)$.

Из (3): $\gamma = \varphi - \beta = \varphi - \arcsin((\sin \alpha) / n)$.

Из (2):

$$\begin{aligned}\sin \psi &= n \sin \gamma = n \sin (\varphi - \arcsin ((\sin \alpha) / n)) = \\ &= n (\sin \varphi \cos (\arcsin ((\sin \alpha) / n)) - \cos \varphi (\sin \alpha) / n).\end{aligned}$$

Из тригонометрии известно, что $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, поэтому

$$\begin{aligned}\sin \psi &= n \left(\sin \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} - \cos \varphi \frac{\sin \alpha}{n} \right) = \\ &= \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi = \arcsin \left(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha \right). \quad (4)$$

Отметим, что $\angle DAB = \alpha$ (вертикальные углы) и $\angle DCB = \psi$. Поэтому $\angle DAC = \angle DAB - \beta = \alpha - \beta$, а $\angle ACD = \angle DCB - \gamma = \psi - \gamma$; θ — внешний угол $\triangle ADC$, поэтому

$$\theta = \angle DAC + \angle ACD = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) = (\alpha + \psi) - (\beta + \gamma).$$

Но, как уже доказывалось, $\beta + \gamma = \varphi$, следовательно, $\theta = (\alpha + \psi) - \varphi$.

Отметим, что угол ψ вычисляется по формуле (4).

При малых преломляющих углах φ и малых углах падения α формулу для θ можно существенно упростить. Из (1): $\sin \alpha = n \sin \beta$. Так как α и β — малы, то $\alpha = n\beta$. Из (2): $\sin \psi = n \sin \gamma$. При малых α и φ углы ψ и γ также малы, поэтому $\psi = n\gamma$. Формула принимает вид

$$\theta = (n\beta + n\gamma) - \varphi = n(\beta + \gamma) - \varphi = n\varphi - \varphi = (n - 1)\varphi.$$

9. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления φ (бипризма) помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию. Показатель преломления стекла $n = 1,57$, основание призмы $a = 5$ см. Найти угол φ , если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ см от призмы, образуется темная полоса шириной $d = 1$ см.

Решение

Указанную равнобедренную призму можно считать составленной из двух призм с общим основанием AB и малым преломляющим углом φ (см. рис. 255).

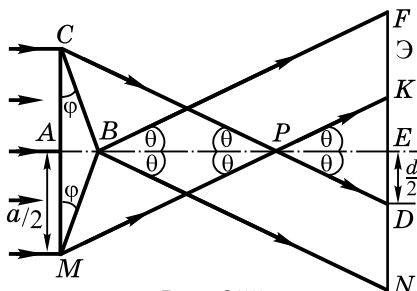


Рис. 255

В задании 18 было показано, что если преломляющий угол мал, то угол отклонения любого луча от первоначального направления $\theta = (n-1)\varphi$. Так как на верхнюю призму падает параллельный пучок, то после преломления в призме он остается параллельным (крайние лучи этого пучка CD и BN). Совершенно аналогично параллельный пучок, падающий на нижнюю призму, остается параллельным (его крайние лучи — BF и MK). Как видно из рис. 255, на экране образуется темная полоса KD .

$$\text{Из } \triangle KPE: PE = \frac{KE}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{d}{2 \operatorname{tg} \theta}.$$

$$\text{Из } \triangle APM: AP = \frac{AM}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \theta}.$$

По условию задачи

$$AP + PE = L \Rightarrow \frac{a}{2 \operatorname{tg} \theta} + \frac{d}{2 \operatorname{tg} \theta} = L \Rightarrow (a + d) = 2L \operatorname{tg} \theta.$$

Так как угол θ мал, то $\operatorname{tg} \theta = \theta$. Подставляя $\theta = (n-1)\varphi$, получаем уравнение

$$(a + d) = 2L(n-1)\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{a + d}{2L(n-1)} = 5,26 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 3^\circ.$$

10. Дана рассеивающая линза, у которой задано положение главной оптической оси (положение фокусов не задано); AB — луч, падающий на линзу, BK — этот же луч после преломления в линзе. Построить ход луча CD после преломления в линзе.

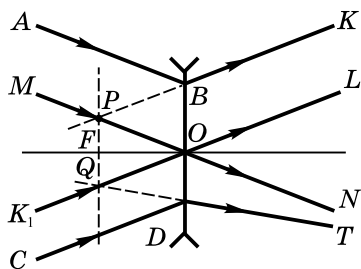


Рис. 256

Решение

Построим луч MN , идущий вдоль оптической оси линзы и параллельный лучу AB (см. рис. 256). В точке P пересекаются продолжения лучей BK и MN , причем точка P расположена в фокальной плоскости линзы. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через точку P , является фокальной плоскостью. Проведем луч K_1L , идущий вдоль оптической оси и параллельный лучу CD . Луч CD после преломления в линзе идет так, что его продолжение пересекается с лучом K_1L в точке Q , принадлежащей фокальной плоскости линзы. Таким образом, DQ — продолжение искомого луча, а DT — искомый луч.

11. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием F . Построить график зависимости f (расстояние от изображения до линзы) от d (расстояние от предмета до линзы).

Решение

Из формулы тонкой линзы $1/F = 1/d + 1/f$ выражаем $f(d) = Fd/(d - F)$. Таким образом, $f(d)$ является рациио-

нальной функцией. Для построения графика преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$f(d) = \frac{Fd}{d-F} = F \left(\frac{d-F+F}{d-F} \right) = F \left(1 + \frac{F}{d-F} \right).$$

Как видно, для построения графика функции $f(d)$ сначала необходимо построить график $1/d$, сдвинуть его на F вправо по оси абсцисс, умножить на F , сдвинуть на 1 по оси ординат и умножить на F .

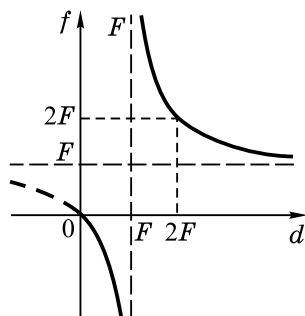


Рис. 257

Окончательный вид графика функции $f(d)$ приведен на рис. 257. График представляет собой две ветви гиперболы и иллюстрирует **важнейшие свойства изображений, получаемых в собирающих линзах**.

1. Если предмет находится между линзой и фокусом, т. е. $0 < d < F$, то его изображение — мнимое: $f < 0$.

2. Если предмет находится в фокусе линзы, изображения предмета не существует. При приближении предмета к фокусу, т. е. $d \rightarrow F$, изображение стремится к бесконечности: $f \rightarrow \pm\infty$.

3. Если предмет находится за фокусом линзы, т. е. $d > F$, его изображение действительное: $f > 0$. При увеличении расстояния от предмета до линзы его изображение приближается к фокусу линзы: $f \rightarrow F$.

4. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т. е. $d = 2F$, то изображение получает-

ся по другую сторону от линзы также на двойном фокусном расстоянии: $f=2F$.

12. Дана собирающая линза с фокусным расстоянием, равным F . Построить график зависимости увеличения линзы Γ от d (расстояние от предмета до линзы).

Решение

В задании 11 было показано, что расстояние от изображения до линзы выражается формулой $f(d)=Fd / (d-F)$.

Увеличение линзы $\Gamma = \left| \frac{f}{d} \right| = \left| \frac{F}{d-F} \right|$. Для построения этого графика сначала необходимо построить график $F / (d-F)$ по методике, изложенной в задании 11. Затем часть графика, расположенную под осью абсцисс, необходимо отобразить симметрично относительно этой оси. Окончательный вид графика зависимости $\Gamma(d)$ представлен на рис. 258.

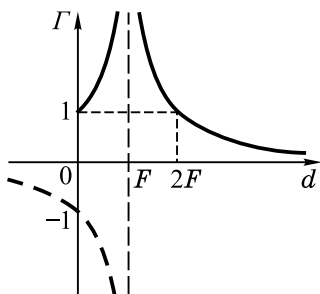


Рис. 258

Этот график иллюстрирует **важнейшие свойства увеличения, получаемого при помощи собирающей линзы.**

1. Если предмет расположен между линзой и фокусом, т. е. $0 < d < F$, получается мнимое увеличенное изображение: $\Gamma > 1$.

2. Если предмет находится на расстоянии $F < d < 2F$ от линзы, то изображение действительное и увеличенное: $\Gamma > 1$.

3. Если предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, т. е. $d = 2F$, то изображение действительное, расположено также на двойном фокусном расстоянии от линзы: $f = 2F$ и размер изображения равен размеру предмета: $\Gamma = 1$.

4. Если предмет находится на расстоянии $d > 2F$, то изображение действительное уменьшенное: $\Gamma < 1$.

Преобразуем формулу для увеличения, разделив числитель и знаменатель на F , тогда $\Gamma = \left| \frac{F}{d - F} \right| = \left| \frac{1}{(d/F) - 1} \right|$.

Из полученной формулы видно, что увеличение линзы возрастает с увеличением ее фокусного расстояния.

13. На экране, находящемся на расстоянии $f = 60$ см от собирающей линзы, получено изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси линзы. На какое расстояние переместится изображение на экране, если при неподвижном источнике переместить линзу в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, на $b = 2$ см? Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см.

Решение

По условию задачи изображение A_1 точки A получено на экране, следовательно, это изображение действительное и $d > F$, где d — расстояние от точки A до линзы (см. рис. 259, а).

Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

находим $d = Ff / (f - F) = 30$ см.

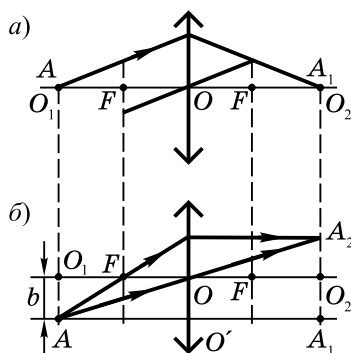


Рис. 259

Когда линзу перемещают перпендикулярно ее оси, то вместе с ней смещаются и главная оптическая ось, и фокус линзы. На рис. 259, б: O_1O_2 — новое положение главной оптической оси линзы, A_2 — новое изображение точки A на экране, A_1A_2 — смещение изображения. Из подобия $\triangle AOO'$ и $\triangle AA_1A_2$ получаем

$$AO'/AA_1 = OO'/A_1A_2,$$

где $AO = d = 30$ см,

$$AA_1 = AO + OA_1 = d + f = 90 \text{ см}, \quad OO' = b = 2 \text{ см}.$$

Из пропорции находим $A_1A_2 = AA_1 \cdot OO'/AO = 6$ см.

- 14.** Расстояние от освещенного предмета до экрана $L = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l = 20$ см. Найти фокусное расстояние линзы (см. рис. 260).

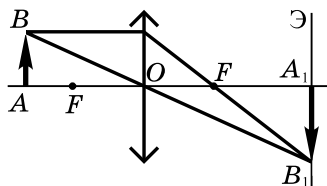


Рис. 260

Решение

Так как изображение получено на экране, то оно является действительным, следовательно, линза является собирающей; AB — предмет, A_1B_1 — его изображение, тогда $AO=d$ и $A_1O=f$, причем по условию задачи $f+d=L$. Поэтому $f(d)=L-d$. График этой зависимости — прямая линия. Кроме того, из формулы тонкой линзы

зы $f(d)=\frac{Fd}{d-F}$. График этой зависимости был построен

в задании 11. Графики обеих зависимостей представлены на рис. 261.

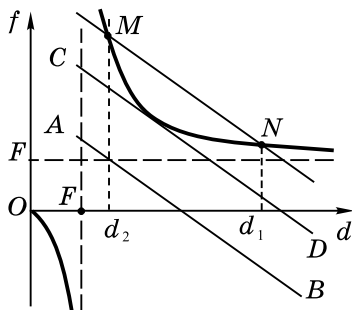


Рис. 261

Прямая $f(d)=L-d$ может не иметь ни одной общей точки с гиперболой (прямая AB), может иметь одну общую точку (прямая CD), две общие точки, соответствующие двум разным расстояниям от предмета до линзы (прямая MN).

Найдем эти точки из уравнения

$$Fd/(d-F)=L-d \Rightarrow d^2-Ld+LF=0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D=L^2-4LF=L^2(1-4F/L).$$

Уравнение будет иметь решения, если

$$D \geq 0 \Rightarrow L^2(1-4F/L) \geq 0 \Rightarrow 4F \leq L,$$

что в нашей задаче выполняется.

Решения запишутся в виде

$$d = \frac{1}{2} \left(L \pm \sqrt{L^2 (1 - 4F/L)} \right) = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4F/L} \right),$$

причем оба корня положительны. Разность этих корней $d_1 - d_2$, по условию задачи, равна l , отсюда

$$\begin{aligned} L(1 + \sqrt{1 - 4F/L})/2 - L(1 - \sqrt{1 - 4F/L})/2 &= l \Rightarrow \\ \Rightarrow L\sqrt{1 - 4F/L} = l \Rightarrow 1 - \frac{4F}{L} &= \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow \frac{4F}{L} = 1 - \frac{l^2}{L^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \frac{L^2 - l^2}{4L} = 24 \text{ см.} \end{aligned}$$

15. Расстояние между двумя точечными источниками света $L = 36$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной точке?

Решение

Так как линза расположена между источниками, то их действительные изображения совпадать не могут. Не могут совпадать и их мнимые изображения. Остается только одна возможность, когда изображение одного источника — действительное, другого — мнимое.

Пусть d_1 и d_2 — расстояния от источников до линзы. Предположим для определенности, что изображение первого источника — действительное, а изображение второго — мнимое, расстояния от изображений до линзы соответственно f_1 и f_2 , причем $f_1 > 0$, $f_2 < 0$. Применяя формулу линзы, выражаем $f_1 = d_1 F / (d_1 - F)$ и $f_2 = d_2 F / (d_2 - F)$.

По условию задачи

$$\begin{aligned} f_1 = -f_2 \Rightarrow f_1 &= d_1 F / (d_1 - F) = -d_2 F / (d_2 - F) \Rightarrow d_1 (F - d_2) = \\ &= d_2 (d_1 - F) \Rightarrow F(d_1 + d_2) = 2d_1 d_2. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $d_1 + d_2 = L$. После подстановки получаем систему

$$\begin{cases} 2d_1d_2 = FL, \\ d_1 + d_2 = L, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2d_1(L - d_1) = FL, \\ d_2 = L - d_1, \end{cases} \Rightarrow 2d_1^2 - 2Ld_1 + FL = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d_1)_{1,2} = \left(L \pm \sqrt{L^2 - 2FL} \right) / 2 = L \left(1 \pm \sqrt{1 - 2F/L} \right) / 2.$$

$$\begin{cases} (d_1)_1 = 30 \text{ см}, \\ (d_2)_1 = 6 \text{ см}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (d_1)_2 = 6 \text{ см}, \\ (d_2)_2 = 30 \text{ см}. \end{cases}$$

16. На экране с помощью тонкой линзы получили изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 2$. Предмет передвинули на 1 см. Для того чтобы получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение оказалось равным $\Gamma_2 = 4$. На какое расстояние пришлось передвинуть экран?

Решение

В обоих случаях изображения получаются на экране, следовательно, изображения — действительные, линза является собирающей. В первом случае по формуле линзы получаем: $1/F = 1/d_1 + 1/f_1$, где d_1 — расстояние от предмета до линзы, f_1 — расстояние от изображения до линзы, F — фокусное расстояние; $\Gamma_1 = |f_1/d_1| = f_1/d_1$.

Аналогично для второго случая получаем

$$1/F = 1/d_2 + 1/f_2 \text{ и } \Gamma_2 = |f_2/d_2| = f_2/d_2.$$

В задании 11 было показано, что при $d > F$ увеличение $\Gamma(d)$ является убывающей функцией (см. рис. 254), поэтому из условия $\Gamma_2 > \Gamma_1$ следует, что $d_2 < d_1$, следовательно, $d_1 - d_2 = 1$ см.

