

# **Домашняя работа по геометрии за 8 класс**

**к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»  
Л.С. Атанасян и др., М.: «Просвещение», 2001 г.**

учебно-практическое  
пособие

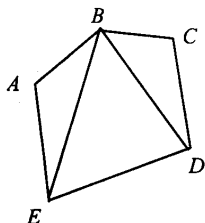
## ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Четырехугольники	
§ 1. Многоугольники.....	4
§ 2. Параллелограмм и трапеция.....	6
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат.....	17
Глава VI. Площадь	
§ 1. Площадь многоугольника.....	36
§ 2. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции.....	39
§ 3. Теорема Пифагора.....	47
Глава VII. Подобные треугольники	
§ 1. Определение подобных треугольников.....	70
§ 2. Признаки подобия треугольников.....	77
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач.....	85
§ 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника.....	96
Глава VIII. Окружность	
§ 1. Касательная к окружности.....	115
§ 2. Центральные и вписанные углы.....	122
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника.....	133
§ 4. Вписанная и описанная окружности.....	139
Глава IX. Векторы	
§ 1. Понятие вектора.....	160
§ 2. Сложение и вычитание векторов.....	166
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач.....	174

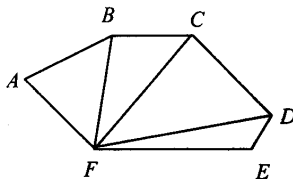
# Глава V. Четырехугольники

## § 1. Многоугольники

363.



$\triangle ABE$ ;  $\triangle EBD$ ;  $\triangle BCD$



$\triangle ABF$ ;  $\triangle BFC$ ;  $\triangle CFD$ ;  $\triangle DFE$

364.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

а)  $n = 5$ ;  $(n - 2) \cdot 180 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$ ;

б)  $n = 6$ ;  $(n - 2) \cdot 180 = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$ ;

в)  $n = 10$ ;  $(n - 2) \cdot 180 = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$ ,

где  $n$  — число углов.

365.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

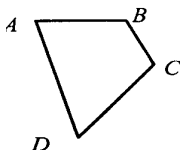
$\alpha n = (n - 2) \cdot 180$ ;  $360 = 180n - \alpha n$ , откуда следует:

$$n = \frac{360}{180 - \alpha}$$

а)  $\alpha_1 = 90^\circ$ , то  $n = 4$ ; б)  $\alpha_2 = 60^\circ$ , то  $n = 3$ ;

в)  $\alpha_3 = 120^\circ$ , то  $n = 6$ .

366.



$AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD = ?$

Дано:  $ABCD$  — четырехугольник;

$P_{ABCD} = 8 \text{ см} = 80 \text{ мм}$ ;

$AD > AB$  на  $5 \text{ мм}$ ;

$AD > BC$  на  $4 \text{ мм}$ ;

$AD > CD$  на  $3 \text{ мм}$ .

Решение:

$AD = x$ , тогда  $CD = x - 3$ ,  $BC = x - 4$ ,  $AB = x - 5$ ,

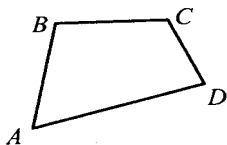
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$ ,

$80 = x - 5 + x - 4 + x - 3 + x$ ;  $92 = 4x$ ;  $x = 23$ , следовательно,

$AD = 23\text{мм}$ ;  $CD = 20\text{мм}$ ;  $BC = 19\text{мм}$ ;  $AB = 18\text{мм}$ .

Ответ: 18, 19, 20, 23.

**367.**



Дано:

$P_{ABCD} = 66\text{см}$ ,  $BC > CD$  на 8см;

$BC < AB$  на 8см,

$AD > CD$  в три раза;

$AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD = ?$

Решение:

$BC = x$ ; тогда  $AB = x + 8$ ;  $CD = x - 8$ ;  $AD = 3(x - 8)$ ;

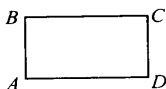
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$ ;

$x + 8 + x + x - 8 + 3 \cdot (x - 8) = 66$ ,  $6x = 90$ ;  $x = 15$ , следовательно,

$BC = 15\text{см}$ ,  $CD = 7\text{см}$ ,  $AB = 23\text{см}$ ,  $AD = 21\text{см}$ .

Ответ: 7, 15, 21, 23.

**368.**



Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ ;

$\angle A = ?$

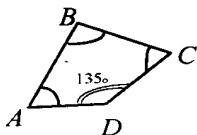
Решение: по формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

$$(n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

По условию  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ , следовательно,  $\angle A = 360^\circ : 4 = 90^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

**369.**



Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;

$\angle A = \angle B = \angle C$ ,

$\angle D = 135^\circ$ ;

$\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C = ?$

Решение:

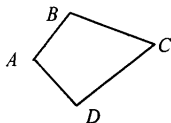
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ, \angle A + \angle B + \angle C + 135^\circ = 360^\circ.$$

Пусть  $\angle A = \angle B = \angle C = x$ , тогда  $3x = 360^\circ - 135^\circ$ ;  $3x = 225^\circ$ ;

$x = 75^\circ$ , следовательно,  $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$ .

Ответ:  $75^\circ$ .

**370.**



Дано: ABCD – четырехугольник;

$$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 2 : 4 : 5;$$

$$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$$

Решение:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ,$$

пусть  $\angle A = x$ , тогда  $\angle B = 2x$ ,  $\angle C = 4x$ ,  $\angle D = 5x$ , следовательно,

$$x + 2x + 4x + 5x = 360^\circ; 12x = 360^\circ; x = 30^\circ, \text{ откуда}$$

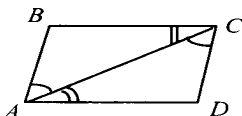
$$\angle A = 30^\circ, \angle B = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ, \angle C = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle D = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ.$$

Ответ:  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $120^\circ$  и  $150^\circ$ .

## § 2. Параллелограмм и трапеция

**371.**



а) Дано: ABCD – четырехугольник;

$$\angle BAC = \angle ACD,$$

$$\angle BCA = \angle DAC.$$

Доказать: ABCD – параллелограмм

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle CDA$ :

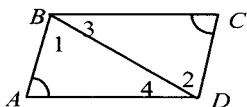
по условию:  $\angle BAC = \angle ACD$ ,  $\angle ACB = \angle CAD$ , AC – общая;

следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам:

$\triangle ABC = \triangle CDA$ , откуда, из определения равных треугольников, следует:  $BC = AD$ .

Т. к.  $\angle BAC = \angle ACD$  – накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, следовательно,  $BC \parallel AD$ .

Т.к.  $BC = AD$  и  $BC \parallel AD$  (из 2), то по 1-му признаку параллелограмма ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.



б) Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;  
 $AB \parallel CD$ ,  $\angle A = \angle C$ .  
 Доказать:  $ABCD$  – параллелограмм.

Доказательство:

$AB \parallel CD$  (по условию), следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$  (накрест лежащие),

т. к. сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то  $\angle 3 = \angle 4$ .

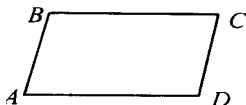
Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle CBD$

$BD$  – общая,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам  $\triangle ABD = \triangle CBD$ ,

по определению равных треугольников  $AB = CD$

$AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , то по 1-му признаку параллелограмма  $ABCD$  – параллелограмм, что и требовалось доказать.

**372.**



Дано:  $P_{ABCD} = 48 \text{ см}$ ;  
 $AB, BC = ?$

Решение:

а)  $AD > AB$  на 3 см.

Если  $AB = x$ , то  $AD = x + 3$  и  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ , т.е.

$48 = 2 \cdot (x + (x + 3))$ ;  $2x = 21$ ;  $x = 10,5 \text{ см}$ ;

$AB = CD = x = 10,5 \text{ см}$ ;  $AD = BC = x + 3 = 13,5 \text{ см}$ .

б)  $AD > AB$  на 7 см ( $AD - AB = 7$ ).

Если  $AB = x$ , то  $AD = x + 7$  и  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ , т.е.

$48 = 2 \cdot (x + (x + 7))$ ;  $2x = 17$ ;  $x = 8,5 \text{ см}$ ;

$AB = CD = x = 8,5 \text{ см}$ ;  $AD = BC = x + 7 = 15,5 \text{ см}$ .

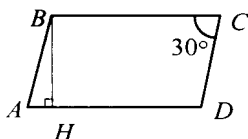
в)  $AD > AB$  в 2 раза.

Если  $AB = x$ , то  $AD = 2x$  и  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ , т.е.

$48 = 2 \cdot (x + 2x)$ ;  $3x = 24$ ;  $x = 8 \text{ см}$ ;

$AB = CD = x = 8 \text{ см}$ ;  $AD = BC = 2x = 16 \text{ см}$ .

**373.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм.

$P_{ABCD} = 50 \text{ см}$ ;

$\angle C = 30^\circ$ ,  $BH \perp CD$ ,  $BH = 6,5 \text{ см}$ ;

$AB, BC = ?$

Решение:

По свойству параллелограмма  $\angle C = \angle A = 30^\circ$ .

Пусть  $\triangle ABH$  – прямоугольный, где  $\angle H = 90^\circ$ ;

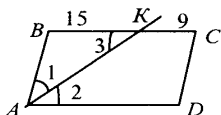
$\angle A = 30^\circ$ , следовательно,  $BH = \frac{1}{2} AB$ , т.е.

$AB = 2 \cdot BH = 2 \cdot 6,5 = 13 \text{ см}$ .

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ ,  $50 = 2 \cdot (13 + AD)$ ;  $13 + AD = 25$ ;  $AD = 12$ .

Ответ: 13 см, 12 см.

**374.**



Дано:  $P_{ABCD}$  – параллелограмм.

$AK$  – биссектриса  $\angle A$ ;

$BK = 15 \text{ см}$ ,  $KC = 9 \text{ см}$ ;

$P_{ABCD} = ?$

Решение:

т. к.  $ABCD$  – параллелограмм, то  $BC \parallel AD$  и  $\angle 2 = \angle 3$  (как накрест лежащие);

$\angle 2 = \angle 1$  (по свойству биссектрисы), т.е.  $\angle 2 = \angle 1$ , то и  $\angle 1 = \angle 3$ , следовательно  $\triangle BAK$  – равнобедренный, т.е.

