

В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**СДАЁМ
БЕЗ
ПРОБЛЕМ!**

**ЕГЭ
2020**

ПОДРОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ВСЕМ ТЕМАМ

ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ



СДАЁМ
БЕЗ ПРОБЛЕМ!



В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



Москва
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М64

Мирошин, Владимир Васильевич.

М64 ЕГЭ 2020. Математика : решение задач / В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский. — Москва : Эксмо, 2019. — 496 с. — (ЕГЭ. Сдаём без проблем).

ISBN 978-5-04-103008-7

Издание предназначено для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

Пособие содержит полезную информацию для решения задач профильного уровня, основные понятия, определения, формулы, а также подробные решения более 500 задач. С помощью данного пособия учащийся сможет научиться решать задачи разного уровня сложности.

Издание окажет помощь учащимся не только при подготовке к ЕГЭ, но и к дополнительным вступительным испытаниям по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-103008-7 © Мирошин В. В., Рязановский А. Р., 2019
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2019

Введение

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к *вступительным экзаменам* в вуз и к *единому государственному экзамену* (ЕГЭ) по математике и получить высокие баллы. Поскольку ЕГЭ — это не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, предусматривающий проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по всему курсу математики: как по арифметике и алгебре для 7—11 классов, так и по курсу начал анализа 10—11 классов. При этом мы хотели, не перегружая пособие излишними подробностями, а тем более — теоретическими выкладками и доказательствами, сосредоточить внимание на решении задач и в первую очередь на решении задач повышенной сложности.

Пособие включает восемь глав. Каждая глава начинается с краткого перечисления некоторых теоретических сведений с краткими комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждая глава набором задач для самостоятельного решения. Эти задания взяты из различных сборников и из разрешенных для публикации (открытых) вариантов ЕГЭ.

Как рекомендуется работать с пособием? Сначала внимательно прочтите и изучите теоретическое введение к данной теме. Изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами и задачами. Прочитав задачу, попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в решение, предложенное в пособии. Не исключено, что ваше решение может оказаться более рациональным или оригинальным. Если же все ваши попытки окажутся безуспешными, посмотрите на-

чало решения, указанного в пособии. Не исключено, что вам будет достаточно какой-то начальной идеи, чтобы завершить решение задачи самостоятельно. И только если и в этом случае задачу решить не удастся, ознакомьтесь с ее полным решением, предложенным в пособии. После этого *обязательно перерешайте задачу* от начала и до конца.

Мы уверены, что пособие поможет вам успешно сдать вступительные экзамены и поступить в вуз.

Желаем успеха!

ГЛАВА 1

ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество R действительных чисел. Любое число $x \in R$ является или рациональным, или иррациональным числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества Q рациональных чисел и множества \bar{Q} иррациональных чисел: $R = Q \cup \bar{Q}$. Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* и обозначается $[a; b]$. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$, называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно $(a; b]$ и $[a; b)$. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$. Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено $\langle a; b \rangle$.

Каждое рациональное число $r \in Q$ можно представить в виде отношения целого числа m к натуральному числу n : $r = \frac{m}{n}$, где $n \in N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$. Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку $n = \frac{n}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ и $-n = \frac{-n}{1}$. Рациональными числами

являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1) = 0,1111\dots 1\dots = 0,1 + 0,001 + \dots + 0,\overbrace{000\dots 01}^{(n-1)\text{ нуль}} + \dots,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$ со знаменателем $q = 0,1$ и первым членом $a_1 = 0,1$, получим $0,(1) = \frac{0,1}{1-0,1} = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9}$.

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби $0,(a_1 a_2 \dots a_n)$, дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период) $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби**:

$$0,(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ девяток}}}.$$

$$\text{Например, } 0,(1) = \frac{1}{9}; \quad 0,(2) = \frac{2}{9}; \quad 0,(9) = \frac{9}{9} = 1; \quad 0,(17) = \frac{17}{99};$$

$$0,(1323) = \frac{1323}{9999} = \frac{147}{1111}.$$

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323) = \frac{78,(1323)}{100} = \frac{78 + 0,(1323)}{100} = \frac{78 + \frac{1323}{9999}}{100}.$$

$$\text{Выполнив сложение, получим } 0,78(1323) = \frac{781245}{999900}.$$

Число $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби**. Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают спе-

циальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа $\sqrt{17}$; $\sqrt[14]{15}$; $5^{6,3}$; $\log_7 10$; $\sin \frac{\pi}{5}$, при записи которых использованы символы $\sqrt[n]{}$, \log_a ; \sin . Иррациональными являются, например, числа $\pi = 3,1415\dots$ и $e = 2,718281828\dots$.

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Решение. а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n; 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n=1; 2; 3; 4$ интервал $(3n; 4n)$ не содержит кратных 6. При $n=5$ интервал $(3n; 4n)$ имеет вид $(15; 20)$, на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18=6 \cdot 3$, т.е. $m=3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите

б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a; 2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5-2a)+(2a+7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в пра-

вой полукрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24,5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a , для которых $24,5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики**:

Каждое натуральное число n , большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k,$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом**, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p . Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом**. Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению

$x = p - \frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит,

число x — делитель числа q . По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком**. Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a = bc + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

При $r > 0$ число c называется **неполным частным** от деления a на b ; при $r=0$ число c есть **частное** от деления a на b ; b — **делитель** a ; a — **кратное** b . Говорят также, что **число b делит число a** . Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число a делится на b** : $a:b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \leq b \leq a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567} .

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141 \cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

1. Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b :
НОД(a ; b).

2. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b :
НОК[a ; b].

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например, $\text{НОД}(12; 32)=4$. Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель $\text{НОД}(a; b)$ двух натуральных чисел, можно использовать их разложения на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида**. В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=12 \cdot 2 + 8; \quad 12=8 \cdot 1 + 4; \quad 8=4 \cdot 2.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является $\text{НОД}(12; 32)$.

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей: $12 = 2^2 \cdot 3$; $32 = 2^5$. Ясно, чтобы натуральное число k было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы k делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы $k = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot m$, где $m \in N$. Отсюда при $m = 1$ получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому НОК[12; 32] = 96.

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного НОК[a ; b] двух натуральных чисел a и b , где $a \geq b$, обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят НОД(a ; b), а затем используют равенство НОК[a ; b] НОД(a ; b) = ab . В нашем случае

$$\text{НОК}[12; 32] = \frac{12 \cdot 32}{\text{НОД}(12; 32)} = \frac{12 \cdot 32}{4} = 96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель НОД(a ; b) натуральных чисел a и b , где $a > b$, обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1. НОД(a ; b) = НОД(ka ; kb), $k \in N$;

2. НОД($\frac{a}{k}$; $\frac{b}{k}$) = $\frac{\text{НОД}(a; b)}{k}$;

3. НОД(a ; b) = НОД(a ; $a \pm b$).

Пример 5. Целые числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1 . Является ли дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократимой при некоторых натуральных m и n ?

Решение.

Пусть

$$d = \text{НОД}(5m - 3n; 2m + 5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} 5m - 3n = dk, \\ 2m + 5n = ds, \end{cases}$$

где числа k и s взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа d , отличный от 1.

Запишем $m = \frac{5k+3s}{31}d$, $n = \frac{5s-2k}{31}d$. Отсюда $d = 31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n} = 2 + \frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n \neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{31n}{m-13n}$. Но числа m и n не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при $m=23$, $n=-3$ получаем дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n} = \frac{5 \cdot 23 + 9}{2 \cdot 23 - 15} = \frac{124}{31}$, которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел**. Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{опр.}} an < bm.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b} > \alpha, \alpha > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

Теорема.

Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:

$$\text{если } a > b > 0 \text{ и } c > 0, \text{ то } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} \text{ и } \frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}.$$

Пример 6. Сравните числа $\frac{1222333}{1333222}$ и $\frac{2222333}{2333222}$.

Решение. Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножать семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь

$$\frac{1222333}{1333222} \text{ правильная и } \frac{2222333}{2333222} = \frac{1222333 + 1000000}{1333222 + 1000000}, \text{ то}$$

$$\frac{1222333}{1333222} < \frac{2222333}{2333222}.$$

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

Теорема.

Если $a > 0$, $b > 0$, то $a > b \Leftrightarrow a^\beta > b^\beta$, где β — положительное число.

Теорема.

Если $a > 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha > a^\beta$; если $0 < a < 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha < a^\beta$.

Теорема.

Если $a \geq b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, где n, m — натуральные числа.

Пример 7. Сравните числа 2^{300} и 3^{200} .

Решение. Поскольку $2^{300} = (2^3)^{100}$, а $3^{200} = (3^2)^{100}$, и $2^3 < 3^2$, то $2^{300} < 3^{200}$.

Пример 8. Сравните числа $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

Решение. Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,4}$, а $2^{\sqrt{3}} < 2^2$. Сравним теперь числа $3^{1,4} = (3^{0,7})^2$ и 2^2 . Для этого достаточно сравнить $3^{0,7}$ и 2 или $(3^{0,7})^{10}$ и 2^{10} . Но $(3^{0,7})^{10} = 3^7 = 2187$, а $2^{10} = 1024$. Теперь получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} 1024 < 2187 &\Leftrightarrow 2^{10} < 3^7 \Leftrightarrow 2 < 3^{0,7} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^2 < 3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 9. Сравните числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

Решение. Воспользуемся следующим свойством радикалов: если $a > 0$, то $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$, где n, k — натуральные числа.

Получим $\sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6}$ и $\sqrt[6]{6} = \sqrt[30]{6^5}$. Теперь достаточно сравнить степени 5^6 и 6^5 . Оценим их отношение:

$$\begin{aligned} \frac{5^6}{6^5} &= \frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3} = \\ &= \frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)} > \frac{5}{2 \cdot 2} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{5^6}{6^5} > 1 \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$ и, значит, $\sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$.
Замечания.

1) В данном случае степени 5^6 и 6^5 невелики, а именно $5^6 = 15625$, $6^5 = 7776$, и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 125 > 10000,$$

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 36 \cdot 6 < 40 \cdot 40 \cdot 6 = 9600.$$

Поэтому $5^6 > 10000 > 9600 > 6^5$.

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например, n^{n+1} и $(n+1)^n$, то можно использовать неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, верное при любом натуральном n , и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{3} \geq 1 \text{ при всех натуральных } n \geq 3.$$

Упражнение. Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \leq \sin b$ и $\operatorname{tga} \leq \operatorname{tg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\cos a \geq \cos b$ и $\operatorname{ctga} \geq \operatorname{ctg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \sin \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-1 \leq a \leq b \leq 1$, то $\arcsin a \leq \arcsin b$, но $\arccos a \geq \arccos b$ (свойство монотонности).

Если $a \leq b$, то $\arctg a \leq \arctg b$, но $\operatorname{arcctg} a \geq \operatorname{arcctg} b$ (свойство монотонности).

Пример 10. Найдите множество значений функции¹

$$y = \sin(0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x})).$$

Решение. Сначала установим область определения данной функции. Поскольку функция $\sin t$ определена при любом t , то область определения данной функции совпадает с областью определения функции $y = \arccos t$, где $t = 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}$. По определению $\arccos t$ определен только на отрезке $-1 \leq t \leq 1$. Решим неравенство

$$-1 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1.$$

Получим

$$-1 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 1 + \sqrt{1-0,5x} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1-0,5x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,5x \leq 1, \\ 1-0,5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Итак, данная функция определена только на отрезке $[0; 2]$. При всех этих x имеем неравенство $0,5 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1$ и поэтому

$$\arccos 0,5 \geq \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \geq \arccos 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \leq \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$0 \leq \sin(0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x})) \leq \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $\frac{1}{2}$.

Перечислим некоторые свойства логарифмических функций, связанные с неравенствами.

¹ Другие задания на нахождение области значений функции см. в главе 2.

Если $0 < a \leq b$ и $c > 1$, то $\log_c a \leq \log_c b$ (свойство монотонности).

Если $1 < a \leq b$ и $c > 1$, то $0 < \log_b c \leq \log_a c$ (свойство монотонности).

Пример 11. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

Решение. Здесь можно поступить так. Сравним числа

$$\log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \log_3 4 - 1 = \log_3 \frac{4}{3}.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\log_2 \frac{3}{2} > \log_2 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $\log_2 3 > \log_3 4$.

В данном случае возможен второй способ. Пусть $\log_2 3 = a$. Тогда

$$\log_3 4 = 2 \log_3 2 = \frac{2}{\log_2 3} = \frac{2}{a}.$$

Рассмотрим функцию $y = x - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2}{x}$. При $x > 0$ значения этой функции положительны при $x > \sqrt{2}$, и отрицательны при $0 < x < \sqrt{2}$. Поэтому сравним числа a и $\sqrt{2}$, т.е. $\log_2 3$ и $\sqrt{2} = \log_2 2^{\sqrt{2}}$. Для этого достаточно сравнить числа 3 и $2^{\sqrt{2}}$. Имеем цепочку неравенств $2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5} \leq 2\sqrt{2} < 2 \cdot 1,5 = 3$. Отсюда $\log_2 3 = a > \sqrt{2}$ и поэтому значение $y(a) = a - \frac{2}{a} > 0$. Следовательно,

$$\log_2 3 - \log_3 4 > 0 \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_3 4.$$

Часто при решении задач повышенной сложности приходится выполнять тождественные преобразования для того, чтобы данное выражение стало удобно для исследования. В основе этих преобразований лежат различные формулы. Перечислим некоторые из них, которые встречаются наиболее часто.

§ 2. Формулы сокращенного умножения

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
2. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
3. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

$$4. a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$6. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$7. (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$8. (a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy.$$

$$10. x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y).$$

$$11. x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2.$$

$$12. x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

$$13. x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

$$14. x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2.$$

Пример 1. Найдите все действительные значения параметра a , при каждом из которых выражение $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ принимает наименьшее значение, если числа x_1 и x_2 — действительные, необязательно различные, корни уравнения $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{5-2a}}{x^2} = \frac{a}{x^3}$.

Решение. Число $x=0$ не является корнем данного уравнения, которое поэтому можно переписать в виде равносильного уравнения

$$x^2 - x\sqrt{5-2a} - a = 0,$$

где $a \neq 0$. При каждом $a \leq 2,5$ и $a \neq 0$ это квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант

$$D = (\sqrt{5-2a})^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 5 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2,5.$$

Если $a > 2,5$, то данное уравнение не имеет действительных корней. Удобно воспользоваться теоремой Виета. Но

сначала необходимо преобразовать выражение $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$.
Получим

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 x_2)^2} = \frac{((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2}.$$

Если $-2,5 \leq a \leq 2,5$ и $a \neq 0$, то по теореме Виета находим $x_1 + x_2 = \sqrt{5 - 2a}$, $x_1 \cdot x_2 = -a$. Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 &= \frac{((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} = \\ &= \frac{(5 - 2a + 2a)^2 - 2a^2}{a^2} = \frac{25}{a^2} - 2. \end{aligned}$$

Поскольку $-2,5 \leq a \leq 2,5$ и $a \neq 0$, то $0 < a^2 \leq 6,25$. Отсюда $\frac{25}{a^2} - 2 \geq \frac{25}{6,25} - 2 = 2$. Следовательно, наименьшее значение

выражения $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ равно 2 и оно достигается тогда и только тогда, когда $a^2 = 6,25 \Leftrightarrow a = \pm 2,5$.

Ответ: $a = \pm 2,5$.

§ 3. Свойства степеней и логарифмов

3.1. Свойства степеней

Напомним, что степенью действительного числа a называется выражение вида a^n , где a — основание степени, n — показатель степени. При этом если n — натуральное число, то степени $a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $n > 1$; $a^0 = 1$, если

$a \neq 0$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, если $a \neq 0$ определены для любого $a \in \mathbb{R}$; если

m — натуральное число, то степень $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ определена для любого действительного числа $a \geq 0$; степень $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

определена для любого действительного числа $a > 0$; если α — иррациональное положительное число, то степень a^α определена для любого действительного числа $a \geq 0$ как предел

последовательности рациональных степеней числа a , а именно $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{r}_n}$, где r_n и \bar{r}_n — последовательности рациональных чисел, таких, что для любого n справедливо неравенство $r_n < \alpha < \bar{r}_n$ и $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}_n$; степень $a^{-\alpha}$ определена для любого действительного числа $a > 0$.

По поводу определения степени с иррациональным показателем отметим следующее. Поскольку в школьном курсе математики отсутствует строгое определение предела последовательности, а иногда имеется только некоторое пояснение этого сложного понятия, то и степень с иррациональным показателем можно понять только качественно, не точно. Учащийся должен понимать, что, например, степень $5^{\sqrt[3]{2}}$ есть некоторое положительное действительное число, найти первые десятичные знаки которого можно с помощью калькулятора, и так как $1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3$, то $5^{1,2} < 5^{\sqrt[3]{2}} < 5^{1,3}$.

Отметим, что следует различать выражение x^x и функцию $y = x^x$. Различие состоит в том, что выражение x^x определено при всех положительных действительных значениях x , а также при всех целых отрицательных значениях x . Функция $y = x^x$, которая называется показательно-степенной, имеет, по определению, область определения R_+ , т.е. состоящую только из всех положительных действительных чисел: $R_+ = (0; +\infty)$.

Перечислим теперь свойства степеней.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, a, n, m \in R$.
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}, a, n, m \in R$.
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n, a, n \in R$.
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, a, b, n \in R, b \neq 0$.

Свойства радикалов

Напомним, что понятие корня натуральной степени n из действительного числа a вводится для четных и нечетных показателей различно.

Если показатель корня — натуральное **четное** число, то есть $n = 2k, k \in N$, то по определению

$$\sqrt[2k]{a} = b \xleftrightarrow{\text{онр.}} \begin{cases} b \geq 0, \\ a = b^{2k}. \end{cases}$$

Если показатель корня — натуральное **нечетное** число, то есть $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, то по определению

$$\sqrt[2k+1]{a} = b \xleftrightarrow{\text{онр.}} a = b^{2k+1}.$$

Отметим особо, что ни в первом случае, когда показатель корня — натуральное **четное** число, ни во втором, когда показатель корня — натуральное **нечетное** число, ничего не говорится о подкоренном выражении, в данном случае о числе a . Однако **из определения** корня четной степени **следует**, что корень четной степени из отрицательного действительного числа не определен.

Справедлива **теорема**¹:

Для любого неотрицательного действительного числа a и произвольного натурального числа k существует единственное неотрицательное действительное число b такое, что $b^{2k} = a$.

Для любого действительного числа a и произвольного натурального числа k существует единственное действительное число b такое, что $b^{2k+1} = a$.

В первом случае число b обозначают $\sqrt[2k]{a}$, а во втором $\sqrt[2k+1]{a}$. При этом неотрицательное значение корня из неотрицательного числа называют **арифметическим значением корня**² или просто **арифметическим корнем**.

Справедливы следующие свойства.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$ и $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}, a \leq 0, b \leq 0$.
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ и $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ при любом a .
3. $x \sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{x^{2k} a}$ при $x \geq 0$ и $x \sqrt[2k]{a} = -\sqrt[2k]{x^{2k} a}$ при $x < 0$.
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ при $a \geq 0$, но при $a \leq 0$ $\sqrt[n]{a^{2k}} = (\sqrt[n]{-a})^{2k}$.

¹ Доказательство этой теоремы выходит за рамки программы школьного курса математики.

² Знак $\sqrt[n]{a}$ используется в школьном курсе математики для обозначения арифметического корня из неотрицательного числа, а при нечетном n — для обозначения единственного корня из данного числа. Например, $\sqrt[3]{-1} = -1$.

5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a}$ при любом a , если m, n — натуральные нечетные числа, и при $a \geq 0$, если хотя бы одно из натуральных чисел m, n — четное.

Пример 1. При каком целом положительном x значение выражения $\sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$ ближе всего к числу 0,7?

Решение. Данное выражение определено при выполнении трех условий:

$$1) \frac{x-7}{x+3} \geq 0;$$

$$2) x^2 - 4x - 21 \geq 0 \text{ и}$$

$$3) x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49 \neq 0.$$

По условию $x > 0$, и с учетом 1) и 2) находим, что $x \geq 7$. Заметим, что

$$\begin{aligned} x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49 &= (x^2 - 49) - (x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)} = \\ &= (x+7)(x-7 - \sqrt{(x+3)(x-7)}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что число 7 не удовлетворяет условию 3). При $x > 7$, $(x+7)(x-7 - \sqrt{(x+3)(x-7)}) < 0$. Следовательно, искомые значения x удовлетворяют условию $x > 7$.

Преобразуем данное выражение с учетом условия $x > 7$. Сначала поработаем с числителем и знаменателем. Получим

$$\begin{aligned} 9 + (x-3)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - x^2 &= (3-x)(3+x) + \\ &+ (x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)} = (3-x)(3+x) + \\ &+ (x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)} = (3-x)\sqrt{3+x}(\sqrt{3+x} - \sqrt{x-7}). \\ x^2 - (x+7)\sqrt{x^2 - 4x - 21} - 49 &= (x+7)(x-7) - \\ &- (x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)} = (x+7)\sqrt{x-7}(\sqrt{x-7} - \sqrt{x+3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49} &= \\ &= \sqrt{\frac{x-7}{x+3}} \cdot \frac{(3-x)\sqrt{3+x}(\sqrt{3+x}-\sqrt{x-7})}{(x+7)\sqrt{x-7}(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3})} = \frac{x-3}{x+7}. \end{aligned}$$

Решим уравнение $\frac{7}{10} = \frac{x-3}{x+7}$. Получим $x = 26\frac{1}{3}$. Рассмотрим функцию $y = \frac{x-3}{x+7}$. Так как $y = \frac{x-3}{x+7} = 1 - \frac{10}{x+7}$, то при возрастании x от 7 до $+\infty$ значения дроби $\frac{10}{x+7}$ уменьшаются от $\frac{5}{7}$ до 0 и выполняется неравенство $0 < \frac{10}{x+7} < \frac{5}{7}$. Следовательно, на промежутке $(7; +\infty)$ функция $y = \frac{x-3}{x+7} = 1 - \frac{10}{x+7}$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left(\frac{2}{7}; 1\right)$. Так как функция $y = \frac{x-3}{x+7}$ монотонно возрастает и $y\left(26\frac{1}{3}\right) = 0,7$, то условию задачи может удовлетворять или 26, или 27. Найдем $y(26) = \frac{23}{33}$ и $y(27) = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$. Теперь сравним два числа $0,7 - \frac{23}{33} = \frac{1}{330}$ и $\frac{12}{17} - \frac{7}{10} = \frac{1}{170}$. Так как $\frac{1}{330} < \frac{1}{170}$, то значение $y(26) = \frac{23}{33}$ ближе всего к 0,7.

Ответ: 26.

3.2. Свойства логарифмов

Напомним, что число $\alpha = \log_a p$ называется **логарифмом** действительного числа p по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, если $a^\alpha = p$, т.е. логарифм числа p по основанию a есть тот показатель степени, при возведении в который числа a получим данное число p .

Можно написать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^\alpha = p \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_a p = \alpha$.

То же самое можно записать в виде тождества: если $a > 0$, $a \neq 1$, то $a^{\log_a p} = p$ (**основное логарифмическое тождество**).

Из определения логарифма следует, что логарифм отрицательного числа и нуля не определены. Ограничения $a > 0$, $a \neq 1$ на основание a логарифма иногда полезно записывать в виде $\frac{a}{|a-1|} > 0$.

Справедлива **теорема**¹:

Для любого положительного действительного числа p и произвольного действительного числа a такого, что $\frac{a}{|a-1|} > 0$, существует единственное действительное число $\alpha = \log_a p$.

Отсюда следует, что любое действительное число можно рассматривать как логарифм некоторого числа, вычисленного по определенному основанию. Например, число $5,4 = \log_7(7^{5,4})$. В общем случае для любого действительного α справедливо равенство $\alpha = \log_a(a^\alpha)$.

Справедливы следующие свойства:

1. $\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$, $p > 0$, $q > 0$. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $p < 0$, $q < 0$, то $\log_a(pq) = \log_a(-p) + \log_a(-q)$.

2. $\log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a p - \log_a q$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$, $p > 0$, $q > 0$. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $p < 0$, $q < 0$, то $\log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a(-p) - \log_a(-q)$.

3. $\log_{a^k}(p^s) = \frac{s}{k} \log_a p$ при любом $s > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $p > 0$. Если $a \neq 1$, k, s — четные целые числа, то $\log_{a^k}(p^s) = \frac{s}{k} \log_{|a|}|p|$.

Например,

$\log_5(a^8) = 8 \log_5 |a|$; $\log_{b^4}(a^6) = \frac{6}{4} \log_{|b|}|a| = 1,5 \cdot \log_{|b|}|a|$, при $0 < |b| \neq 1$.

4. $\log_a p \cdot \log_b q = \log_b p \cdot \log_a q$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $p > 0$, $q > 0$. В частности, справедливы формулы перехода к другому основанию (модуль перехода):

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a} \text{ и } \log_a b = \frac{\log_b p}{\log_b q}.$$

Указанное свойство можно записать следующим образом:

$$\frac{\log_a p}{\log_a q} = \frac{\log_b p}{\log_b q},$$

¹ Доказательство этой теоремы выходит за рамки программы школьного курса математики.

то есть отношение логарифмов, имеющих одно и тоже основание, не зависит от этого основания.

5. Полезны следующие представления степеней через логарифм: $a^b = c^{b \log_c a}$ при любом b , $a > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$; $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ при любом $a > 0$, $b > 0$, $(a-1)(b-1) > 0$ и $a^{\sqrt{\log_b a}} = c^{\sqrt{\log_a b}}$.

Пример 2. Выразите $\log_{0,75} 72$ через x , если $x = \log_2 3$.

Решение. Воспользуемся формулой перехода к основанию 2:

$$\log_{0,75} 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 0,75} = \frac{\log_2 8 + \log_2 9}{\log_2 3 - \log_2 4} = \frac{3 + 2\log_2 3}{\log_2 3 - 2} = \frac{3 + 2x}{x - 2}.$$

Преобразование выражений, содержащих тригонометрические и/или обратные тригонометрические функции, осуществляется с помощью тригонометрических формул.

§ 4. Тригонометрические формулы

4.1. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же числа (угла)

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, для любого x .
2. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, для любого $x \neq \frac{\pi n}{2}$, где n — любое целое число.
3. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ или $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$ для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число (в последнем случае для любого $x \neq \pi n$).
4. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ или $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ для любого $x \neq \pi n$, где n — любое целое число (в последнем случае для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$).

4.2. Формулы сложения

5. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, для любых x и y .
6. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, для любых x и y .

7. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$ для любых x и y , таких что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — произвольное целое число.

4.3. Формулы кратных углов

8. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, для любых x .

9. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

10. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

11. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

12. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

4.4. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют свести вычисление значений тригонометрических функций в произвольных точках числовой оси к вычислению значений тригонометрических функций в тех точках x , которые удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ($0^\circ \leq x \leq 45^\circ$). Выпишем некоторые из них:

1) $\sin(-x) = -\sin x$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$;

4) $\sin(\pi - x) = \sin x$;

5) $\cos(\pi + x) = -\cos x$;

6) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$;

8) $\operatorname{tg}(2\pi - x) = \operatorname{tg} x$.

Особенно полезны так называемые **формулы дополнения (или дополнительных углов)**, которые удобно записать в следующем виде.

Теорема.

Если $x + y = \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x = \cos y; \quad \cos x = \sin y;$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y; \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} y;$$

если $x + y = \pi$, то

$$\sin x - \sin y = 0, \quad \cos x + \cos y = 0;$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0; \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 0.$$

Пример 1. Вычислите $\frac{\cos 247^\circ \sin 131^\circ - \sin 401^\circ \sin 337^\circ}{\sin 92^\circ \sin 160^\circ - \cos 200^\circ \sin 358^\circ}$.

Решение. Преобразуем выражение по формулам приведения так, чтобы углы были не больше 45° . Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 247^\circ \sin 131^\circ - \sin 401^\circ \sin 337^\circ}{\sin 92^\circ \sin 160^\circ - \cos 200^\circ \sin 358^\circ} = \\ &= \frac{\cos(270^\circ - 23^\circ) \sin(90^\circ + 41^\circ) - \sin(360^\circ + 41^\circ) \sin(360^\circ - 23^\circ)}{\sin(90^\circ + 2^\circ) \sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ) \sin(360^\circ - 2^\circ)} = \\ &= \frac{-\cos 23^\circ \cos 41^\circ - \sin 41^\circ \sin 23^\circ}{\cos 2^\circ \sin 20^\circ - \cos 20^\circ \sin 2^\circ} = -\frac{\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ} = -1. \end{aligned}$$

4.5. Формулы сложения тригонометрических функций (преобразование суммы функций в произведение)

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ для любых x и y .

2. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ для любых x и y .

3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ для любых x и y .

4. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ для любых x и y .

5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$ для любых x и y таких, что

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — произвольное целое число.

Замечание.

Для сложения разноименных функций используют, как правило формулы приведения. Например,

$$\cos x - \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right).$$

4.6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$6. \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \text{ для любых } x \text{ и } y.$$

$$7. \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \text{ для любых } x \text{ и } y.$$

$$8. \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \text{ для любых } x \text{ и } y.$$

4.7. Формулы вспомогательного угла

$$9. a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha), \text{ где } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$10. a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \beta), \text{ где } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$11. a \sin x + a \cos x = a\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 2. Пусть $\cos \frac{\pi}{8} = a$. Выразите через a значение выражения $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{3\pi}{8} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$.

Решение. Применим к первому и последнему слагаемым формулу вспомогательного угла. Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{3\pi}{8} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos \frac{3\pi}{8} = \\ &= 2 \sin \frac{3\pi}{8} + 2 \cos \frac{3\pi}{8} = 2 \left(\sin \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} \right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{8} = \\ &= 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} = 2a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Выразите через радикалы $\sin 15^\circ$ и $\sin 18^\circ$.

Решение. Сначала выразим через радикалы $\sin 15^\circ$. Получим

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Можно поступить иначе:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Вычислить $\sin 18^\circ$ несколько сложнее. Запишем тождество $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$, к которому применим формулы кратных углов. Получим $3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Рассмотрим это равенство как уравнение относительно $x = \sin 18^\circ$:

$$3x - 4x^3 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(x - 1) + 2x(x - 1) - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

и поскольку $x = \sin 18^\circ \neq 1$, то $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Отсюда, учитывая неравенство $x = \sin 18^\circ > 0$, находим $x = \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Найдите самостоятельно $\cos 15^\circ$ и $\sin 54^\circ$.

Пример 4. Вычислите произведение $8\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

Решение. Применим формулы преобразования произведения в сумму. Получим

$$\begin{aligned} 8\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= 4(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ)\cos 80^\circ = \\ &= 4(\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 80^\circ) = 2(\cos 60^\circ + \cos 100^\circ) + 2\cos 80^\circ = \\ &= 2\cos 60^\circ + 2(\cos 100^\circ + \cos 80^\circ) = 1. \end{aligned}$$

(Мы воспользовались значением $\cos 60^\circ = 0,5$ и формулой дополнения для косинусов: $\cos 100^\circ + \cos 80^\circ = 0$.)

Здесь можно применить следующий изящный прием: умножим и разделим данное выражение на $\sin 20^\circ$ и воспользуемся трижды формулой двойного угла:

$$8\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = 1.$$

(Здесь использовалась формула дополнения для синусов: $\sin 160^\circ - \sin 20^\circ = 0$.)

Пример 5. Рассмотрим способ сложения косинусов членов арифметической прогрессии. Вычислите сумму:

$$\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 200^\circ.$$

Решение. Применим способ из примера 4: умножим и разделим данное выражение на $2 \sin 10^\circ$ и воспользуемся формулой для произведения синуса и косинуса. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{2\sin 10^\circ (\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 200^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{\sin 30^\circ - \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 30^\circ + \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} - \\ & - \frac{\sin 50^\circ + \dots + \sin 210^\circ - \sin 190^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{\sin 210^\circ - \sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{2\sin 100^\circ \cos 110^\circ}{2\sin 10^\circ} = -\frac{\cos 10^\circ \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = -2\cos^2 10^\circ. \end{aligned}$$

§ 5. Обратные тригонометрические функции

Прежде чем выписать основные соотношения между обратными тригонометрическими функциями, напомним их определения.

Определение. Арксинусом числа x называется число $y = \arcsin x$, обладающее следующими **двумя** свойствами:

$$1) \sin y = x, \text{ то есть } \sin(\arcsin x) = x; \quad 2) -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из этого определения следует, что для каждого $x \in [-1; 1]$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ существует единственное число $y = \arcsin x$. Указанное соответствие является функцией $y = \arcsin x$, обратной к функции $y = \sin x$, заданной на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Очевидно, что для любого $x \in (0;1)$ число $y = \arcsin x$ можно интерпретировать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, синус которого равен x .

На рис. 1 $\sin(\angle ABC) = \frac{AC}{AB} = x$, поэтому $\angle ABC = \arcsin x$.

Определение. Арккосинусом числа x называется число $y = \arccos x$, обладающее следующими двумя свойствами:

- 1) $\cos y = x$, то есть $\cos(\arccos x) = x$;
- 2) $0 \leq y \leq \pi$.

Из этого определения следует, что для каждого $x \in [-1;1]$ на отрезке $0 \leq y \leq \pi$ существует единственное число $y = \arccos x$. Указанное соответствие является функцией $y = \arccos x$, обратной к функции $y = \cos x$, заданной на отрезке $0 \leq x \leq \pi$.

Аналогично, для любого $x \in (0;1)$ число $y = \arccos x$ можно интерпретировать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, косинус которого равен x .

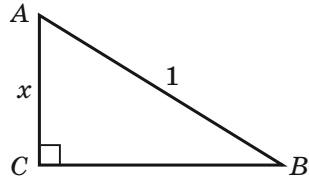


Рис. 1

На рис. 1 $\cos(\angle BAC) = \frac{AC}{AB} = x$, поэтому $\angle BAC = \arccos x$.

Определение. Арктангенсом числа x называется число $y = \arctg x$, обладающее следующими двумя свойствами:

- 1) $\operatorname{tg} y = x$, то есть $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$; 2) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Из этого определения следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ на интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ существует единственное число $y = \arctg x$.

Указанное соответствие является функцией $y = \arctg x$, обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, заданной на интервале

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Для любого $x > 0$ число $y = \arctg x$ можно интерпретировать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, тангенс которого равен x .

На рис. 2 $\operatorname{tg}(\angle ABC) = \frac{AC}{BC} = x$, поэтому $\angle ABC = \arctg x$.

Определение. Арккотангенсом числа x называется число $y = \operatorname{arccotg} x$, обладающее следующими **двумя** свойствами: 1) $\operatorname{ctg} y = x$, то есть $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x$; 2) $0 < y < \pi$.

Из этого определения следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ на интервале $0 < y < \pi$ существует единственное число $y = \operatorname{arccotg} x$.

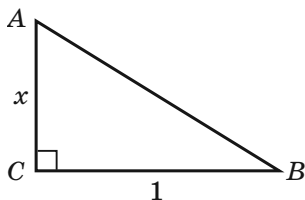


Рис. 2

Указанное соответствие является функцией $y = \operatorname{arccotg} x$, обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, заданной на отрезке $0 < x < \pi$.

Для любого $x > 0$ число $y = \operatorname{arccotg} x$ можно интерпретировать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, котангенс которого равен x .

На рис. 2 $\operatorname{ctg}(\angle BAC) = \frac{AC}{BC} = x$, поэтому $\angle BAC = \operatorname{arccotg} x$.

Для запоминания определений $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccotg} x$ полезно следующее упражнение.

Нарисуйте прямоугольный треугольник с катетами, заданными произвольными, выбранными вами числами. Например, пусть катеты равны a и b . Вычислите гипотенузу c этого треугольника. Получите $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Теперь запи-

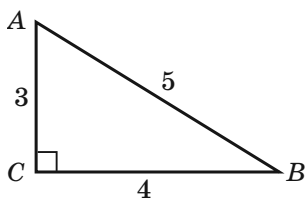


Рис. 3

шите, чему равны все углы этого треугольника, используя символы \arcsin , \arccos , arctg и $\operatorname{arccotg}$.

Приведем пример выполнения такого упражнения, рис. 3. Пусть $AC = 3$, $CB = 4$ — катеты треугольника ABC. Тогда его гипотенуза $AB = 5$. Используя определения, можем записать

$$\angle BAC = \arcsin \frac{4}{5} = \arccos \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = \operatorname{arccotg} \frac{3}{4};$$

$$\angle ABC = \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \operatorname{arccotg} \frac{4}{3};$$

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = \arccos 0 = \operatorname{arccotg} 0.$$

Представить угол, равный $\frac{\pi}{2}$, через $\operatorname{arctg} x$ невозможно, поскольку по определению $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

5.1. Формулы, связывающие обратные тригонометрические функции одного и того же числа

1. $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$ для любого $|x| \leq 1$.
2. $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$ для любого $|x| \leq 1$.
3. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0$ для любого x .
4. $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$ для любого x .
5. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ для любого $|x| \leq 1$.
6. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ для любого x .
7. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = 0$ для любого $x > 0$.
8. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = -\pi$ для любого $x < 0$.

Полезные формулы для вычислений значений тригонометрических функций от значений обратных тригонометрических функций. Такие вычисления нередко приходится выполнять. Укажем некоторые из них.

9. $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, для любого $|x| \leq 1$.
10. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, для любого $x \neq 0$.
11. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, для любого x .
12. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, для любого $|x| < 1$.

5.2. Формулы для сложения обратных тригонометрических функций

13. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin z$, для любых x и y таких, что $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

14. $\arccos x + \arccos y = \arccos z$, для любых x и y таких, что $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, тогда $z = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

15. $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, для любого x такого, что $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

16. $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, для любого x такого, что $0 \leq x \leq 1$.

17. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$, для любых x и y таких, что $|x| < 1$, $|y| < 1$, тогда $z = \frac{x+y}{1-xy}$.

18. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$, для любых x и y таких, что $x > 0$, $y > 0$, тогда $z = \frac{xy-1}{x+y}$.

19. $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, для любого x такого, что $|x| < 1$.

20. $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{2x}$, для любого $x > 0$.

Пример 1. Представьте сумму $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ в виде арксинуса некоторого числа.

Решение. Сначала воспользуемся формулой для суммы двух арктангенсов. Получим

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \operatorname{arctg} \frac{7}{11}.$$

Так как $\frac{7}{11} > 0$, то $\operatorname{arctg} \frac{7}{11}$ — радианная мера острого угла прямоугольного треугольника с катетами 7 и 11, противолежащего катету длиной 7. По теореме Пифагора длина гипотенузы этого треугольника равна $\sqrt{170}$. Поэтому $\operatorname{arctg} \frac{7}{11} = \arcsin \frac{7}{\sqrt{170}}$ (рис. 4).

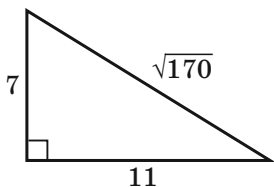


Рис. 4

Ответ: $\arcsin \frac{7}{\sqrt{170}}$.

Пример 2. Сравните числа $\arccos \frac{3}{4}$ и $\operatorname{arcctg} \frac{4}{3}$.

Решение. Выразим arcctg — через арккосинус. Результат можно получить моментально и даже устно, но мы выпол-

ним задачу, используя не интерпретацию $\operatorname{arcsctg} \frac{4}{3}$, а определение $\operatorname{arcsctg} \frac{4}{3}$.

Итак, пусть $x = \operatorname{arcsctg} \frac{4}{3}$. Тогда по определению $\operatorname{arcsctg} \frac{4}{3}$ можем написать: 1) $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$ и 2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Найдем $\cos x$. Известно, что $\cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$. Отсюда $\cos^2 x = \frac{16}{25}$. Но из неравенства $0 < x < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\cos x > 0$. Поэтому $\cos x = \frac{4}{5}$ и поэтому $x = \arccos \frac{4}{5}$. Итак, $\operatorname{arcsctg} \frac{4}{3} = \arccos \frac{4}{5}$.

Требуется сравнить $\arccos \frac{3}{4}$ и $\arccos \frac{4}{5}$. Поскольку $0 < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$, то по свойству арккосинуса $\arccos \frac{3}{4} > \arccos \frac{4}{5} = \operatorname{arcsctg} \frac{4}{3}$.

Пример 3. Докажите равенство $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \alpha$. Чтобы доказать данное равенство, достаточно убедиться в том, что справедливо неравенство $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и вычислить, например, $\sin \alpha$. Если окажется, что $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то равенство будет доказано.

Итак, так как $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 1$, то $\frac{\pi}{2} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Аналогично, так как $0 < \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}$, то

$$0 < \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Поэтому $0 < \frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Вычислим $\sin \alpha$. Применим формулу синуса разности. Получим:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} \right)^2} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Итак, мы получили $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Равенство доказано.

ГЛАВА 2

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 1. Основные понятия и определения

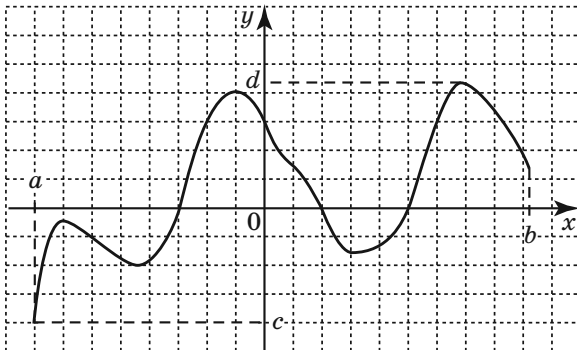
Пусть X — некоторое непустое множество действительных чисел. И пусть указан закон f , по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, обозначаемое $f(x)$, то есть $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве X задана функция (числовая) f . Можно говорить, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Множество X называют областью определения функции и обозначают $D(f)$. Множество Y такое, что для каждого числа $y \in Y$ существует число $x \in X$, такое, что $f(x) = y$ называют областью (или множеством) значений функции и обозначают $E(f)$. Число $x \in D(f)$ называется аргументом функции, а число $y = f(x) \in E(f)$ — значением функции.

Далее рассматриваются конкретные функции, область определения и область значений которых есть определенные подмножества множества действительных чисел.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

На рисунке изображен график некоторой функции, для которой $D(f) = [a; b]$, а $E(f) = [c; d]$.



§ 2. Некоторые классы элементарных функций

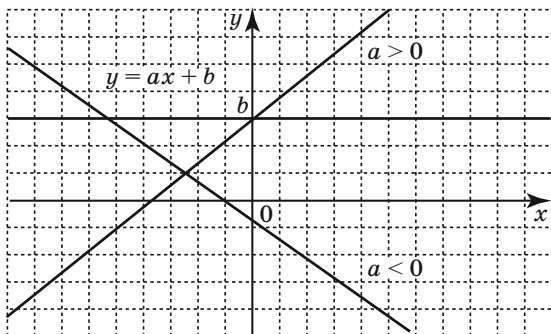
1. Многочленом степени n или целой функцией называется функция вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a \neq 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in R, n$ — натуральное число.

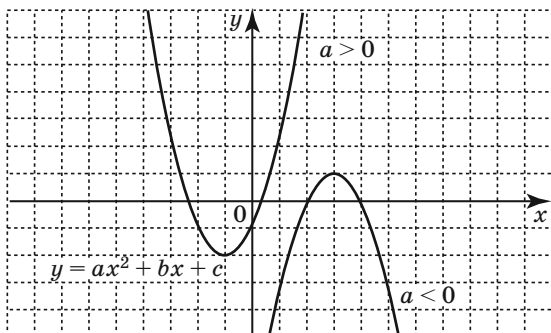
Функция $f(x) = ax + b$ называется линейной функцией. Обратим внимание на то, что многочлен первой степени имеет вид $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, а в формуле, задающей линейную функцию $f(x) = ax + b$, допускается значение $a = 0$.

Графиком линейной функции является прямая линия.

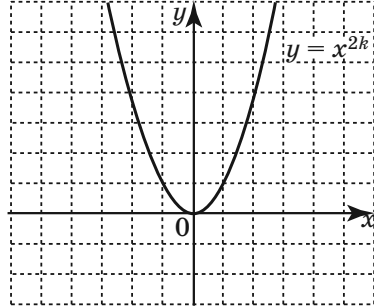
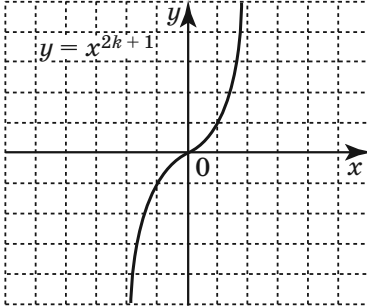


2. Функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной функцией.

Графиком квадратичной функции является парабола.



Графики функций вида $f(x) = x^n$, $n \geq 2$, $n \in N$ иногда также называют параболлами соответствующей степени n . Например, график функции $y = x^{12}$ можно назвать параболой двенадцатой степени. Укажем вид графиков функций вида $y = x^n$ в том случае, когда $D(f) = R$.

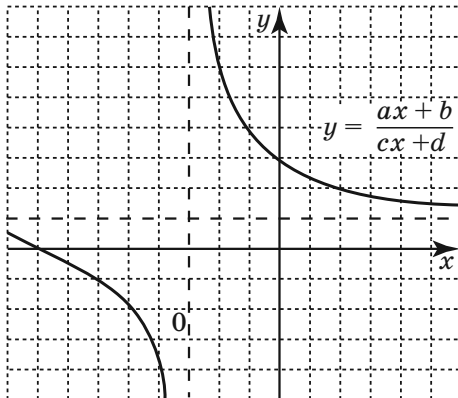


3. Отношение двух многочленов, т.е. функция вида

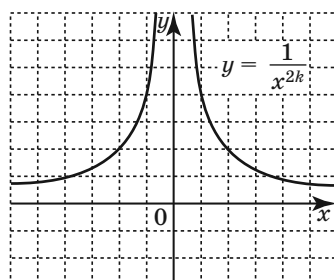
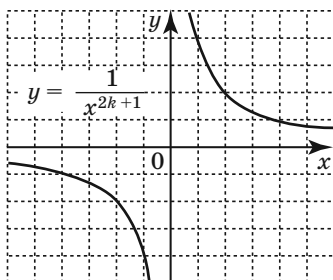
$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m},$$

$a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $m \in N$, $n \in N$ называется рациональной функцией (иногда дробно-рациональной).

4. Функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ является частным случаем дробно-рациональной функции и называется дробно-линейной функцией. График дробно-линейной функции — гипербола.



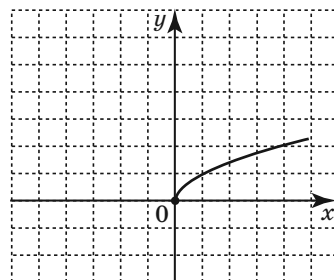
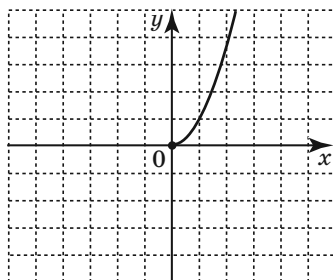
5. Графики функций вида $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$ можно называть гиперболами соответствующей степени n . Укажем вид графиков функций вида $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in N$ в том случае, когда $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



6. Функция вида $f(x) = x^\alpha$, где $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $x \in R$, $\alpha \in R$, называется степенной функцией.

$$y = x^\alpha, \alpha > 1$$

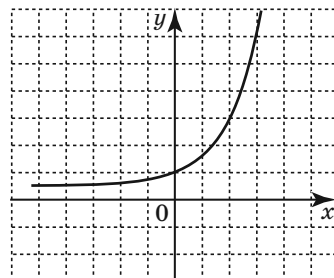
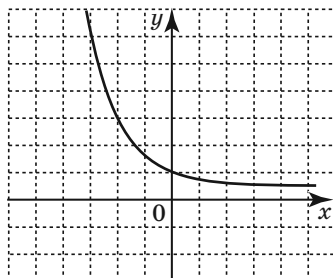
$$y = x^\alpha, 0 < \alpha < 1$$



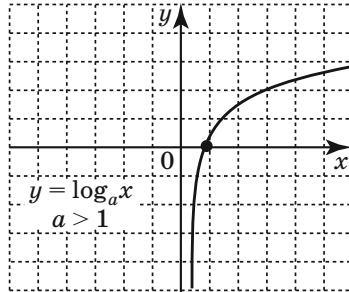
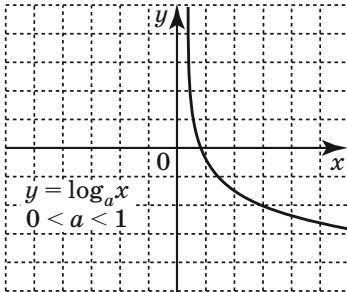
7. Функция вида $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется показательной функцией.

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

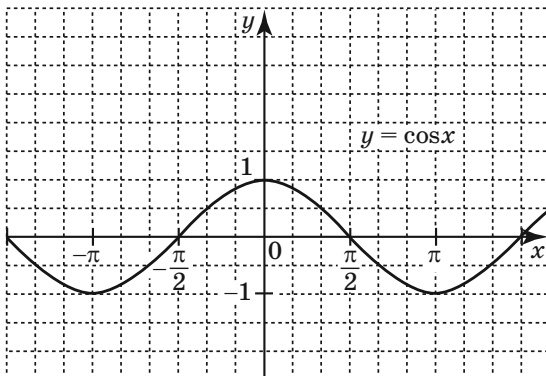
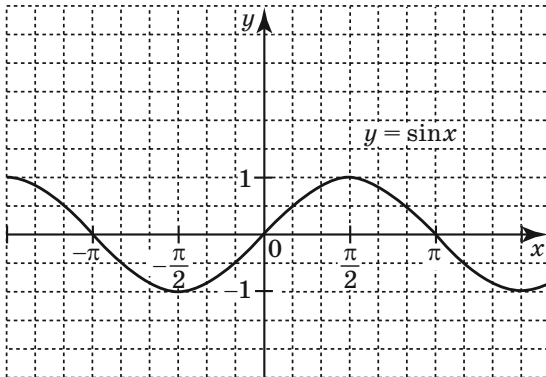
$$y = a^x, a > 1$$

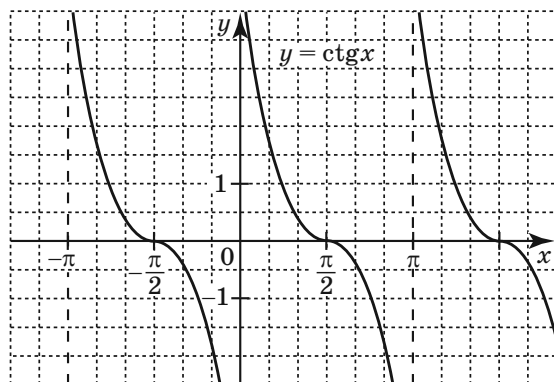
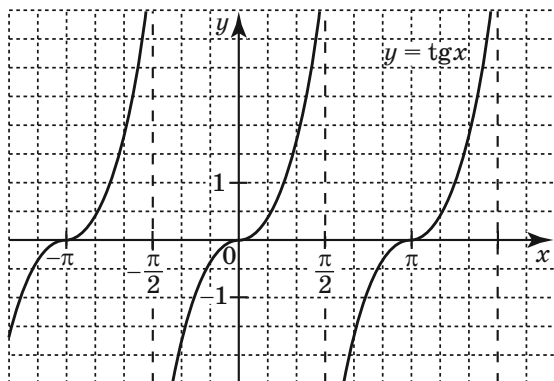


8. Функция вида $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется логарифмической функцией.

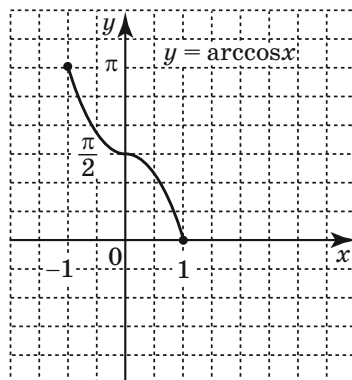
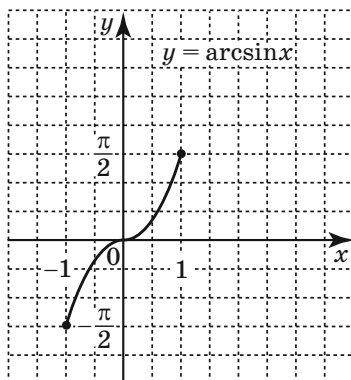


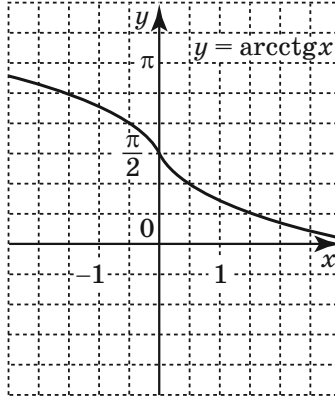
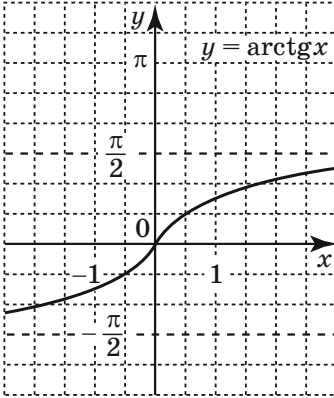
9. Функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ называются тригонометрическими функциями.





10. Функции вида $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctg x$, $f(x) = \text{arctg} x$ называются обратными тригонометрическими функциями.

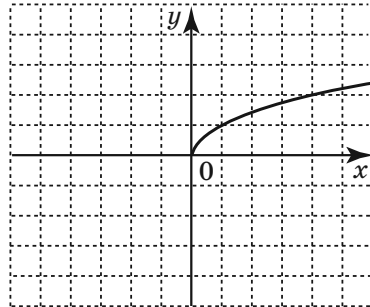
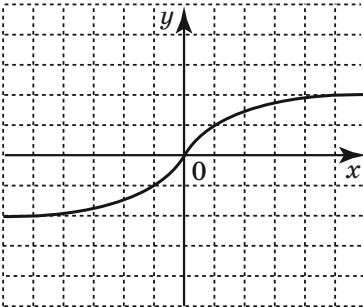




11. Функции вида $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $f(x) = \sqrt[n+1]{x}$ называются иррациональными функциями.

$$y = \sqrt[n+1]{x}$$

$$y = \sqrt[n]{x}$$



Упражнение 1.

График какой функции из перечисленных ниже изображен на рисунке?

- 1) $y = \log_2 x$
- 2) $y = 2^x$
- 3) $y = -\log_2 x$
- 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Верный ответ: 3).

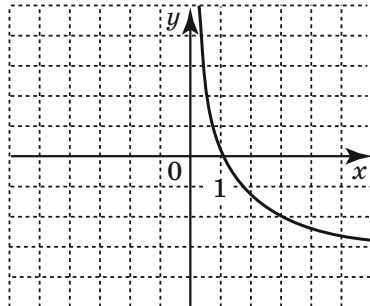


График какой функции из перечисленных ниже изображен на рисунке?

- 1) $y = -2^{-x}$
- 2) $y = 2^{-x}$
- 3) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

Верный ответ: 2).

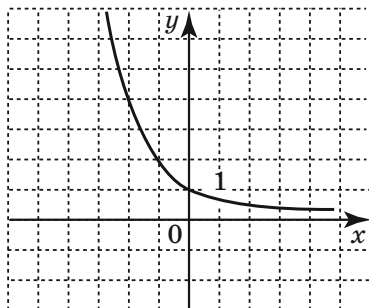


График какой из перечисленных ниже функций представлен на рисунке?

- 1) $y = -|x-2| + x + 3$
- 2) $y = -|x-2| - x + 3$
- 3) $y = -|x+2| - x - 1$
- 4) $y = |x+2| + x + 1$

Верный ответ: 3).

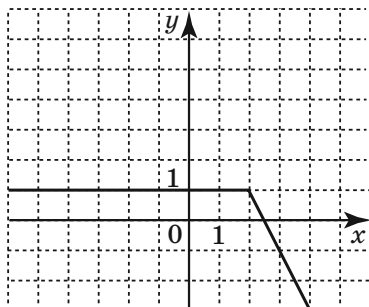
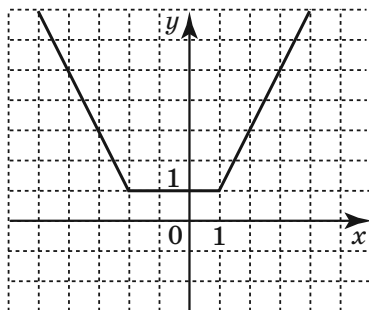


График какой из перечисленных ниже функций изображен на рисунке?



- 1) $y = |x+2| - |x-1| - 2$
- 2) $y = |x+2| + |x-1| - 2$
- 3) $y = -|x+2| + |x-1| + 2$
- 4) $y = |x-2| + |x+1| + 2$

Верный ответ: 2).

График какой из перечисленных ниже функций изображен на рисунке?

1) $y = \sin 3x$

2) $y = 3\cos x$

3) $y = 3\sin x$

4) $y = \cos 3x$

Верный ответ: 3).

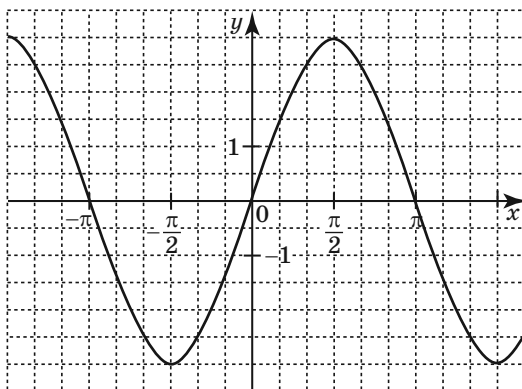


График какой из перечисленных ниже функций изображен на рисунке?

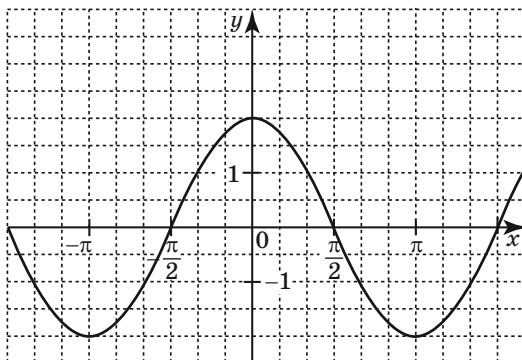
1) $y = 2\sin x$

2) $y = 2\cos x$

3) $y = -2\sin x$

4) $y = -2\cos x$

Верный ответ: 2).



§ 3. Нахождение функции из уравнения

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана в условии, то функция считается заданной на ее естественной области определения, называемой областью существования, т.е. множестве тех значений x , для каждого из которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Уравнение, задающее линейную функцию, имеет вид $y = kx + b$. Для составления уравнения, задающего линейную функцию, достаточно знать координаты двух точек, принадлежащих ее графику.

Пример 1. Найдите линейную функцию $y = f(x)$, если

$$f(-2) = 10, \quad f(1) = -5.$$

Решение. Будем искать уравнение функции в виде $y = kx + b$. Точка принадлежит графику функции, если ее координаты — решение уравнения, задающего эту функцию.

Подставляя координаты точек $(-2; 10)$ и $(-1; 5)$ в уравнение, получим систему:
$$\begin{cases} -2k + b = 10, \\ -k + b = 5. \end{cases}$$
 Решая, получим, что
$$\begin{cases} k = -5, \\ b = 0. \end{cases}$$

Ответ: $y = -5x$.

Однако существует и другой метод составления уравнения прямой линии. Пусть точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$ принадлежат данной прямой, а точка $M(x; y)$ — произвольная точка той же прямой. Тогда векторы \overrightarrow{AM} и \overrightarrow{AB} коллинеарные, а их координаты пропорциональны. Найдём координаты указанных векторов.

$$\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0), \quad \overrightarrow{AB}(x_1 - x_0; y_1 - y_0).$$

Составляя пропорцию, получим уравнение $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$, которому удовлетворяют координаты произвольной точки искомой прямой. Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Пример 2. Найдите линейную функцию $y = f(x)$, если $f(2) = 3$, $f(0) = 1$.

Решение. Прямая проходит через точки $(2; 3)$, $(0; 1)$.

Воспользуемся каноническим уравнением прямой:
$$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 1}{3 - 1}.$$

Ответ: $y = x + 1$.

Второй наиболее часто встречающейся при решении задач функцией является квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. Графиком функции является парабола. Свойства этой функции подробно изучаются в школьном курсе. В уравнение входят три параметра, поэтому, чтобы составить уравнение

квадратичной функции, надо знать координаты трех точек, принадлежащих графику.

Пример 3. Найдите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 2$, $y(2) = 2$, $y(4) = 8$.

Решение. Как и при нахождении уравнения линейной функции, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ 16a + 4b + c = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ 16a + 4b + c = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Таким образом, искомое уравнение квадратичной функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}x^2$.

Промежуточные преобразования, заключающиеся в последовательном исключении неизвестных, мы опустили.

Существует некоторый класс задач, в которых надо найти функцию, если задано некоторое уравнение, в котором неизвестной выступает сама функция. Такие уравнения называются функциональными уравнениями.

Например, непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению $f(x) + f(y) = x + y$ для любых двух значений аргумента, — это линейная функция.

Пример 4. Найдите функцию $y = f(x)$, если $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$.

Решение. Пусть $y = x - 1$. Тогда $f(y+1) = y^2 + 2y + 2$, тогда

$$f(x) = f((x-1)+1) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1.$$

Ответ: $f(x) = x^2 + 1$.

Пример 5. Найдите функцию, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \quad x \neq 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = t$ и сделаем две подстановки $t = x$ и $t = \frac{1}{x}$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

из которой найдем, что $3f(x) = \frac{2}{x} - x$, т.е. $f(x) = \frac{2 - x^2}{3x}$.

Ответ: $f(x) = \frac{2 - x^2}{3x}$.

Пример 6. Найдите функцию и значение функции при заданном значении аргумента, если $f(x+1) = x^2 + x + 3$, $f(1) = ?$

Решение. Сделаем замену.

$$f(t+1) = t^2 + t + 3, \quad x = t+1, \quad t = x-1.$$

Получим, что $f(x) = (x-1)^2 + (x-1) + 3 = x^2 - x + 3$. $f(1) = 3$.

Если требование задачи состояло бы в том, чтобы найти $f(1)$, результат можно получить сразу, если заметить, что $f(1) = f(0+1)$ и подставить в данное равенство число 0 вместо x . Получим

$$f(1) = f(0+1) = 0^2 + 0 + 3 = 3.$$

Ответ: $f(x) = x^2 - x + 3$, $f(1) = 3$.

Упражнение 1.

Найдите линейную функцию $y = f(x)$, если:

- 1) $f(-10) = -2$, $f(5) = 1$
- 2) $f(-2) = -5$, $f(2) = -3$
- 3) $f(-3) = 3$, $f(6) = 0$
- 4) $f(-4) = 2$, $f(6) = 3$
- 5) $f(-4) = -12$, $f(2) = 6$.

Ответы: 1) $y = \frac{1}{5}x$; 2) $y = \frac{1}{2}x - 4$; 3) $y = -\frac{1}{3}x + 2$;

4) $y = -\frac{1}{2}x$; 5) $y = 3x$.

Упражнение 2.

Найдите квадратичную функцию $y = f(x)$, если:

1) $f(-3) = -18$, $f(-1) = -2$, $f(2) = -8$

2) $f(-4) = -1$, $f(2) = -4$, $f(6) = 4$

3) $f(-1) = 2$, $f(2) = -14$, $f(\sqrt{6}) = -22$

4) $f(-2) = 9$, $f(-1) = 4$, $f(3) = 24$

5) $f(-3) = -20$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$

Ответы: 1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2 - 5$; 3) $y = -4x^2 + 2$;

4) $y = 2x^2 + x + 3$; 5) $y = x^2 - 3x + 2$.

Упражнение 3.

Найдите функцию и значение функции при заданном значении аргумента, если:

1) $f(x-2) = x^2 - 3x + 3$, $f(4) = ?$

2) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$, $f(1) = ?$

3) $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, $f(-1) = ?$

4) $f(x - 3f(-x)) = x$, $f(0) = ?$

5) $f(2x+1) = x^2$, $f(1) = ?$

Ответы: 1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(-4) = 21$;

2) $f(x) = x$, $f(1) = 1$;

3) $f(x) = -x - \frac{2}{x}$, $f(-1) = 3$;

4) $f(x) = \frac{1}{4}x$, $f(0) = 0$;

5) $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$, $f(1) = 0$.

§ 4. Исследование функций

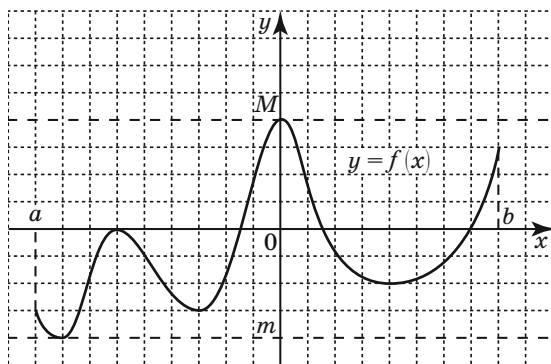
4.1. Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X , называется ограниченной снизу на этом множестве, если существует такое число m , что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \geq m$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X , называется ограниченной сверху на этом множестве, если существует такое число M , что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \leq M$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X , называется ограниченной на этом множестве, если она ограничена и снизу и сверху, т.е. для любого $x \in X$ выполнено неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X , то она принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.



Пример 1. Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Выполним тождественное преобразование квадратичного трехчлена.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}. \end{aligned}$$

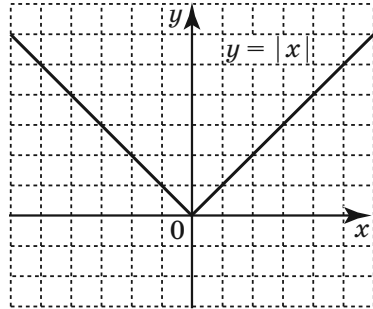
Если $a > 0$, то при всех значениях аргумента $ax^2 + bx + c \geq -\frac{D}{4a}$, если же $a < 0$, то $ax^2 + bx + c \leq -\frac{D}{4a}$.

Следовательно, область значений квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ есть полуинтервал $\left[-\frac{D}{4a}; +\infty \right)$, если $a > 0$, или полуинтервал $\left(-\infty; -\frac{D}{4a} \right]$, если $a < 0$.

Пример 2. Функция $y = |x|$, модуль или абсолютная величина x . Эта функция определяется следующим образом:

$$x = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что $D(|x|) = R$,
 $E(|x|) = [0; +\infty)$.

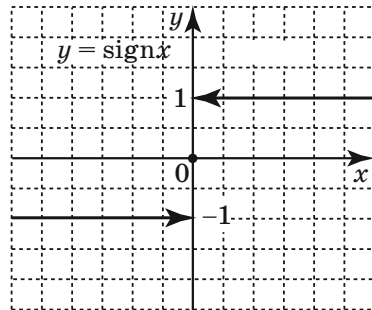


Пример 3. Функция $y = \operatorname{sign} x$. Символ sign читается «сигнум», что на латыни означает «знак».

Функция $y = \operatorname{sign} x$ задается следующим образом:

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

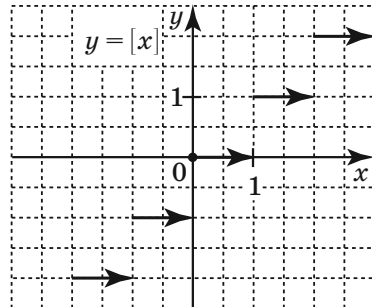
Получим, что $D(\operatorname{sign} x) = R$,
 $E(\operatorname{sign} x) = \{-1; 0; 1\}$.



Пример 4. Функция $y = [x]$, целая часть числа x .

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее число x .

Получим: $D([x]) = R$,
 $E([x]) = Z$.



Пример 5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}.$$

1) $(4; +\infty)$; 2) $(-4; 4)$; 3) $(-\infty; 4)$; 4) $[-4; 4]$.

Решение. Так как корень квадратный определен для неотрицательных значений, то область определения функции задается неравенством $16 - x^2 \geq 0$.

Решим неравенство: $16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$.

Ответ: 4).

Пример 6. Найдите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$.

Решение. Область определения функции задается системой неравенств $\begin{cases} x+9 \geq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x+9 \geq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x < -1, \\ x > -1. \end{cases}$$

Наименьшее целое число, входящее в область определения функции, -9 .

Ответ: -9 .

Нахождение области значений функции, особенно сложной, всегда можно свести к решению некоторого уравнения с параметрами.

Действительно, множеством значений числовой функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных чисел a , для которых существует хотя бы одно решение уравнения $f(x) = a$. В некоторых простых случаях можно решить это уравнение и тем самым отыскать $E(f)$.

Пример 7. Найдите множество значений функции $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение. Запишем уравнение $\frac{2x}{1+x^2} = a$. Так как знаменатель положителен, то уравнение может быть переписано в виде:

$$ax^2 - 2x + a = 0.$$

Если $a=0$, то решением является $x=0$.

Если $a \neq 0$, то получим квадратное уравнение, которое имеет решение только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$\frac{1}{4}D(a) = 1 - a^2 \geq 0$. Откуда $-1 \leq a < 0$, или $0 < a \leq 1$, что можно обозначить $\begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ 0 < a \leq 1. \end{cases}$

Следовательно, множество значений параметра a , при каждом из которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение, это $-1 \leq a \leq 1$.

Ответ: $E(f) = [-1; 1]$.

При нахождении области значений функции часто можно использовать числовые неравенства.

Пример 8. Найдите область значений функции $f(x) = \frac{x}{4x^2 + x + 1}$.

Решение. Если $x=0$, то $f(0)=0$.

Если $x \neq 0$, то $f(x) = \frac{1}{4x + \frac{1}{x} + 1}$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел одного знака следует, что при $x > 0$ $4x + \frac{1}{x} \geq 4$, тогда $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 5$, а $0 < f(x) \leq \frac{1}{5}$.

При $x < 0$ получаем, что $4x + \frac{1}{x} + 1 \leq -3$, а $f(x) \geq -\frac{1}{3}$.

Следовательно, $E(f) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right]$.

Можно использовать ограниченность функций, входящих в исследуемую функцию.

Пример 9. Найдите область значений функции $y = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

1) $[-2; 2]$; 2) $[0; 2]$; 3) $[0; 1]$; 4) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Так как $2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}(2\sin x \cdot \cos x)^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2x$, а функция $y = \sin 2x$ ограничена и принимает значения, принадлежащие $[-1; 1]$, то $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq \frac{1}{2}$.

Ответ: 4).

Наиболее часто используется монотонность внешней функции.

Пример 10. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{2\sin x}$.

Решение. Так как $-2 \leq 2\sin x \leq 2$, а функция $y = 2^t$ — возрастающая, то $2^{2\sin x} \leq 4$.

Ответ: 4.

Пример 11. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sin x + 4\cos x$.

Решение. Используем формулу введения дополнительного аргумента.

$$y = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5\sin(x + \varphi),$$

где $\varphi = \arccos \frac{3}{5}$.

Следовательно, наибольшее значение функции $y = 3\sin x + 4\cos x$ равно 5.

Ответ: 5.

Пример 12. Найдите наименьшее положительное число, входящее в область значений функции $y = \sqrt{x^2 + 4x + 6}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком корня $x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$. Так как функция $y = \sqrt{t}$ монотонно возрастает на множестве неотрицательных чисел, то

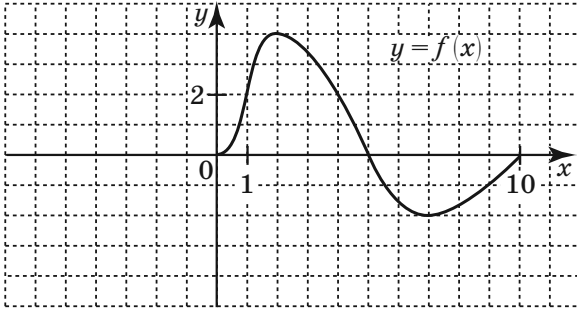
$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 6} \geq \sqrt{2}.$$

Следовательно, наименьшее положительное число, входящее в область значений этой функции, равно 2.

Ответ: 2.

Упражнение 1.

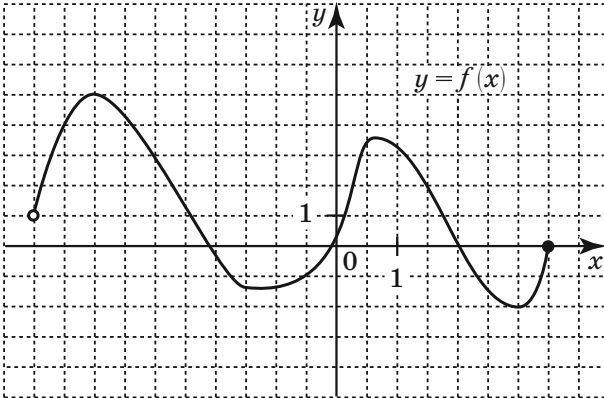
Функция задана графиком на полуинтервале $[0;10)$. Укажите множество значений функции.



- 1) $[0;10)$; 2) $(-2;4)$; 3) $[0;10]$; 4) $[-2;4]$.

Ответ: 4).

Функция задана графиком. Укажите область значений этой функции.



- 1) $(-10;7]$; 2) $[-10;7]$; 3) $[-2;5]$; 4) $(-2;5]$.

Ответ: 3).

Упражнение 2.

Найдите область определения функции.

1. $y = \sqrt{9 - x^2}$
2. $y = \lg(6 - 5x - x^2)$

3. $y = \lg(\lg x)$

4. $y = \lg\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$

5. $y = \frac{1}{\sin x}$

6. $y = \arccos(x+1)$

7. $y = \frac{x}{x^3 - 1}$

8. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y = \lg(\sin x)$.

Ответы: 1. $[-3; 3]$; 2. $(-6; 1)$; 3. $(1; +\infty)$; 4. $(0; 1)$; 5. $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; 6. $[-2; 1]$; 7. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 8. $(-1; 1)$; 9. $[0; +\infty)$; 10. $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 3.

Найдите область значений функции.

1. $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}}$

2. $y = \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2}}$

3. $y = \lg(-x^2 - 2x + 9)$

4. $y = \frac{1}{\sin x}$

5. $y = 2^{-\cos x}$

6. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos x|}$

7. $y = \sin(\cos x)$

8. $y = (\sqrt{2})^{\sqrt{3} \sin x + \cos x}$

9. $y = \lg\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

10. $y = \cos\left(\pi \frac{x^2 + 1}{3x^3 + 2}\right)$.

- Ответы: 1. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right]$; 3. $(-\infty; 1]$; 4. $[1; +\infty)$;
 5. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; 6. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 7. $[-\sin 1; \sin 1]$; 8. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; 9. $[0; +\infty)$;
 10. $\left[0; \frac{1}{2}\right)$.

Упражнение 4.

Найдите наибольшее целое число, принадлежащее области определения функций.

1) $f(x) = \lg(13 - 2x)$

2) $f(x) = \sqrt{-29 - 5x}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{46 - 3x}}$

4) $f(x) = \frac{1}{\lg(33 - 4x)}$

5) $f(x) = \frac{1}{\lg^2(-3x - 28)}$

Ответы: 1) 6; 2) -6; 3) 15; 4) 7; 5) -10.

Упражнение 5.

Найдите сумму целых чисел, принадлежащих области определения функции.

1) $f(x) = \log_x(4 - x)$

2) $f(x) = \sqrt{8x - (x^2 - 15)}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}$

4) $f(x) = \log_{x+5}(2 - x)$

5) $f(x) = \frac{1}{\log_{x+10}(-5 - x)}$

Ответы: 1) 5; 2) 12; 3) 5; 4) -5; 5) -15.

4.2. Четные и нечетные функции

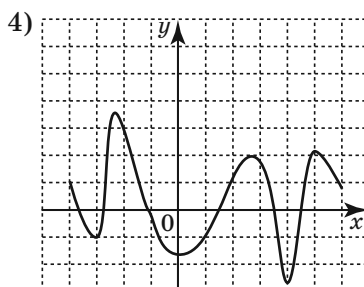
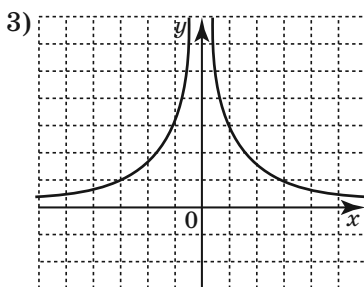
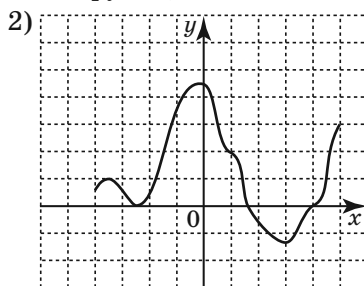
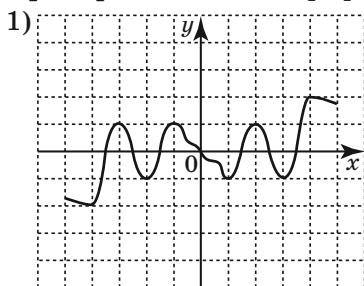
Функция $y = f(x)$ называется четной функцией, если выполнены два условия:

1) для любого числа $x \in D(f)$, число $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$, для любого $x \in D(f)$.

График четной функции симметричен относительно оси OY .

Пример 1. Укажите график четной функции.



Решение. График четной функции симметричен относительно оси OY , поэтому верный ответ — 3).

Ответ: 3).

Функция $y = f(x)$ называется нечетной функцией, если выполнены два условия:

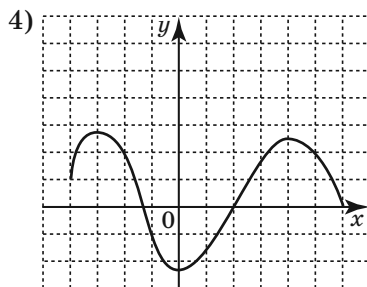
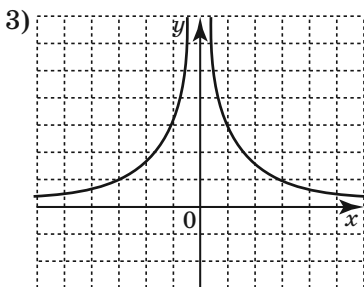
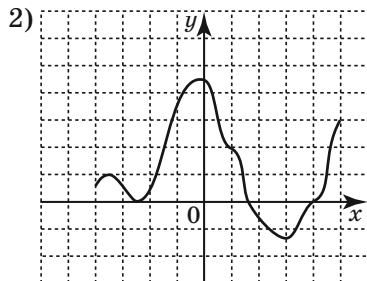
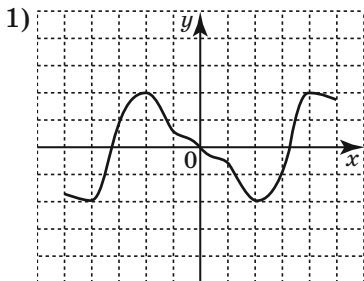
1) с любым числом $x \in D(f)$, число $(-x) \in D(f)$;

2) $f(-x) = -f(x)$, для любого $x \in D(f)$.

Как следствие получаем, что значение нечетной функции, определенной при $x = 0$, $f(0) = 0$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 2. Укажите график нечетной функции.



Решение. График нечетной функции симметричен относительно начала координат, поэтому верный ответ — 1).

Ответ: 1).

Всякую функцию, определенную на симметричном относительно начала координат множестве, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций, определенных на том же множестве. Действительно, если функция $y = f(x)$ определена на множестве, симметричном относительно начала координат, то

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Пример 3. Функция $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ есть сумма четной функции $h(x)$ и нечетной функции $g(x)$. Найдите значение $g(-1)$.

Решение. По приведенному выше представлению

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = x^3 + x.$$

Получим, что $g(-1) = -2$.

Ответ: -2.

Пример 4. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой.

Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции

$$g(x) = 2x(x + 4)(2x - 1).$$

Найдите значение $h(-1)$ функции $h(x) = \frac{f(x) + 2g(x)}{2f(x) + g(x)}$.

Решение. Так как функция $y = f(x)$ по условию нечетная, то $f(-1) = -f(1) = -g(1)$.

Получаем, что

$$h(-1) = \frac{f(-1) + 2g(-1)}{2f(-1) + g(-1)} = \frac{-f(1) + 2g(-1)}{-2f(1) + g(-1)} = \frac{-g(1) + 2g(-1)}{-2g(1) + g(-1)}.$$

Находя значения функции $y = g(x)$ в точках -1 и 1 , получим

$$g(1) = 10, \quad g(-1) = 18.$$

Найдем искомое значение функции $y = h(x)$.

$$h(-1) = \frac{-10 + 36}{-20 + 18} = -\frac{26}{2} = -13.$$

Ответ: -13 .

Пример 5. Найдите значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = (a + 2)x^2 + (a^2 + 5a + 6)x + 8$ является четной.

Решение. Используем определение четной функции. Функция $f(x)$ — четная, если равенство $f(x) = f(-x)$ выполнено для любого $x \in D(f)$.

Данная функция определена при всех значениях аргумента, поэтому достаточно, чтобы уравнение

$$(a + 2)x^2 + (a^2 + 5a + 6)x + 8 = (a + 2)x^2 - (a^2 + 5a + 6)x + 8$$

было бы верно для любого x .

Но уравнение равносильно уравнению $2(a^2 + 5a + 6)x = 0$, которое должно выполняться при всех x . Это возможно лишь

тогда, когда $a^2 + 5a + 6 = 0$, т.е. если $\begin{cases} a = -3, \\ a = -2. \end{cases}$

Ответ: $-3; -2$.

Пример 6. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой и для

всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению $f(x) + g(x) = x^2 - 9x + 8$. Найдите решения уравнения $f(x) = g(x)$.

Решение. Используя свойства четной и нечетной функций, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 - 9x + 8, \\ f(-x) + g(-x) = x^2 + 9x + 8. \end{cases}$$

Так как $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, то систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 - 9x + 8, \\ f(x) - g(x) = x^2 + 9x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + 8, \\ g(x) = -9x. \end{cases}$$

Решим уравнение $f(x) = g(x)$.

$$x^2 + 8x = -9x \Leftrightarrow x^2 + 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -8. \end{cases}$$

Ответ: -1 ; -8 .

Упражнение 1.

Укажите четные и нечетные функции.

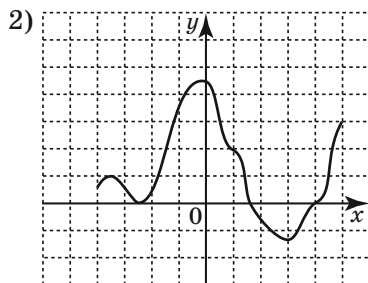
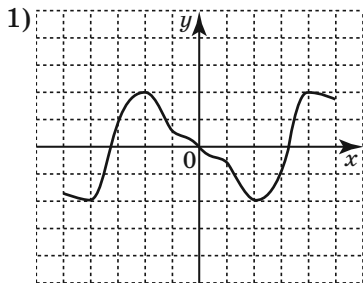
1) $f(x) = \frac{x^4 + 4}{x^6 - 3}$; 2) $f(x) = x^3 - \sin 3x$; 3) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

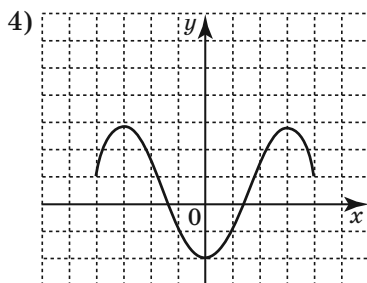
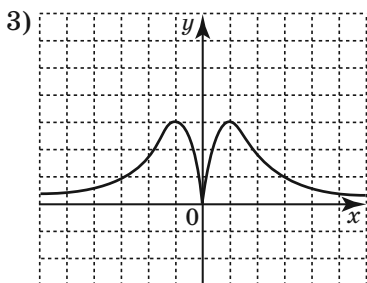
4) $f(x) = |x| + \cos x$; 5) $f(x) = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$.

Ответ: 1), 3), 4) — четные функции, 2), 5) — нечетные функции.

Упражнение 2.

Укажите графики четных функций среди графиков, представленных на рисунке.

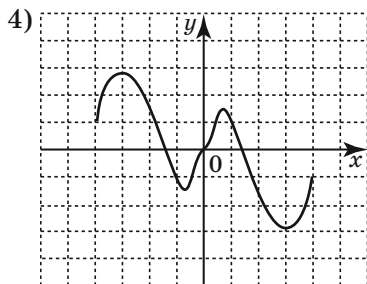
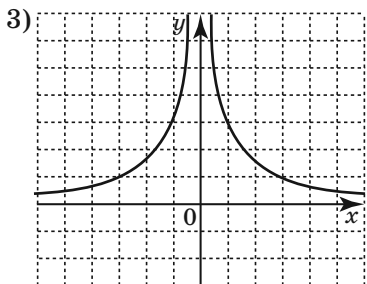
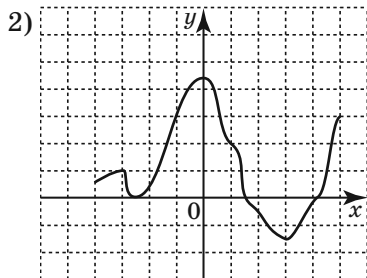
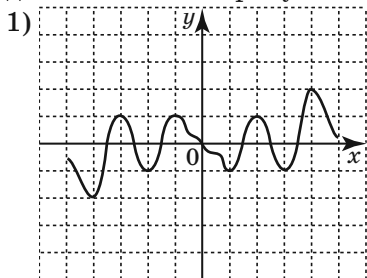




Ответы: 3); 4).