В задании 11 установлено, что при $d > F$ функция $f(d)$ (расстояние от изображения до линзы) является убывающей (см. рис. 257), поэтому $f_2 > f_1$. Расстояние, на которое необходимо сместить экран, $f_2 - f_1$.

Приравняв правые части выражений для $1/F$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} &= \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \Rightarrow \frac{f_2 - f_1}{f_2 f_1} = \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2 - f_1 &= \frac{f_2 f_1}{d_1 d_2} (d_1 - d_2) = (f_1 / d_1) (f_2 / d_2) (d_1 - d_2) = \\ &= \Gamma_1 \Gamma_2 (d_1 - d_2) = 8 \text{ см.}\end{aligned}$$

- 17.** Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $d_1=17,9$ см от линзы, а другой — на расстоянии $d_2=18,1$ см. Определить увеличение k изображения.

Решение

Оба конца предмета расположены на расстояниях $d > F$ от линзы, поэтому изображение всего предмета в собирающей линзе будет действительным. Так как предмет расположен вдоль главной оптической оси, то и его изображение будет получено вдоль этой оси. Изображения концов предмета находятся на расстояниях $f_1 = Fd_1 / (d_1 - F)$ и $f_2 = Fd_2 / (d_2 - F)$ от линзы, причем из-за убывания функции $f(d)$ при $d > F$ получаем, что $f_2 < f_1$. Размер предмета равен $(d_2 - d_1)$, а размер изображения составляет $(f_1 - f_2)$.

В данной задаче речь идет не о поперечном увеличении линзы, а о продольном. Очевидно, что оно равно

$$k = \frac{f_1 - f_2}{d_2 - d_1} = \left(\frac{Fd_1}{d_1 - F} - \frac{Fd_2}{d_2 - F} \right) \frac{1}{d_2 - d_1} = \frac{F^2}{(d_1 - F)(d_2 - F)} = 4.$$

- 18.** Стальной шарик свободно падает с высоты $h=0,8$ м на собирающую линзу и разбивает ее. В начальный момент времени расстояние от шарика до линзы равнялось расстоянию от линзы до действительного

изображения шарика. Сколько времени существовало мнимое изображение шарика?

Решение

Пусть F — фокусное расстояние линзы, тогда $1/F = 1/h + 1/f$. По условию задачи $h=f$, следовательно, $1/F = 2/h \Rightarrow F = h/2$ (шарик в начальный момент времени находился на двойном фокусном расстоянии). Мнимое изображение существует, когда шарик находится между фокусом и линзой. Свободное падение шарика (см. рис. 262) описывается формулой $x(t) = x_0 + v_0 t + gt^2/2 = gt^2/2$.

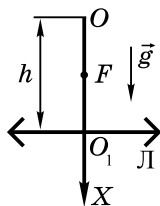


Рис. 262

В момент удара о линзу $x = h = \frac{gt_{\pi}^2}{2}$, где $t_{\pi} = \sqrt{2h/g}$ — время падения шарика. В точке F $x = h/2 = gt_F^2/2$, $t_F = \sqrt{h/g}$ — время движения на участке OF . Шарик находится между фокусом и линзой в течение

$$t_{\kappa} = t_{\pi} - t_F = \sqrt{2h/g} - \sqrt{h/g} = \sqrt{h/g}(\sqrt{2} - 1) = 0,1 \text{ с.}$$

19. На рис. 263 изображен отрезок AB , расположенный на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Построить изображение этого отрезка в линзе.

Решение

Так как точка A расположена за фокусом линзы, то ее изображение действительное. Для построения изобра-

жения точки A строим произвольный луч AC , проводим параллельно ему побочную оптическую ось MN , которая пересекает фокальную плоскость в точке K ; CK — ход луча AC после преломления в линзе; A_1 — изображение точки A . Аналогично можно построить действительные изображения всех точек, принадлежащих участку $[AF]$. При приближении к фокусу F изображение точек участка $[AF]$ устремляется к бесконечности (см. рис. 257). Таким образом, участок $[AF]$ изображается в линзе в виде луча A_1D .

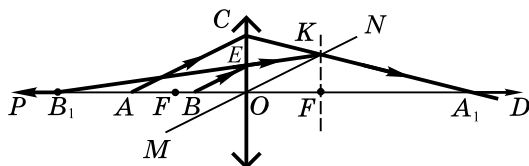


Рис. 263

Точка B расположена между линзой и фокусом, поэтому ее изображение будет мнимым. Проведем луч $BE \parallel MN$; KE — ход луча BE после преломления в линзе, B_1 — мнимое изображение точки B . Аналогично строятся мнимые изображения всех точек, принадлежащих участку $[BF]$. По мере приближения к фокусу изображения точек этого участка устремляются к бесконечности, и участок $[BF]$ изображается в виде луча B_1P .

Итак, отрезок AB изображается в линзе в виде двух лучей: действительного луча A_1D и мнимого B_1P .

20. Источник света находится на расстоянии $a=35$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1=20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $b=38$ см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2=12$ см (см. рис. 264). Где будет находиться изображение источника?

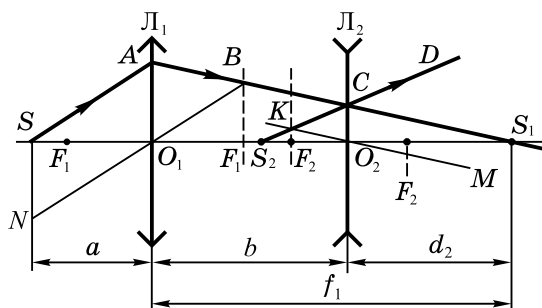


Рис. 265

Решение

Изображение источника S можно построить на основании методики, изложенной в предыдущих задачах. Рассмотрим ход луча SA . Проводим $NO_1 \parallel SA$, проходящий через оптический центр линзы L_1 . Он пересекает фокальную плоскость этой линзы в точке B . AB — ход луча SA после преломления в линзе L_1 . Этот луч попадает на рассеивающую линзу L_2 в точке C . Через оптический центр O_2 линзы L_2 проводим луч $O_2M \parallel BC$. Он пересекает фокальную плоскость линзы L_2 в точке K ; KC — продолжение луча после преломления в линзе, CD — его ход после линзы L_2 . Продолжение луча CD пересекает оптическую ось системы линз в точке S_2 ; S_2 — мнимое изображение источника S в системе, состоящей из собирающей и рассеивающей линз.

Найдем положение точки S_1 (изображение предмета в собирающей линзе). Пусть $S_1O_1 = f_1$ (расстояние от изображения S_1 до линзы L_1). По формуле тонкой линзы $1/F_1 = 1/a + 1/f_1 \Rightarrow f_1 = F_1 a / (a - F_1) = 46,6$ см.

Расстояние $O_2S_1 = f_1 - b = 46,6 - 38 = 8,6$ см $= d_2$, причем S_1 играет роль мнимого источника для рассеивающей линзы. Поэтому

$$1/F_2 = 1/d_2 + 1/f_2 \Rightarrow f_2 = F_2 d_2 / (d_2 - F_2).$$

Так как линза рассеивающая, а источник мнимый, то $F_2 = -12$ см, $d_2 = -8,6$ см. После подстановки находим, что $f_2 = 30,3$ см.

Итак, мнимое изображение источника будет находиться на расстоянии $f_2 = 30,3$ см влево от линзы L_2 .

21. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шара радиусом R , центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии $d > F$ от нее. На каком расстоянии от линзы нужно расположить источник света S на оптической оси системы, чтобы его изображение совпало с самим источником?

Решение

Рассмотрим случай, изображенный на рис. 265, где $d < R + F$. Если после преломления в линзе луч будет падать на зеркальный шар по направлению его радиуса, то, отразившись от шара, он пройдет тем же путем, но в обратном направлении. Изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадет с источником. Итак, в этом случае изображение источника света в линзе будет находиться в точке O . Применяя формулу тонкой линзы, получаем $1/F = 1/x + 1/f$, где $f = d$. Отсюда $x = Ff / (f - F) = Fd / (d - F)$.

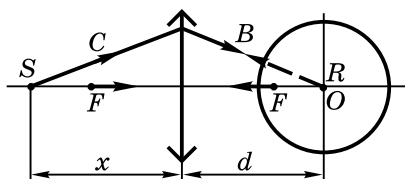


Рис. 265

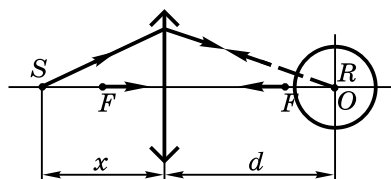


Рис. 266

Пусть $d > R + F$. На рис. 266 изображен случай, аналогичный разобранным выше, из которого следует, что

$x = Fd / (d - F)$. Однако при $d > R + F$ возможен и другой вариант.

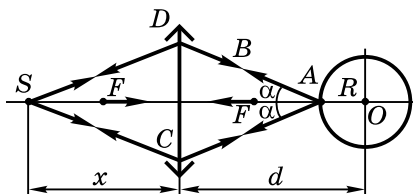


Рис. 267

В случае, представленном на рис. 267, изображение источника света S в линзе получается в точке A . В силу симметрии луч, который первоначально шел по пути SDA , после отражения от шара пойдет по пути ACS , а луч, который проходил путь SCA , отразившись от шара в точке A , пройдет путем ADS . Таким образом, в этом случае изображение источника света S в системе, состоящей из линзы и шара, совпадает с источником.

Изображение источника S в линзе будет находиться в точке A , если выполняется уравнение $1/F = 1/x + 1/f$, где $f = d - R$. Отсюда находим, что $x = Ff / (f - F) = F(d - R) / (d - R - F)$.

- 22.** При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 8$ см. Разрешающая способность пленки $\Delta = 10^{-2}$ мм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размером $l = 5$ см? При какой скорости самолета изображение не будет размытым, если время экспозиции $\tau = 10^{-3}$ с?

Решение

H — высота, на которой летит самолет, f — расстояние от пленки до объектива. По формуле линзы получаем $1/H + 1/f = 1/F$. Так как $f \ll H$, то

$1/H \ll 1/f \Rightarrow 1/f = 1/F \Rightarrow f = F$, т. е. изображение получается в фокальной плоскости. Расстояние между двумя соседними листьями можно взять равным l . На пленке это расстояние должно получиться не меньше Δ (см. рис. 268). Из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 получаем $\Delta/l = F/H \Rightarrow H = Fl/\Delta = 400$ м.

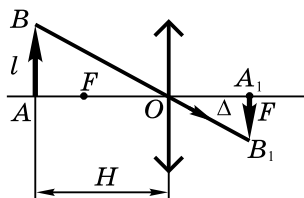


Рис. 268

Изображение считается неразмытым, если за время экспозиции оно смещается не больше чем на Δ . За время экспозиции смещение любой точки листьев равно $v\tau$, где v — скорость самолета, тогда и смещение изображения равно $\frac{F}{H}(v\tau)$. Из условия неразмытости изображения получаем неравенство

$$\frac{F}{H}v\tau \leq \Delta \Rightarrow v \leq \frac{H\Delta}{F\tau} = 100 \text{ м/с} = 360 \text{ км/ч.}$$

РАЗДЕЛ 13

ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

1. Основные свойства волновых процессов

Волной называют колебания, распространяющиеся в пространстве с течением времени. При распространении волны наблюдается периодичность колебаний во времени и пространстве, при этом происходит перемещение определенного состояния колеблющейся среды, но не перенос вещества.

Волны распространяются в пространстве с конечной скоростью. Электромагнитные волны распространяются в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

В поперечной волне колебания совершаются в направлении, перпендикулярном распространению волны. Электромагнитные волны поперечны.

В продольной волне колебания совершаются в направлении распространения волны.

Важнейшим свойством всех волн независимо от их природы является перенос энергии, поступающей от источника колебаний.

Длиной волны λ называется наименьшее расстояние между двумя точками волны, колеблющимися в одинаковых фазах.

Скорость распространения волны v , ее длина λ и частота ν связаны соотношением

$$v = \lambda \nu. \quad (13.1)$$

Поверхности, на которых совершаются колебания в одинаковых фазах, называются волновыми поверхно-

стями. Линия, перпендикулярная волновой поверхности, называется лучом. Луч указывает направление распространения волны, т. е. направление, в котором волна переносит энергию.

2. Уравнение плоской волны

Если волновая поверхность — плоскость, то говорят о плоской волне. Пусть плоская волна распространяется в направлении X , тогда ее уравнение записывается в виде:

$$s(x, t) = A \cos(\omega(t - x/v)), \quad (13.2)$$

где s — отклонение частиц в волне;

v — скорость волны;

ω — ее круговая частота;

A — амплитуда колебаний;

x — расстояние, пройденное волной от источника колебаний.

В формуле (13.2) $\omega(t - x/v)$ — фаза колебаний. Это выражение можно переписать в виде:

$$\omega t - \frac{\omega}{v} x = \omega t - \left(\frac{2\pi/T}{v}\right) x = \omega t - \frac{2\pi v}{v} x = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x = \omega t - kx,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — **волновое число**.

Уравнение плоской волны преобразуется как

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (13.3)$$

Если волновая поверхность — сфера, то волна называется **сферической**. На больших расстояниях от источника колебаний сферическую волну можно считать плоской.

3. Интерференция волн. Интерференция света

В ряде явлений можно наблюдать сложение нескольких волн. При этом выполняется **принцип суперпозиции**: результирующее колебание представляет собой

сумму колебаний, вызванных каждой волной в отдельности.

В некоторых случаях при сложении волн в пространстве образуется постоянное во времени распределение амплитуд результирующих колебаний. Это явление называется **интерференцией волн**. Постоянное во времени распределение амплитуд результирующих колебаний называется **интерференционной картиной**.

Интерференционная картина возникает только тогда, когда происходит сложение **когерентных волн**, т. е. волн, полученных от источников с одинаковыми частотами и имеющими постоянную разность фаз во времени.

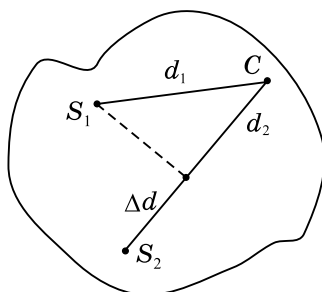


Рис. 269

Рассмотрим в качестве иллюстрации два когерентных источника волн S_1 и S_2 , у которых разность фаз $\Delta\varphi=0$. Расстояния от источников до точки C , в которой рассматривается сложение волн, d_1 и d_2 (см. рис. 269). Если в точку C волны приходят в одинаковых фазах, то они при сложении усилят друг друга, и в точке C будет наблюдаться **интерференционный максимум**. Для этого необходимо, чтобы разность хода волн $\Delta d=|d_1-d_2|$ была равна целому числу волн:

$$\Delta d=k\lambda, \quad (13.4)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$

Формула (13.4) называется условием интерференционных максимумов.

Если же разность хода равна нечетному числу полу-волн, то в точку C волны придут в противоположных фазах, что приведет к уменьшению амплитуды результирующих колебаний. Таким образом, условие **интерференционных минимумов** запишется в виде

$$\Delta d = (2k + 1)\lambda / 2, \quad (13.5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Если разность хода волн Δd принимает значения, отличные от тех, которые получены по формулам (13.4) и (13.5), то амплитуда колебаний равна некоторому промежуточному значению между минимальной и максимальной амплитудами.

Характерным признаком интерференции является перераспределение энергии в пространстве: в некоторые точки энергия может не поступать, а в интерференционных максимумах энергия колебаний больше суммы энергий, переносимой каждой волной.

Интерференцию можно наблюдать для волн любой природы, в том числе и для световых волн. В оптике трудно получить независимые когерентные источники света, так как обычные источники (не лазеры) испускают волны с быстро и случайно изменяющейся фазой. Поэтому для получения интерференционной картины свет от одного источника разделяют на два пучка, а затем производят их наложение друг на друга.