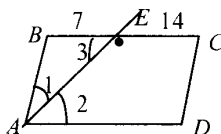
$AB = BK = 15 \text{ см}$ , а т.к.  $AB = CD$ , то  $CD = 15 \text{ см}$ ;

$BC = BK + KC = 15 + 9 = 24 \text{ см}$ ,  $BC = AD = 24 \text{ см}$ .

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ ;  $P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 24) = 2 \cdot 39 = 78 \text{ см}$ .

Ответ: 78 см.

**375.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;

$AE$  – биссектриса  $\angle A$ ;

$BE = 7 \text{ см}$ ,  $EC = 14 \text{ см}$ ;

$P_{ABCD} = ?$

Решение:

т. к.  $ABCD$  параллелограмм, то  $BC \parallel AD$  и  $\angle 2 = \angle 3$  (как накрест лежащие);

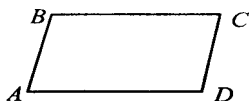
$\angle 2 = \angle 1$  (по свойству биссектрисы), следовательно,  $\angle 1 = \angle 3$ , значит,  $\triangle ABE$  – равнобедренный, тогда  $AB = BE = 7 \text{ см}$ ;

$BC = 7 + 14 = 21 \text{ см}$ ,  $AD = BC = 21 \text{ см}$ ;

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (7 + 21) = 2 \cdot 28 = 56 \text{ см}$ .

Ответ: 56 см.

376.



Дано: ABCD – параллелограмм;  
 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$

Решение:

а)  $\angle A = 84^\circ$ ;

по свойству углов параллелограмма:

$\angle A = \angle C = 84^\circ$ ;  $\angle B = \angle D$ ;

т.к.  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , то  $\angle B = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$ , следовательно,  $\angle D = 96^\circ$ .

Ответ:  $84^\circ, 96^\circ, 84^\circ, 96^\circ$ .

б)  $\angle A - \angle B = 55^\circ$ ;

$$\begin{cases} \angle A - \angle B = 55^\circ \\ \angle A + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ (55^\circ + \angle B) + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ 2\angle B = 125^\circ \end{cases};$$

$$\begin{cases} \angle A = 117^\circ 30' \\ \angle B = 62^\circ 30' \end{cases}; \angle A = \angle C = 117^\circ 30'; \angle B = \angle D = 62^\circ 30'.$$

Ответ:  $117^\circ 30', 62^\circ 30', 117^\circ 30', 62^\circ 30'$ .

в)  $\angle A + \angle C = 142^\circ$ ;

по свойству параллелограмма:  $\angle A = \angle C$ ,

следовательно:  $\angle A = \angle C = 142^\circ : 2 = 71^\circ$ ;

$\angle A + \angle B = 180^\circ$  (свойство параллелограмма);

$\angle B = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$ ,  $\angle D = \angle B = 109^\circ$ .

Ответ:  $71^\circ, 109^\circ, 71^\circ, 109^\circ$ .

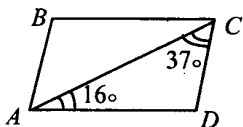
г)  $\angle A = 2\angle B$ ;

по свойству параллелограмма:  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,

$2\angle B + \angle B = 180^\circ$ ;  $3\angle B = 180^\circ$ ;  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle D = \angle B = 60^\circ$ ,

$\angle A = 2\angle B = 120^\circ$ ;  $\angle C = \angle A = 120^\circ$ .

Ответ:  $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ .



д) если  $\angle CAD = 16^\circ$ ,  $\angle ACD = 37^\circ$ .

$\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180^\circ$

$16^\circ + 37^\circ + \angle D = 180^\circ$ ;  $\angle D = 127^\circ$ ,

$\angle B = \angle D = 127^\circ$ ;

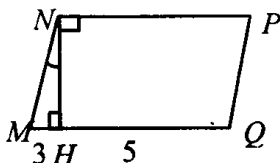
по свойству параллелограмма:

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ ;  $\angle A + 127^\circ = 180^\circ$ ,  $\angle A = 53^\circ$ ,  $\angle C = \angle A = 53^\circ$ .

Ответ:  $53^\circ, 127^\circ, 53^\circ, 127^\circ$ .



377.



Дано:

$NH \perp MQ$ ,  $\angle MNH = 30^\circ$ ;

$MH = 3 \text{ см}$ ,  $HQ = 5 \text{ см}$ ;

$MN$ ,  $MQ = ?$

$\angle M$ ,  $\angle N = ?$

Решение:

$\triangle MNH$  – прямоугольный;  $\angle M + \angle N + \angle H = 180^\circ$ ;

$\angle M = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ,

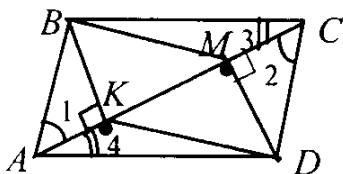
т. к.  $\angle N = 30^\circ$ , то  $MN = 2MH$ ,  $MN = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$ ;  $MN = QP = 6 \text{ см}$ ,

$\angle MNP = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ ,  $MQ = 3 + 5 = 8 \text{ см}$ ;  $NP = MQ = 8 \text{ см}$ .

Ответ:  $MN = QP = 6 \text{ см}$ ;  $\angle M = \angle P = 60^\circ$ ;

$MQ = NP = 8 \text{ см}$ ;  $\angle N = \angle Q = 120^\circ$ .

379.



Дано:

$BK \perp AC$ ,  $DM \perp AC$ .

Доказать:  $BMDK$  –  
параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ABK$  и  $\triangle CDM$

$AB = CD$ ;  $AB \parallel CD$  (по 1-му признаку параллелограмма);

$AC$  – общая, следовательно  $\angle 1 = \angle 2$  (как накрест лежащие углы при  $AB \parallel CD$  и секущей  $AC$ ),

значит,  $\triangle ABK = \triangle CDM$  (по гипотенузе и остр. углу),

тогда  $BK = MD$  (из определения равных треугольников).

Рассмотрим  $\triangle CBM$  и  $\triangle ADK$ :

$AD = CB$ ;  $AD \parallel CB$  (по 1-му признаку параллелограмма);

$AC$  – общая, следовательно,  $\angle 4 = \angle 3$  (как накрест лежащие углы при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$ ), следовательно,

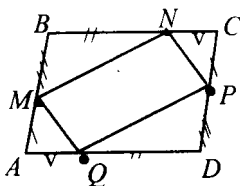
$\triangle ADK = \triangle CBM$  (по гипотенузе и острому углу),

следовательно,  $KD = BM$ ;

$BK = MD$ ;  $KD = BM$ , значит,

$BMDK$  – параллелограмм, ч.т.д.

380.



Дано:

$M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in AD$ ;

$AM = CP, BN = DQ$ ,

$BM = DP, NC = QA$ .

Доказать:  $ABCD, MNPQ$  – параллелограммы.

Доказательство:

$BC = BN + NC = DQ + QA = AD$ ;  $BC = AD$ ;

$AB = AM + MB = PC + DP = DC$ ;  $AB = DC$ ;

следовательно,  $ABCD$  – параллелограмм.

Т. к.  $ABCD$  – параллелограмм, то по свойству параллелограмма

$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ .

Рассмотрим  $\triangle AMQ$  и  $\triangle CPN$ ;

$AM = CP, AQ = CN, \angle A = \angle C$ ,

значит,  $\triangle AMQ = \triangle CPN$  (по 2 сторонам и углу между),

следовательно,  $MQ = NP$ .

Рассмотрим  $\triangle QPD$  и  $\triangle MBN$ :

$MB = DP, BN = QD, \angle B = \angle D$ ,

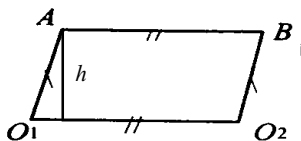
следовательно,  $\triangle MBN = \triangle QPD$  (по 2 сторонам и углу между),

следовательно,  $MN = QP$ ;

$MQ = NP, MN = QP$ , тогда

$MNPQ$  – параллелограмм, ч.т.д.

381.



Дано:  $O_1A = O_2B$ ,

$AB = O_1O_2$ .

Доказать:  $AB \parallel O_1O_2$ .

Доказательство: по условию

$O_1A = O_2B$ ;  $AB = O_1O_2$ ,

следовательно,  $ABO_2O_1$  – параллелограмм,

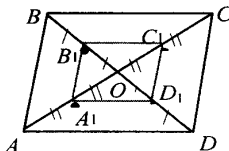
значит,  $AB \parallel O_1O_2$ .

$h = R$  – высота параллелограмма,  $R \leq h \leq 2R$ , где  $R$  – радиус колеса.

Если  $h = R$ , то  $ABO_1O_2$  – прямоугольник,

если  $h > R$ , то  $AB$  и  $O_1O_2$  лежат на одной прямой.

382.



Дано:  $A_1 \in OA$ ,  $B_1 \in OB$ ,

$C_1 \in OC$ ,  $D_1 \in OD$ ,  $AA_1 = A_1O$ ,  $BB_1 = B_1O$ ,

$CC_1 = C_1O$ ,  $DD_1 = D_1O$ .

Доказать:  $A_1B_1C_1D_1$  – параллелограмм

Доказательство:

$ABCD$  – параллелограмм, следовательно, по свойству диагоналей параллелограмма:  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ ;

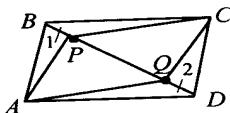
$A_1O = \frac{1}{2}AO$  и  $C_1O = \frac{1}{2}OC$ , следовательно,  $A_1O = C_1O$ ,

$B_1O = \frac{1}{2}OB$  и  $D_1O = \frac{1}{2}OD$ , следовательно,  $B_1O = D_1O$ ;

$B_1D_1 \cap A_1C_1 = O$ ,  $A_1O = C_1O$ ,  $B_1O = D_1O$ ,

следовательно:  $A_1B_1C_1D_1$  – параллелограмм, ч.т.д.