Упражнение 3.

Укажите графики нечетных функций среди графиков, представленных на рисунке.



Ответы: 1); 4).

Упражнение 4.

Представить функцию, где $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функции.

- 1) $h(x) = x^2 - x$; 2) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; 3) $h(x) = 2x + 3$;
 4) $h(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$, $|x| \neq 1$; 5) $h(x) = \frac{x}{1-x}$, $|x| \neq 1$.

Ответы: 1) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x$;

2) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $g(x)=0$;

3) $f(x)=3$, $g(x)=2x$;

4) $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$;

5) $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$, $g(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

Упражнение 5.

1. Найдите все значения параметра, при которых функция $f(x)=(a-1)x^2+(a^2+2a-3)x+1$ является четной.

Ответ: 1; -3.

2. Найдите все значения параметра, при которых функция $f(x)=\frac{x-a}{x^2}+a$ является нечетной.

Ответ: 0.

3. Параметры a и b таковы, что функция $f(x)=x^3+\sqrt{a+1}-2$ нечетная, а функция $g(x)=\left(x-\frac{b-2}{b+3}\right)^2$ — четная. Найдите значение выражения $a \cdot f(-2)+b \cdot g(-2)$.

Ответ: -16.

4. Параметры a и b таковы, что функция $f(x)=(x+a^3-8)^3$ — нечетная, а функция $g(x)=|2x+\sqrt{b+5}-2|$ — четная. Найдите значение выражения $(a^2+b^2)f(-3)-b \cdot g(-3)$.

Ответ: -55.

5. Параметры a и b таковы, что функция $f(x)=\sqrt[3]{x^3+(a+2)^2}$ — нечетная, а функция $g(x)=|x+a^2+4b|$ — четная. Найдите значение выражения $a \cdot f^2(-5)+b \cdot g(-5)$.

Ответ: -55.

Упражнение 6.

1. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой и для всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению

$f(x) + g(x) = x^2 + 5x + 3$. Найдите сумму решений уравнения $f(x) = g(x)$.

2. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой и для всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению $f(x) + g(x) = x^2 + 7x + 12$. Найдите произведение решений уравнения $f(x) = g(x)$.

3. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой и для всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению $f(x) + g(x) = x^2 + x - 2$. Найдите сумму решений уравнения $f(x) = g(x)$.

4. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой и для всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению $f(x) + g(x) = x^2 + 10x + 21$. Найдите наибольшее решение уравнения $f(x) = g(x)$.

5. Дана четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$, определенные на всей числовой прямой, и для всякого значения аргумента удовлетворяющие уравнению $f(x) + g(x) = x^2 - 3x - 10$. Найдите наименьшее решение уравнения $f(x) = g(x)$.

Ответы: 1) 5; 2) 12; 3) -1; 4) 7; 5) -5.

4.3. Периодические функции

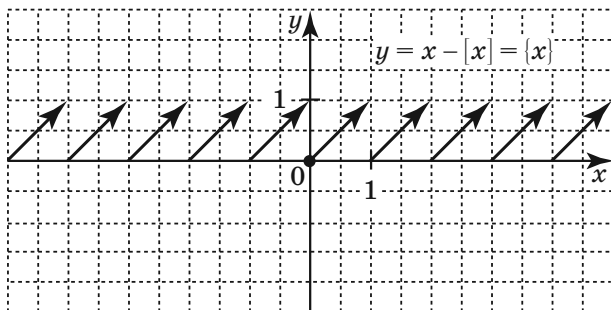
Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T > 0$, такое, что выполнены два условия:

1. Для каждого значения $x \in D(f)$ числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения функции.

2. Выполнено равенство $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Наименьшее из чисел $T > 0$, являющихся периодом функции $y = f(x)$, называется собственным или главным периодом функции.

На рисунке представлен график функции $y = x - |x| = \{x\}$, называемой дробной частью x . Дробная часть равна разности данного числа и его целой части, т.е. наибольшего целого числа, не превосходящего данное.



Главный или собственный период данной функции равен 1.

Перечислим некоторые свойства периодических функций.

1. Если число $T > 0$ является периодом функции $y = f(x)$, то число nT , $n \in \mathbb{N}$ — также период функции.

2. Если $T > 0$ является периодом функции $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ — период функции $y = f(kx + b)$.

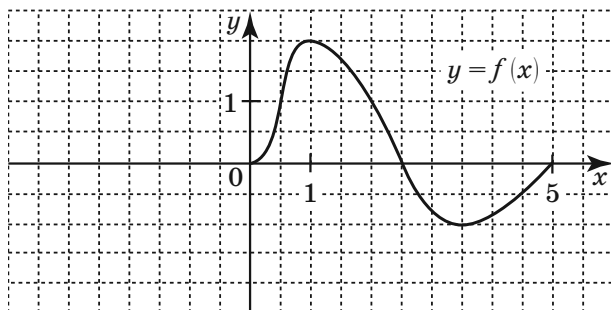
3. Если $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ — собственные периоды соответственно функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, то любая комбинация этих функций вида $y = k \cdot f(x) + l \cdot g(x)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, не являющаяся постоянной функцией, также периодическая, период равен $T = \text{НОК}(T_1; T_2)$.

4. Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции $y = f(x)$, то ее области определения принадлежат и все точки вида $x_0 + nT$, для любого $n \in \mathbb{Z}$.

5. Периодическая функция не может иметь на своей области определения конечного числа точек разрыва.

6. Периодическая функция принимает каждое свое значение в бесконечном числе точек x , среди которых есть положительные и отрицательные числа, сколь угодно большие по абсолютной величине.

Пример 1. Период функции $y = f(x)$, фрагмент графика которой представлен на рисунке, равен 5. Найдите значение $f(-4)$.



Решение. Так как $f(1) = 2$, то и $f(-4) = f(-4 + 5) = f(1) = 2$.
Ответ: 2.

Пример 2. Найдите период функции $y = \cos \frac{\pi}{2}x$.

Решение. Так как собственный период функции $y = \cos x$ равен 2π , то заданная функция будет иметь период $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.
Ответ: 4.

Пример 3. Функция $y = f(x)$ имеет период $T = 1$ и на промежутке $[0; 1]$ задана формулой $f(x) = x^2 - x$. Найдите $f\left(-25\frac{1}{4}\right)$.

Решение. Так как период $T = 1$, то

$$f\left(-25\frac{1}{4}\right) = f\left(-25\frac{1}{4} + 26\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{16} = -0,1875.$$

Ответ: $-0,1875$.

Пример 4. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом $\sqrt{2}$. Найдите $f(-\sqrt{8})$, если

$$3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0 \text{ и } f^2(\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{18}) + \frac{20}{9} = 0.$$

Решение. Так как $f(-\sqrt{8}) = f(-3\sqrt{2}) = f(-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = f(0)$, то искомое число будет решением указанной системы.

$$\begin{cases} 3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0, \\ f^2(\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{18}) + \frac{20}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(0) + 7f(0) + 4 = 0, \\ f^2(0) + 3f(0) + \frac{20}{9} = 0. \end{cases}$$

Вторая система получена из первой с учетом периодичности функции $f(x)$.

Получим, что $f(0) = f(-\sqrt{8}) = -\frac{4}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Упражнение 1.

Найдите собственный период функции $f(x)$.

1) $f(x) = \sin \frac{7\pi x}{50} \cos \frac{3\pi x}{50}$;

2) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{18} \sin \frac{5\pi x}{18}$;

3) $f(x) = \sin \frac{7\pi x}{20} \cos \frac{3\pi x}{20}$;

4) $f(x) = \cos \frac{7\pi x}{12} \sin \frac{2\pi x}{12}$;

5) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6} \cos \frac{\pi x}{30}$;

Ответы: 1) 50; 2) 18; 3) 20; 4) 24; 5) 30.

Упражнение 2.

Укажите собственный или главный период функции.

1) $y = \sin x + \cos 5x$;

2) $y = 3 \sin 2x$;

3) $y = \sin x + \cos x$;

4) $y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$;

5) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

Ответы: 1) 2π ; 2) π ; 3) 2π ; 4) π ; 5) 2π .

Упражнение 3.

1) Периодическая функция $y = f(x)$ с главным периодом $T = 4$ на полуинтервале $(-7; -3]$ совпадает с функцией $y = \frac{|x-2|-1}{x+4}$. Найдите произведение значений $f(-11) \cdot f(1)$.

2) Периодическая функция $y = f(x)$ с главным периодом $T = 5$ на полуинтервале $(-1; 4]$ совпадает с функцией $y = ax - 1$. Известно, что $f(7) = 3$. Найдите $f(10)$.

3) Периодическая функция $y = f(x)$ с собственным периодом $T = 3$ на отрезке $[-1; 2]$ совпадает с функцией $y = ax + b$. Известно, что $f(5) = 1$, $f(-8) = 3$. Найдите $f(-4,5)$.

4) Периодическая функция $y=f(x)$ с главным периодом $T=4$ на полуинтервале $(-1;3]$ совпадает с функцией $y=|x-a|$. Известно, что $f(-7)=3$, $f(10)=2$. Найдите $f(13,5)$.

5) Периодическая функция $y=f(x)$ с собственным периодом $T=6$ на полуинтервале $[-2;4)$ совпадает с функцией $y=x^2+a^2$. Известно, что $f(-11)=5$. Найдите $f(-8)+f(-7)$.

Ответы: 1) 16; 2) -1; 3) 4; 4) 2,5; 5) 13.

Упражнение 4.

1. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x и имеет период $T=3$. Известно, что $f(5)=-4$, $f(16)=3$. Найдите значение выражения $2f(22)-5f(14)$.

Ответ: 26.

2. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x и имеет период $T=4$. Известно, что $f(10)=3$, $f(12)=-2$, $f(-13)=-5$. Найдите значение выражения $f(2) \cdot f(3) - f^2(4)$.

Ответ: -24.

3. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x и имеет период $T=3$. Известно, что $f(0)=\sqrt{2}$, $f(1)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $f(2)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите значение выражения $f(2003)+f(2004)+f(2005)$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x и имеет период $T=5$. Известно, что $f(1876)=\sqrt{3}+1$, $f(1812)=4$, $f(2003)=\sqrt{3}-1$. Найдите значение выражения $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)$.

Ответ: 8.

5. Функция $f(x)$ определена при всех значениях x и имеет период $T=1,5$. Известно, что $f(2)=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $f(12,5)=\sqrt{2}+1$, $f(-7,5)=-2$. Найдите значение выражения $f(1) \cdot f(0,5) + f(0)$.

Ответ: -1.

§ 5. Исследование функции при помощи производной

5.1. Определение производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке и величина такова, что $x_0 + \Delta x \in (a; b)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 . Приращение функции в точке x_0 принято обозначать $\Delta f(x_0)$ или $\Delta y(x_0)$.

Значением производной функции в точке называется предел отношения $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается через $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Функция, имеющая производную в точке x_0 , называется дифференцируемой в этой точке. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$, то говорят, что она дифференцируема на этом интервале.

5.2. Основные правила нахождения производных

1. $(c)' = 0$, где $c = \text{const}$.

2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x и $c = \text{const}$, то $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

3. Если каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет производную в точке x , то $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

4. Если каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет производную в точке x , то $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.

5. Если каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет производную в точке x , то $(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.

6. Если каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеет производную в точке x , то $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$.

7. Если $g(x) = kx + b$, $k \neq 0$, то $(f(kx + b))' = k \cdot f'(kx + b)$.

8. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

5.3. Таблица производных элементарных функций

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$	2. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$, $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$ $(u^p)' = pu^{p-1}u'$
3. $(\sin x)' = \cos x$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	4. $(\cos x)' = -\sin x$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$	6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} =$ $= -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$ $(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u} =$ $= -u'(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$
7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $(e^x)' = e^x$ $(e^u)' = e^u u'$	8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}$	12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Пример 1. Производная функции $y = x^{12} + 3x^3 + 4x - 2$ равна:

1) $12x^{11} + 3x^2 + 4x - 2$

3) $12x^{11} + 9x^2 + 4$

2) $x^{12} + 9x^2$

4) $x^{12} + 3x^3 + 4$

Решение. Применяя таблицу производных и правила дифференцирования, получим, что

$$y' = (x^{12})' + 3(x^3)' + 4(x)' - (2)' = 12x^{11} + 9x^2 + 4.$$

Правильный ответ — 3).

Ответ: 3).

Пример 2. Найдите значение производной функции

$$y = \frac{x}{x^2 + 3} \text{ в точке } x_0 = 1.$$

Решение. $y' = \frac{x^2 + 3 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}.$

$$y'(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

Упражнение 1.

1) Значение производной функции $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ в точке

графика с абсциссой $x_0 = 1$ равно: 1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

2) Значение производной функции $y = 5x^4 - \sqrt{2x}$ в точке графика с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ равно: 1) 1; 2) -1; 3) -1,5; 4) 1,5.

3) Значение производной функции $y = \sin 3x + 1$ в точке графика с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равно 1) 1; 2) 3; 3) -1; 4) 0.

4) Значение производной функции $y = \sqrt[3]{5x^3 - 3x^2 - 1}$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 1$ равно 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) -3.

5) Значение производной функции $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ в точке графика с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$ равно 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 1,5.

Ответы: 1) 2; 2) 4; 3) 2; 4) 1; 5) 2.

Упражнение 2.

Найдите производные функций.

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^2;$

2) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x};$

3) $y = (1 - x)^2;$

4) $y = (x + \sqrt{x})^2;$

5) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$

Ответы: 1) $y' = -x^3 + x^2 + 2x;$ 2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}};$

3) $y' = 2x - 2;$ 4) $y' = 2x + 3\sqrt{x} + 1;$ 5) $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$

Упражнение 3.

Найдите производные функций.

1) $y = \cos 5x$;

2) $y = \sin 2x - \cos 2x$;

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

4) $y = \operatorname{ctg}(2x + 3)$;

5) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Ответы: 1) $y' = -5\sin 5x$; 2) $y' = 2(\cos 2x + \sin 2x)$;

3) $y' = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)$; 4) $y' = 2(1 + \operatorname{ctg}^2(2x + 3))$; 5) $y' = 0$.

Упражнение 4.

Найдите производные функций.

1) $y = e^{2x+1}$;

2) $y = 2^x + 3^x + 4^x$;

3) $y = \ln(x^2 + 1)$;

4) $y = x \ln x$;

5) $y = x^2 e^x$.

Ответы: 1) $y' = 2e^{2x+1}$; 2) $y' = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$;

3) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$; 4) $y' = \ln x + 1$; 5) $y' = (x^2 + 2x)e^x$.

5.4. Геометрический и физический смысл значения производной

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 .

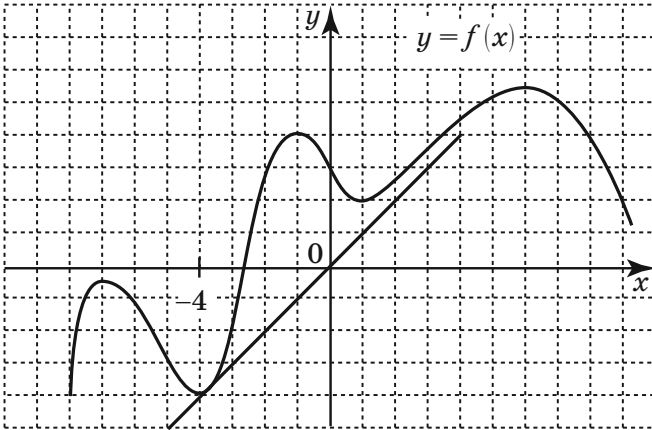
Уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Угловым коэффициентом касательной равен тангенсу угла касательной с положительным направлением оси абсцисс.

Если производная функции в данной точке равна 0, то касательная параллельна оси абсцисс или ею является.

Если тело или материальная точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то значение мгновенной скорости движения тела равно значению производной функции, задающей закон движения, в указанный момент времени.

Пример 1. Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой $x_0=-4$.



Решение. Уравнение касательной, проведенной через точку графика с абсциссой $x_0=-4$, $y=x$.

Следовательно, $f'(-4)=1$.

Пример 2. Найдите наибольшую абсциссу точки графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4,$$

в которой касательная к графику функции образует с осью абсцисс угол 45° .

Решение. Так как $\operatorname{tg}45^\circ=1$, то значение производной в искомой точке равно 1.

$$y' = x^2 - 5x + 7.$$

Решим уравнение.

$$x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Пример 3. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x)=14x-45-x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен 2.

1) 6; 2) -8; 3) 8; 4) -6

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке графика с абсциссой x_0 равен значению производной функции в точке x_0 .

Найдем производную.

$$f'(x) = 14 - 2x.$$

Решим уравнение: $14 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = 6$.

Таким образом, правильный ответ 1).

Ответ: 1).

Пример 4. Тело движется прямолинейно по закону $S = 5 + 6t - \frac{1}{3}t^3$, где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найдите скорость тела в момент $t = 1$ сек.

Решение. Физический смысл значения производной состоит в том, что если задан закон изменения пройденного телом пути, то значение производной есть мгновенная скорость тела в данный момент времени.

Найдем производную: $S'(t) = 6 - t^2$.

Значение производной в момент времени $t = 1$ равно 5. Следовательно, значение мгновенной скорости тела также равно 5 м/с.

Ответ: 5 м/с.

Пример 5. Найдите ускорение точки, движущейся прямолинейно, если движение задано законом: $S(t) = 5t^2 + 58t - 623$, где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах.

Решение. Значение ускорения тела или материальной точки в данный момент времени равно значению производной закона изменения мгновенной скорости тела.

$$V(t) = S'(t) = 10t + 58, \quad a(t) = V'(t) = 10.$$

Ответ: $a(t) = 10$ м/с².

Пример 6. Найдите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 + x + 1$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Значение функции $f(0)=1$. Найдем производную:
 $f'(x)=2x+1$; $f'(0)=1$.

Уравнение касательной будет иметь вид $y=x+1$.

Ответ: $y=x+1$.

Пример 7. Найдите значение параметра, при котором прямая $y=5x+a$ будет являться касательной к графику функции $y=x^2-x+1$.

Решение. Используя геометрический смысл значения производной, найдем абсциссу точки касания.

$$y'=2x-1; y'(x_0)=2x_0-1=5; x_0=3.$$

Составляя уравнение искомой касательной, получим:

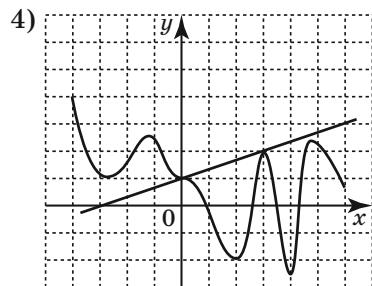
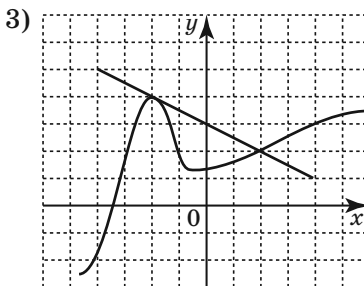
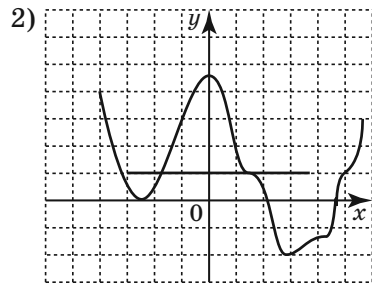
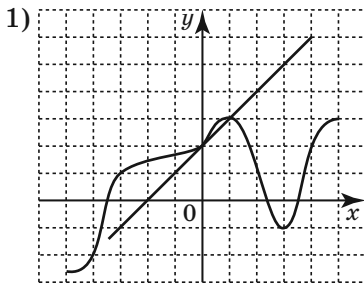
$$y=5(x-3)+7; y=5x-8,$$

откуда искомое значение параметра $a=-8$.

Ответ: -8 .

Упражнение 5.

Найдите тангенс угла наклона касательных, проведенных к графикам функций, изображенных на рисунках.



Ответы: 1) 1; 2) 0; 3) $-0,5$; 4) $0,25$.

Упражнение 6.

Найдите угловой коэффициент в уравнении касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0 .

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x_0 = 2;$$

$$2) f(x) = x^2 - 7x + 3, \quad x_0 = 3;$$

$$3) f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3};$$

$$4) f(x) = \ln(4x - 1), \quad x_0 = \frac{1}{2};$$

$$5) f(x) = \frac{x+1}{x-3}, \quad x_0 = 1.$$

Ответы: 1) 0; 2) -1; 3) -1; 4) 4; 5) -1.

Упражнение 7.

Найдите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0 .

$$1) f(x) = x - 2x, \quad x_0 = 1;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x^4 + 2}, \quad x_0 = 0;$$

$$3) f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}, \quad x_0 = 2;$$

$$4) f(x) = x \ln x, \quad x_0 = e;$$

$$5) f(x) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x), \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Ответы: 1) $y = -1$; 2) $y = 0,25$; 3) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$; 4) $y = e$;
5) $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Упражнение 8.

Найдите уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ и проходящей через точку $M(x_0; y_0)$.

$$1) f(x) = -x^2 + 1, \quad M(1; 1);$$

$$2) f(x) = x^3, \quad M(2; 4);$$

$$3) f(x) = x^2 - x, \quad M(-1; -1);$$

$$4) f(x) = \sqrt{x}, \quad M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right);$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x}, \quad M(-1; 1).$$

Ответы: 1) $y = 1$; $y = -4x + 5$;

$$2) y = 3x - 2, y = 3(4 + 2\sqrt{3})x - 12\sqrt{3} - 20;$$

$$y = 3(4 - 2\sqrt{3})x + 12\sqrt{3} - 20;$$

$$3) y = (-3 + 2\sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3}; y = (-3 - 2\sqrt{3})x - 4 - 2\sqrt{3};$$

$$4) y = x + \frac{1}{4};$$

$$5) y = -(3 + 2\sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2}; y = -(3 + 2\sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2}.$$

Упражнение 9.

1) Найдите значение абсциссы точки касания прямой $y = 2x + b$ и графика функции $y = x^2 - 2x + 3$.

2) Найдите значение ординаты точки касания прямой $y = -2x + b$ и графика функции $y = x^2 + 2x + 3$.

3) Найдите значение параметра, при котором прямая $y = x + b$ является касательной к графику функции $y = x^2 - x + 1$.

4) Найдите сумму значений параметра, при которых прямая $y = x + b$ является касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1.$$

5) Найдите произведение значений параметров, при каждом из которых прямая $y = -x + b$ является касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + 5$.

Ответы: 1) 2; 2) 3; 3) 0; 4) 2; 5) -3.

Упражнение 10.

1) Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 6t - t^2$, где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найдите момент остановки тела.

2) Тело движется прямолинейно по закону

$$S(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1,$$

где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найдите ускорение тела в момент времени $t = 2$ сек.

3) Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 6t - t^2$, где путь $S(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найдите путь, пройденный телом от начала измерения до остановки.

4) Мгновенная скорость тела изменяется по закону $V(t) = t^2 - 2t$, скорость измеряется в м/с, а время — в секундах. Найдите ускорение тела в момент времени $t = 1$ с.

5) Тело совершает колебания вокруг положения равновесия по закону $x(t) = 3\sin t + 4\cos t$. Найдите наибольшее отклонение тела от положения равновесия.

Ответы: 1) 3; 2) 3; 3) 9; 4) 0; 5) 5.

5.5. Исследование функций на монотонность

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве $X_1 \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве $X_1 \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей на множестве $X_1 \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на множестве $X_1 \subseteq X$, если для любых $x_1, x_2 \in X_1$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

В частности, если функция определена (непрерывна) на отрезке $[a; b]$ или на полуинтервалах $[a; b)$, $(a; b]$ и монотонна (возрастает или убывает) во всех точках интервала $(a; b)$, то функция монотонна и на всем промежутке.

Полезно знать следующую *теорему о монотонности сложной функции*.

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ таковы, что:

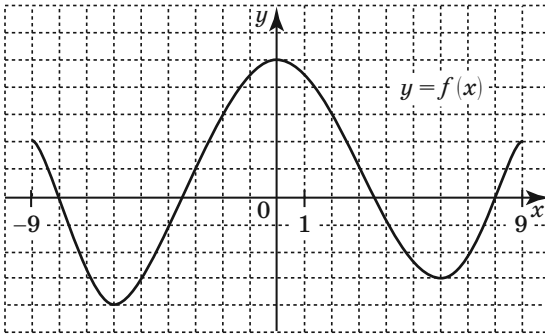
- функция $g(x)$ определена и монотонна на промежутке $\langle \alpha; \beta \rangle$;
- функция $g(x)$ отображает промежуток $\langle \alpha; \beta \rangle$ в промежуток $\langle a; b \rangle$;
- функция $y = f(x)$ определена и монотонна на промежутке $\langle a; b \rangle$.

Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ определена на промежутке $\langle \alpha; \beta \rangle$ и:

монотонно возрастает, если характер монотонности функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ одинаков;

монотонно убывает, если характер монотонности функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ различен.

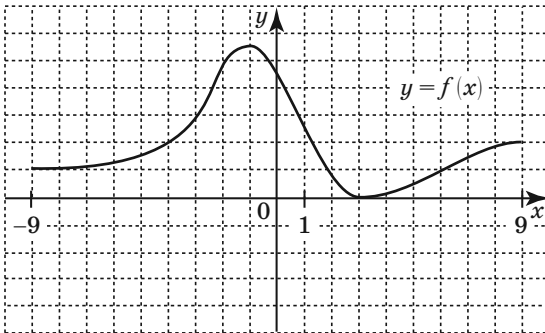
Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-9; 9]$. Определите промежутки возрастания функции.



Решение. Если функция возрастает, то при движении по графику слева направо ординаты точек графика увеличиваются. Следовательно, функция возрастает на отрезке $[-6; 0]$ и на отрезке $[6; 9]$.

Ответ: $[-6; 0]$; $[6; 9]$.

Пример 2. Найдите промежуток убывания функции, график которой представлен на рисунке.



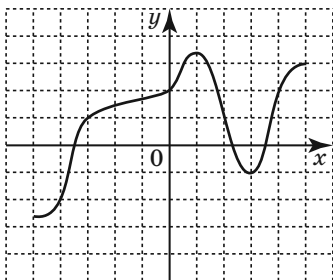
- 1) $[-9; -1]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $[2; 9]$; 4) $[-9; 9]$.

Решение. Если функция убывает, то при движении по графику слева направо ординаты точек графика уменьшаются. Следовательно, функция убывает на $[-1; 2]$.

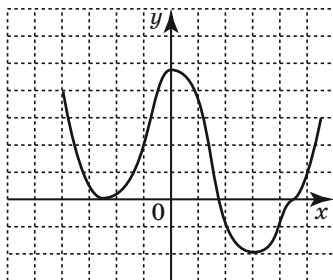
Ответ: 2).

Пример 3. Укажите график возрастающей функции.

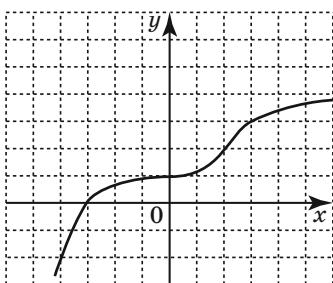
1)



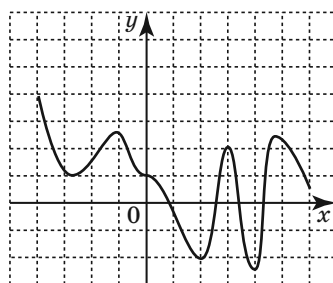
2)



3)



4)

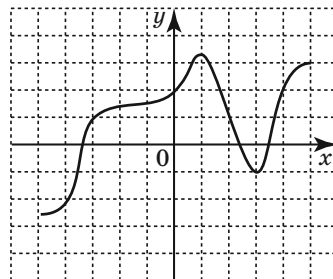


Верный ответ — 3).

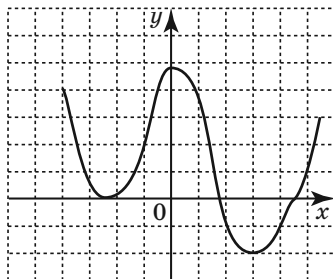
Ответ: 3.

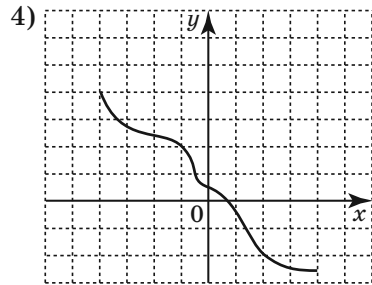
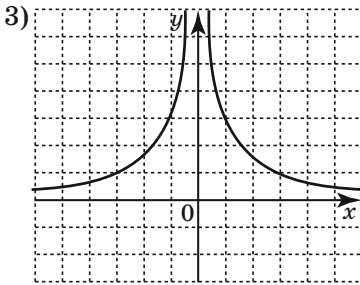
Пример 4. Найдите график убывающей функции.

1)



2)

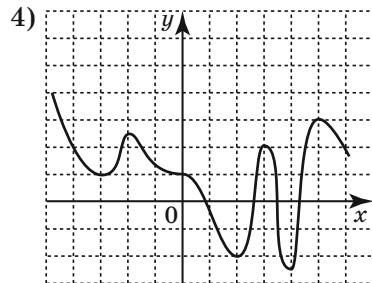
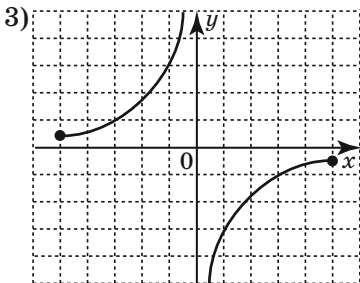
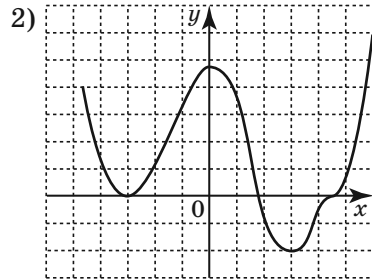
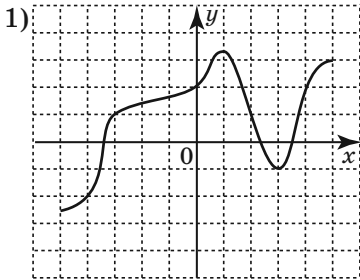




Верный ответ — 4).

Ответ: 4).

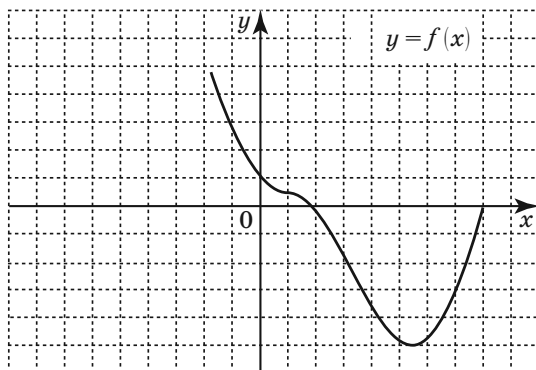
Пример 5. Укажите интервалы возрастания функций, графики которых представлены на рисунках.



1) $[-5; 1]$; $[3; 5]$; 2) $[-3; 0]$; $[3; 6]$;

3) $[-5; 0)$; $(0; 5]$; 4) $[-3; -2]$; $[2; 3]$; $[4; 5]$.

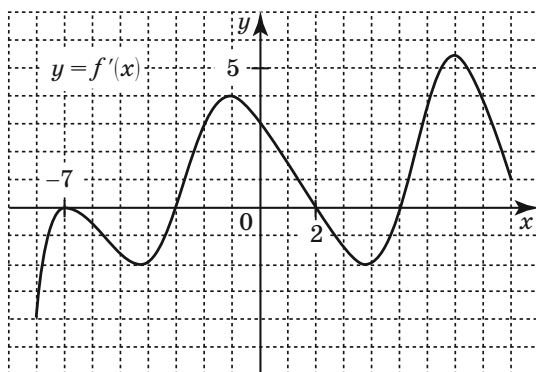
Пример 6. На рисунке представлен график функции $y = x^4 - x^3 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов b и c .



Решение. Заметим, что $c = f(0)$ и, следовательно, $c > 0$.

Также заметим, что $b = f'(0)$, и, следовательно, $b < 0$, так как на интервале, содержащем точку 0, функция убывает.

Пример 7. Определите точку максимума функции $y = f(x)$, если дан график ее производной.



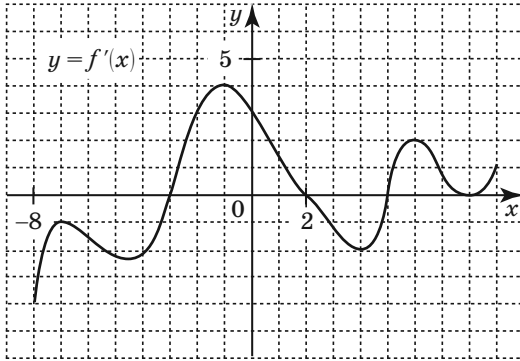
Решение. Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка локального максимума функции.

Критическими точками функции являются точки $-7, -3, -1, 2, 5$. Производная функции меняет знак с «+» на «-» в точке $x_0 = 2$.

Следовательно, 2 — точка максимума функции.

Ответ: 2.

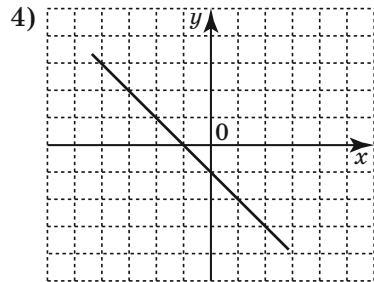
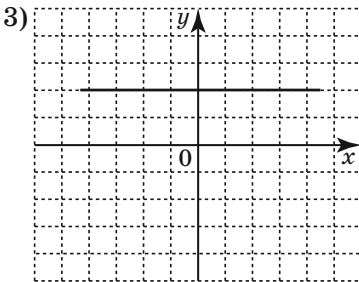
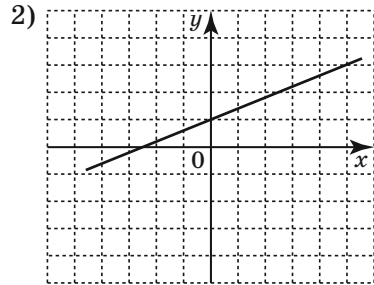
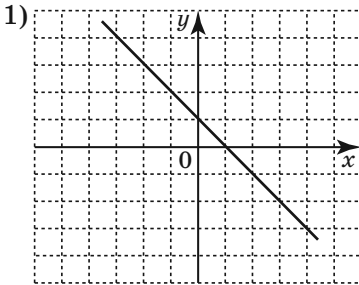
Пример 8. Определите интервалы убывания функции, если задан график ее производной.



Решение. Если непрерывная функция убывает на множестве, то ее производная не больше нуля. Поэтому, функция убывает на $[-8; -3]$ и на $[2; 5]$.

Упражнение 1.

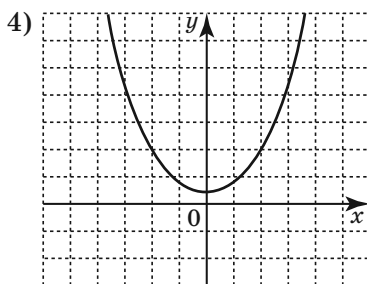
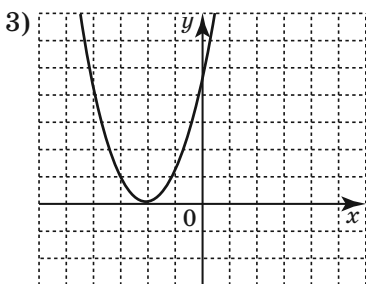
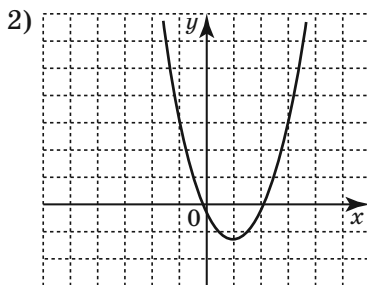
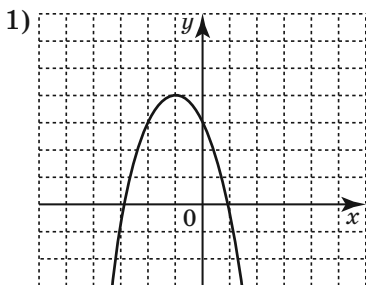
На рисунках представлены графики линейной функции $y = kx + b$. Найдите знаки коэффициентов k и b .



Ответы: 1) $k < 0$, $b > 0$; 2) $k > 0$, $b > 0$; 3) $k = 0$, $b > 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.

Упражнение 2.

На рисунке представлены графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Укажите знаки коэффициентов a , b , c и дискриминанта D .

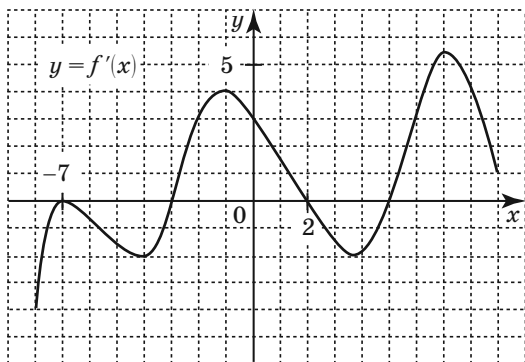


Ответы: 1) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$; $D > 0$; 2) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; $D > 0$; 3) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; $D > 0$; 4) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$; $D < 0$.

Упражнение 3.

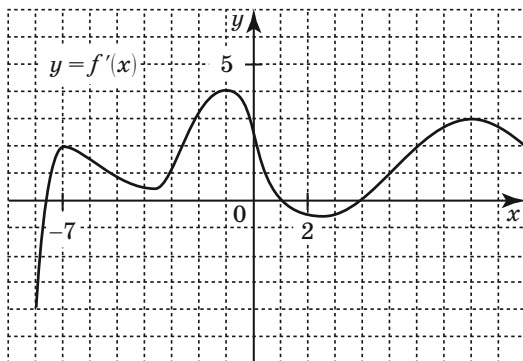
Определите точки минимума функции $y = f(x)$, если дан график ее производной.

Ответ: -3 ; 5 .



Упражнение 4.

Определите точку максимума функции $y = f(x)$, если дан график ее производной.



Ответ: 1.

5.6. Экстремумы. Наибольшие и наименьшие значения функции

Общая схема исследования функции и построения ее графика включает такие элементы, как нахождение промежутков возрастания и убывания, точек экстремума, нахождение наибольших и наименьших значений и т.д.

Применение производной позволяет упростить исследование функции.

1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Функция $y = f(x)$ является постоянной на указанном интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a; b)$.

2. Если для дифференцируемых на интервале $(a; b)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ при любом $x \in (a; b)$ справедливо равенство $f'(x) = g'(x)$, то для всех $x \in (a; b)$ справедливо $f(x) = g(x) + c$, $c = \text{const}$.

3. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на интервале $(a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ и при этом равенство $f'(x) = 0$ справедливо только в конечном числе точек интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$.

4. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на интервале $(a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ и при этом равенство $f'(x) = 0$ справедливо только в конечном числе точек интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$.

5. Внутренняя точка области определения $x_0 \in D(f)$ называется критической точкой функции $y = f(x)$, если в этой точке производная равна 0 или не существует. Точка a называется стационарной точкой функции $y = f(x)$, если $f'(a) = 0$.

6. Критическая точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой локального максимума, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

7. Критическая точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой локального минимума, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

8. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума. Значения функции в этих точках называются экстремумами функции.

9. Необходимое условие экстремума.

Если дифференцируемая в точке x_0 функция имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или производная не существует.

10. Достаточное условие экстремума.

Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка локального максимума функции.

Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка локального минимума функции.

Если же производная знака не меняет, то критическая точка экстремумом не является.

11. Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, достигаются либо в критических точках $x_0 \in (a; b)$, либо на концах отрезка.

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x - \frac{1}{3}$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Найдём критические точки функции на $(0; 2)$. Функция дифференцируемая, поэтому $y' = 4x^2 - 4$.

Решим уравнение $4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$

Применим алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке.

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка.

$$y(0) = -\frac{1}{3}, \quad y(1) = -3, \quad y(2) = \frac{7}{3}.$$

Таким образом $\min_{[0;2]} y(x) = y(1) = -3$.

Ответ: -3 .

При решении задач следует помнить, что область определения производной функции никогда не бывает шире области определения самой функции!

$$\text{Т.е. } D(f') \subseteq D(f)$$

Пример 2. Найдите интервалы монотонного возрастания функции $f(x) = x^3 e^{-\sqrt{x}}$.

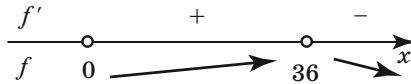
Решение. Функция определена на полуинтервале $[0; +\infty)$, дифференцируема во всех точках интервала $(0; +\infty)$.

Найдем производную функции, ее критические точки, интервалы возрастания и убывания.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-\sqrt{x}} + x^3 e^{-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = x^2 e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{6\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}} \right).$$

Критическая точка функции $x = 36$.

$$f'(1) > 0, \quad f'(49) < 0.$$



Функция возрастает на отрезке $[0; 36]$ и убывает на полуинтервале $[36; +\infty)$.

Ответ: $[0; 36]$.

Пример 3. Найдите интервалы монотонности функции $y = x \ln x$.

Решение. Область определения функции $y = x \ln x$ $D(y) = (0; +\infty)$.

Найдем производную данной функции.

$$y' = \ln x - 1.$$

Найдем критические точки функции.

$$y' = \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Исследуем поведение функции на полуинтервалах $(0; e]$ и $[e; +\infty)$.



Ответ: на полуинтервале $(0; e]$ функция убывает, а на полуинтервале $[e; +\infty)$ — возрастает.

Пример 4. Представить число 12 в виде суммы трех неотрицательных слагаемых, произведение которых принимает наибольшее возможное значение, причем одно из слагаемых в 3 раза меньше одного из двух других.

Решение. Обозначим меньшее слагаемое x , тогда второе слагаемое станет равным $3x$, а третье $12 - 4x$.

Найдем произведение: $P = 3x^2(12 - 4x)$.

Рассмотрим функцию $P(x) = 3x^2(12 - 4x)$. Исходя из условия задачи, получим, что $0 \leq x \leq 3$.

Найдем наибольшее значение функции на отрезке. Для этого найдем производную, определим критические точки, исследуем их на экстремум.

$$P'(x) = 72x - 36x^2 = 36x(2 - x).$$

Критическая точка $x = 2$. При переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (далее: с «+» на «-»), поэтому $x = 2$ — точка максимума. Но так как на отрезке экстремум единственный, и он — максимум, то в этой точке функция принимает наибольшее значение.

Таким образом, получим, что $12 = 2 + 4 + 6$.

Ответ: 2; 4; 6.

Упражнение 1.

Укажите интервалы монотонного возрастания функции.

$$1) y = \frac{6x + 8}{x^2 + 1};$$

$$2) y = \frac{3x-4}{x^2+1};$$

$$3) y = x^2 \ln x;$$

$$4) y = x^2 \cdot 3^{-x};$$

$$5) y = (x^2 + x + 1) \ln(x^2 + x + 1).$$

Ответы: 1) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$; 3) $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$; 4) $\left[0; \frac{2}{\ln 3}\right]$;
5) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Упражнение 2.

Укажите интервалы монотонного убывания функции.

$$1) y = x^2 \cdot 2^x;$$

$$2) y = (x^2 - x - 1)e^x;$$

$$3) y = -\frac{x+1}{x^2+x+1};$$

$$4) y = e^{x \ln x};$$

$$5) y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}.$$

Ответы: 1) $\left[-\frac{2}{\ln 2}; 0\right]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[-2; 0]$; 4) $\left(\frac{1}{e}; 1\right)$;
5) $[-1; 1]$.

Упражнение 3.

Найдите наименьшее значение функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $a \leq x \leq b$.

$$1) y = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$2) y = x^4 - 8x^2 - 9, \quad -1 \leq x \leq 3;$$

$$3) y = x^2 - 2 \ln x, \quad 1 \leq x \leq e;$$

$$4) y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}, \quad -1 \leq x \leq 2;$$

$$5) y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ответы: 1) $-\frac{2}{3}$; 2) -25 ; 3) $2 - \ln 2$; 4) 1 ; 5) 0 .

Упражнение 4.

Найдите наибольшее значение функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $a \leq x \leq b$.

1) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1, -2 \leq x \leq 1;$

2) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, -5 \leq x \leq -1;$

3) $y = \sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{1+2x+x^2}, -2 \leq x \leq 0;$

4) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}, -3 \leq x \leq 3;$

5) $y = \sqrt{x(10-x)}, 0 \leq x \leq 10.$

Ответы: 1) 17; 2) -2; 3) 4; 4) 1; 5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Упражнение 5.

1. Представьте число 36 в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых минимальна. Найдите эти числа.

2. Найдите число, которое бы превышало свой удвоенный квадрат на максимальное значение.

3. Число 49 представьте в виде суммы двух положительных сомножителей, сумма которых минимальна. Найдите сумму.

4. Число 36 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых, произведение которых максимально. Найдите произведение этих чисел.

5. Число 20 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых, сумма квадратов которых минимальна. Найдите сумму квадратов этих чисел.

Ответы: 1) 18; 18; 2) 0,25; 3) 14; 4) 324; 5) 200.

Упражнение 6.

1. Участок в форме прямоугольника площадью 200 с трех сторон огорожен забором. Найдите наименьшую длину всей изгороди.

2. Площадь участка в виде параллелограмма с острым углом 30° равна 8. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

3. Площадь участка, имеющего форму равнобокой трапеции с острым углом 30° , равна 200. Какое наименьшее значение принимает его периметр?

4. Площадь трапеции, описанной возле окружности, равна 18. Найдите радиус окружности, если известно, что сумма длин боковых сторон трапеции и ее высоты принимает наименьшее значение.

5. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Ответы: 1) 40; 2) 16; 3) 80; 4) 3; 5) 8.

§ 6. Первообразная функции и ее применение

6.1. Теоремы о первообразных

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, непрерывной на заданном промежутке, если для каждого значения из этого промежутка имеет место равенство: $F'(x) = f(x)$.

1) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то любая функция вида $F(x) + c$, $c = \text{const}$ — также первообразная.

2) Если $F(x)$ и $F_1(x)$ — первообразные функции $f(x)$, то $F(x) - F_1(x) = c$, $c = \text{const}$.

3) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$, заданных на одном промежутке, то $aF(x) + bG(x) + c$, $c = \text{const}$ — первообразная функции $af(x) + bg(x)$.

4) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\frac{1}{a}F(ax + b)$ — первообразная функции $f(ax + b)$.

6.2. Таблица первообразных элементарных функций

Функция	Первообразная функции
1. $f(x) = c$	$F(x) = cx + c_1$
2. $f(x) = x^p$, $p \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
4. $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
5. $f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$

Продолжение таблицы

Функция	Первообразная функции
6. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + c$
7. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + c$
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x + c = -\arccos x + c$
9. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arctg} x + c$
10. $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
11. $f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Пример 1. Укажите первообразную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, заданной на интервале $(0; +\infty)$.

Ответы: 1) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt[3]{x^2}$; 3) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$.

Решение. Применяя формулу нахождения первообразной функции $f(x)$ и учитывая, что $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$, $x > 0$, получим:

$$F(x) = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}.$$

Ответ: 3).

Пример 2. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$, заданной на полуинтервале $[0; +\infty)$, укажите первообразную, график которой проходит через точку $(4; 9)$.

Решение. Общий вид первообразной для функции $f(x) = \sqrt{x}$, заданной на полуинтервале $[0; +\infty)$, $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$. Так как график первообразной проходит через точку с координатами $(4; 9)$, то $F(4) = 9$.

Получим: $9 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} + c$, откуда $c = \frac{11}{3}$.

Получим, что искомая первообразная задается уравнением

$$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{11}{3}.$$

Ответ: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{11}{3}$.

Пример 3. Для функции $f(x) = \sin x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку с координатами $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Решение.

Первообразные функции $f(x) = \sin x$ имеют вид

$$F = -\cos x + c.$$

Так как график первообразной проходит через точку с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$, то получим, что $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Ответ: $F(x) = -\cos x + 1$.

Упражнение 1.

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x + 18 - x^2$.

Ответы: 1) $3 - 2x$; 2) $-\frac{1}{3}x^3 + 3x + 18$; 3) $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18$;
4) $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{4}{x^2}$.

Ответы: 1) $-\frac{12}{x^3}$; 2) $-\frac{4}{x}$; 3) $\frac{2}{x}$; 4) $\frac{12}{x^3}$.

3. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin 6x + \cos 6x$.

Ответы: 1) $-\cos 6x + \sin 6x$;

2) $-6\cos 6x + 6\sin 6x$;

3) $\cos 6x - \sin 6x$;

4) $6\cos 6x - 6\sin 6x$.

4. Найдите первообразную функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Ответы: 1) $1 - \frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x^2}$; 3) $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x|$;

4) $\frac{1}{2}x^2 + \ln|x|$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = e^{x+1} + x$.

Ответы: 1) $e^{x+1} + 1$;

2) $e^{\frac{(x+1)^2}{2}} + \frac{x^2}{2}$;

3) $e^{x+1} + \frac{1}{2}x^2$;

4) $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{x^2}{2}$.

Правильные ответы: 1) 4; 2) 2; 3) 2; 4) 4; 5) 3.

Упражнение 2.

Найдите уравнение первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, если график первообразной проходит через точку $M(x_0; y_0)$.

1) $f(x) = 3x + 18 - x^2$, $M(6; 80)$;

2) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $M(1; 2)$;

3) $f(x) = \sqrt{4x-3}$, $M\left(1; \frac{1}{6}\right)$;

4) $f(x) = 3\sin 3x - 3\cos 3x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

5) $f(x) = (x+1)e^x$, $M(0; 1)$.

Ответы: 1) $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x - 10$;

2) $F(x) = x^2 + \ln|x| + 1$;

3) $F(x) = \frac{1}{6}(4x-3)\sqrt{4x-3}$;

4) $F(x) = -\sin 3x - \cos 3x - 1$;

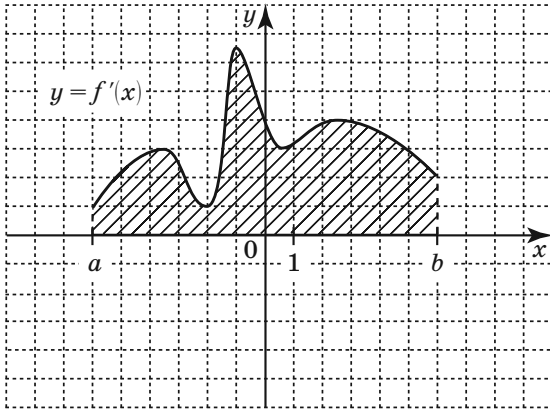
5) $F(x) = xe^x + 1$.

6.3. Формула Ньютона–Лейбница

Площадь криволинейной трапеции.

Одним из основных приложений первообразной является использование ее при вычислении площадей плоских фигур.

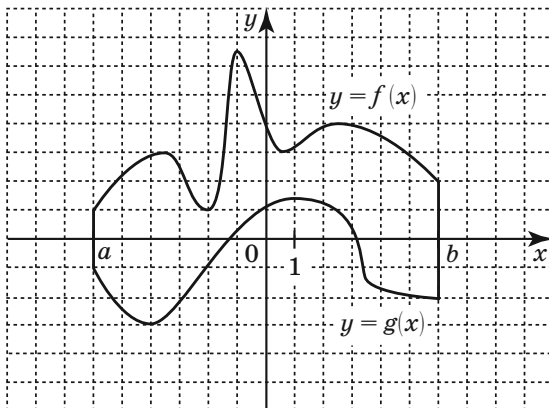
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$.



Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси абсцисс, называется криволинейной трапецией.

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то площадь криволинейной трапеции равна разности значений первообразной $F(b) - F(a)$. Эта формула носит название формулы Ньютона—Лейбница.

Если фигура ограничена графиками двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$, причем $f(x) \leq g(x)$ для всех значений аргумента из этого отрезка, то в этом случае площадь фигуры вычисляется как разность значений $(F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$.



Пример 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс $y = 0$.

Решение. Функция $y = x^2 + 2$ определена и положительна во всех точках отрезка $[-1; 2]$, поэтому можно применить формулу Ньютона—Лейбница.

Первообразная функции $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$.

$$F(2) = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}, \quad F(-1) = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}.$$

Искомая площадь фигуры $F(2) - F(-1) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9$.
 Ответ: 9.

Пример 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, прямыми $x = 0$, $x = \pi$ и осью ординат.

Решение. На отрезке $[0; \pi]$ функция неотрицательна. Поэтому площадь искомой фигуры вычислим по формуле Ньютона—Лейбница.

$$F(x) = -\cos x, \quad F(0) = -1, \quad F(\pi) = 1.$$

$$S = F(\pi) - F(0) = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 3\sqrt{5-x}$, $g(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ и прямой $x = 5$.

Решение. Так как один из концов отрезка, на котором рассматривается криволинейная трапеция, не задан, то естественно считать, что им будет являться абсцисса точки пересечения графиков данных функций.

Решим уравнение $3\sqrt{5-x} = -\frac{3}{4}x + 6$.

$$3\sqrt{5-x} = -\frac{3}{4}x + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x + 6 \geq 0, \\ \sqrt{(5-x)} = -\frac{1}{4}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 18, \\ 16(5-x) = x^2 - 16x + 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 18, \\ x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$$

Далее: на отрезке $[-4; 4]$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, поэтому рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x) = 3\sqrt{5-x} + \frac{3}{4}x - 6$.

Первообразная этой функции $H(x) = -2\sqrt{(5-x)^3} + \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

$$H(4) = -2, \quad H(-4) = -6.$$

$$S = H(4) - H(-4) = -2 - (-6) = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 - 2x + 2$ и $g(x) = 2 + 4x - x^2$.

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций.

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

На отрезке $[0; 3]$ выполняется неравенство $g(x) \geq f(x)$.

Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x) = 6x - 2x^2$.

Первообразная $H(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}x^3$.

$$H(0) = 0, \quad H(3) = 9.$$

По формуле Ньютона—Лейбница $S = 9$.

Ответ: 9.

Упражнение 1.

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками линий.

1) $y = x^2$, $y = 8$, $x = 0$;

2) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 2$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$;

4) $y = \frac{9}{x}$, $y = x$, $x = 9$, $y = 0$;

5) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 2$.

Ответы: 1) 12; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{7}{6}$; 4) $9\left(\frac{1}{2} + \ln 3\right)$; 5) $e^2 - 1$.

Упражнение 2.

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y = x^2$, $y = x + 2$;

2) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$;

3) $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$;

4) $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$;

5) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4$, $y = 1$;

Ответы: 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $\frac{1}{4}(15 - 16\ln 2)$; 5) $\frac{16}{15}\sqrt{3}$.

§ 7. Задачи, использующие различные свойства функций

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt[8]{x+1} + \sqrt[8]{x-1} = \sqrt[8]{2}$.

Решение. Функция $y = \sqrt[8]{x+1} + \sqrt[8]{x-1}$ монотонно возрастает на $[1; +\infty)$, поэтому каждое свое значение принимает лишь при единственном значении аргумента. И так как $y(1) = \sqrt[8]{2}$, то единственное решение уравнения $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Решите уравнение

$$x(1 + \sqrt{1+x^2}) + (2x+1)(1 + \sqrt{1+(2x+1)^2}) = 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x(1 + \sqrt{1+x^2})$.

Данная функция определена на всей числовой прямой и нечетна. Действительно:

$$f(-x) = -x(1 + \sqrt{1+(-x)^2}) = -x(1 + \sqrt{1+x^2}) = -f(x).$$

Таким образом, исходное уравнение можно записать в виде:

$$f(x) + f(2x+1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -f(2x+1) \Leftrightarrow f(x) = f(-2x-1).$$

Докажем, что данная функция монотонна. Для этого найдем производную.

$$f'(x) = \left(x \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) \right)' = 1 + \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Производная положительна при всех значениях аргумента, поэтому функция — монотонно возрастающая. Исходя из определения монотонно возрастающей функции, получим, что

$$f(x) = f(-2x-1) \Leftrightarrow x = -2x-1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 3. Найдите наименьшее значение параметра, при котором уравнению $x^3 - 6x^2 = a$ удовлетворяют ровно два значения переменной.

Решение. Уравнение третьей степени имеет либо один действительный корень, либо три действительных корня. Ровно два значения переменной могут удовлетворять уравнению лишь тогда, когда один из корней имеет кратность 2. В этом случае многочлен $P_3(x) = x^3 - 6x^2 - a$ можно представить в виде: $P_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)$. Но тогда производная этого многочлена

$$P'_3(x) = 2(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)^2 = (x - x_0)(3x - 2x_1 - x_0)$$

обращается в ноль в той же точке, что и сам многочлен.

Найдем производную.

$$P'_3(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

Получим, что либо $x=0$, либо $x=4$ должен являться кратным корнем уравнения.

Найдем значения параметра, при котором $x=4$ является корнем уравнения. Подставив, получим, что $a = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = -32$.

Уравнение приобретет вид

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 32 = 0 &\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2(x+2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $a = -32$ уравнению удовлетворяют два значения переменной.

Найдем значение параметра, при котором $x=0$ является корнем уравнения.

Подставив, получим, что $a=0$.

Уравнение приобретет вид: $x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-6) = 0$.

Следовательно, при $a=0$ уравнению также будут удовлетворять два значения переменной.

Выбирая из найденных значений наименьшее, получим, что таковым будет являться $a=-32$.

Ответ: -32 .

Пример 4. Решите уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x - 18} - 2|.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t) = 3t + |t - 2| = \begin{cases} 4t - 2, & t \geq 2, \\ 2t + 2, & t \leq 2. \end{cases}$$

Данная функция возрастает на каждом из множеств $(-\infty; 2]$ и $[2; +\infty)$. Поэтому, записав уравнение в виде $f(x) = f(\sqrt{3x + 18})$, в силу монотонности функции получим, что оно равносильно уравнению $x = \sqrt{3x + 18}$.

$$x = \sqrt{3x + 18} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 3x - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 6, \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} \leq 1.$$

Решение. Заметим, что подкоренные выражения представляют полные квадраты. Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} \leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 2)^2} + \\ &+ \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 3)^2} \leq 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x - 1} - 2| + |\sqrt{x - 1} - 3| \leq 1. \end{aligned}$$

Так как $\min(|x - a| + |x - b|) = |a - b|$, то

$$|\sqrt{x - 1} - 2| + |\sqrt{x - 1} - 3| \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x - 1} \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 10.$$

Ответ: $[5; 10]$.

Пример 6. Решите уравнение $\log_2(1+x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$.

Решение.

$$\log_2(1+x^2) = \log_2 x + 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 \frac{1+x^2}{x} = 1 - (x-1)^2. \end{cases}$$

Применим неравенство Евклида: $\frac{1+x^2}{x} = x + \frac{1}{x}$, а так как $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geq 2$ и $\log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$. Заметим также, что равенство достигается при $x = 1$.

В свою очередь, правая часть уравнения $1 - (x-1)^2 \leq 1$, причем равенство достигается лишь при $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 7. Найдите наименьшее расстояние d между точками, одна из которых принадлежит графику функции $y = 2x^2 + \frac{x}{2} + 3$, а другая — графику функции $y = \sqrt{x}$. В ответ запишите квадрат найденного значения d .

Решение. Требуется найти квадрат длины «общего перпендикуляра» к графикам данных функций. Пусть концы этого перпендикуляра точки $A(x_0; \sqrt{x_0})$ и $B(x_1; 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3)$. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке A .

Ее уравнение будет иметь вид $y = -2\sqrt{x_0}(x - x_0) + \sqrt{x_0}$. При составлении уравнения нормали используется то, что $k_{\text{кас.}} \cdot k_{\text{нор.}} = -1$.

Для того чтобы эта прямая была «общим перпендикуляром» к данным кривым, необходимо, чтобы в точке B выполнялись равенства:

$$\begin{cases} -2\sqrt{x_0}(x - x_0) + \sqrt{x_0} = 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 4x_1 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы означает, что данная прямая проходит через точки A и B , а второе, что она перпендикулярна касательным к кривым в этих точках.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -2\sqrt{x_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0}=2x_1^2+\frac{x_1}{2}+3, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}}=4x_1+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x_0}(x_1-x_0)+\sqrt{x_0}=\frac{1}{8}\left(4x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{95}{32}, \\ 4x_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\sqrt{x_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}-\frac{1}{2}-4x_0\right)+2\sqrt{x_0}=\frac{1}{16x_0}+\frac{95}{16}. \end{aligned}$$

Преобразуя, получим уравнение:

$$64(\sqrt{x_0})^5+40(\sqrt{x_0})^3-103(\sqrt{x_0})^2-1=0.$$

Так как сумма коэффициентов уравнения равна 0, то первым решением является 1. Раскладывая на множители, получим:

$$\begin{aligned} & 64(\sqrt{x_0})^5+40(\sqrt{x_0})^3-103(\sqrt{x_0})^2-1=0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x_0}-1)\left(64x_0^2+64x_0^{\frac{3}{2}}+104x_0+x_0^{\frac{1}{2}}+1\right)=0. \end{aligned}$$

Так как x_0 — абсцисса точки графика функции $y=\sqrt{x}$, то более решений нет.

Таким образом, точка A имеет координаты $(1; 1)$, а точка B — $(0; 3)$.

Искомый квадрат расстояния равен 5.

Пример 8. Решите уравнение $x^2-x+2=2\sqrt[4]{2x-1}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} x^2-x+2=2\sqrt[4]{2x-1} & \Leftrightarrow x^2-2x+2=2\sqrt[4]{2x-1}-x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x-1)^2+1=-x+2\sqrt[4]{2x-1}. \end{aligned}$$

Исследуем области значений функций, стоящих в разных частях уравнения, учитывая, что $x \geq \frac{1}{2}$.

Очевидно, что $(x-1)^2 + 1 \geq 1$, причем минимальное значение принимается при $x=1$.

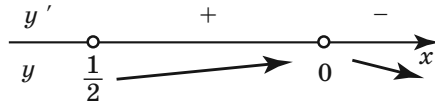
Найдем наибольшее значение функции $y = -x + 2\sqrt[4]{2x-1}$, стоящей в правой части уравнения.

Функция дифференцируема на интервале $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Найдем производную, критические точки, исследуем их на экстремум.

$$y' = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}} = \frac{1 - \sqrt[4]{(2x-1)^3}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}.$$

Найдем критические точки функции.

$$\sqrt[4]{(2x-1)^3} = 1 \Leftrightarrow (2x-1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$



При переходе через критическую точку производная меняет свой знак с «+» на «-». Следовательно, $x=1$ — точка максимума функции. А так как на полуинтервале $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ экстремум единственный, и он — максимум, то при $x=1$ функция принимает наибольшее значение.

Найдем это значение: $y(1)=1$.

Таким образом, получим, что $x=1$ — единственное решение исходного уравнения.

Ответ: 1.

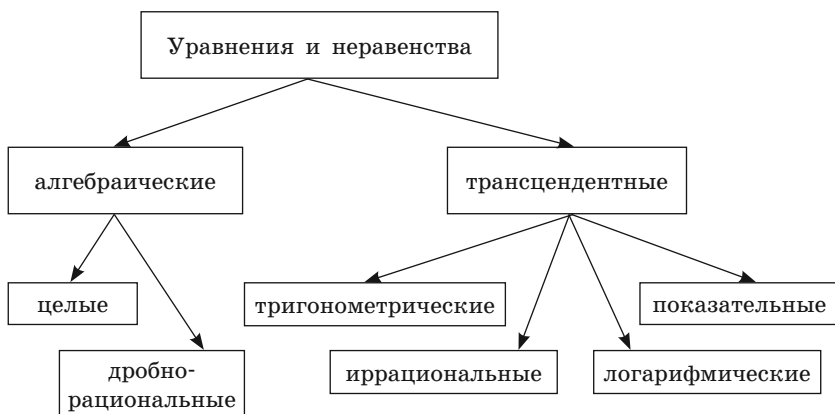
ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

§ 1. Основные понятия. Определения. Теоремы о равносильных преобразованиях

В школьном курсе математики уравнение определяется как равенство двух выражений, содержащих неизвестное число или неизвестные числа.

Классификация уравнений и неравенств, рассматриваемых в школьном курсе математики, приведена на рисунке.



Следует заметить, что классификация носит достаточно приблизительный характер, так как обычно, за исключением наиболее простых случаев, уравнения и неравенства имеют комбинированный вид.

Решить уравнение (неравенство) — это значит найти множество значений переменной или все упорядоченные наборы переменных, при подстановке которой или которых в данное уравнение (неравенство) оно обращается в верное числовое равенство (соответственно, неравенство).

Процесс решения уравнений обычно состоит из ряда последовательных преобразований, имеющих целью заменить данное уравнение одним или несколькими более простыми. Получающиеся в конце простейшие уравнения легко решаются, что дает возможность найти решения исходного уравнения.

Определение. Два уравнения $F(x)=G(x)$ и $F_1(x)=G_1(x)$ называются равносильными, если множества их решений совпадают или оба эти множества пусты.

В этих случаях переход от первого уравнения ко второму записывается следующим образом $F(x)=G(x) \Leftrightarrow F_1(x)=G_1(x)$.

Определение. Если требуется решить набор уравнений, причем искомое значение переменной должно удовлетворять хотя бы одному из них, то говорят, что надо решить совокупность уравнений.

Совокупность уравнений записывается так:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ F_2(x) = 0 \\ \dots \\ F_n(x) = 0 \end{cases}$$

Определение. Решением совокупности уравнений является значение переменной, удовлетворяющее хотя бы одному уравнению совокупности.

Две совокупности уравнений называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Определение. Если требуется решить набор уравнений, причем искомое значение переменной должно удовлетворять каждому из них, то говорят, что надо решить систему уравнений.

Система уравнений записывается так:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ F_2(x) = 0 \\ \dots \\ F_n(x) = 0 \end{cases}$$

Определение. Решением системы уравнений является значение переменной, удовлетворяющее всем уравнениям систе-

мы. Две системы уравнений называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Понятие равносильности обладает свойством транзитивности, т.е., если уравнение $F(x)=G(x)$ равносильно уравнению $F_1(x)=G_1(x)$, а, в свою очередь, уравнение $F_1(x)=G_1(x)$ равносильно уравнению $F_2(x)=G_2(x)$, то уравнение $F(x)=G(x)$ равносильно уравнению $F_2(x)=G_2(x)$.

Определение. Замена уравнения равносильным ему или замена уравнения равносильной совокупностью уравнений (неравенств, систем) называется равносильным переходом.

В практике решения уравнений и неравенств существенно иметь в виду следующее положение: при выполнении над обеими частями уравнения операции, для которой обратное преобразование не является однозначным, может получиться уравнение или неравенство, равносильное исходному уравнению или неравенству.

Приведем основные *теоремы о равносильных преобразованиях*.

1. Сравнение $F(x) \vee G(x)$ (уравнение, неравенство) остается равносильным при переносе слагаемого из одной части уравнения в другую с переменной знака этого слагаемого.

$$F(x) \vee G(x) \Leftrightarrow F(x) - G(x) \vee 0.$$

2. Сравнение $F(x) \vee G(x)$ остается равносильным при прибавлении к обеим частям одного и того же числа.

$$F(x) \vee G(x) \Leftrightarrow F(x) + c \vee G(x) + c.$$

3. Сравнение остается равносильным при умножении обеих частей уравнения на положительное число.

$$F(x) \vee G(x) \Leftrightarrow cF(x) \vee cG(x).$$

§ 2. Целые алгебраические уравнения

2.1. Линейное уравнение с одной переменной

Определение. Целым алгебраическим уравнением называется уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0, \dots, a_n \in R.$$

Простейшим целым алгебраическим уравнением является линейное уравнение.

Определение. Уравнение вида $ax + b = 0$, $a \neq 0$ называется линейным.

Линейное уравнение имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Таким образом, можно записать, что $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Пример 1. Корень уравнения

$$\left(\frac{x}{5} + 1\right)\left(\frac{5x}{3} - 3\right) = \frac{3x^2 + 1}{9} - 2\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right)$$

равен:

1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{11}{13}$; 3) $\frac{13}{15}$; 4) $\frac{110}{3}$.

Решение. Проводя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{5} + 1\right)\left(\frac{5x}{3} - 3\right) &= \frac{3x^2 + 1}{9} - 2\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} - \frac{3x}{5} - 3 = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{3} - \frac{3x}{5} - x = 3 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{22}{9} \Leftrightarrow x = \frac{110}{3}. \end{aligned}$$

Решением уравнения является число, равное $\frac{110}{3}$, поэтому правильный ответ — 4).

Ответ: 4).

Пример 2. Корень уравнения $x + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} - x\sqrt{2}$ равен

1) $-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}+1$.

Решение. Приведем подобные члены уравнения и применим методы преобразования иррациональных выражений.

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} - x\sqrt{2} \Leftrightarrow x(1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(1 + \sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

Решением уравнения является число $\sqrt{2}-1$, поэтому правильный ответ — 2).

Ответ: 2).

Пример 3. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения $\frac{2x+3}{5} + \frac{x+7}{2} = 7$.

- 1) (0;1); 2) (1;2); 3) (2;3); 4) (3;4).

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{5} + \frac{x+7}{2} = 7 &\Leftrightarrow 4x+6+5x+35=70 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x=29 \Leftrightarrow x=\frac{29}{9}.\end{aligned}$$

Решением уравнения является число $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$, а так как $3 < 3\frac{2}{9} < 4$, то правильный ответ — 4).

Ответ: 4).

Упражнение 1.

1. Корень уравнения $\frac{\sqrt{2}}{2} - 2x = \frac{(1+\sqrt{6})^2}{\sqrt{2}} + x\sqrt{6}$ равен

- 1) $-\sqrt{3}$; 2) $1-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{6}-1$.

2. Корень уравнения $x\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}-1\right) - \sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1-\sqrt{3}$ равен

- 1) $-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}+1$.

3. Корень уравнения $\frac{3}{2}x - \frac{17}{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-4x-\sqrt{2})$ равен

- 1) 1,5; 2) $1-\sqrt{2}$; 3) 0,75; 4) $\sqrt{2}$.

4. Найдите интервал, которому принадлежит корень уравнения

$$\frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} = \frac{2x-7}{3} - 8.$$

- 1) (10; 12); 2) (12; 14); 3) (14; 16); 4) (16; 18).

5. Найдите сумму наибольшего целого числа, не превос-

ходящего корень уравнения $1 - \frac{x - \frac{x+1}{3}}{3} = \frac{x}{2} - \frac{2x - \frac{10-7x}{3}}{2}$ и наименьшего целого числа, большего корня.

- 1) 1; 2) -1; 3) 3; 4) -3.

Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 3; 5) 1.

2.2. Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ называется квадратным уравнением.

Разрешимость этого уравнения во множестве действительных чисел зависит от знака его дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

$$\text{Если } D > 0, \text{ то } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \end{cases}$$

В этом случае уравнение имеет два различных корня.

$$\text{Если } D = 0, \text{ то } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b}{2a}, \\ x = \frac{-b}{2a}. \end{cases}$$

В этом случае уравнению удовлетворяет одно значение переменной, и уравнение имеет один двойной корень или корень кратности два. Если $D < 0$, то уравнение неразрешимо во множестве действительных чисел, т.е. корней не имеет.

Если корни квадратного уравнения существуют ($D \geq 0$), то они связаны между собой следующими соотношениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Пример 1. Пусть u и v — корни квадратного уравнения $x^2 + 4x + 2 = 0$.

Не вычисляя корней, найдите значение выражения $\frac{u^3 - v^3}{u^6 - v^6}$.

$$1) -\frac{1}{20}; 2) -\frac{1}{30}; 3) -\frac{1}{40}; 4) -\frac{1}{10}.$$

Решение. Убедившись, что дискриминант данного квадратного уравнения положителен, а, следовательно, его корни различны, преобразуем искомое выражение.

$$\begin{aligned}\frac{u^3 - v^3}{u^6 - v^6} &= \frac{u^3 - v^3}{(u^3 - v^3)(u^3 + v^3)} = \frac{1}{(u+v)(u^2 - uv + v^2)} = \\ &= \frac{1}{(u+v)((u+v)^2 - 3uv)}.\end{aligned}$$

Используя соотношения между корнями, получим, что

$$\begin{cases} u+v=-4, \\ uv=2. \end{cases}$$

откуда $\frac{u^3 - v^3}{u^6 - v^6} = \frac{1}{(-4)(16-6)} = -\frac{1}{40}.$

Получим, что номер правильного ответа — 3).

Ответ: 3).

Пример 2. Найдите меньший корень уравнения

$$x^2 + 5x + \sqrt{24\sqrt{2} - 41} = \sqrt{24\sqrt{2} + 41}.$$

1) -3; 2) -5; 3) -7; 4) -6.

Решение. Применив формулу двойного радикала

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

получим, что

$$\begin{aligned}\sqrt{41 + 24\sqrt{2}} &= \sqrt{41 + \sqrt{1152}} = \sqrt{\frac{41 + \sqrt{1681 - 1152}}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{41 - \sqrt{529}}{2}} = \sqrt{\frac{41 + 23}{2}} + \sqrt{\frac{41 - 23}{2}} = \\ &= \sqrt{32} + 3 = 4\sqrt{2} + 3.\end{aligned}$$

Аналогично $\sqrt{24\sqrt{2} - 41} = \sqrt{41 - 24\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 3.$

После этих вычислений уравнение приобретет следующий вид:

$$x^2 + 5x + 4\sqrt{2} - 3 = 4\sqrt{2} + 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Решая его, получим, что $x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=-6. \end{cases}$

Меньший корень уравнения равен -6. Правильный ответ имеет номер 4).

Ответ: 4).

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - 3|x| - 4 = 0$. В ответе укажите произведение его корней.

1) -4; 2) 4; 3) -16; 4) 16.

Решение. Поскольку $x^2 = |x|^2$, то

$$x^2 - 3|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 3|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 4, \\ |x| = -1. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, первое же имеет два решения $|x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$

Таким образом, произведение корней исходного уравнения равно -16. Правильный ответ имеет номер 3).

Ответ: 3).

Пример 4. Решите уравнение $(x^2 + 5x + 1)^2 + 2x^2 + 10x = -3$. Укажите сумму значений переменной, удовлетворяющих ему.

1) -5; 2) 0; 3) -1; 4) 5.

Решение. Запишем $2x^2 + 10x$ как $2x^2 + 10x = 2(x^2 + 5x + 1) - 2$. Тогда уравнение приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} (x^2 + 5x + 1)^2 + 2x^2 + 10x &= -3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 1)^2 + 2(x^2 + 5x + 1) + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Получившемуся уравнению удовлетворяют два значения переменной, сумма которых равна -5. Правильный ответ имеет номер 1).

Ответ: 1).

Пример 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (a^2 + a)x + a^3 = 0$ в два раза больше другого.

Решение. Заметим, что кратные сравнения имеют место только для положительных чисел.

Из теоремы, обратной теореме Виета, получим, что если числа x_1, x_2 — корни данного уравнения, то его дискриминант обязан быть положительным.

$$\begin{cases} a^2(a-1)^2 > 0, \\ x_1 + x_2 = a(a+1), \\ x_1 \cdot x_2 = a^3, \\ x_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Из высказанного выше замечания следует, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, и, следовательно, $a^3 > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

Исключая x_1, x_2 из второго и третьего условий системы, получим, что

$$2(a(a+1))^2 = 3a^3 \Leftrightarrow a^2(2a^2 - 5a + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0, \\ 2a^2 - 5a + 2 = 0. \end{cases}$$

Так как $a > 0$, то остается решить квадратное уравнение.

$$2a^2 - 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что при найденных значениях параметра дискриминант исходного уравнения положителен. Таким образом, оба найденных значения параметра удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2.

Упражнение 1.

1. Произведение корней уравнения $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$ равно

1) -12; 2) -9; 3) -15; 4) 24.

2. Сумма корней уравнения

$$x^2 - 6x + \sqrt{33 + 8\sqrt{17}} = \sqrt{|33 - 8\sqrt{17}|}$$

равна

1) 1; 2) 4; 3) 6; 4) 7.

3. Найдите второй корень уравнения $ax^2 + (a-1)x - 6 = 0$, если первый корень этого уравнения равен 4.

1) -1; 2) -4; 3) 2; 4) -3.

4. Найдите значение параметра p , если корни уравнения

$$x^2 + px - 13 = 0$$

равны.

1) 1; 2) -2; 3) 0; 4) -1.

5. Сумма целых чисел, заключенных между корнями уравнения

$$x^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{28})x - 14 = 0,$$

равна

1) 11; 2) 12; 3) 13; 4) 14.

Верные ответы: 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 3; 5) 2.

Упражнение 2.

1. Найдите значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^2 = 0$ является квадратом другого.

2. Найдите значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(5a - 1)x^2 - (5a + 2)x + 3x - 2 = 0$ имеет равные корни.

3. Найдите значение параметра a , при котором квадрат разности корней уравнения $x^2 - 2x + a = 0$ равен 16.

4. Найдите значения параметра a , при каждом из которых один из корней уравнения $9x^2 - 18ax - 8a + 16 = 0$ вдвое меньше другого.

5. Найдите значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей.

Ответы: 1) $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 2) 2; $\frac{2}{35}$; 3) -3; 4) 1; -2; 5) 1.

2.3. Некоторые методы решения уравнений высших степеней

Поиск рационального корня уравнения

При решении уравнений, степень которых выше двух, используется теорема Безу.

Теорема. Если $x = a$ — корень многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

то $P_n(a) = 0$ и $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x)$.

При решении алгебраических уравнений с целыми коэффициентами используется следующая теорема.

Теорема. Рациональное число $\frac{m}{k}$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами тогда и только тогда, когда число m является делителем свободного члена, а натуральное число k — делителем старшего коэффициента.

Следствие. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения — целые числа, являющиеся делителями свободного члена уравнения.

Пример 1. Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Решение. Так как старший коэффициент уравнения равен 1, то, если уравнение имеет рациональные корни, они — целые числа, являющиеся делителями свободного члена. Свободный член уравнения равен -2 . Его делители $\pm 1, \pm 2$. Будем вычислять значения правой части уравнения, подставляя последовательно значения, которые могут быть рациональными корнями многочлена, стоящего в левой части уравнения.

$P(-1) = 0$. Следовательно, $x = -1$ — корень уравнения.

Получим

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(-1) = x^3 + 2x^2 - x - 2 - (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) + 2(x+1)(x-1) - (x+1) = (x+1)(x^2 + x - 2). \end{aligned}$$

Получим, что уравнение

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=-2, \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: $-2; -1; 1$.

Для нахождения рациональных корней алгебраического уравнения (точнее, для организации более экономного перебора) с целыми коэффициентами используется следующая теорема.

Теорема. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами $P(x) = 0$, то для любого целого числа k число $P(k)$ делится на число $m - kn$.

Пример 2. Решите уравнение $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$.

Решение. Как следует из теоремы, рациональными корнями уравнения могут быть числа $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}$.

Множество возможных решений содержит 16 чисел. Вычислим, например, $P(1)$. $P(1) = 42$. Таким образом, 1 корнем уравнения не является, следовательно, число 42 делится на число $m - 1$. Число 42 делится на $-1 - 1 = -2$, поэтому -1 может быть корнем.

Число 42 делится на число $3 - 1 = 2$, но не делится на число $-3 - 1 = -4$. Поэтому 3 может быть корнем, а -3 нет. Аналогично, -5 может быть корнем уравнения, а 5, 15, -15 нет. Вычисляя значения, получим, что $P(-5) = 0$.

$$2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0, \\ 2x^2 + 2x + 3 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение, входящее в совокупность, решений не имеет, поэтому $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Ответ: -5 .

Трехчленные уравнения

Уравнения вида $af^2(x) + bf(x) + c = 0$ называются трехчленными уравнениями.

В частности, к ним относятся уравнения $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $n \geq 2$, $n \in N$. При $n = 2$ уравнение называется биквадратным уравнением.

Полагая $x^n = y$, запишем уравнение в виде $ay^2 + by + c = 0$.

Если числа y_1, y_2 — корни этого уравнения, то исходное уравнение

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = y_1, \\ x^n = y_2. \end{cases}$$

Пример 3. Решите уравнение $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Решение. Сделаем замену $x^2 = y$. Решая полученное вспомогательное уравнение, имеем:

$$y^2 - 17y + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = 16. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1, \\ x = -4, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $-1; 1; -4; 4$.

Пример 4. Решите уравнение $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$.

Решение. Делаем замену $y = x^2 + 5x$.

Решаем полученное вспомогательное уравнение

$$y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ y = -4. \end{cases}$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\begin{aligned} (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x = 6, \\ x^2 + 5x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ x^2 + 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ x = 1, \\ x = -4, \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-6; -4; -1; 1$.

Метод симметризации

Другим методом, приводящим некоторые уравнения четвертой степени к трехчленному виду, является метод симметризации.

Уравнение $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = k$ может быть приведено к биквадратному уравнению заменой $y = x - \frac{a+b+c+d}{4}$.

Пример 5. Решите уравнение $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 60$.

Решение. Введем новую переменную $y = x - \frac{3+4+7+8}{4} = x - \frac{11}{2}$. Тогда $x = y + \frac{11}{2}$ и после подстановки уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & \left(y + \frac{11}{2} - 3\right) \left(y + \frac{11}{2} - 4\right) \left(y + \frac{11}{2} - 7\right) \left(y + \frac{11}{2} - 8\right) = 60 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(y + \frac{5}{2}\right) \left(y + \frac{3}{2}\right) \left(y - \frac{3}{2}\right) \left(y - \frac{5}{2}\right) = 60 \Leftrightarrow \left(y^2 - \frac{25}{4}\right) \left(y^2 - \frac{9}{4}\right) = 60 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow y^4 - \frac{17}{2}y^2 + \frac{225}{16} = 60 \Leftrightarrow y^4 - \frac{17}{2}y^2 - \frac{735}{16} = 0.
 \end{aligned}$$

Решим полученное уравнение.

$$\frac{D}{4} = \frac{289}{16} + \frac{735}{16} = \frac{1024}{16} = 64.$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} y^2 = \frac{17}{4} + 8, \\ y^2 = \frac{17}{4} - 8. \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{2}, \\ y = -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим, что решением уравнения является совокупность следующих значений

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} + \frac{11}{2}, \\ x = -\frac{7}{2} + \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 9. \end{cases}$$

Ответ: 2; 9.

Уравнения, сводящиеся к линейным, квадратным и трехчленным уравнениям

Уравнение вида $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ называется симметрическим уравнением третьей степени. Поскольку $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow (x+1)(ax^2 + (b-a)x + a) = 0$, то уравнение равносильно совокупности

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b-a)x + a = 0. \end{cases}$$

Уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

где $a \neq 0$, называются симметрическими уравнениями четвертой степени. Так как $x=0$ корнем уравнения не является, то, разделив на x^2 , получим

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

или

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Поскольку

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

то

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \Leftrightarrow \left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Пример 6. Решите уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.*Решение.*

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -1, \\ x + \frac{1}{x} = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности решений заведомо не имеет, так как $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$. Поэтому

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Метод понижения степени уравнения

Если левую часть алгебраического уравнения с целыми коэффициентами можно разложить на множители, то решение уравнения сводится к решению совокупности уравнений меньших степеней.

Пример 7. Решите уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.*Решение.* Запишем это уравнение в виде

$$(x^2 + x + 1)((x^2 + x + 1) + 1) = 12.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = -4, \\ x^2 + x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 5 = 0, \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: -2 ; 1 .

Метод неопределенных коэффициентов

Пример 8. Решите уравнение $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$.

Решение. Левая часть данного уравнения является многочленом четвертой степени. Этот многочлен, быть может, раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами.

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Так как это разложение тождественно, то после раскрытия скобок правой части коэффициенты при равных степенях переменной должны совпадать.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + c = -4, \\ b + d + ac = -10, \\ ad + bc = 37, \\ bd = -14. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы следует, что b и d — делители числа -14 .

Пусть $b = 1$, тогда $d = -14$. Тогда для коэффициентов a и c получаем систему

$$\begin{cases} a + c = -4, \\ ac = 3, \\ -14a + c = 37. \end{cases}$$

которая решений не имеет.

Пусть $b=2$, тогда $d=-7$. Для коэффициентов a и c получаем систему

$$\begin{cases} a+c=-4, \\ ac=-5, \\ -7a+2c=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5, \\ c=1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}, \\ x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}; \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}.$

Угадывание корня уравнения

Иногда проще угадать корень или корни уравнения, нежели найти общий метод решения.

Пример 9. Решите уравнение

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \\ + (x+3)(x+4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4.$$

Решение. Очевидно, что $x=0$ и $x=-4$ — корни этого уравнения. А так как это уравнение квадратное, то других корней нет.

Ответ: 0; -4.

Метод оценок частей уравнения

Пример 10. Решите уравнение

$$(x^2 + 2x + 3)(2x^4 - 4x^2 + 3) = 2.$$

Решение. Заметим, что $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, а $2x^4 - 4x^2 + 3 = 2(x^2 - 1)^2 + 1$.