4. Дифракция волн и света. Дифракционная решетка

Отклонение от прямолинейного распространения, огибание волнами препятствий называется дифракцией. Дифракция волн наблюдается, когда длина волны становится сравнимой или больше размеров препятствий, встречающихся на пути распространения волны. Дифракцию можно наблюдать для волн любой природы, в том числе и световых.

Дифракция волн объясняется на основании принципа Гюйгенса — Френеля: каждая точка среды, до которой дошло волновое возмущение, сама становится источником вторичных волн, причем поверхность, касательная ко всем вторичным волнам (волновая поверхность), в любой момент времени представляет собой результат интерференции вторичных волн.

На явлении дифракции основано устройство оптического прибора — дифракционной решетки. Она представляет собой совокупность большого числа очень узких прозрачных щелей, разделенных непрозрачными промежутками. **Период решетки d** — это ширина прозрачной щели и непрозрачного промежутка.

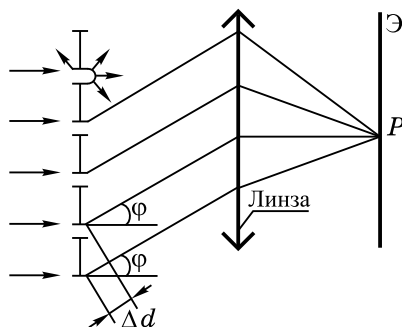


Рис. 270

Пусть на дифракционную решетку падает плоская волна длиной λ . Тогда каждая щель становится источником вторичных сферических волн, распространяющихся по всем направлениям. В точку P на экране \mathcal{E} при помощи линзы собираются все вторичные волны, распространяющиеся параллельно под углом φ к первоначальному направлению (см. рис. 270). В точке P будет наблюдаться интерференция этих волн. Интерференционные максимумы будут в том случае, если разность хода $\Delta d = d \sin \varphi$ равна целому числу волн:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad (13.6)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$

При $k=0$ и $\varphi=0$ в центре экрана располагается **центральный максимум**; при $k=1$ симметрично относительно центрального максимума находятся два максимума **первого порядка**; при $k=2$ — два максимума **второго порядка** и т. д. Следует отметить, что при заданном значении длины световой волны λ и периоде дифракционной решетки d порядок максимума может принимать ограниченные значения. Действительно, из формулы (13.6) следует, что $\sin \varphi = k\lambda/d \leq 1 \Rightarrow k \leq d/\lambda$.

При падении белого света на дифракционную решетку условие (13.6) для разных длин волн будет наблюдаться в различных точках экрана. Поэтому дифракционная решетка раскладывает белый свет в спектр.

5. Дисперсия и поляризация света

Волновые свойства света подтверждаются также явлениями дисперсии и поляризации.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от длины волны света.

Установлено, что свет — это поперечная электромагнитная волна. В естественном свете колебания вектора напряженности электрического поля \vec{E} (как и вектора индукции магнитного поля) происходят во всевозможных направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. В **поляризованной световой волне** колебания вектора \vec{E} происходят в определенной плоскости — **плоскости поляризации**.

6. Квантовые свойства света

При распространении света проявляются его волновые свойства. При испускании и поглощении света проявляются его корпускулярные свойства. Оказалось, что свет (как любое другое электромагнитное излучение) испускается и поглощается определенными порциями — **квантами**.

Энергия каждой порции

$$W = h\nu, \quad (13.7)$$

где ν — частота излучения, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Эта порция света обладает свойствами частицы с массой покоя, равной нулю, ее называют **фотоном**.

Согласно теории относительности масса фотона

$$m = W / c^2 = h\nu / c^2, \quad (13.8)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Как и любая движущаяся частица, фотон обладает импульсом

$$p = mc = (h\nu / c^2)c = h\nu / c = W / c = h / \lambda. \quad (13.9)$$

Вектор импульса фотона направлен по световому лучу.

7. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна

Корпускулярные свойства света позволили объяснить явление фотоэффекта. **Фотоэффектом** называют вырывание электронов из вещества под действием света. При изучении фотоэффекта были экспериментально установлены **два закона**:

1. Количество электронов, вырываемых светом с поверхности металла за 1 с, пропорционально поглощаемой за это время энергии световой волны (световому потоку).

2. Максимальная кинетическая энергия вырванных светом электронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от его интенсивности.

Фотоэффект изучают в замкнутой электрической цепи, содержащей металлическую пластинку К (катод) — источник фотоэлектронов и А (анод), на который подают положительный относительно катода потенциал (см. рис. 271). График зависимости тока от напряжения между катодом и анодом при различных световых потоках Φ приведен на рис. 272 ($\Phi_3 > \Phi_2 > \Phi_1$).

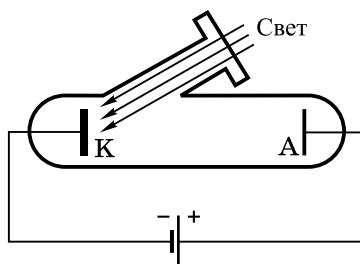


Рис. 271

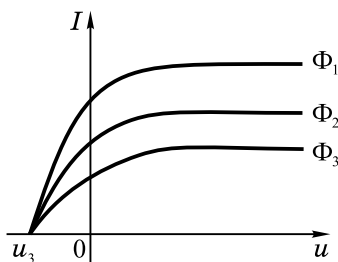


Рис. 272

При $u=0$ в цепи протекает некоторый ток, так как вырванные под действием света из катода фотоэлектроны могут иметь скорости, направленные в сторону анода. С увеличением напряжения число достигших анода фотоэлектронов увеличивается, соответственно возрастает и ток в цепи. Однако при заданном световом потоке из катода вырывается вполне определенное количество электронов, поэтому, когда все они достигают анода, ток больше не увеличивается (достигает насыщения). Для прекращения фотоэффекта на анод и катод подают **задерживающую разность потенциалов** $u_3 < 0$, так что

$$m_e v^2 / 2 = |e| |u_3|, \quad (13.10)$$

где $m_e v^2 / 2$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, $|e|$ — модуль заряда электрона.

Для объяснения фотоэффекта Эйнштейн предложил уравнение

$$h\nu = A_{\text{в}} + m_e v^2 / 2, \quad (13.11)$$

которое показывает, что энергия поглощенного металлом фотона $h\nu$ идет на совершение электроном работы выхода $A_{\text{в}}$ и на сообщение электрону кинетической энергии $m_e v^2 / 2$.

Если $h\nu < A_{\text{в}}$, то фотоэффекта не будет. Фотоэффект наблюдается при условии $h\nu \geq A_{\text{в}}$.

Наименьшая частота света для данного металла, при которой начинается фотоэффект, называется **красной границей фотоэффекта**. Ее находят из условия

$$h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{в}} \Rightarrow \nu_{\text{кр}} = A_{\text{в}} / h. \quad (13.12)$$

Соответствующая длина волны $\lambda_{\text{кр}} = c / \nu_{\text{кр}} = ch / A_{\text{в}}$. Фотоэффект наблюдается для частот $\nu \geq \nu_{\text{кр}}$ или для длин волн $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 15$ см и испускает импульсы с частотой $\nu = 4$ кГц. Длительность каждого импульса $\tau = 2$ мкс. Какова наибольшая дальность обнаружения цели?

Р е ш е н и е

Зависимость напряженности поля E электромагнитного излучения от времени приведена на рис. 273.

Радиолокатор излучает электромагнитные волны с частотой

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{15 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 2 \cdot 10^9 \text{ Гц}$$

и периодом

$$T = 1 / f = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс.}$$

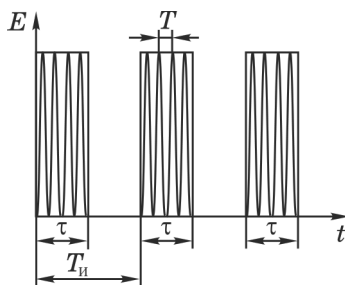


Рис. 273

Число колебаний в одном импульсе

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{2 \text{ мкс}}{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ мкс}} = 4000.$$

Период следования импульсов

$$T_{\text{и}} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4 \cdot 10^3 \text{ Гц}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 250 \text{ мкс}.$$

Пусть цель находится на расстоянии L от радиолокатора. Электромагнитный импульс проходит до цели и обратно расстояние $2L$, распространяясь со скоростью света c , затрачивая на это время $t = 2L/c$. При этом обратно на радиолокатор электромагнитный импульс должен вернуться до того, как будет излучен следующий импульс, т. е.

$$t \leq T_{\text{и}} \Rightarrow 2L/c \leq T_{\text{и}} \Rightarrow L \leq cT_{\text{и}}/2 = 37,5 \text{ км}.$$

2. Самолет летит горизонтально на высоте $H=4$ км со сверхзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через $t=10$ с после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость самолета, если скорость звука $v_0=340$ м/с (см. рис. 274).

Решение

B — точка, в которой находится наблюдатель, A — точка, в которой находится самолет в момент време-

ни t . Из каждой точки, которую пролетает самолет, распространяется сферическая звуковая волна. Если сложить все звуковые волны для момента, когда самолет находится в точке A , то получится волновая поверхность в виде конуса. По мере движения самолета эта поверхность (фронт волны) распространяется со скоростью звука v_0 . Это и есть **ударная звуковая волна**. На рис. 274 $OD \perp AB$, причем $OD = v_0 t$, $AO = vt$, $OB = H$ и $BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}$; $\angle BOD = \angle BAO$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому прямоугольные треугольники BOD и BOA подобны. Из подобия следует, что

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{vt}{v_0 t} = \frac{H}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{H v_0}{\sqrt{H^2 - (v_0 t)^2}} = 648 \text{ м/с.}$$

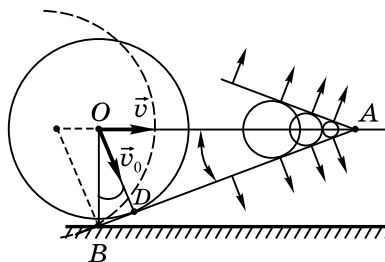


Рис. 274

3. Колебательный контур приемника состоит из катушки и конденсатора с площадью пластин $S = 800 \text{ см}^2$ и расстоянием $d = 1 \text{ мм}$ между ними; пространство между пластинами заполнено слюдой (диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 7$). На какую длину волны настроен контур, если известно отношение максимального напряжения на конденсаторе к максимальному

току в катушке $n=100$ В/А? Активным сопротивлением можно пренебречь.

Решение

Частота свободных колебаний в контуре $\nu_0 = 1/\sqrt{LC}$, где $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$ — емкость конденсатора, а L — индуктивность катушки, которую можно определить из условия сохранения энергии в контуре. Когда напряжение на конденсаторе максимально, т. е. $u = u_m$, вся энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора: $W_{\text{э}} = Cu_m^2/2$.

Если ток через катушку максимален, т. е. $I = I_m$, то вся энергия контура сосредоточена в магнитном поле катушки: $W_{\text{м}} = LI_m^2/2$.

По закону сохранения энергии

$$W_{\text{э}} = W_{\text{м}} \Rightarrow Cu_m^2/2 = LI_m^2/2 \Rightarrow L = C(u_m/I_m)^2 = Cn^2.$$

Таким образом, собственная частота контура

$$\nu_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{C^2 n^2} = 1/(2\pi Cn).$$

Контур настроен на длину волны λ электромагнитного излучения, частота которого $\nu = \nu_0$ (условие резонанса). Так как $\nu = c/\lambda$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, то получаем

$$c/\lambda = 1/(2\pi Cn) \Rightarrow \lambda = 2\pi c C n = 2\pi c n \epsilon \epsilon_0 S/d = 933 \text{ м.}$$

4. Наблюдатель удаляется со скоростью v от источника звука с частотой ν . Какой частоты звук он будет воспринимать, если скорость звука ν_0 ?

Решение

Пусть в некоторый момент времени наблюдатель принимает звуковую волну в определенной фазе колебаний (например, ее максимум). Если бы наблюдатель был неподвижен, то следующий максимум колебаний он принял бы через время, равное периоду звуковых колеба-

ний T . Но так как наблюдатель удаляется от источника, то он принимает следующий максимум колебаний через время $\tau > T$ на промежуток времени, необходимый для того, чтобы волна прошла расстояние $v\tau$, на которое смещается наблюдатель. Этот промежуток времени равен $v\tau / v_0$, где v_0 — скорость звука. Итак,

$$\tau - T = v\tau / v_0 \Rightarrow \tau = T + v\tau / v_0. \quad (1)$$

Таким образом, период звуковых колебаний, воспринимаемых наблюдателем, равен τ , а их частота ν' , причем $\tau = 1 / \nu'$. Период излучаемых источником колебаний $T = 1 / \nu$. Подставляя это в формулу (1), получаем

$$\frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'} \frac{v}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right).$$

В итоге
$$\nu' = \nu(1 - v / v_0). \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что наблюдатель принимает звук более низкой частоты. Если наблюдатель движется к источнику, то он будет принимать звук более высокой частоты. Рассмотренное выше справедливо и в том случае, когда неподвижен наблюдатель, а движется источник.

Это явление называется **эффектом Доплера**. Эффект Доплера можно наблюдать и для волн другой физической природы, например для волн оптического диапазона.

5. Вдоль оси X распространяются в противоположных направлениях две плоские волны с одинаковой частотой ω и амплитудой A . Что получится в результате сложения этих волн?

Решение

Уравнение одной из волн можно записать в виде

$$s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

тогда уравнение волны, распространяющейся навстречу:

$$s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx),$$

где $k = 2\pi / \lambda$ — волновое число. В результате сложения получаем

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_1 + s_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = \\ &= A (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{(\omega t - kx) + (\omega t + kx)}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega t - kx) - (\omega t + kx)}{2}\right) = \\ &= 2A \cos \omega t \cos kx. \end{aligned}$$

Как видно, после сложения образуется волна $s(x, t)$ с амплитудой колебаний, равной $2A$. Отметим также, что $\cos kx = 0$ при

$$kx = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n + 1),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ ($n < 0$ не подходит по смыслу задачи).

Следовательно, в точках волны $x_n = \frac{\pi}{2k}(2n + 1)$ отклонение $s(x, t) = 0$. Подставляя $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получаем $x_n = \frac{\lambda}{4}(2n + 1)$.

Расстояние между любыми двумя соседними точками волны, в которых отклонение обращается в нуль,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{4}(2(n+1) + 1) - \frac{\lambda}{4}(2n + 1) = \frac{\lambda}{2}.$$

Волну, задаваемую уравнением

$$s(x, t) = 2A \cos \omega t \cos kx,$$

называют **стоячей волной**, а ее неподвижные точки x_n называют **узлами волны**. Все точки волны, расположенные между двумя узлами, колеблются в одинаковых фазах; при переходе через узел фаза колебаний точек изменяется на π . Стоячая волна не переносит энергию.

На рис. 275 представлена стоячая волна для трех различных моментов времени t_1 , t_2 , t_3 .

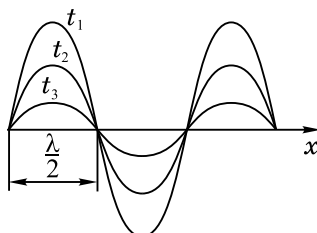


Рис. 275

6. Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H=3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала. Определить частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1=3^\circ$ и $\alpha_2=6^\circ$.

Решение

Так как спутник находится на большом расстоянии от приемника, то принимаемый от него радиосигнал можно считать плоской волной (BC — волновая поверхность) (см. рис. 276). В приемник P попадает луч 1, идущий непосредственно от спутника, и луч 2, отразившийся от поверхности озера, причем в точке C выполняется закон отражения. Поэтому $\angle ACP = \angle MCK = \alpha$ (α — угол возвышения спутника над горизонтом).