383.



Дано:

$PQ \in BD$ ,  $PB = QD$ .

Доказать:  $APCQ$  – параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle ABP$  и  $\triangle CDQ$ , по признаку параллелограмма  $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$ ;

$BP = QD$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ , (накрест лежащие углы при пересечении  $AB \parallel CD$  с секущей  $BD$ ),

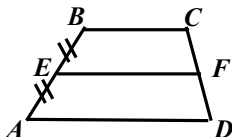
т.е.  $\triangle ABP = \triangle CDQ$  (по 2 сторонам и углу между), следовательно,  $AP = CQ$ .

Аналогично, через  $\triangle BPC$  и  $\triangle ADQ$  получим  $PC = AQ$ ;

$AP = CQ$ ,  $PC = AQ$ , следовательно, по признаку

$APCQ$  – параллелограмм, ч.т.д.

386.



Дано:

$E \in AB$ ,  $AE = EB$ ;

$F \in CD$ ,  $CF = FD$ .

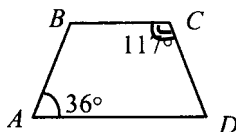
Доказать:  $EF \parallel AD$ .

Доказательство:

Пусть  $E$  – середина  $AB$ . Проведем прямую  $EF \parallel AD \parallel BC$ . Точка  $F$  – середина  $CD$  по т. Фалеса. Докажем, что  $EF$  – единственный.

Через точки  $E$  и  $F$  можно провести только одну прямую (аксиома), т.е. отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции  $ABCD$  параллелен основаниям, ч.т.д.

387.



Дано:

$\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle C = 117^\circ$ ;

$\angle B = ?$

$\angle D = ?$

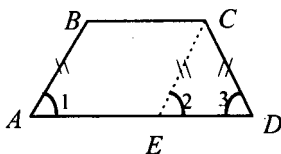
Решение:

$AD \parallel BC$ ,  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ;  $36^\circ + \angle B = 180^\circ$ ;  $\angle B = 144^\circ$ ;

$\angle C + \angle D = 180^\circ$ ,  $117^\circ + \angle D = 180^\circ$ ;  $\angle D = 63^\circ$ .

Ответ:  $144^\circ$ ,  $63^\circ$ .

388.



Дано:

$AB = CD$ .

Доказать: 1)  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$ ;

2)  $AC = BD$ .

Доказательство:

Проведем  $CE \parallel AB$ ,

$ABCE$  – параллелограмм, т.е.  $AB \parallel CE$ , следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$  как соответственные,

т. к.  $\triangle ECD$  – равнобедренный, то  $\angle 2 = \angle 3$ , и, следовательно,  $\angle 1 = \angle 3$ , т. е.  $\angle A = \angle D$ ;

$AD \parallel BC$ ,  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  $\angle D + \angle C = 180^\circ$ ,

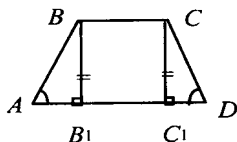
$\angle B = 180^\circ - \angle A$ ,  $\angle C = 180^\circ - \angle D$ ,

т.к.  $\angle A = \angle D$ , то  $\angle B = \angle C$ .

Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle DCA$ :  $AB = CD$ ,  $AD$  – общая,

$\angle A = \angle D$ , следовательно,  $\triangle ABD = \triangle DCA$  (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно,  $BD = AC$ .

**389.**



Дано:

а)  $\angle A = \angle D$ ,

$\angle B = \angle C$ ;

б)  $AC = BD$ .

Доказать:  $AB = CD$ .

Доказательство:

а) проведем  $BB_1 \perp AD$ ,  $CC_1 \perp AD$ ,  
 $BCC_1B_1$  – прямоугольник.

Рассмотрим  $\triangle ABB_1$  и  $\triangle DCC_1$ ;

$BB_1 = CC_1$  (из прямоугольника  $BCC_1B_1$ ),  $\angle A = \angle D$ , следовательно,  
 $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$  (по катету и острому углу), следовательно,  
 $AB = CD$ , что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим  $\triangle ACC_1$  и  $\triangle DBB_1$

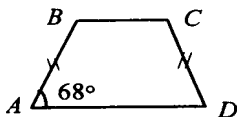
$AC = BD$ ,  $CC_1 = BB_1$ , следовательно,  $\triangle ACC_1 = \triangle DBB_1$  (по катету и гипотенузе), следовательно,  $AC_1 = B_1D$ ;

$AB_1 = AC_1 - B_1C_1$ ,  $C_1D = B_1D - B_1C_1$ , следовательно  $AB_1 = C_1D$

Рассмотрим  $\triangle ABB_1$  и  $\triangle DCC_1$ ;

$BB_1 = CC_1$ ,  $AB_1 = DC_1$ , следовательно,  $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$  (по двум катетам), следовательно,  $AB = CD$ , ч.т.д.

**390.**



Дано:

$\angle A = 68^\circ$ ,  $AB = CD$ ;

$\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $\angle D = ?$

Решение:

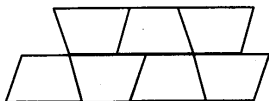
трапеция  $ABCD$  равнобедренная, следовательно,  $\angle A = \angle D = 68^\circ$ ,

а  $\angle B = \angle C$ ,

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ ;  $\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$ ;  $\angle C = \angle B = 112^\circ$ .

Ответ:  $112^\circ$ ,  $112^\circ$ ,  $68^\circ$ .

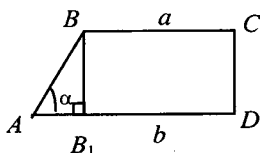
391.



Условие задачи сформулировано некорректно. Доказательство невозможно.

Пример! Пусть  $S$  – площадь паркетной плитки в виде равнобедренной трапеции,  $S_1$  – некая площадь, ограниченная стенами. Тогда при  $S > S_1$  паркет уложить нельзя.

392.



Дано:

$$\angle D = 90^\circ, AD = b,$$

$$BC = a, \angle A = \alpha;$$

$$\text{а) } AB = ?$$

$$\text{б) } CD = ?$$

Решение:

$$\text{а) } a = 4 \text{ см, } b = 7 \text{ см, } \alpha = 60^\circ$$

проведем:  $BB_1 \perp AD$ ;  $AB_1 = AD - DB_1$ ;

$AB_1 = 7 - 4 = 3 \text{ см}$ , в  $\triangle ABB_1$   $\angle A = 60^\circ$  (по усл.), то  $\angle B = 30^\circ$ , следовательно,  $AB_1 = \frac{1}{2} AB$  (свойство прямоугольного треугольника), т.е.  $AB = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$ .

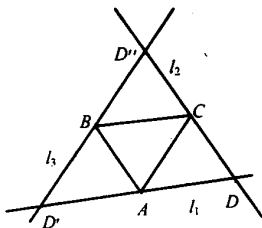
Ответ: 6 см.

$$\text{б) если } a = 10 \text{ см, } b = 15 \text{ см, } \alpha = 45^\circ; AB_1 = AD - DB_1;$$

$AB_1 = 15 - 10 = 5 \text{ см}$ , следовательно  $CD = 5 \text{ см}$  (свойство прямоугольника).

Ответ: 5 см.

394.



$ABCD$ ;  $AD'BC$ ;  $ABD''C$ .

Построение:

1) Соединим точки  $A, B, C$  отрезками, получим  $\triangle ABC$ ;

2) проведем прямые  $l_1 \parallel BC$ ;  $l_2 \parallel AB$ ;  $l_3 \parallel AC$

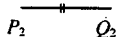
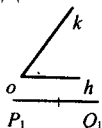
3)  $l_1 \cap l_2 = D$ ,  $l_1 \cap l_3 = D'$ ,  $l_2 \cap l_3 = D''$ ,

$ABCD$ ,  $AD'BC$ ,  $ABD''C$  – искомые параллелограммы.

Следовательно, можно построить 3 параллелограмма, удовлетворяющие данному условию.

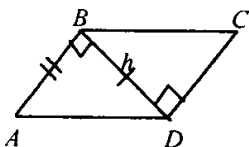
**395.**

Дано:

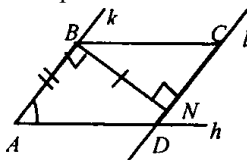


Построить: ABCD – параллелограмм такой, что:  
 $AB = P_2Q_2$ ,  $h = P_1Q_1$ ,  $\angle A = \angle hk$ .

Анализ:



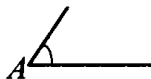
Построение:



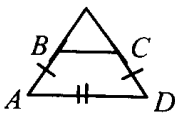
- 1) построили  $\angle A = \angle hk$ ;
- 2) восстановили перпендикуляр в точке B к лучу AB;  
 $BN \perp AB$ ,  $BN \perp P_1Q_1$ ;
- 3) через N проведем прямую  $l \parallel AB$ ;
- 4)  $l \cap h = D$ , от D отложим отрезок, равный  $P_2Q_2$ ,  $DC = P_2Q_2$ ;
- 5) соединим BC, получили ABCD – параллелограмм.

**397.**

а) Дано:  $A \text{ --- } D$



Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, такую, что  
 $AD$  – основание,  $AB$  – боковая сторона.

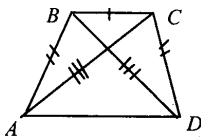


Построение:

- 1) отрезок  $AD$ ; 2)  $\angle A$ ;
- 3)  $AB$ , на стороне угла; 4)  $\angle D = \angle C$ ;
- 5)  $DC = AB$ ;
- 6) ABCD – искомая трапеция.

б) Дано:  $B \text{ --- } C$   $A \text{ --- } B$   $B \text{ --- } R \text{ --- } n$

Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, где  
 $BC$  – меньшее основание,  $AB$  – боковая сторона,  $BD$  – диагональ.



Планы построения:

- 1) отрезок BC;
- 2) окружности с центром в B и C и радиусам AB;
- 3) окружность с центром в B и радиусом BD.