Поэтому произведение положительных множителей, стоящих в левой части уравнения, не менее 2. Поэтому

$$(x^2 + 2x + 3)(2x^4 - 4x^2 + 3) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0, \\ 2(x^2 - 1)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1 .

Использование свойств функций

Пример 11. Решите уравнение

$$(x^3 + x - 4)^3 - (x^3 + x - 4) - 4 = x.$$

Решение. Если бы не переменная, стоящая в правой части уравнения, то уравнение не вызвало бы никаких трудностей при решении. Здесь же заметим, что уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, где $f(t) = t^3 + t - 4$.

Для любой монотонно возрастающей функции $f(x)$ уравнение

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Следовательно, уравнение

$$\begin{aligned} (x^3 + x - 4)^3 - (x^3 + x - 4) - 4 = x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 + x - 4 = x &\Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt[3]{4}$.

Пример 12. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $x^4 - x^2 + a^2 - 3a = 1$ имеет 3 различных корня.

Решение. Уравнение четвертой степени не может иметь ровно 3 различных корня. Следовательно, данное уравнение при искомым значениях параметра имеет корень кратности два. Если α — корень кратности два, а β и γ — остальные корни уравнения, то

$$f(x) = x^4 - x^2 + a^2 - 3a - 1 = (x - \alpha)^2(x - \beta)(x - \gamma).$$

Тогда производная функции $f'(x) = 4x^3 - 2x$ имеет тот же корень.

$$\text{Решим уравнение } 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Найдем те значения параметра, при которых один из корней производной является корнем исходной функции, а из них выберем отвечающие условию задачи.

$$1) \ x = 0. \text{ Получим } a^2 - 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \\ a = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

При данных значениях параметра получим уравнение вида

$$x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 0, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Следовательно, найденные значения параметра отвечают условию задачи.

$$2) \ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Получим, что}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a^2 - 3a - 1 = 0 &\Leftrightarrow a^2 - 3a - 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 3a - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{14}}{2}, \\ a = \frac{3 - \sqrt{14}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

При найденных значениях параметра получим, что уравнение будет иметь два корня кратности 2, так как при каждом из этих значений параметра каждое из чисел $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ — корни.

$$\text{Ответ: } \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Использование четности функции

Предыдущая задача может быть решена гораздо более коротким и эффективным способом, который не раз будет применяться в последующем.

Пример 13. Второе решение.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 - x^2 + a^2 - 3a = 1$ имеет 3 различных корня.

Решение. Заметим, что если x_0 — корень уравнения, то $-x_0$ — также его корень. Поэтому уравнение может иметь 3 различных корня только тогда, когда один из них — 0. Подставляя, получим, что

$$a^2 - 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \\ a = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Но, как и при предыдущем способе решения, из найденных значений параметра необходимо выбрать отвечающие условию задачи.

Ответ: $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$.

Пример 14. Решите уравнение $(a - x)^5 + (x - b)^5 = (a - b)^5$, $a \neq b$.

Решение. Введем новые переменные $\begin{cases} a - x = y, \\ x - b = z. \end{cases}$ Тогда, записывая систему, связывающую новые переменные, получим

$$\begin{cases} y^5 + z^5 = (a - b)^5, \\ y + z = a - b. \end{cases}$$

Но $y^5 + z^5 = (y + z)^5 - 5(y + z)^3(yz) + 5(y + z)(yz)^2$.

Подставляя данное выражение в систему, получим

$$\begin{cases} (a - b)^5 - 5(a - b)^3(yz) + 5(a - b)(yz)^2 = (a - b)^5, \\ y + z = a - b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = a - b, \\ 5(yz)^2 - 5(a - b)^2(yz) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz=0, \\ y+z=a-b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ z=a-b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=(a-b)^2, \\ y+z=a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0, \\ y=a-b, \end{cases}$$

так как вторая система совокупности решений не имеет.

Следовательно, исходное уравнение имеет два решения $x = a$ и $x = b$.

Ответ: a ; b .

Сведение уравнения к системе

Очень часто решение уравнения высших степеней можно свести к решению системы уравнений. Рассматривая предыдущий пример, мы заметили простую связь между слагаемыми в левой части уравнения, что позволило составить более просто решаемую систему уравнений. Заметим, что переход от уравнения к системе никогда не является равносильным переходом.

Пример 15. Решите уравнение $x^5 + (6-x)^5 = 1056$.

Решение. Введем новую переменную $y = 6 - x$. Записывая систему, связывающую новые переменные, получим:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 1056, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Так как $x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5(x+y)^3(xy) + 5(x+y)(xy)^2$, то система запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = 6, \\ 6^5 - 5 \cdot 6^3 xy + 5 \cdot 6(xy)^2 = 1056 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ 7776 - 1080xy + 30(xy)^2 = 1056 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ (xy)^2 - 36xy + 224 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8, \\ xy = 28, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8, \\ x + y = 6, \\ xy = 28. \end{cases} \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Виета. Легко видеть, что

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$$

и что вторая система совокупности решения не имеет.

Ответ: 2; 4.

Разрешение уравнения относительно параметра

Пример 16. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2a^2 = 0$, $a > 0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно параметра a . Получим

$$2a^2 - a(3x^2 + 2x) + x^4 + x^3 = 0.$$

$$D(x) = (3x^2 + 2x)^2 - 8(x^4 + x^3) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = (x(x+2))^2.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} a = x^2 + x, \\ a = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - a = 0, \\ x^2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}, \\ x = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}, \\ x = -\sqrt{2a}, \\ x = \sqrt{2a}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}$; $\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$; $-\sqrt{2a}$; $\sqrt{2a}$.

Упражнение 1. Решите уравнения.

1) $x^4 + 5x^2 - 24 = 0$.

Ответ: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

2) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Ответ: -2; 2.

3) $x^4 - 4x^2 + 4 = 1$.

Ответ: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -1 ; 1 .

4) $x^4 - (2x^2 + 3x + 7) + x^2 + x + 4 = -2x - x^2 + 11$.

Ответ: $-\sqrt{14}$; $\sqrt{14}$.

5) $(x^2 + x^2)^2 - (x^2 - x)^2 = 1$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Упражнение 2. Решите уравнения.

1) $(x^3 - 1) + 2(x - 1) = 0$.

Ответ: 1 .

2) $(1 + x)(1 - x)(1 + x^2) = -15$.

Ответ: 2 .

3) $(1 - 2x)(1 + 2x + x^2) = x^3$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

4) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$.

Ответ: $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; -1 ; 1 .

5) $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) = 0$.

Ответ: -1 ; 1 .

Упражнение 3. Решите уравнения.

1) $x^3 + 4 = 3x^2$.

Ответ: -1 ; 2 ; 2 .

2) $x^4 + 4x - 1 = 0$.

Ответ: $\frac{-1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$; $\frac{-1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$.

3) $x^5 - 3x^3 + x = 0$.

Ответ: 0 ; $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; $-\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$; $-\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

4) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$.

Ответ: -3 ; $\frac{1}{2}$; 1 .

5) $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$.

Ответ: $-\frac{3}{2}$; 1 ; 2 ; 3 .

Упражнение 4. Решите уравнения.

1) $x^2(x-1)^2 - 8(x-1)^2 + x^2 = 0$.

Ответ: 2; 2; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

2) $(x^2 - 6x - 9) = x(x^2 - 4x - 9)$.

Ответ: -1; 9; $\frac{5-\sqrt{61}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

3) $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$.

Ответ: Если $a=0$, $x=0$. Если $a \neq 0$, $x = \frac{1}{a}$; $x = -\sqrt[3]{a}$.

4) Найдите все значения параметра β , при которых уравнение $(x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = \beta$ имеет три различных корня.

Ответ: $\frac{9}{16}$.

5) Найдите все отличные от нуля значения параметра a , при которых уравнение $x^8 + ax^4 + a^4 = 0$ имеет ровно четыре корня, образующих в порядке возрастания арифметическую прогрессию.

Ответ: $-\frac{9}{82}$.

§ 3. Рациональные алгебраические уравнения

Рациональным называется уравнение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены. Решение уравнения сводится к решению смешанной системы, состоящей из уравнения и неравенства.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) = 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Решение по определению

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$.

Решение.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0, \\ x^2 + 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \neq 0, \\ x = -1, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: -2 .

Пример 2. Решите уравнение $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{x+2-2x+2-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-6}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-6=0, \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) \neq 0, \\ x = -1 - \sqrt{7}, \\ x = -1 + \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{7}, \\ x = -1 + \sqrt{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-1 - \sqrt{7}$; $-1 + \sqrt{7}$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5} = \frac{(4x-5)^2}{16x^2-25}$.

Решение. Разложим на множители квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе левой части уравнения.

$$\begin{aligned} \frac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5} &= \frac{(4x-5)^2}{16x^2-25} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x+2)}{(x-1)(4x+5)} = \frac{(4x-5)^2}{(4x-5)(4x+5)} \end{aligned}$$

Запишем и решим систему, равносильную уравнению

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)(5x+2)}{(x-1)(4x+5)} &= \frac{(4x-5)^2}{(4x-5)(4x+5)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 4x+5 \neq 0, \\ 4x-5 \neq 0, \\ 5x+2 = 4x-5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7 \end{aligned}$$

Ответ: -7 .

Замена переменных

Уравнение вида $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = C$, где $ABC \neq 0$,
заменой $y = ax + \frac{c}{x}$ сводится к решению уравнения $\frac{A}{y+b_1} + \frac{B}{y+b_2} = C$.

Пример 4. Решите уравнение

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\left(4x + \frac{7}{x}\right) - 8} + \frac{3}{\left(4x + \frac{7}{x}\right) - 10} &= 1 \end{aligned}$$

Сделав замену $y = 4x + \frac{7}{x}$, решим полученное вспомога-
тельное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{4}{y-8} + \frac{3}{y-10} = 1 &\Leftrightarrow \frac{4y-40+3y-24-y^2+18y-80}{(y-8)(y-10)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-25y+144=0, \\ (y-8)(y-10) \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-9)(y-16)=0, \\ (y-8)(y-10) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9, \\ y=16. \end{cases} \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\left(4x + \frac{7}{x}\right) - 8} + \frac{3}{\left(4x + \frac{7}{x}\right) - 10} = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{7}{x} = 9, \\ 4x + \frac{7}{x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x + 7 = 0, \\ 4x^2 - 16x + 7 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{7}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$.

Метод разложения на простейшие дроби

Пример 5. Решите уравнение $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6}$.

Решение. Поскольку $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, $\frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$, $\frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$, то уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x} &= \frac{25}{6}. \\ 3 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x} &= \frac{25}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x} = -\frac{7}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{7x^3 + 21x^2 - 4x - 24}{6x(x+1)(x+2)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + 21x^2 - 4x - 24 = 0, \\ (x+1)(x+2)x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(7x^2 - 14x + 24) = 0, \\ x(x+1)(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Метод выделения полного квадрата

Пример 6. Решите уравнение $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 &= 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} = 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = 4, \\ \frac{x^2}{x-1} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 2, \\ x = -1 + \sqrt{3}, \\ x = -1 - \sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 2; 2; $-1 - \sqrt{3}$; $-1 + \sqrt{3}$.

Метод сведения к решению некоторых специальных уравнений (квадратных, биквадратных, симметрических и т.п.)

Пример 7. Решите уравнение

$$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 12\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0.$$

Решение. Обозначим $a = \frac{x-2}{x+1}$, $b = \frac{x+2}{x-1}$.

Заметим еще, что $\frac{x^2-4}{x^2-1} = ab$.

Получим, что

$$5a^2 + 12ab - 44b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(5a+22b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b, \\ a = -\frac{22}{5}b. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение сводится к решению совокуп-

ности
$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+1} = 2\frac{x+2}{x-1}, \\ 5\frac{x-2}{x+1} = -22\frac{x+2}{x-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+1} = 2\frac{x+2}{x-1}, \\ 5\frac{x-2}{x+1} = -22\frac{x+2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0, \\ (x-2)(x-1) = 2(x+1)(x+2), \\ 5(x-2)(x-1) + 22(x+1)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0, \\ x^2 + 9x + 2 = 0, \\ 27x^2 + 51x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 9x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 - \sqrt{73}}{2}, \\ x = \frac{-9 + \sqrt{73}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-9 - \sqrt{73}}{2}$; $\frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $x\left(\frac{5+x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right) = 6$.

Решение. Обозначим $x\left(\frac{5+x}{x+1}\right) = a$, $\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right) = b$. Заметим теперь, что

$$a + b = x\left(\frac{5+x}{x+1}\right) + x + \frac{5-x}{x+1} = \frac{5-x}{x+1}(x+1) + x = 5.$$

Учитывая, что $ab=6$, получим, что a и b — корни квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ z=3. \end{cases}$

Следовательно, исходное уравнение $x \left(\frac{5+x}{x+1} \right) \left(x + \frac{5-x}{x+1} \right) = 6$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x \frac{5+x}{x+1} = 2, \\ x \frac{5+x}{x+1} = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=2. \end{cases}$$

Ответ: 1; 2.

Примечание. Переход от уравнения, содержащего одну переменную, к системе уравнений, содержащей две и более переменные, никогда не является равносильным переходом.

Пример 9. Решите уравнение

$$\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+2} + \frac{21}{x-3} = \frac{5}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{21}{x+3}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+2} + \frac{21}{x-3} = \frac{5}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{21}{x+3} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + 4 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right) + 21 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{10}{x^2-1} - \frac{16}{x^2-4} + \frac{126}{x^2-9} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{x^2-1} - \frac{8}{x^2-4} + \frac{63}{x^2-9} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{60x^4 - 300x^2 + 360}{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 6 = 0, \\ (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 = 3, \\ (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$.

Пример 10. Решите уравнение $\frac{x^2}{2-x^2} + \frac{x}{2-x} = 2$.

Решение. $\frac{x^2}{2-x^2} + \frac{x}{2-x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2(2-x) + x(2-x^2)}{(2-x)(2-x^2)} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^3 - 6x^2 - 6x + 8}{(x-2)(x^2-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0, \\ (x-2)(x^2-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 2x^2 - x - 4 = 0, \\ (x-2)(x^2-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}, \\ x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}. \end{cases}$$

Ответ: 1 ; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Пример 11. Решите уравнение $x^3 = \frac{7x-3}{7-3x}$.

Решение. Записав равносильную систему, получим, что уравнение четвертой степени решается методом группировки.

$$x^3 = \frac{7x-3}{7-3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 = 0, \\ 3x - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^4 - 1) - 7x(x^2 - 1) = 0, \\ 3x - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(3x^2 - 7x) + 3 = 0, \\ 3x - 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1, \\ x = \frac{7+\sqrt{13}}{6}, \\ x = \frac{7-\sqrt{13}}{6}. \end{cases}$$

Ответ: -1 ; 1 ; $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

Решение уравнений с параметрами

Пример 12. Решите уравнение $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

Решение. Если $a=0$, то данное уравнение решений не имеет.

Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0, \\ ax^2 = (x-1)(a+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ ax^2 - (a+1)^2 x + (a+1)^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Вычислим дискриминант получившегося квадратного уравнения.

$$D = (a+1)^4 - 4a(a+1)^2 = (a+1)^2(a-1)^2.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x = \frac{(a+1)^2 - (a^2 - 1)}{2a}, \\ x = \frac{(a+1)^2 + (a^2 - 1)}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x = 1 + \frac{1}{a}, \\ x = a + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что так как $a \neq 0$, то ни один из корней уравнения не может быть равен 1.

Ответ: Если $a=0$, то данное уравнение решений не имеет.

Если $a \neq 0$, то $x = 1 + \frac{1}{a}$, $x = a + 1$.

Пример 13. Решите уравнение $\frac{(x-a)^2 + x(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x(x-a) + x^2} = \frac{19}{7}$.

Решение. $\frac{(x-a)^2 + x(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x(x-a) + x^2} = \frac{19}{7}$.

Так как $x=0$ не является решением данного уравнения, то знаменатель дроби, стоящей в левой части уравнения, есть

величина положительная. Поэтому, используя однородность этого уравнения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{(x-a)^2 + x(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x(x-a) + x^2} &= \frac{19}{7} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12(x-a)^2 - 26x(x-a) + 12x^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6\left(\frac{x-a}{x}\right)^2 - 13\left(\frac{x-a}{x}\right) + 6 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-a}{x} = \frac{3}{2}, \\ \frac{x-a}{x} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a, \\ x = 3a. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $x=0$ не является решением данного уравнения, то если $a=0$, уравнение решений не имеет.

Если $a \neq 0$, то $\begin{cases} x = -2a, \\ x = 3a. \end{cases}$

Ответ: Если $a=0$, уравнение решений не имеет. Если $a \neq 0$, то $\begin{cases} x = -2a, \\ x = 3a. \end{cases}$

Пример 14. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = a(a-1).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 &= a(a-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} &= a(a-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} &= a(a-1). \end{aligned}$$

Вычислим дискриминант получившегося квадратного уравнения

$$D = 1 + 4a(a-1) = (2a-1)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = a(a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2-1} = a, \\ \frac{2x^2}{x^2-1} = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq 1, \\ (a-2)x^2 = a, \\ (a+1)x^2 = a-1. \end{cases}$$

1. Заметим, что ни при каких значениях параметра $|x| \neq 1$.

2. Первое уравнение совокупности имеет решение, если $\frac{a}{a-2} \geq 0$, т.е. для любого $a \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. При этих значениях параметра решениями первого уравнения будут являться совокупность значений

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = \sqrt{\frac{a}{a-2}}. \end{cases}$$

3. Второе уравнение совокупности имеет решение, если $\frac{a-1}{a+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < -1. \end{cases}$. Решениями второго уравнения являются

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \\ x = -\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}. \end{cases}$$

Ответ: Если $a < -1$,

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = \sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = -\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \\ x = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}. \end{cases}$$

Если $-1 \leq a < 0$, то

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = \sqrt{\frac{a}{a-2}}. \end{cases}$$

Если $a = 0$, $x = 0$.

Если $0 < a < 1$, \emptyset .

Если $a = 1$, $x = 0$.

$$\text{Если } 1 < a \leq 2, \text{ то } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \\ x = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}. \end{cases}$$

$$\text{Если } a > 2, \text{ то } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = \sqrt{\frac{a}{a-2}}, \\ x = -\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \\ x = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}. \end{cases}$$

Пример 15. Найдите все целые значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 2} = a$ — целые числа.

Решение. Заметив, что знаменатель дроби отличен от нуля при любом значении переменной, запишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 2} = a &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = a(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)x^2 - (2a-3)x + 2a-4 = 0. \end{aligned}$$

Если $a = 1$, то уравнение запишется в виде $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Следовательно, $a = 1$ — одно из искоемых значений параметра.

Если $a \neq 1$, то искомыми будут те значения параметра, при которых получившееся квадратное уравнение имеет целочисленные решения.

Но для этого как минимум уравнение должно просто иметь решение. Следовательно, дискриминант уравнения должен быть неотрицательным.

$$D(a) = (2a-3)^2 - 4(a-1)(2a-4) = -4a^2 + 12a + 7.$$

Решим неравенство $D(a) \geq 0$.

$$-4a^2 + 12a + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 12a - 7 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{3 + \sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая, что $a \neq 1$ и a — целое число, получим, что возможно только $a = 2$.

Вычислим корни уравнения при $a = 2$: $x = 0$; $x = 1$. Все решения — целые.

Ответ: 1; 2.

Упражнение 1.

1. Выберите множество, которому принадлежат корни уравнения

$$\frac{x^2 - 8}{2x - 4} = 12x - 18.$$

1) (3; 7); 2) (7; 10); 3) (16; 18); 4) (18; 21).

Верный ответ — 4).

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}.$$

1) 4; 2) 5; 3) 10; 4) 1.

Верный ответ — 1).

3. Найдите сумму кубов корней уравнения

$$\frac{9}{x^2} + \frac{9}{(x+2)^2} = 10.$$

1) -21; 2) -26; 3) 26; 4) 21.

Верный ответ — 2).

4. Модуль разности целых корней уравнения

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$$

равен

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Верный ответ — 4).

5. Произведение действительных корней уравнения

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$$

равно

$$1) \frac{1}{2}; 2) \frac{7}{2}; 3) -\frac{7}{4}; 4) \frac{7}{4}.$$

Верный ответ — 4).

Упражнение 2.

1. Найдите действительные решения уравнения

$$x^4 + (1-x)^4 = 1.$$

Ответ: 1; 0.

2. Найдите действительные решения уравнения

$$x \frac{19-x}{x+1} \left(x + \frac{19-x}{x+1} \right) = 84.$$

Ответ: 3; 4.

3. Решите уравнение $\frac{x^2+1}{3x^2-2} = 2x$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 1.

4. Решите уравнение $\frac{1}{2x-2} + \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2x+2} = 0$.

Ответ: -2; $\frac{1}{2}$.

5. Решите уравнение $\frac{1+x^5}{(1+x)^5} = \frac{11}{125}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$.

Упражнение 3.

1. Найдите действительные решения уравнения

$$\left(\frac{x+a}{2} \right)^6 + \left(\frac{x-a}{2} \right)^6 = a^6.$$

Ответ: a ; $-a$.

2. Найдите действительные корни уравнения

$$(x+a+b)^5 = x^5 + a^5 + b^5.$$

Ответ: $-a$; $-b$.

3. Решите уравнение $\frac{a^2+2x}{x-a} = \frac{x-a}{x+a}$.

Ответ: $-a^2$; $-a$, если $a=0$, $a \neq -2$; \emptyset , если $a=0$ или $a = -2$.

4. Решите уравнение $(1+x+x^2)^2 = \frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4)$.

Ответ: $\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$; $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, если $|a| > 2$.

1, если $a = 2$.

-1, если $a = -2$.

\emptyset , если $|a| < 2$.

5. Решите уравнение $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = 2$.

Ответ: $x \in R \setminus \{a\}$, если $a = b$; \emptyset , если $a \neq b$.

§ 4. Решение уравнений, содержащих несколько переменных

Задачи подобного типа относятся к параметрическим задачам. Действительно, решая одно уравнение, можно найти значения только одной переменной, входящей в него. Все остальные переменные заранее объявляются параметрами. Начнем с парадоксального примера, прекрасно иллюстрирующего решение подобных уравнений. Хотя в этом уравнении присутствует только одна неизвестная, однако решать его приходится несколько экстравагантным способом.

Пример 1. Решите уравнение $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

Решение. Решение уравнения четвертой степени общего вида, да еще и с иррациональными коэффициентами, есть задача сложная.

Представим это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{2}$.

$$(\sqrt{2})^2 - (2x^2 + 1)\sqrt{2} + (x^4 - x) = 0.$$

Вычислим его дискриминант, зависящий от второй (!) переменной x .

$$D(x) = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 + 4x = (2x + 1)^2.$$

Оказывается, что дискриминант этого уравнения — полный квадрат.

Таким образом, уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{2} = x^2 + x + 1, \\ \sqrt{2} = x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - (\sqrt{2} - 1) = 0, \\ x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}, \\ x = \frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}, \\ x = \frac{1 - \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}, \\ x = \frac{1 + \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2};$
 $\frac{1 - \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}.$

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$.

Решение. Иногда к успеху приводит удачная группировка слагаемых, входящих в уравнение.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Сумма квадратов равна нулю только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю.

Получим $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (1; 1).

Пример 3. Решите уравнение

$$5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0.$$

Решение. Запишем это уравнение как квадратное относительно одной переменной, сделав вторую переменную параметром. Подсознательно мы должны понимать, что требование решить уравнение чаще всего уже содержит в себе условие наличия этого решения.

$$\begin{aligned} 5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 2(y+1)x + (2y^2 - 2y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Необходимым условием существования решения квадратного уравнения является неотрицательность его дискриминанта.

$$\frac{D(y)}{4} = (y+1)^2 - 5(2y^2 - 2y + 1) = -9y^2 + 12y - 4 = -(3y-2)^2.$$

Требование существования решения приводит к тому, что это становится возможным лишь при $y = \frac{2}{3}$. При этом значении параметра дискриминант уравнения равен нулю, а при других — отрицателен. Поэтому существует единственное значение переменной x , удовлетворяющее уравнению.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}, \\ x = \frac{-y-1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3} \frac{2}{3} \right)$.

Пример 4. Решите уравнение $x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy + 1 = 0$.

Решение. Аналогично предыдущему, запишем уравнение в виде

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy + 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + 1)x^2 - 4xy + (y^2 + 1) = 0.$$

Вычислим дискриминант уравнения:

$$\frac{1}{4}D(y) = 4y^2 - (y^2 + 1)^2 = 4y^2 - y^4 - 2y^2 - 1 = -(y^2 - 1)^2.$$

Снова получим, что уравнение равносильно совокупности систем:

$$x^2 + y^2 + x^2y^2 - 4xy + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ (x-1)^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 1), (-1; -1)$.

Пример 5. Найдите положительные решения уравнения

$$4x^2 + y^2 = 4 - \frac{1}{xy}.$$

Решение. Уравнение решается нахождением слагаемого, добавление которого к обеим частям уравнения разделяет их области значений.

$$4x^2 + y^2 = 4 - \frac{1}{xy} \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 = 4 - \left(4xy + \frac{1}{xy} \right).$$

Условие положительной определенности решений дает возможность применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел к выражению, стоящему в скобках в правой части уравнения.

$$4xy + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{4xy \cdot \frac{1}{xy}} = 4.$$

Поэтому при искомым значениях переменных правая часть уравнения не больше 0, причем она равна нулю тогда, когда $4xy = \frac{1}{xy} \Leftrightarrow (xy)^2 = \frac{1}{4}$. Так как нас интересуют только положительные решения уравнения, то получим, что $xy = \frac{1}{2}$. С другой стороны, левая часть уравнения $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$ неотрицательна.

Сводя воедино полученные результаты, получим, что уравнение

$$4x^2 + y^2 = 4 - \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 = \frac{1}{4}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Пример 6. Найдите целочисленные решения уравнения

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7.$$

Решение. Условие целочисленности радикально меняет подход к решению уравнений. В данном случае, раскладывая левую часть уравнения на два множителя, получим

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(2x + y) = 7.$$

Так как по условию переменные принимают целые значения, то любая их линейная комбинация тоже. Следовательно, полученный результат можно трактовать следующим образом. Число 7 разложено на два множителя. Но $7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1)(-7) = (-7)(-1)$. В данном случае порядок

множителей также важен, ибо каждый из них может принимать любое из 4 значений.

Получим, что уравнение равносильно совокупности 4 систем.

$$1. \begin{cases} x-2y \\ 2x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x-2y=7, \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=9, \\ 2x+y=1. \end{cases} \quad \text{Данная система не имеет це-}$$

лочисленных решений.

$$3. \begin{cases} x-2y=-1, \\ 2x+y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x-2y=-7, \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-9, \\ 2x+y=-1. \end{cases} \quad \text{Снова получим, что цело-}$$

численных решений система не имеет.

Ответ: (3; 1), (-3; -1).

Замечание. Перебор можно было бы сократить вдвое, заметив, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ — решение системы, то $(-x_0; -y_0)$ — также решение.

Пример 7. Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y и z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Решение. Так как в условии сказано, что при некотором искомом значении существуют решения этого уравнения, то уравнение

$$z^2 - z(x+y) + (x^2 + xy + 2y^2 - 1) = 0$$

имеет решение. Следовательно, существует пара значений переменных x и y , при которых дискриминант уравнения

$$D(y, x) = (x+y)^2 - 4(x^2 + 2y^2 + xy - 1)$$

неотрицателен.

Отсюда следует, что при искомом значении x неравенство

$$-7y^2 - 2xy - 3x^2 + 4 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

А это в свою очередь означает, что дискриминант квадратного трехчлена $D(x) = -80x^2 + 112$ тоже неотрицателен. Наконец, решая неравенство $5x^2 \leq 7$, мы находим все значения переменной x , удовлетворяющие условию задачи. Выбирая из них наименьшее, получим:

$$x = -\sqrt{\frac{7}{5}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{7}{5}}.$

Пример 8. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение

$$x^2 + 3xy + 3ay^2 + \left(\frac{9}{2} - a\right)y + 4x + 5 = 0$$

1) имеет хотя бы одно решение при $y = 2$;

2) имеет хотя бы одно решение (x, y) .

Решение. Ответ на первый вопрос задачи стандартен. Действительно, если пара чисел $(x_0; 2)$ — решение, то получим верное числовое равенство $x_0^2 + 6x_0 + 12a + 9 - 2a + 4x_0 + 5 = 0$. Откуда следует, что $x_0^2 + 10x_0 + 10a + 14 = 0$. Чтобы существовало какое-либо решение этого уравнения, его дискриминант должен быть неотрицателен.

$$D(a) = 44 - 40a \geq 0, \text{ т.е. } a \leq \frac{11}{10}.$$

Решение второй части является развитием решения предыдущей задачи. Действительно, запишем уравнение в виде:

$$x^2 + (3y + 4)x + \left(3ay^2 + \left(\frac{9}{2} - a\right)y + 5\right) = 0.$$

Если уравнение имеет решение, то его дискриминант неотрицателен.

$$D(y, a) = 3(3 - 4a)y^2 + (6 + 4a)y - 4 \geq 0.$$

В отличие от первой задачи, старший коэффициент получившегося многочлена параметрический, поэтому должны быть рассмотрены три случая.

1) $a = \frac{3}{4}$. $D\left(y, \frac{3}{4}\right) = 9y - 4$ и, конечно же, найдется число y_0 такое, что дискриминант будет неотрицателен. Например, $y = 2$.

2) $a < \frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент квадратного трехчлена положителен, а свободный член — отрицателен. Поэтому всегда найдутся числа, являющиеся решением данного неравенства.

3) $a > \frac{3}{4}$. В этом случае первый коэффициент отрицателен. Учитывая, что решение должно существовать, получим, что величина $D(a) = 16a^2 - 144a + 180 \geq 0$. Получим систему:

$$\begin{cases} a > \frac{3}{4}, \\ 4a^2 - 36a + 45 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < a \leq \frac{3}{2}, \\ a \geq \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Объединяя найденные значения параметра, получим:

$$\begin{cases} a \leq \frac{3}{2}, \\ a \geq \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$.

Пример 9. Найдите целочисленные решения уравнения

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

Решение. Разложение уравнения на множители или какой-либо из разобранных выше способов решения подобных уравнений здесь не подходит.

Выразим одну переменную через другую.

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0 \Leftrightarrow x(3y + 10) = 13y + 35$$

$$\Leftrightarrow x(3y + 10) = 13y + 35.$$

Так как x и y — целые, то $3y + 10 \neq 0$.

Тогда $x = \frac{13y + 35}{3y + 10} = 4 + \frac{y - 5}{3y + 10}$. Чтобы переменная была целой, необходимо, чтобы дробь была целым числом.

Это возможно, если $y = 5$, тогда $x = 4$.

Если $y \neq 5$, то

$$\begin{aligned} \left| \frac{y-5}{3y+10} \right| \geq 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-5}{3y+10} \geq 1, \\ \frac{y-5}{3y+10} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2y-15}{3y+10} \geq 0, \\ \frac{4y+5}{3y+10} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{15}{2} \leq y \leq -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, целочисленные решения, возможно, будут получаться только при некоторых из значений

$$y \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2\}.$$

Перебирая все возможности, находим, что

1. Если $y = -5$, то $x = 6$.

2. Если $y = -3$, то $x = -4$.

Ответ: (4; 5); (6; -5); (-4; -3).

Упражнение 1.

1. Решите уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.

Ответ: (2; -1).

2. Решите уравнение $5x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y + 2 = 0$.

Ответ: (0; 1).

3. Решите уравнение $16x^4 + y^4 = 8xy - 2$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

4. Найдите положительные решения уравнения $x^2 + 64y^2 = 8 - \frac{1}{xy}$.

Ответ: $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$.

5. Решите уравнение

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz - 4x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

Ответ: (1; 1; 1).

Упражнение 2.

1. При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0 ?$$

Ответ: (0; 2).

2. Найдите наибольшее значение z , для которого существуют числа x и y , удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

3. Найдите наибольшее значение выражения $(x - y)^2 + (z - u)^2$, если числа x, y, z, u удовлетворяют уравнению

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 + (u - 2)^2 = 1.$$

Ответ: $12 + 4\sqrt{5}$.

4. Найдите целочисленные решения уравнения

$$-3xy + 10x - 16y + 45 = 0.$$

Ответ: (3; 3).

5. Найдите целочисленные решения уравнения

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$

Ответ: (4; 27), (2; -17), (22; 423), (-16; 307).

§ 5. Решение систем линейных уравнений

Пусть $f_1(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots)$, $f_2(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots)$, ... $f_n(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots)$ — функции от переменных $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots$

Определение. Если требуется найти все такие упорядоченные наборы значений переменных $x_0, y_0, z_0, \dots, a_0, b_0, c_0, \dots$, при каждом из которых выполнены равенства $f_k(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то говорят, что задана система уравнений и пишут:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) = 0, \\ f_2(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) = 0, \\ \dots \\ f_n(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) = 0. \end{cases}$$

При этом упорядоченный набор значений переменных $x_0, y_0, z_0, \dots, a_0, b_0, c_0, \dots$ называется решением системы уравнений.

Определение.

Две системы уравнений называются равносильными, если множество всех решений первой является множеством решений второй и все множество решений второй системы является множеством решений первой.

Если обе системы уравнений решений не имеют, то они также равносильны.

Утверждения о равносильности систем уравнений

1. Если в системе переставить местами любые два уравнения, то получится система, равносильная исходной.

2. Если одно из уравнений системы заменить равносильным ему, получится система, равносильная исходной.

3. Если уравнение системы заменить алгебраической суммой других уравнений системы, включая исходное, то получится система, равносильная исходной.

4. Если одну из переменных выразить в каком-либо уравнении через другие и найденное выражение подставить в оставшиеся уравнения (метод подстановки), то получится система, равносильная исходной.

5. Если одно из уравнений системы равносильно совокупности уравнений, то исходная система будет равносильна совокупности систем, каждая из которых содержит одно уравнение совокупности и оставшиеся уравнения исходной системы.

Заметим, что введение новых переменных не является равносильным преобразованием.

При решении систем возможны два пути:

а) совершать равносильные переходы; тогда при каждом из них множество решений сохраняется, и в конечном счете получаются все решения системы;

б) совершать неравносильные переходы; в этом случае множество решений может измениться за счет появления решений, избавиться от которых можно путем проверки.

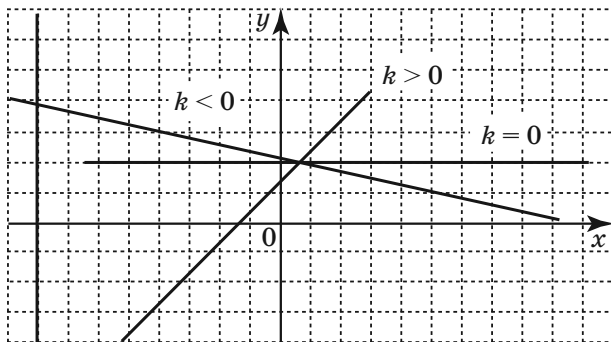
5.1. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая линия.

$$ax = c, \quad a \neq 0$$

$$y = kx + b$$



Следует помнить, что прямая вида $ax = c$, $a \neq 0$ графиком функции не является, а является графиком уравнения.

Определение. Системой двух линейных уравнений с двумя переменными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа, причем $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Традиционным методом решения систем уравнений (не только линейных, но и других) является метод последовательного исключения переменных.

Метод последовательного исключения переменных состоит в следующем.

Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы. Подставляя эти значения в уравнения системы, получим верные числовые равенства, что следует из определения решения:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Числовое равенство не изменится, если обе его части одновременно умножить на любое, отличное от нуля число или к обеим частям прибавить равные числа.

Исключая значение y_0 из первого уравнения, мы приводим систему равенств к виду

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = c_1b_2 - c_2b_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2, \end{cases}$$

из чего следует, что $(x_0; y_0)$ является решением системы

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = c_1b_2 - c_2b_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Исключая x_0 , получим

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)y_0 = a_1c_2 - a_2c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2, \end{cases}$$

откуда следует, что $(x_0; y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = c_1b_2 - c_2b_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Очевидно, что если $(x_0; y_0)$ — решение одной из полученных систем, то эта же пара чисел — решение исходной системы.

Заметим, что коэффициент при остающейся переменной одинаков.

Таким образом, мы приходим к методу Крамера или методу определителей решения систем линейных уравнений.

Определение. Определителем системы линейных уравнений называется число, равное $a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta$ и записываемое в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

При этом правые части уравнений, содержащих одну оставшуюся переменную, также можно записать в виде определителей:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

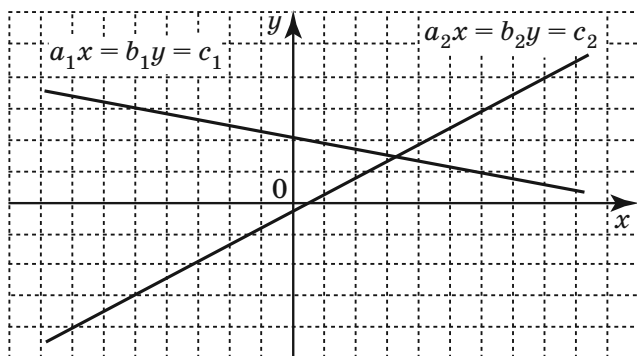
Метод Крамера является наиболее удобным для исследования систем линейных уравнений.

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \end{cases}$$

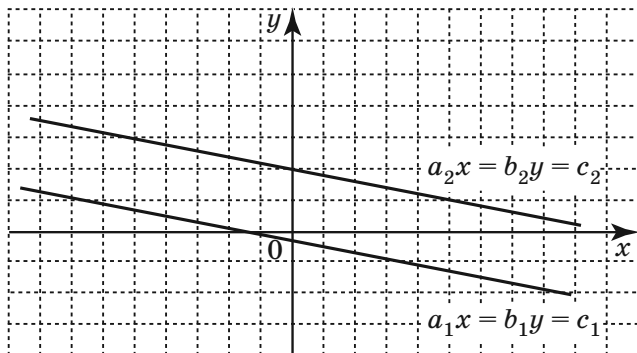
Эти формулы носят название формул Крамера.

Геометрический смысл единственности решения состоит в том, что прямые, задаваемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке.



2. $\Delta = 0$. Если при этом $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0$, то система решений не имеет.

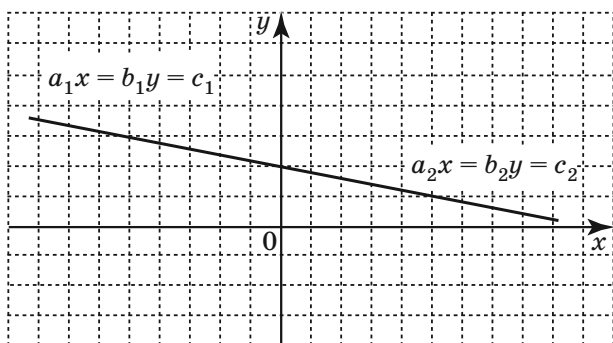
Геометрически это означает, что прямые, задаваемые уравнениями системы, параллельны.



3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений вида

$$\begin{cases} x = x_0, x \in R, \\ y = \frac{c_1 - a_1 x_0}{b_1}. \end{cases}$$

В этом случае оба уравнения системы задают на плоскости одну прямую, координаты точек которой и будут являться решениями данной системы.



Рассмотрим примеры решения систем линейных уравнений.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 7x + 11y = 13. \end{cases}$$

Решение. Найдем определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 21 = 1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 39 = 16,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 35 = -9.$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 7x + 11y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16, \\ y = -9. \end{cases}$$

Ответ: $(16; -9)$.

Пример 2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решения?

Решение. Найдем определители системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -4 \\ 2 & a+6 \end{vmatrix} = a^2 + 6a + 8.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+1 & -4 \\ a+3 & a+6 \end{vmatrix} = a^2 + 7a + 6 - (-4)(a+3) = a^2 + 11a + 18.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} = a(a+3) - 2(a+1) = a^2 + a - 2.$$

Система не имеет решения в том случае, когда определитель системы равен нулю, а хотя бы один из частных определителей системы отличен от нуля.

Искомые значения параметра задаются системой

$$\begin{cases} a^2 + 6a + 8 = 0, \\ (a^2 + 11a + 18)^2 + (a^2 + a - 2)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $a^2 + 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ a = -4. \end{cases}$ Подставим полученные значения в систему.

$$\begin{cases} a = -4, \\ (-10)^2 + (10)^2 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2, \\ (0)^2 + (0)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $a = -4$ система решений не имеет.

Ответ: -4 .

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - a^2 - a = 3a - a^2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a+2 & a \\ 2a+4 & 2a \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a+2 \\ a+1 & 2a+4 \end{vmatrix} = 4a+8-a^2-3a-2 = -a^2+a+6.$$

Так как система должна иметь бесконечное множество решений, то искомые значения параметра задаются системой

$$\begin{cases} 3a-a^2=0, \\ -a^2+a+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=3.$$

Ответ: 3.

Пример 4. Найдите значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases} 2ax+y=a+1, \\ x+3ay=a+4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 3a \end{vmatrix} = 6a^2 - 1.$$

Искомые значения параметра задаются неравенством $6a^2 - 1 \neq 0$.

$$6a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{\sqrt{6}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} < a < \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ a > \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Ответ: при любом $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$ система имеет единственное решение.

Пример 5. Найдите сумму решений системы уравнений

$$\begin{cases} x+3y=9, \\ -x+2y=6. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом исключения переменных. Заменяя второе уравнение суммой уравнений, получим, что

$$\begin{cases} x+3y=9, \\ -x+2y=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=9, \\ 5y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-3y, \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: 3.

Пример 6. Найдите модуль разности $|x-y|$, где x, y — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 3x - 2y = -17. \end{cases}$$

Решение. Найдем определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-15) = 11,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -17 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 85 = -99,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -17 \end{vmatrix} = -55.$$

Найдем решение системы

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-99}{11} = -9, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -5, \quad |x-y| = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 7. Для каждого значения параметра a определите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - ay = -5, \\ -6x + 3y = -15. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6a,$$

а также частные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -a \\ -15 & 3 \end{vmatrix} = -15(1+a), \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = -60.$$

При $a=1$ определитель системы обращается в нуль, в то время как частные определители отличны от нуля. Следовательно, при $a=1$ система решений не имеет.

Если же $a \neq 1$, то система будет иметь единственное решение.

Ответ: 1) при $a=1$ система решений не имеет;

2) при $a \neq 1$ система имеет единственное решение

$$\left(\frac{5(a+1)}{2(a-1)}; \frac{10}{a-1} \right).$$

Пример 8. Числа a и b таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найдите эти числа.

Решение. Используя определение решения системы и условие его единственности, получим, что искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{cases} a^2 - a = 1 - a, \\ b + 3 - 2b = 3 + a, \\ a^2(3 - 2b) + ab \neq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -1, \\ 1 + (-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1)$.

Упражнение 1.

1. Найдите произведение решений системы уравнений

$$\begin{cases} 7x - 5y = -12, \\ -8x - y = 7. \end{cases}$$

1) -1 ; 2) -3 ; 3) 4 ; 4) -5 .

2. Найдите модуль суммы решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = -7, \\ 5x - 2y = -1. \end{cases}$$

1) 2 ; 2) 3 ; 3) 4 ; 4) 5 .

3. Найдите частное $\frac{x}{y}$, где x , y — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y - 5 = 0, \\ -2x + 9y + 1 = 0. \end{cases}$$

1) -2 ; 2) 7 ; 3) 6 ; 4) 5 .

4. Найдите сумму квадратов решений системы уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y - 11 = 0, \\ 3x + 5y - 19 = 0. \end{cases}$$

1) 2; 2) 13; 3) 10; 4) 5.

Верные ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) 2.

Упражнение 2.

1. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} -4x + ay = 1 + a, \\ (a + 6)x + 2y = 3 + a. \end{cases}$$

решений не имеет.

3. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (a - 2)x + 27y = \frac{9}{2}, \\ 2x + (a + 1)y = -1. \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

Ответы: 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) -4 ; 3) -7 ; 4) $a = 3, \left(\frac{11}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

5.2. Задачи на составление систем с двумя неизвестными

Задачи на составление систем уравнений с двумя неизвестными наиболее часто встречаются среди задач, предлагаемых на выпускных и вступительных экзаменах. Это за-

дачи на совместную работу, движение по течению и против течения и т.п.

Пример 9. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Цифра десятков в 12 раз меньше самого числа. Найдите число.

Решение. Пусть x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 12y = 10y + x. \end{cases}$$

Решаем систему методом подстановки.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 12, \\ 12y = 10y + x. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Искомое число — 48.

Ответ: 48.

Пример 10. Натуральное двузначное число в 5 раз больше суммы его цифр. Если к числу прибавить 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Решение. Пусть x — цифра единиц, а y — цифра десятков искомого числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10y + x = 5(x + y), \\ 10y + x + 9 = 10x + y. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Искомое число — 45.

Ответ: 45.

Пример 11. Двое рабочих выполнили некоторую работу за 11 дней, причем последние три дня работал только первый рабочий. Известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% работы. За сколько дней первый рабочий может выполнить всю работу, работая самостоятельно?

Типичная задача на совместную работу, производимую несколькими участниками. Основное понятие, связанное с решением подобного типа задач, — производительность труда каждого из участников, т.е. часть работы, выполняемая каждым участником за единицу времени. Производительность труда, таким образом, есть величина, обратная времени, необходимому участнику для выполнения всей работы. В случае выполнения участниками «однонаправленной» работы совместная производительность равна сумме производительностей каждого из участников. Если же участниками выполняется «разнонаправленная» работа, как, например, в случае, когда бассейн наполняется через несколько кранов, а через другое количество кранов тот же бассейн опорожняется, совместная производительность есть алгебраическая сумма производительностей каждого участника. Подобные задачи будут рассмотрены ниже.

Решение.

Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x дней, а второй — за y дней. Производительность первого, таким образом, будет равна $\frac{1}{x}$ части работы в день, а второго — $\frac{1}{y}$ части работы.

Первое условие задачи говорит о том, что если первый рабочий будет работать 11 дней, а второй — 8 дней, то будет выполнена вся работа, т.е. получим, что $\frac{11}{x} + \frac{8}{y} = 1$. Второе условие задачи говорит о том, что за 7 дней совместной работы они выполнили 80%, или $\frac{4}{5}$ работы, т.е. $7\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{4}{5}$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{11}{x} + \frac{8}{y} = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{35}. \end{cases}$$

Нам не надо находить время работы каждого участника, а только время работы первого. Поэтому, умножая второе уравнение на 8 и вычитая полученное произведение из пер-

вого уравнения системы, получим, что: $\frac{3}{x} = -\frac{32}{35} = \frac{3}{35}$. Следовательно, $\frac{1}{x} = \frac{1}{35} \Leftrightarrow x = 35$.

Ответ: первый рабочий может выполнить всю работу за 35 дней.

Пример 12. Поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, а мимо моста длиной l метров — в течение t_2 секунд. Определите скорость и длину поезда.

Решение.

Время прохождения поезда мимо наблюдателя определяется с момента, когда с ним поравняется голова поезда, и до момента, когда его минует хвост поезда. То есть, если x метров — длина поезда, а V м/с — его скорость, то $t_1 = \frac{x}{V}$.

Время прохождения поезда через мост определяется с момента, когда голова поезда поравняется с началом моста, и до момента, когда хвост поезда поравняется с его концом в направлении движения. Но в этот момент голова поезда кроме длины моста переместится еще и на длину поезда. Поэтому: $t_2 = \frac{l+x}{V} = \frac{l}{V} + \frac{x}{V}$.

Получим простую систему:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x}{V}, \\ t_2 = \frac{l}{V} + \frac{x}{V}. \end{cases}$$

Решая, получим:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x}{V}, \\ t_2 = \frac{l}{V} + \frac{x}{V}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{l}{V} = t_2 - t_1, \\ x = V \cdot t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \frac{l}{t_2 - t_1}, \\ x = \frac{l \cdot t_1}{t_2 - t_1}. \end{cases}$$

Ответ: длина поезда $\frac{l \cdot t_1}{t_2 - t_1}$ метров, скорость $\frac{l}{t_2 - t_1}$ м/с.

Пример 13. Если большее натуральное число разделить на меньшее натуральное число, то в частном получится 1, а в остатке 12. Если же к меньшему числу приписать спра-

ва 0, а затем полученное число разделить на большее, то в частном получится 6, а в остатке 28. Найдите эти числа.

Еще один часто встречающийся тип задач на составление системы уравнений.

Напомним, что разделить натуральное число N на натуральное число m — это значит представить первое число в виде $N = c \cdot m + r$. Число c называется неполным частным, а неотрицательное число r , $0 \leq r < m$ — остатком от деления.

Решение. Обозначив большее натуральное число через x , а меньшее через y , получим, что первое условие задачи запишется в виде:

$$x = y + 12.$$

Приписать к натуральному числу 0 справа означает, что данное число умножено на 10. Поэтому второе условие задачи запишется в виде: $10y = 6x + 28$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y + 12, \\ 10y = 6x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 12, \\ 3x - 5y = -14. \end{cases}$$

Опуская процесс решения системы, получим, что

$$\begin{cases} x = 37, \\ y = 25. \end{cases}$$

Ответ: Искомые числа 37 и 25.

Упражнение 3.

1. Сумма цифр натурального двузначного числа равна 11. Если из числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

2. Сумма цифр двузначного числа в 5 раз меньше самого числа, а цифра десятков на 1 меньше цифры единиц. Найдите число.

3. Если из натурального двузначного числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число, если цифра десятков, уменьшенная на 1, в 4 раза больше цифры единиц числа.

4. Сумма первого, второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 3. Сумма второго, третьего и пято-

го ее членов равна 11. Найдите первый член прогрессии и разность прогрессии.

5. Сумма второго, третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма третьего, четвертого и пятого членов — 21. Найдите десятый член прогрессии.

Ответы: 1) 92; 2) 45; 3) 92; 4) -1; 2; 5) 127.

Упражнение 4.

1. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 12 дней. Однако после 8 дней совместной работы первый рабочий прекратил ее исполнение, так что второму для ее завершения потребовалось еще 5 дней. За какое количество дней каждый рабочий, работая самостоятельно, может выполнить всю работу?

2. Даны два двузначных числа. Сначала к большему двузначному числу приписали справа ноль и за ним меньшее двузначное число, затем к меньшему приписали справа ноль, а затем большее двузначное число. Большее пятизначное число разделили на меньшее пятизначное число. В частном получилось 2, а в остатке 590. Найдите двузначные числа, если сумма удвоенного большего числа и утроенного меньшего числа равна 72.

3. Два бульдозера различной мощности должны были расчистить участок. После того как первый работал в течение $\frac{2}{5}$ того времени, которое нужно было бы второму, чтобы выполнить всю работу, к нему присоединился второй, и через некоторое время они закончили всю работу. Если бы бульдозеры с самого начала работали вместе, то работа была бы выполнена на 2 часа 15 минут быстрее, причем тогда первый бульдозер расчистил бы участок, в 5 раз больший, чем фактически сделал второй бульдозер. За какое время каждый бульдозер, работая отдельно, может расчистить весь участок?

4. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой

бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный раствор, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации получится кислота, если подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый?

5. Из пункта А по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Скорость какого автомобиля, первого или второго, больше и во сколько раз? (Известно, что третий автомобиль не обгонял первых двух.)

Ответы: 1) 60 и 15 дней; 2) 21 и 10; 3) 9 и 15 часов; 4) 50%; 5) скорость первого автомобиля в $9/8$ раза больше, чем второго.

5.3. Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

где $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0$, $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \neq 0$.

Системы трех линейных уравнений описывают взаимное расположение трех плоскостей в пространстве и часто появляются при решении геометрических задач.

Аналогично разобранным выше системам с двумя неизвестными, основным методом решения данных систем остается метод последовательного исключения неизвестных. Нетрудно доказать, что, как и в предыдущем случае, коэффициент при неизвестной в уравнении, полученном после исключения двух других, не зависит от порядка исключения переменных и зависит только от коэффициентов исходной системы. Как и в случае системы с двумя переменными, этот коэффициент называется определителем системы и представляется в виде таблицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Существует несколько способов вычисления определителя третьего порядка и один из них — рекуррентный.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Приведенное правило вычисления также называется правилом Крамера.

Коэффициенты правых частей уравнений, получающиеся после исключения двух неизвестных, называются частными определителями и, подобно определителю системы, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= d_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В общем случае система может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y, \\ \Delta \cdot z = \Delta_z. \end{cases}$$

Если определитель системы отличен от нуля, то система будет иметь единственное решение, определяемое из соотношений:

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \end{cases}$$

Если определитель системы и все частные определители одновременно равны нулю, то система имеет бесконечно много решений, однако их вид определяется конкретным видом системы.

Если определитель системы равен нулю, а хотя бы один из частных определителей отличен от нуля, то система решений иметь не будет.

Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x + 3y + 2z = 8, \\ 2x + y + 3z = 9. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

Так как определитель отличен от нуля, данная система будет иметь единственное решение. Найдем частные определители.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -20.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2.$$

Найдем решения системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{3}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{3}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Надо заметить, что решение систем методом Крамера требует только аккуратности. Однако и метод алгебраического сложения уравнений систем является равноправным методом.

Пример 15. Решите систему

$$\begin{cases} 5732x + 2134y + 2134z = 7866, \\ 2134x + 5732y + 2134z = 670, \\ 2134x + 2134y + 5732z = 11464. \end{cases}$$

Решение. Заменим одно из уравнений системы суммой уравнений. Получим, что $10000(x + y + z) = 20000 \Leftrightarrow x + y + z = 2$.

После этого система запишется так:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2134x + 5732y + 2134z = 670, \\ 2134x + 2134y + 5732z = 11464. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на -2134 и складывая полученное произведение с каждым из двух оставшихся уравнений, получим, что

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2134x + 5732y + 2134z = 670, \\ 2134x + 2134y + 5732z = 11464 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2, \\ y = -1, \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1; 2)$.

Пример 16. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = a^3 - 3a + 2 = \\ &= (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2). \end{aligned}$$

Найдем частные определители:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= a^2 - 1 + a - a^3 = -a^3 + a^2 + a - 1 = -(a - 1)^2(a + 1). \end{aligned}$$

Вычисляя оставшиеся определители, получим:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a - 1)^2, \quad \Delta_z = (a - 1)^2(a + 1)^2.$$

Рассмотрим все возможные случаи и запишем ответ.

Ответ: Если определитель системы отличен от нуля, т.е. $a \neq 1$, $a \neq -2$, то система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = -\frac{a+1}{a+2}, \\ y = \frac{1}{a+2}, \\ z = \frac{(a+1)^2}{a+2}. \end{cases}$$

При $a = 1$ все определители системы равны нулю, поэтому система имеет бесконечное множество решений вида

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z = z_0, \\ x = 1 - y_0 - z_0, \end{cases} \quad y_0 \in R, \quad z_0 \in R.$$

При $a = -2$ система уравнений решения не имеет.

5.4. Решение задач, приводящих к системам трех и более уравнений

Пример 17. На заводе есть три типа станков различной производительности. Три станка первого типа, четыре второго и два третьего типа могут выполнить некоторую работу за два часа. Два станка первого типа, пять второго и четыре третьего — за три часа. Объем работы увеличили в 3,5 раза. За какое время могут выполнить этот объем работы 21 станок первого типа, 42 станка второго и 30 станков третьего типа?

Решение. Воспользуемся методом решения задач на совместную работу. Обозначив через x, y, z соответственно производительности станков первого, второго и третьего типов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = \frac{1}{2}, \\ 2x + 5y + 4z = \frac{1}{3}, \\ 21x + 42y + 30z = \frac{7}{2t}, \end{cases}$$

где t — искомое время работы.

Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 21 & 42 & 30 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как определитель системы равен нулю, а система тем не менее должна иметь решения, то все частные определители тоже должны быть равны нулю.

Найдем первый частный определитель:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 2 \\ \frac{1}{3} & 5 & 4 \\ \frac{7}{2t} & 42 & 30 \end{vmatrix} = \frac{21}{t} - 21.$$

Получим, что первый определитель равен нулю при $t = 1$. Остается убедиться, что и другие тоже.

Ответ: 1 час.

Второе решение.

Иногда задачи подобного типа, т.е. те, в которых, зная значения некоторых линейных комбинаций величин, надо найти значение еще одной их комбинации, решаются следующим методом.

Будем искать такие числа k и m , чтобы

$$k(3x + 4y + 2z) + m(2x + 5y + 4z) = 21x + 42y + 30z$$

при искомым значениях переменных. Придем к тому, что должна иметь решение система

$$\begin{cases} 3k + 2m = 21, \\ 4k + 5m = 42, \\ 2k + 4z = 30. \end{cases}$$

В отличие от первого способа решения, в котором возникла система трех уравнений, содержащая четыре неизвестных, в данном способе решения возникает система опять же трех уравнений, но всего с двумя неизвестными.

Решая первые два уравнения системы, получим, что $k = 3$, $m = 6$. Подстановкой убеждаемся, что найденная пара чисел является решением третьего уравнения.

$$\text{Но тогда } \frac{7}{2t} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{2t} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t = 1.$$

Снова получим, что увеличенный объем работы будет выполнен за 1 час.

Ответ: 1 час.

Пример 18. В бассейн проведены три крана A , B , C . Через первые два крана вода поступает в бассейн, через третий кран отводится из него. Если открыть краны A и C , то бас-

сейн наполнится за 60 часов, если же открыть краны B и C , то за 30 часов. Если же кран A открыть на 2 часа, затем, закрыв его, открыть кран B на 1 час, то будет заполнена та часть бассейна, которую через кран C можно опорожнить за 4 часа. За какое время краны A и B , работая совместно, могут наполнить весь бассейн?

Как было сказано выше, работа, производимая участниками, может быть «разнонаправленной». В этом случае совместная производительность двух участников равна разности соответствующих производительностей каждого из них.

Решение. Пусть x и y — производительности кранов A и B , т.е. те части объема бассейна, которую каждый из них может заполнить за 1 час, а z — производительность крана C , т.е. та часть объема бассейна, которую он опорожняет за один час.

Используя понятие совместной производительности, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - z = \frac{1}{60}, \\ y - z = \frac{1}{30}, \\ 2x + y = 4z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = \frac{1}{60}, \\ y - z = \frac{1}{30}, \\ 2x + y = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = \frac{1}{60}, \\ y - z = \frac{1}{30}, \\ 2x + y - 4z = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на 2, складывая полученное произведение со вторым уравнением и вычитая из суммы третье уравнение, получим $z = \frac{1}{15}$. Далее очень просто находим, что $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{1}{10}$. Складывая, получаем $x + y = \frac{11}{60}$. Таким образом, краны A и B , работая совместно, наполнят бассейн за $5\frac{5}{11}$ часа.

Ответ: $5\frac{5}{11}$ часа.

Пример 19. За сколько дней каждый рабочий сможет выполнить некоторую работу, если первый и второй, работая совместно, выполнят ее за c дней, второй и третий — за a дней, третий и первый — за b дней?

Решение. Используя понятие совместной производительности и обозначая время, требующееся каждому рабочему через x , y , z дней соответственно, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}. \end{cases}$$

Складывая полученные уравнения и деля обе части пополам, получим, что совместная производительность всех трех рабочих

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Вычитая из полученной суммы соответствующие равенства, имеем:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right), \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Следовательно, первому рабочему для выполнения всей работы потребуется $x = \frac{2abc}{ab+ac-bc}$ часов, второму — $y = \frac{2abc}{ab+bc-ac}$ часов, третьему — $z = \frac{2abc}{ab+bc-ab}$ часов.

Ответ: $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ часов, $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$ часов, $\frac{2abc}{ab+bc-ab}$ часов.

Пример 20. За время хранения вклада в банке проценты по нему за каждый период хранения начислялись в размере 5%, $11\frac{1}{9}\%$, $7\frac{1}{7}\%$, 12% за соответствующий период хранения. Каждая ставка действовала целое число периодов хранения. По окончании последнего периода хранения исходная сумма выросла на 180%. Найдите общее количество периодов хранения вклада.

В задачах данного типа основной формулой является формула начисления сложного банковского процента.

Пусть S_0 — первоначальная сумма (цена и т.п.), $p\%$ — процент, начисляемый банком по прошествии некоторого периода времени, называемого сроком хранения. Тогда после первого начисления сумма вклада станет равной сумме $S_1 = S_0 + \frac{p}{100} S_0$, состоящей из первоначального вклада и добавленной банком суммы.

$$\text{Имеем } S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Второе начисление производится уже на конечную сумму, т.е.

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} S_1 = S_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Аналогично получим, что если начисление производилось k раз при неизменной процентной ставке, то конечная сумма

$$S_k = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^k.$$

Если же процентные ставки менялись и были равны $p_1, p_2, \dots, p_l \%$, причем каждая ставка применялась соответственно k_1, k_2, \dots, k_l раз, то конечная сумма будет равна

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{p_1}{100} \right)^{k_1} \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right)^{k_2} \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_l}{100} \right)^{k_l},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n.$$

Данная формула называется формулой сложного банковского процента.

Следует заметить, что в случае уменьшения цены, производительности труда, инфляции соответствующий процент следует считать отрицательным.

Решение. Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 — количество периодов хранения, на протяжении которых действовала каждая ставка. Пусть также S — начальная сумма вклада, S_1 — конечная.

Получим, что

$$S_1 = \left(1 + \frac{180}{100} \right) S = S \left(1 + \frac{5}{100} \right)^{k_1} \left(1 + \frac{100}{900} \right)^{k_2} \left(1 + \frac{50}{700} \right)^{k_3} \left(1 + \frac{12}{100} \right)^{k_4}.$$

Или $\frac{14}{5} = \left(\frac{21}{20}\right)^{k_1} \left(\frac{10}{9}\right)^{k_2} \left(\frac{15}{14}\right)^{k_3} \left(\frac{28}{25}\right)^{k_4}$. Запишем это соотношение в виде равенства

$$14 \cdot 20^{k_1} \cdot 9^{k_2} \cdot 14^{k_3} \cdot 25^{k_4} = 5 \cdot 21^{k_1} \cdot 10^{k_2} \cdot 15^{k_3} \cdot 28^{k_4}.$$

Данное равенство дает два разложения некоторого натурального числа на множители. Таких разложений может быть несколько, но разложение натурального числа на простые делители — единственно. Получим, что

$$2^{1+2k_1+k_3} \cdot 3^{2k_2} \cdot 5^{k_1+2k_4} \cdot 7^{1+k_3} = 2^{k_2+2k_4} \cdot 3^{k_1+k_3} \cdot 5^{1+k_2+k_3} \cdot 7^{k_1+k_4}.$$

Из единственности разложения получим, что данное равенство возможно, если

$$\begin{cases} 1+2k_1+k_3=k_2+2k_4, \\ 2k_2=k_1+k_3, \\ k_1+2k_4=1+k_2+k_3, \\ 1+k_3=k_1+k_4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k_1-k_2+k_3-2k_4=-1, \\ k_1-2k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2-k_3+2k_4=1, \\ k_1-k_3+k_4=1. \end{cases}$$

Последовательно исключая переменные из уравнений, приведем данную систему к следующей:

$$\begin{cases} k_1-k_3+k_4=1, \\ k_2-k_4=0, \\ 2k_3-3k_4=-1, \\ k_4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=2, \\ k_2=3, \\ k_3=4, \\ k_4=3. \end{cases}$$

Следовательно, общее количество периодов хранения — 12. Ответ: Вклад хранился в банке 12 периодов хранения.

Упражнение 1.

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-3z=-8, \\ x-y+2z=18, \\ x-2y-2z=-30. \end{cases}$$

Ответ: (6; 8; 10).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 8, \\ 2x + 5y - 4z = 7, \\ 5x + 4y - 2z = 10. \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 2x + 3y + 4z = 12, \\ 3x + 5y + 7z = 20. \end{cases}$$

Ответ: $(z_0; 4 - 2z_0; z_0)$, $z_0 \in R$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ z + x = b. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{b+c-a}{2}; \frac{c+a-b}{2}; \frac{b+a-c}{2}\right)$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a^3x + a^2y + az + 1 = 0, \\ b^3x + b^2y + bz + 1 = 0, \\ c^3x + c^2y + cz + 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{abc}; \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}; -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right)$.

Упражнение 2.

1. К резервуару проведено три трубы. Через первую и вторую из них вода вливается, а через третью — выливается. Через 0,5 часа после совместной работы первых двух труб начинает работать третья труба, и через 1,5 часа резервуар наполняется. Если при наполненном резервуаре 2 часа работает третья труба, а затем начинает работать вторая, то через 3 часа их совместной работы резервуар опорожнится. При совместной работе первой и третьей труб резервуар наполнится за 3,5 часа. Определите время работы каждой трубы,

необходимое, чтобы через первые две заполнить резервуар, а через третью — опорожнить его.

Ответ: $1\frac{3}{4}$; 7; $3\frac{1}{2}$ часа соответственно.

2. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $14\frac{2}{7}\%$ в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

Ответ: 6 месяцев.

3. Совхоз располагает тракторами четырех марок A , B , B и Γ . Бригада из четырех тракторов (два трактора марки B и по одному трактору марок B и Γ) производит вспашку поля за два дня. Бригада из двух тракторов марки A и одного трактора марки B тратит на эту работу три дня, а три трактора марок A , B и B — четыре дня. За сколько времени выполнит работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

Ответ: $1\frac{5}{7}$ дня.

4. К бассейну объемом в 300 м^3 проведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третья выливается. Если все три трубы включены одновременно, то количество воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м^3 . Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м^3 воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершившую наполнение бассейна. Всего на наполнение бассейна было затрачено 30 мин. Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала и до конца наполняла только вторая труба?

Ответ: 22,5 мин.

5. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе делают за час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более трех часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 часов. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на всю работу, если бы с начала и до конца он делал ее один?

Ответ: 16 часов.

§ 6. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений

6.1. Решение систем методом подстановки

Методы решения систем нелинейных уравнений так же разнообразны, как и сами системы. И все-таки основным методом в этом случае является метод подстановки. Суть метода проста: выразить одну переменную из одного уравнения через другую или другие переменные и заменить найденным выражением эту переменную во всех оставшихся уравнениях.

Следует помнить, что при решении системы уравнений нельзя изменять количество входящих в нее уравнений, за исключением случая, когда одно или несколько уравнений обращаются в верные числовые равенства.

Пример 1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Выражая из второго уравнения значение переменной и подставляя найденное выражение в первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6, \\ x = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(5 - y) = 6, \\ x = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0, \\ x = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = 3, \\ x = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ x = 2, \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (2;3); (3; 2).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

Решение. Выразим переменную x из второго уравнения и подставим найденное выражение в первое уравнение системы.

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2, \\ (2y + 2)y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2, \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2, \\ y = 2, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 6, \\ y = -3, \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (6; 2); (-4; -3).

6.2. Применение теоремы Виета

Иногда уравнения системы связывают между собой сумму и произведение искомых переменных или некоторых выражений, зависящих от них. В этих случаях для сокращения времени решения можно воспользоваться теоремой Виета для квадратного уравнения.

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6. \end{cases}$

Решение. Немного изменим запись данной системы:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 1, \\ x(-y) = -6. \end{cases}$$

Если пара чисел $(x_0; y_0)$ — решения данной системы, то они же являются решениями квадратного уравнения вида $z^2 + z - 6 = 0$.

Решая его, получим: $z^2 + z - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2, \\ z = -3. \end{cases}$

Таким образом, исходная система имеет следующий набор решений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3, \\ -y = -2, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ -y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (3; 2); (-2; -3).

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-5)^2 + (3y-2)^2 = 17, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases}$$

Решение. Левая часть первого уравнения системы есть сумма квадратов двух величин, а левая часть второго — их произведение. Используем формулу $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (2x-5)^2 + (3y-2)^2 = 17, \\ (2x-5)(3y-2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)^2 + 2(2x-5)(3y-2) + (3y-2)^2 = 25, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставив значение произведения в первое уравнение, получим систему, равносильную исходной.

$$\begin{cases} ((2x-5) + (3y-2))^2 = 25, \\ (2x-5)(3y-2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = 5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = -5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases} \end{cases}$$

Каждая система полученной совокупности может быть решена с использованием теоремы Виета.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = 5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=1, \\ 3y-2=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \\ & \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = -5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=4, \\ 3y-2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases} \\ & \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = -5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=-1, \\ 3y-2=-4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-\frac{2}{3}, \end{cases} \\ & \begin{cases} (2x-5) + (3y-2) = -5, \\ (2x-5)(3y-2) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=-4, \\ 3y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(3; 2); (2; 1); \left(2; -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

При решении системы мы воспользовались теоремой Виета для корней квадратного уравнения, что дало возможность найти значения выражений, не составляя, по сути, сами квадратные уравнения.

Рассмотрим еще один подобный пример.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Проведя группировку в первом уравнении, получим возможность применить теорему Виета.

Далее решаем методом подстановки.

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x - y) = 3, \\ xy(x - y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2, \\ x - y = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Далее решаем методом подстановки.

$$\begin{cases} x = y + 1, \\ y^2 + y - 2 = 0, \\ x = y + 2, \\ y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ y = -2, \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ x = -1, \\ y = -2, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ y = -1 - \sqrt{2}, \\ x = 1 + \sqrt{2}, \\ y = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1); (-1; -2); (1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}); (1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$.

6.3. Использование методов решения линейных систем

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{11}{3}, \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{29}{6}. \end{cases}$$

Решение. Данная система, являясь нелинейной, тем не менее очень просто сводится к линейной системе относительно двух новых переменных $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{11}{3}, \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{29}{6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\frac{1}{x} + 8\frac{1}{y} = \frac{11}{3}, \\ 5\frac{1}{x} + 4\frac{1}{y} = \frac{29}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\frac{1}{x} = 6, \\ 5\frac{1}{x} + 4\frac{1}{y} = \frac{29}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2}, \\ 4\frac{1}{y} = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

6.4. Симметрические системы уравнений

Определение. Если система уравнений такова, что если $(x_0; y_0)$ — решение, и $(y_0; x_0)$ — тоже решение, то такая система уравнений называется симметрической системой уравнений.

Решение подобных систем сводится к нахождению суммы и произведения переменных. Введем обозначения: $x + y = \sigma_1$, $xy = \sigma_2$. Тогда, например, $x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$ и т.д.

Числа x и y в этом случае являются корнями уравнения $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $x + y = \sigma_1$, $xy = \sigma_2$.

Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2 = 61, \\ \sigma_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 12, \\ \sigma_1 = 7, \\ \sigma_2 = 12, \\ \sigma_1 = -7. \end{cases}$$

Следовательно, система

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61, \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \\ x + y = -7, \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \\ x = 4, \\ y = 3, \\ x = -3, \\ y = -4, \\ x = -4, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 4); (4; 3); (-3; -4); (-4; -3).

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Используя введенные выше обозначения, имеем:

$$x^4 + y^4 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_2^2, \\ \sigma_1 = 1.$$

Относительно новых переменных система примет вид

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1 - 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0, \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0, \\ x + y = 1, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1); (1; 0).

6.5. Решение систем, содержащих однородное или однородные уравнения

Определение. Однородным многочленом n степени относительно двух переменных x и y называется многочлен вида

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^m a_k x^l y^{n-1}, \quad 0 \leq l \leq n, \quad a_k \in R,$$

т.е. многочлен, все одночлены которого имеют степень, равную n , где $n \in N$.

Можно дать и другое определение однородного многочлена.

Определение. Многочлен $P(x, y)$ называется однородным многочленом степени n , если выполнено условие:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases}$$

Решение. Данная система является однородной системой, так как левые части уравнений есть однородные многочлены второй степени. Очевидно, что $x=0$ или $y=0$ решением не являются. Поэтому приведем одно из уравнений к виду, когда правая часть уравнения будет равна нулю.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 12y^2 - 19xy = 0, \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 12 - 19\frac{x}{y} = 0, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая первое уравнение получившейся системы относительно новой переменной, получим:

$$\begin{cases} 5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 12 - 19\frac{x}{y} = 0, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = -15, \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{5}, \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = -15, \\ x = \frac{4}{5}y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3\sqrt{3}, \\ y = \sqrt{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3\sqrt{3}, \\ y = -\sqrt{3}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(4; 5); (-4; -5); (3\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Пример 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1. \end{cases}$$

Решение. В отличие от предыдущего примера $x=0$ или $y=0$ являются решением первого уравнения системы. Однако эти значения переменных не являются решением второго уравнения и поэтому не являются решением всей системы.

Деля первое уравнение на y^2 , получим систему, равносильную исходной системе.

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -1, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1. \end{cases}$$

Выражая из полученной совокупности значение одной переменной через другую, получим:

$$\begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 3y^2 + 2y^2 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ -\frac{1}{4}y^2 = -1. \end{cases}$$

Первая система совокупности, очевидно, решений не имеет.

Решим вторую систему.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ -\frac{1}{4}y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 2); (-3; -2)$.

6.6. Метод разложения системы в совокупность

Часто встречающимся приемом решения, или, точнее, упрощения решения систем уравнений, является метод разложения системы в совокупность систем. Это становится возможным при условии, если одно из уравнений каким-либо образом разложено в равносильную ему совокупность уравнений.

Пример 11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - 2x + 11y - xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение. В этом случае первое уравнение есть квадратный трехчлен относительно x . Получим:

$$x^2 - (y + 2)x - (6y^2 - 11y + 3) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D(y) = (5y - 4)^2$, поэтому

$$x^2 - (y + 2)x - (6y^2 - 11y + 3) = (x - 3y + 1)(x + 2y - 3).$$

Следовательно, исходная система

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - 2x + 11y - xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x = 3y - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x = 3 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5}, \\ y = \frac{2}{5}, \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{11}{5}, \\ y = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 2); (2; 1); \left(\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right); \left(-\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

6.7. Различные методы решения систем

Пример 12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0, \\ 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0. \end{cases}$$

Решение. Одним из способов решения подобных систем, как ни странно, является **метод подстановки**. Для этого попробуем выразить одну переменную через другую, рассматривая второе уравнение системы как квадратное относительно переменной x .

$$\begin{aligned} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 2x(y + 19) + (5y^2 - 6y + 41) &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим дискриминант уравнения.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}D(y) &= (y+19)^2 - 10(5y^2 - 6y + 41) = \\ &= -49y^2 + 98y - 49 = -49(y-1)^2.\end{aligned}$$

Если система уравнений имеет решение, то должны существовать значения переменных, удовлетворяющих ее уравнениям. Но это возможно лишь, если $y=1$. Тогда единственная пара чисел, удовлетворяющих второму уравнению, — $(2;1)$. Осталось убедиться, что эта пара чисел является решением первого уравнения, что делается без труда.

Ответ: $(2;1)$.

Пример 13. Найдите все целые значения n , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

имеет решение. При найденных значениях n решите систему.

Решение.

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Попробуем воспользоваться **методом обратного хода**. Пусть n_0 — одно из значений, при которых данная система имеет решение. Пусть y_0 — значение второй переменной, удовлетворяющее системе при данном значении n_0 . Тогда оба уравнения системы должны иметь как минимум одно общее решение x_0 , а для этого оба дискриминанта должны быть неотрицательными.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 6x^2 + 2x(12y + (3n-2)) + 24y^2 + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4x^2 - 2x(4y + (2n+1)) + 4y^2 + 2(2n+1)y + 2n^2 - \frac{5}{2} = 0. \end{cases}$$

Вычислим дискриминанты уравнений и, учитывая, что они должны быть неотрицательными, получим систему:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} (12y + (3n - 2))^2 - 6(24y^2 + 4(3n - 2)y + 3) \geq 0, \\ (4y + (2n + 1))^2 - 4\left(4y^2 + 2(2n + 1)y + 2n^2 - \frac{5}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (3n - 2)^2 - 18 \geq 0, \\ (2n + 1)^2 - 8n^2 + 10 \geq 0. \end{cases} \\
& \begin{cases} 9n^2 - 12n - 14 \geq 0, \\ -4n^2 + 4n + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n(3n - 4) \geq 14, \\ 4n(n - 1) \leq 11. \end{cases}
\end{aligned}$$

Учитывая, что n_0 — целое, получим, что данной системе удовлетворяет $n_0 = -1$.

При найденном значении n_0 приведенный дискриминант первого уравнения равен 7, а второго — 3.

Поэтому система уравнений сведется к системе уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{-(12y - 5) + \sqrt{7}}{6}, \\ y = \frac{-(12y - 5) - \sqrt{7}}{6}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4y - 1 + \sqrt{3}}{4}, \\ y = \frac{4y - 1 - \sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Из системы уравнений получим четыре системы линейных уравнений. Решая их, получим

$$\begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{18}, \\ y = \frac{13 + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{36}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{18}, \\ y = \frac{13 + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{36}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{18}, \\ y = \frac{13 - 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{36}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{18}, \\ y = \frac{13 - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{36}. \end{cases}$$

Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3y + 2 = 0, \\ x^3 - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, то уравнение $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x$.

Решение.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{3x-2}$. Функция $f(x) = \sqrt[3]{3x-2}$ непрерывна и монотонно возрастает.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y) = f(f(x)), \\ x = f(z) = f(f(f(x))). \end{cases}$$

В силу монотонности функции последнее уравнение равносильно уравнению $x = f(x)$. Но подобным образом можно представить выражение и других переменных. Поэтому исходная система сводится к виду

$$\begin{cases} y^3 - 3x + 2 = 0, \\ z^3 - 3y + 2 = 0, \\ x^3 - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 1, \\ x = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 3x - 2, \\ z^3 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1, \\ x = -2, \\ y = -2, \\ z = -2. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1); (-2; -2; -2).

Пример 15. Найдите значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решение и каждое ее решение удовлетворяет условию $x + y = 0$.

Решение. Пусть a — искомое значение параметра, а пара чисел $(x_0; y_0)$ — решение системы.

Тогда

$$\begin{cases} x_0^3(1+a) = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ -ax_0^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ x_0^3 = 1, \\ x_0^3 = \frac{1}{2}(a+1), \\ -ax_0^3 = 1, \\ a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ x_0 = 1, \\ a = 0, \\ \emptyset, \\ a(a+1) \neq 0, \\ x_0^3 = -\frac{1}{a}, \\ a(a+1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы система могла иметь решения, удовлетворяющие условию, необходимо, чтобы $a = -1$.

Убедимся, что это же условие является достаточным. Пусть $a = -1$. Тогда система приобретет вид:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0, \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x^3 = 1, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Таким образом, $a = -1$ — искомое значение.

Ответ: -1 .

Упражнение 1.

1. Сумма координат всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

равна

1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 6.

2. Сумма координат всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5 \end{cases}$$

равна

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

3. Сумма координат всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 4 \end{cases}$$

равна

1) 0; 2) 3,4; 3) 4,3; 4) 2,1.

4. Сумма координат всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2 \end{cases}$$

равна

1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) -2.

5. Сумма координат всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2 \end{cases}$$

равна

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

Упражнение 2.

1. Найдите произведение значений переменных, являющихся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Ответы: 1) 10; 2) 12; 3) 15; 4) 20; 5) 16.

Верный ответ — 2).

2. Найдите сумму значений переменной x , являющихся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ 12(x + y) = 7xy. \end{cases}$$

Ответы: 1) $\frac{4}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$; 5) $\frac{8}{3}$.

Верный ответ — 3).

3. Найдите произведение значений переменных, являющихся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Ответы: 1) 12; 2) 18; 3) 15; 4) 27; 5) 36.

Верный ответ — 4).

4. Найдите сумму значений переменных, являющихся решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Ответы: 1) 10; 2) 5; 3) 15; 4) 7; 5) 9.

Верный ответ — 2).

5. Найдите наибольшее из значений переменной y , являющееся решением системы уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^2 - z^2 = 4, \\ (y+z)^2 - x^2 = 2, \\ (z+x)^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3; 5) 6.

Верный ответ — 1).

§ 7. Решение неравенств

7.1. Решение рациональных неравенств

В содержании ЕГЭ рациональным неравенствам отводится значительное место.

Методы решения рациональных неравенств являются основой, на которой строится решение других видов неравенств — иррациональных, показательных, логарифмических, и в меньшей мере тригонометрических.

Каноническим видом рационального неравенства считается его представление в виде сравнения $F(x) \vee 0$, в котором правая часть равна нулю, а левая представляется в виде про-

изведения или частного целых алгебраических функций с известными интервалами знакопостоянства.

Решением неравенства являются значения переменной, обращающие данное неравенство в верное числовое неравенство.

Решением системы неравенств являются значения переменной, обращающие в верные числовые все неравенства системы.

Решением совокупности неравенств являются значения переменной, удовлетворяющие хотя бы одному неравенству совокупности.

Решения неравенства представляют подмножества числовой оси, являющиеся объединением (совокупностью) следующих основных подмножеств, представленных в таблице.

Графическое изображение	Аналитическая запись	Множественная запись
	\emptyset	\emptyset
	$x < a$	$(-\infty; a)$
	$x \leq a$	$(-\infty; a]$
	$x > a$	$(a; +\infty)$
	$x \geq a$	$[a; +\infty)$
	$a < x < b$	$(a; b)$
	$a \leq x < b$	$[a; b)$
	$a < x \leq b$	$(a; b]$
	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
	$x = a$	$\{a\}$
	$-\infty < x < +\infty$	R

При решении неравенств обычно используют два стандартных подхода. Рассмотрим их на примере решения простого неравенства.

Пример 1. Решите неравенство $\frac{x-2}{x-4} > 0$.

1-й способ.

Решение. Неравенство сводится к рассмотрению совокупности двух систем

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-4 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 < 0, \\ x-4 < 0, \end{cases}$$

каждая из которых представляет один из двух возможных случаев, когда выражение положительно. Из первой системы получаем $x > 4$, а из второй $x < 2$. Таким образом, решение

этого неравенства задается совокупностью $\begin{cases} x < 2, \\ x > 4. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

2-й способ.

Другой метод — это известный метод интервалов. Идея метода проста и может быть сформулирована следующим образом.

7.2. Метод интервалов решения неравенств

Всякое аналитическое выражение, зависящее от переменной, может менять знак в точках, в которых оно обращается в ноль или в которых график этого выражения терпит разрыв.

Указанные точки разбивают область определения выражения на интервалы, во всех точках каждого из которых значения выражения сохраняют свой знак.

Пример 1. *2-й способ.*

Решите неравенство $\frac{x-2}{x-4} > 0$.

Решение. В данном случае числитель обращается в ноль при $x=2$, а знаменатель дроби — при $x=4$. Следовательно, выражение, стоящее в левой части неравенства, может менять свой знак только в двух точках и сохраняет свой знак на каждом из трех интервалов $(-\infty; 2)$, $(2; 4)$, $(4; +\infty)$.

Выберем на каждом из интервалов «удобную» точку и вычислим знак выражения.

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{x-2}{x-4}$. Вычислим ее значения в «удобной» точке каждого из трех получившихся интервалов.

Имеем: $F(0) > 0$, $F(3) < 0$, $F(5) > 0$.

Функция непрерывна на каждом из этих интервалов и поэтому принимает значения одного знака в каждой точке соответствующего интервала.



Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Пример 2. Укажите множество решений неравенства

$$\frac{2-x}{x+3} \geq 0.$$

1) $(-\infty; -3)$; 2) $(-\infty; -3]$; 3) $(-3; 2)$; 4) $(-3; 2]$.

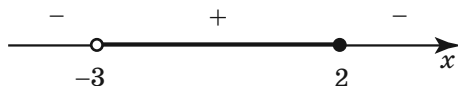
Решение. Достаточно, если будет выполнена следующая последовательность действий.

$$F(x) = \frac{2-x}{x+3}.$$

1. $\frac{2-x}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

2. $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Получим: $\frac{2-x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow -3 < x \leq 2.$



Верный ответ — 4).

Ответ: 4.

Пример 3. Найдите сумму целых положительных чисел, удовлетворяющих неравенству $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$.

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 3.

Решение.

$$3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6} \Leftrightarrow 72 - 36x > 15 - 4(4x-3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20x < 45 \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}.$$

Данному неравенству удовлетворяют целые положительные числа 1 и 2, сумма которых равна 3.

Верный ответ — 4).

Ответ: 4.

Пример 4. Найти наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2x+10 < 1,5x+20, \\ 3x+4 < 2x+16. \end{cases}$

Решение. Решить систему неравенств — это значит найти значения переменной, удовлетворяющие всем неравенствам системы.

$$\begin{cases} 2x+10 < 1,5x+20, \\ 3x+4 < 2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x < 10, \\ x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 20, \\ x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow x < 12.$$

Наибольшее целое число, меньшее 12, — это 11.

Ответ: 11.

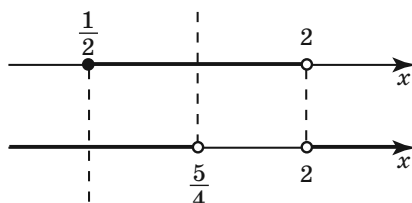
Пример 5. Найдите наименьшее целое решение неравенства $1 \leq \frac{x+1}{2-x} < 3$.

Решение. Представим данное двойное неравенство в виде системы неравенств.

$$1 \leq \frac{x+1}{2-x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2-x} \geq 1, \\ \frac{x+1}{2-x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{2-x} \geq 0, \\ \frac{4x-5}{2-x} < 0 \end{cases}, \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4}.$$

Единственное целое решение, а значит, и наименьшее — 1.

Ответ: 1.



Приведем пример решения более сложного неравенства методом интервалов.

Пример 6. Решите неравенство $\frac{(x-3)^3(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \leq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \frac{(x-3)^3(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}.$$

1. $F(x) = 0$ при $x = -1$, $x = 3$, $x = 7$.

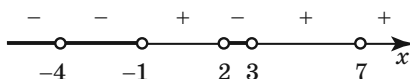
2. Точки разрыва $x = -4$, $x = 2$.