Проводим $PF \parallel AC$, тогда $\angle CPF = \angle ACP = \alpha$ и $\angle BPF = \angle MCK = \alpha$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Итак, $\angle BPC = 2\alpha$.

Разность хода лучей равна $CP - BP$. Из $\triangle ACP$ $CP = H / \sin \alpha$, а из $\triangle BCP$ $BP = CP \cos 2\alpha = (H / \sin \alpha) \cos 2\alpha$.

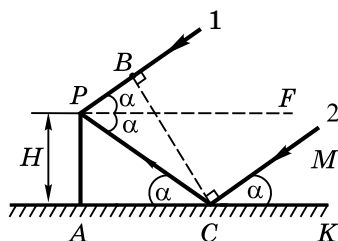


Рис. 276

Следовательно,

$$\begin{aligned} CP - BP &= \frac{H}{\sin \alpha} - \frac{H}{\sin \alpha} \cos 2\alpha = \frac{H}{\sin \alpha} (1 - \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} \cdot 2\sin^2 \alpha = 2H \sin \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку угол α мал, $\sin \alpha = \alpha$, тогда $CP - BP = 2H\alpha$.

Максимум интенсивности принимаемого сигнала наблюдается, если разность хода равна целому числу волны, следовательно, для углов α_1 и α_2 получаем уравнения: $2H\alpha_1 = k\lambda$, $2H\alpha_2 = (k+1)\lambda$, где k — целое число. После вычитания первого уравнения из второго получим

$$(k+1)\lambda - k\lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow \lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Частота радиосигнала

$$\nu = c / \lambda = c / (2H(\alpha_1 - \alpha_2)),$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, $\alpha_1 = 3^\circ = \pi / 60$ рад, а $\alpha_2 = 6^\circ = \pi / 30$ рад. После подстановки получим $\nu = 10^9$ Гц.

7. Два точечных когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии d друг от друга. На расстоянии $L \gg d$ от источников помещен экран. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана, если источники излучают свет с длиной волны λ (см. рис. 277).

Так как $(h+d/2)^2/L \ll 1$, то

$$S_2A = L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h+d/2}{L} \right)^2 \right) = L + \frac{1}{2} \frac{(h+d/2)^2}{L}.$$

Следовательно, разность хода

$$\begin{aligned} S_2A - S_1A &= \frac{1}{2} \frac{(h+d/2)^2}{L} - \frac{1}{2} \frac{(h-d/2)^2}{L} = \\ &= \frac{(h+d/2)^2 - (h-d/2)^2}{2L} = \frac{hd}{L}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как A — точка интерференционного максимума, то $S_2A - S_1A = k\lambda$, где $k=0, 1, 2$. Следовательно, $k\lambda = hd/L$. Отсюда получаем, что интерференционные максимумы располагаются на экране симметрично относительно линии O_1O на расстояниях $h = h_k = k\lambda L/d$. Максимум, соответствующий целому числу k , называется **максимумом порядка k** . Максимум порядка $(k+1)$ будет находиться на расстоянии $h_{k+1} = (k+1)L/d$ от середины экрана. Расстояние между максимумами

$$h_{k+1} - h_k = (k+1)\lambda L/d - k\lambda L/d = \lambda L/d.$$

Из последней формулы следует, что расстояние между максимумами тем больше, чем больше отношение L/d .

8. Два плоских зеркала образуют между собой угол, близкий к 180° . На равных расстояниях l от зеркал расположен источник света S . Определить расстояние между соседними интерференционными полосами на экране, находящимися на расстоянии $L \gg l$ от линии пересечения зеркал. Длина световой волны λ . Непрозрачный экран \mathcal{E}_1 препятствует прямому попаданию света на экран \mathcal{E} (см. рис. 278). Угол α задан.

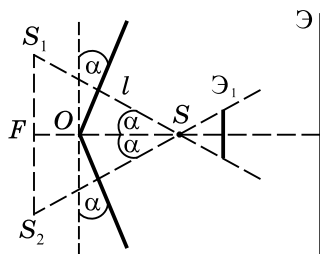


Рис. 278

Решение

После отражение света от плоских зеркал образуются когерентные волны, которые на экране Э создают интерференционную картину. Можно считать, что источниками этих когерентных волн являются мнимые изображения S_1 и S_2 источника S в плоских зеркалах. В равнобедренном $\Delta S_1 S_2 S$:

$$S_1 S = S_2 S = 2l \text{ и } \angle S_1 S O = \angle S_2 S O = \alpha,$$

причем угол α мал, так как угол между зеркалами близок к 180° . Расстояние между мнимыми источниками

$$d = S_1 S_2 = 2S_1 F = 2S_1 S \sin \alpha = 2 \cdot 2l \sin \alpha = 4l\alpha.$$

Так как $L \gg l$, то можно считать, что расстояние от источников S_1 и S_2 до экрана Э равно L . Тогда, используя результаты задания 7, найдем, что расстояние между интерференционными полосами равно $\lambda L / d = \lambda L / (4\alpha l)$.

9. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана пополам вдоль главной оптической оси, и половинки раздвинуты на расстояние $L = 0,5$ мм. Оценить число интерференционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $b = 60$ см, если перед линзой находится точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм

также считать, что интерферирующие пучки созданы источниками S_1 и S_2 .

Пусть f — расстояние от линз до изображений S_1 и S_2 . По формуле тонкой линзы

$$1/F = 1/a + 1/f \Rightarrow f = Fa/(a - F) = 30 \text{ см.}$$

Расстояние между изображениями S_1 и S_2 обозначим через d , тогда из подобия ΔSO_1O_2 и ΔSS_1S_2 получим

$$\frac{O_1O_2}{S_1S_2} = \frac{SO}{SN} \Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{a}{a+f} \Rightarrow d = \frac{l(a+f)}{a} = l \left(1 + \frac{f}{a} \right) = 0,15 \text{ см.}$$

Расстояние от S_1 и S_2 до экрана Э: $L = b - f = 30$ см. Следовательно, используя результаты задания 7, можно определить расстояние между интерференционными максимумами:

$$\lambda L / d = 30\lambda / 0,15 = 200\lambda = 10^{-4} \text{ см} = 10^{-2} \text{ см.}$$

Размер AB интерференционной картины на экране можно найти из подобия ΔSO_1O_2 и ΔSAB :

$$\frac{O_1O_2}{AB} = \frac{SO}{SK} \Rightarrow AB = \frac{O_1O_2 \cdot SK}{SO} = \frac{l(a+b)}{a} = l \left(1 + \frac{b}{a} \right) = 0,25 \text{ см.}$$

Число интерференционных полос на экране равно размеру интерференционной картины AB , деленной на расстояние между максимумами, т. е.

$$N = 0,25 \text{ см} / 10^{-2} \text{ см} = 25.$$

10. Точечный источник света S расположен в фокусе линзы, за которой находится бипризма с углом $\alpha = 0,01$ рад (см. рис. 280). На каком расстоянии L от бипризмы можно наблюдать наибольшее число интерференционных полос? Сколько полос в этом случае можно увидеть на экране? Чему равна ширина полос? Коэффициент преломления стекла бипризмы $n = 1,5$, длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм, диаметр линзы $D = 6$ см.

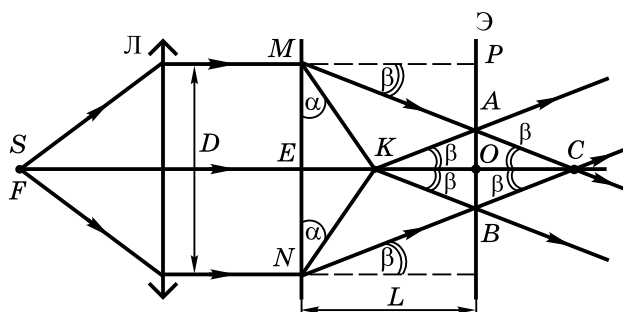


Рис. 280

Решение

Поскольку источник света находится в фокусе линзы, на бипризму падает параллельный пучок света. Свойства бипризмы с малым углом α были рассмотрены в задании 8 раздела 12. Было показано, что параллельный пучок света разбивается бипризмой на два параллельных пучка, которые отклонены от первоначального направления на угол $\beta = (n-1)\alpha$. Наибольшее число интерференционных полос можно наблюдать в том месте, где самая большая площадь пересечения интерферирующих пучков (как видно из построения, это будет между точками А и В). На экране Э, проходящем через точки А и В, можно наблюдать интерференционную картину.

$$\text{Из } \triangle CEM: CE = ME / (\operatorname{tg} \beta) = D / (2 \operatorname{tg} \beta).$$

Отметим, что $CE = KE + CK = CK$, так как $KE \ll CK$. Четырехугольник $ACBK$ — ромб, поэтому

$$\begin{aligned} CO = KO &\Rightarrow CK = 2KO = CE \Rightarrow \\ &\Rightarrow KO = CK / 2 = CE / 2 = D / (4 \operatorname{tg} \beta) = L. \end{aligned}$$

Учитывая, что угол β мал и $\operatorname{tg} \beta = \beta$, находим

$$L = D / (4\beta) = D / (4\alpha(n-1)) = 300 \text{ см} = 3 \text{ м}.$$

Пренебрегая KE , получим

$$AO = ME/2 \Rightarrow AB = MN/2 = D/2 = 3 \text{ см}.$$

Это и есть размер интерференционной картины. При этом максимальная разность хода лучей двух пучков равна $MA - KA$. Выразим эту разность.

Из $\triangle APM$: $MA = L / \cos \beta$.

Из $\triangle KEM$: $KE = (D / 2) \operatorname{tg} \alpha$; $KO = EO - KE = L - (D / 2) \operatorname{tg} \alpha$.

Из $\triangle AOK$: $KA = KO / \cos \beta = (L - (D / 2) \operatorname{tg} \alpha) / \cos \beta$.

Итак,

$$\begin{aligned} MA - KA &= \frac{L}{\cos \beta} - \frac{L - (D/2) \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \frac{(D/2) \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} = \\ &= \frac{D \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \beta} = \frac{D \alpha}{2} = 0,03 \text{ см.} \end{aligned}$$

(При малых углах α и β $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$, $\cos \beta = 1$.)

Разность хода, соответствующая двум соседним максимумам, равна длине волны λ . Таким образом, число интерференционных полос, образующихся на экране,

$$N = \frac{MA - KA}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \text{ м}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 6 \cdot 10^2.$$

Так как вся интерференционная картина занимает 3 см, то ширина одной полосы

$$3 \text{ см} / (6 \cdot 10^2) = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ см} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 50 \text{ мкм.}$$

11. От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O , где наблюдается интерференция, не наступает потемнение. При этом расстояние между A и B $d = 2$ мм. Расстояние между источником и экраном $L = 9$ м. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы в точке O_1 возникло потемнение (см. рис. 281)?

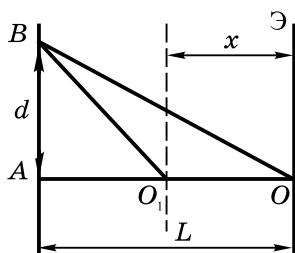


Рис. 281

Решение

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникает при условии, что разность хода волн от источников B и A равна половине длины волны, т. е. $BO - AO = \lambda/2$ или

$$\begin{aligned} \sqrt{L^2 + d^2} - L &= \lambda/2 \Rightarrow \sqrt{L^2(1 + d^2/L^2)} - L = \lambda/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L\left(\sqrt{1 + (d/L)^2} - 1\right) = \lambda/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что при $|x| \ll 1$ $\sqrt{1+x} = 1 + x/2$.

В нашей задаче $d/L \ll 1$, поэтому

$$\sqrt{1 + (d/L)^2} = 1 + (d/L)^2/2,$$

и, следовательно, уравнение (1) приводится к виду:

$$d^2/2L = \lambda/2 \Rightarrow d^2 = L\lambda.$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние x , то минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода $3\lambda/2$, т. е. $BO_1 - AO_1 = 3\lambda/2$ или $\sqrt{(L-x)^2 + d^2} - (L-x) = 3\lambda/2$. Следовательно,

$$(L-x)\left(\sqrt{1 + (d/(L-x))^2} - 1\right) = 3\lambda/2.$$

Учитывая, что и в этом случае $d / (L - x) \ll 1$, приходим к уравнению

$$d^2 / (2(L - x)) = 3\lambda / 2 \Rightarrow d^2 = 3(L - x)\lambda.$$

Приравнявая выражения для d^2 , получаем

$$L\lambda = 3(L - x)\lambda \Rightarrow x = 2L/3 = 6 \text{ м.}$$

- 12.** Период дифракционной решетки $d = 4$ мкм. Дифракционная картина наблюдается с помощью линзы Л с фокусным расстоянием $F = 40$ см. Определить длину λ световой волны падающего нормально на решетку света, если первый максимум получается на расстоянии $b = 5$ см от центрального (см. рис. 282).

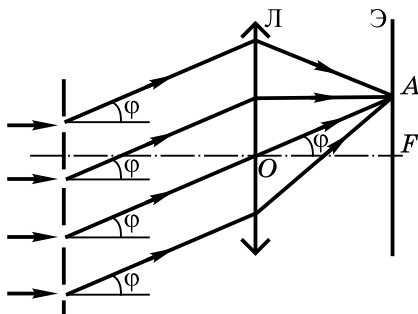


Рис. 282

Решение

Пусть направление на первый максимум характеризуется углом φ , тогда по формуле дифракционной решетки $d \sin \varphi = k\lambda = \lambda$, так как $k = 1$.

Из $\triangle OAF$: $\operatorname{tg} \varphi = AF / OF = b / F$. При малых φ $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi = b / F$, поэтому $\lambda = db / F = 0,5$ мкм.

- 13.** Дифракционная решетка содержит 400 штрихов на 1 мм. Нормально на решетку падает монохроматический красный свет с длиной волны $\lambda = 650$ нм. Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего

максимумов дает эта решетка? Каков максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Решение

На 1 м решетки приходится $N = 400 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^5$ штрихов. Период дифракционной решетки $d = 1 / N = 2,5 \cdot 10^{-6}$ м. Из формулы дифракционной решетки $d \sin \varphi = k\lambda$ при $k=1$ находим угол φ_1 , под которым виден первый максимум: $\sin \varphi_1 = \lambda/d = 0,26 \Rightarrow \varphi_1 = 15^\circ$.

В пункте 4 было показано, что при помощи дифракционной решетки можно наблюдать максимумы порядка $k \leq d/\lambda = 3,8$. Учитывая, что k — целое число, получаем $k_{\max} = 3$. Итак, данная дифракционная решетка будет давать центральный максимум, соответствующий $k=0$, и по два симметрично расположенных максимума первого, второго и третьего порядков. Всего получаем 7 максимумов.

Максимальный угол отклонения лучей соответствует максимуму третьего порядка:

$$d \sin \varphi_{\max} = 3\lambda \Rightarrow \sin \varphi_{\max} = 3\lambda/d = 0,78 \Rightarrow \varphi_{\max} = 51,3^\circ.$$

14. Красная граница фотоэффекта у лития $\lambda_{\text{кр}} = 5,2 \cdot 10^{-7}$ м.

Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлементу, чтобы задержать электроны, излучаемые литием под действием ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м?

Решение

По заданной красной границе фотоэффекта легко определить работу выхода лития

$$h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{в}} \Rightarrow hc/\lambda_{\text{кр}} = A_{\text{в}}. \quad (1)$$

В случае когда литий освещается ультрафиолетовым светом, кванты которого обладают большей энерги-

ей, вырвавшиеся фотоэлектроны обладают скоростью v , а значит и кинетической энергией, равной $m_e v^2 / 2$, где m_e — масса электрона.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде

$$hc / \lambda = A_{\text{в}} + m_e v^2 / 2. \quad (2)$$

Для того чтобы задержать электроны, прикладывают задерживающую разность потенциалов u_3 , причем

$$m_e v^2 / 2 = |e| |u_3|, \quad (3)$$

где $|e|$ — модуль заряда электрона.