сом BD.

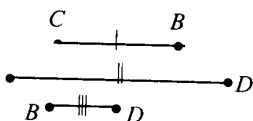
4) Попарное пересечение этих окружностей даст точки A и O.

5) ABCD – равнобедренная трапеция.

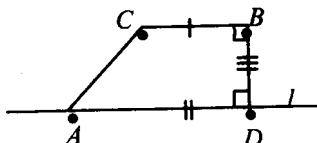
Построение возможно только тогда, когда из отрезков BC, AB и BD можно построить треугольник.

**398.**

Дано:



Построить: ABCD – прямоугольную трапецию такую, что CB, AD – основания, BD – меньшая боковая сторона.

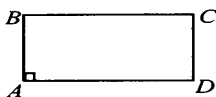


План построения:

- 1) отрезок BC;
- 2)  $BD \perp BC$ ;
- 3) через D проведем  $l \parallel BC$ ;
- 4)  $DA \in l$ ;
- 5) получаем трапецию ABCD.

### § 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

**399.**



Дано: ABCD – параллелограмм  
 $\angle A = 90^\circ$ .

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:

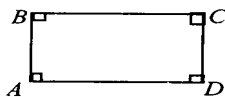
ABCD – параллелограмм, следовательно,  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ,  
 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = \angle D$ .

Т. к.  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , то  $\angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

Т.е. в ABCD стороны попарно равны; все углы прямые, значит, ABCD – прямоугольник.



400.



Дано:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ.$$

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ;$$

$\angle A, \angle B$  – односторонние при AD и BC и секущей AB,

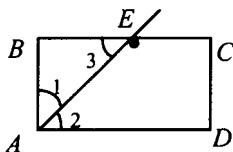
следовательно  $AD \parallel BC$ ;

аналогично,  $AB \parallel CD$ ;  $\angle B, \angle C$  – односторонние при CD, AB и секущей BC;

$AD \parallel BC, AB \parallel CD$ , следовательно, ABCD – параллелограмм,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ , следовательно, ABCD – прямоугольник, ч.т.д.

401.



Дано:

AE – биссектриса  $\angle A$ ;

$P_{ABCD}$  – ?

Решение:

а)  $E \in BC$ ,  $BE = 45,6$ см,  $EC = 7,85$ см.

из условия  $\angle 1 = \angle 3$ ;  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 2 = \angle 3$  (т.к.  $AD \parallel BC$ ), значит,

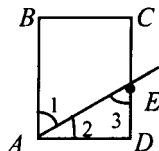
$\triangle ABE$  – равнобедренный и  $AB = BE = 45,6$ см

$BC = BE + EC$ ,  $BC = 45,6 + 7,85 = 53,45$ см,  $AD = BC = 53,45$ см.

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD);$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (45,6 + 53,45) = 198,1 \text{ см.}$$

Ответ: 198,1см.



$E \in DC$ ,  $CE = 2,7$ дм,  $ED = 4,5$ дм.

$\triangle AED$  – равнобедренный (т. к.  $\angle 2 = \angle 3$ ), следовательно,  $AD = ED = 4,5$ дм;

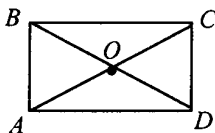
$CD = CE + ED = 2,7 + 4,5 = 7,2$ дм;

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AD + CD);$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (4,5 + 7,2) = 23,4 \text{ дм.}$$

Ответ: 23,4дм.

402.

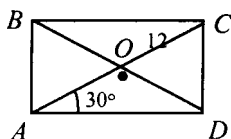


Доказать:  $\triangle AOD$  и  $\triangle AOB$  –  
– равнобедренные.

Доказательство:

$ABCD$  – прямоугольник, следовательно, по св-вам прямоугольника  $AC = BD$ ,  $BO = OD$ ,  $AO = OC$ , т.е.  $AO = OC = OB = OD$ , значит  $\triangle AOD$  и  $\triangle AOB$  – равнобедренные (по определению), т. к.  $AO = OD$  и  $AO = OB$ .

403.



Дано:

$AC \cap BD = O$ ;

$\angle CAD = 30^\circ$ ;

$AC = 12$ см;

$P_{\triangle AOB} = ?$

Решение:

$\triangle ACD$  – прямоугольный (по усл.);

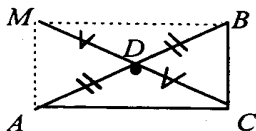
$\angle A = 30^\circ$ , значит,  $CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см,  $AB = CD = 6$ см;

$AO = \frac{1}{2} AC$ ,  $AO = OB$ , значит,  $AO = OB = 6$ см;

$P_{\triangle AOB} = AB + BO + AO$ ;  $P_{\triangle AOB} = 6 + 6 + 6 = 18$ см.

Ответ: 18см.

404.



Дано:  $\angle C = 90^\circ$ ;  $BD = AD$ ;

$CD$  – медиана.

Доказать:  $CD = \frac{1}{2} AB$ .

Доказательство:

1) продлим отрезок  $CD$  и отметим на луче отрезок  $DM = CD$ ,  $AMBC$  – четырехугольник.

2) Надо доказать, что  $AMBC$  – прямоугольник.

Рассмотрим  $\triangle ADM$  и  $\triangle CDB$ , по условию

$AD=AB$ ,  $MD = DC$ ;  $\angle ADM=\angle CDB$  (как вертик.), значит,  $\triangle ADM = \triangle CDB$  (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно:  
 $AM= BC$ .

Так же из  $\triangle ADC = \triangle BDM$  следует  $AC = MB$ .

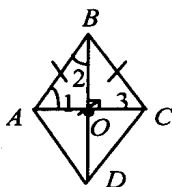
Значит,  $AM = BC$ ,  $AC = MB$ ,  $\angle C = 90^\circ$ , т.е.:

$AMBC$  – прямоугольник.

3)  $AB$  и  $MC$  – диагонали прямоугольника  $AMBC$ , т.е.

$AB = MC$ ,  $AD = DB = MD = DC$ , значит,  $DC = \frac{1}{2} AB$ , ч.т.д.

**405.**



Дано:

$AC = AB$ ;

а)  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $\angle D = ?$

б)  $\angle 1$ ,  $\angle 2 = ?$

Решение:

1)  $AB = AC$ , следовательно,  $\triangle ABC$  – равносторонний, т.е.

$\angle 1 = \angle B = \angle 3 = 60^\circ$ ;

2) по св-ву углов ромба  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , т.е.

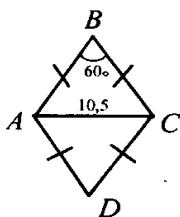
$\angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ;

3)  $\triangle ABO$  – прямоугольный, т.е. из св-ва углов

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ,  $\angle 60 + \angle 2 = 90^\circ$ ,  $\angle 2 = 30^\circ$ .

Ответ: а)  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ .

**406.**



Дано:  $AB = BC = CD = AD$ ,

$\angle B = 60^\circ$ ,

$AC = 10,5\text{см}$ ;

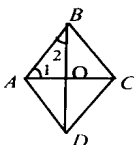
$P_{ABCD} = ?$

Решение:

$\triangle ABC$  – равнобедренный, следовательно,  $\angle A = \angle C$ ;  $\angle B = 60^\circ$ ,  
значит, и  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ , т.е.  $\triangle ABC$  – равносторонний,  
 $AB = BC = AC = 10,5\text{см}$ ;  
 $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10,5 = 42\text{см}$ .

Ответ: 42 см.

**407.**



Дано:

$$\angle B = 45^\circ;$$

$$\angle 1, \angle 2 = ?$$

Решение:

1)  $BD$  – биссектриса  $\angle ABC$ , следовательно,  $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22^\circ 30'$

2)  $\triangle ABO$  – прямоугольный, значит,  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ,  $\angle 1 = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$ .

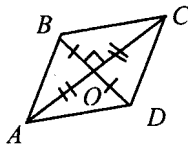
Ответ:  $22^\circ 30'$  и  $67^\circ 30'$ .

**408.**

Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  $\angle BOC = 90^\circ$ .

Доказать:  $ABCD$  – ромб.

Доказательство:



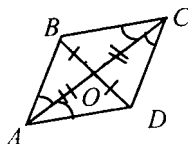
а)  $AC \perp BD$ .

Из  $\triangle BCO$  и  $\triangle DCO$  по св-ву диагоналей следует:  $BO = OD$ ,

$CO$  – общая, значит,  $\triangle BCO = \triangle DCO$  (по 2 катетам), т.е.  $BC = CD$ ,

т.к.  $BC = AD$ ,  $BC = CD$ , то  $AB = BC = CD = AD$ ,

следовательно,  $ABCD$  – ромб, что и требовалось доказать.



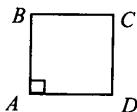
б)  $AC$  – биссектриса углов.

$\triangle ACD$  – равнобедренный по признаку,

т.к.  $\angle A = \angle C$ , следовательно,  $AD = DC$ ;

$AD = BC$ ,  $AD = DC$ , значит,  $AD = DC = BC = AB$ , т.е.  $ABCD$  – ромб, ч.т.д.

409.



Дано:  $ABCD$  – ромб,

$\angle A = 90^\circ$ .

Доказать:  $ABCD$  – квадрат.

Доказательство:

$ABCD$  – ромб, следовательно:

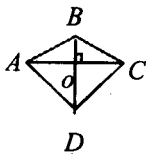
$AB = BC = CD = AD$ ,

$\angle A = \angle C = 90^\circ$ ,

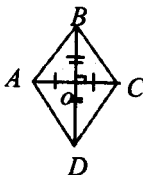
$\angle A + \angle B = 180^\circ$ , т.е.  $\angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$ .

Т.к. все стороны равны и все углы равны  $90^\circ$ , то  $ABCD$  – квадрат.

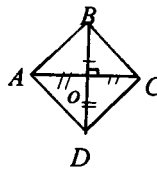
410.



а) нет;

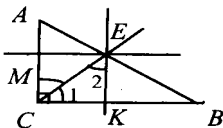


б) нет;



в) да.