3. Найденные точки отметим на числовой прямой, разбивая прямую на шесть интервалов. На каждом из полученных интервалов выберем «удобную» точку и вычислим знак значения функции в этой точке.

В силу непрерывности дробно-рациональной функции на каждом из получившихся интервалов тот же знак будут иметь значения функции во всех точках рассматриваемого интервала.

$$F(-5) < 0, \quad F(-3) < 0, \quad F(0) > 0,$$

$$F(2,5) < 0, \quad F(5) > 0, \quad F(8) > 0$$



$$\frac{(x-3)^3(x-7)^2(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4, \\ -4 < x \leq -1, \\ 2 < x \leq 3, \\ x = 7. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (2; 3] \cup \{7\}$.

Приведенный пример показывает, что выражение может менять свой знак, но не обязательно это делать в точках, в которых оно обращается в ноль или терпит разрыв.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 7. Решите неравенство $x^3 + x^2 + 2x - 4 \leq 0$.

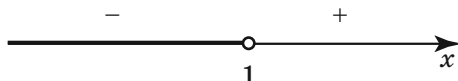
Решение. Так как сумма коэффициентов многочлена, стоящего в левой части неравенства, равна нулю, то $x = 1$ — корень многочлена. Получим

$$P(1) = 0, \quad P(x) = P(x) - P(1) = (x^3 - 1) + (x^2 - 1) + 2(x - 1) = \\ = (x - 1)(x^2 + 2x + 4).$$

Перейдем к решению неравенства.

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 4).$$

1. $P(x) = 0$ при $x = 1$.



$$P(0) < 0, \quad P(2) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; 1]$.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий ситуацию, в которой часто допускаются ошибки.

Пример 8. Решите неравенство $\frac{6(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$.

Решение. Выражение, стоящее в левой части неравенства, в числителе и знаменателе содержит одинаковый множитель, при сокращении на который и появляется «запланированная» ошибка. Ошибка состоит в том, что при сокращении меняется область определения выражения, и дальнейшие преобразования не являются равносильными.

Имеем

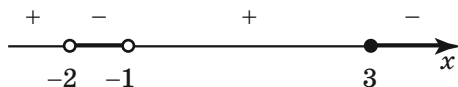
$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} - x = \frac{(x+2)(6-x^2+x)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+2)^2(3-x)}{(x-1)(x+2)}.$$

$$\text{Рассмотрим функцию } F(x) = \frac{(x+2)^2(3-x)}{(x-1)(x+2)}.$$

Область определения функции — вся числовая прямая, кроме точек $x = -2$, $x = 1$.

Поэтому исходное неравенство будет равносильно системе.

$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1, \\ \frac{(3-x)(x+2)}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$



$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1, \\ \frac{(3-x)(x+2)}{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(3-x)}{(x-1)} \geq 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 1) \cup [3; +\infty)$.

Рассмотрим еще один пример, в котором автоматическое выполнение «привычных» преобразований приводит к неверному решению.

Пример 9. Решите неравенство $\frac{1}{x^2-x} + 1 > \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$.

Решение. Приводя к общему знаменателю правую часть неравенства, получим $\frac{1}{x^2-x} + 1 > \frac{1}{x^2-x}$. Обе части неравенства содержат одинаковое слагаемое, при сокращении на которое возникает «верное» неравенство $1 > 0$. Это неравенство, несомненно, верно, но только при значениях переменных, входящих в область определения неравенства.

$$\frac{1}{x^2-x} + 1 > \frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство $x^2 + 1 > \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2}$.

Решение. $x^2 + 1 > \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2} \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 2) > x^2 - 5$.

Умножение на выражение, зависящее от переменной, в данном случае является равносильным преобразованием, так

как при всех значениях переменной оно принимает только положительные значения. Получим

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2) > x^2 - 5 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty.$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим еще одно неравенство.

Пример 11. Решите неравенство $x + \frac{1}{x} \leq 1$.

Решение. Будет считаться хорошим тоном, если мы заметим, что $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$. Следовательно, искомое неравенство будет верно при всех отрицательных значениях переменной x .

$$x + \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

Пример 12. (ЕГЭ С-5) Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых во множестве решений неравенства

$$x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$

нельзя расположить два отрезка длин 1,5 каждый, которые не имеют общих точек.

Решение. Решение задач С-5 ЕГЭ дается с полным развернутым ответом.

Запишем неравенство в каноническом виде.

$$\begin{aligned} x(x - 2a - 4) &< \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax - 4x + a^2 + 8a - \frac{4a^2}{x} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 - \frac{4x^2 - 8ax + 4a^2}{x} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 - \frac{4(x - a)^2}{x} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right) &< 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a, \\ 0 < x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $a \leq 0$ или $a \geq 4$, то решением неравенства является интервал $(0;4)$, в котором можно расположить два отрезка длины 1,5 таким образом, чтобы они не имели общих точек.

Рассмотрим теперь все значения параметра $0 < a < 4$.

Решением неравенства в этом случае будет объединение двух интервалов $(0;a)$ и $(a;4)$. Расположить два непересекающихся отрезка длины 1,5 можно будет в том случае, если хотя бы один из интервалов будет иметь длину больше 3, либо когда оба они одновременно будут иметь длину больше 1,5.

Первый случай задается системой

$$\begin{cases} 0 < a < 4, \\ a > 3, \\ 4 - a > 3, \end{cases}$$

а второй — системой

$$\begin{cases} 0 < a < 4, \\ a > 1,5, \\ 4 - a > 1,5. \end{cases}$$

Решаем первую систему:

$$\begin{cases} 0 < a < 4, \\ a > 3, \\ 4 - a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 3 < a < 4. \end{cases}$$

Решаем вторую:

$$\begin{cases} 0 < a < 4, \\ a > 1,5, \\ 4 - a > 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow 1,5 < a < 2,5.$$

Таким образом, если $a \in (-\infty; 1) \cup (1,5; 2,5) \cup (3; +\infty)$, то в решении исходного неравенства можно будет расположить два непересекающихся отрезка длины 1,5.

Следовательно, если $a \in [1; 1,5] \cup [2,5; 3]$, то расположить отрезки будет нельзя.

Ответ: $a \in [1; 1,5] \cup [2,5; 3]$.

Приведем еще пример рационального неравенства, в котором существенно используется определение решения неравенства.

Пример 13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{16 - (a + 8)x}{x} < \frac{8a \left(\frac{2}{x} - 1 \right) - 1}{x^2}$$

содержит число 5, а также содержит два непересекающихся отрезка, каждый из которых длиной 5.

Решение. Запишем неравенство в каноническом виде и постараемся упростить полученное выражение.

$$\begin{aligned} \frac{16 - (a + 8)x}{x} &< \frac{8a \left(\frac{2}{x} - 1 \right) - 1}{x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{16 - ax - 8x + x^2}{x^2} &< \frac{16a - 8ax}{x^3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^3 - 8x^2 + 16x - ax^2 + 8ax - 16a}{x^3} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-4)^2 - a(x-4)^2}{x^2} &< 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)(x-4)^2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4, \\ \frac{x-a}{x} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Самым трудным было правильно провести группировку слагаемых в числителе дроби.

Найдем сначала значения параметра, при каждом из которых число 5 является решением данного неравенства, используя определение решения неравенства.

Имеем:

$$\frac{5-a}{5} < 0 \Leftrightarrow a > 5.$$

При полученных значениях параметра решением системы будет являться объединение двух интервалов $(0; 4) \cup (4; a)$.

На первом нельзя расположить ни одного отрезка длиной 5. Следовательно, оба этих отрезка должны принадлежать интервалу $(4; a)$. Это возможно, если $a - 4 > 10 \Leftrightarrow a > 14$.

Ответ: $(14; +\infty)$.

Пример 14. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в левой части первого неравенства.

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 = \\ & = 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 + 10y + 25) - 3. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)^2 + 2(y+5)^2 < 3, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$$

Пусть $(x; y)$ — целочисленное решение системы. Тогда $(x-3)$ и $(y+5)$ — также целые числа. В этом случае множество целых чисел, удовлетворяющих первому неравенству системы, задается совокупностью уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0, \\ (y+5)^5 = 1, \\ (x-3)^2 = 1, \\ (y+5)^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -4, \\ y = -6, \\ y = -5, \\ x = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

Второму неравенству системы удовлетворяют $(3; -4)$ и $(4; -5)$.

Ответ: $(3; -4); (4; -5)$.

Пример 15. Найдите множество пар целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 9y + 24x - 47 > 0, \\ y^3 + x^2 - 9y - 10x + 23 < 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x; y)$ — пара целых чисел, удовлетворяющих системе. Тогда число, стоящее в левой части первого неравенства, положительно, а стоящее в левой части второго — отрицательно.

Получим

$$y^3 - 3x^2 - 9y + 24x - 47 > y^3 + x^2 - 9y - 10x + 23 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 17x + 35 < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} < x < 5.$$

Так как x — целое число, то $x = 4$.

Подставим найденное значение в систему. Получим

$$\begin{cases} y^3 - 9y + 1 > 0, \\ y^3 - 9y + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < y^3 - 9y < 1.$$

Так как y — целое число, то и $y^3 - 9y$ — тоже целое. Следовательно:

$$y^3 - 9y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y = -3, \\ y = 3. \end{cases}$$

Следовательно, пары целых чисел, удовлетворяющих данной системе, $(4; 0)$; $(4; -3)$; $(4; 3)$.

Ответ: $(4; 0)$; $(4; -3)$; $(4; 3)$.

Упражнение 1.

1. Укажите множество решений неравенства

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} \leq 0.$$

1) $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$.

2. Укажите произведение всех целых чисел, являющихся решением неравенства

$$(x^2 - 2x - 7) \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1} \right) \leq 3.$$

1) -360 ; 2) -72 ; 3) 0 ; 4) 360 .

3. Разность между наибольшим и наименьшим решениями системы неравенств

$$\begin{cases} (x-2)(x-3) \leq 2, \\ 2x-1 \leq 5 \end{cases}$$

равна

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 1,5.

4. Сумма квадратов всех целых чисел, являющихся решением неравенства

$$\frac{2x^2 - x - 23}{x - 4} \leq 9 + \frac{2x^2 - x - 23}{x + 5}$$

равна

1) 15; 2) 39; 3) 55; 4) 64.

5. Произведение всех целых решений неравенства

$$(x^2 - 1)^2 - 7x^2 + 13 < 0$$

равно

1) -12; 2) -4; 3) -1; 4) 4.

Упражнение 2.

1. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 < 0, \\ x^2 + 4x + 3 > 0. \end{cases}$$

3. Найдите сумму наибольшего и наименьшего решений системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{2x - 14}{x^2 - x - 12} \leq 1, \\ 1,5 < x < 2,5. \end{cases}$$

4. Найдите сумму целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{3x - 3}{x - 2} > 2, \\ \frac{8}{x + 3} \geq 1. \end{cases}$$

5. Найдите сумму всех целых положительных решений системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x + 5)(x - 3)} \geq 0, \\ \frac{9 - x}{7 - x} \geq 1. \end{cases}$$

Ответы: 1) 3; 2) -4; 3) 3,5; 4) 10; 5) 4.

Упражнение 3.

1. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ 2x + 4y < 15. \end{cases}$$

2. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + 14y + x^2. \end{cases}$$

3. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > 271 + 12y + x^2. \end{cases}$$

4. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

Ответы: 1) $(-7; 7)$; $(-6; 6)$;

2) $(11; -9)$;

3) $(12; 8)$;

4) $(3; 0)$; $(3; 2)$; $(3; -2)$.

Упражнение 4. (ЕГЭ С-5)

1. Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 - \frac{a}{x} < \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2}\right)$$

содержится в некотором отрезке длины 7, и при этом содержит какой-нибудь отрезок длины 4.

2. Найдите множество значений параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$x^2 - \frac{25a}{x} + 10a < (10+a)x - 25$$

содержит какой-нибудь отрезок длины 7, но не содержит никакого отрезка длины 9.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$3(2a+3) - x(a-x) < 3\left(\frac{3a}{x} + 2x\right)$$

содержит какой-нибудь отрезок длины 5, но не содержит никаких двух непересекающихся отрезков, каждый из которых длины 3.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{9 - (a+6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2} \left(\frac{3}{x} - 2\right) - 1$$

содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длины 4 каждый.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых во множестве решений неравенства

$$x(x-2a-6) + a^2 < \frac{6a^2}{x} - 12a$$

можно расположить два отрезка длины 1 и длины 4, которые не имеют общих точек.

Ответы: 1) $[-7; -4]$;

2) $[-9; -7) \cup (12; 14]$;

3) $[-6; -5) \cup (8; 9]$;

4) $(11; +\infty)$;

5) $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Иррациональные уравнения и системы уравнений

1.1. Простейшие иррациональные уравнения

Определение. Уравнение $y = f(x, y, \dots, z) = 0$ называется иррациональным, если его левая часть есть алгебраическая иррациональная функция от переменных.

Определение. Простейшими иррациональными уравнениями от одной переменной будем называть уравнения вида

$$1) \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \text{ и } \sqrt[n+1]{f(x)} = g(x),$$

$$2) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)},$$

$$3) g(x)\sqrt{f(x)} = 0.$$

Отметим, что при решении иррациональных уравнений:

1. Все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими. Другими словами, если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения, при этом корень имеет тот же знак, что и подкоренное выражение.

3. Функции $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \sqrt[n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

Рассмотрим алгоритмы решения каждого из типов простейших уравнений.

$$1) \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x). \end{cases}$$

2) Функция $y = {}^{2n+1}\sqrt{t}$, $n \in N$ определена и монотонна при всех значениях аргумента. Поэтому ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = -3$.

Решение. Так как область значений арифметического корня второй степени — множество неотрицательных действительных чисел, то данное равенство невозможно. Таким образом, $\sqrt{x+1} = -3 \Leftrightarrow \emptyset$.

Ответ: \emptyset .

Пример 2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{2x^2 + 9x + 5} - x = 3$.

1) $(-\infty; 1]$; 2) $(1; 5]$; 3) $[5; 10)$; 4) $[10; +\infty)$.

Решение. Запишем уравнение в стандартном виде и применим алгоритм решения подобных уравнений.

$$\sqrt{2x^2 + 9x + 5} - x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 9x + 5} = x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 2x^2 + 9x + 5 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x = -4, \Leftrightarrow x = 1. \\ x = 1 \end{cases}$$

Единственный корень уравнения $1 \in (-\infty; 1]$, поэтому номер правильного ответа — 1).

Ответ: 1).

Пример 3. Укажите целое число, ближайшее к решению уравнения $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} = x + 1$.

1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) -2.

Решение. Возводя обе части уравнения в куб, получим

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} = x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Целое число, ближайшее к решению уравнения — 0. Следовательно, правильный ответ — 2).

Ответ: 2).

Пример 4. Укажите промежутки, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{5-x} = x-5$.

1) $[-6; -5]$; 2) $[-4; 0]$; 3) $[2; 4]$; 4) $[5; 7]$.

Решение. $\sqrt{5-x} = x-5$. В данном случае достаточно увидеть, что подкоренное выражение неотрицательно при $x \leq 5$, а правая часть уравнения — при $x \geq 5$. Поэтому единственным решением данного уравнения может быть только $x=5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это действительно так.

Решение уравнения $5 \in [5; 7]$, поэтому правильный ответ — 4).

Ответ: 4).

Приведенный пример показывает, что иногда можно отступить от алгоритма решения.

1.2. Уравнения, сводящиеся к простейшим

Уравнения, приводящиеся к простейшим, решаются методами, которыми решаются либо целые, либо дробно-рациональные алгебраические уравнения.

Решим несколько уравнений, сводя их к простейшим подходящей заменой.

Пример 5. Решите уравнение: $\sqrt{x} - x + 6 = 0$.

Решение. $\sqrt{x} - x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 = 0$. Проведенный переход есть равносильное преобразование, так как он не меняет область определения выражения, стоящего в левой части уравнения.

Решим вспомогательное квадратное уравнение $y^2 - y - 6 = 0$, сделав замену $y = \sqrt{x}$. Заметим при этом, что вспомогательное уравнение отнюдь не обязано быть равносильным исходному уравнению.

$$y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Следовательно, исходное иррациональное уравнение равносильно совокупности простейших иррациональных уравнений.

$$\sqrt{x} - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -3, \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 6. Решите уравнение: $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1.$

Решение. Выполнив очевидную замену $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$, решаем получившее вспомогательное уравнение.

$$y - \frac{2}{y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0, \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение вновь будет равносильно совокупности простейших уравнений.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2, \\ \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x+5}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{2}.$

1.3. Уравнения, содержащие несколько радикалов второй степени

При решении подобных уравнений следует придерживаться такого алгоритма.

1. Все подкоренные выражения записываются в системе ограничений как неотрицательные.

2. Радикалы располагаются по обеим частям уравнения таким образом, чтобы обе части получившегося уравнения стали неотрицательными при всех допустимых значениях переменной.

3. После выполнения двух первых пунктов алгоритма обе части уравнения можно возвести в квадрат, причем получившееся уравнение будет равносильно исходному уравнению.

4. После приведения подобных слагаемых и уединения оставшегося радикала получившееся уравнение решается как простейшее, с введением дополнительных ограничений, следующих из алгоритма решения простейшего уравнения.

Пример 7. Решите уравнение: $\sqrt{3x+4} = \sqrt{4x-1}$.

Решение. Выполняя алгоритм, убедимся, что в систему ограничений достаточно записать условие неотрицательности всего одного подкоренного выражения, причем все равно какого.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+4} = \sqrt{4x-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 \geq 0, \\ 3x+4 = 4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ x = 5 \end{cases}.\end{aligned}$$

Ответ: 5.

Пример 8. Решите уравнение: $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2$.

Решение. В данном случае недостаточно будет указать, что какое-либо одно подкоренное выражение неотрицательно. Будем строго придерживаться алгоритма. Получим

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \\ x-1 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} + 3-x = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 2.\end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 9. Решите уравнение: $2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x+21}$.

Решение. Следуя алгоритму решения, получим

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} &= \sqrt{x+21} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ x+21 \geq 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} 4x + 4\sqrt{x(5-x)} + 5-x = x+21 \\ 0 \leq x \leq 5, \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \begin{cases} 2\sqrt{x(5-x)} = 8-x \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 4x(5-x) = 64 - 16x + x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 5x^2 - 36x + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ x = 4, \\ x = \frac{16}{5}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \frac{16}{5}. \end{cases} \\
 \text{Ответ: } 4; \frac{16}{5}. &
 \end{aligned}$$

Пример 10. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}.$$

Решение. Хотя в данном уравнении 4 радикала второй степени, но решение этого уравнения можно произвести, применив алгоритм.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} &= \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ (\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4})^2 = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7})^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x+3 + 2\sqrt{(x+3)(x+4)} + (x+4) = x+2 + 2\sqrt{(x+2)(x+7)} + x+7 \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ \sqrt{(x+3)(x+4)} = 1 + \sqrt{(x+2)(x+7)} \end{cases} &\Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^2+7x+12=1+2\sqrt{(x+2)(x+7)}+x^2+9x+14 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ 2\sqrt{(x+2)(x+7)} = -2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{3}{2}, \\ 4(x^2+9x+14) = 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\frac{3}{2}, \\ 24x = -47 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{47}{24}.
\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{47}{24}$.

1.4. Решение иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней

Часто иррациональное уравнение содержит радикалы различной степени. В этом случае подобные уравнения решаются либо методом замены переменной, либо методом составления систем. Сразу отметим что введение новых переменных и тем более переход к системе не относится к каким-либо равносильным преобразованиям.

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$.

Решение. Применим метод составления систем уравнений. Обозначим

$$\sqrt[3]{24+x} = a, \quad \sqrt{12-x} = b.$$

Тогда новые переменные будут связаны соотношениями

$$\begin{cases} a+b=6, \\ a^3+b^2=36. \end{cases}$$

Второе соотношение подбирается, исходя из вида подкоренных выражений.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=6, \\ a^3+b^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a, \\ a^3+36-12a+a^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - a, \\ a^3 + a^2 - 12a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - a, \\ a = 0, \\ a = -4, \\ a = 3. \end{cases}$$

$$\text{Делая обратную замену, получим} \begin{cases} = -24, \\ = -88, \\ 3. \end{cases}$$

Ответ: $-24, -88, 3$.

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$.

Решение. Введем обозначения $\sqrt[3]{8+x} = a$, $\sqrt[3]{8-x} = b$.

Еще раз напомним, что переход от уравнения, содержащего одну переменную, к системе, содержащей две и более переменные величины, не является равносильным преобразованием. Получим систему:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1, \\ (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1, \\ ab = -5. \end{cases}$$

Опять получим, что a и b — корни уравнения

$$z^2 - z - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{21} + 1}{2}, \\ z = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

В этом случае нам еще предстоит вычислить значение искомой переменной, решив уравнение $\sqrt[3]{8+x} = \frac{\sqrt{21} + 1}{2}$.

Получим, что $x = 3\sqrt{21} = \sqrt{189}$.

Ответ: $\sqrt{189}$.

1.5. Использование монотонности функции

Пример 13. Решите уравнение $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x - 6}$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $x = \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x - 6} - 6}$ и рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt[3]{7t - 6}$. Данная функция представляет суперпозицию монотонно возраста-

тающих функций, поэтому также является монотонно возрастающей. По теореме, сформулированной выше (см. «Решение алгебраических уравнений и систем уравнений»), получим, что

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{7\sqrt[3]{7x-6}-6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{7x-6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 = 7x-6 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 1; 2; -3.

Пример 14. Для каждого положительного значения параметра a решите уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x$.

Решение. С вариантом этого уравнения мы уже встречались при решении целых алгебраических уравнений. Аналогично предыдущему примеру получим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x &\Leftrightarrow x = \sqrt{x+a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - x - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \\ x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $a > 0$.

Пример 15. Решите уравнение

$$(x+1)\left(\sqrt{(x+1)^2+9}+1\right)+3x\left(\sqrt{9x^2+9}+1\right)=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t\left(\sqrt{t^2+9}+1\right)$. Данная функция определена для любого значения аргумента, нечетна, так как

$$f(-t) = -t\left(\sqrt{t^2+9}+1\right) = -f(t).$$

Найдем производную.

$$f'(t) = \left(\sqrt{t^2+9}+1\right) + t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+9}} = \left(\sqrt{t^2+9}+1\right) + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+9}}.$$

Так как производная данной функции положительна, то сама функция монотонно возрастает.

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$f(x+1) + f(3x) = 0.$$

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(3x) = 0 &\Leftrightarrow f(x+1) = \\ &= -f(3x) \Leftrightarrow f(x+1) = f(-3x). \end{aligned}$$

Мы воспользовались нечетностью функции. Учитывая монотонное возрастание функции, получим, что

$$f(x+1) = f(-3x) \Leftrightarrow x+1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

1.6. Решение систем уравнений, содержащих иррациональности

Решение систем уравнений, содержащих иррациональности, производится теми же методами, что и решение систем алгебраических уравнений. Однако при преобразовании выражений, входящих в различные части уравнений, не надо забывать об ограничениях, привносимых иррациональными функциями.

Пример 16. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} = y, \\ 2|x-3| = y+1 \end{cases}$$
. Найдите произведение $x_0 y_0$.

Решение. Учитывая ограничения, присущие алгоритму решения простейшего иррационального уравнения, преобразуем данную систему следующим образом.

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} = y, \\ 2|x-3| = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x-3 = y^2, \\ 2y^2 = y+1. \end{cases}$$

Сделав замену во втором уравнении, мы получим

$$2|y^2| = y+1 \Leftrightarrow 2y^2 = y+1.$$

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x - 3 = y^2, \\ 2y^2 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x = y^2 + 3, \\ 2y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x = y^2 + 3, \\ y = 1, \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение (4; 1), произведение координат которой равно 4.

Ответ: 4.

Пример 17. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} y - 1 = \sqrt{4x^2 + 8x + 4}, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Найдите сумму $x_0 + y_0$.

Решение. Применим метод подстановки. Выразив из второго уравнения значение переменной, получим

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y - 1 = \sqrt{4x^2 + 8x + 4}, \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5, \\ 3x - 6 = \sqrt{4x^2 + 8x + 4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ y = 3x - 5, \\ 9x^2 - 36x + 36 = 4x^2 + 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ y = 3x - 5, \\ 5x^2 - 44x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ y = 3x - 5, \\ x = \frac{22+18}{5}, \\ x = \frac{22+18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ y = 3x - 5, \\ x = 8, \\ x = 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 19. \end{cases} \end{aligned}$$

Сумма решений равна 27.

Ответ: 27.

Пример 18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13. \end{cases}$$

Решение. Из условия следует, что системе могут удовлетворять только неотрицательные значения переменных.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\sqrt{xy} + y = \frac{25}{36}xy, \\ x + y = 13, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ \frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy} - 13 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим второе уравнение системы.

$$\frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy} - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = -\frac{78}{25}, \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 6 \Leftrightarrow xy = 36.$$

Таким образом, получим, что

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 9, \\ x = 9, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 9); (9; 4).

Пример 19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Решение. Применив формулу суммы кубов двух чисел, получим, что

$$x + y = \left((\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2 - 3\sqrt[3]{xy} \right) = 3 \cdot (9 - 6) = 9.$$

Таким образом, получим, что

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 1, \\ x = 1, \\ y = 8. \end{cases}$$

Ответ: (8; 1); (1; 8).

Упражнение 1.

1. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1} = 0.$$

1) $\frac{5}{4}$; 2) 2; 3) 1; 4) $\frac{9}{4}$; 5) $\frac{1}{4}$.

Верный ответ — 1).

2. Модуль суммы корней уравнения $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$ равен

1) 16; 2) 12; 3) 14; 4) 13; 5) 15.

Верный ответ — 3).

3. Модуль разности корней уравнения $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$ равен

1) 36; 2) 32; 3) 34; 4) 33; 5) 35.

Верный ответ — 2).

4. Найдите сумму корней уравнения

$$(5x+2)\sqrt{1-x} + (5x-7)\sqrt{x} = 0.$$

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{3}{2}$.

Верный ответ — 5).

5. Найдите сумму корней уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$.

1) —; 2) $\frac{6}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 1; 5) $\frac{7}{5}$.

Верный ответ — 5).

Упражнение 2.

1. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{34+x} - \sqrt{7+x}$.

Ответ: 2.

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = 3$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$.

Ответ: -3; 3.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}.$$

Ответ: -2; 0.

5. Решите уравнение $x^3 - 2\sqrt[3]{2x-1} = 1$.

Ответ: 1; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 3.

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0. \end{cases}$$

2. Найдите целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$$

3. Найдите целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 29. \end{cases}$$

4. Найдите целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2. \end{cases}$$

Ответы. 1) $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$; $\left(3; \frac{3}{2}\right)$; 2) (5;3); 3) (16;4); (4;16);

4) (4;2); 5) $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; (0;3); (21;21).

§ 2. Решение иррациональных неравенств

2.1. Простейшие иррациональные неравенства

Иррациональным называется неравенство вида $\sqrt[n]{F(x)} \vee g(x)$, где n — натуральное число, а знак сравнения заменяет все знаки неравенств $>$, \geq , $<$, \leq .

Приведем решение простейших неравенств в таблице.

Неравенство вида $\sqrt[n]{F(x)} \vee g(x)$, $n=2k$ — натуральное четное число				
Неравенство	$\sqrt[2k]{F(x)} > g(x)$	$\sqrt[2k]{F(x)} \geq g(x)$	$\sqrt[2k]{F(x)} \leq g(x)$	$\sqrt[2k]{F(x)} < g(x)$
Равносильная система соотношений	$\begin{cases} F(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \\ g(x) \geq 0, \\ F(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$	$\begin{cases} F(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \\ g(x) \geq 0, \\ F(x) \geq g^{2k}(x) \end{cases}$	$\begin{cases} F(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ F(x) \leq g^{2k}(x) \end{cases}$	$\begin{cases} F(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ F(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$
Неравенство вида $\sqrt[n]{F(x)} \vee g(x)$, $n=2k+1$ — натуральное нечетное число				
Неравенство	$\sqrt[2k+1]{F(x)} \geq g(x)$	$\sqrt[2k+1]{F(x)} > g(x)$	$\sqrt[2k+1]{F(x)} \leq g(x)$	$\sqrt[2k+1]{F(x)} < g(x)$
Равносильная система соотношений	$F(x) \geq g^{2k+1}(x)$	$F(x) > g^{2k+1}(x)$	$F(x) \leq g^{2k+1}(x)$	$F(x) < g^{2k+1}(x)$

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{x+18} < 2-x$. В ответе укажите наибольшее целое решение.

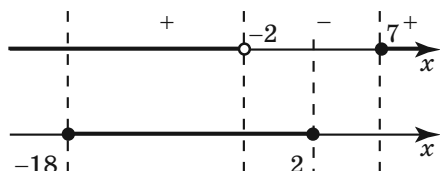
Решение. Данное неравенство равносильно системе, содержащей три условия.

$$\sqrt{x+18} < 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 5x - 14 > 0. \end{cases}$$

Комментарии. Найдем корни квадратного трехчлена.

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = -2. \end{cases}$$

Применим метод интервалов для решения системы неравенств.



Окончательно получим, что $-18 \leq x < -2$. Наибольшее целое решение неравенства $x = -3$.

Ответ: -3 .

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{2x+3} \leq x$. В ответе укажите наименьшее целое решение.

Решение. Снова сведем решение иррационального неравенства к решению системы рациональных неравенств.

$$\sqrt{2x+3} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 2x+3 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq -1, \Leftrightarrow x \geq 3. \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Наименьшее целое решение неравенства $x = 3$.

Ответ: 3 .

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{14-x} > 2-x$. В ответе укажите число целых отрицательных решений неравенства.

Решение. Данное неравенство сводится к решению совокупности двух систем рациональных неравенств.

$$\begin{aligned} \sqrt{14-x} > 2-x &\Leftrightarrow \begin{cases} 14-x \geq 0, \\ 2-x < 0, \\ 2-x \geq 0, \\ 14-x > (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leq 14, \\ x \leq 2, \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leq 14, \\ x \leq 2, \\ (x-5)(x+2) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая квадратное неравенство, получим, что

$$(x-5)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 5.$$

Окончательно получим, что $\sqrt{14-x} > 2-x \Leftrightarrow -2 < x \leq 14$.

Неравенству удовлетворяет одно отрицательное целое значение $x = -1$.

Ответ: -1 .

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{4-x} \geq -2$.

Решение. Казалось бы, правая часть неравенства, которая есть отрицательное число, всегда меньше его левой части, в которой стоит радикал четной степени. Однако чтобы это было верным, обе части неравенства должны существовать. Таким образом, данное неравенство верно при любом $x \leq 4$.

Ответ: $(-\infty; 4]$.

Упражнение 1.

1. Укажите сумму целых решений неравенства

$$\sqrt{24-10x} > 3-4x.$$

1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 0.

2. Решением неравенства $\sqrt{24-5x} \geq -x$ является промежуток

1) $(-\infty; -8]$; 2) $[-8; 48]$; 3) $(-8; 48)$; 4) $[48; +\infty)$.

3. Наибольшее натуральное число, не являющееся решением неравенства $\sqrt{9x-20} \leq x$, равно

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 4.

4. Решением неравенства $\sqrt{2-x-x^2} \geq -11$ является промежуток

1) $[-2; 1]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2]$; 4) $[1; +\infty)$.

5. Наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x+78} \geq x+6$ равно

1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 2.

Верные ответы: 1) 3; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) 4.

2.2. Решение неравенств, содержащих два и более знака радикала

Докажем теорему, применение которой даст возможность сформулировать и в дальнейшем применять алгоритм решения неравенств, содержащих более одного радикала.

Теорема. Для любых неотрицательных чисел a и b сравнение $(a \vee b) \Leftrightarrow (a^n \vee b^n)$, где n — любое натуральное число.

Доказательство. Сравнения, очевидно, равносильны, если $a=b=0$, так как они или оба верны в случае равенства или нестрогого неравенства, или оба неверны в случае строгого неравенства.

В случае, если $0 \leq a < b$, получим, что

$$a^n - b^n \vee 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \vee 0$$

и, как следует из этого разложения, знак разности $(a-b)$ одинаков со знаком разности $a^n - b^n$. Теорема доказана.

Сформулируем теперь алгоритм решения иррациональных неравенств, содержащих два или три радикала второй степени.

1. Каждое подкоренное выражение должно быть указано в системе ограничений как выражение, принимающее неотрицательные значения.

2. Радикалы должны быть расположены так, чтобы в обеих частях неравенства стояли выражения, принимающие неотрицательные значения при всех допустимых значениях переменной.

3. После выполнения условий первых двух пунктов обе части неравенства равносильно возводятся в квадрат без изменения знака неравенства на основании доказанной теоремы.

4. После приведения получившихся подобных членов и уединения оставшегося радикала с положительным коэффициентом получившееся неравенство решается как одно из выше приведенных простейших неравенств с учетом, конечно, вновь появившихся ограничений.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Решение. Будем действовать согласно приведенному выше алгоритму. Запишем систему ограничений, расположим радикалы так, чтобы в обеих частях неравенства стояли выражения, принимающие неотрицательные значения, после чего обе части неравенства возведем в квадрат.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0, \\ x+3 > (\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x+3 > x-1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} + 2x-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая систему простейших линейных неравенств, а также приводя в последнем неравенстве подобные слагаемые, получим систему, равносильную исходному неравенству.

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} < 5-2x. \end{cases}$$

Добавим в систему ограничений дополнительное условие неотрицательности правой части иррационального неравенства.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 4(x-1)(2x-1) < (5-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 4x^2 + 8x - 21 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ -\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left[1; \frac{3}{2}\right)$.

Пример 6. Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} < 4x - 2$.

Решение. Заметим, что правая часть неравенства есть разность подкоренных значений выражений, стоящих в его левой части. Поэтому, записав необходимые ограничения, представим правую часть в виде разности.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} < 4x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{5x} < 5x - (x+2). \end{cases}$$

Пользуясь тем, что на указанном в ограничениях множестве значений переменной выражения, стоящие в правой части, принимают неотрицательные значения, разложим правую часть по формуле разности квадратов.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{5x} < (\sqrt{5x} + \sqrt{x+2})(\sqrt{5x} - \sqrt{x+2}) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{5x} - \sqrt{x+2})(\sqrt{5x} + \sqrt{x+2} + 1) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Второй сомножитель, входящий в неравенство, положителен. Сокращая на него, получим:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{5x} - \sqrt{x+2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 5x > x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

При решении иррациональных неравенств используются те же методы упрощения, что и при решении уравнений. Наиболее часто используется метод замены или метод введения новой переменной. Сразу заметим, что введение новой переменной не является равносильным преобразованием.

Пример 7. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1.$$

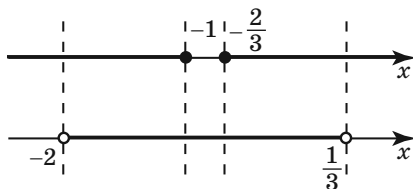
Решение. Введем новую переменную $y = 3x^2 + 5x + 2$. Неравенство запишется в виде $\sqrt{y+5} - \sqrt{y} > 1$. Решим это неравенство, используя алгоритм. Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{y+5} - \sqrt{y} > 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ y+5 > (\sqrt{y}+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ y+5 > y+2\sqrt{y}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ \sqrt{y} < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной неизвестной, получим, что неравенство стало равносильным системе двух квадратичных неравенств:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5x + 2 \geq 0, \\ 3x^2 + 5x + 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3x+2) \geq 0, \\ 3x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(x+1) \geq 0, \\ (3x-1)(x+2) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Применим метод интервалов (его графическую иллюстрацию):



Окончательно получим, что неравенство свелось к решению системы:

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq -\frac{3}{2}, \\ -2 < x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1, \\ -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Упражнение 2.

1. Решите неравенство $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-11}$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

3. Решите неравенство $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \geq 1$.

4. Решите неравенство $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-3}$.

 Ответы: 1) $[5; 5; 10)$; 2) $[-2; 2)$; 3) $[0; 9]$; 4) $[2; +\infty)$;

5) $\left[4; \frac{14}{3}\right]$.

2.3. Решение неравенств, содержащих радикал в виде множителя

Неравенство	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) > 0$	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \geq 0$	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) < 0$	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \leq 0$
Равносильная система соотношений	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D(g), \\ f(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} D(g), \\ f(x) = 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

Пример 8. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, приведенным в таблице. Получим, что неравенство будет равносильно совокупности, состоящей из уравнения и системы двух неравенств.

$$\begin{aligned}
 (x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x+6=0, \\ -x^2+x+6 > 0, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ x=3, \\ (3-x)(x+2) > 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ x=3, \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ 1 \leq x \leq 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

 Ответ: $\{2\} \cup [1; 3]$.

Пример 9. Решите неравенство $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

Решение. Приводя неравенство к каноническому виду, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} &\leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{8-2x-x^2} \left(\frac{1}{x+10} - \frac{1}{2x+9} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{8-2x-x^2} \frac{x-1}{(x+10)(2x+9)} &\leq 0. \end{aligned}$$

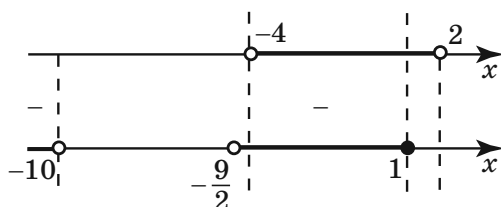
В этом случае неравенство будет равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ (x+10)(2x+9) \neq 0, \\ \begin{cases} 8-2x-x^2 > 0, \\ \frac{x-1}{(x+10)(2x+9)} \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Найдем корни квадратного трехчлена, входящего во вторую систему:

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 2. \end{cases}$$

Проиллюстрируем графически решение второй системы:



Окончательно получим, что неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 2, \\ -4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[-4; 1] \cup \{2\}$.

Упражнение 3.

1. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{16-x^2} \leq 0$.
2. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geq 0$.
3. Решите неравенство $(x^2+2x-8)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$.
4. Решите неравенство $(8x^2-6x+1)\sqrt{-25x^2+15x-2} \geq 0$.
5. Решите неравенство $(x^2-3x+1)\sqrt{2x-x^2-1} \leq 0$.

Ответы: 1) $[-4;1] \cup \{4\}$;

2) $\{2\} \cup [1;3]$;

3) $(-\infty; -4] \cup [-2;1] \cup [2; +\infty)$;

4) $[0,2; 0,25] \cup [0,4]$;

5) $\{1\}$.

2.4. Решение различных иррациональных неравенств

Пример 10. Для каждого значения параметра a решите неравенство $a-2 < (a-1)\sqrt{x+1}$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1. $a < 1$. Неравенство можно записать в виде

$$a-2 < (a-1)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 2-a > (1-a)\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ \sqrt{x+1} < \frac{2-a}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ -1 \leq x < \left(\frac{2-a}{1-a}\right)^2. \end{cases}$$

2. $1 \leq a < 2$. При данных значениях параметра левая часть неравенства принимает отрицательные значения, в то время как правая — неотрицательные значения. Следовательно, неравенство будет верно для любого $x: x \geq -1$.

3. $a \geq 2$. Получим, что $\sqrt{x+1} > \frac{a-2}{a-1} \Leftrightarrow x > -1 + \left(\frac{2-a}{1-a}\right)^2$.

Ответ: Если $a < 1$, $\left[-1; \left(\frac{2-a}{1-a}\right)^2\right)$.

Если $1 \leq a < 2$, $[-1; +\infty)$.

Если $a \geq 2$, $\left[-1 + \left(\frac{2-a}{1-a}\right)^2; +\infty\right)$.

Пример 11. Решите неравенство

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x+1}} \leq 1.$$

Решение. Заметим, что подкоренные выражения представляют полные квадраты. Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x+1}} &\leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2} &\leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x+1}-2| + |\sqrt{x+1}-3| &\leq 1. \end{aligned}$$

Так как $\min(|x-a|+|x-b|)=|a-b|$ и достигается при $a \leq x \leq b$, то

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+1}-2| + |\sqrt{x+1}-3| &\leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

Ответ: $[3; 8]$.

Пример 12. Решите неравенство $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq a, \\ 2a+2\sqrt{a^2-x} < 2, \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a^2, \\ \sqrt{a^2-x} < 1-a, \\ a \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a^2, \\ 0 \leq a \leq 1, \\ a^2-x < 1-2a+a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ 0 \leq x \leq a^2, \\ x > 2a-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим полученную систему.

Ответ: при $a < 0$ или $a > 1$ неравенство решений не имеет.

Если $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, то $0 \leq x \leq a^2$.

Если $\frac{1}{2} < a \leq 1$, то $2a-1 < x \leq a^2$.

Пример 13. Решите неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > x + a$ для всех положительных значений параметра a .

Решение.

$$\sqrt{a^2 - x^2} > x + a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x^2 \geq 0, \\ x + a < 0, \\ x + a \geq 0, \\ a^2 - x^2 > (x + a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a < 0, \\ x - a \geq 0, \\ x + a \geq 0, \\ x^2 + ax < 0. \end{cases}$$

Для положительных значений параметра первая система совокупности решений не имеет. Получим, что

$$\sqrt{a^2 - x^2} > x + a \Leftrightarrow \begin{cases} x + a \geq 0, \\ x(x + a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a < x < 0.$$

Ответ: Если $a > 0$, то $-a < x < 0$.

Пример 14. Решите неравенство $2x\sqrt{x+9} > x^2 + x - 40$.

Решение. Перенеся все слагаемые в одну сторону, получим, что

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{x+9} > x^2 + x - 40 &\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x+9} + x - 40 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x+9} + x - 40 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+9})^2 - 49 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+9} + 7)(x - \sqrt{x+9} - 7) < 0. \end{aligned}$$

Решим данное неравенство методом интервалов.

1.

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x+9} - 7 = 0 &\Leftrightarrow x - 7 = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ x^2 - 14x + 49 = x + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ x^2 - 15x + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ x = \frac{15 - \sqrt{65}}{2}, \\ x = \frac{15 + \sqrt{65}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{15 + \sqrt{65}}{2}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 x - \sqrt{x+9} + 7 = 0 &\Leftrightarrow x + 7 = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x^2 + 14x + 49 = x + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x^2 + 13x + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x = -8, \Leftrightarrow x = -5. \\ x = -5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.



Получим, что $2x\sqrt{x+9} > x^2 + x - 40 \Leftrightarrow -5 < x < \frac{15 + \sqrt{65}}{2}$.

Ответ: $\left(-5; \frac{15 + \sqrt{65}}{2}\right)$.

Упражнение 4.

1. Укажите решение неравенства $\sqrt{x+6} < x$.

1) $(-\infty; -6)$; 2) $[-6; 0]$; 3) $[0; 2]$; 4) $(2; 3)$; 5) $(3; +\infty)$.

Верный ответ — 5).

2. Укажите множество, все значения которого являются решениями неравенства $2\sqrt{3x-11} < x-1$.

1) $\left[1; \frac{11}{3}\right)$; 2) $\left[\frac{11}{3}; 5\right)$; 3) $\left[1; \frac{11}{3}\right) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left[\frac{11}{3}; 5\right) \cup (9; +\infty)$;

5) $[9; +\infty)$.

Верный ответ — 4).

3. Найдите решение неравенства $\sqrt{5x+115} - 2\sqrt{x+19} > 2$.

1) $(-\infty; -23]$; 2) $(-23; -19)$; 3) $[-3; +\infty)$; 4) $[-19; -3) \cup (3; +\infty)$; 5) $[-19; +\infty)$.

Верный ответ — 4).

4. Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства

$$\sqrt{x+14-6\sqrt{x+5}} + \sqrt{x+30-10\sqrt{x+5}} \leq 4.$$

1) 493; 2) 494; 3) 495; 4) 496; 5) 497.

Верный ответ — 3).

5. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-1}.$$

1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{5}{2}$; 5) 3.

Ответ: 2).

Упражнение 5.

1. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

Ответ: 0.

2. Найдите наименьшее целое число, не являющееся решением неравенства $\sqrt{x^2 - 5} + 3 > |x - 1|$.

Ответ: -2.

3. Найдите сумму целых чисел, не являющихся решением неравенства $3\sqrt{x^2 + |x|} - 2 \geq 1 - x$.

Ответ: -1.

4. Найдите наибольшее отрицательное целое число, являющееся решением неравенства $\frac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}{x + 4} < \frac{1}{2}$.

Ответ: -5.

5. Найдите наибольшее натуральное число, являющееся решением неравенства $8 + 6|3 - \sqrt{x + 5}| \geq x$.

Ответ: 19.

ГЛАВА 5

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Решение показательных уравнений и систем уравнений

Определение. Показательным называется уравнение или неравенство, содержащее переменную величину в показателе степени некоторого положительного числа.

Простейшим показательным уравнением или неравенством будем называть сравнение вида $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$, $a > 0$.

Основной теоремой, используемой при решении показательных уравнений и показательных неравенств, является следующая теорема.

Теорема. Сравнение $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) \vee 0$.

Из теоремы следует, что разность двух степеней одного и того же положительного действительного числа $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ всегда имеет тот же знак, что и произведение $(a-1)(f(x)-g(x)) \vee 0$, при всех допустимых значениях переменной.

1.1. Простейшие показательные уравнения

Определение. Простейшими показательными уравнениями назовем уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b \in R$ и $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, \neq .

$$1) \text{ Уравнение } a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 0, \\ \emptyset, \\ b > 0, \\ f(x) = \log_a b. \end{cases}$$

$$2) \text{ Уравнение } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) = 0.$$

Пример 1. Решите уравнение $3^{x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

Решение.

$$3^{x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{2-x} \Leftrightarrow x+1 = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{6-x^2}{2}} = 125$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{6-x^2}{2}} = 125 &\Leftrightarrow 5^{x^2-6} = 5^3 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 3; -3.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы показательных уравнений и методы их решений.

Пример 3. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $2^{5-3x} = 16$.

1) $(-3; -1)$; 2) $[-1; 0)$; 3) $(0; 1]$; 4) $[1; 3)$.

Решение.

$$2^{5-3x} = 16 \Leftrightarrow 2^{5-3x} = 2^4 \Leftrightarrow 5-3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Выберем нужный промежуток. $\frac{1}{3} \in (0; 1]$, следовательно, номер правильного ответа — 3).

Ответ: 3).

Пример 4. Решите уравнение

$$32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}.$$

Решение. Разложим каждое основание на простые множители.

$$32 = 2^5, \quad 625 = 5^4, \quad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Уравнение запишется в виде:

$$\begin{aligned} 32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} &= 600^{x+7} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{5x+15} \cdot 3^{3x+1} \cdot 5^{4x+8} &= 2^{3x+21} \cdot 3^{x+7} \cdot 5^{2x+14}. \end{aligned}$$

Запишем полученное равенство в виде пропорции

$$\frac{2^{5x} \cdot 3^{3x} \cdot 5^{4x}}{2^{3x} \cdot 3^x \cdot 5^{2x}} = \frac{2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^{14}}{2^{15} \cdot 3^1 \cdot 5^8}.$$

После сокращения (напомним, что $a^b > 0$) получим, что исходное уравнение будет равносильно следующему уравнению:

$$2^{2x} \cdot 3^{2x} \cdot 5^{2x} = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \Leftrightarrow 30^{2x} = 30^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

1.2. Показательные линейные уравнения

Определение. Назовем показательным линейным уравнением уравнение вида $c_1 a^{f(x)+k_1} + c_2 a^{f(x)+k_2} + \dots + c_n a^{f(x)+k_n} = C$.

Вынося за скобки общий множитель $a^{f(x)}$, получим уравнение

$$a^{f(x)} (c_1 a^{k_1} + c_2 a^{k_2} + \dots + c_n a^{k_n}) = C,$$

которое является простейшим показательным уравнением.

Пример 5. Решите уравнение: $3^{x+5} + 27 \cdot 3^{x-1} - 28 = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} 3^{x+5} + 27 \cdot 3^{x-1} - 28 &= 0 \Leftrightarrow 3^{x+5} + 3^{x+2} - 28 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{x+2} (27 + 1) = 28 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2.

Пример 6. Решите уравнение

$$7^{x+2} - \left(\frac{1}{7}\right) 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 336.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 7^{x+2} - \left(\frac{1}{7}\right) 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x &= 336 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7^{x-1} (343 - 7 - 14 + 14) = 336 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

1.3. Показательные квадратные уравнения

Уравнения данного вида могут быть, в свою очередь, разделены на два типа.

1) Уравнения вида $c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0$.

Решение данного типа уравнений сводится к решению вспомогательного квадратного уравнения вида $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$. Если это уравнение решений не имеет, то, конечно, не имеет решений и исходное уравнение. Если вспомогательное уравнение имеет решения, что ни в коем случае еще не гарантирует наличия решений исходного уравнения, то

$$c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{f(x)} = y_1, \\ a^{f(x)} = y_2, \end{cases}$$

где y_1, y_2 — корни вспомогательного уравнения.

Пример 7. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.

1) $(0;1]$; 2) $(1;2]$; 3) $(2;3]$; 4) $(3;4]$.

Решение. Приведем уравнение к указанному виду.

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x - 64 = 0.$$

Решим вспомогательное уравнение

$$y^2 - 12y - 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16, \\ y = -4. \end{cases}$$

Получим, что исходное уравнение будет равносильно совокупности простейших уравнений.

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 16, \\ 2^x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4.$$

Решение уравнения $4 \in (3;4]$, поэтому номер правильного ответа — 4).

Ответ: 4).

Пример 8. Решите уравнение: $25^x - 4 \cdot 5^x = 5$.

Решение.

$$\begin{aligned} 25^x - 4 \cdot 5^x = 5 &\Leftrightarrow 5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5, \\ 5^x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

При решении уравнения мы воспользовались теоремой Виета.

Ответ: 1.

2) Уравнения вида $c_1 a^{f(x)} + c_2 a^{-f(x)} + c_3 = 0$.

Решение данного типа уравнений сводится к решению предыдущего типа уравнений. Так как показательная функция принимает только положительные значения, то

$$c_1 a^{f(x)} + c_2 a^{-f(x)} + c_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1 a^{2f(x)} + c_3 a^{f(x)} + c_2 = 0.$$

Пример 9. Решите уравнение $3^{\sqrt{x}} - 3^{3-\sqrt{x}} = 26$.

Решение. Используем свойство степени $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$, $a > 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - 3^{3-\sqrt{x}} = 26 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}} - 26 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}} - 26 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} = 27, \\ 3^{\sqrt{x}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 10. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 14.$$

Решение. Так как $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{49-48} = 1$, то данное уравнение можно будет записать в виде

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{-x} = 14.$$

Поэтому

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{2x} - 14 \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 7+4\sqrt{3}, \\ \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = 7-4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: -2; 2.

1.4. Показательные однородные линейные уравнения

Определение. Уравнение вида $c_1 a^{f(x)} = c_2 b^{f(x)}$ будем называть показательным однородным линейным уравнением.

$$c_1 a^{f(x)} = c_2 b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Пример 11. Решите уравнение $3^{3x} + 9 \cdot 2^{2x} = 4^x + 3^{2+3x}$.

Решение. Сгруппируем слагаемые, представляющие степени одного положительного основания. После этого запишем уравнение в нужном для решения виде.

$$3^{3x} + 9 \cdot 2^{2x} = 4^x + 3^{2+3x} \Leftrightarrow 4^x (9 - 1) = 27^x (9 - 1) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{27}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 12. Решите уравнение $2^{x^4-1} - 4 \cdot 3^{x^4-1} = 3^{x^4-1} - 2^{x^4+1}$.

Решение.

$$2^{x^4-1} - 4 \cdot 3^{x^4-1} = 3^{x^4-1} - 2^{x^4+1} \Leftrightarrow 2^{x^4-1} (1 + 4) = 3^{x^4-1} (4 + 1) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^4-1} = 1 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: -1; 1.

1.5. Показательные однородные уравнения второго порядка

Определение. Уравнения вида $c_1 a^{2f(x)} + c_2 (ab)^{f(x)} + c_3 b^{2f(x)} = 0$ называются однородными показательными уравнениями второго порядка.

Решение данного типа уравнений сводится к решению показательных квадратных уравнений.

Пример 13. Решите уравнение $3 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x + 36^x = 0$.

Решение. Заметив, что $16 = 4^2$, $81 = 9^2$, $36 = 4 \cdot 9$, запишем данное уравнение следующим образом:

$$3 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x + 36^x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 = 0.$$

Решая вспомогательное квадратное уравнение, получим:

$$3y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, показательное уравнение будет равносильно совокупности простейших уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x = -1, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 14. Найдите сумму решений уравнения

$$3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}.$$

Решение. Представим уравнение в нужном для решения виде.

$$\begin{aligned} 3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} &= 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2(x^2+3x-5)} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} - 15 \cdot 5^{2(x^2+3x-5)} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x^2+3x-5)} + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} - 15 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} = \frac{5}{3}, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-5} = \frac{5}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Сумма корней уравнения равна -3 .

Ответ: -3 .

1.6. Уравнения с переменным основанием

Если основание степени в уравнении $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ есть переменная величина $a = a(x)$ и $a(x) > 0$ при всех действительных значениях x , то уравнение равносильно совокупности уравнений $a(x) = 1$ и $f(x) = g(x)$ или, что удобнее записывать, одному уравнению

$$(a(x) - 1)(f(x) - g(x)) = 0.$$

Пример 15. Решите уравнение $(x^2 + x + 1)^{2x-6} = 1$.

Решение. Выражение $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях x . Следовательно,

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)^{2x-6} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^{2x-6} &= (x^2 + x + 1)^0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + x + 1 - 1)(2x - 6) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: -1 ; 0 ; 3 .

Если основание $a = a(x)$ может принимать как положительные, так и неположительные значения, то задача значительно усложняется. В этом случае возможны различные подходы к решению уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Например, *допустимо* ограничить область существования решений уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ случаем $a = a(x) > 0$. Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) = 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Если допускать решения, для которых $a = a(x) \leq 0$, то следует рассмотреть следующие случаи:

$$1) \begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) = 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

2) $a = a(x) = 0$ и при этом $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые положительные, необязательно равные между собой числа.

$$3) \begin{cases} (a(x)+1)(f(x)-g(x))=0, \\ a(x)<0, \\ f(x)\in Z \text{ (или } g(x)\in Z), \end{cases} \quad \text{причем } f(x) \text{ и } g(x) \text{ должны}$$

иметь одинаковую четность.

Пример 16. Решите уравнение $x^{x^2-6x+10} = x^2$.

Решение.

$$x^{x^2-6x+10} = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x-1)(x^2-6x+10-2)=0, \\ x=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \begin{cases} x=1, \\ x=2, \\ x=4, \end{cases} \\ x=0, \\ \begin{cases} x < 0, \\ x=-1, \\ x^2-6x+10 - \text{четное число.} \end{cases} \end{cases}$$

Так как $x^2-6x+10$ при $x=-1$ равно $x^2-6x+10 = (-1)^2 - 6(-1) + 10 = 17$ — нечетное число, поэтому число (-1) не является решением данного уравнения.

Ответ: 0; 1; 2; 4.

1.7. Использование монотонности показательной функции

Из свойств показательной функции мы помним, что если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ является монотонно убывающей. Если же $a > 1$, то функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей.

Пример 17. Решите уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Решение. Запишем данное уравнение следующим образом

$$2^x + 5^x = 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух монотонно убывающих функций, т.е. монотонно убывающую функцию. Следовательно, каждое свое значение эта функция принимает при единственном значении аргумента.

Очевидно, что $x=1$ — решение данного уравнения.

В силу монотонности это решение единственное.

Ответ: 1.

Пример 18. Решите уравнение

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}} \cdot 3^x + \sqrt{9-4\sqrt{2}} \cdot 2^x = 2^{2x+1}.$$

Решение. Используя формулу двойного радикала, получим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{17-\sqrt{288}} = \\ &= \sqrt{\frac{17+\sqrt{289-288}}{2}} - \sqrt{\frac{17-\sqrt{289-288}}{2}} = 3-2\sqrt{2}. \\ \sqrt{9-4\sqrt{2}} &= \sqrt{9-\sqrt{32}} = \\ &= \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}} = 2\sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

Представив также $2^{2x+1} = 2 \cdot 4^x$, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} (3-2\sqrt{2}) \cdot 3^x + (2\sqrt{2}-1) \cdot 2^x &= 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + (2\sqrt{2}-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 2. \end{aligned}$$

Левая часть уравнения есть сумма монотонно убывающих функций. Поэтому, как следует из определения, каждое свое значение принимает лишь при единственном значении аргумента. Находим, что $x=0$ — единственное решение уравнения.

Ответ: 0.

Пример 19. Решите уравнение $2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

Решение. Очевидно, что выполняется неравенство

$$1 - |x| \leq 1 \Leftrightarrow 2^{1-|x|} \leq 2$$

для любого действительного значения переменной. Равенство достигается, если $x = 0$.

С другой стороны, применяя неравенство Евклида, получим

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq 2 \sqrt{(x^2 + 1) \frac{1}{(x^2 + 1)}}.$$

Таким образом, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq 2$ при всех значениях переменной x , причем равенство достигается, если $x = 0$.

Следовательно, $x = 0$ — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 0.

Пример 20. Решите уравнение $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

Решение. Используя методы решения иррациональных уравнений, приведем данное уравнение к равносильной ему системе:

$$\begin{aligned} \sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 1, \\ 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 1 + a(2^x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 1, \\ 2^{2x} - (a + 2)2^x + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 1, \\ 2^x = 2, \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 1, \\ 2^x = a. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассматривая полученную систему, получим, что при $a > 1$ уравнение решений не имеет.

При $0 < a \leq 1$, $x = \log_2 a$.

При $a \leq 0$ уравнение также решений не имеет.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$, \emptyset .

Если $a \in (0; 1]$, $x = \log_2 a$.

Пример 21. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ не имеет решений.

Решение. Запишем уравнение в виде: $2^{2x} + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$. Очевидно, что данное уравнение не будет иметь решения, если квадратный трехчлен $f(t) = t^2 + (a^2 + 5)t + (9 - a^2)$ не будет иметь корней, либо оба корня этого трехчлена будут не больше нуля.

Применяя теорию квадратного трехчлена, получим, что искомые значения параметра будут задаваться совокупностью

$$\begin{cases} (a^2 + 5)^2 - 4(9 - a^2) < 0, \\ \begin{cases} (a^2 + 5)^2 - 4(9 - a^2) \geq 0, \\ -(a^2 + 5) \leq 0, \\ 9 - a^2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$\begin{cases} (a^2 + 5)^2 - 4(9 - a^2) < 0, \\ \begin{cases} (a^2 + 5)^2 - 4(9 - a^2) \geq 0, \\ -(a^2 + 5) \leq 0, \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 9 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3.$$

Ответ: $[-3; 3]$.

Пример 22. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|}, \quad x \geq -2.$$

Решение. Воспользуемся ранее разобранным приемом и поставим следующую задачу. Найдите все значения параметра

a , при каждом из которых система $\begin{cases} \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|} = a, \\ x \geq -2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Используя определение модуля числа, разложим данную систему в равносильную ей совокупность систем.

$$\begin{cases} \frac{3x}{|x|} + 2^{|x|} = a, \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ -3 + 2^{-x} = a, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ 3 + 2x = a. \end{cases} \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ -3 + 2^{-x} = a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ a + 3 > 0, \\ -x = \log_2(a + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \log_2(a + 3) \leq 2, \\ x = -\log_2(a + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a \leq 1, \\ x = -\log_2(a + 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, первая система совокупности, а вместе с ней и исходное уравнение, имеет решение при $a \in (-2; 1]$. Решим вторую систему совокупности.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0, \\ 3 + 2x = a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ a > 3, \\ x = \log_2(a - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(a - 3) > 0, \\ x = \log_2(a - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ x = \log_2(a - 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Получаем, что вторая система совокупности имеет решение при $a > 4$. Объединяя найденные значения параметра, составляющие область значений исходной функции, получим, что

$$D(y) = (-2; 1] \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $D(y) = (-2; 1] \cup (4; +\infty)$.

Упражнение 1.

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$3^{x+2} - 3^x = 216.$$

1) $(-\infty; -3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $(0; 2]$; 4) $[3; 6]$.

2. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения

$$9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0.$$

1) $(-\infty; -1]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $(0; 2]$; 4) $[3; 6]$.

3. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения

$$4^{x+2} + 30 \cdot 2^{x-1} - 1 = 0.$$

1) $(-\infty; -2]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $(0; 1]$; 4) $[4; 5]$.

4. Укажите промежутки, которому принадлежат корни уравнения

$$4^x - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0.$$

1) $(-\infty; -4]$; 2) $[-3; 0]$; 3) $(0; 1]$; 4) $[4; 10]$.

5. Укажите промежутки, которому принадлежат корни уравнения

$$100^x - 70 \cdot 10^{x-1} - 30 = 0.$$

1) $(-\infty; -3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $(0; 2]$; 4) $[3; 6]$.

Верные ответы: 1) 4; 2) 4; 3) 1; 4) 4; 5) 3.

Упражнение 2.

1. Найдите значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0$ имеет решение.

Ответ: $[2; +\infty)$.

2. Найдите значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(10 - a) \cdot 5^{2x+1} - 2 \cdot 5^{x+1} + 6 - a = 0$$
 не имеет решения.

Ответ: $(-\infty; 5) \cup (10; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(a + 1) \cdot 4^x + 8 \cdot 6^x + (a - 5) \cdot 9^x = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: $[-1; 5)$.

4. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(a - 1) \cdot 4^x - 4 \cdot 6^x + (a + 2) \cdot 9^x = 0$ имеет два решения.

Ответ: $(-3; -2)$.

5. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение $(a - 3) \cdot 9^x + 6^{x+1} + (a - 3) \cdot 4^x = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $[-4; 3)$.

§ 2. Решение показательных неравенств

Еще раз приведем доказанную в начале параграфа 1 теорему.

Теорема. Сравнение $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0$ при всех допустимых значениях основания $a > 0$.

Пример 1. Решите неравенство $27^{5-\frac{x}{3}} > 3$.

Решение. Записав обе части неравенства в виде сравнения степени одного и того же действительного числа, применим теорему.

$$27^{5-\frac{x}{3}} > 3 \Leftrightarrow 3^{3(5-\frac{x}{3})} > 3^1 \Leftrightarrow (3-1)(15-x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 14.$$

Ответ: $(-\infty; 14)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{12x+10-x^2} < \frac{27}{8}$.

Решение. Запишем неравенство в стандартном виде. Так как

$$\frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3},$$

то

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{12x+10-x^2} < \frac{27}{8} &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+12x+10} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}-1\right)(-x^2+12x+10+3) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2-12x-13) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 13. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 13)$.

Пример 3. Решите неравенство $x^3 \cdot 6^x - 6^{3+x} \leq 0$.

Решение. Вынесем за скобки множитель, являющийся степенью положительного числа.

$$x^3 \cdot 6^x - 6^{3+x} \leq 0 \Leftrightarrow 6^x(x^3 - 216) \leq 0.$$

Так как $6^x > 0$ для любого значения переменной, то

$$6^x(x^3 - 216) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 216 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 6.$$

Ответ: $(-\infty; 6]$.

Из основной теоремы следует, что множитель вида $(a^{f(x)} - a^{g(x)})$ и множитель вида $(a-1)(f(x)-g(x))$ при всех допустимых значениях переменных имеет один и тот же знак. Это дает возможность быстро рационализировать показательные неравенства.

Пример 4. Решите неравенство $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

Решение. Применяя формулу разложения квадратного трехчлена, получим:

$$\begin{aligned}
 5^{2x+1} &> 5^x + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (5^x - 1)(5 \cdot 5^x + 4) > 0 \Leftrightarrow (5 - 1)x > 0 \Leftrightarrow x > 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(0; +\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство $\frac{3^{x+1} - 21}{3^x - 3} \geq 1$.

Решение. Приведем неравенство к каноническому виду и применим методы рационализации

$$\begin{aligned}
 \frac{3^{x+1} - 21}{3^x - 3} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 3^x - 21 - 3^x + 3}{3^x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 3^x - 18}{3^x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{3^x - 3^2}{3^x - 3^1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3-1)(x-2)}{(3-1)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $(x^2 - x + 2)^{x^2 - 2,5x + 1} < 1$.

Решение. Выражение $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ при любом значении переменной. Поэтому можно применить алгоритм решения показательных неравенств, несмотря на переменное основание степени.

$$\begin{aligned}
 (x^2 - x + 2)^{x^2 - 2,5x + 1} &< 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - x + 2 - 1)(2x^2 - 5x + 2) < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 < 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Пример 7. Решите неравенство $\frac{(3^{2x} - 3)^2(1 - 5^x)}{7^x - 49} \leq 0$.

Решение. Применим следствие из основной теоремы к каждому множителю, входящему в левую часть неравенства. Так как основания степеней, входящих в данное выражение, больше 1, то не будем в данном случае указывать соответствующий множитель $(a - 1)$.

$$\frac{(3^{2x} - 3)^2(1 - 5^x)}{7^x - 49} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)^2(0 - x)}{x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x - 1)^2}{x - 2} \geq 0.$$

Получим, что

$$\frac{x(2x-1)^2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = \frac{1}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (2; +\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|} \geq 1$.

Решение. Приведем неравенство к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|} &\geq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{16-2^x-2^{6-x}}{5-|3-2^x|} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{2x}-16 \cdot 2^x+64}{5-|3-2^x|} \leq 0. \end{aligned}$$

Так как $5+|3-2^x| > 0$, то, умножив знаменатель дроби на это выражение, получим неравенство, равносильное исходному.

$$\begin{aligned} \frac{2^{2x}-16 \cdot 2^x+64}{5-|3-2^x|} \leq 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2^x-8)^2}{25-(3-2^x)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2^x-8)^2}{(8-2^x)(2+2^x)} \leq 0. \end{aligned}$$

Заметив, что $2^x+2 > 0$ и рационализируя неравенство, получим

$$\frac{(2^x-8)^2}{(8-2^x)(2+2^x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{(3-x)} \leq 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $5^{2\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5 \geq 0$.

Решение. Применяя формулу разложения на множители квадратного трехчлена, приведем исходное неравенство к решению совокупности простейших неравенств.

$$5^{2\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}} - 5)(5^{\sqrt{x}} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\sqrt{x}} \geq 5, \\ 5^{\sqrt{x}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1, \\ \sqrt{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство $x^4 + 5^{x+4} \geq x^4 \cdot 5^x + 625$.

Решение. Воспользуемся методом группировки. Имеем:

$$x^4 + 5^{x+4} \geq x^4 \cdot 5^x + 625 \Leftrightarrow x^4 - 625 - 5^x(x^4 - 625) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 625)(1 - 5^x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)(5 - 1)(0 - x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x - 5)(x + 5) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [0; 5]$.

Упражнение 1.

1. Укажите множество решений неравенства $\left(\frac{1}{7}\right)^{2-5x} - 1 \leq 0$.

1) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$; 2) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$; 3) $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

2. Укажите множество решений неравенства $25 > 5^{1-4x}$.

1) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$; 4) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

3. Укажите множество решений неравенства $(\sqrt{7})^{x-7,2} \leq \frac{1}{7}$.

1) $(-\infty; -5,2]$; 2) $[5,2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 5,2]$; 4) $(-\infty; 3,2]$.

4. Укажите множество решений неравенства $25 \cdot 5^x < 5^{3x+3}$.

1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

5. Укажите множество решений неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+1}$.

1) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Верные ответы: 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 3; 5) 4.

Упражнение 2.

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$2 \cdot 25^x + 5 \cdot 4^x < 31,57 \cdot 10^x.$$

1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 2.

Ответ: 4).

2. Найдите длину отрезка числовой оси, являющегося решением неравенства $2^{2x+1} + 7^{2x+1} \leq 9 \cdot 14^x$.

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$.

Ответ: 3).

3. Найдите число целых решений неравенства

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{35}{12}.$$

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

Ответ: 4).

4. Найдите наименьшее целое значение переменной x , являющееся решением неравенства $\frac{3^{\frac{1}{x}} + 12}{\frac{1}{3^x} - 1} \geq \frac{4}{3} \cdot 3^{\frac{1}{x}}$.

1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) 3.

Ответ: 2).

5. Найдите сумму целых чисел, являющихся решением неравенства

$$3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3^{-\sqrt{x}} > 1.$$

1) 512; 2) 1024; 3) 2048; 4) 4096.

Ответ: 3).

§ 3. Решение логарифмических уравнений и неравенств

3.1. Решение простейших логарифмических уравнений

Определение. Простейшим логарифмическим сравнением (уравнением или неравенством) будем называть сравнение вида $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Подобно решению показательных уравнений и неравенств, решение логарифмических уравнений и неравенств основывается на свойствах логарифмической функции.

Основной теоремой, применяемой при решении логарифмических уравнений и неравенств, является следующая теорема.

Теорема. Для любого $a > 0$, $a \neq 1$ сравнение

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-g(x)) \vee 0. \end{cases}$$

Это дает возможность решать логарифмические уравнения и неравенства единым методом рационализации.

Следствие. При всех допустимых значениях аргументов, т.е. при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, разность $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ имеет тот же знак, что и произведение $(a-1)(f(x)-g(x))$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Следствие. Простейшие логарифмические уравнения можно условно разделить на два типа:

$$1) \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$2) \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

При этом указанная равносильная система является избыточной, т.е. одно из неравенств, входящее в нее, может быть исключено.

Пример 1. Решите уравнение $\log_2(2x-1)=4$.

Решение.

$$\log_2(2x-1)=4 \Leftrightarrow 2x-1=2^4 \Leftrightarrow 2x=17 \Leftrightarrow x=8,5.$$

Ответ: 8,5.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x) &= -2 \Leftrightarrow 5-\log_3 x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5-\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Пример 3. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\ln(x+4) - \ln(x+3) = \ln 3$.

1) $(-3; 1)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(4; +\infty)$; 4) $(2; 4)$.

Решение. Применяя свойства логарифмов, не меняющих область определения входящих в уравнение выражений, получим:

$$\ln(x+4) - \ln(x+3) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x+4) = \ln 3(x+3).$$

Полученное уравнение будет равносильно системе, решив которую, получим решение уравнения.

$$\begin{aligned} \ln(x+4) = \ln 3(x+3) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0, \\ x+4 = 3(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0, \\ 2x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2,5. \end{aligned}$$

Число $-2,5 \in (-3; 1)$, поэтому номер правильного ответа — 1).

Ответ: 1).

3.2. Решение уравнений, содержащих несколько выражений, стоящих под знаком логарифма

Сформулируем последовательность преобразований уравнения, содержащего два и более логарифмических выражений.

1. Все выражения, стоящие под знаком логарифма, называются в системе как положительные.

2. Все логарифмы приводятся к одному основанию. При этом используется формула перехода к новому основанию.

3. Перед выражением, стоящим под знаком логарифма, желательно иметь, если это возможно, положительный коэффициент.

4. При вынесении множителем показателя степени выражения, стоящего под знаком логарифма, остающееся под логарифмом выражение должно быть положительно.

$$\log_a f^p(x) = p \log_a |f(x)|,$$

p — четное натуральное число, $f(x) \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. То же относится и к вынесению показателя степени выражения, стоящего в основании логарифма:

$$\log_{a^q(x)} f^p(x) = \frac{p}{q} \log_{|a(x)|} |f(x)|.$$

Пример 4. Решите уравнение $\log_5(-x) = \log_{\sqrt{5}}(x+2)$.

Решение. Используя алгоритм решения, получим:

$$\begin{aligned} \log_5(-x) = \log_{\sqrt{5}}(x+2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0, \\ x+2 > 0, \\ \log_5(-x) = 2\log_5(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0, \\ -x = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0, \\ x^2 + 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0, \\ x = -4, \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

Пример 5. Решите уравнение

$$2\log_2\left(1 - \frac{12}{2x+7}\right) = 3\log_2\left(2 + \frac{13}{x-3}\right) + 12.$$

Решение. Преобразуем выражения, стоящие под знаком логарифма.

$$\begin{aligned} 2\log_2\left(1 - \frac{12}{2x+7}\right) &= 3\log_2\left(2 + \frac{13}{x-3}\right) + 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\log_2\left(\frac{2x-6}{2x+7}\right) = 3\log_2\left(\frac{2x+7}{x-3}\right) + 12. \end{aligned}$$

Заметим далее, что $\frac{2x-6}{2x+7} = 2 \cdot \left(\frac{2x+7}{x-3}\right)^{-1}$, получим, что

$$\begin{aligned} 2\log_2\left(\frac{2x-6}{2x+7}\right) &= 3\log_2\left(\frac{2x+7}{x-3}\right) + 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\left(1 - \log_2\frac{2x+7}{x-3}\right) = 3\log_2\left(\frac{2x+7}{x-3}\right) + 12. \end{aligned}$$

Уравнение приводится к первому типу простейших уравнений и поэтому не требует указания ограничений.

$$\begin{aligned}
2\left(1 - \log_2 \frac{2x+7}{x-3}\right) &= 3\log_2 \left(\frac{2x+7}{x-3}\right) + 12 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 5\log_2 \frac{2x+7}{x-3} &= -10 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+7}{x-3} = -2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{2x+7}{x-3} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7x-31}{4(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{31}{7}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{31}{7}$.

Пример 6. Решите уравнение $\log_{36} \frac{x^2}{16} + \log_6(x+10) = 1$.

Решение. Вынесение четного показателя степени выражения, стоящего под знаком логарифма, приводит к появлению модуля этого выражения.

$$\begin{aligned}
\log_{36} \frac{x^2}{16} + \log_6(x+10) &= 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2} \log_6 \frac{|x|}{4} + \log_6(x+10) = 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0, \\ x+10 > 0, \\ \log_6 \frac{|x|(x+10)}{4} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x > -10, \\ \frac{|x|(x+10)}{4} = 6. \end{cases}
\end{aligned}$$

Разложим полученную систему в совокупность двух систем.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -10 < x < 0, \\ -x(x+10) = 24, \\ x > 0, \\ x(x+10) = 24 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -10 < x < 0, \\ x^2 + 10x + 24 = 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 10x - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -10 < x < 0, \\ \begin{cases} x = -4, \\ x = -6, \end{cases} \\ x > 0, \\ \begin{cases} x = -12, \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ x = -4, \\ x = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: -6 ; -4 ; 2 .

3.3. Решение уравнений, содержащих переменную в основании логарифма

Если основание логарифма есть функция $a = a(x)$, зависящая от переменной, то в систему ограничений добавляются еще два:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Пример 7. Решите уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x+1}{6}+2}(x-2)^2$.

Решение. Учитывая, что $\frac{x}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x+3}{6}$, получим, что

$$\begin{aligned} \log_{2x+3}(x-2)^2 &= \log_{\frac{x}{6} + \frac{1}{2}}(x-2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x+3 > 0, \\ \frac{x+3}{6} \neq 1, \\ (x-2)^2 > 0, \\ \frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2(2x+3)} = \frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2\left(\frac{x+3}{6}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq 2, \\ \log_2(x-2)^2 = 0, \\ \log_2(2x+3) = \log_2\left(\frac{x+3}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq 2, \\ |x-2| = 1, \\ 6(2x+3) = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{15}{11}. \end{cases} \end{aligned}$$

Примечание. Появление модуля в первом уравнении совокупности обусловлено тем, что выносился четный по-

казатель степени выражения, стоящего под знаком логарифма.

Ответ: $1; -\frac{15}{11}$.

Пример 8. Решите уравнение

$$\sqrt{33 + \frac{8}{\log_x 2}} = 3 \log_4 (4 \sqrt[3]{x^2}).$$

Решение. Указав сначала ограничения на переменную, входящую в уравнение, получим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{33 + \frac{8}{\log_x 2}} = 3 \log_4 (4 \sqrt[3]{x^2}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \sqrt{33 + 8 \log_2 x} = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \log_2 x \right). \end{cases} \end{aligned}$$

При преобразовании выражения, стоящего под корнем, мы использовали формулу перехода $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Исходное уравнение равносильно системе, содержащей два ограничения и простейшее иррациональное уравнение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \sqrt{33 + 8 \log_2 x} = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \log_2 x \right) \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \sqrt{33 + 8 \log_2 x} = 3 + \log_2 x \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > -3, \\ x \neq 1, \\ 33 + 8 \log_2 x = 9 + 6 \log_2 x + \log_2^2 x \end{cases} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > -3, \\ x \neq -1, \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > -3, \\ \log_2 x = 6, \\ \log_2 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 9. Решите уравнение

$$\log_{81}(15-7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1.$$

Решение. Используем формулу перехода к новому основанию, записанную следующим образом

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \quad a, b, c > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1.$$

Имеем:

$$\log_{81}(15-7x) \cdot \log_{3-x} 9 = 1 \Leftrightarrow 2\log_{3-x} 3 \cdot \frac{1}{4}\log_3(15-7x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{3-x}(15-7x) = 2.$$

Далее получим, что уравнение будет равносильно системе:

$$\log_{3-x}(15-7x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0, \\ 3-x \neq 1, \\ 15-7x = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ x = -3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: -3.

Пример 10. Решите уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4.$$

Решение. Заметим, что $9+12x+4x^2 = (2x+3)^2$, а

$$6x^2+23x+21 = (2x+3)(3x+7).$$

Выбирая в качестве основания одно из выражений, получим, что данное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ 3x+7 > 0, \\ 3x+7 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{3x+7}(2x+3) + \frac{\log_{3x+7}(2x+3)+1}{\log_{3x+7}(2x+3)} = 4 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ 2\log_{3x+7}^2(2x+3) - 3\log_{3x+7}(2x+3) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ \log_{3x+7}(2x+3) = 1, \\ \log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ 2x+3 = 3x+7, \\ 2x+3 = \sqrt{3x+7} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x = -4, \\ 4x^2 + 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x = -2, \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

3.4. Решение уравнений с применением различных свойств логарифмической функции

Пример 11. Решите уравнение

$$\log_2(1+x^2) = \log_2 x + 2x - x^2.$$

Решение.

$$\log_2(1+x^2) = \log_2 x + 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 \frac{1+x^2}{x} = 1 - (x-1)^2. \end{cases}$$

Применим неравенство Евклида: $\frac{1+x^2}{x} = x + \frac{1}{x}$, а так как $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geq 2$ и $\log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$. Заметим также, что равенство достигается при $x = 1$.

В свою очередь, правая часть уравнения $1 - (x-1)^2 \leq 1$, причем равенство достигается лишь при $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 12. Решите уравнение $\log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x}) = \frac{1}{2} \log_9(2x)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x}) &= \frac{1}{2} \log_9(2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x}) &= \frac{1}{4} \log_3(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x}) &= \log_3 \sqrt[4]{2x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что $x = \frac{1}{2}$ решением данного уравнения не является, поэтому уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\log_{12}(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x})}{\log_3 \sqrt[4]{2x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 12} \cdot \frac{\ln(\sqrt{2x} + \sqrt[4]{2x})}{\ln \sqrt[4]{2x}} = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{\ln(t^2 + t)}{\ln t} = \frac{\ln t + \ln(t+1)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(t+1)}{\ln t}.$$

Найдем ее производную.

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t+1} \ln t - \frac{1}{t} \ln(t+1)}{\ln^2 t} = \frac{t \ln t - (t+1) \ln(t+1)}{t(t+1) \ln^2 t}.$$

Так как функция $y = \ln t$, $t > 0$ монотонно возрастает, то числитель дроби отрицателен. Поэтому производная функции $f(t)$ отрицательна. Функция убывает при $t > 0$ и каждое свое значение принимает лишь при единственном значении аргумента.

Уравнение запишется в виде $\frac{1}{\log_3 12} f(\sqrt[4]{2x}) = 1$. Осталось заметить, что $\sqrt[4]{2x} = 3$. Откуда следует, что единственным решением уравнения является $x = \frac{81}{2}$.

Ответ: $\frac{81}{2}$.

Пример 13. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right).$$

Решение. Пусть y_0 — одно из значений данной функции. Тогда найдется такое положительное число a , что будет выполнено равенство

$$y_0 = \log_{0,5} \left(\frac{1}{a} \right), \quad a > 0.$$

Таким образом, достаточно найти все положительные значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{0,5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right) = \log_{0,5} \left(\frac{1}{a} \right)$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\log_{0,5} \left(\frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} \right) = \log_{0,5} \left(\frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{24}{11 + \sqrt{1 + |\ln x|}} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + |\ln x|} = 24a - 11.$$

Для того чтобы уравнение имело хотя бы одно решение, достаточно, чтобы его правая часть была числом, не меньшим единицы, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$24a - 11 \geq 1 \Leftrightarrow 24a \geq 12 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, любое значение исходной функции будет удовлетворять системе

$$\begin{cases} y_0 = \log_{0,5} \left(\frac{1}{a} \right), \\ a \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \log_2 a, \\ a \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{т.е.}$$

$$y_0 \geq \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow y_0 \geq -1.$$

Ответ: $[-1; +\infty)$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма $\log_a(2^x - 1)$ и $\log_a(2^x - 7)$ равна единице ровно при одном значении x .

Решение. Условие задачи сводится к отысканию всех значений параметра, при каждом из которых уравнение

$$\log_a(2^x - 1) + \log_a(2^x - 7) = 1$$

будет иметь единственное решение.

$$\log_a(2^x - 1) + \log_a(2^x - 7) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 2^x > 7, \\ 2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 7 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 2^x > 7, \\ (2^x - 4)^2 = a + 9. \end{cases}$$

Так как при допустимых значениях параметра правая часть уравнения, входящего в систему, положительна, то, разрешая его, получим

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 2^x > 7, \\ \begin{cases} 2^x = 4 + \sqrt{a + 9}, \\ 2^x = 4 - \sqrt{a + 9}. \end{cases} \end{cases}$$

Второе решение совокупности не удовлетворяет ограничениям системы. Следовательно, решением задачи будут служить те значения параметра, при которых $4 + \sqrt{a+9} > 7 \Leftrightarrow \sqrt{a+9} > 3$, т.е., с учетом ограничений, все допустимые значения параметра $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a > 1. \end{cases}$

Ответ: $(0;1) \cup (1;+\infty)$.

Пример 15. Решите уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{1}{6}(2x+3)}(x-2)^2.$$

Решение. Так как выражения, стоящие под знаками логарифма, одинаковы, то заменим уравнение следующей равносильной системой:

$$\begin{aligned} \log_{2x+3}(x-2)^2 &= \log_{\frac{1}{6}(2x+3)}(x-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ 2x+3 \neq 6, \\ (x-2)^2 > 0, \\ (x-2)^2 = 1, \\ \frac{1}{\log_{(x-2)^2}(2x+3)} = \frac{1}{\log_{(x-2)^2} \frac{1}{6}(2x+3)} \end{cases} \end{aligned}$$

Второе уравнение, очевидно, в условиях системы решений не имеет.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \log_{2x+3}(x-2)^2 &= \log_{\frac{1}{6}(2x+3)}(x-2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ 2x+3 \neq 6, \\ (x-2)^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 1; 3.

Упражнение 1.

1. Укажите множество, которому принадлежит решение уравнения

$$\log_2(x+1) = 1 + 2\log_2 x.$$

- 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 3) $(1; 2)$; 4) $[2; 3]$.

Ответ: 2).

2. Какому промежутку принадлежит корень уравнения

$$\log_5 x = \log_5 6 + \log_5 3?$$

- 1) $(2; 6)$; 2) $(6; 10)$; 3) $(13; 17)$; 4) $(17; 21)$.

Ответ: 4).

3. Какому промежутку принадлежит корень уравнения

$$\log_7 x + \log_7 6 = \log_7 18?$$

- 1) $(16; 20)$; 2) $(10; 14)$; 3) $(1; 5)$; 4) $(22; 26)$.

Ответ: 3).

4. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$\lg(x+7) - \lg(x+5) = 1.$$

- 1) $(-\infty; -7)$; 2) $(-7; -5)$; 3) $(-5; -3)$; 4) $(-3; -1)$.

Ответ: 3).

5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$1 - \log_5(x+3) = \log_5 2.$$

- 1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-4; 0)$; 3) $(0; 3)$; 4) $(3; +\infty)$.

Ответ: 3).

Упражнение 2.

1. Найдите произведение корней уравнения $\log_x 2 + \log_{4x} 4 = 1$.

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 6; 5) 8.

Ответ: 2).

2. Найдите отношение большего корня уравнения

$$\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \left(\frac{x^2}{8} \right) = 8 \text{ к меньшему корню.}$$

- 1) 4; 2) 8; 3) 32; 4) 128; 5) 256.

Ответ: 5).

3. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\log_4 \log_3 \log_2 (x^2 - 1) = 0.$$

1) 2; 2) 5; 3) 13; 4) 18; 5) 10.

Ответ: 4).

4. Найдите сумму корней уравнения

$$\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3 \lg 2 + \lg(x-2).$$

1) 0; 2) 2; 3) 8; 4) 11; 5) 7.

Ответ: 3).

Упражнение 3.

1. Решите уравнение $3 \log_6 \left(3 - \frac{3}{2x+3} \right) - 3 = 4 \log_6 \left(2 + \frac{1}{x+1} \right)$.

Ответ: -2.

2. Решите уравнение $4 \log_2 \left(2 + \frac{6}{2x-5} \right) - 8 = 3 \log_2 \left(2 - \frac{3}{x-1} \right)$.

Ответ: 4.

3. Решите уравнение $4 \log_6 \left(3 - \frac{3}{2x+3} \right) = 5 \log_6 \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) + 4$.

Ответ: -2.

4. Решите уравнение $\sqrt{105 - \frac{8}{\log_x 2}} = 3 \log_2 (0,5x\sqrt[3]{x})$.

Ответ: 8.

5. Решите уравнение $\sqrt{9 - \frac{24}{\log_x 4}} = 5 \log_4 \left(2^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2}{x} \right)^{0,4} \right)$.