После подстановки значений работы выхода из (1) и максимальной кинетической энергии из (3) в уравнение (2) получим

$$hc / \lambda = hc / \lambda_{\text{кр}} + |e| |u_3| \Rightarrow |u_3| = hc (\lambda_{\text{кр}} - \lambda) / (|e| \lambda \lambda_{\text{кр}}) = 3,8 \text{ В.}$$

15. На рис. 283 представлена вольтамперная характеристика вакуумного фотоэлемента. Катод освещается светом с длиной волны $\lambda = 3,3 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти количество электронов N , вырываемых светом в единицу времени, а также работу выхода из катода.

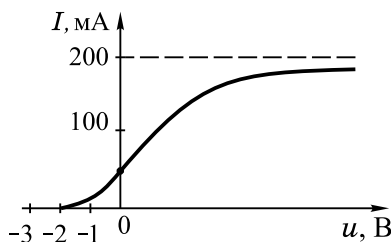


Рис. 283

Решение

Как следует из графика, ток насыщения $I_{\text{н}} = 200$ мА и он соответствует тому, что все N электронов, вырываемые из катода за $\Delta t = 1$ с, достигают анода. Заряд всех

электронов $q = N|e|$, где $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона.

Тогда $I_n = q/\Delta t = N|e| \Rightarrow N = I_n/|e| = 1,25 \cdot 10^{18}$.

Из рисунка также следует, что фототок прекращается при $u = -2$ В, следовательно, это и есть задерживающая разность потенциалов, которая связана с максимальной кинетической энергией электрона равенством $m_e v^2/2 = |e||u_3|$. Из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = m_e v^2/2 + A_b \Rightarrow hc/\nu = |e||u_3| \Rightarrow \\ \Rightarrow A_b = hc/\lambda - |e||u_3| = 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,75 \text{ эВ.}$$

16. Излучение аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром $d = 0,1$ мм. Работа выхода фотокатода $A_b = 2$ эВ. На плоский анод, расположенный на расстоянии $L = 30$ мм от катода, подано ускоряющее напряжение $u = 4$ кВ. Найти диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод A расположен параллельно поверхности катода K .

Решение

Используя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, можно определить v_0 — скорость фотоэлектронов, вылетевших из катода:

$$hc/\lambda = A_b + m_e v_0^2/2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2(hc/\lambda - A_b)/m_e},$$

причем вектор скорости электрона \vec{v}_0 направлен произвольно в пространстве (см. рис. 284).

Между анодом и катодом существует однородное электрическое поле с напряженностью $E = u/L$, направленное от анода к катоду. Это поле действует на электрон с силой, равной по модулю $|e|E$ и направленной в сторону, противоположную вектору \vec{E} ($|e|$ — модуль

заряда электрона). Введем оси координат X и Y , направленные как показано на рис. 285. В направлении оси X электрон приобретает постоянное ускорение $a_x = |e|E/m_e$ (m_e — масса электрона) и совершает равноускоренное движение.

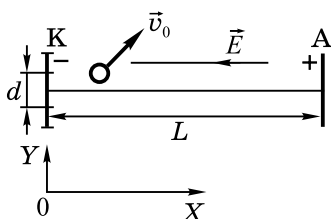


Рис. 284

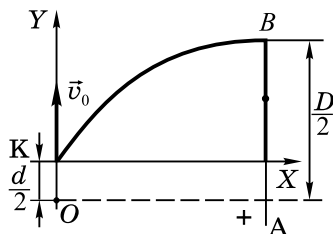


Рис. 285

В направлении оси Y на электрон не действуют силы, его ускорение в этом направлении равно нулю, а движение является прямолинейным равномерным.

Диаметр пятна на аноде определяется электронами, вылетевшими из крайних точек катода. Кроме того, диаметр пятна тем больше, чем больше смещение электронов в направлении оси Y . В свою очередь это смещение максимально, когда проекция скорости электрона на ось Y максимальна и когда время пролета электрона максимально. Это соответствует тому, что скорость электронов направлена вдоль оси Y (см. рис. 285).

Поместив начало координат в центре катода, запишем уравнения движения электрона по осям координат:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2 / 2 = |e|Et^2 / (2m_e); \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t = d / 2 + v_{0y}t. \end{aligned}$$

При попадании электрона на анод

$$x(t) = L = |e|Et_n^2 / (2m_e).$$

Отсюда следует, что $t_n = \sqrt{2m_e L / (|e|E)}$, где t_n — время пролета. В точке B , в которой электрон попадает на анод, $y_B = d / 2 + v_{0y}t_n$.

Диаметр пятна на аноде

$$D = 2y_B = d + 2v_0 t_n = \\ = d + 2 \cdot \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A_B)}{m_e}} \sqrt{\frac{2m_e L}{|e|E}} = d + 4L \cdot \sqrt{\frac{hc/\lambda - A_B}{|e|u}}.$$

- 17.** Мощность точечного источника монохроматического света $P_0 = 10$ Вт. Длина волны $\lambda = 500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток $n = 60$ фотонов в секунду? Диаметр зрачка $d = 0,5$ см.

Решение

За промежуток времени Δt точечный источник излучает энергию $P_0 \Delta t$, причем в любой момент времени эта энергия распределяется равномерно по поверхности сферы радиусом R . На единицу поверхности приходится энергия излучения $P_0 \Delta t / (4\pi R^2)$, и, следовательно, в зрачок, находящийся на расстоянии R , попадает энергия $P_0 \Delta t S / (4\pi R^2)$, где $S = \pi d^2 / 4$. Пусть за время Δt в зрачок попадает N фотонов, тогда световую энергию можно выразить как $Nh\nu = Nhc / \lambda$. Приравнивая значения энергий, получаем

$$\frac{P_0 \Delta t}{4\pi R^2} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = N h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{P_0}{16R^2} d^2 = \frac{N}{\Delta t} h \frac{c}{\lambda}.$$

Но $\frac{N}{\Delta t} = n$, поэтому

$$\frac{P_0}{16R^2} d^2 = n h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow R = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{n h c}} = 10^6 \text{ м} = 10^3 \text{ км}.$$

- 18.** Свет от солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1 \text{ м}^2$ под углом $\alpha = 60^\circ$. Найти силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощ-

ность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 перпендикулярной к излучению земной поверхности, $P = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

Решение

Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, причем их скорость остается равной скорости света c . После отражения импульс фотонов направлен вдоль отраженного луча. Изменение импульса фотонов обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны. По третьему закону Ньютона точно такая же по модулю сила будет действовать на зеркало со стороны фотонов.

За промежуток времени Δt на площадку S , расположенную перпендикулярно направлению распространения света, падает световая энергия, равная $P\Delta tS$. Если же площадка расположена (как в нашем случае) под углом, то энергия, которая на нее падает, $W = P\Delta tS \cos \alpha$ (см. рис. 286).

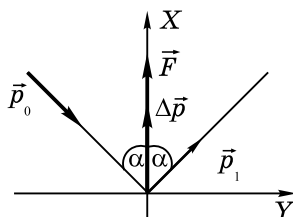


Рис. 286

На площадку падает белый свет, содержащий фотоны разных частот, поэтому падающая энергия

$$W = \sum N_i (h\nu_i),$$

где N_i — количество фотонов частоты ν_i , прошедших через площадку за время Δt .

Рассмотрим фотон частоты ν_i , упруго отражающийся от площадки. Модули его импульса до и после отраже-

ния равны, т. е. $p_0 = p_1 = h\nu_i / c$. Введем оси X и Y , направленные как показано на рис. 286. Проекции начального и конечного импульсов выражаются формулами:

$$p_{0x} = -p_0 \cos \alpha; \quad p_{0y} = p_0 \sin \alpha;$$

$$p_{1x} = p_0 \cos \alpha; \quad p_{1y} = p_0 \sin \alpha;$$

Отсюда следует, что изменение импульсов по осям X и Y равны: $\Delta p_x = p_{1x} - p_{0x} = 2p_0 \cos \alpha$, $\Delta p_y = 0$. Изменение импульса фотона

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2} = 2p_0 \cos \alpha.$$

Изменение импульса N_i фотонов равно $(2p_0 \cos \alpha)N_i$, а изменение импульса всех фотонов — $\sum N_i p_0 \cos \alpha$. Из основного уравнения динамики изменение импульса равно импульсу действующей силы:

$$\begin{aligned} \sum (N_i 2p_0 \cos \alpha) &= F \Delta t \Rightarrow \sum \left(N_i 2 \frac{h\nu_i}{c} \cos \alpha \right) = F \Delta t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{c} \cos \alpha \sum (N_i h\nu_i) = F \Delta t. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, сумма $\sum N_i h\nu_i = W$ — энергия излучения, равная в свою очередь $P \Delta t S \cos \alpha$. После подстановки в последнее уравнение получаем

$$\begin{aligned} (2/c) \cos \alpha P \Delta t S \cos \alpha &= F \Delta t \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= (2P \cos^2 \alpha) / c = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}. \end{aligned}$$

19. На оси длинной тонкостенной трубки радиусом $r=1$ см с зеркально отражающими внутренними стенками расположен точечный источник S мощностью $P=1$ Вт, дающий излучение с длиной волны $\lambda=0,5$ мкм. У торца трубки на расстоянии $L=1$ м от источника расположен фотоэлемент ФЭ. Найти число фотонов, попадающих на фотоэлемент в одну секунду после двукратного отражения на стенках трубки (см. рис. 287).

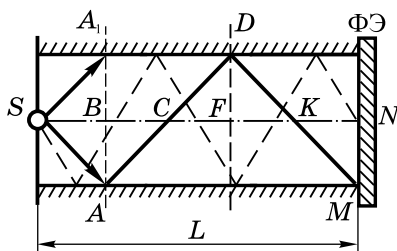


Рис. 287

Решение

Прежде чем решать эту задачу, надо определить телесный угол как пространственный угол с вершиной в центре сферической поверхности радиусом R . Если этот угол опирается на сферическую поверхность на площадку S , то $\alpha = S / R^2$ (см. рис. 288).

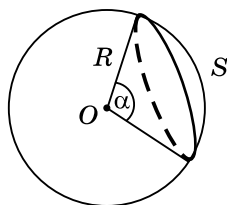


Рис. 288

На рис. 287 приведен ход луча SA , который испытывает два отражения на стенках трубки. Если луч выходит из точки S под большим углом к оси трубки, то он испытывает более двух отражений. Ход такого луча изображен пунктирной линией на рис. 287.

AB и DF — перпендикуляры, восстановленные в точках падения луча. Так как $\angle SAB = \angle BAC$, то $\triangle SAB = \triangle BAC$. Аналогично $\triangle CDF = \triangle KDF$; $\angle BCA = \angle DCF$ как вертикальные, поэтому $\angle BAC = \angle CDF$. Аналогично доказываем, что $\triangle KDF = \triangle KMN$.

В итоге получаем, что

$$\Delta SAB = \Delta BAC = \Delta CDF = \Delta KDF = \Delta KMN.$$

Следовательно, $SB = BC = CF = FK = KN = L / 5$.

Из точки S выходит также луч, распространяющийся симметрично относительно оси трубки, — это луч SA_1 . Телесный угол α_1 , соответствующий лучам SA и SA_1 , имеет вершину в точке S . Так как $r \ll L$, то радиус сферы с центром в точке S $SA = SA_1 = SB = L / 5$, а площадь сферической поверхности, на которую опирается угол α_1 , равен площади сечения трубки πr^2 . Таким образом,

$$\alpha_1 = \pi r^2 / (L / 5)^2 = 25\pi r^2 / L^2.$$

Если уменьшить угол выхода луча с осью трубки, то при некотором значении этого угла количество отражений от стенок станет равным одному. Ход такого луча SE представлен на рис. 289.

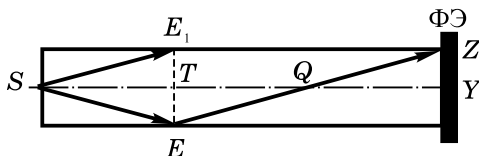


Рис. 289

Используя закон отражения, доказываем, что

$$\Delta STE = \Delta TEQ = \Delta QZY \Rightarrow ST = TQ = QY = L/3.$$

Телесный угол, соответствующий лучам SE и SE_1 ,

$$\alpha_2 = \pi r^2 / (L / 3)^2 = 9\pi r^2 / L^2.$$

Итак, все лучи, испытывающие два отражения, находятся в пределах $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Точечный источник S излучает равномерно по всем направлениям, поэтому мощность, приходящаяся на единичный телесный угол, равна $P / (4\pi)$. (Телесный угол, опирающийся на всю сферу, равен 4π .)

Следовательно, мощность излучения в телесном угле $(\alpha_1 - \alpha_2)$ равна

$$\frac{P}{4\pi}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{P}{4\pi} \left(\frac{25\pi r^2}{L^2} - \frac{9\pi r^2}{L^2} \right) = 4P \frac{r^2}{L^2}.$$

С другой стороны, мощность излучения можно выразить, умножив энергию фотона на число фотонов в 1 с, т. е. $h\nu N = hcN / \lambda$. Получаем уравнение

$$4P \left(\frac{r}{L} \right)^2 = h \frac{c}{\lambda} N \Rightarrow N = \frac{4P\lambda}{hc} \left(\frac{r}{L} \right)^2 = 10^{17}.$$

РАЗДЕЛ 14

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

1. Постулаты теории относительности

Основу теории относительности составляют два постулата: **принцип относительности Эйнштейна и постулат о скорости света в вакууме.**

Принцип относительности формулируется так: любые физические явления при одинаковых условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т. е. законы физики имеют одну и ту же форму во всех инерциальных системах отсчета.

Постулат о скорости света в вакууме утверждает, что во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме является предельной скоростью и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Постулаты теории относительности отражают реальные закономерности, существующие в окружающем мире. Из них вытекает ряд важных следствий.

2. Основные формулы теории относительности

1. Относительность расстояний. Пусть l_0 — длина стержня в некоторой инерциальной системе отсчета, относительно которой стержень покоится, l — длина этого же стержня, но в системе отсчета, относительно которой стержень движется со скоростью v , тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}; \quad (14.1)$$

отсюда следует, что $l < l_0$. При $v \ll c$ отношение $(v/c)^2 \rightarrow 0$ и l практически равно l_0 .

2. Относительность промежутков времени. Промежуток времени τ_0 (собственное время) между двумя событиями, происходящими в некоторой инерциальной системе отсчета (неподвижная система), и промежуток времени τ между этими же событиями, но измеренный в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно «неподвижной системы», связаны соотношением

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (14.2)$$

которое показывает, что $\tau > \tau_0$ (эффект замедления времени). При $v \ll c$ $(v/c)^2 \rightarrow 0$ и τ практически равно τ_0 .

3. Релятивистский закон сложения скоростей. Если $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость тела относительно некоторой подвижной системы отсчета, движущейся относительно неподвижной со скоростью \vec{u} , то скорость \vec{v} этого тела относительно неподвижной системы отсчета определялась классическим законом сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{\text{отн}}$. В частном случае, когда все скорости направлены вдоль одной прямой, для их проекций получалось соотношение: $v = u + v_{\text{отн}}$. Согласно теории относительности, указанные выше скорости связаны более общим соотношением

$$v = \frac{u + v_{\text{отн}}}{1 + uv_{\text{отн}}/c^2}, \quad (14.3)$$

которое называют **релятивистским законом сложения скоростей**. При $u \ll c$ и $v_{\text{отн}} \ll c$ отношение $uv_{\text{отн}}/c^2 \rightarrow 0$ и в пределе получается классический закон сложения скоростей.

4. Зависимость массы от скорости движения выражается формулой

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (14.4)$$

где v — скорость движения тела, m_0 — масса покоя тела.