411.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,

$CE$  – биссектриса;

$EK \parallel AC$ ,  $ME \parallel CK$ .

Доказать:  $CMEK$  – квадрат.

Доказательство:

По условию  $MC \parallel EK$ , значит, по определению  $CMEK$  – параллелограмм.

По свойству углов параллелограмма  $\angle C = \angle E$ ,

т.к.  $CE$  – биссектриса  $\angle C$ , то  $EC$  – биссектриса  $\angle E$ , значит,

$\angle 1 = \angle 2$  и  $\triangle CKE$  – равнобедр. (по признаку).

Т.е.  $CK = EK$ .

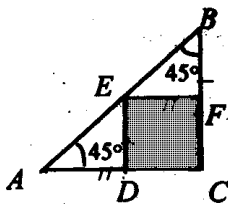
$CK = ME$ , т.к.  $CMEK$  – параллелограмм,

следовательно,  $CMEK$  – ромб.

$\angle C = 90^\circ$ , значит,  $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle M = \angle K = 90^\circ$ .

Следовательно,  $CMEK$  – квадрат, что и требовалось доказать.

412.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  
 $\angle C = 90^\circ$ ,  
 $AC = BC = 12\text{ см}$ ;  
 $CDEF$  – квадрат,  $E \in AB$ ;  
 $P_{ADEF} = ?$

Решение:

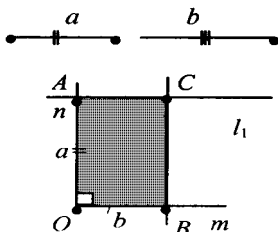
1)  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следовательно,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , т.е.  $\triangle ADE$  и  $\triangle EFB$  – равнобедренные прямоугольные треугольники, где  $AD = DE$  и  $EF = BF$ ;  $CDEF$  – квадрат (по усл.), следовательно,  $DE = EF$ , т.е.  $AD = DE = EF = BF$ .

2)  $P_{CDEF} = CD + DE + EF + CF$ , где  $DE = AD$ ;  $EF = BF$ ;  
 $P_{CDEF} = CD + AD + BF + CF$ , где  $CD + AD = AC$ ;  $BF + CF = BC$ ;  
 $P_{CDEF} = AC + BC = 12 + 12 = 24\text{ см}$ .

Ответ: 24 см.

413.

Построить прямоугольник:



а) по 2 смежным сторонам.

Построение:

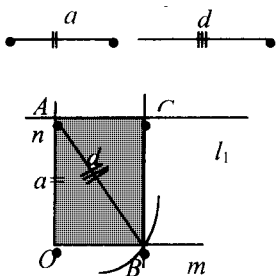
$\angle mn = 90^\circ$ ,

на луче  $n$  отрезок, равный  $a$ ,

на луче  $m$  отрезок, равный  $b$ ,

через  $A$  и  $B$  провести  $l_1 \parallel m$  и  $l_2 \parallel n$ ,

$l_1 \cap l_2 = C$ ,  $OACB$  – прямоугольник.



б) по стороне и диагонали.

Построение:

$\angle mn = 90^\circ$ ,

на луче  $n$  отрезок, равный  $a$ ,

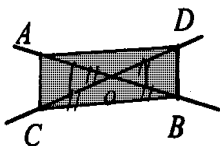
Окр.  $(A; d)$ , Окр.  $(A; d) \cap m = C$ ,

через  $C$  провести прямую  $l_1 \parallel n$ ,

через  $A$  провести прямую  $l_2 \parallel m$ ,

$l_1 \cap l_2 = B$ ,

$OACB$  – искомый прямоугольник.



в) по 2 диагоналям и углу между ними.

Построение:

$\angle O = \alpha$ .

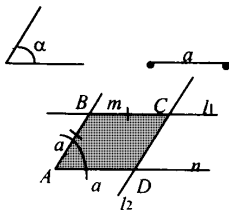
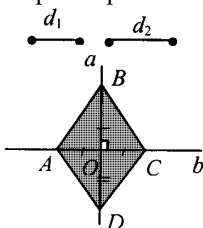
Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно от O в разные стороны отложим

отрезки, равные  $\frac{1}{2}d$ :  $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d$ ,

ADBC – искомый прямоугольник.

414.

Построить ромб.



а) по 2 диагоналям

Построение:

диагонали ромба перпендикулярны, следовательно,  $a \perp b$ , так же диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, значит, на прямой  $b$  от O отложим  $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d_1$ , ABCD – искомый ромб.

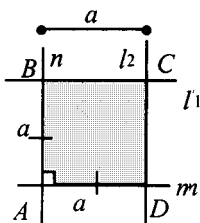
б) по стороне и углу

Построение:

$\angle A = \alpha$ , проведем  $AB = a$ , через  $b$  проведем  $l_1 \parallel n$ ,  $BC = a$ , через  $C$  проведем  $l_2 \parallel m$ , получим  $l_2 \cap n = D$ , то ABCD – искомый ромб.

415.

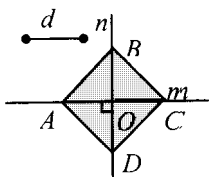
Построить квадрат



а) по стороне.

Построение:

построим  $n \perp m$ ,  $n \cap m = A$ , от A на  $n$  отложим  $AB = a$  и  $AD = a$  на  $m$ , через B и D прямые  $l_1 \parallel m$ ,  $l_2 \parallel n$ , имеем  $l_1 \cap l_2 = C$ , тогда ABCD – искомый квадрат.



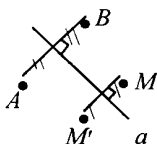
б) по диагонали.

Построим  $n \perp m$ ,  $n \cap m = O$ ,  
диагонали взаимно перпендикулярны,  
равны и точкой пересечения делятся  
пополам, следовательно, отложим на  $m$

$$OA = OC = \frac{1}{2}d,$$

$OB = OD = \frac{1}{2}d$  на  $n$ , имеем  $ABCD$  – искомый квадрат.

416.



Провести к прямой  $a \perp$  через  $M$ , про-  
вести окружность с центром  $O$  и  
 $R=OM$ . При пересечении окружности  
с  $\perp$  получим  $M'$  – искомая.

417.

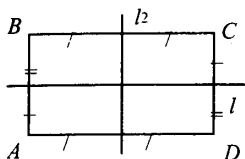
- а) 2 оси симметрии – прямая на которой лежит отрезок и сере-  
динный перпендикуляр;
- б) бесконечное множество осей симметрии –  $\forall$  перпендикуляр и  
сама прямая;
- в) одну ось симметрии – прямая, на которой лежит луч.

418.

Ш, А, Е, О – имеют ось симметрии.



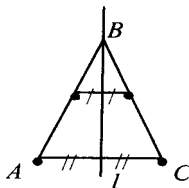
419.



Из определения фигуры, симметричной  
относительно прямой, следует, что каж-  
дая точка прямоугольника имеет сим-  
метричную точку прямоугольника отно-  
сительно любой из прямой  $l$  и  $l_2$ .

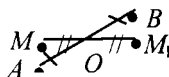


420.



Биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$ , опущенная на основание  $AC$ , является осью симметрии, т. е. каждая точка  $AB$  имеет симметричную точку отрезка  $BC$   $\triangle ABC$ .

421.



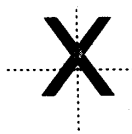
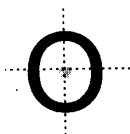
$M_1$  – симметрична  $M$  относительно  $O$ , где  $O$  – середина  $AB$ .

422.

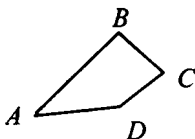
а) да; б) нет; в) да; г) да.

423.

$O$  и  $X$ .



424.

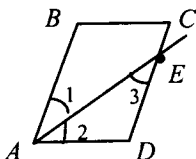


Дано:  $ABCD$  – четырехугольник,  
не все углы равны друг другу.  
Доказать: хотя бы один угол – тупой.

Доказательство:

Пусть в четырехугольнике все углы острые, а именно  $\angle A < 90^\circ$ ;  $\angle B < 90^\circ$ ;  $\angle C < 90^\circ$ ;  $\angle D < 90^\circ$ , то  
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360^\circ$ , а такого не может быть, т.к. сумма углов четырехугольника равна  $360^\circ$ . Т.е. предположение о том, что все углы острые – неверно. Следовательно, хотя бы один угол – тупой, что и требовалось доказать.

425.



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм.

$P_{ABCD} = 46$  см,  $AB = 14$  см,

$AE$  – биссектриса.

Найти: какую сторону  $\cap AE$  ?  
отрезки пересечения.

Решение:

1)  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ ,  $46 = 2 \cdot (14 + AD)$ , следовательно,

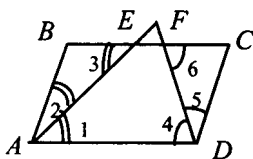
$AD = 9$  см,  $AD < AB$ , значит,  $E \in DC$ ;

2)  $\angle 1 = \angle 3$  ( $AB \parallel CD$  и секущая  $AE$ ); по условию  $\angle 1 = \angle 2$ , значит,  
 $\angle 2 = \angle 3$ , т.е.  $\triangle AED$  – равнобедренный и  $AD = ED = 9$  см;

3)  $CE = CD - ED = 14 - 9 = 5$  см.

Ответ: 5 см, 9 см.

426.



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм.

$AB = 3$  см,  $AD = 10$  см,

$AE$  – биссектриса  $\angle A$ ,

$DF$  – биссектриса  $\angle D$ ;

$BE, EF, FC = ?$

Решение:

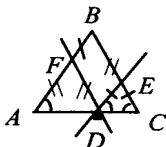
1)  $\triangle ABE$  – равнобедренный, т.к.  $\angle 2 = \angle 3$ , значит,

$AB = BE = 3$  см, так же из  $\triangle DCF$  следует, что  $CD = FC = 3$  см;

2)  $EF = BC - BE - FC$ ,  $EF = 10 - 3 - 3 = 4$  см.

Ответ: 3 см, 4 см, 3 см.