Ответ: $\frac{1}{64}$.

§ 4. Решение логарифмических неравенств

4.1. Решение простейших логарифмических неравенств

Напомним формулировку основной теоремы.

Теорема. Для любого действительного числа $a > 0$, $a \neq 1$ сравнение

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(5x-1) \geq -2$.

Решение. Применим теорему.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(5x-1) &\geq -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 > 0, \\ \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(5x-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ 5x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq 1. \end{aligned}$$

Ответ: $(0, 2; 1]$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_2(x^2-3x) \geq 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_2(x^2-3x) &\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x > 0, \\ (2-1)(x^2-3x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2-3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

При решении мы воспользовались доказанной теоремой и тем, что если при искомым значениях переменной выражение не меньше 4, то оно больше 0.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) - 2$.

Решение. Так как в неравенство входят два выражения, стоящие под знаками логарифма, то применим тот же алгоритм, что и при решении подобных уравнений.

$$\begin{aligned} \log_2 x &< \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3x-1 > 0, \\ 2 + \log_2 x + \log_2(3x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ \log_2(4x \cdot (3x-1)) < \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ 4x(3x-1) - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ 12x^2 - 4x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$

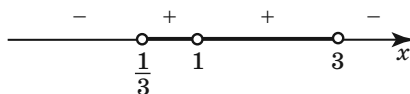
Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

По следствию из теоремы при всех допустимых значениях переменных разность $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ имеет тот же знак, что и $(a-1)(f(x)-g(x))$. Данное следствие помогает очень быстро рационализировать логарифмические выражения, входящие в неравенство.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{1}{\log_3 x + 1} + \frac{1}{1 - \log_3 x} > 2$.

Решение. Запишем неравенство в каноническом виде и применим следствие из основной теоремы.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_3 x + 1} + \frac{1}{1 - \log_3 x} > 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1 - \log_3 x + 1 + \log_3 x - 2(1 - \log_3^2 x)}{(1 + \log_3 x)(1 - \log_3 x)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2\log_3^2 x}{(1 + \log_3 x)(1 - \log_3 x)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(\log_3 x - \log_3 1)^2}{(\log_3 3 - \log_3 x)\left(\log_3 x - \log_3 \frac{1}{3}\right)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(3-x)\left(x-\frac{1}{3}\right)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ 1 < x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3)$.

Пример 5. Решите неравенство $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(5-|x|) < 1$.

Решение. Типичный пример так называемой матрешки, т.е. когда выражение стоит сразу под несколькими знаками логарифмов. В этом случае система содержит ограничения на каждое выражение, стоящее под каждым знаком логарифма.

$$\begin{aligned} \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(5-|x|) < 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 5-|x| > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(5-|x|) > 0, \\ \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}}(5-|x|) \right) < \log_3 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5-|x| > 0, \\ \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (5-|x|-1) > 0, \\ (3-1) \left(\log_{\frac{1}{2}}(5-|x|-3) \right) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При преобразовании подобных систем на том или ином шаге некоторые неравенства становятся избыточными и могут быть исключены.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 < |x| < 5, \\ \log_{\frac{1}{2}}(5-|x|) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < |x| < 5, \\ \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(5-|x| - \frac{1}{8} \right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < |x| < 5, \\ |x| < 4\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 4 < |x| < 4\frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\frac{7}{8} < x < -4, \\ 4 < x < 4\frac{7}{8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-4\frac{7}{8}; -4\right) \cup \left(4; 4\frac{7}{8}\right)$.

4.2. Решение логарифмических неравенств с переменным основанием

При решении подобного рода неравенств надо учитывать, что основанием логарифма может быть только выражение, принимающее положительные значения, не равные единице.

Поэтому основная теорема получает дополнительные ограничения.

$$\log_{a(x)} f(x) \vee \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0. \end{cases}$$

Пример 6. Решите неравенство $\log_{x-2}(x+2) < 1$.

Решение. Так как основание логарифма — переменное выражение, то получим расширенную систему.

$$\log_{x-2}(x+2) < 1 \Leftrightarrow \log_{x-2}(x+2) < \log_{x-2}(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1, \\ (x-2-1)(x+2-x+2) < 0. \end{cases}$$

При выполнении условий существования основания логарифма, выражение, стоящее под знаком логарифма, принимает только положительные значения.

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Ответ: $(2; 3)$.

Пример 7. Решите неравенство $\log_{2x-x^2} \left(x - \frac{3}{2} \right) > 0$.

Решение. Запишем систему, равносильную исходному неравенству.

$$\log_{2x-x^2} \left(x - \frac{3}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ 2x - x^2 \neq 1, \\ x - \frac{3}{2} > 0, \\ (2x - x^2 - 1) \left(x - \frac{3}{2} - 1 \right) > 0. \end{cases}$$

Первый множитель последнего неравенства принимает только отрицательные значения, поэтому, сократив на него, получим

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x > \frac{3}{2}, \\ \left(x - \frac{5}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2, \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 2.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Пример 8. Найдите значения параметра, при каждом из которых сумма выражений $\log_a(\sqrt{1-x^2}+1)$ и $\log_a(\sqrt{1-x^2}+7)$ будет меньше единицы при всех допустимых значениях переменной x .

Решение. Составим неравенство, которое должно быть верным при всех допустимых значениях переменной x :

$$\begin{aligned} & \log_a(\sqrt{1-x^2}+1) + \log_a(\sqrt{1-x^2}+7) < 1. \\ & \log_a(\sqrt{1-x^2}+1) + \log_a(\sqrt{1-x^2}+7) < 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ |x| \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \log_a(\sqrt{1-x^2}+1)(\sqrt{1-x^2}+7) < \log_a 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ |x| \leq 1, \\ (a-1)(\sqrt{1-x^2})^2 + 8\sqrt{1-x^2} + 7 - a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену переменной. Так как $|x| \leq 1$, то положим $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Получим систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ (a-1)(\cos^2 t + 8 \cos t + 7 - a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ (\cos t + 4)^2 < a + 9, \\ 0 < a < 1, \\ (\cos t + 4)^2 > a + 9. \end{cases}$$

Очевидно, что при любом значении $a \in (0; 1)$ неравенство второй системы не может быть верным при любом значении переменной t , так как $9 < (\cos t + 4)^2 < 25$.

Следовательно, остаются те значения параметра, при которых неравенство первой системы верно.

Очевидно, что это происходит при любом $a \geq 16$.

Ответ: $[16; +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\log_{2x}(5x-1) \cdot \log_{3x}(7x-1)}{\log_2(15x^2+2) - \log_2 11x} \geq 0.$$

Решение. Воспользуемся основной теоремой. Записав условия существования каждого из сомножителей, входящих в неравенство, заменим их рациональными выражениями, имеющими те же интервалы знакопостоянства.

$$\frac{\log_{2x}(5x-1) \cdot \log_{3x}(7x-1)}{\log_2(15x^2+2) - \log_2 11x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ \frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x} \geq 0. \end{cases}$$

Раскладывая на множители квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, получим, что данная система равносильна следующей системе:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{7}, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Пример 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $1 + \log_2 \left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) \geq \log_2(ax^2 + a)$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Запишем систему, равносильную данному неравенству.

$$\begin{aligned} 1 + \log_2 \left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) &\geq \log_2(ax^2 + a) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4x^2 + 4x + 7 > ax^2 + a. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена, стоящего под знаком логарифма в левой части неравенства, отрицателен, а его старший коэффициент положителен, то этот трехчлен принимает только положительные значения. Выражение $ax^2 + a = a(x^2 + 1)$, поэтому для его положительности достаточно указать, что $a > 0$.

Таким образом, необходимо найти положительные значения параметра, при каждом из которых неравенство, входящее в систему, имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a > 0, \\ 4x^2 + 4x + 7 > ax^2 + a \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ (4-a)x^2 + 4x + 7 - a > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая.

1. Если $0 < a < 4$, то неравенство системы всегда имеет бесконечное число решений, что следует из того, что ветви графика $y = (4-a)x^2 + 4x + 7 - a$ направлены вверх.

2. Если $a = 0$, то получим неравенство $4x + 7 > 0$, которое также имеет бесконечное число решений.

3. Если $a > 4$, то первый коэффициент квадратного трехчлена $y = (4-a)x^2 + 4x + 7 - a$ становится отрицательным, и для того чтобы неравенство имело бы хотя бы одно решение, необходимо, чтобы дискриминант квадратного трехчлена принимал неотрицательные значения.

Таким образом, искомые значения параметра задаются системой:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a > 4, \\ 4 - (4-a)(7-a) \geq 0. \end{cases} \\ & \begin{cases} a > 4, \\ 4 - (4-a)(7-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ a^2 - 11a + 24 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ 3 \leq a \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < a \leq 8. \end{aligned}$$

Объединяя найденные значения параметра, получим, что условию задачи удовлетворяет любое значение $a \in (0; 8]$.

Ответ: $(0; 8]$.

Упражнение 1.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(6 - 0,3x) > -1$.

1) $(-10; +\infty)$; 2) $(-\infty; -10)$; 3) $(-10; -20)$; 4) $(0, 1; 20)$.

2. Решите неравенство $\log_{0,2}(1 - 2,4x) > -2$.

1) $(-10; +\infty)$; 2) $(-\infty; -10)$; 3) $\left(-0,1; \frac{5}{12}\right)$; 4) $\left(-10; \frac{5}{12}\right)$.

3. Решите неравенство $\log_3 \frac{12x-5}{8-12x} + \log_{\frac{1}{3}} x \leq 0$.

1) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{12}\right)$; 3) $\left[\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

4. Решите неравенство $\log_3(x^2 + 6x + 8) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2) < \log_3 7$.

1) $(-2; 3)$; 2) $[-2; 3)$; 3) $(-2; 3]$; 4) $[-2; 3]$.

5. Решите неравенство $\log_3(3-0,2x) < 2$.

1) $(-30; +\infty)$; 2) $(-30; 15)$; 3) $(-\infty; 15)$; 4) $(-\infty; -30)$.

Верные ответы: 1) 3; 2) 4; 3) 3; 4) 1; 5) 2.

Упражнение 2.

1. Решите неравенство $\frac{(\log_2 x - 1)(x^2 - 5x + 6)}{(2x + 1)^2} \geq 0$.

Ответ: $\{2\} \cup (3; +\infty)$.

2. Решите неравенство $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_5 x + \log_5 45 \cdot \log_3 x \geq 1 + 2\log_5 3$.

Ответ: $[3; 45]$.

3. Решите неравенство: $\log_{x+1} \left(\frac{3}{6-2x} \right) \geq -2$.

Ответ: $(-1; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; 1 \right)$.

4. Найдите решение неравенства

$$\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2 2-5x} \leq \frac{1}{\log_2 (6x^2 - 6x + 1)}$$

$$\log_{2-5x} 3 + \frac{1}{\log_2 2-5x} \leq \frac{1}{\log_2 (6x^2 - 6x + 1)}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0 \right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right]$.

5. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-3)\log_3(2x+5)-(x+1)}{(x-2)(x-3)} \geq$$

$$\geq |\log_3(2x+5)| + \left| \frac{(x+1)}{(x-2)(x-3)} \right|.$$

Ответ: $[-2; -1] \cup (2; 3)$.

Упражнение 3.

1. При каких значениях параметра a неравенство

$$1 + \log_2 \left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2} \right) \geq \log_2(ax^2 + a)$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $(0; 8]$.

2. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4) > 1$$

верно при всех значениях переменной x ?

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$

3. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_a 5 + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{ax^2 + 2x + 6} + 1\right) \cdot \log_a(ax^2 + 2x + 7) \leq 0$$

имеет одно решение?

Ответ: 0,5.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left| \log_4 \frac{x}{16} - \frac{10a+7b-11}{5} x^2 - 49b^2 + 21b - 1 \right| \leq \\ \leq \log_4 \frac{16}{x} - \frac{10a+7b-11}{5} x^2 + (14b-2)x - 49b^2 - 35b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\left[-\infty; \frac{3}{2}\right].$

5. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z , удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \\ + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17.$$

Ответ: (5; 4; 4).

ГЛАВА 6

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения

1. Обычно к простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Решение таких уравнений удобно оформить в виде таблицы.

Значение параметра	Уравнение	Решение уравнения
$ a > 1$	$\sin x = a$	\emptyset
$ a \leq 1$	$\sin x = a$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$
$ a > 1$	$\cos x = a$	\emptyset
$ a \leq 1$	$\cos x = a$	$\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, \\ x = -\arccos a + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
$a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
$a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Запись решения первых двух уравнений в виде совокупности более предпочтительна в тех случаях, когда в уравнении есть какие-либо ограничения, дополнительные условия, что позволяет в случае сложных уравнений произвести отбор

решений, удовлетворяющих им. В других случаях, когда не требуется проводить дальнейшее исследование полученного решения, можно использовать объединенные формулы решения уравнений.

Следует помнить, что для отдельных значений параметра a , таких как 0 или ± 1 , простейшие уравнения имеют более компактные формулы решений.

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Наиболее часто встречающиеся неотрицательные значения параметра a , такие, что $0 \leq a \leq 1$, и соответствующие им значения углов, удобно свести в таблицу.

Значение параметра	$a = 0$	$a = \frac{1}{2}$	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$a = 1$
$\arcsin a$	0	$-$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Для запоминания значений, входящих в эту таблицу, существует простой метод.

Пишем подряд числа: $0, 1, 2, 3, 4$.

Извлекаем корень квадратный: $0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$.

Делим результат пополам: $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$.

Для отрицательных значений параметра a , таких, что $-1 \leq a < 0$, используются тождества

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad \text{и} \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Значение параметра	$a = 0$	$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$a = 1$	$a = \sqrt{3}$
\arctga	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcc}tga$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Для отрицательных значений параметра a используются тождества $\arctg(-a) = -\arctga$ и $\operatorname{arcc}tga(-a) = \pi - \operatorname{arcc}tga$.

2. К простейшим тригонометрическим уравнениям будем относить уравнения вида $\sin^2 x = a^2$, $\cos^2 x = a^2$, $\operatorname{tg}^2 x = a^2$, $\operatorname{ctg}^2 x = a^2$.

Формулы решения этих уравнений получаются из общих формул решения и могут быть записаны в виде:

$$\sin^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm \arcsin a + \pi k,$$

$$\cos^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } |a| \leq 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm \arctga + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arcc}tga + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. К простейшим тригонометрическим уравнениям можно также отнести уравнения вида $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$.

Применяя формулу преобразования разности в произведение, получим, например, что:

$$1. \sin x = \sin y \Leftrightarrow \sin x - \sin y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} = 0, \\ \cos \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 2\pi k, \\ x+y = \pi + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично 1. получим:

$$2. \cos x = \cos y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2\pi k, \\ x-y = 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{tg} x = \operatorname{tgy} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctgy} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pi k, \\ x \neq \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что из полученных формул немедленно следуют решения других простейших уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin x = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Напомним, что при решении задач группы А в листе ответов указывается не сам ответ, а номер правильного ответа.

Пример 2. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение $\cos x = 1$.

Решение. Применяя формулу, имеем:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -1$. Укажите наибольший отрицательный корень (в градусах).

Решение.

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отбирая наибольшее отрицательное решение, получим, что $x = -\frac{\pi}{4}$, или $x = -45^\circ$.

Ответ: -45° .

Пример 5. Решите уравнение $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$.

Решение. Применим формулу решения подобных уравнений. Получим:

$$2x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решите уравнение $\sin 3x = \sin x$. Укажите наименьшее положительное решение (в градусах).

Решение. Применим сокращенную формулу решения подобных уравнений:

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x = 2\pi n, \\ 3x + x = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отбирая решение, получим, что $x = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Пример 7. Решите уравнение $\cos 2x = \sin x$. Укажите наибольшее отрицательное решение (в градусах).

Решение. Хотя уравнение представляет равенство разноименных тригонометрических функций, применением формулы приведения оно без труда приводится к виду, допускающему быстрое решение:

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin x &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} - x = 2\pi k, \\ 2x - \frac{\pi}{2} + x = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Наибольшее отрицательное решение $x = -90^\circ$.

Ответ: -90° .

Упражнение 1.

1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. Решите уравнение $\cos x - \frac{1}{2} = 0$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5. Решите уравнение $\sin 2x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

Ответы: 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 2; 5) 2.

Упражнение 2.

1. Укажите наименьшее решение уравнения $\sin(9x - 45^\circ) \sin 2x = 0$, удовлетворяющее условию $0 < x < 135^\circ$.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) 5° ; | 3) 3° ; |
| 2) 25° ; | 4) 15° . |

2. Укажите наибольшее решение уравнения $\cos(6x - 60^\circ) \cos 2x = 0$, удовлетворяющее условию $0 < x < 60^\circ$.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| 1) 45° ; | 3) 55° ; |
| 2) 50° ; | 4) $57,5^\circ$. |

3. Укажите сумму решений уравнения $\operatorname{tg} x \cos(3x + 60^\circ) = 0$, удовлетворяющих условию $0 < x < 90^\circ$.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) 10° ; | 3) 80° ; |
| 2) 40° ; | 4) 90° . |

4. Укажите разность между наибольшим и наименьшим решениями уравнения $\sin 3x \cos(x - 45^\circ) = 0$, удовлетворяющими условию $90^\circ < x < 180^\circ$.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) 10° ; | 3) 25° ; |
| 2) 30° ; | 4) 15° . |

5. Укажите решение уравнения $\operatorname{tg}(2x - 60^\circ) \cos \frac{x}{2} = 0$, удовлетворяющее условию $270^\circ < x < 360^\circ$.

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) 300° ; | 3) 330° ; |
| 2) 320° ; | 4) $357,5^\circ$. |

Ответы: 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 4; 5) 1.

§ 2. Приемы решения тригонометрических уравнений

Следует заметить, что разделение тригонометрических уравнений на классы, решаемые тем или иным приемом, носит абсолютно приблизительный и иллюстративный характер. Обычно решение тригонометрических уравнений состоит в последовательном применении приемов, сводящих их к системам или совокупностям простейших уравнений. Так как выбор метода решения неоднозначен, то и запись полученного решения может быть различна, хотя и будет выражать одни и те же решения в их различных комбинациях.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий вышесказанное.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

1-й способ. Деля обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2-й способ. Опять разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$, но применим другую формулу преобразования.

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

3-й способ. Возведем обе части уравнения в квадрат. Заметим, что такое преобразование не является равносильным, и, следовательно, после получения решения должна быть проведена проверка.

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= 1; \\ \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x &= 1;\end{aligned}$$

$$2\sin x \cos x = 0;$$

$$\sin 2x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выполняя проверку, получим, что решениями уравнения являются $2\pi k$; — , $k \in \mathbb{Z}$.

4-й способ. Применяя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, запишем решение данного уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} &= \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi k, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

5-й способ. Выполним основную тригонометрическую подстановку, т.е. выразим входящие в уравнение функции через тангенс половинного аргумента.

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 1 \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi k, \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате применения различных способов преобразования левой части уравнения решения пред-

ставлены тремя способами записи: либо как $2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо как $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо как $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Однако, конечно, во всех случаях решением уравнения являются одни и те же значения аргумента.

2.1. Решение уравнений методом разложения на множители

Простейшим приемом, позволяющим упростить тригонометрическое уравнение и свести его к решению простейших, является метод разложения на множители.

Пример 2. Решите уравнение $\cos^2 5x - \cos 5x = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \cos^2 5x - \cos 5x = 0 &\Leftrightarrow \cos 5x (2 \cos 5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 5x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} k, \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} k, \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5} n, k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение $1 + \sin x \cdot \cos 2x = \sin x + \cos 2x$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1 + \sin x \cdot \cos 2x &= \sin x + \cos 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos 2x - \sin x(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $2 \cos x \cos 2x = \cos x$.

Решение.

$$2 \cos x \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos x (2 \cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 1. Решите уравнения.

1. $\operatorname{tg} 5x = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} 5x$.
2. $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 \cos^2 x$.
3. $\sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0$.
4. $\sin x \cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$.
5. $\sin 4x = 2 \cos^2 x - 1$.

Ответы:

- 1) $\frac{\pi}{5}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) πk ; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 3) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; $\frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 5) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$; $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

2.2. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к решению вспомогательного целого алгебраического уравнения

Наиболее часто решение тригонометрического уравнения включает решение промежуточного квадратного уравнения, к которому исходное уравнение приводится какой-либо заменой. В этом случае после получения корней вспомогательного уравнения необходимо не забывать о возможной ограниченности области значений тригонометрической функции.

Пример 5. Решите уравнение $3\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 4 = 0$.

Решение: Сделав замену $\operatorname{ctg} x = y$, приходим к вспомогательному квадратному уравнению $3y^2 + y - 4 = 0$.

$$\text{Имеем: } 3y^2 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1+7}{6}, \\ y = \frac{-1-7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ y = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 3\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 4 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = 1, \\ \operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pi - \operatorname{arccctg}\frac{4}{3} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\operatorname{arccctg}\frac{4}{3} + \pi m, \end{cases} \quad k, n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пример 6. Решите уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного аргумента, сводим данное уравнение к квадратному уравнению относительно переменной $\sin x$.

$$\begin{aligned} \cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ решений не имеет, так как $|\sin x| \leq 1$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 x - 37 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$.

Решение. Используя формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, сводим уравнение к следующему:

$$\operatorname{tg}^3 x - 37 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 36 = 0.$$

Решение вспомогательного уравнения.

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 - 36 &= 0 \Leftrightarrow y^3 - 27 + y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-3)(y^2 + 3y + 9) + (y-3)(y+3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-3)(y^2 + 3y + 12) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y-3=0, \\ y^2 + 3y + 12=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=3. \end{aligned}$$

Дискриминант уравнения $y^2 + 3y + 12 = 0$ отрицателен, поэтому кубическое уравнение имеет единственное решение. Таким образом, получим

$$\operatorname{tg} x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 2. Решите уравнения.

1. $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$.

2. $5\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

3. $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$.

4. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

5. $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Ответы:

1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2) $2\pi k; \pm \arccos \left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

3) $\pi + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4) $2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

5) $\pi + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 3. Решите уравнения.

1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.
2. $10\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$.
3. $2\sin^2 x - \sin x = 0$.
4. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.
5. $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

Ответы:

- 1) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 3) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 4. Решите уравнения.

1. $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$.
2. $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$.
3. $\cos^2 x - 4\cos x - 5 = 0$.
4. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
5. $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Ответы:

- 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 3) $\pi + 2\pi k; \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 5) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 5. Решите уравнения.

1. $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$.
2. $10\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x = 1$.
3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x + \cos 2x + 1 = 0$.

4. $4\sin^3 x + \cos^2 x + 3\sin x = 2,75$.
5. $\sin 3x - 10\cos^2 x - 5\sin x + 6 = 0$.
6. $2\cos 3x = 3\sin^2 x + 2\cos x$.
7. $3\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0$.
8. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.
9. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$.
10. $8\cos^4 x - 5\cos 4x = 3$.

Ответы:

- 1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 3) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $(-1)^{-+}, k \in \mathbb{Z}$.
- 5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 6) $\pi k; \pm \arccos\left(-\frac{3}{8}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 7) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 8) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 9) $\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 10) $\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 6. Решите уравнения.

1. $8\cos^4 x - 11\cos 2x + 1 = 0$.
2. $4\sin^4 x + 7\cos 2x - 1 = 0$.
3. $\cos 4x - 2\cos^2 x - 1 = 0$.
4. $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 = 0$.
5. $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$.

Ответы:

- 1) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$.

$$3) \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.3. Решение уравнений с применением формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность

Пример 8. Решите уравнение $2 \cos x \sin 3x = \sin 4x + 1$.

Решение. Применяем формулу преобразования произведения тригонометрических функций в разность.

$$2 \cos x \sin 3x = \sin 4x + 1 \Leftrightarrow \sin 4x + \sin 2x = \sin 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 9. Решите уравнение $1 + 2 \cos 3x \cos x - \cos 2x = 0$.

Решение. Применяя формулу преобразования произведения косинусов двух аргументов в сумму, имеем:

$$1 + 2 \cos 3x \cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2.4. Решение уравнений с применением формул преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

Пример 10. Решите уравнение $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Решение. Применим формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 11. Решите уравнение $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Решение. Применим формулу преобразования разности одноположенных тригонометрических функций в произведение.

$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 2x = 1 + \cos 8x \Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(\cos 4x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cos 4x \sin 3x \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0, \\ \sin 3x = 0, \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 3x = \pi n, \\ x = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, \\ x = \frac{\pi}{3}n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, \frac{\pi}{3}n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Замечание. Уравнения, решаемые при помощи формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, и формул, выполняющих обратное преобразование, обычно трудно отделить друг от друга, как это видно из выше разобранных примеров.

Упражнение 7. Решите уравнения.

1. $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0$.
2. $\cos 2x + \sin 3x + \sin 5x = 4 \cos x - 1$.
3. $2 \cos 8x + 4 \sin 3x \sin 5x = 1$.
4. $\sin 3x - 4 \sin x \cos x = 0$.
5. $\sin x + \cos x - \sin 2x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

Ответы:

1) $\pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

3) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

4) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

5) $2\pi k; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$

2.5. Введение дополнительного аргумента

Основной формулой, используемой при решении уравнений данным приемом, является формула преобразования выражения

$$a \sin x \pm b \cos x.$$

Это выражение приводится к виду:

$$a \sin x \pm b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

где $\varphi = \arctg \frac{b}{a}.$

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2.$

Решение.

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 13. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}.$

Решение.

$$\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 14. Решите уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения.

$$\begin{aligned} 3\sin x - 2\cos x = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x \right) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{13}}, \text{ где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Решая полученное уравнение, имеем:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Замечание. Следует заметить, что $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$, и поэтому решение может быть записано в виде $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 15. Решите уравнение $\cos x + \cos 4x \sin x = \sqrt{2}$.

Решение. Применение формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность в этом случае к успеху не приводит. Как ни странно, поможет при решении введение параметра! Действительно, обозначим $\cos 4x = a$, где значения параметра будут изменяться в пределах $-1 \leq a \leq 1$. Получим уравнение

$$\cos x + a \sin x = \sqrt{2}.$$

«Забыв», что параметр зависит от той же переменной, что и входящие в уравнения функции, преобразуем уравнение.

$$\begin{aligned} \cos x + a \sin x = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{1+a^2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cos x + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \sin x \right) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Продолжая далее, введем дополнительный аргумент

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

После этого уравнение запишется в виде

$$\sqrt{1+a^2} \cos(x - \varphi) = \sqrt{2}.$$

В некоторых случаях число, стоящее в правой части уравнения, может подсказать дальнейший путь решения.

Имеем: $1 \leq \sqrt{1+a^2} \leq \sqrt{2}$, а $-1 \leq \cos(x-\varphi) \leq 1$.

Следовательно, $\sqrt{1+a^2} \cos(x-\varphi) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1, \\ \cos(x-\varphi) = 1. \end{cases}$

Если $a=1$, т.е. $\cos 4x=1$, то уравнение будет равносильно системе $\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$. Если $a=-1$, т.е. $\cos 4x=-1$, то уравнение будет равносильно другой системе $\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$

Рассмотрим первый случай.

$$\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Эта система решений не имеет, так как решение второго уравнения не является решением первого.

Рассмотрим второй случай.

$$\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \pi + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Проверкой убеждаемся, что каждое решение второго уравнения является решением первого уравнения системы. Поэтому общим решением системы, а вместе с ней и уравнения, является $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотренное уравнение трудно отождествить с уравнением, решаемым приемом, вынесенным в заголовок пункта. Скорее это уравнение можно отнести к уравнениям, решаемым комбинацией различных приемов, которые будут рассмотрены ниже.

Упражнение 8. Решите уравнения.

1. $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1$.

2. $\cos x - \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

3. $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3}$.

4. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

5. $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответы:

1) $-\frac{\pi}{18} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2) $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

3) $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

5) $-\frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 9. Решите уравнения.

1. $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$.

2. $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$.

3. $3(\sin x + \cos x) = 2 \sin 2x$.

4. $\sin x + \cos x - \sin 2x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

5. $\sin 2x - 5 \sin x + 5 \cos x + 5 = 0$.

Ответы:

1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

3) $-\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4) $2\pi k; \quad \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; \quad (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

5) $\pi + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2.6. Однородные уравнения

Понятие однородного многочлена уже встречалось ранее. Тем не менее напомним определение.

Определение. Многочлен $P(x, y)$ называется однородным многочленом степени n , если $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$.

Однородным тригонометрическим многочленом степени n назовем однородный многочлен $P_n(\sin x, \cos x)$.

Уравнения вида $P_n(\sin x, \cos x) = 0$, где P_n — однородный многочлен степени n , называются однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делением на старшую степень одной из тригонометрических функций оно сводится к виду $P_n(\operatorname{tg} x) = 0$.

Пример 16. Решите уравнение $\sin 4x + \cos 4x = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin 4x = -\cos 4x$. Значения x , при которых хотя бы одна из функций обращается в ноль, не является решением данного уравнения.

Действительно, если, например, $\cos 4x = 0$, то из уравнения получим, что и $\sin 4x = 0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества.

Таким образом, разделив обе части уравнения на $\cos 4x$, получим уравнение, равносильное исходному уравнению.

$$\begin{aligned}\sin 4x = -\cos 4x &\Leftrightarrow \operatorname{tg} 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Пример 17. Решите уравнение $3\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = 0$.

Решение. Используя формулы двойного аргумента, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned}3\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x &= 0.\end{aligned}$$

Левая часть уравнения — однородный многочлен степени 2. Так как $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ не являются корнями уравнения (по причинам, изложенным выше), то, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение, равносильное исходному уравнению.

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x &= \\ = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -3, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 18. Решите уравнение $\sin^3 x + 37 \cos^3 x - \cos x = 0$.

Решение. Строго говоря, данное уравнение не является однородным уравнением. Но алгоритм решения таких уравнений подобен решению собственно однородных уравнений. Дело в том, что если в уравнении все слагаемые, кроме некоторых, есть одночлены одной степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, а оставшиеся содержат степени одной из функций, показатель которой отличается на четное число, то делением на старшую степень $\sin x$ или $\cos x$ уравнение сводится к уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. При этом используем то, что

$$\frac{1}{\cos^{2k} x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^k \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sin^{2k} x} = (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^k.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + 37 \cos^3 x - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + 37 - (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + 36 = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}^3 x + 27) - (\operatorname{tg}^2 x - 9) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 12) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 12$ отрицателен, поэтому уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 12 = 0$ решений не имеет.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 10. Решите уравнения.

- $3 \sin^2 x = \cos 2x + 4 \sin 2x$.
- $2 \cos 2x + 5 \cos^2 x = 8 \sin 2x - 6$.
- $2 \cos 2x + 1 = 5 \sin^2 x + 6 \cos x$.
- $2 \sin^2 x - \sin 2x = 2$.
- $\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1$.

Ответы:

$$1) \operatorname{arctg} \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; \quad -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) \operatorname{arctg}(-1 + \sqrt{3}) + \pi k; \quad -\operatorname{arctg}(-1 + \sqrt{3}) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.7. Применение формул понижения степени

Формулы понижения степени дают прекрасную возможность уменьшать степень тригонометрического уравнения, одновременно увеличивая кратность аргумента соответствующей тригонометрической функции.

Пример 19. Решите уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$$

Решение. Применим формулу понижения степени, заменив квадраты синусов соответствующих аргументов косинусами удвоенных. Для удобства предварительно умножим обе части уравнения на 2 и, перенеся слагаемые в одну сторону, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 2x + 1 - 2\sin^2 3x + 1 - \\ - 2\sin^2 4x + 1 - 2\sin^2 5x = 0. \end{aligned}$$

Теперь применим формулы понижения степени.

$$\text{Получим } \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0.$$

Группируя слагаемые и применяя формулы преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение, получим

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 6x \cos 2x + 2\cos 8x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 8x + \cos 6x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x \cos 2x \cos 7x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \cos 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}l, \end{cases} \quad k, n, l \in \mathbb{Z}.$$

Следует заметить, что первая серия решений является подмножеством третьей серии, в то время как вторая и третья серии общих решений не имеют. Поэтому решение уравнения может быть представлено в виде совокупности, содержащей только две последние серии.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}l, \end{cases} \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

Объединение серий решений тригонометрического уравнения является хорошим тоном, показывающим свободное владение учащимся данным вопросом, но отнюдь не является всегда обязательным элементом решения. Тем более что такое объединение не всегда возможно.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}l$, $n, l \in \mathbb{Z}$.

Понижение степени слагаемых, входящих в тригонометрическое уравнение, часто позволяет представить это уравнение в виде уравнения относительно одной тригонометрической функции.

Пример 20. Решите уравнение $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$.

Решение. Понижая степень каждого тригонометрического слагаемого, получим

$$\begin{aligned} 4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 &\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + 6(1 + \cos 2x) = 7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, применением формулы понижения степени уравнение было приведено к простейшему уравнению.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 21. Решите уравнение

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9}{8}.$$

Решение. Понижая степень каждого тригонометрического слагаемого, получим:

$$\begin{aligned} & \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + \left(1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 + \left(1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Далее осталось раскрыть скобки, привести подобные члены и применить основное тригонометрическое тождество.

$$\begin{aligned} & 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x + \\ & + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2\cos 2x + \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\cos 2x + 1 - \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \cos^2 2x + 2\cos 2x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}, \\ \cos 2x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{6} - 2}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{\sqrt{6} - 2}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pm \arccos \frac{\sqrt{6} - 2}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 11. Решите уравнения.

- $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$
- $1 - \sin^4 x - \frac{5}{3} \cos^4 x = 0.$
- $4\sin^2 2x + \sin^2 4x = 2.$

Ответы:

- $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$3) (-1)^k \arcsin(\sqrt{3}-1) + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.8. Уравнения, содержащие комбинацию $\sin^{2k}x \pm \cos^{2k}x$

Пример 22. Решите уравнение $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$.

Решение.

Разность четвертых степеней — самая простая из рассматриваемых комбинаций. Раскладывая соответствующую разность по формуле разности квадратов двух чисел и применяя основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \sin^4 x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Следует отметить, что основной идеей решения уравнений, содержащих суммы степеней, является выделение степени суммы квадратов синуса и косинуса соответствующего аргумента.

Пример 23. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Решение. Используем представление

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \frac{5}{8} \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Используя формулу решения простейшего уравнения $\sin^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm \arcsin a + \pi k$, получим, что

$$\begin{aligned}\sin^2 2x = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow 2x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Если уравнение, содержащее данную комбинацию, имеет вид $\sin^{2k} x \pm \cos^{2k} x = c, \quad c \in \mathbb{R}$, то выделение степени основного тригонометрического тождества не является единственным методом решения.

В этом случае уравнение может рассматриваться как однородное.

Пример 24. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^6 x + 1 = \frac{7}{16(\cos^2 x)^3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^6 x + 1 = \frac{7}{16}(1 + \operatorname{tg}^2 x)^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16(\operatorname{tg}^6 x + 1) = 7(\operatorname{tg}^6 x + 3\operatorname{tg}^4 x + 3\operatorname{tg}^2 x + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9\operatorname{tg}^6 x - 21\operatorname{tg}^4 x - 21\operatorname{tg}^2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^6 x - 7\operatorname{tg}^4 x - 7\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.\end{aligned}$$

Получившее *симметрическое* уравнение третьей степени вида $ay^3 + by^2 + by + a = 0$ имеет корень, равный -1 , и, следовательно,

$$ay^3 + by^2 + by + a = 0 \Leftrightarrow (y+1)(ay^2 + (b-a)y + a) = 0.$$

Применяя соответствующую формулу, получим, что

$$\begin{aligned}3\operatorname{tg}^6 x - 7\operatorname{tg}^4 x - 7\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x + 1)(3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^4 x - 10\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Конечно, это уравнение могло быть решено и выделением суммы квадратов синуса и косинуса.

Второе решение.

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= \frac{7}{16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) &= \frac{7}{16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x &= \frac{7}{16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 x &= \frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &= \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 12.

Решите уравнения.

1. $1 - \sin^4 x - \frac{5}{3} \cos^4 x = 0.$
2. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}.$
3. $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x.$
4. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$
5. $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$

Ответы:

- 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- 2) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$4) \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.9. Уравнения, использующие ограниченность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Ограниченность области значений тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ дает возможность строить уравнения, использующие предельные значения этих функций или их комбинаций.

Так как $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$, то степени $|\sin x|$ и $|\cos x|$ образуют невозрастающую последовательность, т.е.

$$1 \geq |\sin x| \geq |\sin^2 x| \geq |\sin^3 x| \geq \dots \geq |\sin^k x| \geq \dots$$

и

$$1 \geq |\cos x| \geq |\cos^2 x| \geq |\cos^3 x| \geq \dots \geq |\cos^k x| \geq \dots$$

Так как $|\sin x|^2 = \sin^2 x$, а $|\cos x|^2 = \cos^2 x$, то верны следующие неравенства: $\sin^k x \leq \sin^2 x$ и $\cos^k x \leq \cos^2 x$ при всех натуральных значениях $k \geq 2$.

Пример 25. Решите уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

Решение. Так как выполнены неравенства $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$ и если ни одна из функций не принимает наибольшего значения, то для сумм их степеней выполнено строгое неравенство $\sin^k x + \cos^k x < 1$, если $|\sin x| \neq 1$ или $|\cos x| \neq 1$.

Следовательно,

$$\sin^5 x + \cos^5 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^5 x = 1, \\ \cos^5 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 26. Решите уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$.

Решение. Если ни одна из функций $\sin x$ или $\cos x$ не принимает наибольшего или наименьшего значения, равных ± 1 , то равенство невозможно. Но эти значения принимают функции тогда, когда их аргументы кратны $\frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^8 x = 1, \\ \cos^8 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 27. Решите уравнение $\sin x + \cos 4x = 2$.

Решение. Используя предельные значения функций, стоящих в левой части уравнения, получаем, что уравнение равносильно простейшей системе:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos 4x = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Находя пересечение множеств решений каждого из уравнений, получим, что решением является $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Рассмотренные методы решения тригонометрических уравнений не исчерпывают все многообразие этих методов, однако являются наиболее часто используемыми.

Упражнение 13. Решите уравнения.

1. $\cos x - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 3.$
2. $\sin x + \cos 2x + 2 = 0.$
3. $\sin x \sin 3x \sin 7x = 1.$
4. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2\cos 4x = 0.$
5. $(3\sin x + 4\cos x)(20 + 12\sin x + 5\cos 2x) = 143.$

Ответы:

- 1) $4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$4) \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$5) \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

§ 3. Тригонометрические уравнения повышенной сложности

Тригонометрические уравнения могут входить не только в группу В, но и в группу С.

Пример 1. При каких значениях параметра a выражение $1 + \sin x(a \sin x + 5 \cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x ?

Решение. Придадим заданию другую формулировку: при каких значениях параметра a уравнение $1 + \sin x(a \sin x + 5 \cos x) = 0$ не имеет решений?

1-й способ. Сведем уравнение к однородному уравнению, преобразовав его следующим образом.

$$\begin{aligned} 1 + \sin x(a \sin x + 5 \cos x) = 0 &\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + a \sin^2 x + \\ + 5 \sin x \cos x &= 0 \Leftrightarrow (a+1) \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \end{aligned}$$

В отличие от рассмотренных выше примеров, мы должны рассмотреть случай, когда $\cos x = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} (a+1) \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ (a+1) \sin^2 x = 0, \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ (a+1) \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 1 = 0. \end{cases} & \end{aligned}$$

Первая система совокупности имеет решение, если $a = -1$.

В этом случае $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, и, таким образом, при $a = -1$ исходное уравнение имеет решения. Следовательно, $a = -1$ решением задачи не является.

Если $a \neq -1$, то первая система совокупности решений не имеет. Но в этом случае не должна иметь решения и вторая система совокупности. Квадратное уравнение относительно

$\operatorname{tg} x$ не будет иметь решений, если дискриминант этого уравнения будет отрицательным.

Следовательно, искомые значения параметра будут задаваться системой
$$\begin{cases} a \neq -1, \\ 25 - 4(a + 1) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -1, \\ 25 - 4(a + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1, \\ 4a > 21 \end{cases} \Leftrightarrow a > 5,25.$$

Ответ: $(5,25; +\infty)$.

2-й способ. Преобразуем уравнение следующим образом.

$$\begin{aligned} 1 + \sin x (a \sin x + 5 \cos x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + a \sin^2 x + 5 \sin x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 + a \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{5}{2} \sin 2x &= 0 \Leftrightarrow a \cos 2x - 5 \sin 2x = a + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 25} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 25}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 25}} \sin 2x \right) &= a + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos(2x + \varphi) &= \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 25}}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение не будет иметь решение, если

$$\left| \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 25}} \right| > 1.$$

Решим полученное неравенство.

$$\begin{aligned} \left| \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 25}} \right| > 1 &\Leftrightarrow |a + 2| > \sqrt{a^2 + 25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a + 2)^2 > a^2 + 25 &\Leftrightarrow 4a > 21 \Leftrightarrow a > 5,25. \end{aligned}$$

Ответ: $(5,25; +\infty)$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x.$$

Решение.

Запишем данное уравнение следующим образом:

$$(\sin 3x + \cos 3x) - 2(\sin 18x \sin x + \cos x) = 3\sqrt{2}.$$

Обозначим $\sin 18x = a$. В этом случае уравнение приобретает вполне узнаваемый вид

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) - 2 \left(\sqrt{1+a^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cos x \right) = 3\sqrt{2},$$

легко преобразуемый введением дополнительного аргумента.

$$\text{Получим: } \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{1+a^2} \sin(x+\varphi) = 3\sqrt{2}.$$

Так как $a = \sin 18x$, то $2\sqrt{1+a^2} \leq 2\sqrt{2}$. Поэтому выражение, стоящее в левой части уравнения, может быть равным $3\sqrt{2}$ при одновременном выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin(x+\varphi) = -1, \\ \sin^2 18x = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\sin 18x = 1$. Система приобретает вид

$$\begin{cases} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1, \Leftrightarrow \\ \sin 18x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \Leftrightarrow \\ 18x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \text{ где } n, k, l \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{18}l, \end{cases}$$

Для нахождения решения данной системы достаточно проверить, будет ли решение второго уравнения удовле-

творять другим уравнениям системы. Подставляя, получим

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ \sin\left(-\frac{9\pi}{4} + 6\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(18\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi l\right)\right) = -1. \end{cases}$$

Очевидно, что второе уравнение неверно, так как $\sin(-2\pi) = 0$, поэтому в данном случае система несовместна.

Пусть теперь $\sin 18x = -1$. В этом случае получим

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin 18x = -1. \end{cases}$$

Решим только второе уравнение.

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Подставляя в оставшиеся уравнения, получим, что

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{9\pi}{4} + 6\pi n + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \text{и } \sin\left(18\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) &= \sin \frac{3\pi}{2} = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, система совместна.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь уравнения, включающие тригонометрические функции и их комбинации своей составной частью. При решении таких уравнений, кроме свойств тригонометрических функций, необходимо учитывать свойства функций, их включающих.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{12\sin x + 13} = 3\sin x + 2$.

Решение. Используем схему решения простейшего иррационального уравнения

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{12\sin x + 13} &= 3\sin x + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2 \geq 0, \\ 12\sin x + 13 = 9\sin^2 x + 12\sin x + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2 \geq 0, \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2 \geq 0, \\ \sin x = -1, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} \leq \sin x \leq 1, \\ \sin x = -1, \\ \sin x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного угла, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x &\Leftrightarrow 1 + 2|\sin x| = 2 - 4\sin^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4|\sin^2 x| + 2|\sin x| - 1 = 0. \end{aligned}$$

Решая полученное квадратное уравнение, будем иметь

$$\begin{cases} |\sin x| = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \\ |\sin x| = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}. \end{cases}$$

Учитывая, что модуль числа есть число неотрицательное, получим, что второе уравнение совокупности решения не имеет.

Далее:

$$|\sin x| = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 5. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Прежде всего, позаботимся о том, чтобы задать область определения функций, входящих в уравнение.

$$\operatorname{tg}(\pi \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot \operatorname{ctg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi \cdot \operatorname{tg} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \\ \pi \cdot \operatorname{ctg} x \neq \pi n, \\ \operatorname{tg}(\pi \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \operatorname{ctg} x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq m + \frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \neq n, \\ \pi \cdot \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{ctg} x = \pi k, \end{cases} \quad \text{где } m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Мы использовали формулу приведения $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
Решим отдельно уравнение

$$\pi \cdot \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{ctg} x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Имеем

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = k + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - \left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x - (2k+1) \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Дальнейшее решение уравнения зависит от величины его дискриминанта.

Находим дискриминант. $D = (2k+1)^2 - 16$.

Если $(2k+1)^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < 2k+1 < 4$, т.е. если $k = -2; -1; 0$; 1, то уравнение решений не имеет.

Если $(2k+1)^2 \geq 16$, то получим, что уравнение равносильно совокупности

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{2k+1+\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{2k+1-\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{2k+1+\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{2k+1-\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Однако надо еще исследовать, не может ли значение $\operatorname{tg} x$ иметь вид $m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$, ибо тогда начальное уравнение теряет смысл. Это обстоятельство *может иметь* место только в том случае, если дискриминант уравнения (целое число!) есть квадрат. Иначе $\operatorname{tg} x$ есть иррациональное число и, конечно, не может быть равен рациональному числу.

Итак, решим уравнение в целых числах.

$$(2k+1)^2 - 16 = l^2 \Leftrightarrow (2k+1-l)(2k+1+l) = 16.$$

Число 16 раскладывается в произведение двух множителей 6 способами:

$$16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = (-1)(-16) = (-2)(-8) = (-4)(-4).$$

Но множители, стоящие в левой части уравнения, различны и имеют одинаковую четность. Следовательно, остаются только две возможности:

$$\begin{cases} 2k+1+l=8, \\ 2k+1-l=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2k+1+l=-2, \\ 2k+1-l=-8. \end{cases}$$

В первом случае $k=2$, а во втором $k=-3$.

При $k=2$ получим, что $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Второе решение усло-

вию уравнения не удовлетворяет.

При $k=-3$ получим, что $\begin{cases} \operatorname{tg} x = -2, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Аналогично преды-

дущему, второе значение не удовлетворяет условию уравнения.

$$\text{Ответ: } \arctg \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$k \neq -3; -2; -1; 0; 1; 2; \pm \arctg 2 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решите уравнение

$$\left| 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \right| + \left| x^2 - 15x + 44 \right| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\left| 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \right| + \left| x^2 - 15x + 44 \right| = -\left(1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \right) - (x^2 - 15x + 44).$$

Следовательно, мы имеем дело с уравнением вида $|u| + |v| = -u - v$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} |u| = -u, \\ |v| = -v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0, \\ v \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение данного уравнения сводится к решению системы

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \leq 0, \\ x^2 - 15x + 44 \leq 0. \end{cases}$$

Но второе неравенство системы равносильно уравнению $1 + \cos(\pi\sqrt{x}) = 0$, т.е. получим, что исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) \leq 0, \\ x^2 - 15x + 44 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) = 0, \\ 4 \leq x \leq 11. \end{cases}$$

Решая тригонометрическое уравнение, получаем, что

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\pi\sqrt{x}) = 0 &\Leftrightarrow \cos(\pi\sqrt{x}) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pi\sqrt{x} = \pi + 2\pi k, \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (2k+1)^2, \\ k \geq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, решением тригонометрического уравнения является квадрат нечетного положительного числа. Учитывая неравенство $4 \leq x \leq 11$, получим, что единственным решением системы, а вместе с ней и исходного уравнения, является $x = 9$.

Ответ: 9.

Пример 7. Решите уравнение $\log_{\sin x} \left(\sin x - \frac{1}{4} \cos x \right) = 3$.

Решение. Исходя из определения логарифмической функции, получим, что данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0, \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x = \sin^3 x. \end{cases}$$

Учитывая первое неравенство системы, получаем, что второе неравенство становится верным при всех допустимых значениях аргументов и может быть исключено из системы.

Получим

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x > 0, \\ \sin x - \frac{1}{4} \cos x = \sin^3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{1}{4 \cos^2 x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{4} (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^3 x \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Осталось только вспомнить, что $2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, а $2 + \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

Тогда

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ \operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При отборе корней мы учли, что они должны принадлежать только первой и второй координатной четвертям.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Решите уравнение

$$(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = (\cos 2x)^{-1}.$$

Решение. Воспользуемся формулой решения простейших показательных уравнений вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$.

Имеем

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) = 0. \end{cases}$$

Применяя эту формулу к данному уравнению, получим, что

$$\begin{aligned} & (\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = (\cos 2x)^{-1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0, \\ (\cos 2x - 1)(2\cos 3x + 4\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 2x > 0, \\ \cos 3x + 2\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 2x > 0, \\ 4\cos^3 x - 2\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 2x > 0, \\ \cos x = 0, \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi k, \\ -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi l, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi m, \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: πk , $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1 + \lg(\operatorname{tg} x)} + \sqrt[3]{1 - \lg(\operatorname{tg} x)} = 2.$$

Решение. Для решения этого уравнения воспользуемся условным тождеством: если числа a , b , c не все равны между

собой и $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Запишем уравнение

$$\sqrt[3]{1 + \lg(\operatorname{tg} x)} + \sqrt[3]{1 - \lg(\operatorname{tg} x)} = 2$$

в виде

$$\sqrt[3]{1 + \lg(\operatorname{tg} x)} + \sqrt[3]{1 - \lg(\operatorname{tg} x)} + (-2) = 0.$$

Так как три слагаемых, стоящих в левой части уравнения, одновременно не равны между собой, то уравнение будет равносильно следующему:

$$1 + \lg(\operatorname{tg} x) + 1 - \lg(\operatorname{tg} x) + (-8) = 3(-2)\sqrt[3]{1 - \lg^2(\operatorname{tg} x)}.$$

Получим

$$1 = \sqrt[3]{1 - \lg^2(\operatorname{tg} x)} \Leftrightarrow \lg(\operatorname{tg} x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 10. Решите уравнение

$$(3\sin x + 4\cos x)(20 + 12\sin x + 5\cos 2x) = 143.$$

Решение. Оценим величину каждого сомножителя, входящего в левую часть уравнения.

Имеем

$$|3\sin x + 4\cos x| = 5 \left| \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x \right| = 5 \left| \sin \left(x + \arcsin \frac{4}{5} \right) \right| \leq 5.$$

Далее

$$\begin{aligned} 20 + 12\sin x + 5\cos 2x &= 20 + 12\sin x + 5(1 - 2\sin^2 x) = \\ &= -10\sin^2 x + 12\sin x + 25 = \\ &= -10 \left(\sin^2 x - \frac{6}{5}\sin x + \frac{9}{25} \right) + \frac{143}{5} = -10 \left(\sin x - \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{143}{5}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|\sin x| \leq 1$, получим, что $-3 \leq -10 \times \left(\sin x - \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{143}{5} \leq \frac{143}{5}$. Поэтому произведение двух сомножителей принадлежит интервалу $(-15; 143]$.

Таким образом, уравнение может иметь решения только в том случае, если одновременно выполнены два условия:

$$\begin{cases} 5\sin\left(x + \arcsin\frac{4}{5}\right) = 5, \\ -10\left(\sin x - \frac{3}{5}\right) + \frac{143}{5} = \frac{143}{5}. \end{cases}$$

Решая первое уравнение, находим, что

$$\begin{aligned} x + \arcsin\frac{4}{5} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное решение, убеждаемся, что оно удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Пример 11. Решите уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|$$

Решение. Предварительно преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \sin 3x + \cos 2x &= \cos 4x - 3|\sin x| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 2x - \cos 4x = -3|\sin x| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 3x + 2\sin x \sin 3x + 3|\sin x| = 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением модуля числа и заменим уравнение равносильной ему совокупностью систем:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin 3x + 2\sin x \sin 3x + 3\sin x = 0, \\ \sin x < 0, \\ \sin 3x + 2\sin x \sin 3x - 3\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 3\sin x - 4\sin^3 x + 2(3\sin x - 4\sin^3 x)\sin x + 3\sin x = 0, \\ \sin x < 0, \\ 3\sin x - 4\sin^3 x + 2(3\sin x - 4\sin^3 x)\sin x - 3\sin x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первую систему совокупности.

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x(4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x (\sin x - 1) (4 \sin^2 x + 6 \sin x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решим вторую систему совокупности.

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}, \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет, а решения второго не удовлетворяют условию, входящему в систему. Таким образом, вторая система совокупности решения не имеет.

Ответ: $\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 12. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\sin(x - a) = \sin x + \sin a.$$

Решить уравнение с параметрами — это значит указать, при каких значениях параметра уравнение имеет решения, сколько и каких, при каких значениях параметра уравнение не имеет решений.

Решение. Данное уравнение является простейшим с точки зрения его решения и проведения анализа полученных решений. Имеем

$$\begin{aligned} \sin(x - a) &= \sin x + \sin a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x - a}{2} \cos \frac{x - a}{2} &= 2 \sin \frac{x + a}{2} \cos \frac{x - a}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x - a}{2} = 0, \\ \sin \frac{x - a}{2} = \sin \frac{x + a}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - a}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ a = 2\pi n, \\ x = \pi + 2\pi l, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \pi + 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi l, \\ a = 2\pi n. \end{cases}$$

Осталось дать правильную трактовку полученной совокупности.

Ответ:

При $a = 2\pi n$, $x \in R$.

При $a \neq 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi k$, $x = a + p + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 13. Найдите значения параметра, при которых уравнение $1 + p \sin x = p^2 - \sin^2 x$ имеет решение.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^2 x + p \sin x + 1 - p^2 = 0$ и рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + pt + 1 - p^2$. Сведение решения тригонометрического уравнения с параметром к рассмотрению свойств корней квадратного трехчлена, получающегося в результате простой замены, является самой часто встречающейся задачей подобного рода.

Исходное уравнение будет иметь решение лишь в том случае, когда хотя бы один из корней квадратного трехчлена $f(t)$ будет принадлежать отрезку $[-1; 1]$.

Для этого необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: либо $f(1) \cdot f(-1) \leq 0$, либо

$$\begin{cases} D_f \geq 0, \\ f'(-1) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0, \\ f'(1) \geq 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases}$$

Первое условие отвечает случаю, когда на отрезке $[-1; 1]$ лежит ровно один корень трехчлена, а второй — когда на отрезке оба корня.

В первом случае получим:

$$\begin{aligned} (2 - p + p^2)(2 - p - p^2) \leq 0 &\Leftrightarrow (p + 2)(p + 1)(p - 1)(p - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq p \leq -1, \\ 1 \leq p \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |p| \leq 2. \end{aligned}$$

Во втором случае получим

$$\begin{cases} 5p^2 - 4 \geq 0, \\ p - 2 \leq 0, \\ -p^2 - p + 2 \geq 0, \\ p + 2 \geq 0, \\ -p^2 + p + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |p| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ -2 \leq p \leq 2, \\ -1 \leq p \leq 2, \\ -2 \leq p < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 1.$$

Объединяя данные решения, получим, что искомыми значениями параметра являются значения, удовлетворяющие неравенству $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2$.

Пример 14. Решите уравнение $\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$ при всех значения параметра.

Решение. Так как предстоит рассматривать величину корней квадратного трехчлена и их расположение относительно отрезка $[-1; 1]$, то полезно первым шагом найти дискриминант соответствующего трехчлена. В простейших случаях это может привести к значительному упрощению рассматриваемого уравнения, а во всех остальных все равно является необходимой частью решения.

Итак, $D = (a+2)^2 + 4(a+3) = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$.

Так как дискриминант есть полный квадрат, то исходное уравнение может быть без труда заменено совокупностью простейших уравнений.

$$\begin{aligned} \cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{a+2-a-4}{2}, \\ \cos^2 x = \frac{a+2+a+4}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = -1, \\ \cos^2 x = a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = a+3. \end{aligned}$$

Простейшее тригонометрическое уравнение $\cos^2 x = a+3$ имеет решение лишь при $0 \leq a+3 \leq 1$, т.е. при $-3 \leq a \leq -2$.

И при любом из этих значений параметра

$$x = \pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \sqrt{a+3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, если $-3 \leq a \leq -2$.

Пример 15. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^{\sin x} = p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Решение. Прежде всего, данное уравнение является смешанным уравнением с параметром и должно исследоваться с учетом свойств показательной функции.

Заметим, что $\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Поэтому уравнение можно записать следующим образом:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{\sin x}{2}} + \left(\sqrt{2}+1\right)^{-\frac{\sin x}{2}} = p.$$

Следовательно, левая часть уравнения может быть записана как функция вида $f(t) = a^t + a^{-t}$, где $a = \sqrt{\sqrt{2}+1}$, а $-1 \leq t \leq 1$.

Эта функция четная, наименьшее ее значение равно 2 и достигается при $t=0$, а наибольшее значение достигается на концах отрезка изменения аргумента и равно

$$\begin{aligned} f(1) = f(-1) &= \sqrt{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2+2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение имеет решение, если

$$2 \leq p \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

При найденных значениях параметра p получаем уравнение

$$a^{2t} - p \cdot a^t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^t = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \\ a^t = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}. \end{cases}$$

Вспоминая о том, что $2 \leq p \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}$, а $t = \frac{\sin x}{2}$, получим, что

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{\frac{\sin x}{2}} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad \text{или} \quad \left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^{-\frac{\sin x}{2}} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

Решая данную совокупность, получим, что

$$x = \pm \arcsin \frac{2 \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}{\ln(\sqrt{2} + 1)} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: при $2 \leq p \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$, $x = \pm \arcsin \frac{2 \ln \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}{\ln(\sqrt{2} + 1)} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

При других значениях параметра p уравнение решений не имеет.

Пример 16. При каких значениях параметра существует решение уравнения $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$?

Решение. Решение данного уравнения дает прекрасную возможность проиллюстрировать один из основополагающих принципов решения любых задач с параметрами — принцип произвольности выбора в качестве параметра любой из входящих в задачу переменных.

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ a + \sqrt{a + \sin x} = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - a \geq 0, \\ a + \sin x = \sin^4 x - 2a \sin^2 x + a^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Применяя алгоритм решения иррационального уравнения, мы привели исходное уравнение к равносильной ему системе. Одна неприятность: возникшее тригонометрическое уравнение — уравнение четвертой степени с параметром.

Применим принцип произвольности выбора параметра. Объявим переменной бывший параметр a , а параметром бывшую искомую функцию $\sin x$. Относительно a уравнение имеет вторую степень и записывается в виде:

$$a^2 - a(2\sin^2 x + 1) + (\sin^4 x - \sin x) = 0.$$

Вычислим дискриминант.

$$\begin{aligned} D &= (2\sin^2 x + 1)^2 - 4(\sin^4 x - \sin x) = 4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = \\ &= (2\sin x + 1)^2. \end{aligned}$$

Дискриминант есть полный квадрат, поэтому уравнение распадается на совокупность более простых уравнений:

$$\begin{cases} a = \sin^2 x + \sin x + 1, \\ a = \sin^2 x - \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x + 1 - a = 0, \\ \sin^2 x - \sin x - a = 0. \end{cases}$$

Возникают два уравнения, относительно которых ставится ранее рассмотренный вопрос: при каких значениях параметра хотя бы один из корней одного из уравнений принадлежит отрезку $[-1; 1]$?

Однако надо учесть, что эти уравнения входят в систему, которая содержит еще два условия

$$\begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - a \geq 0. \end{cases}$$

При этих ограничениях первое уравнение совокупности решений не имеет. Поэтому достаточно рассмотреть только второе уравнение.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - t - a$, $t \in [-1; 1]$. Для того чтобы данный квадратный трехчлен имел на отрезке $[-1; 1]$ хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы ордината вершины параболы была отрицательной, а хотя бы в одной из граничных точек отрезка $[-1; 1]$ значения самого трехчлена были, напротив, неотрицательны (мы используем то, что абсцисса вершины параболы равна $\frac{1}{2}$).

Таким образом, искомые значения параметра задаются следующими условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - a \leq 0, \\ -a \geq 0, \\ 2 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{4}, \\ a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq a \leq 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Второе решение. Из условия уравнения следует, что $0 \leq \sin x \leq 1$. Сделаем замену $t = \sin x$, $0 \leq t \leq 1$ и рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t+a}$. Тогда на отрезке $[0; 1]$ при каждом из искомых значений параметра функция является монотонно возрастающей.

Уравнение запишется в виде $f(f(t))=t$, которое в силу монотонности функции будет равносильно уравнению $f(t)=t$. Таким образом:

$$\begin{aligned}\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}} &= \sin x \Leftrightarrow \sqrt{a+\sin x} = \sin x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin x \leq 1, \\ \sin^2 x - \sin x - a = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, при втором решении мы приходим к единственному уравнению, которое может иметь решение. Решая далее, как в предыдущем случае, сразу получим, что $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Ответ: $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$.

Вообще использование общих свойств функций является достаточно часто встречающимся приемом при решении многих задач, в том числе и содержащих тригонометрические составляющие.

Пример 17. Решите уравнение

$$\sin x \left(1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}\right) + (3 \sin x - 1) \left(1 + \sqrt{2 + (3 \sin x - 1)^2}\right) = 0.$$

Решение. Бросается в глаза некоторая похожесть слагаемых, стоящих в левой части уравнения, что приводит к мысли рассмотреть функцию $f(t) = t \left(1 + \sqrt{2 + t^2}\right)$.

Функция определена при всех значениях аргумента. Следовательно, используя введенную символику, уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned}f(\sin x) + f(3 \sin x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\sin x) &= -f(3 \sin x - 1).\end{aligned}$$

Теперь заметим, что данная функция — нечетная, так как

$$f(-t) = (-t) \left(1 + \sqrt{2 + t^2}\right) = -f(t).$$

Используя этот факт, уравнение можно записать в виде

$$f(\sin x) = f(1 - 3 \sin x).$$

Найдем производную данной функции, чтобы установить интервалы ее монотонности.

$$f'(t) = 1 + \sqrt{2+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{2+t^2}}, \quad f'(t) > 0 \text{ для любого } t.$$

Следовательно, функция монотонно возрастает.

Исходя из определения монотонной функции, получим, что

$$\begin{aligned} f(\sin x) = f(1 - 3\sin x) &\Leftrightarrow \sin x = 1 - 3\sin x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\sin x = 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1)^k \arcsin \frac{1}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 18. Найдите все значения параметра, при которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Еще один пример на использование свойств функций, входящих в уравнение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2,$$

определенную при всех значениях аргумента, и, как хорошо видно, четную.

Поэтому, если при каком либо значении параметра a_0 уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет решение $x = x_0$, то число $x = -x_0$ также будет решением данного уравнения.

Поэтому *необходимым условием* единственности решения является совпадение этих значений, т.е. $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x = 0$.

Таким образом, для того чтобы уравнение могло иметь единственное решение, необходимо, чтобы число $x_0 = 0$ являлось решением.

Теперь найдем те значения параметра, при которых $x_0 = 0$ — решение.

$$\text{Подставив, получим, что } a^2 - 2a \sin 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 2 \sin 1. \end{cases}$$

Наконец, из найденных значений параметра отберем те, которые удовлетворяют условию задачи.

Если $a = 0$, то уравнение приобретает вид $x^2 = 0$ и имеет единственное решение $x_0 = 0$.

Если $a = 2 \sin 1$, то уравнение запишется в виде

$$x^2 - 4 \sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4 \sin^2 1 = 0.$$

Теперь заметим, что, так как $|\cos x| \leq 1$, то $0 \leq \sin(\cos x) \leq \sin 1$, поэтому $-4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 \geq 0$, причем равенство верно только при $x=0$. Следовательно, при $a = 2\sin 1$ уравнение также имеет единственное решение $x_0=0$.

Ответ: 0; $2\sin 1$.

Упражнение 1. Решите уравнения.

- $\sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}(1-\cos x)} = 6\cos x - \sin x$.
- $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0$.
- $\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1$.
- $\sqrt{3\sin 2x} = 2\sin 2x + \sin x + \cos x - 1$.
- $\sqrt{5\operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x}$.

Ответы:

- $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k, k \in Z$.
- $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.
- $-\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.
- $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.
- $\pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k, k \in Z$.

Упражнение 2. Решите уравнения.

- $\sqrt{1+\cos 4x} \cdot \sin x = \sqrt{2}$.
- $\sqrt{1+\cos 6x} \cdot \sin \frac{3x}{2} = -\sqrt{2}$.
- $\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} = 2\cos x$.
- $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2}\cos x$.
- $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2\sin x$.

Ответы:

- $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
- $-\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in Z$.

- 3) $2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 5) $\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 3. Решите уравнения.

1. $4^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 2^{\operatorname{tg}^2 x} - 3 = 0.$
 2. $4^{\sin x} - 3 \cdot 2^{\sin x + \cos x} + 2 \cdot 4^{\cos x} = 0.$
 3. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$
 4. $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3.$
 5. $|\cos x|^{\sin^2 x - 1,5 \sin x + 0,5} = 1.$

Ответы:

- 1) $\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 2) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 3) $\frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$
 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}.$
 5) $\pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 4. Решите уравнения.

1. $2\sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 2\sqrt{2}\sin x + 3 = 0.$
 2. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos 2x \cos 3x}.$
 3. $\frac{6\cos^3 2x + 2\sin^3 2x}{3\cos 2x - \sin 2x} = 1.$
 4. $\cos^2 x \cos 2x + \cos 4x + \cos 3x \cos x + 2\cos^4 x = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}}.$
 5. $\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\sin x, 0 < x < 2\pi.$

Ответы:

- 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 2) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n, n \neq 3k + 2, k, n \in \mathbb{Z}.$

$$3) -\frac{1}{2}\arctg 3 + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.$$

$$4) \frac{\pi}{11} + \frac{4\pi}{11}k, \quad k \neq 11n + 8, \quad \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{9}m, \quad m \neq 9n + 2, \quad k, m, n \in Z.$$

$$5) \frac{\pi}{6}; \quad \frac{3\pi}{10}; \quad \frac{7\pi}{6}.$$

Упражнение 5.

1. Найдите все значения параметра, при которых уравнение

$$x^2 - 2c \sin(\cos x) + 2 = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $\frac{1}{\sin 1}$.

2. При каких значениях параметров уравнение

$$\begin{aligned} &|x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cos^4 4a| + \\ &+ |x + \sin^2 a| = b \left(a + \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

имеет единственное решение?

Ответ: 1) $b = 0$, $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $b \in R$, $a = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

3. Решите уравнение $\sin^4 x + (a - 4)\sin^2 x - 3(a - 1) = 0$ при всех значениях параметра.

Ответ: $\pm \arcsin \sqrt{1 - a} + \pi k$, $k \in Z$, $0 \leq a \leq 1$.

4. Решите уравнение $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = a$ при всех значениях параметра.

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a + 2}{a\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\begin{cases} a \leq -2(\sqrt{2} - 1), \\ a \geq 2(\sqrt{2} + 1). \end{cases}$

5. Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ при всех значениях параметра.

Ответ: $\pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{1 - a}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$, $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$. При прочих a решений нет.

§ 4. Решение систем тригонометрических уравнений и тригонометрических уравнений, приводимых к ним

Основные методы решения систем тригонометрических уравнений те же, что и алгебраических систем: исключение неизвестных, замена переменной и т.д. Однако в отличие от них каждое уравнение тригонометрической системы обычно имеет бесконечное множество решений, что приводит к необходимости отбора серий корней или частей этих серий.

Пример 1. Решите уравнение $\sin 3x - 2\cos 2x = 3$.

Решение. В силу ограниченности тригонометрических функций, стоящих в левой части уравнения,

$$\sin 3x - 2\cos 2x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases}$$

так как $|\sin 3x| \leq 1$, $|\cos 2x| \leq 1$.

Поэтому решением уравнения будут служить решения данной тригонометрической системы.

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очень важно помнить, что использовать один целочисленный параметр для записи решения системы тригонометрических уравнений нельзя, так как предстоит еще найти общее решение.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем, имеют ли полученные решения каждого уравнения системы общие значения, т.е. существуют ли целые значения k и n , при которых выполняется условие

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Имеем

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow 1 + 4k = 3 + 6n \Leftrightarrow 4k - 6n = 2.$$

Так как $\text{НОД}(4, 6) = 2$, то данное неопределенное уравнение будет иметь решения. Сократив на 2, получим:

$$2k = 3n + 1 \Leftrightarrow k = n + \frac{n+1}{2}.$$

Для того чтобы k было целым, n должно быть нечетным, т.е. уравнение имеет решение, если $n = 2m - 1$, и в этом случае

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$

Тригонометрические системы могут быть и смешанными, что обычно возникает при отборе корней какого-либо уравнения.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\cos 6x} = 0$.

Решение.

$$\frac{\sin 3x}{\cos 6x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}k, \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

В данном случае решением уравнения не будут являться решения первого уравнения, не удовлетворяющие неравенству системы. Найдем, для каких целых чисел k число $\frac{\pi}{3}k$ окажется посторонним корнем.

$$\frac{\pi}{3}k = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n \Leftrightarrow 4k = 1 + 2n.$$

Так как $\text{НОД}(4, 2) = 2$, то данное уравнение решений не имеет, а, следовательно, исходное уравнение не имеет посторонних корней.

Ответ: $\frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Заменим исходные уравнения системы их суммой и разностью.

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Вновь находя сумму и разность полученных уравнений, имеем, что

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+n), \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \pi(2k-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + (2k+n), \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + (2k-n), \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2k+n); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2k-n) \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

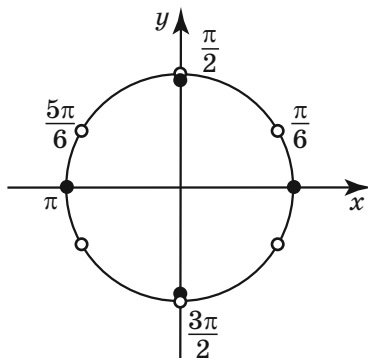
Кроме рассмотрения неопределенного уравнения с целью отбора решения тригонометрического уравнения или системы уравнений, традиционно применяется отбор чисел на тригонометрическом круге.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = 0$.

Решение.

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, нам нужно из множества чисел x , представимых в виде $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, исключить посторонние корни, т.е. числа



вида $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для этого изобразим данные числа на тригонометрическом круге.

Закрашенными точками изображены числа вида $\frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, а незакрашенными — числа вида $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Иными словами, решения уравнения — числа, которым на тригонометрическом круге соответствуют черные (закрашенные) кружки, не совпадающие с белыми. Такие числа образуют две последовательности, которые могут быть объединены в одну, задаваемую формулой $x = \pi t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: πt , $t \in \mathbb{Z}$.

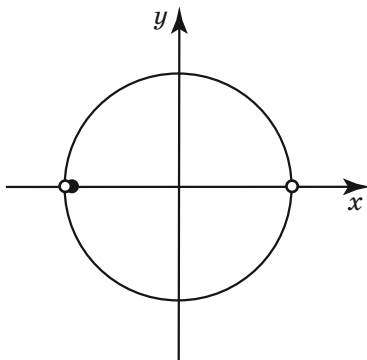
Однако из-за неоднозначности соответствия точек числовой прямой и точек тригонометрического круга в этом методе может возникать визуальное совпадение чисел, которого на самом деле нет.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)} = 0$.

Решение.

$$\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Попробуем провести отбор корней, используя тригонометрический круг. Изобразим, подобно предыдущему примеру, числа вида $\pi + 2\pi k$ и $3\pi n$ на тригонометрическом круге.



На основании рисунка можно заключить, что данное уравнение решений не имеет, так как единственная закрашенная точка, отвечающая числам вида $\pi + 2\pi k$, визуальное совпадает с незакрашенной точкой, отвечающей числам вида 3π . Однако легко видеть, что, например, числа π и 5π являются решениями этого уравнения.

Поэтому вернемся к отбору корней методом решения неопределенного уравнения. Имеем

$$\pi + 2\pi k = 3\pi n \Leftrightarrow k = \frac{3n-1}{2} \Leftrightarrow k = n + \frac{n-1}{2}.$$

Отсюда следует, что при нечетных $n = 2m + 1$ получим $k = 3m + 1$. Таким образом, при $k = 3m + 1$ получаются посторонние корни. Следовательно, если $k = 3m$ или $k = 3m + 2$, то числа $x = \pi + 6\pi m$, $x = 5\pi + 6\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ являются решениями уравнения.

Ответ: $\pi + 6\pi m$, $5\pi + 6\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь системы, при решении которых используются те же методы, что и при решении алгебраических систем.

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x + \cos y = 1, \\ 2 \sin x - 3 \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений есть линейная система уравнений относительно $\sin x$ и $\sin y$. Поэтому, применяя метод Крамера при решении подобных систем, получим

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2 - 3\sqrt{2},$$

$$D_{\sin x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -3 \end{vmatrix} = -3 - \sqrt{2},$$

$$D_{\cos x} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Применяя формулы Крамера, получим, что

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{34}, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\cos y} = \sqrt[3]{34^2} - 5. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — какое-либо решение системы.

Тогда $\left(\operatorname{tg} x_0; \frac{1}{\cos y_0} \right)$ — корни квадратного уравнения вида

$$t^2 - 2\sqrt[3]{34}t + \sqrt[3]{34^2} - 5 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен 20, поэтому

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{34} - \sqrt{5}, \\ t = \sqrt[3]{34} + \sqrt{5}. \end{cases}$$

Получим, что исходная система уравнений равносильна следующей совокупности:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{34} - \sqrt{5}, \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{34} + \sqrt{5}}, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{34} + \sqrt{5}, \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{34} - \sqrt{5}}. \end{cases}$$

Если наличие решения первой системы совокупности не вызывает сомнений, то во второй системе необходимо сравнить модуль числа, стоящего в правой части второго уравнения, с числом 1.

$$3 < \sqrt[3]{34} < 4, \text{ а } 2 < \sqrt{5} < 3, \text{ поэтому } \sqrt[3]{34} - \sqrt{5} > 0.$$

Проведем сравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}} \vee 1 \right) &\Leftrightarrow (1 \vee \sqrt[3]{34}-\sqrt{5}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1+\sqrt{5} \vee \sqrt[3]{34}) \Leftrightarrow (16+8\sqrt{5} \vee 34) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4\sqrt{5} \vee 9) \Leftrightarrow (80 \vee 81) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}} < 1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, второе уравнение второй системы также имеет решение.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{34}-\sqrt{5}, \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \arctg(\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}) + \pi k, \\ y = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, \end{array} \right. \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt[3]{34}+\sqrt{5}, \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \arctg(\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}) + \pi k, \\ y = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\arctg(\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}) + \pi k; \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}}\right) + 2\pi n \right);$

$\left(\arctg(\sqrt[3]{34}+\sqrt{5}) + \pi k; \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}}\right) + 2\pi n \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = y \cos^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right), \\ x \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = y \sin^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right). \end{array} \right.$$

Решение. Заменяя уравнения системы их суммой и разностью, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = y \cos^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right), \\ x \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = y \sin^2 \left(y + \frac{\pi}{6} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y, \\ x \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -y \cos \left(2y + \frac{\pi}{3} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x \left(\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 2x \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x = 0, \\ x = y, \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x = 0, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае при записи второго решения системы должен быть использован один параметр $k \in \mathbb{Z}$, так как в данном случае решения системы связаны условием их равенства.

Ответ: $(0; 0); \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \cos x = 5 - 4 \cos y, \\ 6 \sin x = -4 \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x = -\frac{2}{3} \sin y, \\ 36 = 16 \sin^2 y + (5 - 4 \cos y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x \sin y < 0, \\ 6 \cos x = 5 - 4 \cos y, \\ 40 \cos y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y < 0, \\ \cos y = \frac{1}{8}, \\ \cos x = \frac{3}{4}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Условие $\sin x \sin y < 0$ дает возможность правильного отбора серий решений данной системы.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y < 0, \\ \cos y = \frac{1}{8}, \\ \cos x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \\ y = -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \\ y = \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n, \end{cases} \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi n \right); \left(-\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k; \arccos \frac{1}{8} + 2\pi n \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 1.

1. Найдите сумму наименьшей положительной пары решений системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$$

Ответы: 1) π ; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 2π .

Верный ответ — 1).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4 + \sqrt{3} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1. \end{cases}$$

Ответы: 1) $\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right)$; 2) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right)$;
4) $\left(\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{1}{4} \right)$; 5) $\left(\pi + 2\pi k; \frac{1}{4} \right).$

Верный ответ — 4).

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

и укажите наименьшую возможную сумму $|x| + |y|$, где $(x; y)$ — решение данной системы.

Ответы: 1) 0; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 2π .

Верный ответ — 3).

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y \end{cases}$$

и найдите наименьшее решение, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$.

Ответы: 1) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Верный ответ — 1).

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

и найдите наименьшее решение, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$.

Ответы: 1) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Верный ответ — 4).

Упражнение 2.

1. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}k$, $k \neq 4n + 2$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

3. Какое наибольшее количество корней имеет уравнение

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} = a \cdot \cos 2x$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?

Ответ: 6.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8^{-\sin 4x} + 8 \cdot 9^{\cos y} = 80, \\ 5 \cdot 8^{-\sin 4x} - 7 \cdot 9^{\cos y} = b, \end{cases} \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; 2\pi n; -23\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 54^\circ, \\ 4 \sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{2}k + (-1)^k \frac{\pi}{20}; \frac{3\pi}{20} - \frac{\pi}{2}k - (-1)^k \frac{\pi}{20}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

§ 5. Решение тригонометрических неравенств

Определение. Простейшими тригонометрическими неравенствами называются *неравенства* вида $\sin kx \vee a$, $\cos kx \vee a$, $\operatorname{tg} kx \vee a$, $\operatorname{ctg} kx \vee a$ (знак \vee заменяет один из четырех знаков математических отношений $<$, $>$, \leq , \geq).

5.1. Неравенства вида $\sin kx \vee a$

1. Если $a < -1$, то неравенства $\sin kx < a$ и $\sin kx \leq a$ решений не имеют.

Неравенства $\sin kx > a$ и $\sin kx \geq a$ верны для любого значения x .

2. Если $a = -1$, неравенство $\sin kx < -1$ решений не имеет.

Неравенство $\sin kx \leq -1 \Leftrightarrow kx = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $\sin kx \geq -1$ верно для любого значения переменной.

Неравенство $\sin kx > -1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < kx < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Если $0 < |a| < 1$, то: неравенство:

$\sin kx < a \Leftrightarrow -\arcsin a + \pi(2n-1) < kx < \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\sin kx \leq a \Leftrightarrow -\arcsin a + \pi(2n-1) \leq kx \leq \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\sin kx > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < kx < \arcsin a + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\sin kx \geq a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n \leq kx \leq \arcsin a + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отдельно рассмотрим случай, когда $a = 0$. В этом случае имеем неравенство:

$$\sin kx < 0 \Leftrightarrow \pi(2n-1) < kx < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin kx \leq 0 \Leftrightarrow \pi(2n-1) \leq kx \leq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin kx > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < kx < \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin kx \geq 0 \Leftrightarrow 2\pi n \leq kx \leq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Если $a = 1$, то неравенство:

$$\sin kx < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n < kx < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin kx \leq 1 \Leftrightarrow -\infty < kx < +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

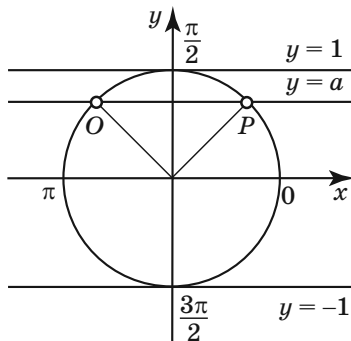
$$\sin kx > 1 \Leftrightarrow \emptyset.$$

$$\sin kx \geq 1 \Leftrightarrow kx = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Если $a > 1$, то неравенства $\sin kx < a$ и $\sin kx \leq a$ верны для любого значения x .

Неравенства $\sin kx > a$ и $\sin kx \geq a$ решений не имеют.

Вводя новую переменную $t = kx$, получим неравенство $\sin t \vee a$, решение которого хорошо иллюстрируется на тригонометрической окружности.



5.2. Неравенства вида $\cos kx \vee a$

1. Если $a < -1$, то неравенства $\cos kx < a$ и $\cos kx \leq a$ решений не имеют.

Неравенства $\cos kx > a$ и $\cos kx \geq a$ верны для любого значения x .

2. Неравенство $\cos kx < -1$ решений не имеет.

$$\cos kx \leq -1 \Leftrightarrow kx = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Неравенство $\cos kx \geq -1$ верно для любого значения переменной.

$$\cos kx > -1 \Leftrightarrow -\pi + 2\pi n < kx < \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Если $0 < |a| < 1$, то

$$\cos kx < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < kx < -\arccos a + 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx \leq a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n \leq kx \leq -\arccos a + 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < kx < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx \geq a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n \leq kx \leq \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отдельно рассмотрим случай, когда $a = 0$.

$$\cos kx < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n < kx < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq kx \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < kx < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq kx \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Если $a = 1$, то неравенства:

$$\cos kx < 1 \Leftrightarrow 2\pi n < kx < 2\pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos kx \leq 1 \Leftrightarrow -\infty < kx < +\infty, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

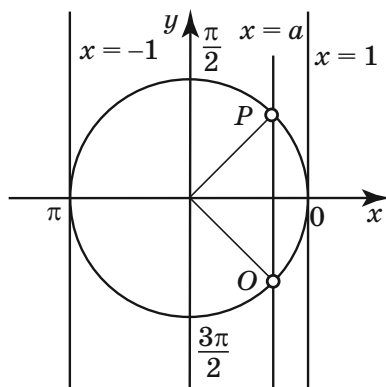
$$\cos kx > 1 \Leftrightarrow \emptyset.$$

$$\cos kx \geq 1 \Leftrightarrow kx = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

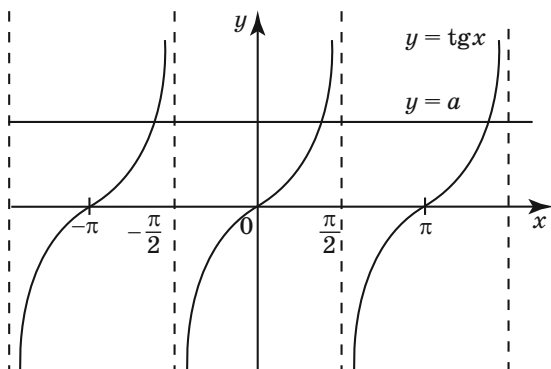
5. Если $a > 1$, то неравенства $\cos kx < a$ и $\cos kx \leq a$ верны для любого значения x .

Неравенства $\cos kx > a$ и $\cos kx \geq a$ решений не имеют.

Вводя новую переменную $t = kx$, получим неравенство $\cos t \vee a$, решение которого хорошо иллюстрируется на тригонометрической окружности.



5.3. Неравенства вида $\operatorname{tg} kx \vee a$



Используя свойство монотонности функции $y = \operatorname{tg} t$ на каждом периоде, получим:

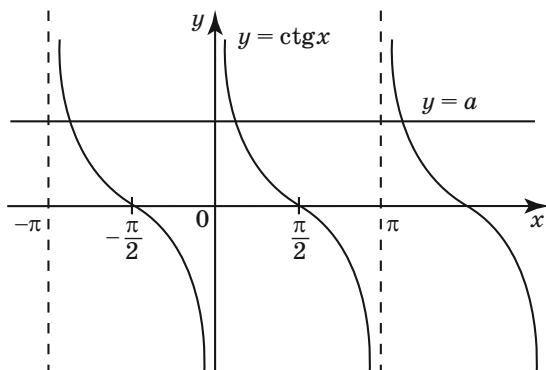
$$\operatorname{tg} kx < a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < kx < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} kx \leq a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < kx \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} kx > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < kx < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} kx \geq a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n \leq kx < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5.4. Неравенства вида $\operatorname{ctg} kx \vee a$



Используя свойство монотонности функции $y = \operatorname{ctg} t$ на каждом периоде, получим:

$$\operatorname{ctg} kx < a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < kx < \pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} kx \leq a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n \leq kx < \pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} kx > a \Leftrightarrow \pi n < kx < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} kx \geq a \Leftrightarrow \pi n < kx \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Решите неравенство $\sin 2x > \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n < 2x < -\arcsin \frac{1}{2} + \pi + 2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решите неравенство $\cos 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$\cos 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \leq 3x \leq 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n \leq x \leq \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n; \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решите неравенство $\operatorname{tg} 3x < -1$.

Решение.

$$\operatorname{tg} 3x < -1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < 3x < \operatorname{arctg}(-1) + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

$$\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n < 2x < \pi + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Как и в случае тригонометрических уравнений, решение произвольных тригонометрических неравенств алгебраическими методами сводится к решению либо простейших неравенств, либо их систем, совокупностей и т.д.

Пример 5. Решить неравенство $\cos^2 2x > \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Понизим степень тригонометрического выражения, воспользовавшись формулой косинуса двойного аргумента.

$$\begin{aligned} \cos^2 2x > \frac{2+\sqrt{3}}{4} &\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 > \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 4x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n < 4x < \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n < 4x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 6. Решите неравенство $(1 + \cos 4x)\sin 2x \geq \cos^2 2x$.