При $v=0$ $m=m_0$. При $v \ll c$ масса тела практически равна массе покоя. С увеличением скорости движения тела масса его возрастает.

5. Релятивистский импульс тела, движущегося со скоростью \vec{v} , выражается формулой

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0\vec{v} / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (14.5)$$

где m_0 — масса покоя.

При $v \ll c$ импульс тела вычисляется по формуле классической механики $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

6. Связь между массой и энергией W выражается формулой Эйнштейна

$$W = mc^2 = m_0c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (14.6)$$

При $v=0$ $W=W_0=m_0c^2$, при этом W_0 называется **энергией покоя**. Например, энергия покоя электрона

$$W_0 = m_e c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ (кг)} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)})^2 = 819 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}.$$

Как правило, энергию элементарных частиц выражают в электрон-вольтах, причем $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Поэтому энергия покоя электрона

$$\begin{aligned} W_0 &= (819 \cdot 10^{-16}) / (1,6 \cdot 10^{-19}) \text{ эВ} = 511 \cdot 10^3 \text{ эВ} = \\ &= 511 \text{ кэВ} = 0,511 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Из формулы (14.6) следует, что изменение энергии тела ΔW связано с изменением массы на Δm , причем $\Delta m = \Delta W / c^2$.

7. Кинетическая энергия движущегося тела равна разности между его энергией и энергией покоя, т. е.

$$W_{\text{к}} = W - W_0 = mc^2 - m_0c^2. \quad (14.7)$$

3. Строение атома. Постулаты Бора

Атомы имеют размеры порядка 10^{-10} м. Атом любого химического элемента состоит из положительно заряженного ядра и электронов. Ядро атома имеет размеры

порядка 10^{-14} ч 10^{-15} м, и в нем сосредоточена почти вся масса атома. Положительный заряд атомного ядра равен порядковому номеру элемента Z в периодической таблице Менделеева, умноженному на модуль заряда электрона $|e|$. Число электронов в атоме равно порядковому номеру элемента. Поэтому атом в целом электро-нейтрален.

Атомные системы подчиняются законам квантовой механики. Следствием этих законов являются постулаты Бора, точно описывающие свойства атома водорода.

Первый постулат Бора: атомная система может находиться только в особых стационарных (квантовых) состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия W_n , где n — натуральное число; в стационарном состоянии атом не излучает.

Второй постулат Бора: излучение света происходит при переходе атома из стационарного состояния с большей энергией W_k в стационарное состояние с меньшей энергией W_n (n и k — натуральные числа, $W_k > W_n$), причем энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний:

$$h\nu_{k,n} = W_k - W_n, \quad (14.8)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а $\nu_{k,n}$ — частота излученного фотона.

Из постулатов Бора следует, что электрон в атоме водорода может двигаться только по вполне определенным орбитам. При этом энергия атома водорода может принимать дискретный набор значений, зависящих от натурального числа n . Энергия стационарных состояний атома водорода

$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}; \quad (14.9)$$

$n=1$ соответствует основному энергетическому состоянию атома водорода, в котором он может находиться сколь угодно долго:

$$W_1 = -m_e e^4 / (8 \epsilon_0^2 h^2) = -2,168 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Для того чтобы ионизировать атом водорода, ему необходимо сообщить энергию

$$W_{\text{ион}} = -W_1 = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = 13,6 \text{ эВ}. \quad (14.10)$$

Формулу для энергий стационарных состояний удобно записать в виде

$$W_n = W_1 / n^2 = -W_{\text{ион}} / n^2. \quad (14.11)$$

При переходе атома из стационарного состояния с энергией W_k в состояние с энергией

$$W_n \quad (k, n \in N, k > n, W_k > W_n)$$

атом излучает квант частоты

$$\nu_{k,n} = \frac{W_k - W_n}{h} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Умножив обе части последнего равенства на h и учитывая, что $m_e e^4 / (8 \epsilon_0^2 h^2) = W_{\text{ион}}$, получим

$$h \nu_{k,n} = W_{\text{ион}} (1 / n^2 - 1 / k^2). \quad (14.12)$$

4. Строение атомного ядра

Ядро атома имеет сложную структуру. В его состав входят положительно заряженные протоны и частицы без заряда — нейтроны. Протоны и нейтроны называют **нуклонами**.

Протон и нейтрон имеют примерно равную массу. Тщательно выполненные эксперименты показали, что масса протона $m_p = 1,67252 \cdot 10^{-27}$ кг, а масса нейтрона $m_n = 1,67495 \cdot 10^{-27}$ кг.

В ядерной физике массу выражают в атомных единицах массы (а.е.м.). Атомная единица массы равна $1/12$ массы атома углерода:

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,660055 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Выраженные в а.е.м. массы протона и нейтрона составляют:

$$m_p = 1,007825 \text{ а.е.м. и } m_n = 1,008665 \text{ а.е.м.}$$

Количество протонов в ядре численно равно порядковому номеру Z ядра в периодической таблице Менделеева.

Количество нуклонов в ядре (сумма протонов и нейтронов ядра) называется **массовым числом A ядра**.

Количество нейтронов в ядре $N = A - Z$.

Ядра с одним и тем же числом протонов, но различным числом нейтронов, называются **изотопами**. Их химические свойства тождественны.

Для обозначения ядер применяется символ ${}_Z^AX$, где X — химический символ элемента, A — массовое число, Z — порядковый номер в периодической таблице.

Протоны и нейтроны удерживаются внутри ядра особыми силами — **ядерными**. Ядерные силы во много раз превосходят другие известные силы природы. По этой причине взаимодействие посредством ядерных сил называют **сильным взаимодействием**. Ядерные силы проявляются на расстояниях, сравнимых с размером ядра, т.е. на расстояниях порядка $10^{-14} \div 10^{-15}$ м.

5. Радиоактивность.

Закон радиоактивного распада.

Энергия связи ядра

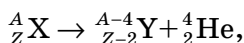
Ядра некоторых химических элементов могут самопроизвольно превращаться в ядра других химических элементов. Это явление называется **радиоактивностью**. Оно сопровождается радиоактивным излучением, представляющим собой потоки γ -, β - и α -излучений:

- γ -излучение — коротковолновое излучение (длина волны от 10^{-10} до 10^{-13} м);
- β -излучение — поток электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света;

- α -излучение — поток α -частиц, т. е. ядер атома гелия.

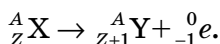
При радиоактивном распаде выполняется **правило смещения**.

При α -распаде ядро теряет положительный заряд $2|e|$, а его масса убывает на четыре атомные единицы. В итоге элемент смещается на две клетки к началу периодической таблицы; α -распад отображается формулой



где A_ZX — ядро, испытавшее α -распад; ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ — ядро, образовавшееся в результате α -распада.

При β -распаде заряд ядра увеличивается на $|e|$, а его масса остается практически неизменной; β -распад отображается формулой



После β -распада ядро смещается на одну клетку к концу периодической таблицы.

Коротковолновое γ -излучение не сопровождается изменением заряда ядра; масса ядра остается практически неизменной.

Для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, на протяжении которого его активность (число распадов в единицу времени) убывает в два раза. Этот интервал называется **периодом полураспада** T . За период полураспада распадается половина начального числа радиоактивных атомов.

Радиоактивный распад описывается **основным законом радиоактивного распада**

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T}, \quad (14.13)$$

где N_0 — число радиоактивных атомов в момент времени $t=0$, $N(t)$ — число радиоактивных атомов в момент времени t , T — период полураспада.

Используя формулу (14.13), можно определить количество атомов, распавшихся к моменту времени t :

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - N_0 \cdot 2^{-t/T} = N_0(1 - 2^{-t/T}).$$

При радиоактивном распаде выделяется энергия.

Исследования показали, что масса покоя ядра $M_{\text{я}}$ всегда меньше суммы масс покоя составляющих его протонов и нейтронов. Если ядро содержит Z протонов и N нейтронов, то $\Delta M = Zm_p + Nm_n - M_{\text{я}} > 0$. Это явление называется **дефектом масс**. Следовательно, энергия системы, состоящей из Z протонов и N нейтронов, в свободном состоянии превышает энергию этой же системы, когда протоны и нейтроны образуют ядро, на $\Delta W = \Delta Mc^2$. Значит, для разделения ядра на отдельные нуклоны ему сообщают некоторую энергию ΔW . Энергия, необходимая для полного разделения ядра на отдельные протоны и нейтроны, называется **энергией связи ядра** $W_{\text{св}}$. Энергию связи рассчитывают по формуле

$$W_{\text{св}} = (Zm_p + Nm_n - M_{\text{я}})c^2. \quad (14.14)$$

Энергия связи, приходящаяся на 1 нуклон (**удельная энергия связи**), для большинства ядер составляет порядка 8 МэВ. С увеличением массового числа удельная энергия связи медленно убывает: более тяжелые ядра менее устойчивы по сравнению с ядрами из середины периодической таблицы.

6. Ядерные и термоядерные реакции

Ядерной реакцией называется изменение атомных ядер при их взаимодействии с элементарными частицами или друг с другом. Ядерные реакции происходят, когда частицы приближаются к ядру на столь малое расстояние, что попадают в сферу действия ядерных сил. Ядерные реакции, как и любые другие взаимодействия, протекают в строгом соответствии с фундаментальными законами сохранения: законом сохранения энергии, им-

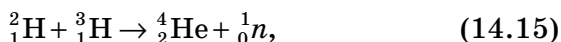
пульса, электрического заряда и некоторых других физических величин. В частности, при ядерных реакциях действует **закон сохранения массовых чисел ядер** до и после реакции. Например, при облучении ядер азота $^{14}_7\text{N}$ α -частицами (ядрами атома гелия) ^4_2He образуется протон ^1_1H (ядро атома водорода) и ядро атома кислорода $^{17}_8\text{O}$, т.е. происходит ядерная реакция $^{14}_7\text{N} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^1_1\text{H} + ^{17}_8\text{O}$. Как видно, суммы верхних индексов в правой и левой части равны в соответствии с законом сохранения массовых чисел, а суммы нижних индексов равны в соответствии с законом сохранения заряда.

Участвующие или получающиеся в ядерных реакциях протоны, нейтроны, электроны и γ -кванты обозначают соответственно: 1_1p , 1_0n , $^0_{-1}e$, γ .

Энергетическим выходом ядерной реакции называется разность энергий покоя частиц до и после реакции. Если энергия покоя частиц до реакции превышает энергию покоя частиц после, то реакция идет с выделением энергии, в противном случае ядерная реакция протекает с поглощением энергии.

Пороговая энергия ядерной реакции — это минимальная энергия налетающей частицы, при которой происходит ядерная реакция. Пороговая энергия соответствует случаю, когда образовавшиеся в ходе реакции частицы движутся с одинаковой скоростью.

Термоядерными реакциями называются реакции слияния легких ядер при сверхвысоких температурах порядка 10^7 К. Эти реакции сопровождаются выделением энергии, поскольку масса покоя продуктов реакции меньше суммы масс покоя взаимодействующих ядер. Пример термоядерной реакции



где дейтерий ^2_1H , тритий ^3_1H — изотопы водорода.

Эта реакция протекает с выделением энергии.

7. Деление ядер урана.

Цепная реакция. Ядерный реактор

Из всех ядерных реакций наибольший интерес представляет реакция деления ядра урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ (или плутония ${}_{94}^{239}\text{Pu}$) при захвате им нейтрона ${}_0^1n$. Оказалось, что в результате этой реакции образуются два осколка — ядра, а также несколько нейтронов, причем суммарная масса продуктов реакции меньше массы ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ до реакции. Реакция идет с выделением энергии, причем при делении одного ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ выделяется энергия порядка 200 МэВ. При определенных условиях процесс деления ядер урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ под действием нейтронов приобретает лавинообразный характер, в этом случае говорят о ядерной **цепной реакции**.

Цепная ядерная реакция может протекать при условии, что масса делящегося вещества превышает **критическую массу**. Если масса вещества меньше критической массы, то количество нейтронов, покидающих пространство, где происходит ядерная реакция, превышает количество нейтронов, захватываемых ядрами. В этом случае цепная реакция происходить не может. Установлено также, что вероятность захвата нейтрона ядром с последующим его делением возрастает с уменьшением скорости нейтронов. В этом случае говорят о медленных нейтронах.

Управляемая цепная ядерная реакция протекает в **ядерном реакторе**. Основными элементами ядерного реактора являются: ядерное горючее (${}_{92}^{235}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, ${}_{92}^{238}\text{U}$), замедлитель нейтронов (тяжелая или обычная вода, графит), теплоноситель для вывода энергии, образующейся при работе реактора (вода), и устройство для регулирования скорости реакции (вводимые в рабочее пространство реактора стержни, содержащие кадмий или бор — вещества, которые хорошо поглощают нейтроны). Снаружи

реактор окружают защитной оболочкой, задерживающей γ -излучение и нейтроны. Оболочку выполняют из бетона с железным заполнением.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ИЛИ РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

1. Масса тела, движущегося с определенной скоростью, увеличилась на 20%. Во сколько раз при этом уменьшилась его длина?

Решение

Пусть масса покоя тела равна m_0 , а его длина, когда оно покоится, — l_0 . Из формул теории относительности следует, что при движении тела со скоростью v его масса m и длина l будут:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

По условию задачи $m = 1,2m_0$, поэтому из первого уравнения следует, что $\sqrt{1 - (v/c)^2} = m_0/m = 1/1,2$. Подставляя это во второе уравнение, находим, что $l = l_0 / 1,2$, т. е. длина уменьшится в 1,2 раза.

2. Доказать, что энергия частицы W и модуль ее импульса p связаны соотношением $W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, где c — скорость света, m_0 — масса покоя частицы.

Решение

Энергия частицы $W = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, а ее импульс $p = m_0 v / \sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 W^2 - p^2 c^2 &= \left(m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2} \right)^2 - \left(m_0 v / \sqrt{1 - (v/c)^2} \right)^2 c^2 = \\
 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - (v/c)^2} - \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - (v/c)^2} = \frac{m_0^2 c^2 (c^2 - v^2)}{1 - (v/c)^2} = m_0^2 c^4 = W_0^2.
 \end{aligned}$$

3. Во сколько раз увеличится масса движущегося электрона по сравнению с массой покоя, если электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, приобрел кинетическую энергию $W_{\text{к}} = 0,76$ МэВ?

Решение

Кинетическая энергия электрона есть разность между полной энергией $W = mc^2$ и энергией покоя

$$W_0 = m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}.$$

Итак, $W_{\text{к}} = W - W_0 = mc^2 - m_e c^2$. После деления обеих частей уравнения на $m_e c^2$ получаем

$$\frac{W_{\text{к}}}{m_e c^2} = \frac{m}{m_e} - 1 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = 1 + \frac{W_{\text{к}}}{m_e c^2} = 1 + \frac{0,76}{0,511} = 2,49.$$

Масса электрона увеличивается примерно в 2,5 раза.

4. Определить скорость электрона, разогнанного из состояния покоя электрическим полем с ускоряющей разностью потенциалов $|u| = 10^6$ В.

Решение

Под действием ускоряющей разности потенциалов электрон приобретает кинетическую энергию $W_{\text{к}} = |e||u| = 10^6 \text{ эВ} = 1 \text{ МэВ}$ (пройдя разность потенциалов 1 В, электрон приобретает энергию 1 эВ, при прохождении разности потенциалов 10^6 В электрон приобретает энергию 10^6 эВ).