427.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ,

$D \in AC$ ,  $DE \parallel AB$ ,  $FE \parallel AC$ .

Доказать:  $P_{AFED} = AB + BC$ .

Доказательство:

1)  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следовательно,  $\angle A = \angle C$ ;

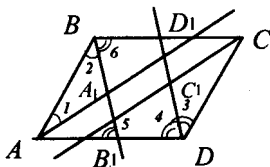
$AB \parallel DE$ , следовательно, как соответственные  $\angle A = \angle D$ , т.е.  
 $\angle D = \angle C$  и  $DE = EC$ .

2)  $FB \parallel DE$ ;  $FD \parallel BE$ , следовательно,  $BEDF$  – параллелограмм, т.е.  
 $FD = BE$  и  $FB = DE$ .  $FD \parallel BC$ , значит,  $\angle C = \angle ADF$ ,  $\angle A = \angle C$ , т.е.  
 $\angle A = \angle ADF$ , следовательно,  $AF = FD$ .

3)  $P_{FBED} = FB + BE + ED + FD$ , где  $ED = EC$ ;  $FD = AF$

$P_{AFED} = FB + BE + EC + AF = AB + BC$ , что и требовалось доказать.

**428.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  
 $AB \neq AD$ ,  $AA_1$ ;  $BB_1$ ;  $CC_1$ ;  $DD_1$  –  
 биссектрисы углов.  
 Доказать:  $A_1B_1C_1D_1$  – прямоуголь-  
 ник

Доказательство:

1) по свойству углов параллелограмма  $\angle A = \angle B = 180^\circ$ , значит,  
 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$  ( $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle A$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B$ ), следовательно, в  $\triangle ABA_1$   
 $\angle A_1 = 90^\circ$  и  $\triangle ABA_1$  – прямоугольный.

Аналогично:  $\angle C_1 = 90^\circ$  в  $\triangle CC_1D$ ;

2) по свойству углов параллелограмма  $\angle B = \angle D$ ,  $BB_1$ ;  $DD_1$  – бис-  
 сектрисы, значит,  $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6$ ;  $BC \parallel AD$ , следовательно,  
 $\angle 6 = \angle 5$ , т.е.  $\angle 5 = \angle 4$  как соответственные углы при прямых  $BB_1$   
 и  $DD_1$  и секущей  $AD$ , отсюда  $BB_1 \parallel DD_1$ . Аналогично  $AA_1 \parallel CC_1$ .

3)  $AA_1 \parallel CC_1$ ,  $BB_1 \parallel DD_1$ ,  $\angle A_1 = \angle C_1 = 90^\circ$ , значит,  $A_1B_1C_1D_1$  – пря-  
 моугольник, что и требовалось доказать.

**429.**



Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;  
 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  
 $\angle B + \angle C = 180^\circ$ .

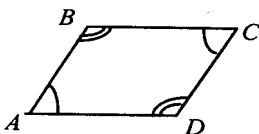
Доказать:  $ABCD$  – параллелограмм.

Доказательство:

1)  $\angle A$ ,  $\angle B$  – односторонние при прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AB$ .  
 Т.к. по условию  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , то по признаку  $AD \parallel BC$ .

- 2)  $\angle B, \angle C$  – односторонние при прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BC$ .  
Т.к. по условию  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ , то по признаку  $AB \parallel CD$ .  
3) Т.к.  $AD \parallel BC, AB \parallel CD$ , то по определению  $ABCD$  – параллелограмм, что и требовалось доказать.

**430.**

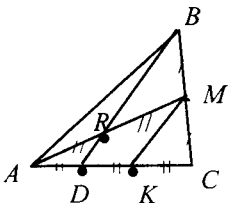


Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;  
 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ .  
Доказать:  $ABCD$  – параллелограмм.

Доказательство:

- 1) по свойству суммы углов четырехугольника:  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ , где  $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ , откуда следует  $2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 360^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ$ ;
- 2)  $\angle A, \angle B$  — односторонние углы при прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AB, \angle A + \angle B = 180^\circ$ , значит,  $AD \parallel BC$ ;
- 3)  $\angle B, \angle C$  – односторонние углы при прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BC, \angle B + \angle C = 180^\circ$ , значит,  $AB \parallel CD$ ;
- 4)  $AD \parallel BC, AB \parallel CD$ , т.е.  $ABCD$  – параллелограмм, что и требовалось доказать.

**431.**



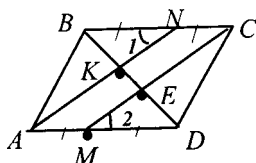
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AM$  – медиана;  
 $K \in AM, AK = KM$ ,  
 $BK \cap AC = D$ .

Доказать:  $AD = \frac{1}{3} AC$ .

Доказательство:

- 1) проведем  $MK \parallel BD, DK = KC$  (по т. Фалеса);
- 2) в  $\triangle AMK KD \parallel MR; AK = KM$ , следовательно, по т. Фалеса  $AD = DK$ ;
- 3)  $AC = AD + DK + KC$ , но  $AD = DK = KC$ , значит,  $AC = 3AD$ , т.е.  $AD = \frac{1}{3} AC$ , что и требовалось доказать.

432.

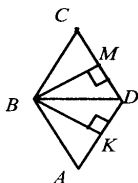


Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  
 $M \in AD$ ,  $AM = MD$ ,  
 $N \in BC$ ,  $BN = NC$ ;  
 $AN \cap BD = E$ ;  $CM \cap BD = F$ .  
 Доказать:  $BK = KE = ED$ .

Доказательство:

- 1) Имеем  $\triangle ABN$  и  $\triangle CDM$ ; по свойству параллелограмма  $AB = CD$ ,  $BN = MD$  (по условию),  $\angle B = \angle D$  (по усл.), т.е. по двум сторонам и углу  $\triangle ABN = \triangle CDM$ , следовательно,  $AN = MC$ .
- 2) По условию  $NC = AM$ , и  $AN = MC$ , значит,  $ANCM$  – параллелограмм, и  $AN \parallel MC$ .
- 3) В  $\triangle BCE$ :  $NK \parallel CE$ ;  
 $BN = NC$ , значит  $BK = KE$  (т. Фалеса).  
 В  $\triangle AKD$ :  $ME \parallel AK$ ;  
 $AM = MD$ , следовательно,  $KE = ED$  (т. Фалеса), следовательно,  
 $BK = KE = ED$ , что и требовалось доказать.

433.

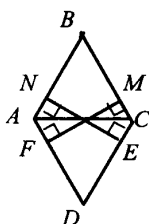


Дано:  $ABCD$  – ромб,  
 $BM \perp DC$ ,  $BK \perp AD$ .  
 Доказать:  $BD$  – биссектриса  $\angle KBM$ .

Доказательство:

- 1)  $\angle B = \angle D$  по св-ву углов ромба, а по св-ву диагонали  $BD$  – биссектриса.
- 2) Надо доказать, что  $\angle DMB = \angle DBK$ .  
 а) Имеем  $\triangle BCM$  и  $\triangle BAK$ .  
 Т.к.  $ABCD$  – ромб,  $BC = BA$ ,  $\angle C = \angle A$ , значит  $\triangle BCM = \triangle BAK$  (по гипотенузе и острому углу), т.е. по определению равных треугольников  $\angle CBM = \angle ABK$ .  
 б)  $\angle MBD = \angle DBC - \angle MBC$ ;  $\angle DBK = \angle DBA - \angle ABK$ , значит,  
 $\angle MBD = \angle DBK$  и  $BD$  является биссектрисой  $\angle MBK$ , что и требовалось доказать.

434.



Дано:  $ABCD$  – ромб,  $AC \cap BD = O$ .

Доказать:  $ON = OM = OE = OF$ .

Доказательство:

1) Имеем  $\triangle BON$  и  $\triangle BOM$ , где  $BO$  – общая сторона, по св-ву ромба  $\angle NBO = \angle MBO$ , т.е. по гипотенузе и острому углу  $\triangle BON = \triangle BOM$ .

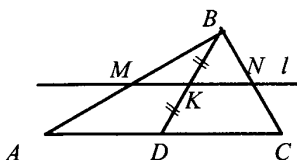
Следовательно,  $OM = ON$ ;

2) так же через  $\triangle FOD = \triangle EOD$  имеем  $OE = OF$ .

3) Имеем  $\triangle AOF$  и  $\triangle COM$ ; по св-ву ромба  $AO = OC$  и  $\angle OAF = \angle OCM$ , т.е.  $\triangle AOF = \triangle COM$  (по гипотенузе и острому углу), следовательно,  $OF = OM$ .

4) Имеем  $OM = ON$ ,  $OE = OF$ ,  $OF = OM$ , следовательно,  $ON = OM = OE = OF$ . Что и требовалось доказать.

435.



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$D \in AC$ ,  $K \in BD$ ,  $BK = KD$ .

Доказать:  $AM = MB$ ,  $BN = NC$ .

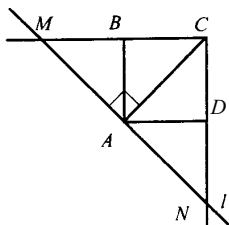
Доказательство:

1) Проведем через  $K$  прямую  $l \parallel AC$ .

2) Рассмотрим  $\triangle ABD$ :  $MK \parallel AD$ ,  $BK = KD$ , из теоремы Фалеса следует:  $BM = MA$ , что и требовалось доказать.

3) Рассмотрим  $\triangle BDC$ :  $KN \parallel DC$ ,  $BK = KD$ , из теоремы Фалеса следует  $BN = NC$ , что и требовалось доказать.

436.



Дано:  $ABCD$  – квадрат,  
 $AC = 18,4\text{см}$ ;  
 $A \in l, l \perp AC$ ,  
 $l \cap BC = M; l \cap CD = N$ .  
 $MN = ?$

Решение:

1) по св-ву квадрата  $AC$  – биссектриса  $\angle C$ , т.е.

$$\angle BCA = \angle ACD = 45^\circ;$$

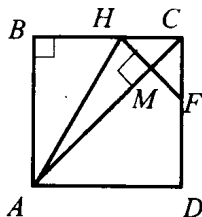
2)  $\triangle MAC$  – прямоугольный  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ , значит,  $\angle M = 45^\circ$ .  
 и  $AM = AC = 18,4\text{см}$ .