Решение.

$$\begin{aligned} (1 + \cos 4x)\sin 2x \geq \cos^2 2x &\Leftrightarrow 2\cos^2 2x \sin 2x - \cos^2 2x \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $k = n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, поэтому решение данного неравенства окончательно запишется в виде

$$(1 + \cos 4x)\sin 2x \geq \cos^2 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k\right] \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Пример 7. Решите неравенство

$$1 - \sin 3x < \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2.$$

Решение. Возводя в квадрат выражение, стоящее в скобках, и используя основное тригонометрическое тождество, запишем неравенство следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 - \sin 3x &< \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - \sin 3x &< \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

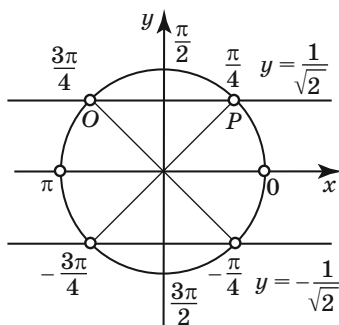
Используем формулу синуса двойного аргумента, а затем, перенеся получившиеся тригонометрические слагаемые в одну сторону неравенства, разложим разность одноименных тригонометрических функций в произведение.

$$\begin{aligned} 1 - \sin 3x &< 1 - \sin x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos 2x &> 0 \Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \sin^2 x) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \right) &\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \right) > 0. \end{aligned}$$

При решении тригонометрических неравенств постоянно надо помнить об ограниченности тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Поэтому

$$\sin x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0 < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Обратимся к геометрической интерпретации решения двойных неравенств. (Этот же метод в дальнейшем будем применять для решения систем тригонометрических неравенств.)



Построим тригонометрическую окружность и проведем прямые, заданные уравнениями $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Выбирая дуги, отвечающие решениям неравенства, получим решение совокупности неравенств.

$$\begin{cases} -1 \leq \sin x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0 < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$$\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

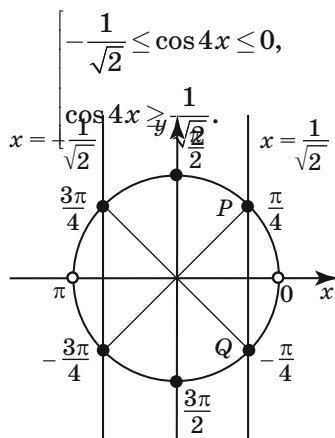
Пример 8. Решите неравенство $\cos 12x + \cos 4x \geq 0$.

Решение. $\cos 12x + \cos 4x \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos 8x \cos 4x \geq 0$.

Используем формулу косинуса двойного аргумента:

$$(2\cos^2 4x - 1)\cos 4x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\cos 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cos 4x \geq 0.$$

Исходное неравенство приведено к совокупности простейших тригонометрических неравенств.



Снова обратимся к тригонометрической окружности.

Проводя прямые, заданные уравнениями $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 0$ и $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и выбирая дуги, отвечающие неравенствам совокупности, получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos 4x \leq 0, \\ \cos 4x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 4x \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 4x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 4x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leq x \leq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \\ -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k \leq x \leq \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k, \\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \leq x \leq \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\left[-\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right] \cup \left[-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k\right] \cup \left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k\right],$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9. Решите неравенство $3\cos 2x + 2\cos x \geq 5$.

Решение. Применим формулу косинуса двойного аргумента.

$$\begin{aligned} 3\cos 2x + 2\cos x \geq 5 &\Leftrightarrow 3(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6\cos^2 x + 2\cos x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + \cos x - 4 \geq 0. \end{aligned}$$

Раскладывая квадратный трехчлен, стоящий в левой части неравенства, на множители, получаем неравенство $(\cos x - 1)(3\cos x + 4) \geq 0$.

Так как функция $y = \cos x$ ограничена и $-1 \leq \cos x \leq 1$, то второй сомножитель принимает только положительные значения. Поэтому

$$\begin{aligned} (\cos x - 1)(3\cos x + 4) \geq 0 &\Leftrightarrow \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 10. Решите неравенство $5\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} > 29$.

Решение. Как и при решении подобных уравнений, используем формулу $\frac{1}{\cos^4 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2$. Имеем

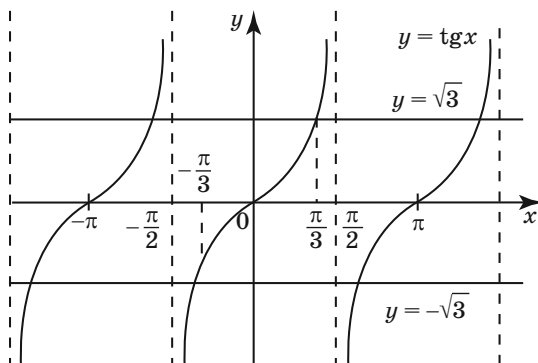
$$5\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} > 29 \Leftrightarrow 5\operatorname{tg}^4 x - (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 - 29 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 30 > 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x - 15 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^2 x - 3)(2\operatorname{tg}^2 x + 5) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x > 3 \Leftrightarrow |\operatorname{tg} x| > \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x > \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Построим график функции $y = \operatorname{tg} t$ и проиллюстрируем дальнейшее решение получившейся совокупности неравенств.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x < -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k, \\ \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 1.

1. Укажите интервал, которому принадлежит решение неравенства

$$\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: 1) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$;
 5) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Верный ответ — 2).

2. Укажите решение неравенства $\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$.

Ответы: 1) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$;

2) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

3) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$;

4) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$;

5) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Верный ответ — 3).

3. Укажите решение неравенства $\cos 2x + 5\sin x + 2 \geq 0$.

Ответы: 1) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$;

2) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

3) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

4) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

5) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Верный ответ — 2).

4. Укажите решение неравенства

$$\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x.$$

Ответы: 1) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$;

2) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$;

3) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$;

$$4) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k \right);$$

$$5) \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Верный ответ — 3).

5. Укажите решение неравенства $\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1) > 1$.

Ответы: 1) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right);$

$$2) \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right);$$

$$3) \left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right);$$

$$4) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k \right);$$

$$5) \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Верный ответ — 3).

ГЛАВА 7

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Геометрия прямой

Основными геометрическими фигурами на прямой являются точки, отрезки, лучи и их комбинации, например, два отрезка или четыре точки и т.п. Наиболее важными здесь являются следующие понятия и факты:

Отношением двух отрезков называется отношение их длин.

Если задано отношение длин двух отрезков $AB:CD = \alpha$, то длина отрезка $AB = \alpha t$, а длина отрезка $CD = t$, где t — некоторая единица длины.

Если длины двух отрезков относятся, как $AB:CD = p:q$, то говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны числам p и q соответственно.

То же самое и для большего числа отрезков, а именно: из соотношения $AB:CD:MN = p:q:r$ следует, что отрезки AB , CD , MN пропорциональны числам p , q , r соответственно, а их длины удовлетворяют равенствам $AB = pt$, $CD = qt$, $MN = rt$, где t — некоторая единица длины.

Точка C лежит между точками A и B тогда и только тогда, когда справедливо равенство $AB = AC + CB$.

Для любого положительного действительного числа α на отрезке AB существует единственная точка C , такая, что $AC:CB = \alpha$.

На прямой AB существует ровно две точки C_1 и C_2 такие, что $AC_1:C_1B = AC_2:C_2B = \alpha$, если α — произвольное действительное число, отличное от 1.

При $\alpha = 1$ на прямой AB существует единственная точка C , такая, что $AC:CB = 1$. Понятно, что точка C в этом случае — середина отрезка AB .

Пример 1. На отрезке AB отмечены две точки M и N , такие, что $AM:MB=1:2$, а $AN:NB=3:4$. Найдите отношение $AM:MN:NB$.



Решение. Полезно сделать чертеж, на котором рекомендуется соблюдать (приблизительно) заданные отношения. Из $AM:MB=1:2$ следует, что $AM = t$, $MB = 2t$, то есть $AM = \frac{1}{3}AB$, $MB = \frac{2}{3}AB$. Из $AN:NB=3:4$ следует, что $AN = 3k$, $NB = 4k$, то есть $AN = \frac{3}{7}AB$, $NB = \frac{4}{7}AB$.

Замечаем, что $AM = \frac{1}{3}AB < \frac{3}{7}AB = AN$, поэтому точка N лежит между точками M и B (см. рис.). Следовательно,

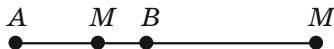
$$MN = AN - AM = \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot AB = \frac{2}{21}AB.$$

Теперь находим искомое отношение

$$AM:MN:NB = \frac{1}{3} : \frac{2}{21} : \frac{4}{7} = 7:2:12.$$

Ответ: $7 : 2 : 12$.

Пример 2. На прямой AB отмечена точка M , такая, что $AM:MB=3:2$. Найдите длину отрезка AM , если $AB=3$ см.



Решение. Из условия задачи следует, что либо точка M на прямой AB лежит между точками A и B , либо точка B лежит между точками A и M . Рассмотрим оба случая (см. рис.).

Пусть сначала точка M лежит между точками A и B и

$$AM:MB=3:2.$$

Тогда $AB = AM + MB$ и $AM = 3t$, $MB = 2t$.

Отсюда $3 = 3t + 2t = 5t$ и $t = 0,6$. Следовательно, в этом случае

$$AM = 3t = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \text{ см.}$$

Если точка B лежит между точками A и M и $AM:MB=3:2$, то по-прежнему $AM = 3t$, $MB = 2t$, но $AM = AB + BM$.

Отсюда $3t = 3 + 2t$ и $t = 3$. Следовательно, в этом втором случае

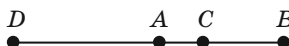
$$AM = 3t = 3 \cdot 3 = 9 \text{ см.}$$

Ответ: 1,8 см или 9 см.

Пример 3. На прямой AB отмечена точка M , такая, что

$$AM : MB < 3 : 4.$$

Где на этой прямой лежат все такие точки M , Какие значения при этом может принимать длина отрезка AM , если $AB = 7$?



Решение. Из условия $AM : MB < 3 : 4$ следует, что $AM < MB$. Пусть точка C лежит между A и B и $AC : CB = 3 : 4$. Такая точка единственна, причем $AC = \frac{3}{7}AB = 3$ (см. пример 1).

Поэтому для любой точки M , лежащей между точками A и C , имеем неравенства $AM < AC$ и $MB > CB$, из которых следует неравенство

$$\frac{AM}{MB} < \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, все точки, лежащие между точками A и C , удовлетворяют условию задачи. Отметим, что точка A также удовлетворяет этому условию, поскольку в этом случае отношение $AA : AB = 0 < \frac{3}{4}$. Если точка M лежит между точками C и B , то $AM > AC$ и $MB < CB$. Значит, $\frac{AM}{MB} > \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$. То есть ни одна точка, лежащая между точками C и B , не удовлетворяет условию задачи. Аналогично, ни одна точка M , для которой точка B лежит между A и M , также не удовлетворяет условию задачи, поскольку для каждой такой точки отношение

$$\frac{AM}{MB} > 1 > \frac{3}{4}.$$

Отметим на прямой AB точку D так, что $AD : DB = 3 : 4$, и точка A лежит между точками B и D . Тогда $AD = 21$ см (см. пример 2). Пусть точка M лежит между точками D и A . Тогда

$$AD = AM + MD \text{ и } BD = BM + MD.$$

Отсюда $\frac{3}{4} = \frac{AD}{DB} = \frac{AM+MD}{MB+MD} > \frac{AM}{MB}$ ¹. Следовательно, любая точка M , лежащая между точками A и D , также удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим, наконец, произвольную точку M , такую, что точка D лежит между точками M и A . В этом случае

$$AM = AD + MD \text{ и } MB = BD + MD.$$

Отсюда получаем неравенство $\frac{3}{4} = \frac{AD}{DB} = \frac{AM-MD}{MB-MD} < \frac{AM}{MB}$ ². Итак, условие $AM:MB=3:4$ выполняется для тех и только тех точек, которые лежат между точками D и C . Поэтому длина отрезка AM может принимать любые значения от нуля до 21. Более точно: $0 \leq AM < 21$.

Ответ: неравенство $AM:MB < 3:4$ выполняется для тех и только тех точек прямой AB , которые лежат между точками D и C , где $AD:DB = AC:CB = 3:4$, точка A лежит между D и C , точка C лежит между A и B , при этом $0 \leq AM < 21$.

§ 2. Геометрия треугольника

Фактов, относящихся к геометрии треугольника и многоугольника, весьма много. Остановимся на некоторых из них.

Сумма углов треугольника равна 180° , т.е. равна сумме двух прямых углов.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

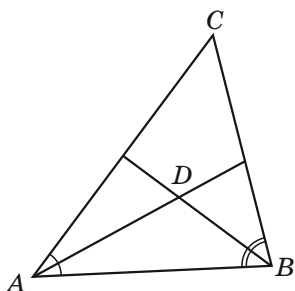
Пример 1. Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B треугольника ABC , если величина угла C равна 48° .

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрис углов A и B буквой D . Сумма углов A и B треугольника ABC равна

$$180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

¹ Проверьте справедливость этого неравенства, например, составив соответствующую разность, или свойством отношения (с. 11).

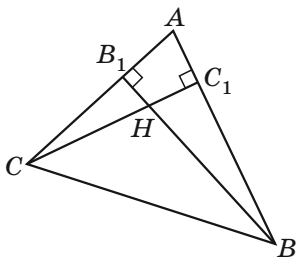
² Проверьте справедливость этого неравенства, например, составив соответствующую разность.



Значит, половина этой суммы, равная сумме углов при вершинах A и B треугольника ABD , составит $132^\circ:2$, т.е. 66° . Острый угол между биссектрисами углов A и B треугольника ABC является внешним углом треугольника ABD при вершине D и поэтому равен сумме внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно, этот угол равен 66° ¹.

Упражнение 1. Докажите: биссектрисы треугольника не могут быть перпендикулярны.

Пример 2. В треугольнике ABC угол A равен 72° . Найдите острый угол между высотами треугольника ABC , проведенными из вершин B и C .



Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC и точки B_1, C_1 — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно. Тогда прямоугольные треугольники ABB_1 и HBC_1 имеют общий острый угол при вершине B . Следовательно,

$$\angle BHC_1 = \angle BAB_1 = \angle BAC = 72^\circ.$$

Ответ: 72° .

Пример 3. В треугольнике ABC $AB=AC$. Биссектриса угла при основании этого треугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC .

Решение. Пусть BM — биссектриса равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB=AC$. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Из равнобедренности треугольников, на которые биссектриса угла при основании разбивает исходный треугольник, сле-

¹ Получите результат в общем случае и подумайте, какие значения может принимать величина этого острого угла.

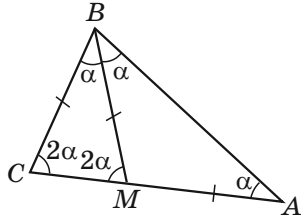
дует, что $AM = MB = BC$. Отсюда, по свойству углов при основании равнобедренного треугольника, получим, что $\angle BAC = \angle ABM = \alpha$.

Угол BMC — внешний угол треугольника ABM . Следовательно, по свойству внешнего угла находим $\angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\alpha$. Но треугольник CBM равнобедренный. Поэтому его угол BMC равен углу BCM . Отсюда $\angle BMC = \angle BCM = 2\alpha$. Поскольку BM — биссектриса треугольника ABC , то $\angle MBC = \angle MBA = \alpha$. Теперь, по свойству внутренних углов треугольника ABC получаем равенство

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ.$$

Итак, искомые углы треугольника ABC равны 36° , 72° , 72° .

Ответ: 36° , 72° , 72° .



§ 3. Геометрия окружности

Равным дугам одной и той же окружности соответствуют равные хорды, стягивающие эти дуги.

Если хорды одной и той же окружности равны, то стягиваемые ими дуги или равны, или составляют в сумме 180° .

Хорда, перпендикулярная диаметру окружности, делится этим диаметром пополам.

Если диаметр окружности перпендикулярен хорде этой окружности, то он делит эту хорду пополам.

Отрезки касательных, проведенных к окружности из точки, не лежащей на окружности, равны между собой.

Окружность, касающаяся всех сторон треугольника, называется окружностью, вписанной в данный треугольник. Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется окружностью, описанной около данного треугольника. Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон этого треуголь-

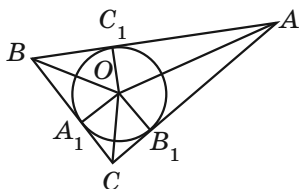
ника.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы этого треугольника.

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и равна радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

Вершины прямых углов всех прямоугольных треугольников с общей гипотенузой лежат на одной окружности, диаметром которой является гипотенуза этих треугольников. Наоборот, если AB — диаметр окружности и C — произвольная точка окружности, отличная от точек A и B , то $\angle ACB = 90^\circ$, иными словами, если вершина угла лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность в диаметрально противоположных точках, то этот угол — прямой (замечательное свойство окружности).

Пример 1. Стороны треугольника равны 7, 8 и 9. Найдите длины отрезков, на которые вписанная в этот треугольник окружность делит его стороны.



Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , в котором $AB=9$, $BC=7$, $CA=8$. Пусть A_1 , B_1 , C_1 — точки касания вписанной окружности и сторон BC , CA , AB соответственно.

Радиусы вписанной окружности, проведенные в точки касания, перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника ABC . Поэтому прямоугольные треугольники AOB_1 и AOC_1 , BOA_1 и BOC_1 , COA_1 и COB_1 соответственно равны по катету и гипотенузе ($OB_1=OC_1$, OA — общая гипотенуза и т.д.). Отсюда следуют равенства $AB_1=AC_1$, $BA_1=BC_1$, $CA_1=CB_1$ ¹.

¹ Здесь можно воспользоваться и свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из точки, не лежащей на этой окружности.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $B_1C = 8 - x$, $CA_1 = 8 - x$, $A_1B = x - 1$ ¹, $BC_1 = x - 1$, $C_1A = 10 - x$.

Но $C_1A = AB_1$, следовательно, $10 - x = x \Leftrightarrow x = 5$. Теперь последовательно находим $C_1A = AB_1 = 5$, $CB_1 = CA_1 = 8 - x = 3$, $A_1B = BC_1 = x - 1 = 4$.

Ответ: 3; 4; 5.

Рассмотренный пример 1 очень важен.

Упражнение 1. Решите эту задачу в общем виде, считая, что стороны треугольника равны a , b и c . Вы должны получить следующий результат.

Если длины сторон треугольника равны a , b и c , то длины отрезков, на которые вписанная окружность делит его стороны, равны $p - a$, $p - b$, $p - c$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр данного треугольника.

Точнее, если A_1 , B_1 , C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC , CA , AB треугольника ABC соответственно, то $AB_1 = AC_1 = p - a$; $BA_1 = BC_1 = p - b$; $CA_1 = CB_1 = p - c$.

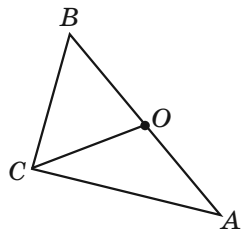
Упражнение 2. Используя полученный результат, докажите.

Диаметр d окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами a , b и c , где $a \leq b < c$, можно вычислить по формуле

$$d = a + b - c.$$

Пример 2. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на его стороне, а одна сторона этого треугольника равна радиусу этой окружности. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на стороне AB . Тогда $OA = OB = OC = R$, R — радиус этой окружности. Тогда $\angle C = 90^\circ$ (замечатель-

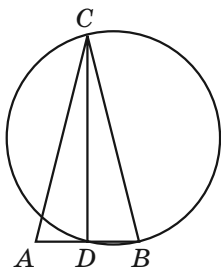


¹ $A_1B = x - 1$, поскольку $A_1B = BC - CA_1 = 7(8 - x) = x - 1$.

ное свойство окружности). Пусть $BC = R$, тогда треугольник OBC — равносторонний и поэтому $\angle B = 60^\circ$. Следовательно, $\angle A = 30^\circ$.

Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Пример 3. Определите отношение, в котором окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, делит его основание.

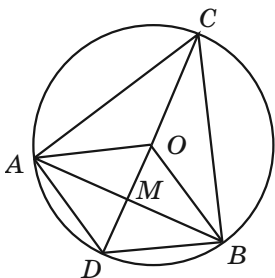


Решение. Пусть окружность с диаметром BC пересекает основание AB равнобедренного треугольника ABC в точке D . Тогда угол D треугольника BCD — прямой, следовательно, CD — высота равнобедренного треугольника, опущенная на его основание. Но тогда эта высота есть медиана этого треугольника и, следовательно, D — середина AB , т.е. отношение $AD:DB = 1:1$.

Ответ: 1:1.

Пример 4. Хорда AB окружности перпендикулярна диаметру CD и делит его в отношении 1:3. Определите углы четырехугольника $ACBD$.

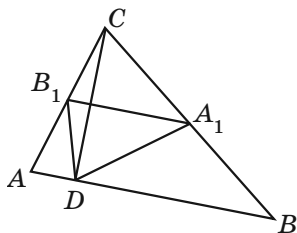
Решение. Пусть диаметр CD окружности с центром в точке O пересекает хорду AB в точке M , причем $MD < MC$. Тогда по условию $MD:MC = 1:3$. Обозначим $MD = x$, тогда $MC = 3x$, а $CD = 4x$. Отсюда $OD = OC = 2x$, а $MO = x$. Следовательно, AM — медиана треугольника OAD , которая является его высотой, так как по условию $AB \perp CD$.



Значит, треугольник OAD — равнобедренный и $AO = AD$. Поскольку CD — диаметр окружности, то треугольник CAD — прямоугольный и, значит, $AO = OC = OD$. Следовательно, треугольник OAD — равносторонний. Отсюда получаем величины углов четырехугольника $ACBD$: $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

Ответ: $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.

Пример 5. Полупериметр треугольника равен p . Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины двух сторон данного треугольника и основание высоты, опущенной на третью его сторону.



Решение. Пусть A_1, B_1 — середины сторон BC и AC треугольника ABC , а CD — его высота, опущенная на сторону AB . Отрезки DA_1 и DB_1 — медианы прямоугольных треугольников, проведенные к их гипотенузам.

Следовательно,

$$DA_1 = 0,5BC, \quad DB_1 = 0,5AC.$$

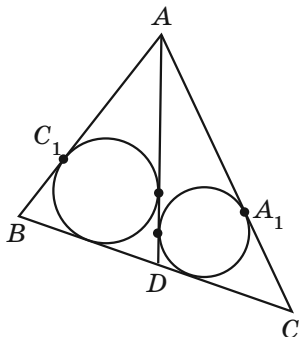
Отрезок A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Значит, по свойству средней линии треугольника $A_1B_1 = 0,5AB$. Отсюда находим искомый периметр треугольника A_1B_1D :

$$\begin{aligned} A_1B_1 + B_1D + A_1D &= 0,5AB + 0,5AC + 0,5BC = \\ &= 0,5(AB + AC + BC) = p. \end{aligned}$$

Ответ: p .

Пример 6. Дан треугольник ABC , в котором $AB = c$, $AC = b$. Медиана AD треугольника ABC разделила его на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с медианой AD .

Решение. Пусть A_1, C_1 — точки касания данных окружностей со сторонами AC и AB соответственно, а $BC = a$. Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, искомый отрезок равен модулю разности $AA_1 - AC_1$. Пусть $p_1 = \frac{c + m_a + 0,5a}{2}$, $p_2 = \frac{b + m_a + 0,5a}{2}$ полупериметры треугольников ABD ,



ACD соответственно. Тогда по свойству вписанной окружности (см. пример 1)

$$|AA_1 - AC_1| = |(p_2 - 0,5a) - (p_1 - 0,5a)| = |p_2 - p_1| = \frac{|b-c|}{2}.$$

Ответ: $\frac{|b-c|}{2}.$

§ 4. Решение треугольников

Решение треугольников, т.е. определение неизвестных элементов треугольника по известным его элементам, осуществляется, как правило, с помощью трех метрических теорем: 1) теоремы Пифагора; 2) теоремы косинусов; 3) теоремы синусов.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 1).

Теорема косинусов

В любом треугольнике квадрат его стороны равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (рис. 2).

Теорема синусов

В любом треугольнике отношение длины стороны к синусу противолежащего ей угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (рис. 2).}$$

Полезно знать наизусть следующие соотношения.

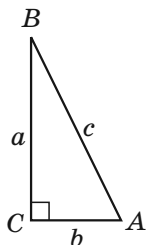


Рис. 1

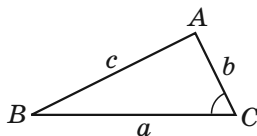


Рис. 2

Катет прямоугольного треугольника, противолежащий углу в 30° , равен половине его гипотенузы.

Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными a , равна $a\sqrt{2}$.

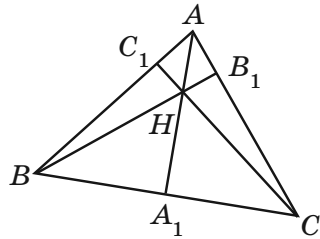
Высота h равностороннего треугольника со стороной, равной a , равна $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Радиус R окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной, равной a , равен $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а радиус r вписанной в него окружности равен $r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Кроме этих формул и теорем, при решении треугольников приходится использовать также понятия тригонометрических функций острых и тупых углов. Приведем примеры задач, позволяющих закрепить понятия тригонометрических функций.

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC заданы длины сторон $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Найдите расстояния от точки пересечения его высот до вершин A , B и C .

Решение. Если известны стороны треугольника, то теорема косинусов позволяет найти косинусы всех его углов. Поэтому будем считать, что все углы треугольника ABC известны. Пусть в треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H , другими словами, пусть точка H — ортоцентр треугольника ABC .



В треугольнике ABB_1 находим $AB_1 = AB \cos A = c \cos A$. Заметим, что в прямоугольных треугольниках AA_1C и AHB_1 угол CAA_1 общий. Поэтому $\angle AHB_1 = \angle ACA_1 = \angle C$.

$$\text{Следовательно, } AH = \frac{AB_1}{\sin C} = \frac{c \cos A}{\sin C}.$$

$$\text{Аналогично, } BH = \frac{BC_1}{\sin A} = \frac{a \cos B}{\sin A}, \quad CH = \frac{CA_1}{\sin B} = \frac{b \cos C}{\sin A}.$$

Упражнение 1.

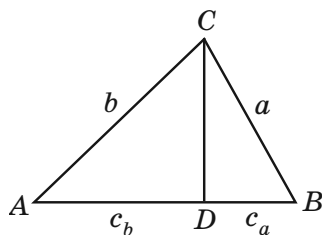
1) Получите для тех же самых отрезков следующие выражения:

$$AH = \frac{b \cos A}{\sin B}, \quad BH = \frac{c \cos B}{\sin C}, \quad CH = \frac{a \cos C}{\sin A}.$$

2) Рассмотрите точку пересечения высот (ортоцентр) прямоугольного и тупоугольного треугольников (имеется в виду точка пересечения прямых, содержащих высоты этих треугольников) и определите расстояние от этой точки до вершин данного треугольника. При этом следует считать известными длины сторон треугольника. Выясните, останутся ли справедливыми полученные нами формулы.

§ 5. Соотношения в прямоугольном треугольнике

Пусть из вершины C прямого угла треугольника ABC проведена высота CD , где точка D — основание высоты CD — разделила гипотенузу AB треугольника на два отрезка, называемых проекциями катетов на гипотенузу: $AD = c_a$ и $BD = c_b$, при этом $BC = a$, $CA = b$, $AB = c = c_a + c_b$.



Наиболее важными являются следующие шесть соотношений:

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$a^2 = c \cdot c_a;$$

$$b^2 = c \cdot c_b;$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c_a}{c_b};$$

$$CD = \sqrt{c_a \cdot c_b} = \frac{ab}{c}.$$

Упражнение 1. Докажите все эти соотношения.

Пример 1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разбивает ее на отрезки длиной 27 и 75. Найдите площадь этого треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — высота. Тогда из условия $BD = 27$, $AD = 75$. Следовательно,

$$AB = 27 + 75 = 102,$$

$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{27 \cdot 75} = 45.$$

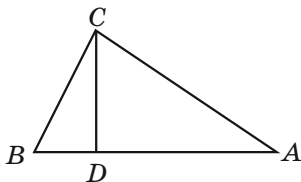
Теперь площадь треугольника ABC находим по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} 102 \cdot 45 = 2295.$$

Ответ: 2295.

Пример 2. В прямоугольном треугольнике один катет равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = 15$, CD — высота. Тогда $CD \perp AB$ и, значит, AD — проекция катета AC на гипотенузу AB . По условию $AD = 16$. Достаточно найти диаметр описанного круга, которым является гипотенуза AB треугольника ABC . Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу. В нашем случае $BC^2 = AB \cdot BD$. Обозначив $BD = x$, получим уравнение



$$15^2 = (x + 16) \cdot x \Leftrightarrow x^2 + 16x - 225 = 0.$$

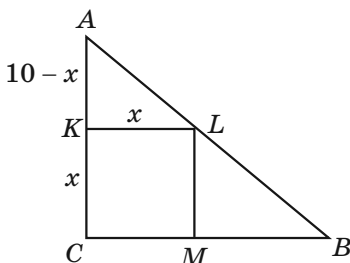
Решив квадратное уравнение, найдем его положительное решение $x = BD = 9$. Следовательно, гипотенуза

$$AB = BD + AD = 9 + 16 = 25.$$

Отсюда площадь описанного круга равна $\frac{1}{4} \pi \cdot AB^2 = \frac{625\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{625\pi}{4}$.

Пример 3. В прямоугольный треугольник с катетами 10 м и 15 м вписан квадрат, имеющий с треугольником общий угол. Найдите площадь квадрата.



Решение. Пусть в треугольнике ABC катеты $AC = 10$, $BC = 15$. Обозначим сторону вписанного квадрата $CKLM$ через x . По определению тангенса угла CAB имеем

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{KL}{AK}.$$

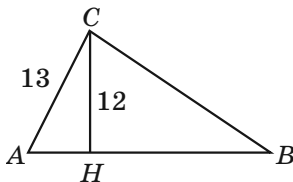
Отсюда

$$\frac{15}{10} = \frac{x}{10-x} \Leftrightarrow \frac{15}{25} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 6.$$

При упрощении пропорции мы воспользовались производной пропорцией: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{c+d}$, $a \neq -b$. Следовательно, площадь квадрата равна 36.

Ответ: 36.

Пример 4. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12. Найдите площадь этого треугольника.



Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 13$ и высота $CH = 12$. По теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

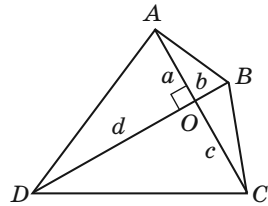
Поскольку $CH^2 = AH \cdot HB$, то $144 = 5 \cdot HB \Leftrightarrow HB = \frac{144}{5} = 28,8$.

Следовательно, $AB = AH + HB = 33,8$. Площадь треугольника вычислим по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 33,8 \cdot 12 = 202,8$.

Ответ: 202,8.

Пример 5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите AD .

Решение. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Обозначим $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$. Поскольку диагонали AC и BD перпендикулярны, то очевидно, что треугольники OAB , OBC , OCD , ODA прямоугольные, а стороны четырехугольника $ABCD$ являются их гипотенузами.



Поэтому по теореме Пифагора получаем равенства

$$AB^2 = a^2 + b^2; \quad BC^2 = b^2 + c^2;$$

$$CD^2 = c^2 + d^2; \quad DA^2 = d^2 + a^2.$$

Отсюда следует, что

$$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

$$BC^2 + DA^2 = b^2 + c^2 + d^2 + a^2$$

или в свернутой форме

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 \Leftrightarrow 3^2 + 5^2 = 4^2 + DA^2.$$

Следовательно, $DA^2 = 3^2 + 5^2 - 4^2 = 18$, откуда искомая длина $AD = 3\sqrt{2}$.

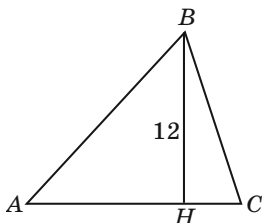
Ответ: $3\sqrt{2}$.

Замечание. Обратите внимание, мы доказали интересную теорему:

Если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то суммы квадратов его противоположных сторон равны.

Упражнение 2. Докажите обратную теорему:

Если суммы квадратов противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны.



Пример 6. (ЕГЭ) Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC , если его высота BH равна 12 и известно, что $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{4}{5}$.

Решение. В треугольнике ABH

$$AB = \frac{BH}{\sin A} = 13.$$

В треугольнике BCH $BC = \frac{BH}{\sin C} = 15.$

Отсюда по теореме Пифагора находим: в треугольнике ABH $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 5$ и в треугольнике BHC

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 9.$$

$$AC = AH + CH = 14.$$

Площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 84.$

С другой стороны, $S_{ABC} = p \cdot r$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, а r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Поскольку

$$p = 0,5(13 + 15 + 14) = 21,$$

то получаем уравнение $84 = 21 \cdot r$. Откуда $r = 4$.

Ответ: 4.

§ 6. Задачи на применение теорем косинусов и синусов

Пример 1. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 7$, $AB = 5$; $\cos A = 0,2$. Найдите сторону AC и площадь круга, описанного около этого треугольника.

Решение. По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A.$$

Пусть $AC = b$. Тогда

$$\begin{aligned} 7^2 &= 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot 0,2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2 - 2b - 24 &= 0 \Leftrightarrow b = 6. \end{aligned}$$

Теперь по теореме синусов

$$2R = \frac{BC}{\sin A}, \text{ где } R \text{ — радиус круга,}$$

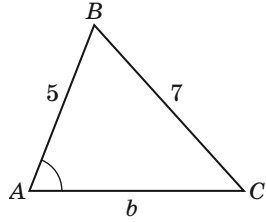
описанного около треугольника ABC .

Поскольку $\cos A = 0,2$, то

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Отсюда $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{35}{4\sqrt{6}}$. Искомую площадь описанного круга найдем по формуле $S = \pi R^2 = \frac{1225\pi}{96}$.

Ответ: $6; \frac{1225\pi}{96}$.



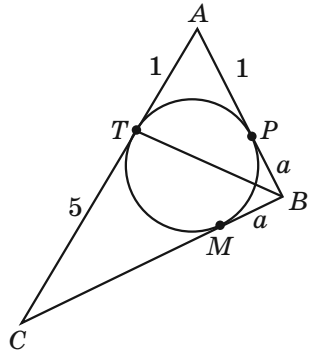
Пример 2. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке T , причем $AT = 1$, $CT = 5$, а $\cos A = \frac{1}{6}$. Найдите BT .

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке P , а стороны BC в точке M . Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, находим $AP = AT = 1$, $CT = CM = 5$, $BP = BM$. Пусть $BP = BM = a$. Тогда из треугольника ABC по теореме косинусов получаем уравнение

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (5+a)^2 &= (a+1)^2 + 6^2 - 2(a+1) \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда $AB = 2$. Искомую длину найдем из треугольника ABT опять по теореме косинусов. Имеем

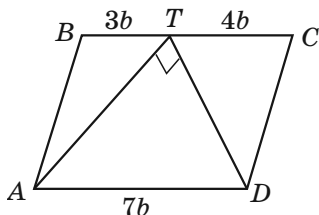
$$BT^2 = AT^2 + AB^2 - 2AT \cdot AB \cos A \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow BT^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{3}.$$

Следовательно, $BT = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{3}$.



Пример 3. Точка T лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ так, что $BT:TC = 3:4$. Известно, что $\cos A = \frac{2}{\sqrt{10}}$ и $\angle ATD = 90^\circ$. Найдите отношение сторон параллелограмма.

Решение. Из условия следует, что $BT = 3b$, $TC = 4b$. Кроме того, $\angle A = \angle C$ и $\angle B = 180^\circ - \angle A$. Отсюда следует, что

$$\cos C = \cos A = \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ и}$$

$$\cos B = \cos(180^\circ - A) = -\cos A = -\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Теперь из треугольников ABT и CDT по теореме косинусов, обозначив $AB = a$, находим

$$AT^2 = a^2 + 9b^2 - 2 \cdot a \cdot 3b \cdot \cos B = a^2 + 9b^2 + 6ab\sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$DT^2 = a^2 + 16b^2 - 2 \cdot a \cdot 4b \cdot \cos C = a^2 + 16b^2 - 8ab\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Но треугольник ATD — прямоугольный и поэтому

$$AT^2 + DT^2 = AD^2.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\left(a^2 + 9b^2 + 6ab\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + \left(a^2 + 16b^2 - 8ab\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 49b^2 \Leftrightarrow$$

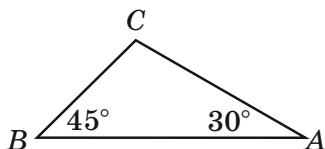
$$\Leftrightarrow 12b^2 + ab\sqrt{\frac{2}{5}} - a^2 = 0 \Leftrightarrow 12\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{5}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\sqrt{10}}{12}.$$

Теперь находим искомое отношение $\frac{BC}{AB} = \frac{7b}{a} = \frac{7\sqrt{10}}{12}$.

Ответ: $\frac{BC}{AB} = \frac{7\sqrt{10}}{12}$.

Пример 4. Два угла треугольника равны 30° и 45° . Площадь круга, описанного около этого треугольника, равна 8π . Найдите площадь этого треугольника.



Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Тогда $\angle C = 105^\circ$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$, где R — радиус круга, описанного около этого треугольника. По условию площадь этого круга $\pi R^2 = 8\pi$. Значит, $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Найдём стороны треугольника ABC . Получим

$$BC = 2R \sin A = 2\sqrt{2}; \quad AC = 2R \sin B = 4.$$

Теперь найдём площадь данного треугольника по формуле

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 0,5 \cdot AC \cdot BC \cdot \sin C = \\ &= 0,5 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \sin 105^\circ. \end{aligned}$$

Отметим, что значение $\sin 105^\circ$ не содержится среди известных значений тригонометрических функций. Придётся воспользоваться формулами тригонометрии. Имеем

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим искомую площадь треугольника ABC :

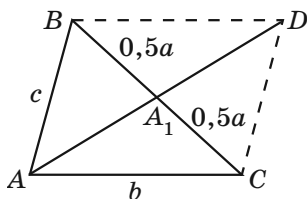
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 0,5 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ = 0,5 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \\ &= 2\sqrt{3} + 2 = 2(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ответ: $2(1 + \sqrt{3})$.

Упражнение 1. Получите следующую полезную формулу для вычисления площади треугольника: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \times \sin B \cdot \sin(A + B)$, R — радиус круга, описанного около треугольника ABC , а A и B — величины углов треугольника при вершинах A и B (см. стр. 396).

§ 7. Вычисление медиан, высот и биссектрис треугольника

Пример 1. Пусть в треугольнике ABC заданы длины его сторон: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Найдите длины 1) медианы, 2) высоты и 3) биссектрисы треугольника, проведенных из вершины A .



Решение. 1) Для вычисления медианы наиболее рационально использовать дополнительное построение. Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, продолжив медиану AA_1 на ее длину за точку A_1 . Далее воспользуемся следующим свойством сторон и диагоналей параллелограмма.

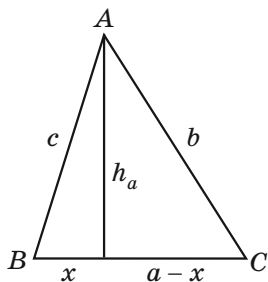
В параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов его диагоналей.

В нашем случае для параллелограмма $ABDC$ имеем равенство

$$2(AB^2 + BD^2) = AD^2 + BC^2.$$

Подставим в это равенство числовые данные нашей задачи, обозначив $AA_1 = m_a$:

$$\begin{aligned} 2(c^2 + b^2) &= (2m_a)^2 + a^2 \Leftrightarrow 4m_a^2 = 2(c^2 + b^2) - a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m_a^2 &= \frac{2(c^2 + b^2) - a^2}{4}. \end{aligned}$$



2) Для вычисления высоты наиболее рационально использовать теорему Пифагора.

Имеем

$$\begin{aligned} h_a^2 &= c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} h_a^2 = c^2 - x^2, \\ c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Из второго уравнения системы находим величину x и

подставляем ее в первое уравнение:
$$\begin{cases} h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2, \\ x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h_a^2 &= \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) = \\ &= \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \right) \cdot \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) = \\ &= \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a} \cdot \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} = \\ &= \frac{(b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Обозначив, как это принято, $p = \frac{a + b + c}{2}$, полупериметр треугольника ABC , заметим, что

$$b - a + c = 2(p - a); \quad b + a - c = 2(p - c); \quad a + c - b = 2(p - b).$$

Тогда получаем формулу¹:
$$h_a^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}.$$

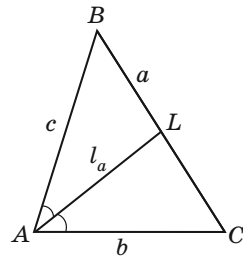
3) Вычислим длину биссектрисы l_a . Здесь полезно вспомнить важное свойство биссектрисы треугольника:

Биссектриса треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам, т.е.

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}.$$

Сначала из пропорции $\frac{BL}{a - BL} = \frac{c}{b}$ найдем

$$BL = \frac{ac}{c + b} \quad \text{и} \quad CL = \frac{ab}{c + b}.$$



Затем (по теореме косинусов) из треугольников ABL и ACL выражаем косинусы равных углов BAL и CAL :

¹ Конечно, эту формулу можно не запоминать. Рекомендуется понять и, следовательно, запомнить способ ее получения.

$$BL^2 = c^2 + l_a^2 - 2c \cdot l_a \cos(\angle BAL);$$

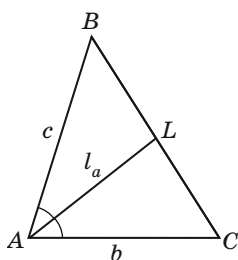
$$CL^2 = b^2 + l_a^2 - 2b \cdot l_a \cos(\angle CAL).$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle BAL) &= \frac{BL^2 - c^2 - l_a^2}{2c \cdot l_a} = \cos(\angle CAL) = \frac{CL^2 - b^2 - l_a^2}{2b \cdot l_a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{BL^2 - c^2 - l_a^2}{2c \cdot l_a} = \frac{CL^2 - b^2 - l_a^2}{2b \cdot l_a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{BL^2 - c^2 - l_a^2}{c} = \frac{CL^2 - b^2 - l_a^2}{b}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу¹ для вычисления длины биссектрисы треугольника:

$$l_a^2 = b \cdot c - BL \cdot CL = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

Для вычисления длины биссектрисы треугольника может оказаться полезной следующая задача.



Пример 2. Пусть в треугольнике ABC заданы длины сторон $AB=c$ и $AC=b$. Пусть также величина угла BAC равна A . Найдите длину биссектрисы AL .

Решение. Выразим площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников ABL и ACL . Получим

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{A}{2}.$$

Отсюда получаем

$$bc \sin A = l_a (b+c) \sin \frac{A}{2}.$$

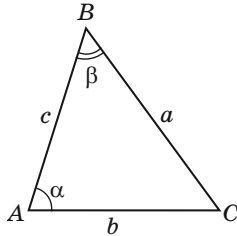
Но $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$. Поэтому, сокращая на $\sin \frac{A}{2}$, находим

$$2bc \cos \frac{A}{2} = l_a (b+c) \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Пример 3. Найдите длины сторон треугольника, два угла которого равны α и β , а периметр равен P .

¹ И эту формулу можно не запоминать.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. По теореме синусов



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Отсюда $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$; $c = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Поэтому

$$P = a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = a \left(1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right).$$

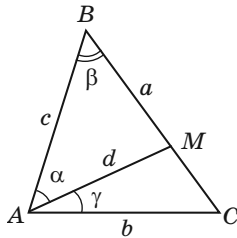
Отсюда находим

$$a = \frac{P \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}; \quad b = \frac{P \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)};$$

$$c = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}.$$

Рассмотрим следующую полезную задачу.

Пример 4. В треугольнике ABC $\angle B = \beta$. На стороне BC выбрана точка M так, что длина $AM = d$. Известно, что $\angle BAM = \alpha$, а $\angle CAM = \gamma$. Найдите длины сторон треугольника ABC .



Решение. Пусть длины сторон треугольника ABC равны a , b , c , как отмечено на рисунке. Угол AMC — внешний

угол треугольника ABM , поэтому $\angle AMC = \alpha + \beta$. По теореме синусов в треугольнике AMC имеем $\frac{d}{\sin C} = \frac{b}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Но $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$, поэтому

$$\sin C = \sin(180^\circ - \alpha - \beta - \gamma) = \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

Поэтому $b = \frac{d \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$. По теореме синусов в треуголь-

нике AMB имеем $\frac{d}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(\angle AMB)}$. Но $\angle AMB = 180^\circ - \alpha - \beta$, поэтому

$$\sin(\angle AMB) = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Следовательно, $c = \frac{d \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$.

Чтобы найти длину стороны BC , запишем теорему синусов для треугольника ABC . Получим $\frac{a}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{b}{\sin \beta}$. Отсюда

$$a = \frac{b \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \beta}.$$

Но $b = \frac{d \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$. Значит, $a = \frac{d \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}$.

§ 8. Площадь треугольника

Перечислим важные формулы для вычисления площади произвольного треугольника.

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c;$$

$$S = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a c \sin B;$$

$$S = pr;$$

$$S = \frac{abc}{4R};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника; r — радиус окружности, вписанной в треугольник, R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b вычисляется по формуле $S = \frac{ab}{2}$.

Площадь равностороннего (правильного) треугольника вычисляется по одной из формул

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4} = 3r^2 \sqrt{3},$$

где a — сторона равностороннего треугольника, R — радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, r — радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник.

Пример 1. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радиус описанной окружности равен R . Найдите площадь треугольника.

Решение. Это одна из немногих задач, для решения которой рисунок не требуется. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

найдем стороны треугольника. Получим

$$a = 2R \sin A = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin B = 2R \sin \beta.$$

Поскольку $C = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, то

$$\sin C = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta).$$

Теперь площадь треугольника вычислим по формуле

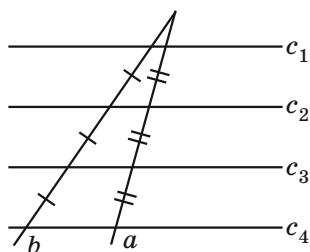
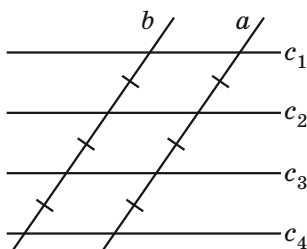
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Получили еще одну формулу для площади треугольника.

§ 9. Отношение отрезков в треугольнике

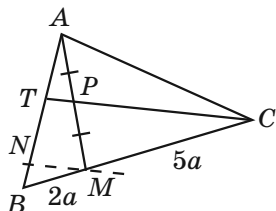
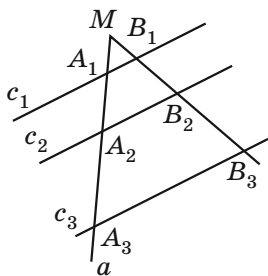
Важную роль при решении многих геометрических задач выполняют **теорема Фалеса** и **теорема о пропорциональных отрезках** — некоторое обобщение теоремы Фалеса. Напомним эти теоремы.

Теорема Фалеса. Если на одной из двух прямых отложены равные отрезки и через концы этих отрезков проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то на этой второй прямой отложатся равные между собой отрезки.



Теорема о пропорциональных отрезках (обобщенная теорема Фалеса). Если на одной из двух прямых отложены отрезки, которые относятся, как $\alpha:\beta:\gamma$ и через концы этих отрезков проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то на этой второй прямой отложатся отрезки, которые относятся соответственно, как $\alpha:\beta:\gamma$.

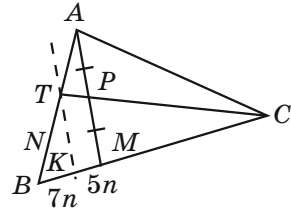
Другими словами, если параллельные прямые пересекают две (или более) прямые, то эти параллельные прямые отсекают на них пропорциональные отрезки.



Пример 1. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что $BM:MC=2:5$. Через середину P отрезка AM проведена прямая CP , пересекающая сторону AB в точке T . Найдите отношения $AT:TB$ и $CP:PT$.

Решение. Во-первых, из условия $BM:MC=2:5$ следует, что $BM=2a$, а $MC=5a$. Проведем прямую MN параллельно CP , где N — точка ее пересечения со стороной AB . Тогда, применив теорему о пропорциональных отрезках к пересекающимся пря-

мым BA и BC , найдем, что $BN = 2c$, а $NT = 5c$. Теперь применим теорему Фалеса к пересекающимся прямым AB и AM . По условию $AP = PM$, следовательно, $AT = TN = 5c$. Отсюда находим $BT = BN + NT = 7c$, значит, искомое отношение $AT : TB = 5 : 7$.



Чтобы найти отношение $CP : PT$, полезно сделать новый рисунок. Поступим аналогично: проведем прямую TK параллельно AM до ее пересечения со стороной BC в точке K . По теореме о пропорциональных отрезках для пересекающихся прямых BA и BC получим $BK = 7n$, $KM = 5n$. Отсюда $BM = 12n$. По условию $CM = \frac{5BM}{2} = 30n$. Далее по теореме о пропорциональных отрезках для пересекающихся прямых CT и CB получим

$$CP : PT = CM : MK = 30n : 5n = 6 : 1.$$

Ответ: $AT : TB = 5 : 7$,
 $CP : PT = 6 : 1$.

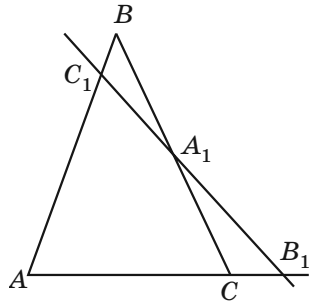
В некоторых случаях для вычисления отношений полезна **теорема Менелая**. Эта теорема не содержится в программе курса математики для общеобразовательных школ. Приведем ее формулировку.

Пусть дан треугольник ABC и прямая, пересекающая стороны этого треугольника или их продолжения и не проходящая ни через одну вершину этого треугольника. Пусть эта прямая пересекает сторону AB в точке C_1 , сторону BC в точке A_1 и продолжение стороны CA в точке B_1 . Тогда справедливо

равенство $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$, которое можно называть ра-

венством Менелая.

Равенство Менелая легко запомнить, если выбрать произвольную вершину треугольника, называть точки A_1 , B_1 и C_1



«промежуточными» точками и обойти треугольник по всем его сторонам, начиная от выбранной точки к «промежуточной» и от «промежуточной» точки к следующей вершине. Выберем, например, вершину B и совершим указанный обход треугольника ABC по схеме

$$B \rightarrow A_1 \rightarrow C \rightarrow B_1 \rightarrow A \rightarrow C_1 \rightarrow B.$$

Тогда первые две точки B , A_1 обозначают числитель первой дроби; вторая и третья точки A_1 , C — знаменатель первой дроби; третья и четвертая точки C , B_1 — числитель второй дроби; четвертая и пятая точки B_1 , A — знаменатель второй дроби; пятая и шестая точки A , C_1 — числитель третьей дроби; шестая и седьмая точки C_1 , B — знаменатель третьей дроби. В результате получим равенство

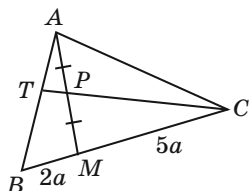
$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1,$$

которое совпадает с равенством Менелая с точностью до порядка записанных отношений.

Полезно понимать, что из равенства $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ следует, что произведение обратных отношений $\frac{C_1B}{AC_1} \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1$.

Теорема Менелая справедлива и в том случае, если данная прямая пересекает только продолжения сторон данного треугольника, при этом равенство Менелая составляется по тому же самому правилу непрерывного обхода треугольника вдоль его сторон: от вершины к «промежуточной» точке и от «промежуточной» точки к вершине.

Упражнение 1. Докажите теорему Менелая.



Продemonстрируем, как работает теорема Менелая для вычисления отношений отрезков. Рассмотрим условие примера 1 и соответствующий рисунок.

Прямая TC пересекает стороны AB , AM и продолжение стороны BM тре-

угольника $МAB$. Составим равенство Менелая, начиная с вершины A : $\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MP}{PA} = 1$. Но по условию $\frac{MP}{PA} = 1$, $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$.

Из последнего равенства следует, что $\frac{BC}{CM} = \frac{7}{5}$.

Поэтому $\frac{AT}{TB} \cdot \frac{7}{5} = 1$. Отсюда $\frac{AT}{TB} = \frac{5}{7}$.

Прямая AM пересекает стороны $ТС$, BC и продолжение стороны TB треугольника $TСВ$. Составим равенство Менелая, начиная с вершины T : $\frac{TP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BA}{AT} = 1$. По условию

$\frac{CM}{MB} = \frac{5}{2}$, кроме того, найдено $\frac{AT}{TB} = \frac{5}{7}$, из которого $\frac{BA}{AT} = \frac{12}{5}$.

Следовательно, $\frac{TP}{PC} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{5} = 1$. Отсюда $\frac{TP}{PC} = \frac{1}{6}$.

Получили те же самые отношения $AT:TB=5:7$, $CP:PT=6:1$.

Вычисление отношений отрезков часто используется в задачах на вычисление площадей или их отношений. В задачах такого типа полезны следующие соображения.

Если два треугольника имеют общее основание (или равные основания), то их площади относятся как высоты, проведенные к этому основанию.

Если два треугольника имеют общую высоту (или равные высоты), то их площади относятся как стороны, к которым эта высота проведена.

Если два треугольника имеют общий угол (или равные углы, или углы, дополняющие друг друга до 180°), то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (или эти дополняющие друг друга углы).

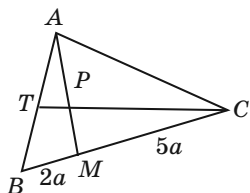
Рассмотрим пример, который продолжает пример 1.

Пример 2. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что $BM:MC=2:5$. Через середину P отрезка AM проведена прямая CP , пересекающая сторону AB в точке T . Найдите площадь треугольника ATP , если площадь треугольника ABC равна 1.

Решение. Искомую площадь треугольника ATP найдем как часть площади треугольника ACT . Поскольку $AT:TB=5:7$ (см. 397), то $AT:AB=5:12$. Далее, треугольники ABC и ACT имеют общую высоту из вершины C . Поэтому

$$\frac{S_{ACT}}{S_{ABC}} = \frac{AT}{AB} = \frac{5}{12}.$$

$$S_{ACT} = \frac{5}{12} S_{ABC} = \frac{5}{12} \cdot 5a.$$

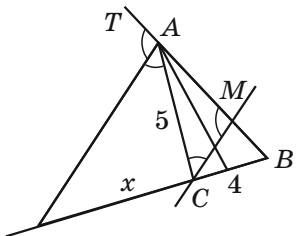


Аналогично, $CP:PT=6:1$ (см. пример 1), следовательно, $PT:TC=1:7$.

Треугольники ATP и ATC имеют общую высоту из вершины A и, значит, $\frac{S_{ATP}}{S_{ATC}} = \frac{PT}{TC} = \frac{1}{7}$.

$$\text{Отсюда } S_{ATP} = \frac{1}{7} S_{ATC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{84}.$$

Ответ: $\frac{5}{84}$.



Пример 3. В треугольнике ABC со сторонами $AB=6$, $AC=5$, $BC=4$ проведены биссектрисы угла BAC и внешнего угла при вершине A , пересекающие прямую BC в точках D и G . Найдите расстояние DG .

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC , а AG — биссектриса внешнего угла при вершине A . Через точку C проведем прямую CM параллельно AG . Пусть $GC=x$. Так как прямые AG и CM параллельны, то $\angle GAC = \angle ACM$ и $\angle GAT = \angle AMC$. Следовательно, треугольник ACM равнобедренный и $AC=AM$. По теореме о пропорциональных отрезках получаем пропорцию $\frac{AM}{GC} = \frac{MB}{BC}$. Используя производную пропорцию, получим: $\frac{AM}{GC} = \frac{AM+MB}{GC+BC} = \frac{AB}{BG}$, и так как $AC=AM$, то $\frac{AC}{GC} = \frac{AB}{BG}$.

Отсюда $\frac{5}{x} = \frac{6}{x+4} \Leftrightarrow x = 20$. Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам, т.е. $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$. Обозначим $CD = y$. Тогда $\frac{5}{6} = \frac{y}{4-y} \Leftrightarrow y = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$. Следовательно, искомое расстояние $GD = 21\frac{9}{11}$.

Упражнение 2. Докажите с помощью теоремы о пропорциональных отрезках свойство биссектрисы треугольника $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB}$ (см. стр. 391, пример 1, пункт 3).

§ 10. Подобие треугольников

Напомним определение подобных треугольников.

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ называются подобными, если их углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а сходственные стороны, т.е. стороны, противолежащие этим равным углам, пропорциональны: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$, где число k — коэффициент подобия, при этом пишут $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k .

Из определения следует, что:

в подобных треугольниках отношение любых соответствующих отрезков равно коэффициенту подобия. Например, если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k , AM и A_1M_1 — медианы этих треугольников, то $\frac{AM}{A_1M_1} = k$;

отношение периметров подобных треугольников также равно коэффициенту подобия;

отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, а коэффициент подобия равен квадратному корню из отношения площадей подобных треугольников.

Большое значение при решении задач имеют **признаки подобия треугольников**.

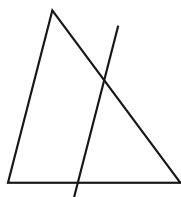


Рис. 1

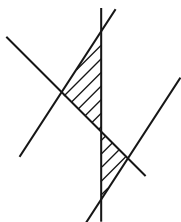
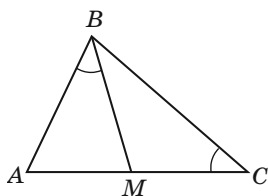


Рис. 2



$$\triangle ABC \sim \triangle AMB$$

Рис. 3

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (УУ)¹.

Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключающие эти пропорциональные стороны, равны, то такие треугольники подобны (СУС).

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (ССС)².

При решении задач полезно знать наизусть некоторые «стандартные» расположения пар подобных треугольников. Укажем некоторые из таких пар.

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному (рис. 1).

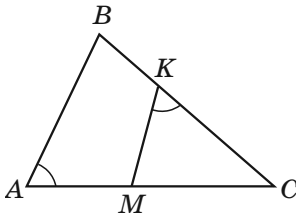
Если две прямые, пересекающиеся в некоторой точке, пересечены двумя другими параллельными прямыми так, что эта точка является внутренней точкой полосы, образованной данными парал-

лельными прямыми, то эти прямые отсекают от данных пересекающихся прямых два подобных треугольника (рис. 2).

Указанные пары подобных треугольников в геометрических задачах встречаются наиболее часто. Однако есть и иные пары, некоторые из которых приведены на рис. 3, 4, 5, 6 и 7 без словесного описания.

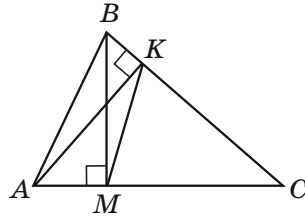
¹ «УУ» — удобное сокращенное обозначение признака подобия «по двум углам».

² Не следует думать, что этими тремя признаками исчерпываются признаки подобия. Существуют и иные признаки, но они не столько удобны, как те, которые только что сформулированы.



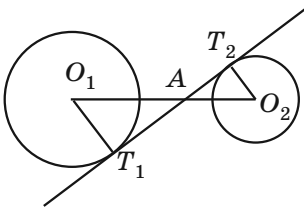
$$\triangle ABC \sim \triangle KMC$$

Рис. 4



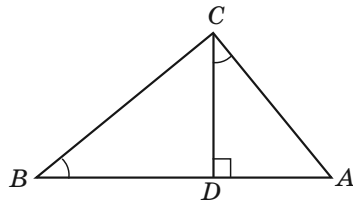
$$\triangle ABC \sim \triangle KMC, k = \cos C$$

Рис. 5



$$\triangle O_1T_1A \sim \triangle O_2T_2A$$

Рис. 6



$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

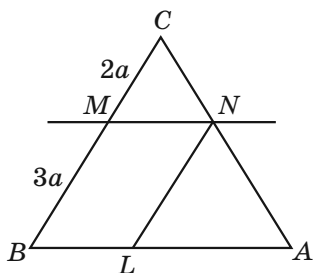
Рис. 7

Пример 1. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что $BM:MC=3:2$. Через точку M проведена прямая MN , параллельная AB , пересекающая сторону AC в точке N . Через точку N проведена прямая NL , параллельная BC , пересекающая сторону AB в точке L . Известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а его периметр равен 60.

Найдите площади и периметры треугольников CMN и ALN .

Решение. Отметим, что из отношения $BM:MC=3:2$ следует, что $BM=3a$, $MC=2a$. Далее заметим, что треугольник ABC и образовавшиеся треугольники CMN и ALN подобны. При этом $\triangle ABC \sim \triangle NMC$ ¹ с коэффициентом подо-

¹ Обратите внимание на то, что неверно было бы написать $\triangle ABC \sim \triangle CMN$, поскольку при такой записи должно было бы выполняться равенство соответствующих углов, например $\angle CAB = \angle NCM$, а это равенство не следует из условия задачи.



бия $k = \frac{BC}{CM} = \frac{5}{2}$, и $\triangle ABC \sim \triangle ALN$

с коэффициентом подобия

$k_1 = \frac{BC}{NL} = \frac{5}{3}$, поскольку $MNLB$ —

параллелограмм и $NL = MB = 3a$.

Отсюда следует, что, во-первых, пе-

риметр $P_{NMC} = \frac{2}{5}P_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot 60 = 24$,

а периметр $P_{ALN} = \frac{3}{5}P_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 60 = 36$. Аналогично, для пло-

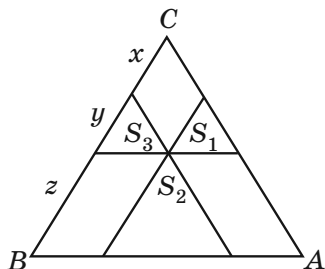
щадей:

$$S_{NMC} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{4}{25} \cdot 30 = 4,8 \text{ и}$$

$$S_{ALN} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{9}{25} \cdot 30 = 10,8.$$

Ответ: $P_{NMC} = 24$, $P_{ALN} = 36$, $S_{NMC} = 4,8$ и $S_{ALN} = 10,8$.

Пример 2. Через произвольную точку, лежащую во внутренней области треугольника ABC , провели прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся треугольников равны S_1 , S_2 , S_3 . Найдите площадь треугольника ABC .



Решение. Отметим, что каждый из трех образовавшихся треугольников подобен данному треугольнику ABC и они подобны между собой. Пусть x , y , z длины отрезков, образовавшихся на стороне BC , и

S_0 — искомая площадь треугольника ABC . Используя свойство отношения площадей подобных треугольников, получаем следующие равенства:

$$\frac{x}{x+y+z} = \sqrt{\frac{S_1}{S_0}}; \quad \frac{y}{x+y+z} = \sqrt{\frac{S_2}{S_0}}; \quad \frac{z}{x+y+z} = \sqrt{\frac{S_3}{S_0}}.$$

Разделим числитель и знаменатель левой части первого

равенства на y . Получим $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y} + 1 + \frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_0}}$ и подставим в это

равенство отношения $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{S_1}{S_3}}; \frac{z}{y} = \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}$.

Имеем

$$\frac{\sqrt{\frac{S_1}{S_3}}}{\sqrt{\frac{S_1}{S_3}} + 1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_3}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_0}}.$$

Умножим числитель и знаменатель левой части равенства на $\sqrt{S_3}$.

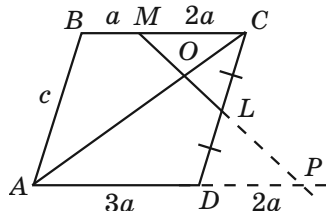
Получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}} &= \sqrt{\frac{S_1}{S_0}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} &= \sqrt{S_0} \Leftrightarrow S_0 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2. \end{aligned}$$

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Пример 3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и L соответственно так, что $BM:BC=1:3$ и $CL:CD=1:2$. Прямая ML пересекает диагональ AC в точке O . Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 560. Найдите площадь четырехугольника $AOLD$.

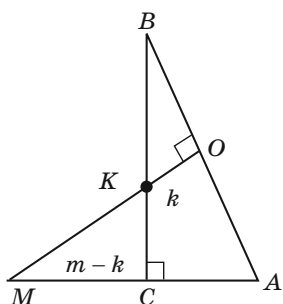
Решение. Из заданных отношений $BM:BC=1:3$ и $CL:CD=1:2$ следует, что если $BM=a$, то $BC=3a$, а $MC=2a$. А также, если $CL=b$, то $CD=2b$, т.е. L — середина стороны CD . Продолжим отрезок ML за точку L до пересечения с прямой AD в точке P . Треугольник MLC равен треугольнику PLD по стороне и двум углам ($\angle MLC = \angle PLD$, $\angle MCL = \angle PDL$, $CL = LD$), поэтому $DP=2a$. Но $AD=BC=3a$, следова-



тельно, $AP = 5a$. Замечаем, что $\triangle AOP \sim \triangle COM$ с коэффициентом подобия $k = \frac{AP}{CM} = \frac{5}{2}$, следовательно, $\frac{CO}{AO} = \frac{2}{5}$. Диагональ AC делит параллелограмм на два равных треугольника, поэтому площадь $S_{ACD} = 280$, а треугольники ACD и OCL имеют общий угол ACD . Поэтому $\frac{S_{ACD}}{S_{OCL}} = \frac{CA \cdot CD}{CO \cdot CL} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{1} = 7$. Отсюда $S_{OCL} = \frac{1}{7} \cdot S_{ACD} = 40$. Следовательно, искомая площадь $S_{AOLD} = 240$.

Ответ: 240.

Рассмотрим задачи на подобие, связанные с прямоугольным треугольником.



Пример 4. Из середины O гипотенузы треугольника ABC восставлен к ней перпендикуляр, пересекающий один катет в точке K , а продолжение другого в точке M . Найдите стороны этого прямоугольного треугольника, если $OK = k$, $OM = m$.

Решение. Замечаем несколько пар подобных треугольников:

$\triangle BOK \sim \triangle MOA$ с коэффициентом подобия

$$\frac{BO}{OM} = \frac{OK}{OA}.$$

Но $BO = OA = 0,5AB$, поэтому

$$\frac{0,5AB}{m} = \frac{k}{0,5AB} \Leftrightarrow 0,25AB^2 = mk \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{mk}.$$

Теперь рассмотрим другое подобие: $\triangle ABC \sim \triangle KBO$ с коэффициентом подобия

$$\frac{AC}{KO} = \frac{AB}{KB} = \frac{BC}{OB} \Leftrightarrow \frac{AC}{k} = \frac{2\sqrt{mk}}{BK} = \frac{BC}{\sqrt{mk}}.$$

Сторону BK найдем по теореме Пифагора:

$$BK = \sqrt{BO^2 + OK^2} = \sqrt{mk + k^2} = \sqrt{k(m+k)}.$$

Теперь получаем

$$\frac{AC}{k} = \frac{2\sqrt{mk}}{\sqrt{k(m+k)}} \Leftrightarrow AC = \frac{2k\sqrt{mk}}{\sqrt{k(m+k)}} = 2k\sqrt{\frac{m}{m+k}}.$$

$$\text{Аналогично, } \frac{2\sqrt{mk}}{\sqrt{k(m+k)}} = \frac{BC}{\sqrt{mk}} \Leftrightarrow BC = 2m\sqrt{\frac{k}{m+k}}.$$

$$\text{Ответ: } AB = 2\sqrt{mk}; \quad AC = 2k\sqrt{\frac{m}{m+k}}; \quad BC = 2m\sqrt{\frac{k}{m+k}}.$$

§ 11. Параллелограмм и трапеция

Напомним определение, свойства и признаки параллелограмма.

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

Противоположные стороны параллелограмма равны между собой.

Противоположные углы параллелограмма равны между собой.

Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180° .

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Биссектриса угла параллелограмма, пересекающая его сторону, отсекает от него равнобедренный треугольник.

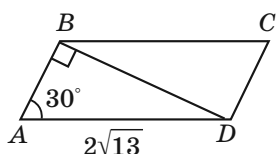
Биссектрисы углов параллелограмма перпендикулярны, а точка их пересечения лежит на средней линии параллелограмма, параллельной другой его стороне.

Сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Площадь параллелограмма может быть найдена по одной из следующих формул: $S = ah_a = bh_b$, $S = absin\alpha$, $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$,

где a, b — стороны параллелограмма; h_a, h_b — высоты параллелограмма, проведенные к сторонам a и b соответственно; α — угол параллелограмма (острый или тупой); β — угол между диагоналями параллелограмма (острый или тупой).

Пример 1. Большая сторона параллелограмма равна $2\sqrt{13}$, а отношение углов, прилежащих к одной стороне, равно 5. Меньшая диагональ параллелограмма перпендикулярна меньшей стороне. Вычислите меньшую сторону, обе диагонали и сторону равностороннего треугольника, равновеликого данному параллелограмму.



Решение.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 2\sqrt{13}$, $BD \perp AB$ и $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle B = 5\alpha$ и по свойству углов параллелограмма $\angle A + \angle B = \alpha + 5\alpha = 180^\circ$. Отсюда $\angle A = 30^\circ$, $BD = 0,5AD = \sqrt{13}$.

Теперь по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{39}.$$

Вторую диагональ находим по свойству сторон и диагоналей параллелограмма:

$$\begin{aligned} 2(AB^2 + AD^2) &= AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow 2(39 + 52) = AC^2 + 13 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AC = 13. \end{aligned}$$

Площадь параллелограмма вычислим по формуле

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30^\circ = \sqrt{39} \cdot 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 0,5 = 13\sqrt{3}.$$

Известно, что площадь равностороннего треугольника со стороной, равной a , вычисляется по формуле $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Получаем уравнение

$$13\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{13}.$$

Ответ: $\sqrt{39}$; $\sqrt{13}$; 13; $2\sqrt{13}$.

Пример 2. Прямая, содержащая биссектрису меньшего угла A параллелограмма $ABCD$, пересекает его сторону BC в точке H так, что $BH:HC = 2:3$, и удалена от вершины D на расстояние, равное 3. Периметр параллелограмма

равен 14. Вычислите длины сторон и площадь параллелограмма.

Решение. Пусть $AD = x$, $AB = y$. Тогда из условия получаем

$$2x + 2y = 14.$$

По свойству биссектрисы угла параллелограмма $AB = BH = y$. Тогда $HC = x - y$ и из условия получаем

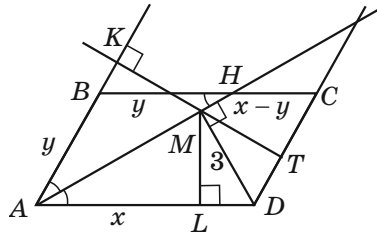
$$\frac{y}{x - y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = 5y.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x = 5y, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 5. \end{cases}$$

Таким образом, $AB = 2$, $AD = 5$. Стороны параллелограмма найдены.

Опустим из точки D перпендикуляр DM на AH . Тогда отрезок DM — расстояние от вершины D до прямой AH и по условию $DM = 3$. Заметим, что по свойству биссектрис углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне,



DM — биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$. Проведем через точку M прямую KT , перпендикулярную CD и пересекающую прямые CD и AB в точках T и K соответственно. Тогда $KT \perp AB$. Пусть ML — высота треугольника AMD . Тогда по свойству биссектрисы угла получаем $ML = MK = MT$. Следовательно, $KT = 2ML$. Отрезок ML — высота прямоугольного треугольника AMD . Поэтому $ML = \frac{AM \cdot MD}{AD} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$ (мы воспользовались тем за-

мечательным фактом, что в прямоугольном треугольнике с катетом 3 и гипотенузой 5 второй катет равен 4. Треугольник со сторонами 3; 4; 5 называется египетским треугольником. Существует только один прямоугольный треугольник, стороны которого — последовательные целые числа. Эти числа 3, 4 и 5). Итак, высота параллелограмма равна

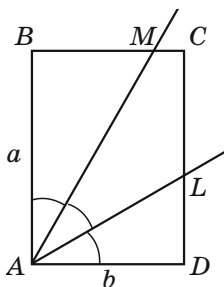
$KT = 2ML = \frac{24}{2} = 12$. Площадь параллелограмма вычисляем

по формуле $S_{ABCD} = CD \cdot KT = 9,6$.

Ответ: 2; 5; 9,6.

Пример 3. Два луча, исходящие из вершины прямоугольника и делящие его угол на три равные части, разделили прямоугольник на три равновеликие части. Определите отношение сторон прямоугольника.

Решение. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ стороны $AB = a$, $AD = b$. Пусть лучи AM и AL делят прямой угол на равные части и точки L и M лежат на сторонах прямоугольника $ABCD$. Пусть точка L лежит на стороне DC . Тогда точка M должна лежать на стороне BC . Действительно, если бы точка M лежала на стороне DC , то треугольники ADL и ADM не могли бы быть равновеликими, поскольку у этих треугольников была бы общая высота и различные основания, так как $DL \neq LM$ ¹. Из прямоугольного треугольника ADL находим



$$DL = AD \operatorname{tg}(\angle DAL) = b \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

По условию площадь прямоугольника $ABCD$ в 3 раза больше площади треугольника ADL . Отсюда получаем равенство

$$AB \cdot AD = 3 \cdot 0,5 AD \cdot DL \Leftrightarrow a = 1,5 \frac{b}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда искомое отношение $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Интересно заметить, что в прямоугольнике с отношением сторон, равным $\frac{\sqrt{3}}{2}$, луч AM должен проходить

¹ Пусть $DL = LM$. Тогда биссектриса $\angle BAM$ — медиана треугольника BAM и, значит, $\triangle BAM$ равнобедренный с двумя прямыми углами. Противоречие.

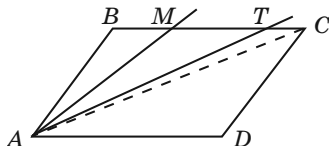
через середину BC , а луч AL должен отсекаать отрезок, равный $\frac{2}{3}DC$. В самом деле,

$$BM = atg30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{2};$$

$$DL = btg30^\circ = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3}a.$$

Пример 4. Два луча, исходящие из вершины A параллелограмма $ABCD$, делят его на три части, площади которых относятся как $2:3:7$ (считая от вершины B). Установите положения точек пересечения этих лучей со сторонами параллелограмма, если его сторона $BC=18$.

Решение. Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$. Из условия следует, что лучи, исходящие из его вершины A делят его на три части, площади которых равны



$$2\frac{S}{12} = \frac{S}{6}, \quad 3\frac{S}{12} = \frac{S}{4}, \quad 7\frac{S}{12} = \frac{7S}{12}.$$

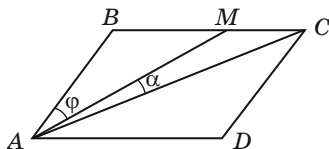
Следовательно, оба луча пересекают сторону BC параллелограмма. Пусть это будут точки M и T , причем пусть точка M лежит между точками B и T . Треугольники ABM , ABT и ABC имеют общую высоту из вершины A , следовательно, отношение их оснований равно отношению соответствующих площадей, а именно:

$$BM:BT:BC = \frac{S}{6} : \left(\frac{S}{6} + \frac{S}{4} \right) : \frac{S}{2} = 2:5:6.$$

Отсюда следует, что $BM = \frac{1}{3}BC = 6$, а $BT = \frac{5}{6}BC = 15$, значит, $MT = 9$.

Ответ: Данные лучи AM , AT пересекают сторону BC параллелограмма $ABCD$ так, что $BM = 6$, $MT = 9$.

Пример 5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM:MC=2:1$ и $\angle CAM = \alpha$. Найдите $\angle BAD$.



Решение. Пусть $\angle BAD = 2\varphi$. Так как AM — биссектриса угла BAD , то $\angle BAM = \varphi$, а так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle BAC = 180^\circ - 2\varphi$.

По теореме синусов в треугольнике ABC имеем

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{BC}{\sin(\varphi + \alpha)} \Leftrightarrow \frac{AC}{\sin 2\varphi} = \frac{BC}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

По теореме синусов в треугольнике AMC имеем

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{MC}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{MC}{\sin \alpha}.$$

Отсюда, учитывая заданное отношение $BC:MC = 3:1$, получим

$$\frac{\sin \varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{3 \sin \alpha}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

Теперь с помощью формул тригонометрии получим

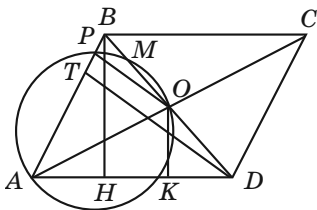
$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} &= \frac{3 \sin \alpha}{\sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \varphi} \Leftrightarrow \frac{1}{2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi} \Leftrightarrow \sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi = 6 \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 5 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что φ — острый угол, находим $\varphi = \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} \alpha)$. Следовательно, искомый угол $\angle BAD = 2 \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} \alpha)$.

Ответ: $2 \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} \alpha)$.

Пример 6. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Окружность с диаметром AO пересекает отрезок BO в его середине, а сторону AB в точке P так, что $AP:PB = 3:1$. Определите:

- 1) отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади круга, ограниченного данной окружностью;
- 2) отношение, в котором данная окружность делит сторону AD , считая от точки A .



Решение. Пусть радиус данной окружности равен r . Тогда из условия следует, что $AO = 2r$. По свойству окружности $AM \perp BO$ и так как M — середина BO , то AM — высота и медиана треугольника ABO .

Следовательно, треугольник ABO — равнобедренный и
 $AB = AO = 2r$.

По свойству окружности $OP \perp AB$, а по условию $AP:PB = 3:1$. Следовательно, $AP = \frac{3}{2}r$, $BP = \frac{1}{2}r$. Из прямоугольных треугольников APO и OPB по теореме Пифагора находим $OP = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \frac{r\sqrt{7}}{2}$ и $OB = \sqrt{PO^2 + PB^2} = r\sqrt{}$. Проведем DT параллельно PO . Так как O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $BO = OP$. Отсюда по теореме Фалеса получаем $PT = BP = 0,5r$. Значит, $BT = r$ и, следовательно, DT — высота и медиана треугольника ABD . Следовательно, треугольник ABD — равнобедренный и

$$AD = BD = 2BO = 2r\sqrt{2}.$$

Равнобедренные треугольники ABO и DBA имеют общий угол и, следовательно, подобны с коэффициентом подобия, равным

$$\frac{AB}{DB} = \frac{2r}{2r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда, поскольку BH и OP высоты подобных равнобедренных треугольников, проведенные к боковым сторонам, по свойству подобных треугольников находим

$$BH = \sqrt{2}OP = r\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Заметим, что BH — высота данного параллелограмма. Поэтому его площадь можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 2r^2\sqrt{7}$. Площадь круга с диаметром $2r$ вычисляем по формуле $S_C = \pi r^2$. Отсюда находим

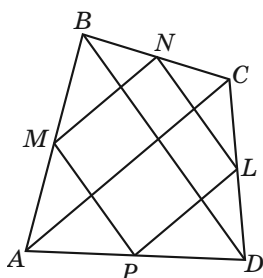
искомое отношение $\frac{S_{ABCD}}{S_C} = \frac{2r^2\sqrt{7}}{\pi r^2} = \frac{2\sqrt{7}}{\pi}$. Пусть данная окружность пересекает AD в точке K . Тогда $OK \perp AD$ по свойству окружности, и значит, $OK \parallel BH$. А поскольку O — середина BD , то OK — средняя линия треугольника BHD и

поэтому $OK = 0,5BH = \frac{r\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Из прямоугольного треугольни-

ка $АОК$ находим $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \frac{5r}{2\sqrt{2}}$. Отсюда отношение $\frac{AK}{AD} = \frac{\frac{5r}{2\sqrt{2}}}{2r\sqrt{2}} = \frac{5}{8}$. Теперь искомое отношение $\frac{AK}{AD} = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{7}}{\pi}$; $5:3$.

Пример 7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC=12$ и $BD=10$. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



Решение. Пусть точки M, N, L, P — середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ соответственно. Рассмотрим пару отрезков MN, PL . Поскольку точки M, N, L, P — середины сторон AB, BC, CD и DA , то MN и PL — средние линии треугольников ABC и ADC . По свойству средней линии $MN \parallel AC \parallel PL$ и $MN = 0,5AC$, $PL = 0,5AC$, следовательно, $MN = PL$.

Отсюда следует, что $MNLP$ — параллелограмм. Аналогично, $NL = MP = 0,5BD$. Следовательно, периметр параллелограмма $MNLP$ равен $2(MN + PL) = AC + BD = 22$.

Ответ: 22.

Замечание. Пример 7 иллюстрирует известный результат, который носит название **теоремы Вариньона**:

Средины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, периметр которого равен сумме длин диагоналей данного четырехугольника, а площадь параллелограмма Вариньона вдвое меньше площади этого четырехугольника.

Кроме этой знаменитой теоремы сформулируем еще одну похожую теорему.

Теорема.

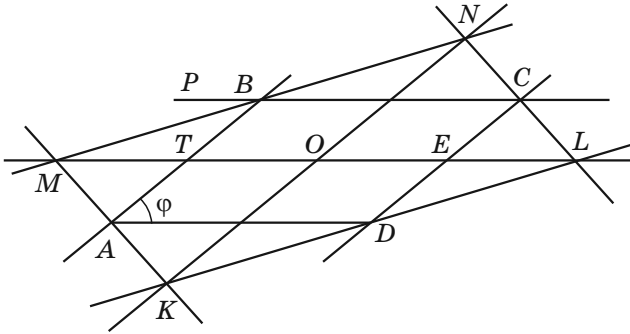
В произвольном четырехугольнике середины диагоналей и середины его противоположных сторон являются верши-

нами параллелограмма, периметр которого равен сумме длин этих противоположных сторон.

Следствие. В произвольном четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных его сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей этого четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Рассмотрим еще одну интересную задачу, показывающую свойство биссектрис внешних углов параллелограмма.

Пример 8. Вычислить периметр и площадь четырехугольника, образованного при пересечении прямых, содержащих биссектрисы внешних углов параллелограмма, если острый угол параллелограмма равен φ , а стороны, заключающие этот угол, равны a и b .



Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$ и $\angle A = \varphi$. Пусть прямые, содержащие биссектрисы внешних его углов, пересекаются в точках M , N , L , K , как на рисунке. $AD \parallel BC$, поэтому каждый из двух внешних углов при вершине B равен φ , а так как MN — биссектриса внешнего угла при этой вершине, то $\angle ABM = \frac{\varphi}{2}$. Аналогично, внешний угол при вершине D также равен φ , а $\angle ADK = \frac{\varphi}{2}$. Прямые BC и AD параллельны, поэтому по признаку параллельности прямых $MN \parallel KL$. Аналогично, $MK \parallel NL$. Следовательно, четырехугольник $MNLK$ — параллелограмм. Внешний угол при вершине A равен $\pi - \varphi$, значит, $\angle BAM = \frac{\pi - \varphi}{2}$.

Отсюда $\angle BMA = \pi - \frac{\pi - \varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, параллелограмм $MNLK$ — прямоугольник.

Пусть MT — медиана прямоугольного треугольника AMB . Тогда $MT = TB$ и в равнобедренном треугольнике BMT $\angle BMT = \frac{\varphi}{2}$. Но $\angle MBP = \frac{\varphi}{2}$, так как MB — биссектриса внешнего угла. Следовательно, прямая MT параллельна прямой BC , а так как T — середина AB , то прямая MT делит противоположные стороны параллелограмма $ABCD$ пополам. Можно сказать, что MT — средняя линия параллелограмма $ABCD$, параллельная стороне BC . Аналогично, KN — средняя линия параллелограмма $ABCD$, параллельная стороне AB . Итак, диагонали прямоугольника $MNLK$ являются средними линиями параллелограмма $ABCD$. Следовательно, центр симметрии прямоугольника $MNLK$ совпадает с центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

Поскольку $AB = a$, то по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к его гипотенузе, $MT = \frac{a}{2}$, аналогично, $LE = \frac{a}{2}$. Кроме того, $TE = b$, следовательно,

$$ML = MT + TE + EL = \frac{a}{2} + b + \frac{a}{2} = a + b.$$

Итак, диагонали прямоугольника $MNLK$ равны $a + b$, а так как эти диагонали параллельны сторонам параллелограмма $ABCD$, то угол между ними равен φ . Теперь можем вычислить площадь прямоугольника $MNLK$:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} KL^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} (a + b)^2 \sin \varphi.$$

Стороны прямоугольника $MNLK$ найдем из прямоугольного треугольника MLN , в котором $ML = a + b$, а $\angle MLN = \frac{\varphi}{2}$. Получим

$$MN = ML \cos \frac{\varphi}{2} = (a + b) \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$NL = ML \sin \frac{\varphi}{2} = (a + b) \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда периметр прямоугольника $MNLK$

$$P_{MNLK} = 2(a + b) \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Ответ: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)^2 \sin \varphi$;

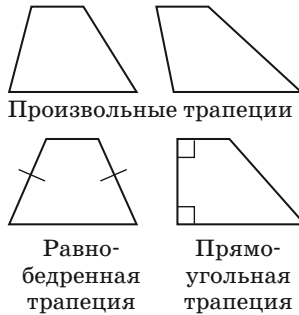
$P_{MNLK} = 2(a+b) \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right)$.

Рассмотрим задачи, связанные с **трапецией**. Напомним определение и некоторые свойства трапеции.

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются **основаниями трапеции**. Непараллельные стороны трапеции называются **боковыми сторонами трапеции**.

Полезно знать **виды трапеций**.



Перечислим некоторые свойства трапеции.

Сумма углов трапеции, прилежащих к ее боковой стороне, равна 180° .

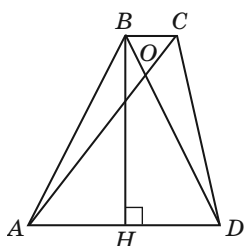
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Биссектрисы углов трапеции, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны, а точка их пересечения лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Биссектриса угла трапеции, пересекающая ее основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.