Как и в задании 3, кинетическую энергию выразим как разность между полной энергией W и энергией покоя электрона $W_0 = m_e c^2 = 0,511$ МэВ.

$$\text{Итак, } W_{\kappa} = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow \frac{m}{m_e} = \frac{W_{\kappa}}{m_e c^2} + 1.$$

Подставляя $m = m_e / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ и учитывая, что $m_e c^2 = W_0$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} &= \frac{W_{\kappa}}{W_0} + 1 \Rightarrow 1 - (v/c)^2 = \\ &= \frac{1}{(W_{\kappa}/W_0 + 1)^2} \Rightarrow (v/c)^2 = 1 - \frac{1}{(W_{\kappa}/W_0 + 1)^2} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } v = \frac{2\sqrt{2}}{3} c = 2,83 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

5. Электрон обладает кинетической энергией $W_{\kappa} = 2$ МэВ. Определить модуль импульса электрона.

Решение

Как и в предыдущем задании, получаем

$$\begin{aligned} W_{\kappa} &= W - W_0 = mc^2 - m_e c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m/m_e &= W_{\kappa} / (m_e c^2) + 1 \Rightarrow 1 + 2/0,5 = 5. \end{aligned}$$

$$\text{Но } \frac{m}{m_e} = 1 / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 5 \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{6}}{5} c.$$

Модуль импульса электрона вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} p &= m_e v / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 5m_e \frac{2\sqrt{6}}{5} c = \\ &= 2\sqrt{6} m_e c = 1,33 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с.} \end{aligned}$$

6. Рентгеновское тормозное излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатада рентгеновской трубки. Определить длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40% от скорости света.

Решение

Так как электрон движется со скоростью $v=0,4c$, сравнимой со скоростью света, то его кинетическую энергию выразим, как и в предыдущих заданиях:

$$\begin{aligned} W_{\text{к}} &= mc^2 - m_e c^2 = m_e c^2 \left(\sqrt{1 - (v/c)^2} - 1 \right) = \\ &= m_e c^2 \left(1 / \sqrt{1 - (v/c)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Коротковолновая граница спектра излучения соответствует случаю, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию кванта рентгеновского излучения, равную $h\nu = hc / \lambda$.

Итак, получаем уравнение $m_e c^2 \left(1 / \sqrt{1 - (v/c)^2} - 1 \right) = hc / \lambda$.

Откуда $\lambda = \frac{h}{m_e c} \left(1 / \sqrt{1 - (v/c)^2} - 1 \right)^{-1} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$

7. Радиус первой орбиты в атоме водорода $r_1 = 5,3 \times 10^{-11} \text{ м}$. Найти напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на этой орбите.

Решение

Напряженность электрического поля найдем по формуле

$$E = k|e| / r_1^2,$$

где $k = 1 / (4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

После подстановки числовых значений получим

$$E = 5,1 \cdot 10^{11} \text{ В/м.}$$

Чтобы найти второй параметр, запишем второй закон Ньютона, принимая во внимание тот факт, что на электрон действует кулоновская сила притяжения $F_K = ke^2/r_1^2$, которая сообщает ему центростремительное ускорение $a_n = v^2/r_1$, где v — скорость движения электрона. Итак, получаем уравнение

$$F_K = m_e a_n \Leftrightarrow ke^2/r_1^2 = m_e v^2/r_1 \Rightarrow m_e v^2 = ke^2/r_1.$$

Следовательно, кинетическая энергия электрона

$$W_K = m_e v^2 / 2 = ke^2 / (2r_1) = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ.}$$

8. Во сколько раз увеличится радиус орбиты электрона у атома водорода, находящегося в основном энергетическом состоянии, при поглощении атомом фотона с энергией 12,09 эВ?

Решение

Согласно теории Бора, полная энергия атома водорода равна сумме кинетической энергии электрона и потенциальной энергии электростатического взаимодействия между электроном и протоном ядра, причем в любом энергетическом состоянии

$$W_n = \frac{1}{2} W_p = \frac{1}{2} \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \right).$$

В основном состоянии $W_1 = -13,6 \text{ эВ} = -e^2 / (8\pi\epsilon_0 r_1)$. При поглощении фотона атом водорода переходит в состояние с большей энергией

$$W_n = (W_1 + 12,09) \text{ эВ} = -(13,6 + 12,09) \text{ эВ} = -1,51 \text{ эВ.}$$

С другой стороны, $W_n = -e^2 / (8\pi\epsilon_0 r_n)$, где r_n — радиус орбиты электрона.

Тогда $\frac{W_1}{W_n} = \frac{r_n}{r_1} = \frac{-13,6 \text{ эВ}}{-1,51 \text{ эВ}} = 9$. Радиус орбиты электрона увеличится в девять раз.

9. Первоначально невозбужденный водород начнет излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших разность потенциалов $u_0 = 10,2 \text{ В}$. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Считать, что масса электрона много меньше массы протона, а атом водорода перед столкновением покоился.

Решение

Пусть масса налетающей частицы m , ее скорость v_0 , масса атома водорода M , скорости частиц после столкновения v_1 и v_2 . По закону сохранения импульса $mv_0 = mv_1 + Mv_2$. При столкновении атом водорода поглощает энергию $W_{n,k}$, поэтому по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + W_{n,k}. \end{cases}$$

Докажем, что энергия налетающей частицы

$$W_0 = mv_0^2/2$$

будет минимальна, если после столкновения частица и атом водорода движутся с одинаковыми скоростями (абсолютно неупругое столкновение). Выразим из первого уравнения системы

$$v_2 = (mv_0 - mv_1) / M$$

и подставим во второе уравнение, тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M}{2} \left(\frac{mv_0 - mv_1}{M} \right)^2 + W_{n,k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m^2 v_0^2}{2M} - \frac{m^2 v_0 v_1}{M} + \frac{m^2 v_1^2}{2M} + W_{n,k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{m}{M} \right) &= \frac{mv_1^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right) - \frac{m^2 v_0 v_1}{M} + W_{n,k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{M-m}{M} \right) &= \frac{mv_1^2}{2} \left(\frac{m+M}{M} \right) - \frac{m^2 v_0}{M} v_1 + W_{n,k} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_0 = \frac{mv_0^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} \left(\frac{M+m}{M-m} \right) - \frac{m^2 v_0}{(M-m)} v_1 + \frac{M}{(M-m)} W_{n,k}. \end{aligned}$$

Таким образом, энергия налетающей частицы W_0 выражена как квадратичная функция от v_1 с первым положительным коэффициентом $a = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{M+m}{M-m} \right) > 0$. Такая функция имеет минимум в точке $v_1 = -b / 2a$, где $b = m^2 v_0 / (M-m)$. Итак, скорость, соответствующая минимуму W_0 ,

$$v_1 = \frac{(m^2 v_0 / (M-m))}{2(m/2)((M+m)/(M-m))} = \frac{mv_0}{(M+m)}.$$

При этом

$$\begin{aligned} v_2 &= (mv_0 - mv_1) / M = m(v_0 - mv_0 / (M+m)) / M = \\ &= mv_0 / (M+m). \end{aligned}$$

Итак, доказано, что энергия налетающей частицы минимальна, если после столкновения частицы движутся с одинаковыми скоростями, т. е. $v_1 = v_2$.

Минимальное значение энергии налетающей частицы

$$\begin{aligned}
 W_0 = W_{\min} &= mv_1^2/2 + Mv_1^2/2 + W_{n,k} = (m+M)v_1^2/2 + W_{n,k} = \\
 &= \frac{(m+M)(mv_0/(M+m))^2}{2} + W_{n,k} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right) + W_{n,k} = \\
 &= W_{\min} \frac{m}{m+M} + W_{n,k} \Rightarrow W_{\min} - W_{\min} \frac{m}{m+M} = W_{n,k} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow W_{\min} = W_{n,k} (1+m/M).
 \end{aligned}$$

В случае, когда через водород пропускают электроны, $m/M \rightarrow 0$, поэтому $W_{\min} = W_{n,k}$, т. е. вся энергия электронов поглощается водородом, который переходит в возбужденное состояние. Электроны приобретают энергию, пройдя ускоряющую разность потенциалов u_0 , т. е.

$$W_{\min} = |e|u_0 = W_{n,k} = 10,2 \text{ эВ.}$$

В случае когда через водород пропускают протоны, отношение $m/M=1$, поэтому минимальная энергия налетающих протонов

$$W'_{\min} = W_{n,k} (1+1) = 2W_{n,k} = 20,4 \text{ эВ.}$$

Таким образом, минимальная ускоряющая разность потенциалов для протонов равна 20,4 В.

10. Какие спектральные линии появятся при возбуждении атомарного водорода электронами с энергией $W=12,1 \text{ эВ}$?

Решение

Вся энергия электронов поглощается водородом, который возбуждается и переходит из основного энергетического состояния с $n=1$ в некоторое состояние, характеризующееся натуральным числом k . По закону сохранения энергии $W = W_k - W_n$. С другой стороны, согласно формуле (14.12), $W_k - W_n = W_{\text{ион}}(1/n^2 - 1/k^2)$, где $W_{\text{ион}} = 13,6 \text{ эВ}$.

Получаем уравнение

$$W = W_{\text{ион}} \left(1 - 1/k^2\right) \Rightarrow 1 - 1/k^2 = W/W_{\text{ион}} \Rightarrow 1/k^2 = 1 - W/W_{\text{ион}} = \\ = 1 - \frac{12,1 \text{ эВ}}{13,6 \text{ эВ}} = 0,11 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{0,11} = 9,09 \Rightarrow k = 3, \quad k \in (N).$$

Из состояния с $k=3$ возможен прямой переход в состояние с $n=1$ или $n=2$, а также переход со второго энергетического уровня на первый. Таким образом, получится три спектральные линии. Рассчитываем соответствующие длины волн, используя формулу

$$h\nu_{k,n} = W_{\text{ион}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow \nu_{k,n} = \frac{W_{\text{ион}}}{h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{k,n} = \frac{c}{\nu_{k,n}} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1/n^2 - 1/k^2 \right)}.$$

Переходу из состояния с $k=3$ в состояние с $n=1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{3,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1 - 1/3^2 \right)} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Переходу из состояния с $k=3$ в состояние с $n=2$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{3,2} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1/2^2 - 1/3^2 \right)} = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Переходу из состояния с $k=2$ в состояние с $n=1$ соответствует спектральная линия с длиной волны

$$\lambda_{2,1} = \frac{ch}{W_{\text{ион}} \left(1 - 1/2^2 \right)} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

11. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне с частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, меняется

со временем по закону: $E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$, где A — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W_{\text{ион}} = 13,6$ эВ.

Решение

Преобразуем выражение для напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} E &= A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t = A \cos \omega t + A \cos \Omega t \cos \omega t = \\ &= A \cos \omega t + \frac{1}{2} A \cos(\omega - \Omega)t + \frac{1}{2} A \cos(\omega + \Omega)t. \end{aligned}$$

Таким образом, модулированная по амплитуде волна представляет собой сумму трех монохроматических волн с частотами ω , $\omega_1 = (\omega - \Omega)$ и $\omega_2 = (\omega + \Omega)$. В соответствии с постулатами Бора атом водорода может излучать и поглощать электромагнитную энергию только определенными порциями (квантами). Вычислим кванты энергии, соответствующие найденным монохроматическим волнам.

Для волны с частотой ω

$$W = h\nu = h\omega / (2\pi) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Для волны с частотой $\omega_1 = \omega - \Omega$

$$W_1 = h\nu_1 = h \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,89 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Для волны с частотой $\omega_2 = \omega + \Omega$

$$W_2 = h\nu_2 = h \frac{\omega_2}{2\pi} = 2,31 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Энергия ионизации атома водорода

$$W_{\text{ион}} = 13,6 \text{ эВ} = 2,168 \cdot 10^{-18} \text{ Дж,}$$

и, как видно, она больше, чем W и W_1 . Поэтому кванты с частотами ω и $(\omega - \Omega)$ не могут ионизировать атом водорода. Ионизацию вызывает только квант с частотой

$(\omega + \Omega)$, и по закону сохранения энергии энергия выбитых этим квантом электронов

$$W_e = W_2 - W_{\text{ион}} = 0,142 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 0,88 \text{ эВ}.$$

12. В периодической таблице рядом расположены три элемента X, Y, S. Радиоактивный изотоп элемента X превращается в элемент Y, а тот, в свою очередь, — в элемент S. Последний превращается в изотоп исходного элемента X. Какими процессами обусловлены переходы $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow S$, $S \rightarrow X$?

Решение

Заряд ядра элемента Y на 1 элементарный заряд больше, чем заряд ядра элемента X (по условию задачи в периодической таблице эти элементы расположены рядом). Следовательно, переход $X \rightarrow Y$ есть β -распад. По аналогии переход $Y \rightarrow S$ — также β -распад. В процессе $S \rightarrow X$ заряд ядра уменьшается на 2 элементарных заряда, следовательно, это α -распад.

13. Ядро нептуния ${}^{237}_{93}\text{Np}$ после α - и β -распадов превращается в ядро висмута ${}^{209}_{83}\text{Bi}$. Какое число α - и β -распадов происходит при этом?

Решение

В результате распадов массовое число изменяется на $237 - 209 = 28$ атомных единиц. Как известно, при β -распаде масса ядра не изменяется, следовательно, изменение массового числа происходит только за счет α -распадов. При одном α -распаде массовое число изменяется на 4 атомные единицы, значит, должно произойти $28 / 4 = 7$ α -распадов. При этом заряд ядра должен уменьшиться на $7 \cdot 2 = 14$ элементарных зарядов. В нашем случае уменьшение заряда ядра равно $93 - 83 = 10$. Следовательно, в результате β -распадов заряд увеличился

на $14 - 10 = 4$ элементарных заряда. Так как при одном β -распаде заряд ядра увеличивается на 1 элементарный заряд, то должно произойти $4 / 1 = 4$ β -распада.

14. Активность радиоактивного препарата за $t_1 = 24$ ч уменьшилась в восемь раз. Найти период полураспада T этого препарата. Определить, какая часть радиоактивных ядер этого препарата распадется за время, равное четвертой части периода полураспада.

Решение

Как известно, активность радиоактивного препарата есть число распадов в единицу времени. Очевидно, что число распадов пропорционально количеству нераспавшихся ядер в данный момент времени. Поэтому из условия уменьшения активности в восемь раз следует, что во столько же раз уменьшилось число нераспавшихся ядер: $N(t_1)$. Итак, $N_0 / N(t_1) = 8$. Из закона радиоактивного распада $N(t_1) = N_0 \cdot 2^{-t_1/T}$, где T — период полураспада. Следовательно,

$$\begin{aligned} N_0 / (N_0 \cdot 2^{-t_1/T}) &= 8 \Rightarrow 2^{t_1/T} = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_1/T &= 3 \Rightarrow T = t_1/3 = 8 \text{ ч.} \end{aligned}$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим момент времени $t_2 = T / 4$ от начала наблюдения за препаратом. Количество нераспавшихся ядер в этот момент $N(t_2) = N_0 \cdot 2^{-t_2/T} = N_0 \cdot 2^{-1/4} = N_0 / \sqrt[4]{2}$. Следовательно, к этому моменту распалось

$$\Delta N = N_0 - N(t_2) = N_0 - N_0 / \sqrt[4]{2} = N_0 (1 - 1 / \sqrt[4]{2}) \text{ ядер.}$$

Отношение к начальному числу ядер

$$\Delta N / N_0 = 1 - 1 / \sqrt[4]{2} = 0,16.$$

15. Радон $^{222}_{86}\text{Rn}$ — это α -радиоактивный газ с атомной массой $A=222$. Какую долю полной энергии, освобожденной при распаде радона, уносит α -частица? Считать, что до распада ядро радона покоится.

Решение

Радон распадается на α -частицу и неизвестный элемент ^A_ZX так: $^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^A_Z\text{X}$.

По законам сохранения заряда и массового числа порядковый номер элемента $Z=86-2=84$ и его атомная масса $A=222-4=218$. В периодической таблице находим, что этим элементом является полоний $^{218}_{84}\text{Po}$, и окончательно распад радона записывается в виде $^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^{218}_{84}\text{Po}$.