Также  $\triangle ACN$  – прямоугольный,  $AN = AC = 18,4\text{см}$ .

3)  $MN = MA + AN = 18,4 + 18,4 = 36,8\text{см}$ .

Ответ:  $36,8\text{см}$ .

437.



Дано:  $ABCD$  – квадрат;  
 $M \in AC, AB = AM, HM \perp AC$ .  
 Доказать:  $BH = HM = MC$ .

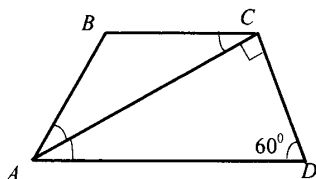
Доказательство:

1) Имеем  $\triangle HMC$  и  $\triangle FMC$  с общей стороной  $CM$ ,  
 $\angle HCM = \angle FCM = 45^\circ$ , т.е. по катету и острому углу  
 $\triangle HCM = \triangle FCM$ , следовательно,  $HC = CF$ ,  $HM = MF$ .

2) Имеем  $\triangle ABH$  и  $\triangle AMH$  с общей стороной  $AH$ ;  
 $AB = AM$  (по условию),  
 $\triangle ABH = \triangle AMH$ , т.е по катету и гипотенузе, следовательно,  
 $BH = HM$ .

3) Имеем  $CM = HM = BH$ , что и требовалось доказать.

438.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $AC \perp CD$ ,  $\angle BAC = \angle CAD$ ;  
 $P_{ABCD} = 20$  см,  $\angle D = 60^\circ$ ;  
 $AD = ?$

Решение:

1) В  $\triangle ACD$

$\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle D = 60^\circ$ , значит,  $\angle A = 30^\circ$ , следовательно,  $CD = \frac{1}{2} AD$ ;

2) т.к.  $\angle BAC = \angle CAD = 30^\circ$ , то  $\angle A = 60^\circ$ , следовательно,  $ABCD$  – равнобедренный, т.е.  $CD = AB$ ;

3) т.к.  $\angle CAD = \angle BAC$ , то  $\angle BAC = \angle BCA$ , значит,  $\triangle ABC$  – равнобедренный, т.е.  $AB = BC$ ;

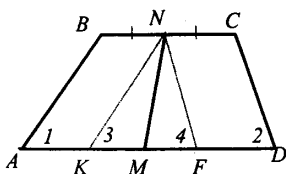
4)  $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$ , где  $CD = \frac{1}{2} AD$ ,  $AB = BC = CD$ ,

$$20 = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + AD = 2,5 AD;$$

$$20 = 2,5 AD, AD = 20 : 2,5 = 8.$$

Ответ: 8 см.

439.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $\angle A + \angle D = 90^\circ$ ;  
 $BN = NC$ ,  
 $AM = MD$ .

Доказать:  $MN = \frac{1}{2} (AD + BC)$ .

Доказательство:

1) Построим  $NK \parallel AB$  и  $NF \parallel CD$ ,  $ABNK$  и  $NCDF$  – параллелограммы.

2)  $\angle 1 = \angle 3$  (соответственные при  $AB \parallel NK$  и секущей  $AK$ );

$\angle 2 = \angle 4$  (соответственные при  $NF \parallel CD$  и секущей  $FD$ ).

Значит  $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ .

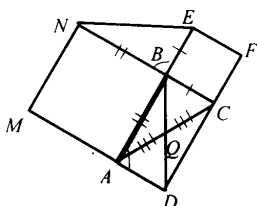
3) В  $\triangle KNF$ :  $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle N = 90^\circ$ , и

$\triangle KNF$  – прямоугольный,  $NM$  – медиана.



Значит,  $NM = \frac{1}{2} KF$ , где  $KF = AD - (AK + FD) =$   
 $= AD - BC$ , значит  $MN = \frac{1}{2} (AD - BC)$ , что и требовалось доказать.

**440.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $ABNM, BEFC$  – квадраты.

Доказать:  $BQ = \frac{1}{2} NE$ .

Доказательство:

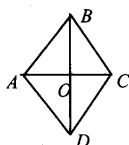
1) Построим  $QD = QB$ , имеем по признаку параллелограмма:  $ABCD$  – параллелограмм.  $AQ = QC, BQ = QD$ . Следовательно,  $AD = BC$ .

2) В  $\triangle BNE$  и  $\triangle ABD$ :

$NB = AB, BE = AD, \angle B = \angle A$ , т.е. по двум сторонам и углу между ними  $\triangle BNE = \triangle ABD$ , по определению равных  $\triangle NE = BD$ , т.е.

$BQ = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} NE$ , что и требовалось доказать.

**441.**



Дано:  $ABCD$  – ромб.

Доказать:  $BD, AC$  – оси симметрии.

Доказательство:

1)  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$  – равнобедренные треугольники.

2) Биссектриса  $BD$  – ось симметрии равнобедренного треугольника (любая точка отрезка  $AB$  имеет симметричную точку отрезка  $BC$  относительно  $BD$ ).

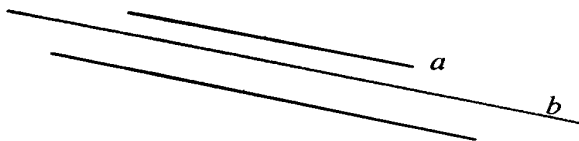
**442.**

Дано:  $ABCD$  – ромб

Доказать:  $O$  – ось симметрии.

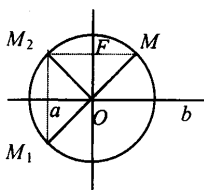
См. 434.

443.



Бесконечное множество.

444.



Дано:  $a \perp b$ ,  $a \cap b = O$ ;

$a, b$  – оси симметрии окр.  $(O; R)$ .

Доказать:  $O$  – центр симметрии.

Доказательство:

$\triangle MFO = \triangle M_1OF$  по катету и гипотенузе ( $OM = OM_1 = R$ ;  $OF$  – общая сторона), т.е.  $MF = FM_1$ , следовательно,  $M$  и  $M_1$  – симметричные относительно прямой  $a$ .

2)  $M_1$  и  $M_2$  – симметричны относительно прямой  $b$ , т.к.

$\triangle M_1OQ = \triangle M_2OQ$ , откуда,  $M_1Q = QM_2$ .

3)  $MF \parallel b$ ,  $M_1Q \parallel a$ ,  $\angle O = 90^\circ$ , значит,  $MFOQ$  – прямоугольник и  $\angle M_1 = 90^\circ$ .

Следовательно,  $\triangle M_2MM_1$  – прямоугольный с  $\angle M_1 = 90^\circ$ .

Т.е.  $M_2M_1$  – диаметр окружности и  $M_2O = OM$ ,

следовательно,  $M_2$  и  $M$  – симметричны относительно  $O$ , что и требовалось доказать.

# Глава VI. Площадь

## § 1. Площадь многоугольника

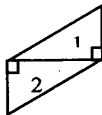
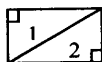
445.

Прямоугольные треугольники

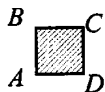


Составить:

1) прямоугольник; 2) параллелограмм; 3) равнобедренный треугольник.

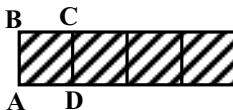
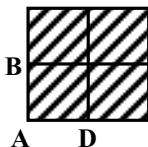


446.

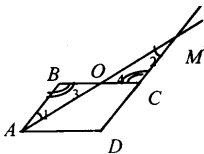


$$S_{ABCD} = 1 \text{ ед.}^2.$$

а) квадрат; б) прямоугольник; в) треугольник.



447.



Дано: ABCD – параллелограмм;  
CM = CD.

Доказать:  $S_{ABCD} = S_{AMD}$ .

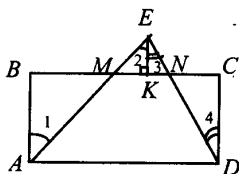
Доказательство:

1) В  $\triangle ABO$  и  $\triangle MCO$ :  $AB = CM$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  (накрест леж. при  $AB \parallel CD$  и секущей  $AM$ );

$\angle 3 = \angle 4$  (накрест леж. при  $AB \parallel CD$  и секущей  $BC$ ), значит,  $\triangle ABO = \triangle MCO$  (по стороне и 2 прилежащим углам), т.е. по св-ву площадей  $S_{ABO} = S_{MCO}$ .

2)  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{A OCD}$ , где  $S_{ABC} = S_{MCO}$ ;  
 $S_{AMD} = S_{MCO} + S_{A OCD}$ ,  
 $S_{ABCD} = S_{AMD}$ , что и требовалось доказать.

**448.**



Дано:  $ABCD$  – прямоугольник,  
 $\triangle AED$ ,  $AE \cap BC = M$ ,  
 $ED \cap BC = N$ ,  $AM = ME$ .  
 Доказать:  $S_{ABCD} = S_{ADE}$ .

Доказательство:

1)  $EK \perp MN$ .

В  $\triangle ABM$  и  $\triangle EKM$ :

$AM = ME$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  (т.к. накрест леж. при  $AB \parallel EK$  при секущей  $AC$ ), значит,  $\triangle ABM = \triangle EKM$  (по гипотенузе и острому углу) и по св-ву площадей  $S_{ABM} = S_{EKM}$ .

2) В  $\triangle KEN$  и  $\triangle CDN$

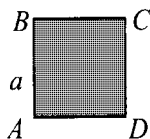
$EK = CD$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  (т.к. накрест лежащие при  $KE \parallel CD$  и секущей  $ED$ ), т.е. по св-ву площадей  $S_{KEN} = S_{CDN}$ .

3)  $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{CDN}$ , следовательно,

$S_{AED} = S_{MEK} + S_{AMND} + S_{KEN}$ , т.е.  $S_{ABCD} = S_{ADE}$ ,

Что и требовалось доказать.