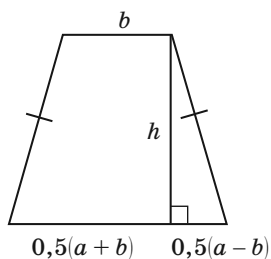
При пересечении диагоналей трапеции образуются два подобных треугольника, коэффициент подобия которых равен отношению оснований трапеции (см. рис.), и два равно- великих треугольника.



Расстояние между основаниями трапеции равно высоте трапеции, т.е. равно отрезку прямой, перпендикулярной основаниям трапеции, концы которого лежат на этих основаниях.

Точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, середины ее оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой (**теорема о четырех точках трапеции**).

Углы, прилежащие к основанию равнобедренной трапеции, равны.



Высота равнобедренной трапеции, опущенная из вершины тупого угла на ее большее основание, делит это основание на два отрезка, один из которых равен полуразности длин оснований, а другой — их полусумме, то есть средней линии трапеции (см. рис.).

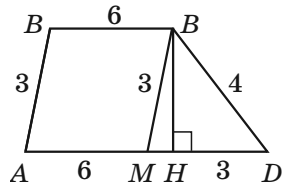
Окружность, на которой лежат все вершины трапеции, называется **описанной** около данной трапеции, а трапеция — **вписанной** в данную окружность. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная, и около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, лежит на прямой, проходящей через середины ее оснований.

Окружность, касающаяся всех сторон трапеции, называется **вписанной** в данную трапецию, а трапеция — **описанной** около данной окружности. Если трапеция описана около окружности, то сумма длин оснований трапеции равна сумме длин ее боковых сторон. Наоборот, если сумма длин оснований трапеции равна сумме длин ее боковых сторон, то в эту трапецию можно вписать окружность. Диаметр окружности, вписанной в данную трапецию, равен ее высоте, а центром этой окружности является точка пересечения биссектрис всех углов трапеции.

Площадь трапеции может быть найдена по одной из следующих формул: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta$, где a, b — основания трапеции; h — высота трапеции; d_1, d_2 — диагонали трапеции; β — угол между диагоналями трапеции (острый или тупой).

Пример 9. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 6 и 9, а боковые стороны равны 3 и 4.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $BC=6$, $AD=9$ и боковые стороны $AB=3$, $CD=4$. Площадь трапеции можно найти по формуле $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot h$, h — высота трапе-



ции. Выполним дополнительное построение, которое часто используется при решении задач на трапецию: через вершину C проведем прямую, параллельную AB , до ее пересечения с прямой AD в точке M . Фигура $ABCM$ — параллелограмм, в котором $AM=6$, $CM=3$, при этом $DM=|AD-AM|=3$. Пусть CH — высота трапеции. Тогда CH — высота треугольника CMD , стороны которого равны 3; 3 и 4. Вычислим CH . Для этого выразим площадь треугольника CMD двумя способами:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} MD \cdot CH,$$

где p — полупериметр треугольника CMD , а a, b, c — длины его сторон. Имеем $p = \frac{3+3+4}{2} = 5$ и поэтому

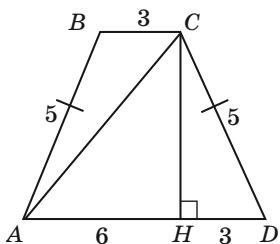
$$\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{2} 3 \cdot CH \Leftrightarrow 2\sqrt{5} = \frac{3}{2} \cdot CH.$$

Отсюда $CH = \frac{4\sqrt{5}}{3}$. Теперь вычисляем площадь данной трапеции:

$$S = \frac{6+9}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{3} = 10\sqrt{5}.$$

Ответ: $10\sqrt{5}$.

Пример 10. Найдите площадь круга, описанного около трапеции с основаниями 3 и 9 и боковой стороной, равной 5.

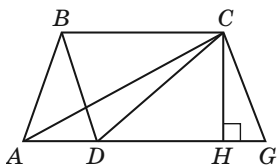


Решение. Пусть около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описан круг. Тогда эта трапеция равнобедренная и $CD=AB=5$. Проведем высоту CH трапеции. По свойству высоты равнобедренной трапеции $HD = \frac{AD-BC}{2} = 3$. В прямоугольном треугольнике CDH гипотенуза 5, а катет 3, следовательно, второй катет равен 4, значит, $CH=4$. Заметим, что круг, описанный около трапеции, описан также и около треугольника ACD . По теореме Пифагора из треугольника ACH найдем $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = 2\sqrt{13}$. Теперь по теореме синусов для треугольника ACD получим $\frac{AC}{\sin D} = 2R$, где R — радиус круга, описанного около трапеции $ABCD$. Из треугольника CDH имеем $\sin D = \frac{CH}{CD} = \frac{4}{5}$, следовательно,

$$\frac{2\sqrt{13}}{\frac{4}{5}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{5\sqrt{13}}{4}.$$

Отсюда искомая площадь круга равна $\pi R^2 = \frac{325\pi}{16}$.

Ответ: $\frac{325\pi}{16}$.



Пример 11. Отрезки AC и BD — диагонали трапеции $ABCD$ и равны соответственно 18 и 8, а угол между ними равен 60° . Найдите среднюю линию и высоту трапеции.

Решение. Выполним дополнительное построение, часто используемое при решении задач на трапецию. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD , пересекающую прямую AD в точке G . Фигура $BCGD$ — параллелограмм, а его сторона GD равна основанию BC данной

трапеции. Следовательно, отрезок AG равен сумме оснований трапеции, а ее средняя линия равна $0,5AG$. В треугольнике ACG $AC=18$, $CG=8$, $\angle ACG=60^\circ$. Поэтому по теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned} AG^2 &= AC^2 + CG^2 - 2AC \cdot CG \cos 60^\circ = \\ &= 324 + 64 - 2 \cdot 18 \cdot 8 \cdot 0,5 = 244. \end{aligned}$$

Значит, $AG=2\sqrt{61}$, а искомая средняя линия трапеции равна $\sqrt{61}$.

Высоту трапеции найдем как высоту CH треугольника ACG , вычислив двумя способами его площадь. Имеем

$$S_{ACG} = 0,5AC \cdot CG \sin 60^\circ = 0,5AG \cdot CH.$$

$$\text{Отсюда } CH = \frac{AC \cdot CG \sin 60^\circ}{AG} = \frac{18 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{61}} = \frac{72\sqrt{3}}{\sqrt{61}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{61}; \frac{72\sqrt{3}}{\sqrt{61}}.$$

Пример 12. Дана трапеция $ABCD$, в которой боковая сторона $CD=10$, расстояние от середины боковой стороны AB до прямой CD равно 6. Найдите площадь трапеции.

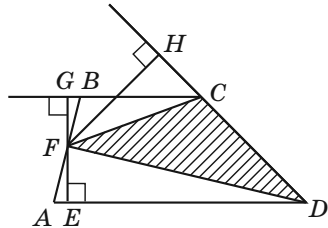
Решение. Пусть F — середина AB . Опустим из точки F перпендикуляр FH на прямую CD . Тогда FH — расстояние от середины боковой стороны AB до прямой CD и по условию $FH=6$. Докажем, что площадь трапеции в 2 раза больше площади треугольника FCD . Через точку F проведем отрезок GE перпендикулярно параллельным прямым BC и AD . Тогда GE — высота трапеции $ABCD$. Найдём площади треугольников FBC и AFD , заметив, что $FG=FE=0,5GE$. Получим

$$S_{FGC} = 0,5BC \cdot FG = 0,25BC \cdot GE;$$

$$S_{AFD} = 0,5AD \cdot FE = 0,25AD \cdot GE.$$

$$\text{Отсюда } S_{FGC} + S_{AFD} = 0,25GE \cdot (BC + AD).$$

$$\text{Площадь трапеции } S_{ABCD} = 0,5GE \cdot (BC + AD).$$



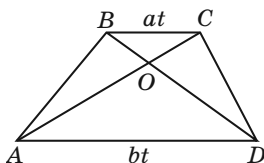
Значит, $S_{FGC} + S_{AFD} = 0,5S_{ABCD}$. Значит, площадь треугольника FCD также равна половине площади трапеции. Отсюда получаем требуемый результат. Остается вычислить площадь треугольника FCD . Имеем $S_{FCD} = 0,5FH \cdot CD = 0,5 \cdot 6 \cdot 10 = 30$. Следовательно, $S_{ABCD} = 60$.

Ответ: 60.

Замечание. В примере 12 нами получен полезный результат: дополнительная формула для вычисления площади трапеции:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{FCD}.$$

Пример 13. Дана трапеция, площадь которой равна S , а отношение оснований равно $a:b$. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Найдите площади этих треугольников.



Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $BC = at$, $AD = bt$, а диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Пусть площадь треугольника BOC равна S_1 .

Треугольники BOC и DOA подобны с коэффициентом подобия, равным $\frac{a}{b}$. Следовательно, площадь треуголь-

ника DOA равна $\frac{b^2}{a^2}S_1$. Треугольники BOC и ABO имеют общую высоту из вершины B , следовательно, их площади относятся как основания, на которые эта высота опущена:

$$\frac{S_{ABO}}{S_1} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a}. \text{ Отсюда } S_{ABO} = \frac{b}{a}S_1. \text{ Аналогично, по-}$$

лучим $S_{DCO} = \frac{b}{a}S_1$. Теперь получаем равенство

$$S = S_{BOC} + S_{DOA} + S_{ABO} + S_{DCO} = S_1 + \frac{b^2}{a^2}S_1 + \frac{2b}{a}S_1 =$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right)S_1 = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 S_1.$$

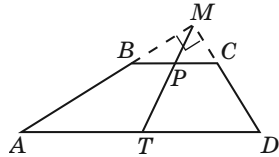
Следовательно, $S_1 = \frac{a^2 S}{(a+b)^2}$. Отсюда

$$S_{DOA} = \frac{b^2 S}{(a+b)^2}, \quad S_{ABO} = S_{DCO} = \frac{abS}{(a+b)^2}.$$

Ответ: $\frac{a^2 S}{(a+b)^2}; \frac{b^2 S}{(a+b)^2}; \frac{abS}{(a+b)^2}; \frac{abS}{(a+b)^2}$.

Пример 14. Дана трапеция $ABCD$, в которой основания $BC = 7$, $AD = 15$, а углы при большем основании равны 32° и 58° . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

Решение. Продолжим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке M . В треугольнике AMD $\angle A = 32^\circ$, $\angle D = 58^\circ$, следовательно, $\angle M = 90^\circ$, и, значит, треугольник AMD — прямоугольный. Проведем его медиану MT . По теореме о четырех точках трапеции эта медиана пересечет основание BC в его середине — точке P . По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к его гипотенузе, имеем $MT = 0,5AD = 7,5$ и $MP = 0,5BC = 3,5$. Отсюда длина искомого отрезка PT равна $MT - MP = 7,5 - 3,5 = 4$.

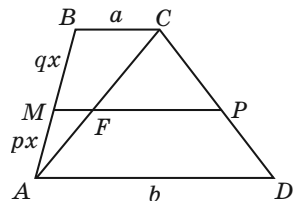


Ответ: 4.

Часто при решении задач на трапецию приходится находить длины отрезков, параллельных основаниям трапеции.

Пример 15. Дана трапеция $ABCD$, в которой основания $BC = a$, $AD = b$. Точка M лежит на боковой стороне AB трапеции так, что $AM:MB = p:q$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям трапеции, пересекает боковую сторону CD трапеции в точке P . Найдите длину отрезка MP .

Решение. Используя отношение $AM:MB = p:q$, обозначим длины $AM = px$, $MB = qx$. Длину MP найдем как сумму длин отрезков MF



и FP . Треугольники AMF и FDC подобны, с коэффициентом подобия $\frac{AM}{AB} = \frac{p}{p+q}$. Отсюда $MF = \frac{pa}{p+q}$. Аналогично, треугольники ACD и FCP подобны, с коэффициентом подобия $\frac{CF}{CA}$. Но по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{CF}{CA} = \frac{MB}{AB} = \frac{p}{p+q}$. Отсюда $FP = \frac{qb}{p+q}$. Теперь окончательно получаем $MP = MF + FP = \frac{pa+qb}{p+q}$.

Ответ: $MP = \frac{pa+qb}{p+q}$.

Замечание. Мы получили формулу для вычисления длины отрезка, параллельного основаниям трапеции, концы которого находятся на его боковых сторонах. Однако, как обычно, запоминать формулу не рекомендуется. Следует понять способ получения этой формулы.

§ 12. Расположение прямой и окружности и двух окружностей

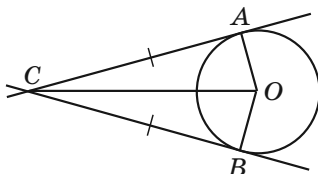
Напомним основные понятия.

Прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек.

Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она называется **касательной к окружности**. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания.

Если прямая имеет ровно две общие точки с окружностью, то говорят, что она пересекает окружность. Прямая, пересекающая окружность, называется **секущей данной окружности**.

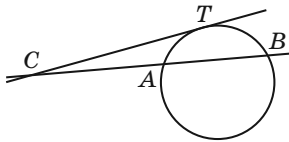
Касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны между собой: $OA \perp CA$, $OB \perp CB$, $CA = CB$.



Упражнение 1. Докажите, что если четырехугольник описан около некоторой окружности, то суммы его противоположных сторон равны между собой. И, если в четырехугольнике суммы его противоположных сторон равны между собой, то этот четырехугольник является описанным около окружности, центр которой лежит в точке пересечения биссектрис всех его углов.

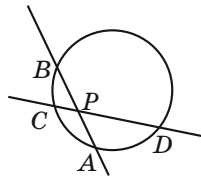
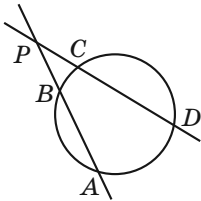
Если к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$CT^2 = CA \cdot CB.$$



Если две секущие AB и CD окружности пересекаются в точке P, не лежащей на окружности, то

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

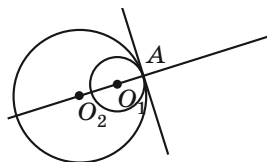
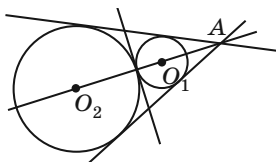


Две окружности не могут иметь более двух общих точек.

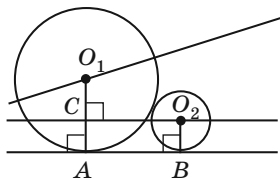
Если две окружности имеют единственную общую точку, то они называются **касающимися окружностями**.

Две касающиеся окружности имеют в общей точке и **общую касательную**, причем точка касания и центры этих окружностей лежат на одной прямой — **линии центров** двух касающихся окружностей. Если касающиеся окружности лежат по разные стороны от своей общей касательной, то говорят, что они **внешне касаются**. В противоположном случае говорят о **внутреннем касании** окружностей.

Если две окружности внешне касаются друг друга, то различают их общую **внутреннюю касательную**, проходящую через их единственную общую точку (точку касания окружностей), и две **внешние касательные**. Внешние касательные к двум касающимся окружностям пересекаются в точке, лежащей на линии центров этих окружностей.



Пример 1. Две касающиеся окружности имеют радиусы R и r ($R > r$). Найдите длину отрезка их общей внешней касательной.



Решение. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 имеют радиусы R , r соответственно. Обозначим через A и B точки их касания с внешней касательной. Проведем через точку O_2 прямую O_2C параллельно AB до ее пересечения с прямой O_1A в точке C . Очевидно, что треугольник O_1CO_2 — прямоугольный и $O_1O_2 = R + r$, $O_1C = R - r$ и $O_2C = AB$. По теореме Пифагора находим

$$O_2C = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Итак, длина отрезка общей касательной двух касающихся окружностей равна удвоенному среднему геометрическому их радиусов.

Пример 2. Две касающиеся окружности имеют радиусы R и r ($R > r$) и касаются одной прямой. Найдите радиус третьей окружности, внешне касающейся двух данных и касающейся данной прямой.

Решение. Окружностей, удовлетворяющих условию задачи — две. Пусть их радиусы x и y . Обозначим точки касания окружностей с данной прямой через A , B , C , D . Ис-

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{xr} = 2\sqrt{Rr} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{ry} = 2\sqrt{Ry}.$$
$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{R} + \sqrt{r}) &= \sqrt{Rr} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (\sqrt{R}-\sqrt{r})\sqrt{y} &= \sqrt{Rr} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}; \frac{Rr}{(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}.$

Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется **центральный углом**. Центральный угол равен градусной мере дуги, заключенной между его сторонами.

409

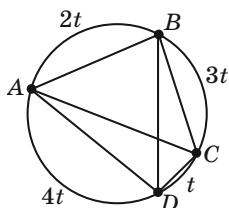
Угол, вершина которого лежит во внешней области, ограниченной окружностью, а стороны пересекают окружность, называется **вневыписанным углом** или углом, вневыписанным в окружность. Вневыписанный угол измеряется полуразностью градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.

Угол, вершина которого лежит во внутренней области, ограниченной окружностью, а стороны и их продолжения пересекают окружность, называется **внутривыписанным углом** или углом, внутривыписанным в окружность. Внутривыписанный угол измеряется полусуммой градусных мер дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.

Рассматриваются также углы, одна или обе стороны которых касаются окружности. Такие углы не имеют специальных названий и кратко называются или **углом, образованным хордой и касательной**, или **углом, образованным двумя касательными к окружности**.

Угол, вершина которого лежит на окружности, одна сторона пересекает окружность, прямая, содержащая вторую его сторону, касается окружности, называется **углом, образованным хордой и касательной**. Такой угол измеряется половиной градусной меры дуги, заключенной между его сторонами.

Угол, вершина которого лежит на окружности, во внешней области, ограниченной окружностью, а стороны касаются окружности, называется **углом, образованным касательными к окружности**. Такой угол измеряется полуразностью градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.



Пример 1. Точки A, B, C, D лежат последовательно на окружности и делят ее в отношении $2:3:1:4$. Найдите углы (в градусах) вписанного четырехугольника $ABCD$ и угол (в градусах) между его диагоналями.

Решение. Из условия следует, что отношение дуг

$$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DA}=2:3:1:4.$$

Отсюда $\widehat{AB} = 2t$, $\widehat{BC} = 3t$, $\widehat{CD} = t$, $\widehat{DA} = 4t$.

Но $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360^\circ$.

Следовательно, $2t + 3t + t + 4t = 360^\circ$. Откуда $t = 36^\circ$. Значит, $\widehat{AB} = 72^\circ$, $\widehat{BC} = 108^\circ$, $\widehat{CD} = 36^\circ$, $\widehat{DA} = 144^\circ$. Угол A опирается на дугу \widehat{BCD} . Следовательно, $\angle A = 0,5\widehat{BCD} = 0,5(108^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$. Аналогично находятся остальные углы:

$$\angle B = 0,5\widehat{CDA} = 90^\circ; \angle C = 0,5\widehat{DAB} = 108^\circ; \angle D = 0,5\widehat{ABC} = 90^\circ.$$

Угол φ между диагоналями — внутривписанный угол. Он равен полусумме дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями. Следовательно, $\varphi = 0,5(\widehat{AB} + \widehat{CD}) = 54^\circ$.

Ответ: 72° ; 90° ; 108° ; 90° ; 54° .

Упражнение 1. Докажите, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180° , и наоборот, если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то такой четырехугольник вписан в окружность, центр которой находится в точке пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

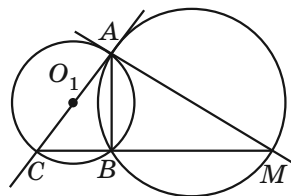
Пример 2. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из данных окружностей проведены хорды AC и AM так, что хорда одной окружности является касательной к другой окружности, причем $BC = a$, $BM = b$. Найдите AB .

Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке O_1 . Угол BCA вписанный и равен половине дуги AB . Угол BAM образован хордой AB и касательной AM к этой окружности и поэтому равен половине той же дуги AB . Следовательно, $\angle BCA = \angle BAM$.

Аналогично, $\angle BAC = \angle AMB$. Следовательно, треугольники BCA и BAM подобны. Из подобия следует пропорция

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BM} \Leftrightarrow \frac{a}{BA} = \frac{BA}{b} \Leftrightarrow AB = \sqrt{ab}.$$

Ответ: \sqrt{ab} .



Пример 3. Дана окружность с диаметром AB . Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую в точках C и D , а диаметр AB в точке E . На дуге CE , не содержащей точки D , взята точка M , отличная от точек C и E . Луч BM пересекает первую окружность в точке N , причем $NC=a$, $ND=b$. Найдите MN .

Решение. Данные окружности симметричны относительно прямой AB , следовательно, дуги CB и BD равны. Поэтому вписанные углы CNM и MND также равны. Прямая BC — касательная ко второй окружности, поскольку $\angle BCA = 90^\circ$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр AB . Следовательно, $\angle BCM = 0,5CM$. Вписанный угол CDM также опирается на дугу CM , поэтому $\angle CDM = \angle BCM$. Вписанные углы CBN и CDN , опирающиеся на одну и ту же дугу CN , равны. Угол CMN — внешний угол треугольника BCM и поэтому

$$\angle CMN = \angle BCM + \angle CBM.$$

С другой стороны, $\angle MDN = \angle CDM + (\angle CDN)$.

Но $\angle CDM = \angle BCM$ и $\angle CBM = \angle CBN = \angle CDN$. Отсюда следует, что $\angle CMN = \angle MDN$. Следовательно, треугольники CNM и MND подобны. Отсюда получаем пропорцию

$$\frac{NC}{MN} = \frac{MN}{ND} \Leftrightarrow \frac{a}{MN} = \frac{MN}{b}.$$

Откуда $MN = \sqrt{ab}$.

Ответ: \sqrt{ab} .

Задачи для самостоятельного решения

1. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB < AD$, $AB = 16$, $\angle A = 60^\circ$ а биссектрисы его углов A и D пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Найдите площадь четырехугольника, образованного в результате пересечения биссектрис его внешних углов.

Ответ: $1152\sqrt{3}$.

2. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K , а сторону BC в точке M , причем $BM:MC = 2:3$, $AK \perp KB$.

Площадь треугольника ABC равна 40. Найдите радиус данной окружности.

Ответ: $\sqrt{15\sqrt{2}}$.

3. Основание и диагональ равнобедренной трапеции равны по 5, а ее высота равна 3. Найдите боковую сторону и площадь трапеции.

Ответ: $\sqrt{10}$; 12.

4. Дан треугольник KMN , $\angle M = 90^\circ$, MP — медиана и диаметр окружности, пересекающая стороны KM , NM в точках T и Q соответственно. Известно, что $S_{MQPT} = 48$, $\sin(\angle KMN) = 0,6$. Найдите MP .

Ответ: 10.

5. Вписанная в треугольник MNK окружность касается его сторон KN и MN в точках P и L соответственно, а стороны MK в точке Q . $LQ = PQ$, $\angle LQP = 30^\circ$, $S_{MNK} = 12\sqrt{3}$. Найдите MK .

Ответ: 12.

6. Вписанная в треугольник MNK окружность касается его сторон NK и MN в точках P и L соответственно, а стороны MK в точке Q . $LQ = PQ$, $\angle LQP = 45^\circ$, $S_{MNK} = 24$, $\operatorname{tg}(\angle MKN) = 0,75$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MNK .

Ответ: 5.

7. В прямоугольную трапецию с углом 30° вписана окружность. Площадь трапеции равна 294. Найдите радиус окружности.

8. Прямая $АН$ содержит высоту $АН$ треугольника ABC и пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке M , $\angle BMC = 105^\circ$, $MC = 4$, $R = 2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки M до прямой BC .

Ответ: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

9. В треугольнике ABC $\angle C = 150^\circ$, $BC = 1$, $AC = 2$. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины C .

Ответ: $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$.

10. Медиана прямоугольного треугольника равна 5. Из середины ее гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пере-

сечения с большим катетом, и длина полученного отрезка равна $\frac{15}{8}$. Найдите стороны и площадь этого прямоугольного треугольника.

Ответ: 6; 8; 10; 24.

11. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и $AC = 4$. Из середины O большего катета восстановлен перпендикуляр до пересечения в точке K с продолженным перпендикуляром из вершины прямого угла на гипотенузу. Найдите:

- 1) площадь треугольника AOK ;
- 2) часть гипотенузы данного треугольника, заключенную внутри треугольника AOK ;
- 3) расстояния CK и BK .

Ответ: $2\frac{2}{3}$; 0,7; $3\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}\sqrt{37}$.

12. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки p и q . Найдите катеты, высоту, опущенную на гипотенузу, и биссектрису прямого угла этого треугольника.

Ответ: $\frac{p(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{q(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$; $\frac{pq\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

13. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 разделен на три треугольника прямыми, соединяющими точку пересечения медиан треугольника с его вершинами. Найдите площадь каждого из этих треугольников.

Ответ: 28.

14. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными большей стороне. Найдите расстояния от этой прямой до ближайших к ним вершин, лежащих на большей стороне треугольника.

Ответ: $\sqrt{33}$; $\sqrt{42}$.

15. Найдите площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

Ответ: 6.

16. Прямая, параллельная стороне треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

Ответ: 11.

17. Две окружности радиусов R и r касаются внешне в точке A . На окружности радиуса r взята точка B , диаметрально противоположная точке A , и в точке B проведена касательная t к окружности радиуса r . Найдите радиус окружности, касающейся внешне данных окружностей и прямой t .

Ответ: $\frac{r(R+r)}{R}$.

18. На отрезке AB отмечена точка C , причем $AC = 2r$, $CB = 2r$. На отрезках AB , AC , CB как на диаметрах построены полуокружности, все лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите радиус окружности, касающейся все трех полуокружностей.

Ответ: $\frac{rR(r+R)}{r^2 + rR + R^2}$.

19. Основания трапеции равны 10 м и 31 м, а боковые стороны — 20 м и 13 м. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 12.

20. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BK = KC = 5$ м, $AK = 8$ м.

Ответ: 48.

21. Около равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при основании 75° описана окружность с центром O . Найдите ее радиус, если площадь треугольника BOC равна 16.

Ответ: 8.

22. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E . Найдите радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Ответ: 6.

23. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружно-

стью в точке K . Найдите сторону AC , если $AM=18$, $MK=8$, $BK=10$.

Ответ: 15.

24. Дан ромб $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает большую диагональ ромба AC в точке E . Найдите CE , если $AB=8\sqrt{5}$, $BD=16$.

Ответ: 12.

25. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC=3\sqrt{2}$, $BC=10$, $\angle MAC=45^\circ$.

Ответ: 21.

26. Точка H лежит на стороне AO треугольника AOM . Известно, что $AH=4$, $OH=12$, $\angle A=30^\circ$, $\angle AMH=\angle AOM$. Найдите площадь треугольника AHM .

Ответ: 8.

27. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABO , $BK=12$, $AK=4$, $\angle BOK=\angle BAO$, $\cos \angle B=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Найдите площадь треугольника OBK .

Ответ: 48.

28. В треугольнике CEH $\angle C=45^\circ$, точка T делит сторону CE на отрезки $CT=2$ и $ET=14$, $\angle CHT=\angle CEH$. Найдите площадь треугольника CHT .

Ответ: 4.

29. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

Ответ: 80.

30. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

Ответ: 5.

31. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

Ответ: 80.

ГЛАВА 8

СТЕРЕОМЕТРИЯ

При решении сложных задач на комбинации многогранников и тел вращения большое значение имеют знания свойств этих фигур. Решение почти любой задачи на вычисление указанных в условии задачи величин состоит из двух частей, которые назовем теоретической и вычислительной. В первой, *теоретической части* решения необходимо достаточно полно обосновать те свойства данной конфигурации, которые будут в дальнейшем использоваться во второй части решения — практической. В *практической части* решения приводятся вычисления, достаточные для получения искомого числового результата. Наибольшие трудности могут возникать при записи теоретической части решения. В этой главе мы рассмотрим основные типы многогранников и тел вращения, перечислим те их свойства, которые наиболее часто встречаются в заданиях вступительных экзаменов в вузы и в вариантах ЕГЭ по математике. При этом мы в большинстве случаев подробно записываем обоснования свойств данной конфигурации. На вступительных экзаменах при решении задач группы С вариантов ЕГЭ запись решения должна быть похожей на приводимые нами обоснования и вычисления или, в некоторых случаях, быть чуть короче. Следует помнить, что запись решения задачи без теоретической части всегда приводит к снижению оценки. Это в особенности относится к задачам единого государственного экзамена по математике.

§ 1. Многогранники

Куб. Прямоугольный параллелепипед

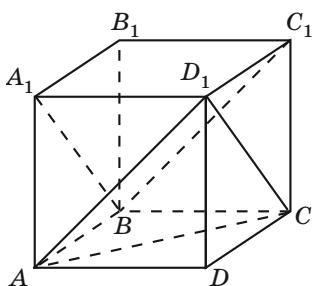
Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Рассмотрим задачи по следующей тематике:

- 1) Угол между прямыми.

- 2) Углы между плоскостями.
- 3) Угол между прямой и плоскостью.
- 4) Расстояние между скрещивающимися *прямыми*.

Угол между прямыми

Понятие угла между прямыми, расположенными в одной плоскости, рассматривается в планиметрии. Прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися прямыми. Напомним, что углом между скрещивающимися



прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые порознь параллельны данным скрещивающимся прямым.

Для каждой пары скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, содержащих эти прямые порознь.

Пример 1. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD и BC_1 .

Решение. Плоскость ABC_1 пересекает параллельные плоскости граней AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым BC_1 и AD_1 . Следовательно, по определению угла между скрещивающимися прямыми $\angle(AD, BC_1) = \angle DAD_1$. Но AA_1D_1D — квадрат. Следовательно,

$$\angle(AD, BC_1) = \angle DAD_1 = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

Пример 2. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD и CA_1 .

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, то

$$\angle(A_1C, AD) = \angle(A_1C, BC) = \angle A_1CB.$$

Для определения угла $\angle A_1CB = \alpha$ рассмотрим треугольник A_1CB . Этот треугольник прямоугольный, поскольку в кубе $BC \perp ABB_1$. Катет $BC = a$, а $A_1B = a\sqrt{2}$ как диагональ

квадрата ABB_1A_1 . Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1B}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$. Отсюда искомый угол $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Пример 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямой AD_1 и прямой A_1B .

Решение. Этот угол — угол между диагоналями смежных граней куба — имеет большое значение при решении многих задач, связанных с кубом. Поскольку $CD_1 \parallel A_1B$, то по определению угла между скрещивающимися прямыми $\angle(AD_1, A_1B) = \angle(AD_1, D_1C)$. Заметим, что все стороны треугольника AD_1C равны между собой, поскольку они являются диагоналями граней куба. Значит, и все его углы равны по 60° . Следовательно, искомый угол $\angle(AD_1, A_1B) = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пример 4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми B_1D и AC .

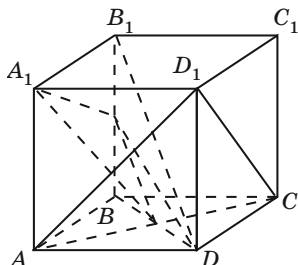
Решение. Этот угол — угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани куба — также важен для решения задач. Оказывается, эти прямые перпендикулярны и искомый угол $\angle(B_1D, AC) = 90^\circ$. Действительно, так как $BB_1 \perp ABC$, а B_1D — наклонная, то BD — ее проекция, которая перпендикулярна прямой AC , как диагонали квадрата $ABCD$. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $B_1D \perp AC$.

Ответ: 90° .

Пример 5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть F — точка пересечения диагоналей AC и BD . Найдите угол между прямыми A_1F и B_1D .

Решение. Проведем среднюю линию FM в треугольнике BDD_1 . Тогда $FM \parallel B_1D$ и поэтому искомый угол равен углу MFA_1 . По теореме Пифагора найдем стороны треугольника MFA_1 :

$$FM = \frac{1}{2} B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$



$$FA_1 = \sqrt{AF^2 + AA_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{и } A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 + MB_1^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Теперь по теореме косинусов в треугольнике MFA_1 находим

$$\cos(\angle MFA_1) = \frac{A_1F^2 + MF^2 - A_1M^2}{2A_1F \cdot MF} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Следовательно, $\angle MFA_1 = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} \cong 62^\circ$.

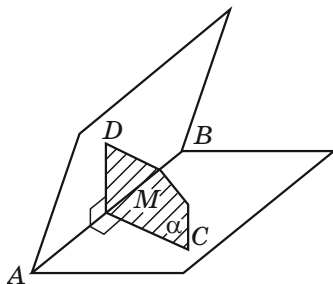
Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Углы между плоскостями

Угол между параллельными плоскостями равен нулю.

Угол между двумя пересекающимися плоскостями равен наименьшему из четырех двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Двугранный угол, гранями которого являются две полуплоскости, имеющие общую границу, измеряется своим **линейным углом**. Линейный угол двугранного угла — угол, сторонами которого являются перпендикуляры к ребру этого двугранного угла, исходящие из произвольной точки ребра и лежащие в полуплоскостях, образующих данный двугранный угол.



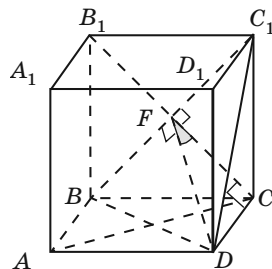
Двугранный угол удобно обозначать в виде $\angle(C, AB, D)$, где точки A и B лежат на ребре двугранного угла, а точки C и D — в различных его гранях. На рисунке $CM \perp AB$ и

$DM \perp AB$, поэтому $\angle DMC$ — линейный угол двугранного угла $\angle(C, AB, D)$. Можно написать

$$\angle(C, AB, D) = \angle DMC.$$

Пример 6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями BDC_1 и BCC_1 .

Решение. Сторонами треугольника BDC_1 являются диагонали граней куба. Следовательно, $\triangle BDC_1$ — равносторонний и поэтому его медиана является DF высотой, т.е. $DF \perp BC_1$. Поскольку диагонали квадрата перпендикулярны, то $CF \perp BC_1$. Отсюда следует, что $\angle DFC$ равен углу между плоскостями BDC_1 и BCC_1 .



Так как $DC \perp BCC_1$, то $DC \perp CF$ и поэтому треугольник DCF — прямоугольный. Пусть $\angle DFC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{DC}{CF}$.

Пусть ребро куба равно a . Тогда $CF = 0,5CB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

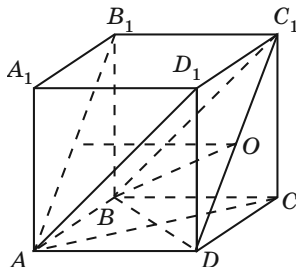
Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Пример 7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями BDC_1 и B_1AD .

Решение. Найдем угол между этими плоскостями традиционным способом, т.е. с помощью линейного угла двугранного угла, и другим способом, который иногда бывает более эффективным.

1-й способ. Построим линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BDC_1 и B_1AD . Так как $\triangle BDC_1$ правильный, то его медиана $BO \perp DC_1$. Проведем $OM \parallel AD$. Тогда $MO \perp DC_1$, так как $AD \perp DC_1$ и прямые OM и AD лежат в одной и той же плоскости. Следовательно, $\angle MOB$ — линейный угол двугранного угла с ребром DC_1 , образованного данными плоскостями. Заметим, что $MO \parallel BC$, значит,



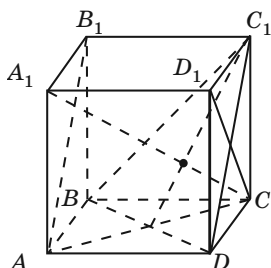
$\angle MOB = \angle CBO$. Обозначим $\alpha = \angle CBO$ и найдем $\cos \alpha$ по теореме косинусов из $\triangle BOC$, в котором $BC = a$, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BO = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Имеем

$$OC^2 = BO^2 + BC^2 - 2BO \cdot BC \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда найдем $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

2-й способ. Этот способ опирается на следующую **теорему**:
Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.



Найдем прямые, перпендикулярные плоскостям BDC_1 и B_1AD . Поскольку диагональ куба перпендикулярна скрещивающимся с ней диагоналям граней куба, то $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp BC_1$. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1C \perp BDC_1$. Итак, один перпендикуляр $A_1C \perp BDC_1$ найден.

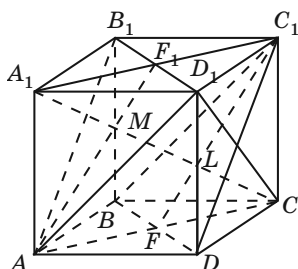
Поскольку $CD \perp DC_1$ и $AD \perp CD_1$, то прямая CD_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым DC_1 и AD , лежащим в плоскости ADC_1 , следовательно, $CD_1 \perp ADC_1$. Таким образом, найден и второй перпендикуляр $CD_1 \perp ADC_1$.

Теперь найдем угол между перпендикулярами A_1C и CD_1 . Но этот угол — угол A_1CD_1 есть угол прямоугольного треугольника A_1CD_1 . В этом треугольнике $A_1C = a\sqrt{3}$, $CD_1 = a\sqrt{2}$ и поэтому

$$\cos \alpha = \frac{CD_1}{A_1C} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Получили тот же самый результат.

Большое значение при решении задач, связанных с кубом, имеют **перпендикулярные плоскости**. Примерами таких плоскостей служат диагональные плоскости куба,



т.е. плоскости, содержащие его диагонали, но не содержащие одну и ту же диагональ. Например, $ACC_1 \perp BDD_1$ и $ADC_1 \perp BCA_1$, но $ACC_1 \not\perp ADC_1$ (обе плоскости содержат диагональ AC_1).

Кроме указанных пар перпендикулярных плоскостей выделим еще одну пару перпендикулярных плоскостей, которая имеет большое значение при решении различных задач. Плоскость ACC_1 содержит прямую CA_1 , перпендикулярную плоскости BDC_1 . Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей имеем $ACC_1 \perp BDC_1$.

При рассмотрении этой конфигурации полезно подчеркнуть, что любая плоскость, перпендикулярная диагонали CA_1 , будет параллельна плоскости BDC_1 .

Интересно также заметить, что плоскость BDC_1 делит диагональ A_1C в отношении 2:1, считая от вершины A_1 . Чтобы это доказать, достаточно рассмотреть диагональное сечение AA_1C_1C и проведенные в нем прямые A_1C и C_1F , где F — точка пересечения диагоналей AC и BD . Треугольники

FLC и $C_1L_1A_1$ подобны с коэффициентом подобия $\frac{FC}{C_1A_1} = \frac{1}{2}$. Поэтому $\frac{LA_1}{LC} = \frac{2}{1}$. Точно так же можно установить, что плос-

кость B_1D_1A , параллельная BDC_1 , перпендикулярна диагонали CA_1 и делит ее в отношении 2:1, считая от вершины C .

Отсюда следует, что $A_1M = ML = LC = \frac{1}{3}A_1C$.

Сформулируем результат в виде **теоремы**:

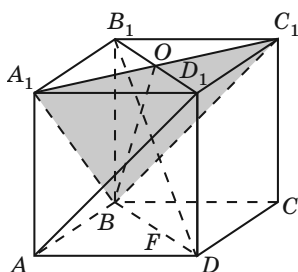
Плоскости BDC_1 и B_1D_1A перпендикулярны диагонали A_1C куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ и делят ее на три равные части.

Угол между прямой и плоскостью

Напомним, что *углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Пример 8. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Вычислите угол между прямой A_1B и плоскостью BDD_1 .

Решение. Для решения задачи следует найти проекцию прямой A_1B на плоскость BDD_1 . Опустим из точки A_1 пер-



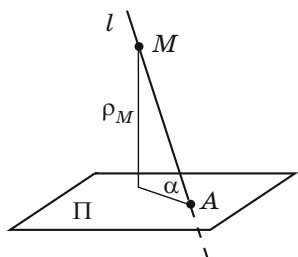
и, значит, проекцией прямой A_1B на плоскость BDD_1 будет прямая BO , где O — точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1 . Из прямоугольного треугольника BOA_1 находим

$$\sin \angle(A_1BO) = \frac{A_1O}{BA_1} = 0,5.$$

Значит, $\angle A_1BO = 30^\circ$.

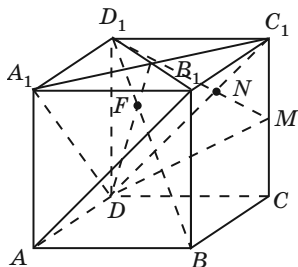
Ответ: 30° .

Отметим, что в тех случаях, когда проекцию прямой l на плоскость Π найти затруднительно, угол α между прямой l и этой плоскостью можно находить с помощью понятия расстояния от точки до плоскости из формулы: $\sin \alpha = \frac{\rho_M}{AM}$, где



ρ_M — расстояние от точки M до плоскости Π ; AM — наклонная к этой плоскости, проведенная из точки M прямой l .

Напомним, что *расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость*.



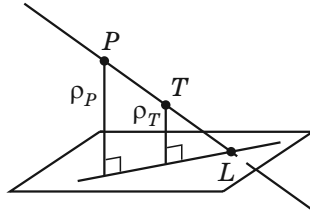
Пример 9. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, в котором M — середина ребра CC_1 . Вычислите угол между прямой DM и плоскостью DA_1C_1 .

Решение. В данном случае найти проекцию прямой DM на плоскость не так просто, как в примере 7. Вос-

пользуемся приведенной выше формулой. Найдем расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1 . Для этого воспользуемся следующим очевидным соображением.

Теорема.

Если прямая PT пересекает плоскость в точке L , то отношение расстояний от точек P и T до данной плоскости равно отношению $PL:TL$.



Продолжим решение задачи. Проведем прямую D_1M , которая пересекает плоскость DA_1C_1 в точке N . Поскольку треугольники D_1ND и MNC_1 подобны, то $\frac{D_1N}{MN} = \frac{DD_1}{MC_1} = \frac{2}{1}$, следовательно, расстояние от точки M до нашей плоскости вдвое меньше расстояния от точки D_1 до этой плоскости. Известно, что $D_1B \perp DA_1C_1$, причем плоскость DA_1C_1 отсекает от диагонали D_1B ее третью часть. Пусть D_1B пересекает плоскость

DA_1C_1 в точке F , а ребро куба равно a . Тогда $D_1F = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1

равно $\rho_M = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Теперь для нахождения синуса угла между прямой DM и плоскостью DA_1C_1 осталось вычислить MN . Из подобия треугольников D_1ND и MNC_1 следует пропорция $\frac{D_1N}{MN} = \frac{2}{1}$. Отсюда $MN = \frac{1}{3}D_1M$. Треугольник D_1C_1M

прямоугольный, поэтому

$$D_1M = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, $MN = \frac{a\sqrt{5}}{6}$. Теперь получаем

$$\sin \angle(DM, DA_1C_1) = \frac{\rho_M}{MN} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Отсюда искомый угол $\angle(DM, DA_1C_1) = \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $\arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Рассмотрим **прямоугольный параллелепипед**. Эта фигура во многом похожа на куб, но имеет одно важное отличие: если все ребра, исходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, различны, то диагонали его граней не перпендикулярны.

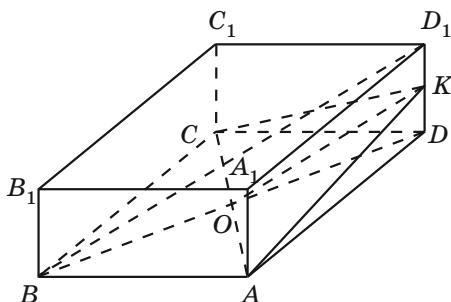
Это простое, очевидное свойство часто забывают, поскольку плоское изображение прямоугольного параллелепипеда очень напоминает плоское изображение куба.

Полезный совет:

При изображении прямоугольного параллелепипеда рисуйте его вытянутым от наблюдателя. В этом случае сходство с изображением куба будет минимально.

Пример 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 = 1$, $AB = 2$, $AD = 3$. Найдите угол между прямыми BD_1 и AC .

Решение. Для вычисления угла между прямыми BD_1 и AC проведем через точку O пересечения диагоналей AC и BD прямую $OK \parallel BD_1$. Поскольку O — середина отрезка BD , то



OK — средняя линия треугольника BDD_1 , а искомый угол есть наименьший из углов AOK и KOC . Косинус угла AOK найдем по теореме косинусов, вычисляя стороны треугольника AOK по теореме Пифагора. Имеем

$$KO = \frac{1}{2}BD_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9} = \frac{\sqrt{14}}{2},$$

$$AO = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad AK = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Теперь по теореме косинусов получаем $\cos(\angle AOK) = -\frac{5}{\sqrt{182}}$. Получили отрицательное значение косинуса, следовательно, угол AOK — тупой. Поэтому косинус искомого угла будет равен $\frac{5}{\sqrt{182}}$, а сам искомый угол $\angle KOC = \arccos \frac{5}{\sqrt{182}}$.

Ответ: $\arccos \frac{5}{\sqrt{182}}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Напомним, что *расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра*. Если данные скрещивающиеся прямые перпендикулярны, то построение этого перпендикуляра, как правило, не вызывает затруднений.

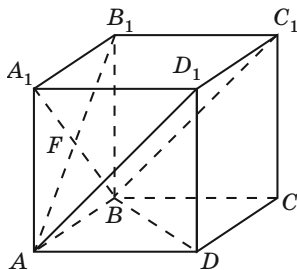
Можно использовать иные, равносильные определения.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые порознь.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от произвольной точки одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, содержащей вторую прямую.

Пример 11. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC .

Решение. Очевидно, $BC \perp ABB_1$, значит, по определению перпендикуляра к плоскости $BC \perp AB_1$. Так как $ABB_1 A_1$ — квадрат, то $AB_1 \perp A_1 B$.



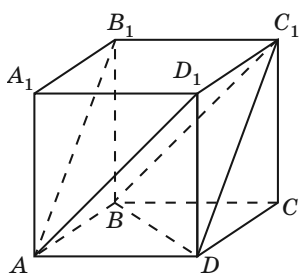
Следовательно, отрезок BF — общий перпендикуляр к прямым AB_1 и BC , где F — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1 . Так как ребро куба равно a , то диагональ $A_1B = a\sqrt{2}$. Отсюда

$$BF = \frac{A_1B}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Если скрещивающиеся прямые не перпендикулярны, то построение их общего перпендикуляра более сложно. Здесь используются обычно два способа.

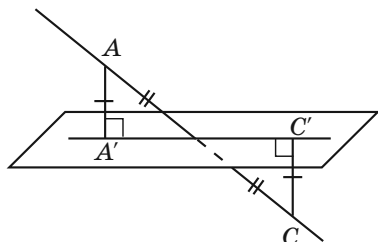
Первый способ заключается в том, что **сначала** через первую прямую проводят плоскость, параллельную второй прямой. Такая плоскость, как известно, всегда существует и единственна. **Затем** находят расстояние от произвольной точки второй прямой до проведенной плоскости.



Пример 12. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D$ равно a . Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD .

Решение. Прямая DC_1 параллельна прямой AB_1 , поэтому $AB \parallel DBC_1$.

Расстояние от произвольной точки прямой AB_1 до плоскости DBC_1 будет равно расстоянию между скрещивающимися прямыми AB_1 и BD , поскольку длина общего перпендикуляра любых двух скрещивающихся прямых равна расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые порознь. Заметим, что найти расстояние от какой-либо точки прямой AB_1 до плоскости BDC_1 тоже непросто. Здесь можно применить следующий прием.

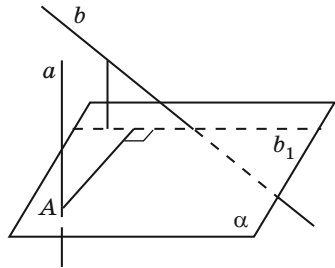


Посмотрите, точки A и C лежат по разные стороны от нашей плоскости BDC_1 так, что она пересекает отрезок AC в его середине. Отсюда следует, что точки A и C равноудалены от плоскости BDC_1 , т.е.

$AA' = CC'$. Но расстояние от точки C до плоскости BDC_1 равно $\frac{A_1C}{3}$ (см. теорему). Отсюда окончательно получаем: расстояние между прямыми AB_1 и BD равно $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Второй способ вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми состоит в том, что плоскость, которая была построена первым способом, теперь строится иначе. Таким образом, сущность этого второго способа та же самая — расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, параллельной первой прямой и содержащей вторую прямую.



Выделим основные этапы решения задачи вторым способом. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые.

1) Проведем плоскость α , перпендикулярную прямой a , и отметим точку A их пересечения.

2) Построим проекцию b_1 прямой b на плоскость α .

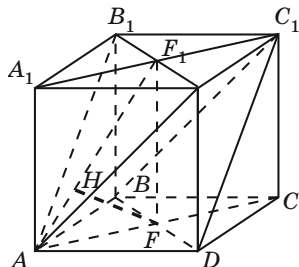
3) Плоскость, содержащая прямые b_1 и b , параллельна прямой a .

4) Вычислим расстояние ρ от точки A до прямой b_1 . Это расстояние равно, очевидно, проекции общего перпендикуляра на плоскость α , перпендикулярную одной из двух скрещивающихся прямых.

Найденное число ρ и является расстоянием между прямыми a и b . Задача решена.

Решим задачу из примера 12 указанным способом. Итак, рассмотрим куб с ребром, равным a , и вычислим расстояние между прямыми AB_1 и BD .

1) Сначала проводим плоскость $\alpha = AA_1C$, которая перпендикулярна прямой BD и пересекает ее в точке F .



2) Поскольку построенная плоскость перпендикулярна и прямой B_1D_1 , то AF_1 — проекция прямой A_1B на плоскость α .

3) Расстоянием от точки F до прямой AF_1 является длина перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую AF_1 , т.е. высота прямоугольного треугольника AFF_1 .

4) Переходим к вычислениям. $FF_1 = a$; $AF = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $FH = \frac{AF \cdot FF_1}{AF_1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

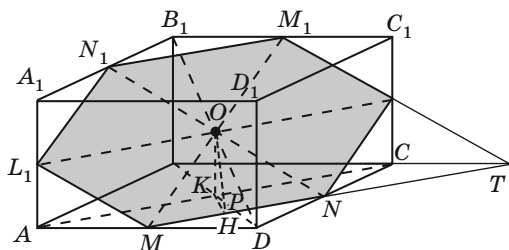
Получили тот же самый результат.

Отметим, что при достаточной проработке второго способа вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми он дает хорошие стабильные результаты.

Заканчивая обзор тем и задач, связанных с кубом и прямоугольным параллелепипедом, укажем на очевидную симметрию этих фигур. Наиболее часто используется их центральная симметрия, центром которой является точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

Продemonстрируем применение симметрии на примере следующей задачи.

Пример 13. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$, проходящего через середины M, N, L ребер AD, DC и CC_1 соответственно, если $AA_1 = 1$, $AB = 2$, $AD = 3$.



Решение. Отметим точку O — середину диагонали DB_1 и построим точки M_1, N_1, L_1 , симметричные точкам M, N, L соответственно относительно точки O . Докажем, что все шесть точек M, N, L, M_1, N_1, L_1 лежат в одной плоскости. Точки M, N, L лежат в данной плоскости и точки M_1, N_1, L_1 также лежат в одной плоскости, и нам необходимо доказать,

что эти плоскости совпадают. Проведем прямые MN и M_1L до их пересечения с прямой BC в точках T и R соответственно. Так как N и L середины соответствующих отрезков, то треугольники MDN и TCN равны и $MD=CT$. Аналогично, $\triangle M_1C_1L=\triangle RCL$ и поэтому $M_1C_1=CR$. Но $MD=M_1C_1$, значит, $CR=CT$, следовательно, точки T и R совпадают. Отсюда следует, что точка M_1 лежит в плоскости MNL . Следовательно, точка O — центр симметрии параллелепипеда — также лежит в этой плоскости. Значит, все точки прямых LO , MO , NO лежат в плоскости MNL . Отсюда следует, что все точки M , N , L , M_1 , N_1 , L_1 лежат в одной плоскости. Вычислим площадь сечения $MNLM_1N_1L_1$. Найдем эту площадь по формуле площади проекции. При этом, в силу симметрии сечения, будем искать только половину площади проекции. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot S_{\text{пр}} &= S_{AMNC} = S_{ADC} - S_{MDN} = 0,75 S_{ADC} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 2,25.\end{aligned}$$

Следовательно, площадь проекции $S_{\text{пр}} = 4,5$. Теперь площадь сечения найдем по формуле $S_c = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi}$, где φ — угол между плоскостью сечения и плоскостью грани $ABCD$. При определении этого угла часто допускают ошибку, забывая, что в параллелепипеде диагонали могут быть не перпендикулярны. Ошибочно считают, что $\varphi = \angle OPK$. Проведем $KH \perp MN$, тогда $\angle OHK = \varphi$. Имеем

$$\begin{aligned}KP &= \frac{1}{4} BD = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{13}, \\ KH &= KP \sin(\angle KPH) = KP \sin(2 \cdot \angle BDA) = \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{OK}{KH} = \frac{\sqrt{13}}{6}.\end{aligned}$$

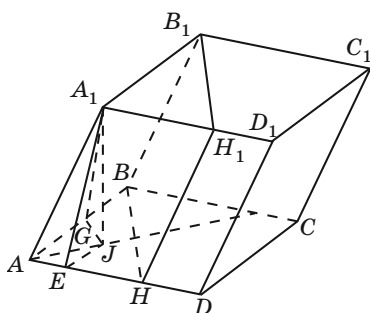
Следовательно, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{6}{7}$. Теперь, окончательно, находим

$$S_c = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi} = \frac{4,5}{\frac{6}{7}} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5,25.$$

Ответ: 5,25.

1.2. Наклонный параллелепипед

Параллелепипед является наклонным, если все шесть или четыре его грани — параллелограммы, не являющиеся прямоугольниками. Здесь наиболее часто встречается параллелепипед, у которого одно боковое ребро составляет с ребрами, выходящими из той же вершины, равные углы. Пусть для определенности ребро AA_1 составляет с ребрами AB и AD равные углы, тогда проекция ребра AA_1 на плоскость основания лежит на биссектрисе $\angle BAD$. Имеет место **теорема**.

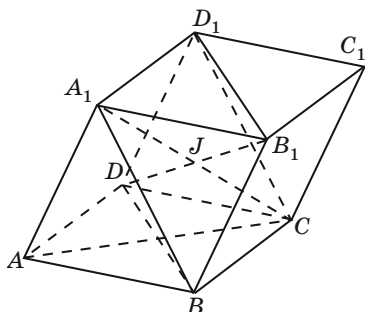


Если боковое ребро AA_1 наклонного параллелепипеда образует равные углы с ребрами AB и AD , то проекция J точки A_1 на плоскость ABC равноудалена от сторон AB и AD угла BAD .

Если при этом $BH \perp AJ$, то плоскость A_1AJ перпендикулярна плоскости B_1BH , а четырехугольник BHH_1B_1 является прямоугольником.

Пример 14. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы. Углы BAD , BAA_1 и DAA_1 равны по 60° . Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 .

Решение. Все ребра данного параллелепипеда равны между собой, и так как его грани — ромбы с углом 60° , то меньшая диагональ в каждом ромбе равна его стороне. Отсюда следует, что $DBB_1 D_1$ — ромб.



Рассмотрим отрезок A_1J , где J — точка пересечения диагоналей ромба $DBB_1 D_1$. Треугольник $DA_1 B_1$ равнобедренный, следовательно, медиана A_1J треугольника $DA_1 B_1$ является его высотой, т.е. $A_1J \perp DB_1$. Аналогично, $A_1J \perp D_1 B$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости

$A_1J \perp D_1BB_1$. Отсюда угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 есть $\angle A_1BD_1$.

$A_1D = A_1B$, следовательно, $JD = DB$ как проекции равных наклонных. Отсюда следует, что $DB_1 = BD_1$. Итак, диагонали в ромбе DBB_1D_1 равны. Значит, ромб D_1DBB_1 — квадрат.

Треугольники BA_1D_1 и BDD_1 равны по трем сторонам, так как $BA_1 = BD$, $A_1D_1 = DD_1$ и DB_1 — их общая сторона. Отсюда

$$\angle A_1BD_1 = \angle DBD_1 = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

Упражнение 1. Все ребра наклонного параллелепипеда равны 2. Углы BAD , BAA_1 и DAA_1 равны по 60° . Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDD_1 .

Ответ: $\sqrt{2}$.

1.3. Призма

Задачи на произвольную призму не обладают какой-то особенной спецификой, кроме, быть может, понятия, присутствующего исключительно призме, — *перпендикулярного сечения призмы*.

Напомним, что *перпендикулярным сечением призмы* называется такое ее сечение, которое перпендикулярно всем боковым ребрам призмы, при этом вершины перпендикулярного сечения лежат на прямых, содержащих боковые ребра призмы.

Полезно знать две формулы, связанные с перпендикулярным сечением.

1) *Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения на длину бокового ребра, т.е.*

$$S_{\text{б}} = P_{\perp} \cdot l.$$

2) *Объем призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на длину бокового ребра, т.е.*

$$V_n = S_{\perp} \cdot l.$$

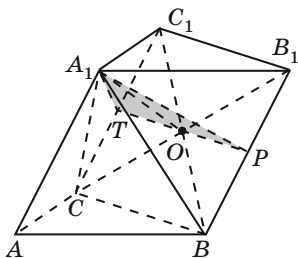
Пример 15. Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны по 60° . Найдите: 1) расстояние от точки C_1 до плоскости CA_1B_1 ; 2) объем призмы, если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

Решение. Из условия равенства всех ребер призмы следует, что все ее боковые грани — ромбы, а основания — правильные треугольники. Боковые грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 — ромбы с углом 60° , поэтому $BA_1 = CA_1 = CB = a$.

Площадь грани ABB_1A_1 равна $S = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. Из условия получаем $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. Отсюда $a = 4$.

Проведем диагонали ромба CBB_1C_1 . Они перпендикулярны, значит, $C_1O \perp CB_1$. Треугольник BA_1C_1 равнобедренный. Значит, его медиана A_1O является высотой и $A_1O \perp C_1B$. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $C_1O \perp CA_1B_1$. Поэтому C_1O является расстоянием от точки C_1 до плоскости CA_1B_1 .

Наклонные C_1A_1 и C_1B_1 к плоскости CA_1B_1 равны, следовательно, равны их проекции: $OA_1 = OB_1$. Треугольники CA_1B_1 и CC_1B_1 равны по трем сторонам. Следовательно, их медианы равны, т.е. $OA_1 = OC_1$. Отсюда следует, что $CB_1 = BC_1$. Значит, в ромбе CBB_1C_1 диагонали равны. Следовательно, ромб CBB_1C_1 — квадрат со стороной 8. Отсюда $C_1O = 4\sqrt{2}$.



Для вычисления объема призмы построим его перпендикулярное сечение A_1PT , где P и T — середины ребер BB_1 , CC_1 соответственно. Так как треугольники A_1BB_1 и A_1CC_1 правильные, то их медианы являются их высотами, поэтому $A_1P \perp BB_1$, $A_1T \perp CC_1$. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости все боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости A_1PT , т.е. A_1PT — перпендикулярное сечение данной призмы.

В треугольнике A_1PT $A_1O \perp PT$, $PT = a = 4$, $A_1P = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$A_1O = \sqrt{A_1P^2 - PO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, площадь перпендикулярного сечения

$$S_{A_1PT} = \frac{1}{2} PT \cdot A_1O = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4}.$$

Отсюда объем призмы

$$V = S_{A_1PT} \cdot AA_1 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: 1) $4\sqrt{2}$; 2) $\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$.

1.4. Пирамида

Задачи на произвольные пирамиды встречаются сравнительно редко. Как правило, заданные пирамиды являются некоторым частным случаем произвольной пирамиды. Наиболее распространенными пирамидами, фигурирующими в заданиях, являются:

1) треугольная пирамида, в которой все грани — правильные треугольники. Такая пирамида называется *правильным тетраэдром*;

2) треугольные пирамиды, в которых все грани — равные равнобедренные треугольники;

3) треугольные пирамиды, в которых все грани — равные разносторонние треугольники;

4) треугольные пирамиды, у которых в основании лежит правильный, или прямоугольный, или равнобедренный треугольник;

5) правильные пирамиды;

6) пирамиды, в которых все боковые ребра равны между собой;

7) пирамиды, в которых все боковые грани образуют с плоскостью основания равные между собой углы;

8) пирамиды, в которых одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания.

Напомним, что *правильной пирамидой* называется пирамида, у которой все боковые ребра равны, а основанием пирамиды является правильный многоугольник.

Произвольная треугольная пирамида называется *тетраэдром*. Такое название происходит от значений греческих

слов тетра и эдр, которые означают соответственно *четыре* и *грань*, и используется, как правило, в школьном курсе геометрии.

Упражнение 2. Докажите эквивалентные определения правильной пирамиды.

1) Пирамида является правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а все боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания пирамиды.

2) Пирамида является правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а высота проектируется в центр этого многоугольника.

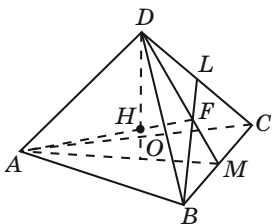
3) Пирамида является правильной, если ее высота проектируется в центр окружности, вписанной и описанной около основания.

4) Пирамида является правильной, если центр описанной около нее сферы лежит на высоте пирамиды, а основание пирамиды — правильный многоугольник.

5) Сформулируйте определение правильной призмы, эквивалентное определениям, приведенным выше.

Некоторые свойства перечисленных видов пирамид будут рассмотрены в приводимых ниже примерах.

Пример 16. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ равны между собой и равны a . Найдите высоты и объем пирамиды.



Решение. В задаче идет речь о правильной тетраэдре. Рассмотрим эту фигуру подробнее. Опустим из вершины D перпендикуляр DO на плоскость ABC , тогда DO — высота пирамиды и $AOD \perp ABC$.

Так как ребра DA, DB, DC равны, то их проекции OA, OB, OC также равны. Следовательно, O — центр правильного треугольника ABC . Поэтому прямая AO пересекает ребро BC в его середине — точке M . Следовательно, $ADM \perp ABC$ и $AM \perp BC$. По теореме о трех перпендикулярах $DM \perp BC$ и, следовательно, $BC \perp AMD$. Отсюда, по признаку перпендикулярности плоскостей, получаем $BCD \perp AMD$.

В треугольнике AMD проведем высоту AF . Так как $BCD \perp AMD$, то $AF \perp BCD$, т.е. AF — высота пирамиды. Высоты DO и AF треугольника AMD пересекаются в точке H . Поскольку ребра AB , AC , AD равны, то их проекции FB , FC , FD равны и, значит, F — центр треугольника BCD .

Найдем отношение, в котором точка H делит высоты DO и AF . Так как $AM = MD$, то треугольник AMD равнобедренный

и поэтому $\frac{AH}{HF} = \frac{DH}{HO}$. Воспользуемся теоремой Менелая (см.

главу 7). Прямая AF пересекает стороны DO , DM и продолжение стороны OM треугольника DOM . Запишем равенство

Менелая: $\frac{DH}{HO} \cdot \frac{OA}{AM} \cdot \frac{MF}{FD} = 1$. Но мы доказали, что O и F — центры правильных треугольников ABC и BCD соответствен-

но. Поэтому $\frac{OA}{AM} = \frac{2}{3}$ и $\frac{MF}{FD} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{DH}{HO} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Отсюда $\frac{DH}{HO} = \frac{3}{1}$, т.е. $DH = \frac{3}{4}DO$ и $OH = \frac{1}{4}DO$.

Аналогично можно доказать, что высоты из вершин B и C проходят через точку H , причем точка H делит каждую высоту в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды. Отсюда следует, что точка H равноудалена от всех вершин и всех граней правильного тетраэдра, т.е. является центром его описанной и вписанной сфер. При этом радиус R описанной сферы в три раза больше радиуса r вписанной сферы и справедливо равенство $r = \frac{1}{4}h$, где h — высота правильного тетраэдра.

Выразим величину h через длину a ребра тетраэдра из треугольника DOM . Имеем $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Теперь найдем объем правильного тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

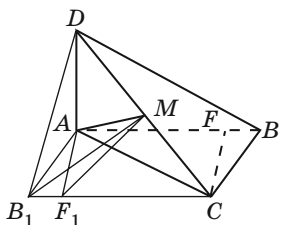
Ответ: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Полезно запомнить следующую **теорему**.

Точка пересечения высот правильного тетраэдра делит каждую из его высот в отношении 3:1, считая от вершины, и является центром его вписанной и описанной сфер. При этом если ребро правильного тетраэдра равно a , то его высота $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Выделим некоторые пирамиды, знание свойств которых позволяет увереннее решать стереометрические задачи на комбинацию тел.

Пример 17. Основанием пирамиды $ABCD$ служит треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Ребро AD перпендикулярно плоскости ABC и равно ребру AC . Найдите углы между: 1) плоскостями DBC и ABC ; 2) плоскостями DAC и DBC ; 3) прямыми AB и CD ; 4) плоскостями ABD и DBC .



Решение.

1) Плоскости DBC и ABC пересекаются по прямой BC . По условию $AC \perp BC$, а $DC \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Поэтому $\angle ACD$ — линейный угол двугранного угла $\angle(A, BC, D)$. Так как по условию $DA \perp ABC$ и $DA = AC$, то треугольник ADC — прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $\angle ACD = 45^\circ$. Итак, угол между плоскостями DBC и ABC равен 45° .

2) Известно, что $DC \perp BC$ и $AC \perp BC$. Следовательно, $BC \perp DAC$. Отсюда по признаку перпендикулярности плоскостей $BCD \perp DAC$. Следовательно, угол между плоскостями DAC и DBC равен 90° .

3) Найдём угол между прямыми AB и CD . Для этого построим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$, как на рисунке. Тогда угол между прямыми AB и CD равен углу DBC_1 . Пусть ребро $BC = a$. Тогда $AB_1 = a$. Отсюда следует равенство треугольников (по двум катетам) ABC и DB_1A , следовательно, используя свойство прямоугольного треугольника с углом 30° , получаем соотношения

$$AB = CB_1 = B_1D = 2a \text{ и } AC = a\sqrt{3}.$$

Пусть M — середина DC . Так как треугольник DAC — прямоугольный и равнобедренный, то $CM = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Из равенства $CB_1 = B_1D = 2a$ следует, что треугольник DB_1C — равнобедренный. Поэтому $B_1M \perp DC$. Следовательно,

$$\cos \angle DCB_1 = \frac{CM}{CB_1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда угол между прямыми AB и CD равен $\arccos \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

4) Угол между плоскостями ABD и DNC равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям. Вспомним, что $BC \perp DAC$ и $AM \perp DC$. Отсюда следует, что, во-первых, $BC \perp AM$ и, во-вторых, $AM \perp DBC$, поскольку AM перпендикулярна двум пересекающимся прямым DC и BC , лежащим в плоскости DBC . Пусть CF — высота треугольника ABC . Тогда $CF \perp AB$, и, следовательно, по свойству перпендикулярных плоскостей ABC и DAB , $CF \perp DAB$. Пусть $AF_1 \perp CB_1$, тогда $AF_1 \parallel CF$ и угол между плоскостями ABD и DBC равен углу MAF_1 . Косинус угла MAF_1 найдем, разбив квадрат отрезка MF_1 по теореме косинусов из двух треугольников MAF_1 и MCF_1 . Имеем

$$AF = CF_1 = 1,5a; \quad CF = AF_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad AM = MC = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Запишем равенство

$$\begin{aligned} F_1M^2 &= AM^2 + F_1A^2 - 2AM \cdot F_1A \cdot \cos \angle MAF_1 = \\ &= CM^2 + F_1C^2 - 2CM \cdot F_1C \cdot \cos \angle MCF_1. \end{aligned}$$

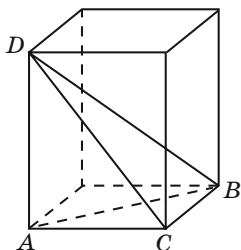
Но $\cos \angle MCF_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Поэтому получаем

$$\frac{3a^2}{4} - 2a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \angle MAF_1 = \frac{9a^2}{4} - 2a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\cos \angle MAF_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, угол между плоскостями ABD и DBC равен $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: 1) 45° ; 2) 90° ; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$; 4) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

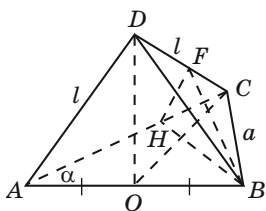
Замечание. Пирамида, рассматриваемая в примере 17, называется *биортогональным тетраэдром*. Для изучения его свойств полезно понимать, что биортогональный тетраэдр является частью прямоугольного параллелепипеда (см. рис.).



Например, после указанного достраивания биортогонального тетраэдра до прямоугольного параллелепипеда становится ясно, что в *биортогональном тетраэдре* *середина наибольшего ребра является центром сферы, описанной около этого тетраэдра*.

Рассмотрим еще один вид пирамиды.

Пример 18. Основанием пирамиды является треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой и равны l . Определите: 1) объем пирамиды; 2) двугранный угол при ребре DC пирамиды и дополнительно дайте ответ для $\alpha = 30^\circ$, $a = 2$, $l = 4$.



Решение. Поскольку все боковые ребра пирамиды равны между собой, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, т.е. около прямоугольного треугольника ABC . Но центр этой окружности — середина O гипотенузы AB . Следовательно, высота DO пирамиды лежит в грани DAB . Отсюда следует, что эта грань перпендикулярна плоскости основания ABC данной пирамиды. Объем V пирамиды найдем по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO.$$

В прямоугольном треугольнике ABC

$$AO = 0,5AB = \frac{2}{2\sin\alpha} \text{ и } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}\alpha.$$

По теореме Пифагора из треугольника AOD находим

$$DO = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{4l^2\sin^2\alpha - a^2}}{2\sin\alpha}.$$

$$\text{Отсюда } V = \frac{a^2 \cos \alpha}{12 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{4l^2 \sin^2 \alpha - a^2}.$$

Построим линейный угол при ребре DC . Для этого проведем высоту BF треугольника DBC и из точки F в плоскости ADC восставим перпендикуляр FH к прямой DC до его пересечения с AC в точке H . Угол BFH — линейный угол двугранного угла $\angle(A, CD, B)$. Пусть $\angle BFH = \beta$. Косинус β найдем, выразив BH из треугольников BFH и BCH по теореме косинусов и теореме Пифагора. Треугольник BDC — равнобедренный, поэтому

$$\begin{aligned} \cos \angle BCD &= \frac{\frac{1}{2}CB}{DC} = \frac{a}{2l}, \\ BF &= BC \sin \angle BCD = a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4l^2}} = \frac{a\sqrt{4l^2 - a^2}}{2l} \\ \text{и } CF &= BC \cos \angle BCD = \frac{a^2}{2l}. \end{aligned}$$

Треугольник ADC — равнобедренный, поэтому

$$\cos \angle ACD = \frac{\frac{1}{2}AC}{DC} = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{2l}.$$

Из прямоугольного треугольника CFH находим

$$\begin{aligned} CH &= \frac{CF}{\cos \angle ACD} = a \operatorname{tg} \alpha; \\ FH &= \frac{CF \sin \angle ACD}{\cos \angle ACD} = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{4l^2 - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{2l}. \end{aligned}$$

Теперь получаем равенство

$$BH^2 = FB^2 + FH^2 - 2 \cdot FB \cdot FH \cdot \cos \beta = CB^2 + CH^2.$$

Подставляя в последнее равенство значения длин найденных отрезков, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{a^2(4l^2 - a^2)}{4l^2} + \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha (4l^2 - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{4l^2} - \\ &- 2 \cdot \frac{a\sqrt{4l^2 - a^2}}{2l} \cdot \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{4l^2 - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{2l} \cos \beta = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Откуда $\cos \beta = \frac{-a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{(4l^2 - a^2)(4l^2 - a^2 \operatorname{ctg} \alpha)}}$. Следовательно,

$$\beta = \pi - \arccos \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{(4l^2 - a^2)(4l^2 - a^2 \operatorname{ctg} \alpha)}}.$$

Чтобы получить искомый численный результат, подставим числовые данные задачи: $\alpha = 30^\circ$, $a = 2$, $l = 4$.

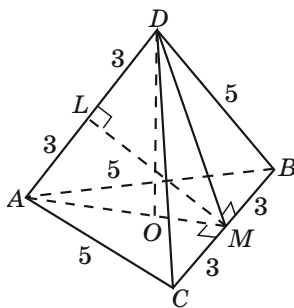
Получим $V = 4$, $\beta = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{65}}$.

Ответ:

$$\frac{a^2 \cos \alpha}{12 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{4l^2 \sin^2 \alpha - a^2}; \pi - \arccos \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{(4l^2 - a^2)(4l^2 - a^2 \operatorname{ctg} \alpha)}};$$

4; $\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{65}}$.

Пример 19. Все грани пирамиды — равные равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 5, и основанием — 6. Определите: 1) объем пирамиды; 2) двугранный угол при ребре пирамиды, равном 6; 3) расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими ребра пирамиды равной длины.



Решение. Пусть в пирамиде основанием является треугольник ABC , в котором $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Треугольник ABC — остроугольный, поскольку $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 50 - 36 > 0$. Если $AD = 5$, то $DC = 6$, что противоречит условию, поскольку грань BCD не будет в этом случае являться равнобедренным треугольником со сторонами 5; 5; 6. Следовательно, $AD = 6$, тогда $DC = DB = 5$. Сделаем рисунок. Пусть M и L — середины ребер BC и AD соответственно. Тогда AM и

DM — медианы в равных равнобедренных треугольниках, имеющих общее основание BC , проведенные к этому основанию. Следовательно, $DM \perp BC$, $AM \perp BC$ и $AM = MD$. По теореме Пифагора из треугольника AMC получаем $AM = 4$ (египетский треугольник). Значит, $AM = MD = 4$. Отсюда следует, что треугольник AMD — равнобедренный и его медиана ML , проведенная к основанию AD , является высотой. Поэтому $ML \perp AD$.

Так как $DM \perp BC$, $AM \perp BC$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $BC \perp AMD$ и, значит, $ML \perp BC$. Значит, ML — общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым AD и BC и, следовательно, его длина — расстояние между прямыми AD и BC .

Кроме того, по признаку перпендикулярности плоскостей, $ABC \perp AMD$ и, следовательно, высота DO треугольника AMD будет являться высотой пирамиды. Перейдем к вычислениям.

Из прямоугольного треугольника ALM находим

$$ML = \sqrt{AM^2 - AL^2} = \sqrt{7}.$$

Таким образом, расстояние между прямыми AD и BC равно $ML = \sqrt{7}$.

Высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым эти высоты проведены. Следовательно,

$$ML \cdot AD = DO \cdot AM \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot 6 = DO \cdot 4 \Leftrightarrow DO = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Площадь S_{ABC} основания ABC равна удвоенной площади треугольника AMC и равна 12. Объем V пирамиды найдем по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO.$$

Получим $V = 6\sqrt{7}$.

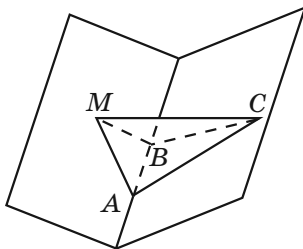
Таким образом, объем пирамиды равен $6\sqrt{7}$.

Найдем величину двугранного угла при ребре BC , т.е. величину $\angle(A, BC, D)$.

Отметим важное обстоятельство: *следует отличать угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды от угла между боковой гранью и основанием пирамиды или, что то же самое, от величины двугранного угла при ребре основания пирамиды. Величина первого угла*

не может быть больше величины прямого угла, а величина второго может быть больше величины прямого угла. Это объясняется определением угла между плоскостями и определением двугранного угла при ребре пирамиды.

Напомним, что *двугранным углом* называется *пересечение двух полупространств*, образованных двумя пересекающи-



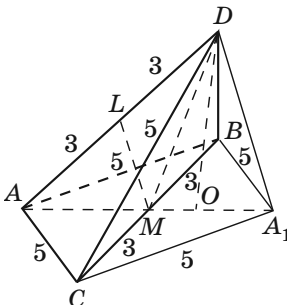
мися плоскостями. *Двугранным углом при ребре пирамиды* называется тот двугранный угол, которому принадлежит рассматриваемая пирамида. На рисунке изображен двугранный угол при ребре AB пирамиды $ABCM$, т.е. $\angle(M, AB, C)$. Его величина больше 90° , а угол между плоскостями MAB и ABC в данном случае меньше 90° .

Это определение относится только к выпуклым пирамидам, которые и изучаются в школьном курсе геометрии. В случаях невыпуклых пирамид определение угла при ребре пирамиды требует уточнений.

Продолжим решение задачи. Требуется найти величину

$$\angle(A, BC, D).$$

Поскольку $DM \perp BC$, $AM \perp BC$ то величина $\angle(A, BC, D)$ равна $\angle AMD$. Пусть $\angle AMD = \varphi$. Вычислим $\cos \varphi$ по те-



ореме косинусов для треугольника AMD . В этом треугольнике $AD=6$, $AM=MD=4$. Теперь получаем $\cos \varphi = \frac{2AM^2 - AD^2}{2AM^2} = -\frac{1}{8}$, отсюда $\varphi = \pi - \arccos \frac{1}{8}$. Следова-

тельно, $\angle(A, BC, D)$ — тупой. Обратите внимание на то, что наш рисунок выполнен неправильно, поскольку высота DO должна лежать вне данной пирамиды. Следует сделать новый рисунок, соответствующий условиям задачи.

Найдем расстояние между прямыми AC и BD . Построим треугольник ABC до параллелограмма, продолжив медиану AM на ее длину за точку M . Получим точку A_1 . Очевидно, что ABA_1C — параллелограмм, в котором все стороны равны по 5. Следовательно, ABA_1C — ромб. Поскольку $AC \parallel BA_1$, то $AC \parallel DBA_1$ и расстояние между AC и BD равно расстоянию от точки C до плоскости DBA_1 , т.е. высоте пирамиды DBA_1C , опущенной на плоскость грани DBA_1 . Эту высоту можно вычислить, выразив дважды объем пирамиды DBA_1C :

$$V_{DBA_1C} = \frac{1}{3} S_{BCA_1} \cdot DO = \frac{1}{3} S_{DBA_1} \cdot \rho_{DBA_1}(C),$$

где $\rho_{DBA_1}(C)$ — искомое расстояние от точки C до плоскости DBA_1 . Отсюда $\rho_{DBA_1}(C) = \frac{S_{BCA_1} \cdot DO}{S_{DBA_1}}$. Из входящих в полученную формулу величин осталось найти S_{DBA_1} . Найдите ее самостоятельно, при этом докажите, что $DA_1 = 2ML$. Вы должны получить следующий результат: $S_{DBA_1} = 3\sqrt{14}$. Теперь получим $\rho_{DBA_1}(C) = 3\sqrt{2}$.

Итак, расстояние между прямыми AC и BD равно $3\sqrt{2}$.

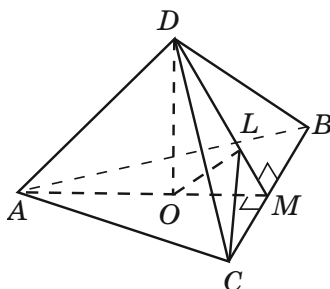
Плоскость ADM является плоскостью симметрии данной пирамиды, поэтому расстояние между прямыми AB и CD равно $3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Упражнение 3. Рассмотрите пирамиду из примера 20. Найдите: 1) все остальные ее высоты; 2) расстояние от точки M до плоскостей граней ACD и ABD ; 3) угол между прямой DM и плоскостью ACD .

Ответ: 1) все высоты данной пирамиды равны между собой; 2) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Пример 20. В правильной треугольной пирамиде проекция основания ее высоты на боковую грань является центром окружности, вписанной в эту грань. Определите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.



Решение. Пусть в пирамиде $ABCD$ треугольник ABC лежит в основании, а отрезок DO является ее высотой. Пусть $AB = a$, $DO = h$.

Напомним: углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Поскольку DO высота пирамиды, то $DO \perp ABC$. Поэтому прямая AO — проекция прямой AD на плоскость ABC . Следовательно, угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания равен углу DAO .

Пусть $\angle DAO = \alpha$. В прямоугольном треугольнике DAO

$$AO = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ и } h = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha, \quad AD = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha}.$$

По условию L — центр окружности, вписанной в треугольник BDC . Следовательно, точка L — точка пересечения биссектрис треугольника BDC . Следовательно, CL — биссектриса треугольника CDM . По свойству биссектрисы треугольника $\frac{DC}{CM} = \frac{DL}{LM}$ и так как $DC = AD$, то $\frac{AD}{CM} = \frac{DL}{LM}$.

рамыды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

Решение. Пусть $МАВСD$ данная пирамида с основанием $ABCD$. $ABCD$ — квадрат, со стороной, равной 2.

1) Построим линейный угол двугранного угла $\angle(A, MB, C)$. Пусть AT — высота треугольника AMB . Так как данная пирамида правильная, то CT — высота треугольника BMC , причем $AT = CT$. Следовательно, угол ATC — линейный угол двугранного угла $\angle(A, MB, C)$. Его величину α найдем по теореме косинусов из треугольника ATC . В этом треугольнике $AC = 2\sqrt{2}$. Длину отрезка AT вычислим из равенства

$$AT \cdot MB = MK \cdot DC = 2S_{\text{б. гр.}},$$

где $S_{\text{б. гр.}}$ — площадь боковой грани данной пирамиды. По теореме Пифагора имеем

$$MK = \sqrt{MO^2 + OK^2} = \sqrt{17};$$

$$MB = \sqrt{MO^2 + OB^2} = 3\sqrt{2}.$$

Теперь получаем

$$AT \cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{17} \cdot 2 \Leftrightarrow AT = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

По теореме косинусов получаем $\cos \alpha = \frac{2AT^2 - AC^2}{2AT^2} = -\frac{1}{17}$.
Отсюда $\alpha = \pi - \arccos \frac{1}{17}$. Итак, двугранный угол при боковом ребре пирамиды равен $\pi - \arccos \frac{1}{17}$.

2) Напомним: *апофемой пирамиды называется высота боковой грани правильной пирамиды*. Апофема и ее длина обозначается обычно буквой k^1 . Рассмотрим апофему ML , принадлежащую грани AMD , и найдем угол между прямой ML и плоскостью CMD . Поскольку построить проекцию прямой ML на плоскость CMD достаточно сложно, воспользу-

¹ Название *апофема* происходит от греческого слова *apothema* — *нечто отложенное*. Правильный многоугольник также имеет апофему. Апофема многоугольника — перпендикуляр, отложенный из центра правильного многоугольника к его стороне. Эта апофема равна радиусу окружности, вписанной в правильный многоугольник.

емся формулой (см. замечание к примеру 8) $\sin \varphi = \frac{\rho_{CMD}(L)}{LM}$,

— искомый угол между прямой ML и плоскостью CMD ; $\rho_{CMD}(L)$ — расстояние от точки L до плоскости CMD . Прямая LO параллельна плоскости CMD , поэтому расстояние от точки L до плоскости CMD равно расстоянию произвольной точки прямой LO до этой плоскости. Найдем расстояние от точки O до плоскости CMD . Пусть K — середина CD . Тогда $OK \perp CD$ и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая CD перпендикулярна плоскости $МОК$. Следовательно, плоскости $МОК$ и CMD перпендикулярны. Отсюда следует, что высота OF прямоугольного треугольника $МОК$ является перпендикуляром к плоскости CMD , опущенным из точки O . Т.е. длина отрезка OF есть расстояние от точки O до плоскости CMD : $OF = \rho_{CMD}(O)$. Из

треугольника $МОК$ находим $\rho_{CMD}(O) = OF = \frac{MO \cdot OK}{MK}$. Но

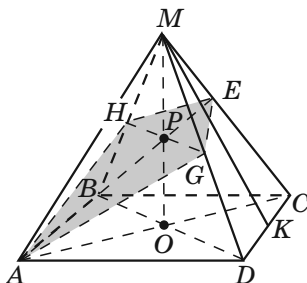
$MO = 4$, $OK = 1$ и $MK = \sqrt{17}$, поэтому $\rho_{CMD}(O) = \frac{4}{\sqrt{17}}$. На-

помним, что $\rho_{CMD}(L) = \rho_{CMD}(O) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, а $LM = MK = \sqrt{17}$.

Значит, $\sin \varphi = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\sqrt{17}} = \frac{4}{17}$. Отсюда, поскольку φ — острый угол, находим $\varphi = \arcsin \frac{4}{17}$. Итак, *угол между апофемой пирамиды и плоскостью смежной боковой грани пирамиды равен $\varphi = \arcsin \frac{4}{17}$.*

3) Для вычисления площади сечения пирамиды сделаем новый рисунок и построим заданное сечение. Пусть Π — плоскость сечения. Поскольку $\Pi \perp MC$, то плоскость Π пересекает плоскости AMC и BMD по прямым, перпендикулярным MC . Пусть это будут прямые AE и GH . Тогда AE — высота треугольника AMC . Поскольку $MO \perp BD$ и $AC \perp BD$, то $BD \perp МОС$, и $MC \perp BD$ ¹. Следовательно, $HG \parallel BD$. Действительно, если $HG \nparallel BD$, то прямые HG и

¹ Здесь можно было бы воспользоваться теоремой о трех перпендикулярах.



BD пересекаются, а прямая MC им перпендикулярна. Следовательно, $MC \perp BDM$. Но прямая $OC \perp BDM$ и пересекает прямую MC в точке C . Противоречие.