Пусть m — масса α -частицы, а M — масса ядра полония, и v_α и v_{Po} — соответственно их скорости после распада. Начальный импульс системы по условию задачи равен нулю, конечный импульс равен $mv_\alpha - Mv_{\text{Po}}$ (очевидно, что α -частица и ядро $^{218}_{84}\text{Po}$ разлетаются в противоположные стороны, отсюда и появляется знак «-»).

По закону сохранения импульса:

$$0 = mv_\alpha - Mv_{\text{Po}} \Rightarrow v_{\text{Po}}/v_\alpha = m/M.$$

Энергия, которой обладает система, складывается из кинетических энергий α -частицы и полония, т. е. $W = mv_\alpha^2/2 + Mv_{\text{Po}}^2/2$. Следовательно, α -частица уносит долю энергии

$$\begin{aligned} \frac{mv_\alpha^2/2}{mv_\alpha^2/2 + Mv_{\text{Po}}^2/2} &= \frac{1}{1 + (M/m)(v_{\text{Po}}/v_\alpha)^2} = \\ &= 1 / \left(1 + (M/m)(m/M)^2 \right) = 1 / (1 + m/M) = \\ &= 1 / (1 + 4/218) = 0,98, \text{ или } 98\%. \end{aligned}$$

16. В калориметр с теплоемкостью $c=100$ Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с молярной массой $\mu=61 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Масса образца $m=10$ мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $W=2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0,06$ °C. Каков период полураспада кобальта?

Решение

Повышение температуры калориметра обусловлено выделением энергии Q при распаде атома кобальта. Эту энергию можно рассчитать как $Q=c\Delta t$, а с другой стороны, как ΔNW , где ΔN — число распавшихся за время τ ядер, которое определяется из закона радиоактивного распада

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 - N_0 \cdot 2^{-t/T} = N_0(1 - 2^{-t/T}),$$

здесь N_0 — первоначальное количество радиоактивных атомов. Найдем его, определив количество вещества $\nu = m/\mu$. Следовательно, $N_0 = N_A \nu = N_A m/\mu$, где N_A — число Авогадро.

Итак, имеем уравнение

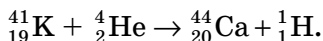
$$\begin{aligned} c\Delta t = \Delta NW &\Rightarrow c\Delta t = N_A (m/\mu) (1 - 2^{-\tau/T}) W \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - 2^{-\tau/T} &= \frac{c\Delta t}{N_A \frac{m}{\mu} W} = \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W} \Rightarrow 2^{-\tau/T} = 1 - \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{\tau}{T} = \log_2 \left(1 - \frac{c\Delta t \mu}{N_A m W} \right). \end{aligned}$$

$$T = -\tau / \log_2(1 - c\Delta t \mu / (N_A m W)) \approx 5700 \text{ с} \approx 95 \text{ мин.}$$

17. Написать недостающие обозначения в ядерной реакции ${}^{41}_{19}\text{K} + \dots \rightarrow {}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H}$.

Решение

При протекании ядерных реакций выполняется закон сохранения заряда и массовых чисел. Следовательно, заряд неизвестного ядра в левой части ядерной реакции $Z=(20+1)-18=2$, а массовое число $A=(44+1)-41=4$. Отсюда следует, что неизвестное ядро — ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$ (α -частица). Ядерная реакция записывается в виде



18. Вычислить энергию связи ядра атома алюминия.

Решение

Напомним, что в атомной физике масса выражается в атомных единицах массы, причем $1 \text{ а.е.м.} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, соответствующая ей энергия:

$$\begin{aligned} W = mc^2 &= 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ кг} (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = \\ &= 14,9454 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} = 931 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Ядро ${}^{27}_{13}\text{Al}$ содержит $Z=13$ протонов и $N=A-Z=14$ нейтронов. Масса протона составляет $1,0078 \text{ а.е.м.}$, а масса нейтрона — $1,0087 \text{ а.е.м.}$ Масса всех нуклонов ядра равна $(13 \cdot 1,0078 + 14 \cdot 1,0087) \text{ а.е.м.} = 27,2232 \text{ а.е.м.}$

Масса ядра ${}^{27}_{13}\text{Al} - 26,9815 \text{ а.е.м.}$

Дефект масс $\Delta m = (27,2232 - 26,9815) = 0,2417 \text{ а.е.м.}$

Энергия связи $W_{\text{св}} = \Delta m \cdot W = 0,2417 \cdot 931 = 225 \text{ МэВ.}$

19. Какое количество ${}^{235}_{92}\text{U}$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $P = 5 \cdot 10^3 \text{ кВт}$? Коэффициент полезного действия $\eta = 17\%$. При распаде одного ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ выделяется энергия $W_0 = 200 \text{ МэВ.}$

Решение

За сутки электростанция вырабатывает полезную энергию $W_{\text{п}} = Pt$, где $t = 24 \text{ ч} = 86400 \text{ с}$. Затраченная энер-

гия W_3 — это энергия, выделившаяся в результате управляемой цепной реакции, при которой происходит распад ядер урана $^{235}_{92}\text{U}$. Пусть за сутки расходуется масса m урана. В ней содержится $N = \frac{m}{\mu} N_A$ атомов; здесь $\mu = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро. Следовательно, за сутки выделяется энергия $W_3 = NW_0 = \frac{m}{\mu} N_A W_0$. Из определения КПД

$$\eta = \frac{W_{\text{п}}}{W_3} = Pt / \left(\frac{m}{\mu} N_A W_0 \right) \Rightarrow m = \frac{Pt\mu}{\eta N_A W_0} = 0,031 \text{ кг.}$$

20. Термоядерная реакция $^2_1\text{H} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_1\text{p}$ идет с выделением энергии $Q_1 = 18,4$ МэВ. Какая энергия выделяется в реакции $^3_2\text{He} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + 2^1_1\text{p}$, если дефект масс ядра ^3_2He на $\Delta m = 0,006$ а.е.м. больше, чем у ядра ^2_1H ? Какая энергия выделится во второй реакции при синтезе 1 кг гелия?

Решение

Пусть m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, m_1 — масса ядра ^3_2He , m_2 — масса ядра ^2_1H . Дефект масс у ядра ^3_2He , содержащего 2 протона и 1 нейтрон, $\Delta m_1 = (2m_p + m_n) - m_1$. Дефект масс у ядра ^2_1H , содержащего 1 протон и 1 нейтрон, $\Delta m_2 = (m_p + m_n) - m_2$. По условию задачи $\Delta m = \Delta m_1 - \Delta m_2 = (2m_p + m_n) - m_1 - (m_p + m_n) + m_2 = m_p - (m_1 - m_2)$.

Следовательно, $m_1 - m_2 = m_p - \Delta m$.

Пусть m_3 — масса ядра гелия ^4_2He , тогда энергетический выход первой ядерной реакции $Q_1 = ((m_1 + m_2) - (m_3 + m_p))c^2$. Энергетический выход второй ядерной реакции $Q_2 = (2m_1 - (m_3 + 2m_p))c^2$. Следовательно, $Q_2 - Q_1 =$

$=((m_1 - m_2) - m_p)c^2$. Учитывая, что $m_1 - m_2 = m_p - \Delta m$, получаем, что $Q_2 - Q_1 = -\Delta mc^2$. Отсюда $Q_2 = Q_1 - \Delta mc^2$. Так как 1 а.е.м. соответствует энергия 931 МэВ, то $\Delta mc^2 = 0,006 \cdot 931 = 5,6$ МэВ.

Итак, во второй реакции при синтезе одного ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ выделяется энергия $Q_2 = 18,4 - 5,6 = 12,8$ МэВ. 1 кг гелия содержит $\nu = 1 \text{ кг} / (4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}) = 0,25 \cdot 10^3$ молей и, следовательно, содержит $N = \nu N_A = 0,25 \cdot 10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23} = 1,5 \cdot 10^{26}$ атомов гелия. Поэтому при синтезе 1 кг гелия во второй реакции выделится энергия

$$W = Q_2 N = 19,2 \cdot 10^{26} \text{ МэВ} = 19,2 \cdot 10^{32} \text{ эВ} = 3,1 \cdot 10^{14} \text{ Дж}.$$

21. При распаде нейтральной частицы образовалось два фотона, летящих под углами α и β к направлению движения частицы. Определить скорость распавшейся частицы (см. рис. 290).

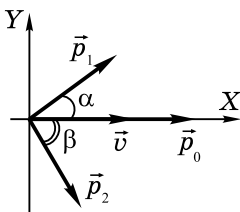


Рис. 290

Решение

Пусть W_0 — энергия частицы, а W_1 и W_2 — энергии образовавшихся фотонов. По закону сохранения энергии $W_0 = W_1 + W_2$. Пусть масса покоя частицы m_0 , тогда

$$W_0 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

где v — скорость частицы.

При распаде частицы выполняется также закон сохранения импульса. Если \vec{p}_0 — импульс частицы, а \vec{p}_1

и \vec{p}_2 — импульсы фотонов, то выполняется векторное равенство $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Введем координатные оси X и Y , как показано на рис. 290, и спроецируем векторное равенство на эти оси. Получим два уравнения: по оси Y $p_1 \sin \alpha - p_2 \sin \beta = 0$, по оси X : $p_0 = p_1 \cos \alpha + p_2 \cos \beta$. Отметим, что $p_0 = m_0 v / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, а импульсы фотонов равны $p_1 = W_1 / c$ и $p_2 = W_2 / c$. После подстановок получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = W_0, \\ (W_1 \sin \alpha) / c = (W_2 \sin \beta) / c, \\ (W_1 \cos \alpha) / c + (W_2 \cos \beta) / c = p_0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1 + W_2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ W_1 \sin \alpha = W_2 \sin \beta, \\ W_1 \cos \alpha + W_2 \cos \beta = m_0 v c / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $W_2 = W_1 \sin \alpha / \sin \beta$. Подставляя это в третье уравнение, получаем

$$\begin{aligned} W_1 \cos \alpha + W_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_1 \frac{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} &= \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow W_1 = \frac{m_0 v c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_2 &= \frac{m_0 c v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение системы, находим

$$\frac{m_0 c v}{\sqrt{1 - (v/c)^2} \sin(\alpha + \beta)} (\sin \alpha + \sin \beta) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

Содержание

<i>От автора</i>	3
Раздел 1. КИНЕМАТИКА.....	5
Раздел 2. ДИНАМИКА.....	35
Раздел 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ	62
Раздел 4. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ.....	89
Раздел 5. СТАТИКА. ГИДРОСТАТИКА	109
Раздел 6. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ	132
Раздел 7. ТЕРМОДИНАМИКА. НАСЫЩЕННЫЕ И НЕНАСЫЩЕННЫЕ ПАРЫ	156
Раздел 8. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	185
Раздел 9. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА	221
Раздел 10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.....	251
Раздел 11. КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	277
Раздел 12. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА	314
Раздел 13. ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА.....	350
Раздел 14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА.....	385

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание
анықтамалық басылым

ЕГЭ. СДАЁМ БЕЗ ПРОБЛЕМ

Колесников Владимир Александрович

**ЕГЭ 2021
ФИЗИКА**

Решение задач

(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Г. Златогоров*
Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *М. Лазуткина*
Корректор *О. Ковальчук*

ООО «Издательство «Эксмо»

123308, Россия, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Өндіруші: «ЭКМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.

Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.

Тауар белгісі: «Эксмо»

Интернет-магазин : www.book24.ru

Интернет-магазин : www.book24.kz

Интернет-дүкен : www.book24.kz

Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».

Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.

Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,

в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»

Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды

қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,

Алматы қ., Домбровский көш., 3-а, литер Б, офис 1.

Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.

Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо» www.eksmo.ru/certification

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 03.06.2020. Формат 60х90 ¹/₁₆.

Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0.

Тираж экз. Заказ .



Москва. ООО «Торговый Дом «Эксмо»

Адрес: 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1.

Телефон: +7 (495) 411-50-74. E-mail: reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»

E-mail: international@eksmo-sale.ru

International Sales: International wholesale customers should contact

Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.

international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном оформлении, обращаться по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2261.

E-mail: ivanova.ey@eksmo.ru

Оптовая торговля бумажно-беловыми

и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:

Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,

Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс: +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).

e-mail: kanc@eksmo-sale.ru, сайт: www.kanc-eksmo.ru

Филиал «Торгового Дома «Эксмо» в Нижнем Новгороде

Адрес: 603094, г. Нижний Новгород, улица Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза»

Телефон: +7 (831) 216-15-91 (92, 93, 94). E-mail: reception@eksmonn.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Санкт-Петербурге

Адрес: 192029, г. Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, д. 84, лит. «Е»

Телефон: +7 (812) 365-46-03 / 04. E-mail: server@szko.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Екатеринбург

Адрес: 620024, г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ

Телефон: +7 (343) 272-72-01 (02/03/04/05/06/08)

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Самаре

Адрес: 443052, г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»

Телефон: +7 (846) 207-55-50. E-mail: RDC-samara@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Ростове-на-Дону

Адрес: 344023, г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, 44А

Телефон: +7(863) 303-62-10. E-mail: info@rnd.eksmo.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Новосибирске

Адрес: 630015, г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3

Телефон: +7(383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

Обособленное подразделение в г. Хабаровске

Фактический адрес: 680000, г. Хабаровск, ул. Фрунзе, 22, оф. 703

Почтовый адрес: 680020, г. Хабаровск, А/Я 1006

Телефон: (4212) 910-120, 910-211. E-mail: eksmo-khv@mail.ru

Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Тюмени

Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Тюмени

Адрес: 625022, г. Тюмень, ул. Пермьякова, 1а, 2 этаж. ТЦ «Перестрой-ка»

Ежедневно с 9.00 до 20.00. Телефон: 8 (3452) 21-53-96

Республика Беларусь: ООО «ЭКСМО АСТ Си энд Си»

Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Минске

Адрес: 220014, Республика Беларусь, г. Минск, проспект Жукова, 44, пом. 1-17, ТЦ «Outleto»

Телефон: +375 17 251-40-23; +375 44 581-81-92

Режим работы: с 10.00 до 22.00. E-mail: ekmoast@yandex.by

Казахстан: «РДЦ Алматы»

Адрес: 050039, г. Алматы, ул. Домбровского, 3А

Телефон: +7 (727) 251-58-12, 251-59-90 (91, 92, 99). E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Украина: ООО «Форс Украина»

Адрес: 04073, г. Киев, ул. Вербова, 17а

Телефон: +38 (044) 290-99-44, (067) 536-33-22. E-mail: sales@forsukraine.com

Полный ассортимент продукции ООО «Издательство «Эксмо» можно приобрести в книжных магазинах «Читай-город» и заказать в интернет-магазине: www.chitai-gorod.ru.

Телефон единой справочной службы: 8 (800) 444-8-444. Звонок по России бесплатный.

Интернет-магазин ООО «Издательство «Эксмо»

www.book24.ru

Розничная продажа книг с доставкой по всему миру.

Тел.: +7 (495) 745-89-14. E-mail: imarket@eksmo-sale.ru



eksmo.ru

ISBN 978-5-04-112811-1



9 785041 112811 >

book 24.ru

Официальный
интернет-магазин
издательской группы
"ЭКСМО-АСТ"

С ПОМОЩЬЮ ЭТОЙ КНИГИ ВЫ:

- **ОТРАБОТАЕТЕ НАВЫКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ;**
- **ЗАКРЕПИТЕ И УГЛУБИТЕ ЗНАНИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ КУРСА;**
- **СОКРАТИТЕ ВРЕМЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ И ПОЛУЧИТЕ ОТЛИЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.**

ФИЗИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



В серии «ЕГЭ. Сдаём без проблем» выходят пособия по основным предметам: русскому языку, литературе, математике, физике, химии, биологии, географии, информатике, истории, обществознанию и иностранным языкам.

**ГАРАНТИЯ
УСПЕХА
НА ЭКЗАМЕНЕ!**

ISBN 978-5-04-112811-1



9 785041 128111 >