Так как $HG \parallel BD$ и $BD \perp MOC$, то $HG \perp MOC$ и поэтому $HG \perp AE$. Следовательно, площадь сечения можно найти по формуле

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot HG.$$

Длину диагонали AE найдем из свойства высот треугольника AMC :

$$MO \cdot AC = AE \cdot MC.$$

Известно, что $MO = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$, $MC = 3\sqrt{2}$. Отсюда получаем

$$4 \cdot 2\sqrt{2} = AE \cdot 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AE = \frac{8}{3}.$$

Длину диагонали HG найдем из подобия треугольников HGM и BDM . Имеем $HG = \frac{MP}{MO} \cdot BD$. Известно, что $MO = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$, а

$$MP = \frac{2 \cdot AM^2 - AC^2}{2 \cdot MO} = \frac{7}{2}^1.$$

$$\text{Отсюда получаем } HG = \frac{7}{4 \cdot 2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

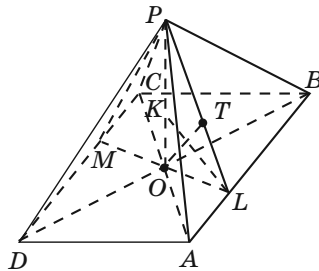
$$\text{Теперь находим } S_{\text{сеч.}} = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: 1) } \pi - \arccos \frac{1}{17}; \text{ 2) } \arcsin \frac{4}{17}; \text{ 3) } \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

¹ Получите эту формулу самостоятельно, воспользовавшись примером 13 и следующим упражнением из главы 7.

Пример 22. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной, равной 2, и острым углом, равным 60° . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом 45° . Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) величины углов между боковыми ребрами пирамиды и плоскостями противоположных им боковых граней;
- 3) расстояние между прямой, содержащей боковое ребро пирамиды, и скрепляющей с ней прямой, содержащей ребро основания пирамиды;
- 4) наименьшую величину плоского угла при вершине пирамиды;
- 5) расстояния от точки, равноудаленной от плоскостей всех боковых граней и плоскости основания пирамиды, до ее вершины и до плоскости основания пирамиды.



Решение. Если все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости ее основания, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в ее основание. В данном случае вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды. Сделаем рисунок.

1) Пусть в пирамиде $PABCD$ основание $ABCD$ — ромб, в котором $AB=2$, $\angle B=60^\circ$. Пусть PO — высота пирамиды, где O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Проведем через точку O прямую, перпендикулярную параллельным прямым AB и CD и пересекающую их в точках L и M соответственно. По теореме о трех перпендикулярах $PL \perp AB$, следовательно, угол PLO равен углу наклона боковой грани PAB к плоскости основания пирамиды. По условию $\angle PLO = 45^\circ$.

2) Поскольку все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° и проекцией боковой поверхности пирамиды является ее основание, то площадь боковой поверхности S_6 можно вычислить по формуле $S_6 = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$, где S_{ABCD} — площадь ромба $ABCD$;

$$S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно, $S_6 = \frac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{6}$. Итак, площадь боковой поверхности пирамиды равна $2\sqrt{6}$.

3) PAC и PBD — плоскости симметрии данной пирамиды, поэтому для нахождения величин всех углов между боковыми ребрами пирамиды и плоскостями противоположных им боковых граней достаточно найти углы наклона прямых AP и BP к плоскости боковой грани PCD . Остальные шесть углов будут соответственно равны этим углам в силу указанной симметрии:

$$\angle(AP, PCD) = \angle(AP, PCB) = \angle(CP, PAD) = \angle(CP, PAB).$$

Поскольку прямые AP и BP пересекают плоскость PCD , то для нахождения искоемых величин углов воспользуемся формулами

$$\sin \varphi_A = \frac{\rho(A)}{AP} \quad \text{и} \quad \sin \varphi_B = \frac{\rho(B)}{BP},$$

в которых $\rho(A)$, $\rho(B)$ — расстояния от точек A и B до плоскости PCD ; φ_A , φ_B — искомые величины углов. Прямая AB параллельна плоскости PCD , поэтому $\rho(A) = \rho(B)$. Так как в ромбе $ABCD$ $\angle B = 60^\circ$, то треугольник ABC — правильный, со стороной, равной 2. Поэтому высота ML ромба $ABCD$ равна высоте треугольника ABC и равна $\sqrt{3}$. Точка O — середина ML , поэтому $OL = \frac{\sqrt{3}}{2}$. И так как в прямоугольном треугольнике PLO угол PLO равен 45° , то $PO = OL = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда по теореме Пифагора находим

$$PA = \sqrt{PO^2 + OA^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{и} \quad PB = \sqrt{PO^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Поскольку O — середина AC , то расстояние от точки A до плоскости PCD вдвое больше расстояния ρ_O от точки O

до плоскости PCD . Но точка O равноудалена от всех боковых граней пирамиды, поэтому ρ_0 равно отрезку OT перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость PAB . Длину отрезка OT — высоту прямоугольного равнобедренного треугольника PLO , опущенную из вершины прямого

угла, находим по формуле $OT = \frac{PO}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Теперь находим

$\sin \varphi_A = \sqrt{\frac{3}{14}}$ и $\sin \varphi_B = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Отсюда искомые величины рав-

ны $\varphi_A = \arcsin \sqrt{\frac{3}{14}}$; $\varphi_B = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$. Итак, величины углов между боковыми ребрами пирамиды и плоскостями противоположных им боковых граней равны

$$\arcsin \sqrt{\frac{3}{14}}; \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

4) Покажите, что *расстояние между прямой, содержащей боковое ребро пирамиды, и скрещивающейся с ней прямой,*

содержащей ребро основания пирамиды, равно $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5) Покажите, что: а) все боковые грани пирамиды — равные разносторонние треугольники; б) все плоские углы при вершине пирамиды равны между собой; в) величина каждого

плоского угла при вершине равна $\arccos \left(3\sqrt{\frac{3}{35}} \right) \approx 28,5^\circ$, по-

этому и наименьшая величина плоского угла при вершине

равна $\arccos \left(3\sqrt{\frac{3}{35}} \right)$.

6) Проведем биссектрису LK треугольника LOP . Тогда точка K равноудалена от плоскости боковой грани PAB и от плоскости основания. Но PO — ось симметрии пирамиды. Следовательно, точка K равноудалена от плоскостей всех боковых граней и от плоскости основания пирамиды. Длину искомого отрезка PK вычислим, воспользовавшись свойством биссектрисы LK треугольника LOP :

$$\frac{PK}{KO} = \frac{PL}{OL} \Leftrightarrow \frac{PK}{PO} = \frac{PL}{PL+OL}.$$

Все величины, входящие в эту формулу, кроме PK , известны. Подставив их, найдем $\frac{PK}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Отсюда $PK = \frac{\sqrt{6}}{2(1+\sqrt{2})}$.

Длину отрезка KO можно найти аналогично, а можно по формуле $KO = \frac{PK}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{2})}$. (Подумайте, почему?)

Ответ: 1) $2\sqrt{6}$;

2) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{14}}$; $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$;

3) $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

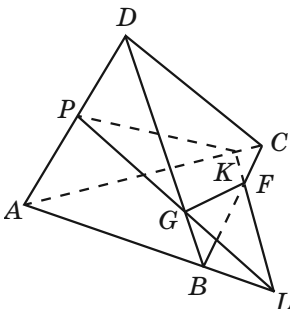
4) $\arccos \left(3\sqrt{\frac{3}{35}} \right)$;

5) $\frac{\sqrt{6}}{2(1+\sqrt{2})}$; $\frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{2})}$.

Рассмотрим пример задачи на вычисление отношений объемов частей пирамиды. Здесь, как правило, удобно пользоваться теоремой Менелая и следующей полезной **теоремой**.

Если две треугольные пирамиды имеют общий трехгранный угол с вершиной A , то отношение их объемов равно отношению произведений длин ребер, исходящих из этой вершины.

Докажем это утверждение. На рисунке пирамиды $ABCD$ и $APKL$ имеют общий трехгранный угол с вершиной в точке A . Высоты этих пирамид, опущенные на плоскость ABC ,



равны расстояниям от точек P и D до этой плоскости. А нам известно, что отношение этих расстояний равно отношению отрезков AD и AP , следовательно, $\frac{h_D}{h_P} = \frac{AD}{AP}$. Площади оснований ABC и AKL этих пирамид могут быть вычислены по формулам $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$ и $S_{AKL} = \frac{1}{2} AK \cdot AL \sin A$.

Запишем отношение объемов этих пирамид:

$$\begin{aligned} \frac{V_{ABCD}}{V_{APKL}} &= \frac{\frac{1}{3} S_{ABC} h_D}{\frac{1}{3} S_{AKL} h_P} = \frac{h_D \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A}{h_P \cdot \frac{1}{2} AK \cdot AL \sin A} = \\ &= \frac{h_D}{h_P} \cdot \frac{AB \cdot AC}{AK \cdot AL} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AL \cdot AK \cdot AP}. \end{aligned}$$

Окончательно $\frac{V_{ABCD}}{V_{APKL}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AL \cdot AK \cdot AP}$.

Утверждение доказано.

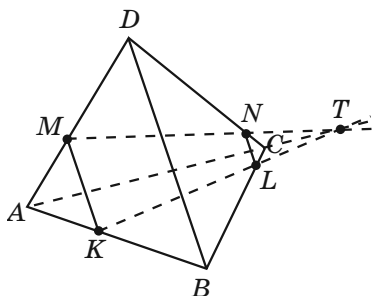
Указанная теорема сохраняется, если две треугольные пирамиды имеют «смежные» трехгранные углы, т.е. углы, имеющие два общих ребра, а третьи ребра дополняют друга до прямой.

Пусть PL пересекает BD в точке G , а прямая KL пересекает BC в точке F . Тогда пирамиды $ABCD$ и $BGFL$ имеют «смежные» трехгранные углы с общей вершиной B . Докажите, что отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений длин ребер, исходящих из этой вершины, т.е.

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{BGFL}} = \frac{BA \cdot BC \cdot BD}{BL \cdot BF \cdot BG}.$$

Пример 23. На ребрах AD , AB , BC пирамиды $DABC$ отмечены точки M , K , L соответственно так, что $AM = MD$, $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 6 : 1$. Найдите отношение, в котором плоскость MKL делит объем пирамиды, если это отношение меньше 1.

Решение. Сначала построим сечение пирамиды плоскостью KLM . Поскольку $\frac{BK}{KA} \neq \frac{BL}{LC}$, то прямые KL и AC пе-



пересекаются. Пусть точка их пересечения есть точка T . Точки M и T лежат в плоскостях MKL и ACD . Следовательно, линия пересечения этих плоскостей есть прямая MT , которая пересекает ребро DC в точке N . Аналогично, прямая NL есть линия пересечения плоскостей MKL и BCD . Получили сечение — четырехугольник $MKLN$. Найдем, в каком отношении точка N делит ребро DC . Придется дважды использовать теорему Менелая. Сначала в треугольнике ABC , который пересекает прямая KL . Имеем

$$\frac{AT}{TC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1.$$

Из условия $AK:KB=1:2$, $BL:LC=6:1$. Поэтому $\frac{AT}{TC} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = 1$, откуда $\frac{AT}{TC} = 3$. Теперь в треугольнике ADC , который пересекает прямая MT , имеем $\frac{DN}{NC} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AM}{MD} = 1$. Откуда

$$\frac{DN}{NC} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DN}{NC} = 3.$$

Пусть объем пирамиды $ABCD$ равен V . Пирамиды $ABCD$ и $AKMT$ имеют общий трехгранный угол с вершиной A . Следовательно, по доказанной теореме

$$\frac{V_{AKMT}}{V_{ABCD}} = \frac{AK \cdot AT \cdot AM}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$V_{AKMT} = \frac{1}{4}V.$$

Аналогично, пирамиды $ABCD$ и $CLNT$ имеют «смежные» трехгранные углы с общей вершиной C . Следовательно, со-

гласно замечанию к теореме об отношении объемов получаем

$$\frac{V_{CLNT}}{V_{ABCD}} = \frac{CL \cdot CN \cdot CT}{CB \cdot CD \cdot CA} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{56}.$$

Отсюда $V_{CLNT} = \frac{1}{56}V$. Объем V_1 многогранника $AMKLNC$ равен разности $V_1 = V_{AKMT} - V_{CLNT} = \frac{1}{4}V - \frac{1}{56}V = \frac{13}{56}V$. Следовательно, объем V_2 многогранника, дополняющего многогранник $AMKLNC$ до данной пирамиды, равен $V_2 = V - V_1 = \frac{43}{56}V$. Поэтому искомое отношение

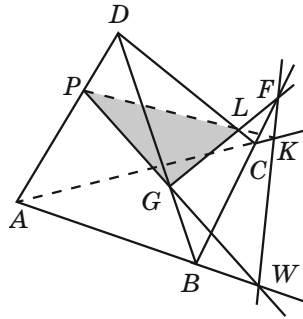
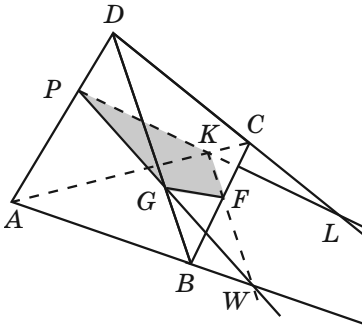
$$V_1 : V_2 = 13 : 43.$$

Ответ: 13:43.

В подобных задачах бывает полезно использовать теорему Менелая для тетраэдра. Вот ее формулировка.

Теорема Менелая для тетраэдра.

Пусть плоскость PGL не проходит ни через одну вершину тетраэдра $ABCD$ и не параллельна ни одной из его граней. Пусть эта плоскость пересекает ребра AD , DB , BC , CA (или



их продолжения) и соответственно в точках P , G , F , K делит эти ребра на соответствующие отрезки (внутренним или внешним образом). Тогда произведение отношений этих отрезков, взятых в порядке непрерывного обхода вершин тетраэдра так, что будут пройдены все ребра, содержащие точки

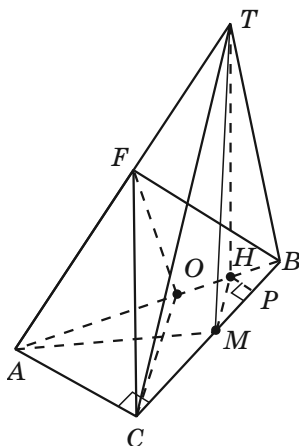
P , G , F , K , равно 1, то есть $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Менелая для треугольника, рассмотренной в главе 7 (см. стр. 398).

Докажите теорему самостоятельно, рассмотрев треугольники ADB и ABC .

Отметим, что во втором случае точки W , K , F лежат на одной прямой.

Пример 24. (ЕГЭ) В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA=27:8$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 2. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC=2:1$. Точка T выбрана на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB , площадь этой сферы равна 16π . Найдите объем пирамиды $ACMT$.



Решение.

1) Пусть R — радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$. Тогда из условия имеем $4\pi R^2 = 16\pi$. Отсюда $R = 2$. Пусть O — центр этой сферы, тогда $OA = OB = OC = OF = R = 2$, а так как O лежит на ребре AB , то O — середина отрезка AB и треугольники ABC и ABF — прямоугольные с общей гипотенузой AB .

2) По условию $T \in AF$ и $TB = TM$. Опустим из точки T в плоскости ABF перпендикуляр TH на прямую AB . Так как $ABF \perp ABC$, то $TH \perp ABC$ и, следовательно, отрезки HM и HV — проекции равных наклонных TM и TB . Значит, $HM = HB$ и поэтому треугольник BHM — равнобедренный, а его высота HP является медианой, т.е. $MP = PB$.

3) Плоскости ABF и ABC перпендикулярны, поэтому проекцией прямой BC на плоскость ABF является прямая AB . Отсюда угол между прямой BC и плоскостью ABF равен углу B треугольника ABC и по условию $\operatorname{tg} B = 2$. Значит, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

4) Так как $AB = 2R = 4$, то

$$BC = AB \cdot \cos B = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad AC = AB \cdot \sin B = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Так как $TH \perp ABC$, то TH — высота пирамиды $ASMT$.

Объем V этой пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot TH \cdot S_{AMC}$,

где S_{AMC} — площадь треугольника AMC . Треугольник AMC — прямоугольный, поэтому $S_{AMC} = 0,5 AC \cdot MC$. Так как

$$BM : MC = 2 : 1, \text{ то } BC : MC = 3 : 2. \text{ Поэтому } MC = \frac{2}{3} BC = \frac{8}{3\sqrt{5}}.$$

$$\text{Отсюда } S_{AMC} = \frac{32}{15}.$$

Так как $BM : MC = 2 : 1$ и $MP = MB$, то можем написать

$$BP = PM = a, \quad MC = 4a.$$

$$\text{Отсюда } \frac{CP}{CB} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6}. \text{ Так как } HP \parallel AC, \text{ то } \frac{AH}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{5}{6}$$

и отсюда $AH = \frac{5 \cdot AB}{6} = \frac{10}{3}$. В прямоугольном треугольнике

AFB отношение $\frac{FB}{FA} = \operatorname{tg} A = \frac{27}{8}$. Поэтому из прямоугольного

треугольника ATH находим $TH = AH \cdot \operatorname{tg} A = \frac{45}{4}$. Оконча-

$$\text{тельно } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{4} \cdot \frac{32}{15} = 8.$$

Ответ: 8.

§ 2. Круглые тела. Комбинации тел

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к теме «Круглые тела» или «Тела вращения» и к комбинациям многогранников и/или круглых тел.

Под круглыми телами мы понимаем следующие фигуры: прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус, шар и некоторые части этих тел, такие как, например, усеченный конус, полушар, шаровой сегмент и шаровой сектор.

2.1. Цилиндр

При изучении темы «Цилиндр» полезно обратить внимание на сечения цилиндра плоскостями, параллельными его оси. Все эти сечения — прямоугольники. Сечения цилиндра плоскостями, перпендикулярными его оси, — круги, равные его основаниям.

Полезными здесь могут оказаться те задачи, в условиях которых заданы не линейные размеры цилиндра, а его объем, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности, площадь основания, площадь осевого сечения и т.п. Отметим, что такие задачи имеют малое отношение к геометрии, однако могут быть полезны при изучении формул.

Пример 1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 5 см^2 , а объем цилиндра равен 10 см^3 . Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S_{\text{б. п. ц.}} = 2\pi rh$, а его объем — по формуле $V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$. Из условия имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\pi rh = 5, \\ \pi r^2 h = 10. \end{cases}$$

Отсюда $r = 4$, а площадь S_0 основания цилиндра вычисляется по формуле $S_0 = \pi r^2 = 16\pi$.

Ответ: 16π .

Пример 2. Прямоугольник вращается сначала относительно стороны, равной a см, а затем относительно стороны, равной b см. Сравните площади боковых поверхностей и объемы полученных цилиндров, если $a < b$.

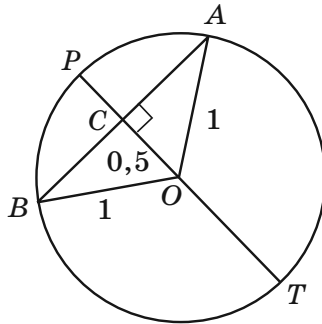
Получите самостоятельно следующий результат: площади боковых поверхностей цилиндров равны; объем цилиндра

460

с высотой, равной b , меньше объема цилиндра с высотой, равной a .

Рассматривая сечения цилиндра, параллельные его оси, полезно установить зависимость площади этого сечения от расстояния плоскости сечения до оси цилиндра.

Пример 3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π см², а объем цилиндра равен 4π см³. Найдите периметр сечения цилиндра, параллельного его оси и удаленного от оси цилиндра на расстояние 0,5 см.



Решение. Из условия имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\pi rh = 8\pi, \\ \pi r^2 h = 4\pi. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} h = 4, \\ r = 1. \end{cases}$

Рассмотрим основание цилиндра (см. рис.) — круг радиусом 1, с центром в точке O . Данное сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде AB , удаленной от центра круга на расстояние, равное 0,5. Действительно, по условию данное сечение удалено от оси цилиндра на расстояние, равное 0,5. Поскольку ось цилиндра параллельна данному сечению, то длина любого перпендикуляра, опущенного из произвольной точки оси цилиндра на плоскость сечения, равна 0,5. Но осевое сечение цилиндра, перпендикулярное данному сечению, по свойству перпендикулярных плоскостей пересекает хорду AB по диаметру PT , перпендикулярному AB . Пусть PT пересекает AB в точке C . Тогда $OC = 0,5$. Из прямоугольного треугольника OAC следует, что

$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $AB = \sqrt{3}$. Искомый периметр сечения найдем по формуле $P_C = 2(AB + h) = 2(\sqrt{3} + 4)$.

Ответ: $2(\sqrt{3} + 4)$.

Напомним, что справедлива **теорема**:

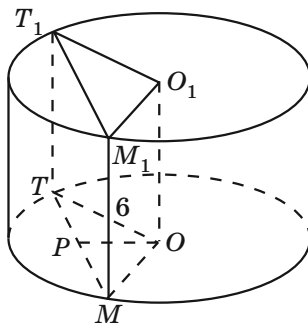
Если две перпендикулярные плоскости пересечены третьей плоскостью, перпендикулярной первым двум, то эта третья плоскость перпендикулярна линии пересечения первых двух плоскостей.

То же самое можно выразить иначе:

Линии пересечения трех попарно перпендикулярных плоскостей попарно перпендикулярны.

Упражнение 1. Докажите каждое из этих двух утверждений.

Пример 4. В цилиндре высотой 5 и радиусом 6 проведено сечение, параллельное его оси и отсекающее от окружности основания дугу в 120° . Определите площадь этого сечения.



Решение. Сечение цилиндра — прямоугольник MTT_1M_1 , две стороны которого — образующие и поэтому равны высоте цилиндра, т.е. $MM_1 = TT_1 = 5$. Рассмотрим основание цилиндра — круг радиуса 6 с центром в точке O . Сечение, по условию, пересекает основание по отрезку MT . Поскольку по условию дуга $\cup MT = 120^\circ$, то центральный $\angle MOT = 120^\circ$. Опустим из точки O перпендикуляр OP на хорду MT . Треугольник MOT *равнобедренный* и его высота OP является медианой и биссектрисой. Следовательно, $MP = PT$ и

$\angle POT = 60^\circ$. Следовательно, $PT = OT \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Поэтому $MT = 6\sqrt{3}$. Площадь сечения найдем по формуле $S = MT \cdot TT_1 = 6\sqrt{3} \cdot 5 = 30\sqrt{3}$.

Ответ: $30\sqrt{3}$.

Упражнение 2. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания — 2. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на расстояние 1.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Следующая задача, несмотря на свою простоту, может также оказаться полезной.

Пример 5. Плоскости, параллельные основанию цилиндра, разбили его на три цилиндра, объемы которых относятся, как 1:2:3. Определите, в каком отношении эти плоскости разделили площадь боковой поверхности этого цилиндра.

Решение. Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 h$, а площадь его боковой поверхности — по формуле $S = 2\pi r h$. Обе величины линейно зависят от h . Следовательно, если объемы цилиндров, имеющих одинаковые радиусы, относятся, как 1:2:3, то и их высоты относятся, как 1:2:3. Поэтому и площади боковых поверхностей этих цилиндров относятся, как 1:2:3.

Ответ: 1:2:3.

Упражнение 3. Плоскость, составляющая с осью цилиндра угол α , разделила его ось на два отрезка, отношение которых равно 2:5. В каком отношении эта плоскость разделила объем цилиндра?

Ответ: 2:5.

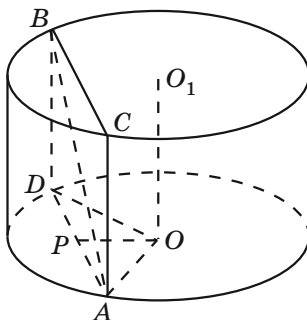
Указание. Воспользуйтесь центральной симметрией цилиндра относительно середины его оси.

Важной является следующая хорошо известная задача.

Пример 6. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r , его высота — h , а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d .

Найдите высоту и площадь боковой поверхности цилиндра, если $r = 9$ дм, $d = 7$ дм, $AB = L = 12$ дм.

Решение. Через точку A , лежащую на окружности основания цилиндра с центром в точке O , проведем образующую. Пусть она пересекает окружность основания с центром



в точке O_1 в точке C . Тогда плоскость ABC параллельна оси OO_1 цилиндра и перпендикулярна его основаниям. Каждая образующая цилиндра параллельна его оси и поэтому расстояние между образующей и осью цилиндра равно его радиусу, т.е. 9. Поскольку расстояние между осью цилиндра и прямой AB равно 7, то AB и OO_1 — скрещивающиеся прямые. Отметим, что прямые AB и OO_1 не могут пересекаться, так как расстояние между пересекающимися прямыми, по определению расстояния между прямыми, равно нулю. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от произвольной точки одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, содержащей вторую прямую. По признаку параллельности прямой и плоскости $OO_1 \parallel ABC$, следовательно, расстояние от прямой OO_1 до прямой AB равно перпендикуляру, опущенному из точки O на плоскость ABC . Так как плоскость ABC перпендикулярна плоскости основания цилиндра, то таким перпендикуляром будет перпендикуляр OP , опущенный из точки O на линию пересечения плоскости ABC и плоскости основания цилиндра, т.е. на прямую AD .

Из прямоугольного треугольника OAP находим

$$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Но прямая, проходящая через центр круга перпендикулярно хорде, делит эту хорду пополам. Следовательно, $AD = 2AP = 2\sqrt{r^2 - d^2}$. Теперь, учитывая условия задачи, из прямоугольного треугольника ABD находим $h = \sqrt{AB^2 - 4r^2 + 4d^2} = \sqrt{144 - 324 + 196} = \sqrt{16} = 4$.

Площадь S_6 боковой поверхности цилиндра найдем по формуле

$$S_6 = 2\pi rh = 2\pi \cdot 9 \cdot 4 = 72\pi.$$

Ответ: 4 дм, 72π дм².

Пример 7. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S . Найдите площадь его осевого сечения.

Решение. В этой задаче чертеж не обязателен. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_6 = 2\pi rh$, а площадь S_c осевого сечения $S_c = 2rh$. Но по условию $2\pi rh = S$. Отсюда $2rh = \frac{S}{\pi}$. Следовательно, $S_c = \frac{S}{\pi}$.

Ответ: $\frac{S}{\pi}$.

Пример 8. Рассматриваются все цилиндры, имеющие периметр осевого сечения, равный $2p$. Найдите высоту того цилиндра, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

Решение.

1. Обозначим r и h радиус и высоту цилиндра, периметр осевого сечения которого равен $2p$. Тогда $h + 2r = p$.

2. Площадь боковой поверхности цилиндра выразим по формуле $S = 2\pi rh$. Но в нашем случае $2r = p - h$. Следовательно,

$$S = \pi h(p - h),$$

где $0 < h < p$. Величина S изменяется в зависимости от h и, следовательно, является функцией h , при условии $0 < h < p$. В нашем случае площадь боковой поверхности цилиндра является квадратичной функцией от h . Из свойств квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом следует, что такая функция достигает своего наибольшего значения при $h = \frac{p}{2}$.

3. Итак, при заданном периметре осевого сечения наибольшую площадь боковой поверхности будет иметь тот цилиндр, у которого высота равна четверти периметра его осевого сечения.

Ответ: $h = \frac{p}{2}$.

Замечание. Посмотрим, как относятся высота и диаметр цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения. Мы знаем, что высота h такого цилиндра равна четверти периметра его осевого сечения, т.е. $h = \frac{p}{2}$. Подставим это значение в равенство $h + 2r = p$. Получим

$$\frac{p}{2} + 2r = p \Leftrightarrow 2r = \frac{p}{2},$$

т.е. $2r = h$. Следовательно, *осевое сечение цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения, — квадрат.*

2.2. Конус. Усеченный конус

При рассмотрении задач на конус важными являются соотношения между параметрами конуса и углами в развертке конуса и в его осевом сечении. Здесь могут оказаться полезными задачи на вычисление угла в развертке и в осевом сечении конуса.

Перечислим некоторые факты, относящиеся к геометрии конуса и усеченного конуса.

Площадь S боковой поверхности конуса с радиусом основания r и образующей l вычисляется по формуле $S = \pi r l$, а площадь полной поверхности — по формуле $S_{\text{п}} = \pi r(r + l)$.

Объем V конуса с радиусом основания r и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Площадь S боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований r, R и образующей l вычисляется по формуле $S = \pi l(r + R)$, а площадь полной поверхности — по формуле $S_{\text{п}} = \pi(l(r + R) + r^2 + R^2)$.

Объем V усеченного конуса с радиусами оснований r , R и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{h}{3}(r^2 + R^2 + rR)$.

Сечение конуса, содержащее его высоту, является треугольником и называется **осевым сечением конуса**. Площадь S_c осевого сечения конуса с радиусом основания r и высотой h вычисляется по формуле

$$S_c = rh.$$

Прямую, содержащую высоту конуса, можно назвать **осью конуса**. Ось конуса является его осью симметрии.

Сечение конуса, проходящее через его вершину, является равнобедренным треугольником.

Разверткой боковой поверхности конуса с радиусом основания r и образующей l является сектор круга радиуса l с углом в развертке конуса, равным $\frac{2\pi r}{l}$ радиан, или $\frac{360r}{l}$ градусов. Площадь развертки конуса равна площади его боковой поверхности.

Сечение усеченного конуса плоскостью, содержащей две его образующие, является равнобедренной трапецией. Важно отметить, что сечение усеченного конуса плоскостью, содержащей параллельные хорды его оснований, **трапецией (в общем случае) не является**.

Разверткой боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований r , R и образующей l является часть сектора круга радиуса $\frac{Rl}{R-r}$ с углом в развертке усеченного конуса, равным $\frac{2\pi(R-r)}{l}$ радиан, или $\frac{360(R-r)}{l}$ градусов, ограниченная дугой окружности радиуса $\frac{rl}{R-r}$ и не содержащая центра данного круга. Площадь развертки усеченного конуса равна площади его боковой поверхности.

Упражнение 4. *Осевое сечение конуса — правильный треугольник. Определите угол в развертке этого конуса.*

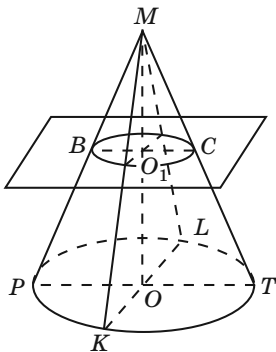
Ответ: 180° .

Упражнение 5. Угол в развертке конуса равен 90° . Определите угол в осевом сечении этого конуса.

Ответ: $2\arcsin\frac{1}{4}$.

Полезными являются задачи, связанные с сечениями конуса, перпендикулярными оси конуса, и сечениями, содержащими его образующие.

Пример 9. Радиус основания конуса с вершиной в точке M и центром основания O равен r , а высота конуса равна h . Точка O_1 лежит на высоте конуса и $MO_1:MO=a:b$. Через точку проведено сечение конуса плоскостью, перпендикулярной высоте конуса. Найдите площадь полученного сечения и длину отрезка OO_1 .



Решение. Данное сечение — круг с центром в точке O_1 и радиусом, равным r_1 . Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через концы диаметра PT основания конуса (см. рис.). Это сечение пересекает круг с центром в точке O_1 по отрезку BC . Поскольку плоскость сечения, проходящая через точку O_1 , и плоскость основания конуса параллельны, как две плоскости, перпендикулярные одной прямой MO , то $BC \parallel PT$. Следовательно, треугольники MBO_1 и MPO подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{MB}{MP} = \frac{BO_1}{PO} = \frac{MO_1}{MO} = \frac{a}{b}$. Так как по условию $PO = r$, то из полученной пропорции найдем $BO_1 = r_1$ радиус круга, являющегося сечением конуса:

$$BO_1 = \frac{MO_1}{MO} \cdot PO \Rightarrow r_1 = \frac{a}{b} r.$$

Из той же пропорции следует

$$\begin{aligned}\frac{MO_1}{MO} &= \frac{a}{b} \Rightarrow MO_1 = MO \cdot \frac{a}{b} = \frac{ah}{b}; \\ \frac{MO}{MO_1} - 1 &= \frac{b}{a} - 1 \Leftrightarrow \frac{MO - MO_1}{MO_1} = \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{OO_1}{MO_1} = \frac{b-a}{a}; \\ OO_1 &= MO_1 \cdot \frac{b-a}{a} = \frac{ah}{b} \cdot \frac{b-a}{a} = \frac{b-a}{b} \cdot h.\end{aligned}$$

Итак, площадь сечения $S_1 = \pi r_1^2 = \pi r^2 \cdot \frac{a^2}{b^2}$, а длина $OO_1 = \frac{b-a}{b} \cdot h$.

Разобранный нами пример 9 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема о параллельных сечениях конуса

Площади сечений конуса, параллельных его основанию, относятся, как квадраты их расстояний от вершины конуса.

Пример 10. Высота конуса равна 20. Точки A, B, C лежат в указанной последовательности на высоте конуса и делят ее на четыре равные части, причем C — ближайшая к основанию конуса. Площадь сечения, проходящего через точку B , равна 5. Найдите площадь основания конуса и площади сечений, проходящих через точки A и C .

Решение. Поскольку высота конуса $MO = 20$, а точки A, B, C делят ее на равные части, то $MA = 5$, $MB = 10$, $MC = 15$. Из теоремы о параллельных сечениях конуса следуют пропорции:

$$\begin{aligned}1) \quad \frac{S_A}{S_B} &= \frac{MA^2}{MB^2} \Leftrightarrow \frac{S_A}{5} = \frac{5^2}{10^2} \Leftrightarrow S_A = 1,25. \\ 2) \quad \frac{S_B}{S_C} &= \frac{MB^2}{MC^2} \Leftrightarrow \frac{5}{S_C} = \frac{10^2}{15^2} \Leftrightarrow S_C = 11,25. \\ 3) \quad \frac{S_O}{S_B} &= \frac{MO^2}{MB^2} \Leftrightarrow \frac{S_O}{5} = \frac{20^2}{10^2} \Leftrightarrow S_O = 20.\end{aligned}$$

Ответ: 1,25; 11,25; 20.

Рассмотрим сечение конуса произвольной плоскостью, содержащей две его образующие. Если плоскость сечения

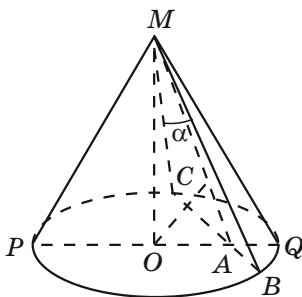
содержит высоту конуса, то это, как известно, — осевое сечение. Если плоскость сечения не проходит через высоту конуса, то такое сечение является равнобедренным треугольником. Две его стороны — образующие конуса, а третья сторона — хорда основания, не являющаяся диаметром (см. рис.).

Пусть α — угол между образующими MB и MC некоторого сечения, содержащего две образующие конуса, т.е. пусть $\angle CMB = \alpha$, а угол при вершине конуса равен β , т.е. $\angle PMQ = \beta$.

Какова наибольшая площадь осевого сечения конуса, если величина угла α будет изменяться?

Запишем формулу для площади сечения, как функции от угла α :

$$S_{MCB} = S(\alpha) = \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha.$$



Заметим, что величина α изменяется от 0 до β , то есть $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Если угол β — острый или прямой, то $\sin \alpha$ и, значит, $S(\alpha)$ будет монотонно возрастать и поэтому достигнет своего наибольшего значения при $\alpha = \beta$. То есть в этом случае наибольшей будет площадь осевого сечения.

Если β — тупой угол, то наибольшее значение площади сечения будет равно $S_{MCB} = \frac{1}{2} l^2$, так как $\sin \alpha$ будет иметь наибольшее значение, равное 1, при $\alpha = 90^\circ$.

Дополнительно заметим, что если угол в осевом сечении конуса тупой, то существует такое не осевое сечение конуса плоскостью, проходящей через две образующие, площадь которого равна площади осевого сечения.

Например, если угол при вершине конуса равен 150° , а образующая равна 2, то площадь осевого сечения $S_0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 150^\circ = 1$. Рассмотрим теперь сечение, содержащее две образующие конуса, угол между которыми равен 30° . Очевидно, что это сечение не осевое. Найдем его площадь. Имеем $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30^\circ = 1$.

Пример 11. В конусе длина образующей вдвое больше его высоты и равна 20. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Решение. Рассмотрим осевое сечение PMT конуса. Так как катет MO прямоугольного треугольника PMO в два раза меньше гипотенузы PM , то $\angle OPM = 30^\circ$. Следовательно, $\angle PMO = 60^\circ$, а $\angle PMT = 120^\circ$. Теперь площадь осевого сечения $\triangle PMT$ можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot PM^2 \cdot \sin 120^\circ = 100\sqrt{3}.$$

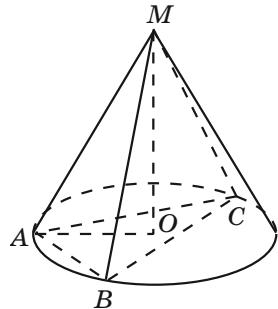
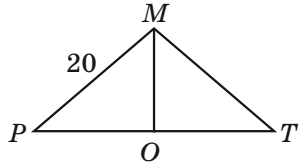
Ответ: $100\sqrt{3}$.

Пример 12. Три образующие конуса попарно перпендикулярны, а длина каждой из них равна $3\sqrt{3}$. Найдите: 1) объем конуса; 2) угол в развертке конуса.

Решение. Пусть в конусе с вершиной M и центром основания O образующие AM , BM и CM попарно перпендикулярны. Следовательно, треугольники AMB , BMC , CMA прямоугольные и равнобедренные, катеты которых соответственно равны. Поэтому эти треугольники равны и, следовательно, равны их гипотенузы, т.е. $AB = BC = CA$. Поскольку по условию $AM = BM = CM = 3\sqrt{3}$, то

$$AB = BC = CA = AM\sqrt{2} = 3\sqrt{6}.$$

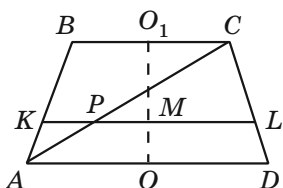
Следовательно, треугольник ABC равносторонний со стороной, равной $3\sqrt{2}$. Поэтому радиус R конуса, равный радиусу окружности, описанной около



равностороннего треугольника ABC , равен $R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}$. Отсюда высота H конуса может быть найдена из прямоугольного треугольника AOM : $H = \sqrt{AM^2 - AO^2} = 3$. Объем V конуса найдем по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 18\pi$. Угол φ в развертке конуса найдем по формуле $\varphi = \frac{2\pi R}{AM} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 294^\circ$.

Ответ: 1) 18π ; 2) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Рассматривая усеченный конус, полезно установить зависимость площади сечения усеченного конуса плоскостью, перпендикулярной его оси, в зависимости от положения плоскости сечения.



Пример 13. В усеченном конусе радиусы оснований равны r и R ($r < R$). Определите радиус сечения этого конуса плоскостью, параллельной его основаниям и делящей высоту усеченного конуса в отношении $a:b$, считая от меньшего основания.

Решение. Пусть трапеция $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса и $BC \parallel AD$. Тогда $BC = 2r$, $AD = 2R$. Пусть точка M на высоте конуса делит ее так, что $O_1M:MO = a:b$, где O и O_1 — центры большего и меньшего оснований конуса соответственно. Проведем через точку M прямую KL , параллельную прямой BC (см. рис.).

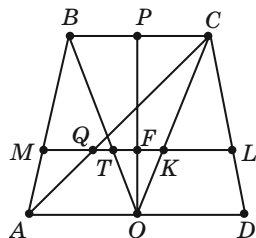
Используя подобие треугольников AKP и ABC , найдем $\frac{KP}{BC} = \frac{b}{a+b}$. Отсюда $KP = \frac{2rb}{a+b}$. Из подобия треугольников PCL и ACD найдем $\frac{PL}{AD} = \frac{a}{a+b}$. Отсюда $PL = \frac{2Ra}{a+b}$.

Следовательно, $KL = KP + PL = 2 \frac{rb + Ra}{a+b}$. Отсюда окончательно находим радиус R_0 сечения $R_0 = \frac{rb + Ra}{a+b}$.

Пример 14. В усеченный конус, отношение радиусов оснований которого равно 0,5, помещен конус так, что его основание совпадает с меньшим основанием усеченного конуса, а

вершина лежит в центре большего основания усеченного конуса. Плоскость, параллельная основаниям конусов, делит их высоту в отношении 2:3, считая от большего основания усеченного конуса. Определите отношение объема той части конуса, которая прилегает к его основанию, к той части усеченного конуса, которая прилегает к его большему основанию.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса и равнобедренный $\triangle OBC$ — осевое сечение вписанного конуса. Плоскость сечения пересекает осевое сечение усеченного конуса по отрезку ML , осевое сечение конуса по отрезку TK , а высоту конуса в точке F .



Пусть $BP = r$ (радиус верхнего основания усеченного конуса), тогда радиус AO его нижнего основания равен $2r$. Поскольку точка F делит высоту PO конуса в отношении 2:3, считая от нижнего основания усеченного конуса, то $FP = \frac{3}{5}H$, $FO = \frac{2}{5}H$, где H — высота усеченного конуса. Пусть диагональ AC трапеции $ABCD$ пересекает отрезок ML в точке Q . Тогда из подобия $\triangle AMQ \sim \triangle ABC$ находим $MQ = 0,8r$, а из подобия $\triangle CQL \sim \triangle CAD$ находим $QL = 2,4r$. Отсюда $MF = 1,6r$. Аналогично, из подобия $\triangle OTF \sim \triangle OBP$ находим $TF = 0,4r$.

Требуется найти отношение объема усеченного конуса с осевым сечением $TKCB$ к объему усеченного конуса с осевым сечением $AMLD$. По формуле для объема усеченного конуса имеем

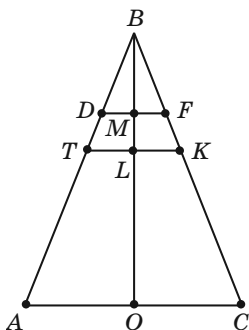
$$V_{TC} = \frac{1}{3}\pi FP(TF^2 + BP^2 + TF \cdot BP) = \frac{\pi r^2 H}{3} \cdot \frac{117}{125};$$

$$V_{AL} = \frac{1}{3}\pi FO(AO^2 + MF^2 + AO \cdot MF) = \frac{\pi r^2 H}{3} \cdot \frac{488}{125}.$$

Отсюда искомое отношение $\frac{V_{TC}}{V_{AL}} = \frac{117}{488}.$

Ответ: $\frac{117}{488}.$

Пример 15. На высоте BO конуса выбраны точки M и L так, что $BM:ML:LO = 2:1:5$. Плоскости, проходящие через



точки M и L параллельно основанию конуса, делят его на три части. Известно, что объем средней части равен $\frac{19}{8}$. Определите объем конуса.

Решение. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ — осевое сечение конуса.

Плоскости сечений, проходящие через точки M и L , пересекают осевое сечение конуса по отрезкам DF и GN со-

ответственно. Из условия имеем $\frac{BM}{BO} = \frac{1}{4}$, $\frac{BL}{BO} = \frac{3}{8}$.

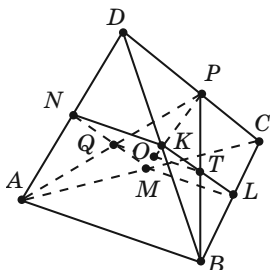
Из подобия $\triangle GBN \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{BL}{BO} = \frac{3}{8}$, следует, что конусы с данными осевыми сечениями подобны и поэтому $V_{GBN} = \frac{BL^3}{BO^3} \cdot V_{ABC} = \frac{27}{512} V_{ABC}$.

Аналогично, из подобия $\triangle DBF \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{BM}{BO} = \frac{1}{4}$, следует, что $V_{DBF} = \frac{1}{64} V_{ABC}$. Выразим объем усеченного конуса с осевым сечением $GDFN$ как разность объемов конусов с осевыми сечениями GBN и DBF :

$$V_{GF} = V_{GBN} - V_{DBF} = \frac{19}{512} V_{ABC}.$$

Но по условию $V_{GF} = \frac{19}{512} V_{ABC} = \frac{19}{8}$. Отсюда находим объем данного конуса $V_{ABC} = 64$.

Ответ: 64.



Пример 16. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус так, что его вершина является серединой ребра CD , а окружность основания конуса вписана в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB . Известно, что объем конуса равен $9\pi\sqrt{2}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

Решение. Пусть в правильном тетраэдре $ABCD$ точка P — середина ребра DC — является вершиной вписанного конуса. Поскольку все грани тетраэдра — правильные треугольники, то отрезки AP и BP — высоты треугольников ADC и BDC соответственно. Поэтому ребро DC перпендикулярно плоскости APB и, значит, любой прямой этой плоскости. Следовательно, $DC \perp AB$.

Пусть точки L, M, N, K — середины ребер BC, AC, AD, BD соответственно. Отрезки KL и NM являются средними линиями граней тетраэдра; они параллельны ребру DC и равны его половине. Поэтому $KLMN$ — ромб. Но поскольку $DC \perp AB$, $NK \parallel AB$, $KL \parallel DC$, то $NK \perp KL$ и поэтому сечение $KLMN$ — квадрат.

Поскольку $KLMN$ — квадрат, то вписанная в него окружность основания конуса касается его сторон в их серединах. Следовательно, если точка O — центр квадрата, а T — середина стороны KL квадрата $KLMN$, то отрезок PO — ось и высота конуса, а отрезок PT является его образующей.

Пусть ребро тетраэдра равно a . Рассмотрим $\triangle QTP$ — осевое сечение конуса. Поскольку $BP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $PT = 0,5BP = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Поскольку $AB = a$, то $QT = 0,5a$, а $TO = 0,25a$. Следовательно, высота конуса $PO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Отсюда объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi OT^2 \cdot PO = \frac{\pi a^3}{96\sqrt{2}}$.

По условию объем конуса равен $9\pi\sqrt{2}$. Отсюда приходим к уравнению $9\pi\sqrt{2} = \frac{\pi a^3}{96\sqrt{2}}$, из которого находим, что ребро тетраэдра $a = 12$.

Ответ: 12.

2.3. Сфера и шар

В рамках этой темы рекомендуется рассмотреть вопрос о положении центра сферы, описанной около основных типов многогранников: параллелепипеда, призмы, пирамиды, и положение центра сферы, вписанной в эти многогранники.

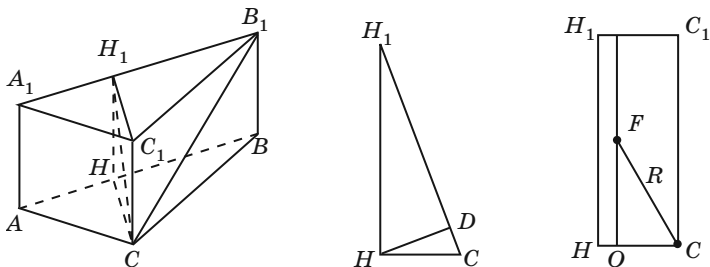
Определение. Сфера называется **описанной** около многогранника, если все его вершины лежат на этой сфере. При этом многогранник называется **вписанным** в сферу.

Из определения следует, что если у многогранника существует описанная сфера, то все его грани являются вписанными многоугольниками и, следовательно, не каждый многогранник имеет описанную вокруг него сферу.

Например, наклонный параллелепипед не имеет описанной сферы, так как вокруг параллелограмма нельзя описать окружность.

Положение центра сферы, описанной около прямой призмы, как правило, не вызывает вопросов, поскольку очевидно, что этот центр — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований прямой призмы.

Пример 17. Около правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ описана сфера радиусом $\sqrt{37}$. Найдите расстояние между прямыми AB и CB_1 , если площадь боковой поверхности призмы равна 180 и высота призмы больше стороны ее основания.



Решение. Прямые AB и CB_1 скрещиваются. Пусть CH — высота треугольника ABC . Тогда $AB \perp CH$ и, следовательно, $AB \perp HCC_1$.

Отсюда $B_1H_1 \perp HCC_1$ и поэтому CH_1 — проекция прямой CB_1 на плоскость HCC_1 .

Пусть HD — высота треугольника H_1NC . Тогда $AB \perp HD$, поскольку $AB \perp HCC_1$, а HD лежит в плоскости HCC_1 . Плоскость CB_1H_1 содержит перпендикуляр B_1H_1 к плоскости HCC_1 и поэтому перпендикулярна плоскости HCC_1 , а HD перпендикуляр к линии пересечения перпендикулярных плоскостей HCC_1 и CB_1H_1 , лежащий в плоскости HCC_1 .

Следовательно, $HD \perp CB_1H_1$ и, значит, $HD \perp CB_1$. Итак, $HD \perp CB_1$ и $HD \perp AB$, т.е. HD — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CB_1 . Следовательно, расстояние между прямыми AB и CB_1 равно длине отрезка HD .

Пусть OO_1 — ось призмы, а F — середина этой оси. Тогда F — центр сферы, описанной около призмы и $FC = R$ — радиус описанной сферы. Обозначим $AB = a$, $OO_1 = h$.

Тогда $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CO = \frac{2}{3}CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3} = 37$, площадь боковой поверхности призмы $180 = 3ah$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} ah = 60, \\ 4a^2 + 3h^2 = 444 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{60}{a}, \\ 4a^2 + \frac{108 \cdot 100}{a^2} = 444. \end{cases}$$

Из второго уравнения после деления всех его членов на 4 получим $a^2 + \frac{2700}{a^2} = 111$. Отсюда находим $a = 6$ или $a = 5\sqrt{3}$.

Таким образом, система имеет два решения $a = 6$, $p = 10$ и $a = 5\sqrt{3}$, $h = 4\sqrt{3}$. По условию $h > a$, следовательно, $a = 6$, $h = 10$.

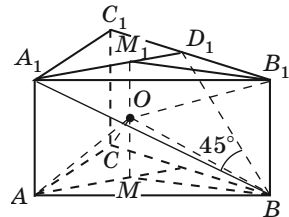
Найдем HD из треугольника H_1HC . Имеем

$$HD = \frac{HH_1 \cdot HC}{CH_1} = \frac{h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{127}}.$$

Ответ: $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{127}}$.

Пример 18. В шар радиуса $0,5\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45° . Найдите объем призмы.

Решение. Пусть D_1 — середина ребра B_1C_1 . Так как призма правильная, то $A_1D_1 \perp B_1C_1$ и $CC_1 \perp A_1D_1$, и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1D_1 \perp BCC_1$. Значит, $\angle A_1BD_1 = 45^\circ$, как угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1 .



Пусть M и M_1 — центры оснований призмы, а O — середина отрезка MM_1 . Тогда $AM=BM=CM$ и $A_1M_1=B_1M_1=C_1M_1$. Так как $OM \perp ABC$, то по свойству наклонных и проекций $OA=OB=OC$ и $OA_1=OB_1=OC_1$. Так как $OM=OM_1$ и $BM=B_1M_1$, то прямоугольные треугольники OMB и OM_1B_1 равны по двум катетам. Значит $OB=OB_1$. Следовательно, точка O равноудалена от всех вершин призмы $ABCA_1B_1C_1$ и поэтому является центром описанного около нее шара. Из условия радиус шара $R=OB=0,5\sqrt{11}$.

Пусть $AB=a$. Тогда $A_1D_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но $\triangle A_1D_1B$ — прямоугольный и $\angle A_1B_1D_1=45^\circ$. Следовательно, $BA_1=\frac{A_1D_1}{\sin 45^\circ}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

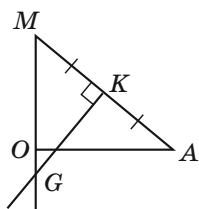
$$\text{Из } \triangle ABA_1 \quad AA_1=\sqrt{BA_1^2-AB^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Отрезок } MB=\frac{2}{3}A_1D_1=\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \text{отрезок } OM=\frac{1}{2}AA_1=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Поэтому из прямоугольного $\triangle OMA$ имеем $\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{3}=\frac{11}{4}$. Следовательно, $a=\sqrt{6}$. Объем призмы находим по формуле

$$V=S_{ABC} \cdot AA_1. \quad \text{Но } S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad AA_1=\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad a=\sqrt{6}. \quad \text{Отсюда } V=4,5.$$

Ответ: 4,5.



Рассмотрим правильную пирамиду. В этом случае также несложно определить положение центра описанной сферы.

Из соображений симметрии ясно, что центр сферы, описанной около правильной пирамиды, лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды. Здесь необходимо знать «стандартную картинку», т.е. рисунок, который приходится рисовать для любой правильной пирамиды, вписанной в сферу. На этом рисунке M — вершина пирамиды, $MA=L$ — боковое ребро, O — центр основания, K — середина бокового ребра, G — центр сферы, описанной около правильной пирамиды, $MG=r$ — радиус описанной сферы, $MO=H$ — высота пирамиды.

Для вычисления рекомендуется использовать подобие треугольников MKG и MOA . Из этого подобия следует пропорция:

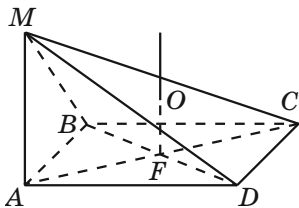
$$\frac{MG}{MA} = \frac{MK}{MO} \Leftrightarrow \frac{R}{L} = \frac{0,5L}{H}.$$

$$\text{Отсюда } R = \frac{L^2}{2H}.$$

Остановимся на примерах двух пирамид.

Пример 19. Основание пирамиды — квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Боковое ребро AM перпендикулярно плоскости основания пирамиды и вдвое больше ребра основания. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

Решение. Через точку F пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведем перпендикуляр FO к плоскости основания пирамиды. Тогда любая его точка равноудалена от вершин основания, поскольку F — центр окружности, описанной около основания пирамиды. $FO \parallel AM$ как перпендикуляры к одной плоскости, следовательно, FO — средняя линия треугольника MAC . Поскольку O — середина MC , то точка O равноудалена от всех вершин основания и от точки M . Значит, O — центр сферы, описанной около данной пирамиды, и $OC = R$ — радиус этой сферы.



Вычисления в данном случае просты, как, впрочем, почти все задания ЕГЭ по геометрии из части 3.

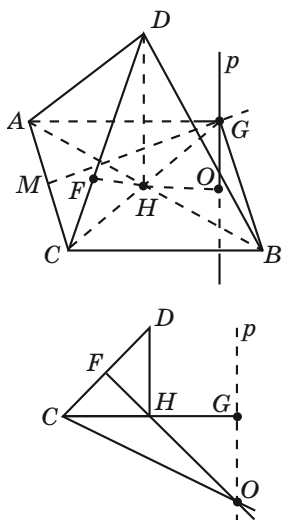
$$AC = a\sqrt{2}, \quad MC = \sqrt{AC^2 + MA^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Следовательно, } R = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Пример 20. Основание пирамиды — треугольник ABC , в котором $\angle C = 2\alpha > 90^\circ$, $AB = 2c$. Боковая грань ADB перпендикулярна плоскости ABC и $CA = CB = CD = DB$. Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.

Решение. Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому центр его описанной окружности лежит на прямой, содер-



жащей его высоту CH , в точке G ее пересечения с серединным перпендикуляром MG к стороне AC .

Проведем через точку G перпендикуляр p к плоскости ABC . Треугольники ACB и ADB — равные равнобедренные треугольники и H — середина их общего основания AB , поэтому $DH \perp AB$. Поскольку $ADB \perp ABC$ по условию, то $DH \perp CH$ и, значит, $DH \perp ABC$. Следовательно, плоскость $CHD \perp ABC$ и перпендикуляр p лежит в плоскости CHD . Любая точка этого перпендикуляра будет равноудалена от вершин треугольника ABC , так как $GA = GB = GC$.

Поскольку $CH = DH$ как высоты равных треугольников ACB и ADB , то треугольник CHD — прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, серединный перпендикуляр к отрезку CD , лежащий в плоскости CDH , содержит высоту FH треугольника CDH .

Пусть FH пересекает p в точке O , тогда $OC = OD$ и, значит, точка O равноудалена от всех вершин пирамиды $ABCD$, т.е. O — центр шара, описанного около данной пирамиды.

Запишем $OA = OB = OC = OD = R$ — радиус этого шара.

Поскольку в равнобедренном треугольнике ACB высота CH — биссектриса и медиана, то $\angle ACG = \alpha$ и $AH = c$. Отсюда $CH = c \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. По теореме синусов для треугольника ABC

$$\text{имеем } AG = \frac{c}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Отсюда } GH = CG - CH = \frac{c}{\sin 2\alpha} - c \cdot \operatorname{ctg} \alpha = -c \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Треугольник OHG равнобедренный и прямоугольный, поэтому $GO = GH = -c \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$. Теперь найдем радиус R шара. Получим

$$R = AO = \sqrt{AG^2 + GO^2} = \sqrt{\frac{c^2}{\sin^2 2\alpha} + c^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = c \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha}.$$

$$\text{Ответ: } c \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha}.$$

Пример 21. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D — последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды $FABCD$ наибольший.

Точки M, L, T — середины ребер FB, CD и AD соответственно. Площадь треугольника MLT равна $64\sqrt{5}$. Найдите радиус сферы.

Решение. Пусть R — радиус сферы. Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность сечения радиуса R , то его диагонали AC и BD — хорды этой окружности и поэтому $AC \leq 2R$ и $BD \leq 2R$. Отсюда для площади S четырехугольника $ABCD$ имеем неравенство

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha \leq \frac{1}{2} 4R^2 \cdot 1 = 2R^2.$$

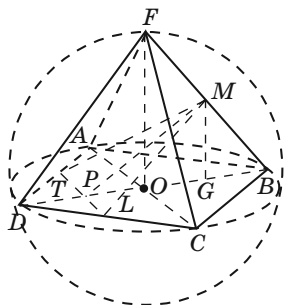
При этом $S = 2R^2$, только если $AC \perp BD$, т.е. из всех четырехугольников, вписанных в данное сечение сферы, наибольшую площадь имеет квадрат $ABCD$.

Пусть H — высота пирамиды $FABCD$, равная расстоянию от точки F сферы до плоскости ABC . Так как точка F лежит на сфере, то $H \leq R$. Поэтому для объема пирамиды имеем

$$V_{FABCD} = \frac{1}{3} S \cdot H \leq \frac{1}{3} R^2 \cdot R = \frac{2}{3} R^3.$$

При этом $V_{FABCD} = \frac{2}{3} R^3$, если AC и BD — перпендикулярные диаметры сечения, а вершина F пирамиды проектируется в центр O сечения. Таким образом, пирамида $FABCD$ при указанных условиях имеет наибольший объем, если ее основание $ABCD$ — квадрат, вписанный в окружность сечения радиуса R , а вершина F пирамиды проектируется в центр квадрата, т.е. $FO \perp ABC$. Отсюда следует, что пирамида $FABCD$ правильная.

TL — средняя линия треугольника ADC , поэтому $TL = 0,5AC = R$. Пусть MG — перпендикуляр, опущенный из точки M на DB . Тогда $MG \parallel FO$ и поэтому $MG \perp ABC$.



Площадь треугольника MLT найдем по формуле $S = \frac{1}{2} TL \cdot MP$. Из прямоугольного треугольника PMG имеем $MP = \sqrt{MG^2 + PG^2}$. MG — средняя линия треугольника FOB , параллельная FO . Поэтому

$$MG = 0,5FO = 0,5R, \quad PG = PO + OG = 0,5(DO + OB) = R.$$

$$\text{Отсюда } MP = \sqrt{MG^2 + PG^2} = 0,5R\sqrt{5}.$$

$$\text{Поэтому } S = 0,5 TL \cdot MP = \frac{R^2 \cdot \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Имеем уравнение } 64\sqrt{5} = \frac{R^2 \cdot \sqrt{5}}{4}. \text{ Откуда } R = 16.$$

Ответ: 16.

Теперь рассмотрим сферу, вписанную в многогранник.

Определение. Сфера Ω называется *вписанной в многогранник*, если плоскости всех его граней являются касательными к сфере Ω , а точки касания сферы с плоскостями граней лежат в гранях *многогранника* и не лежат ни на одном его ребре (говорят, что точки касания являются внутренними точками каждой грани *многогранника*). Если сфера (шар) вписана в *многогранник*, то сам *многогранник* называется *описанным многогранником*.

Сфера, вписанная в призму

Отметим полезные факты, помогающие решению задач на комбинации сферы и призмы.

Диаметр D сферы, вписанной в призму, равен высоте H призмы: $D = 2R = H$.

Радиус R сферы, вписанной в призму, равен радиусу окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы.

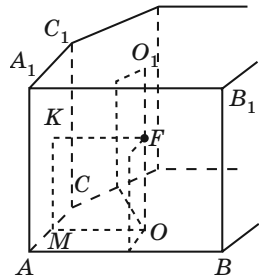
Если в прямую призму вписана сфера, то в основание этой призмы можно вписать окружность.

Радиус R сферы, вписанной в прямую призму, равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

Ответ на вопрос о расположении центра сферы, вписанной в призму, дают следующие важные теоремы. (Обратим внимание на то, что важны не только утверждения теорем, но также и их доказательства.)

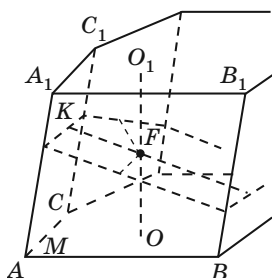
Теорема. Пусть в основание *прямой призмы* можно вписать окружность и высота H призмы равна диаметру D этой окружности. Тогда в эту призму можно вписать сферу диаметром D . Центр этой вписанной сферы совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы.

Доказательство. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма и O — центр окружности, вписанной в ее основание ABC . Тогда точка O равноудалена от всех сторон основания ABC . Пусть O_1 — ортогональная (перпендикулярная) проекция точки O на основание $A_1B_1C_1$. Тогда O_1 равноудалена от всех сторон основания $A_1B_1C_1$, и $OO_1 \parallel AA_1$ (рис. 2). Отсюда следует, что прямая OO_1 параллельна каждой плоскости боковой грани призмы, а длина отрезка OO_1 равна высоте призмы и, по условию, диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Значит, точки отрезка OO_1 равноудалены от боковых граней призмы, а середина F отрезка OO_1 , равноудаленная от плоскостей оснований призмы, будет равноудалена от всех граней призмы. То есть F — центр сферы, вписанной в призму, и диаметр этой сферы равен диаметру окружности, вписанной в основание призмы. **Теорема доказана.**



Теорема. Пусть в перпендикулярное сечение наклонной призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности. Тогда в эту призму можно вписать сферу. Центр этой сферы делит высоту, проходящую через центр окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, пополам.

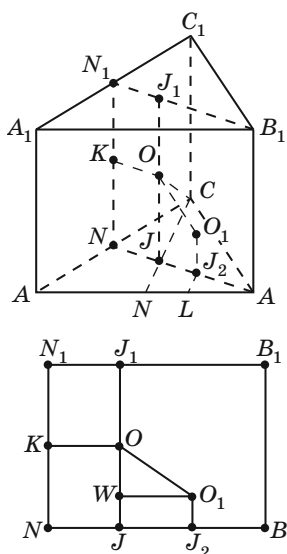
Доказательство. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма и F — центр окружности радиусом FK , вписанной в ее перпендикулярное сечение. Поскольку перпендикулярное сечение призмы перпендикулярно каждой плоскости ее боковой грани, то радиусы окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, проведенные к сторонам этого сечения, являются перпендикулярами к боковым граням призмы. Следовательно, точка F равноудалена от всех боковых граней.



Проведем через точку F прямую OO_1 , перпендикулярную плоскостям оснований призмы, пересекающую эти основания в точках O и O_1 . Тогда OO_1 — высота призмы. Поскольку по условию $OO_1 = 2FK$, то F — середина отрезка OO_1 : $FK = \frac{1}{2}OO_1 = FO = FO_1$, т.е. точка F равноудалена от плоскостей всех без исключения граней призмы. Значит, в данную призму можно вписать сферу, центр которой совпадает с точкой F — центром окружности, вписанной в то перпендикулярное сечение призмы, которое делит высоту призмы, проходящую через точку F , пополам. Теорема доказана.

Следствие. Центр сферы, вписанной в призму, лежит в точке пересечения плоскостей, делящих двугранные углы при всех ребрах призмы пополам.

Пример 22. (ЕГЭ) В правильной треугольной призме со стороной основания, равной $4\sqrt{3}$, расположены два шара. Первый шар вписан в призму, а второй шар касается одного основания призмы, двух ее боковых граней и первого шара. Найдите радиус второго шара.



Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма и точки J и J_1 — центры ее оснований. Тогда центр O шара, вписанного в эту призму, является серединой отрезка JJ_1 . Рассмотрим плоскость JBB_1 . Поскольку призма правильная, то JB лежит на отрезке BN , который является биссектрисой и высотой $\triangle ABC$. Следовательно, плоскость $JBB_1 \perp ACC_1$ и является биссекторной плоскостью двугранного угла при боковом ребре BB_1 . Поэтому любая точка этой плоскости равноудалена от боковых граней AA_1B_1B и CC_1B_1B . В частности,

перпендикуляр OK , опущенный из точки O на грань ACC_1A_1 , лежит в плоскости JBB_1 и равен отрезку OJ .

Заметим, что $KNJO$ — квадрат, сторона которого равна радиусу шара, вписанного в данную призму.

Пусть O_1 — центр шара, касающегося вписанного шара с центром O и боковых граней AA_1B_1B и CC_1B_1B призмы. Тогда точка O_1 лежит в плоскости JBB_1 , а ее проекция J_2 на плоскость ABC лежит на отрезке JB .

По условию сторона основания равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $JN=2$ и поэтому радиус шара OJ , вписанного в призму, также равен 2. Так как шары с центрами в точках O и O_1 касаются друг друга, то отрезок $OO_1=OJ+O_1J_2$. Обозначим $OJ=r$, $O_1J_2=x$. Рассмотрим $\triangle OO_1W$, где $O_1W \perp OJ$. В этом треугольнике $OO_1=r+x$, $OW=r-x$. Поэтому

$$O_1W = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}.$$

Так как фигура WJJ_2O_1 — прямоугольник, то $JJ_2=O_1W=2\sqrt{rx}$. Далее, по свойству медиан треугольника $JB=2r$, а $J_2B=2x$, поскольку в прямоугольном треугольнике J_2LB $\angle L=90^\circ$, $\angle B=30^\circ$ и $J_2L=x$. Поскольку $JB=JJ_2+J_2B$, то получаем уравнение

$$2r = 2\sqrt{rx} + 2x,$$

из которого, учитывая неравенство $x < r$, находим $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}r$.

Подставив значение $r=2$, окончательно находим $x=3-\sqrt{5}$.

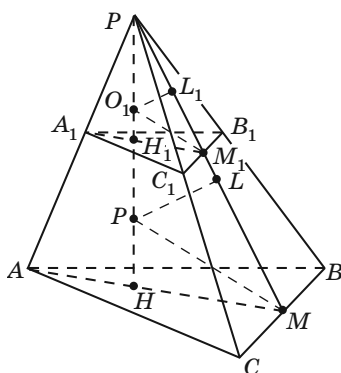
Ответ: $3-\sqrt{5}$.

Сфера, вписанная в пирамиду

В каждую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр этой сферы лежит на высоте пирамиды в точке ее пересечения с биссектрисой линейного угла при ребре основания пирамиды.

Это утверждение докажите самостоятельно.

Полезно заметить, что если в данную пирамиду, обязательно правильную, можно вписать сферу, то радиус r этой сферы можно вычислить по формуле $r = \frac{3V}{S_{\pi}}$, где V — объем данной пирамиды, а S_{π} — площадь ее полной поверхности.



Пример 23. В правильной треугольной пирамиде с двугранным углом при основании, равном α , расположены два шара. Первый шар касается всех граней пирамиды, а второй шар касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Найдите отношение радиуса первого шара к радиусу второго шара, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.

Решение. Пусть $PABC$ — правильная пирамида и точка H — центр ее основания ABC . Пусть M — середина ребра BC . Тогда $\angle PMA$ — линейный угол двугранного угла $\angle(A, BC, P)$, который по условию равен α , причем $\alpha < 90^\circ$. Центр O первого шара, касающегося всех граней пирамиды, лежит на отрезке PH в точке его пересечения с биссектрисой $\angle PMA$.

Пусть HH_1 — диаметр первого шара и плоскость, проходящая через точку H_1 перпендикулярно прямой PH , пересекает боковые ребра PA , PB , PC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Тогда точка H_1 будет центром правильного $\triangle A_1B_1C_1$, а пирамида $PA_1B_1C_1$ будет подобна пирамиде $PABC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$. Заметим, что второй шар, с центром в точке O_1 , является вписанным в пирамиду $PA_1B_1C_1$, и поэтому отношение радиусов вписанных шаров равно коэффициенту подобия $\frac{OH}{O_1H_1} = \frac{PH}{PH_1}$. Из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ находим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$.

Пусть $AB = a$. Тогда

$$HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad OH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8},$$

$$PH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{4a\sqrt{3}}{7}, \quad PH_1 = PH - 2OH = \frac{9a\sqrt{3}}{28}.$$

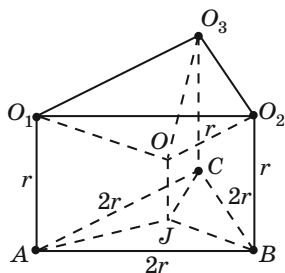
Отсюда искомое отношение $\frac{OH}{O_1H_1} = \frac{16}{9}$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Касание сфер

Пример 24. Три равные сферы радиусом r касаются друг друга и некоторой плоскости. Определите радиус четвертой сферы, касающейся трех данных и данной плоскости.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры данных сфер и O — центр четвертой сферы, касающейся трех данных и данной плоскости. Пусть A, B, C, J — точки касания сфер с данной плоскостью. Как видите, изображать сферы не требуется, более того, при их изображении может исчезнуть наглядность рисунка. Точки касания двух сфер лежат на линии центров этих сфер, поэтому $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r$. Точки равноудалены от плоскости ABC , поэтому $ABO_2O_1, ABO_2O_3, ABO_3O_1$ — равные прямоугольники, следовательно, треугольник ABC — равносторонний со стороной, равной $2r$.



Пусть x — искомый радиус четвертой сферы. Тогда $OJ = x$. Следовательно, $AJ = 2\sqrt{rx}$. Аналогично, $BJ = CJ = 2\sqrt{rx}$, значит, J — центр равностороннего треугольника. Поэтому $AJ\sqrt{3} = AB$. Отсюда

$$2\sqrt{xr} \cdot \sqrt{3} = 2r \Leftrightarrow 3xr = r^2 \Leftrightarrow x = \frac{r}{3}.$$

Ответ: $\frac{r}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Боковые ребра треугольной призмы наклонены к плоскости ее основания под углом 60° и равны 8. Каждое ребро основания призмы равно 5. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: $75; 20(2 + \sqrt{13})$.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d и образует с гранями углы β и γ . Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $d^3 \sin \beta \sin \gamma \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta}$.

3. Сечение правильной треугольной пирамиды, проходящее через ее боковое ребро перпендикулярно ребру основания, имеет площадь, вдвое меньшую, чем площадь боковой грани этой пирамиды. Ребро основания пирамиды равно a . Определите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$.

4. Найдите длину кратчайшего замкнутого пути, пересекающего все образующие конуса с радиусом основания, равным $\frac{2}{3}$, и образующей, равной 2.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде отношение длины апофемы к длине ребра основания равно k , а радиус вписанного в пирамиду шара равен r . Определите объем и площадь полной поверхности этой пирамиды.

Ответ: $\frac{4r^3(2k+1)^2}{3(2k-1)}$; $\frac{4r^3(2k+1)^2}{2k-1}$.

6. Объем треугольной пирамиды $MABC$ равен 32. На ребре MA отмечены точки P и Q так, что точка P лежит между точками M и Q . Через точки P и Q проведены сечения пирамиды плоскостями, параллельными основанию ABC . Объем усеченной пирамиды с боковым ребром PQ равен 13. Найдите отношение $AP:PM$, если $MQ=3QA$.

Ответ: 3:1.

7. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар K . Из точки D на грань ABC опущена высота DE . Точка P является серединой отрезка DE . Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно DE . Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару K и плоскости M , взята точка O , являющаяся ближайшей к точке A . Найдите расстояние от точки O до грани ABD , если объем шара K равен 1.

Ответ: $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

8. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение данной пирамиды плоскостью,

488

параллельной боковой грани этой пирамиды. Площадь боковой грани равна 160. Найдите площадь данного сечения.

Ответ: 150.

9. Найдите радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна $4\sqrt{6}$, а угол между боковыми ребрами равен 90° .

Ответ: 2.

10. Дана пирамида $SABC$. Точки D и E лежат соответственно на ребрах SA и SB , причем $SD:DA = SE:EB = 1:2$. Через точки D и E проведена плоскость α , параллельная ребру SC . Определите, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

Ответ: 7:20.

11. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M , делящая ребро SB в отношении 3:5, считая от точки S . Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость α . Определите, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

Ответ: 9:95.

12. На ребрах AB , BC , CD тетраэдра $ABCD$ объема 100 взяты соответственно точки K , L , M , причем $2AK=AB$, $4CM=CD$, $5DN=AD$. Найдите объем тетраэдра $KNMB$.

Ответ: 30.

13. Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади сферы равно α . Найдите величину угла ASB и укажите все значения, которые может принимать α в условии данной задачи.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2\pi\alpha - 1}{\sqrt{2}}$; $0 < \alpha < \frac{1}{\pi}$.

14. Боковые ребра треугольной призмы наклонены к плоскости ее основания под углом 60° и равны 8. Каждое ребро основания призмы равно 5. Найдите объем и площадь полной поверхности призмы.

Ответ: 75.

15. В сферу радиуса R вписан цилиндр, имеющий наибольшее возможное значение площади боковой поверхности из площадей боковых поверхностей всевозможных цилиндров, вписанных в эту сферу. Найдите это значение площади боковой поверхности цилиндра и отношение высоты такого цилиндра к радиусу сферы в этом случае.

Ответ: $2\pi R^2$; $\sqrt{2}$.

16. Вокруг сферы радиуса r описан прямой круговой конус, имеющий наименьший объем из объемов всех конусов, описанных около этого шара. Найдите величину этого наименьшего объема и отношение высоты этого конуса к радиусу сферы в этом случае.

Ответ: $\frac{8\pi r^3}{3}$; 4.

17. Около шара объема V описана правильная треугольная пирамида. Определите возможный наименьший объем такой пирамиды.

Ответ: $\frac{6V\sqrt{3}}{\pi}$.

18. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ угол между боковым ребром и плоскостью основания ABC равен α , сторона основания равна a , MO — высота пирамиды. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку O параллельно ребрам MA и BC .

Ответ: $\frac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$.

19. Объем треугольной пирамиды равен 270. Точки пересечения медиан всех ее граней являются вершинами второй треугольной пирамиды. Найдите ее объем.

Ответ: 10.

20. В основании первой треугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник. Точки пересечения медиан всех ее боковых граней и точка пересечения диагоналей ее основания являются вершинами второй треугольной пирамиды, объем которой равен 20. Найдите объем первой пирамиды.

Ответ: 270.

21. Объем наклонной призмы равен 60. Точки пересечения диагоналей ее боковых граней и точки пересечения медиан ее оснований являются вершинами шестигранника. Найдите его объем.

Ответ: 10.

22. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 9. Прямая AC_1 образует с плоскостью ABB_1 угол 30° . Найдите площадь поверхности шара.

Ответ: 20π .

23. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC ребра AB , AC и AA_1 попарно перпендикулярны и равны 2 м. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер AB , AA_1 и A_1C_1 .

Указание. Данная призма является половиной куба. Постройте ее до куба, тогда искомое сечение — половина правильного шестиугольника.

Ответ: $1,5\sqrt{3} \text{ м}^2$.

24. Два противолежащих ребра правильного тетраэдра служат диаметрами оснований цилиндра. Найдите ребро тетраэдра, если объем цилиндра равен $32\pi \text{ м}^3$.

Ответ: $4\sqrt{2} \text{ м}$.

25. Для правильного тетраэдра со стороной a :

а) найдите его объем;

б) найдите радиус вписанного шара;

в) найдите радиус описанного шара;

г) докажите, что центры описанного и вписанного шаров совпадают.

Указание: Сумма найденных в б) и в) радиусов равна высоте тетраэдра.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$; б) $\frac{\sqrt{6}}{12}a$; в) $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

26. В правильный тетраэдр $SABC$ с ребром 24 вписан шар. В трехгранный угол с вершиной в точке S вписан второй шар, который касается первого шара. Найдите объем второго шара.

Ответ: $8\sqrt{6}\pi$.

27. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45° , вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.

Ответ: 106π .

28. Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Углы BAD , BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDD_1 .

Ответ: $\sqrt{2}$.

Содержание

Введение	3
----------------	---

Глава 1. ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ	5
--	----------

§ 1. Основные понятия и определения	5
§ 2. Формулы сокращенного умножения	15
§ 3. Свойства степеней и логарифмов	17
§ 4. Тригонометрические формулы	23
§ 5. Обратные тригонометрические функции	28

Глава 2. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ	35
--	-----------

§ 1. Основные понятия и определения	35
§ 2. Некоторые классы элементарных функций	36
§ 3. Нахождение функции из уравнения	43
§ 4. Исследование функций	47
§ 5. Исследование функции при помощи производной	66
§ 6. Первообразная функции и ее применение	89
§ 7. Задачи, использующие различные свойства функций	96

Глава 3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ	102
--	------------

§ 1. Основные понятия. Определения. Теоремы о равносильных преобразованиях	102
§ 2. Целые алгебраические уравнения	104
§ 3. Рациональные алгебраические уравнения	125
§ 4. Решение уравнений, содержащих несколько переменных	138
§ 5. Решение систем линейных уравнений	146
§ 6. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений	175
§ 7. Решение неравенств	190

Глава 4. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ	206
---	------------

§ 1. Иррациональные уравнения и системы уравнений ...	206
§ 2. Решение иррациональных неравенств	220

Глава 5. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ	234
--	------------

§ 1. Решение показательных уравнений и систем уравнений	234
§ 2. Решение показательных неравенств	247
§ 3. Решение логарифмических уравнений и неравенств	252
§ 4. Решение логарифмических неравенств	266
Глава 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВА	277
§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения	277
§ 2. Приемы решения тригонометрических уравнений ...	283
§ 3. Тригонометрические уравнения повышенной сложности	307
§ 4. Решение систем тригонометрических уравнений и тригонометрических уравнений, приводимых к ним	330
§ 5. Решение тригонометрических неравенств	340
Глава 7. ПЛАНИМЕТРИЯ	352
§ 1. Геометрия прямой	352
§ 2. Геометрия треугольника	355
§ 3. Геометрия окружности	357
§ 4. Решение треугольников	362
§ 5. Соотношения в прямоугольном треугольнике	364
§ 6. Задачи на применение теорем косинусов и синусов	368
§ 7. Вычисление медиан, высот и биссектрис треугольника	372
§ 8. Площадь треугольника	376
§ 9. Отношение отрезков в треугольнике	377
§ 10. Подобие треугольников	383
§ 11. Параллелограмм и трапеция	389
§ 12. Расположение прямой и окружности и двух окружностей	406
§ 13. Углы, связанные с окружностью	409
Глава 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ	417
§ 1. Многогранники	417
§ 2. Круглые тела. Комбинации тел	459

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание
анықтамалық баспа

ЕГЭ. СДАЁМ БЕЗ ПРОБЛЕМ

Мирошин Владимир Васильевич
Рязановский Андрей Рафаилович

ЕГЭ 2020

МАТЕМАТИКА

Решение задач

(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Г. Златогоров*
Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *А. Григорьев*

ООО «Издательство «Эксмо»

123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Өндіруші: «ЭКМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.

Тел.: 8 (495) 411-68-86.

Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Tayar belrici: «Эксмо»

Интернет-магазин : www.book24.ru

Интернет-дуken : www.book24.kz

Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».

Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.

Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,

в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»

Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды

қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,

Алматы қ., Домбровский көш., 3-а, литер Б, офис 1.

Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.

Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ

о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»

www.eksmo.ru/certification

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 26.04.2019. Формат 60×90¹/₁₆.

Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Усл. печ. л. 31,0.

Тираж экз. Заказ №

ISBN 978-5-04-103008-7



Оптовая торговля книгами «Эксмо»:
ООО «ТД «Эксмо». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, многоканальный тел.: 411-50-74.
E-mail: reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми
покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»
E-mail: international@eksmo-sale.ru

*International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.*
international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном
оформлении, обращаться по тел.: +7 (495) 411-68-59, доб. 2261.
E-mail: ivanova.ey@eksmo.ru

Оптовая торговля бумажно-беловыми
и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:
Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел.:/факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: kanc@eksmo-sale.ru, сайт: www.kanc-eksmo.ru

В Санкт-Петербурге: в магазине «Парк Культуры и Чтения БУКВОЕД», Невский пр-т, д. 46.
Тел.: +7(812)601-0-601, www.bookvoed.ru

Полный ассортимент книг издательства «Эксмо» для оптовых покупателей:
Москва. ООО «Торговый Дом «Эксмо». Адрес: 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1.
Телефон: +7 (495) 411-50-74. E-mail: reception@eksmo-sale.ru

Нижний Новгород. Филиал «Торгового Дома «Эксмо» в Нижнем Новгороде. Адрес: 603094,
г. Нижний Новгород, ул. Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза».
Телефон: +7 (831) 216-15-91 (92, 93, 94). E-mail: reception@eksmonn.ru

Санкт-Петербург. Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Санкт-Петербурге. Адрес: 192029,
г. Санкт-Петербург, пр. Обуховской Обороны,
д. 84, лит. «Е». Телефон: +7 (812) 365-46-03 / 04. E-mail: server@szko.ru

Екатеринбург. Филиал ООО «Издательство Эксмо» в г. Екатеринбурге. Адрес: 620024,
г. Екатеринбург, ул. Новинская, д. 2щ. Телефон: +7 (343) 272-72-01 (02/03/04/05/06/08).
E-mail: petrova.ea@ekat.eksmo.ru

Самара. Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Самаре.
Адрес: 443052, г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е».
Телефон: +7(846)207-55-50. E-mail: RDC-samara@mail.ru

Ростов-на-Дону. Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Ростове-на-Дону. Адрес: 344023,
г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, д. 44 А. Телефон: +7(863) 303-62-10. E-mail: info@rnd.eksmo.ru
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Ростове-на-Дону. Адрес: 344023,
г. Ростов-на-Дону, ул. Страны Советов, д. 44 В. Телефон: (863) 303-62-10.

Режим работы: с 9-00 до 19-00. E-mail: rostov.mag@rnd.eksmo.ru

Новосибирск. Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Новосибирске. Адрес: 630015,
г. Новосибирск, Комбинатский пер., д. 3. Телефон: +7(383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

Хабаровск. Обособленное подразделение в г. Хабаровске. Адрес: 680000, г. Хабаровск,
пер. Дзержинского, д. 24, литера Б, офис 1. Телефон: +7(4212) 910-120. E-mail: eksmo-khv@mail.ru

Тюмень. Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Тюмени.

Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Тюмени.
Адрес: 625022, г. Тюмень, ул. Алебашевская, д. 9А (ТЦ Перестройка+).
Телефон: +7 (3452) 21-53-96/ 97/ 98. E-mail: eksmo-tumen@mail.ru

Краснодар. ООО «Издательство «Эксмо» Обособленное подразделение в г. Краснодаре
Центр оптово-розничных продаж Cash&Carry в г. Краснодаре
Адрес: 350018, г. Краснодар, ул. Сормовская, д. 7, лит. «Г». Телефон: (861) 234-43-01(02).

Республика Беларусь. ООО «ЭКМО АСТ Си энд Си». Центр оптово-розничных продаж
Cash&Carry в г. Минске. Адрес: 220014, Республика Беларусь, г. Минск,
пр-т Жукова, д. 44, пом. 1-17, ТЦ «Outleto». Телефон: +375 17 251-40-23; +375 44 581-81-92.

Режим работы: с 10-00 до 22-00. E-mail: exmoast@yandex.by

Казахстан. РДЦ Алматы. Адрес: 050039, г. Алматы, ул. Домбровского, д. 3 «А».
Телефон: +7 (727) 251-59-90 (91, 92). E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Интернет-магазин: www.book24.kz

Украина. ООО «Форс Украина». Адрес: 04073 г. Киев, ул. Вербовая, д. 17а.
Телефон: +38 (044) 290-99-44. E-mail: sales@forsukraine.com

**Полный ассортимент продукции Издательства «Эксмо» можно приобрести в книжных
магазинах «Читай-город» и заказать в интернет-магазине www.chitai-gorod.ru.
Телефон единой справочной службы 8 (800) 444 8 444. Звонок по России бесплатный.**

Интернет-магазин ООО «Издательство «Эксмо»

www.book24.ru

Розничная продажа книг с доставкой по всему миру.
Тел.: +7 (495) 745-89-14. E-mail: imarket@eksmo-sale.ru



EKSMO.RU
новинки издательства



С ПОМОЩЬЮ ЭТОЙ КНИГИ ВЫ:

- **НАУЧИТЕСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ
ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ;**
- **СИСТЕМАТИЗИРУЕТЕ ЗНАНИЯ
ПО ВСЕМУ ШКОЛЬНОМУ КУРСУ;**
- **СОКРАТИТЕ ВРЕМЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ
И ПОЛУЧИТЕ ОТЛИЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.**

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



**В серии «ЕГЭ. Сдаём без проблем» выходят пособия
по основным предметам:
русскому языку, литературе, математике, физике, химии,
биологии, географии, информатике, истории,
обществознанию и иностранным языкам.**

**ГАРАНТИЯ
УСПЕХА
НА ЭКЗАМЕНЕ!**

ISBN 978-5-04-103008-7



www.vk.com/eksmo_kids