**449.**



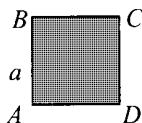
$$S = a^2;$$

а)  $a = 1,2 \text{ см}$ ,  $S = 1,44 \text{ см}^2$ ;

б)  $a = \frac{3}{4} \text{ дм}$ ,  $S = \frac{9}{16} \text{ дм}^2$ ;

в)  $a = 3\sqrt{2} \text{ м}$ ,  $S = 18 \text{ м}^2$ .

**450.**



$$S = a^2, \text{ или } a = \sqrt{S}$$

а)  $S = 16 \text{ см}^2$ ,  $a = 4 \text{ см}$ ;

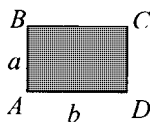
б)  $S = 2,25 \text{ дм}^2$ ,  $a = 1,5 \text{ дм}$ ;

в)  $S = 12 \text{ м}^2$ ,  $a = 2\sqrt{3} \text{ м}$ .

**451.**

$$S = 24 \text{ см}^2 = 2400 \text{ мм}^2 = 0,24 \text{ дм}^2.$$

452.



$$S = ab;$$

а)  $a = 8,5 \text{ см}$ ,  $b = 3,2 \text{ см}$ ,  $S = 27,3 \text{ см}^2$ ;

б)  $a = 2\sqrt{2} \text{ см}$ ,  $b = 3 \text{ см}$ ,  $S = 6\sqrt{2} \text{ см}^2$ ;

в)  $a = 32 \text{ см}$ ,  $S = 684,8 \text{ см}^2$ , т.к.  $b = S : a$ ,  
 $b = 21,4 \text{ см}$ ;

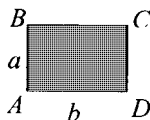
г)  $b = 4,5 \text{ см}$ ,  $S = 12,5 \text{ см}^2$ ,  $12,5 = a \cdot 4,5$ ;  $a = 2,7 \text{ см}$  ( $a = S : b$ ).

453.

$S = a \cdot b$ , следовательно,

а) S увеличится в 2 раза, б) S увелич. в 4 раза, в) S не изменится.

454.



Дано: ABCD – прямоугольник

а)  $AD > AB$  в 2,5 раза;  $S_{ABCD} = 250 \text{ см}^2$ ;

б)  $S_{ABCD} = 9 \text{ м}^2$ ;  $P_{ABCD} = 12 \text{ м}$ ;

$AB$ ,  $AD = ?$

Решение:

а) Пусть  $AB = x$ , тогда  $AD = 2,5x \text{ см}$ ,  $S = AB \cdot AD$ ;

$250 = 2,5x^2$ ,  $x^2 = 100$ ,  $x = 10$ , имеем  $AB = 10 \text{ см}$ ,  $AD = 25 \text{ см}$ ;

б) Пусть  $AB = x$ ,  $AD = y$ ;

$S_{ABCD} = AB \cdot AD$ ;  $P_{ABCD} = 2(AB + AD)$ ;

$9 = xy$ ;  $12 = 2(x + y)$ ,  $x + y = 6$ , т.е.  $x = y = 3$ ;  $AB = AD = 3 \text{ см}$ .

455.

1) Найдем площадь каждой плитки:  $30 \cdot 5 = 150 \text{ см}^2$ .

2) Найдем площадь пола:  $5,5 \cdot 6 = 33 \text{ м}^2 = 330000 \text{ см}^2$ .

3)  $330000 : 150 = 2200$ ,

т.е. 2200 плиток потребуется для покрытия пола.

Ответ: 2200.

456.

1) Найдем площадь плитки:  $15 \cdot 15 = 225 \text{ см}^2$ .

2) Найдем площадь стены:  $3 \cdot 2,7 = 8,1 \text{ м}^2 = 81000 \text{ см}^2$ .

3)  $81000 : 225 = 360$ , т.е. 360 плиток потребуется на облицовку.

Ответ: 360.

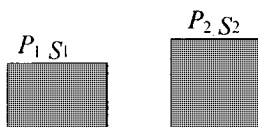
457.

1)  $S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b = 8 \cdot 18 = 144 \text{ м}^2$ ;

2)  $S_{\text{прямоуг.}} = S_{\text{кв.}}$ , следовательно, сторона квадрата равна 12 м.

Ответ: 12м.

458.



1)  $P_1 = 2 \cdot (220 + 160) = 760 \text{ м}$ ;

$P_1 = P_2$ , следовательно,  $P_2 = 4 \cdot a$ ,

где  $a$  – сторона квадрата,

$760 = 4a$ ,  $a = 190 \text{ м}$ ;

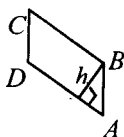
2)  $S_1 = 220 \cdot 160 = 35200 \text{ м}^2$ ;

$S_2 = 190 \cdot 190 = 36100 \text{ м}^2$ ,

т.е.  $S_2 - S_1 = 900 \text{ м}^2$ . Следовательно, площадь квадратного участка больше площади прямоугольного на  $900 \text{ м}^2$ .

## § 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459.



$S = ah$ ;

1)  $a = 15 \text{ см}$ ,  $h = 12 \text{ см}$ ,  $S = 180 \text{ см}^2$ ;

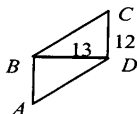
2)  $S = 34 \text{ см}^2$ ,  $h = 8,5 \text{ см}$ ,  $a = 4 \text{ см}$ ;

3)  $S = 162 \text{ см}^2$ ,  $h = \frac{1}{2} a$ ,  $162 = a \cdot \frac{1}{2} a$ ;  $324 = a^2$ ;

$a = 18 \text{ см}$ ;

4)  $h = 3a$ ,  $S = 27$ ,  $27 = a \cdot 3a$ ;  $9 = a^2$ ;  $a = 3$ ,  $h = 9$ .

460.



Дано: ABCD – параллелограмм

$BD \perp CD$ ,  $BD = 13 \text{ см}$ ,  $CD = 12 \text{ см}$ ;

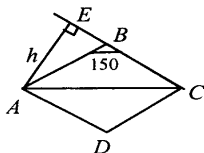
$S = ?$

Решение:

$S = BD \cdot CD = 13 \cdot 12 = 156 \text{ см}^2$ .

Ответ:  $156 \text{ см}^2$ .

462.



Дано:  $ABCD$  – ромб,  $\angle B = 150^\circ$ ,  
 $AB = 6$  см;  
 $S = ?$

Решение:

1)  $AE \perp BC$ .

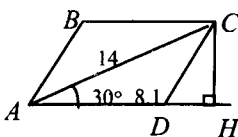
В  $\triangle ABE$ :  $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , следовательно,

$$AE = \frac{1}{2} AB = 3 \text{ см.}$$

$$2) S_{ABCD} = AE \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $18 \text{ см}^2$ .

463.



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  
 $AD = 8,1$  см,  $AC = 14$  см,  
 $\angle CAD = 30^\circ$ ;  
 $S = ?$

Решение:

$$CH \perp AD, S_{ABCD} = AD \cdot CH.$$

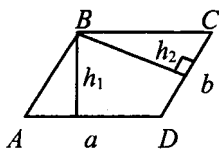
В  $\triangle ACH$ :  $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , следовательно,  $CH = \frac{1}{2} AC$ ,

$$CH = 7 \text{ см, т.е.}$$

$$S_{ABCD} = 8,1 \cdot 7 = 56,7 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $56,7 \text{ см}^2$ .

464.



$$S = a \cdot h_1 \text{ или } S = b \cdot h_2;$$

$$\text{а) } a = 18 \text{ см, } b = 30 \text{ см, } h_1 = 6 \text{ см;}$$

$$h_2 > h_1, h_2 = ?, 18 \cdot h_2 = 30 \cdot 6, h_2 = 10.$$

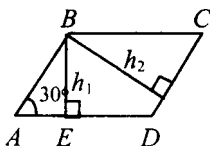
$$\text{б) } a = 10 \text{ см, } b = 15 \text{ см, } h_2 = 6 \text{ см;}$$

$$h_2 > h_1, h_1 = ?, 10 \cdot 6 = 15 \cdot h_1, h_1 = 4.$$

$$\text{в) } S = 54 \text{ см}^2, a = 4,5 \text{ см, } b = 30 \text{ см,}$$

$$h_2 = ?, h_1 = ?, 54 = 4,5 \cdot h_1, h_1 = 12, 54 = 6 \cdot h_2, h_2 = 9.$$

465.



Дано: ABCD – параллелограмм;  
 $\angle A = 30^\circ$ ,  $h_1 = 2\text{ см}$ ,  $h_2 = 3\text{ см}$ ;  
 $S = ?$

Решение:

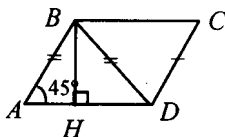
1) В  $\triangle ABE$ :  $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , следовательно,

$$BE = \frac{1}{2} AB, 2 = \frac{1}{2} AB, \text{ т.е. } AB = 4\text{ см};$$

2)  $CD = AB = 4\text{ см}$ ,  $S_{ABCD} = CD \cdot h^2 = 4 \cdot 3 = 12\text{ см}^2$ .

Ответ:  $12\text{ см}^2$ .

466.



Дано: ABCD – параллелограмм;  
 $\angle A = 45^\circ$ ,  $AD = 15,2\text{ см}$ ,  
 $BD = AB$ ;  
 $S = ?$

Решение:

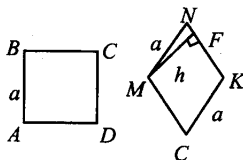
1) По условию  $AB = BD$ , следовательно  $\triangle ABD$  – равнобедренный, т.к.  $\angle A = 45^\circ$ , то  $\angle D = 45^\circ$ , а  $\angle B = 90^\circ$ .

По свойству медианы прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, имеем:  $BH = \frac{1}{2} AD = 7,6\text{ см}$ .

2)  $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 7,6 \cdot 15,2 = 115,52\text{ см}^2$ .

Ответ:  $115,52\text{ см}^2$ .

467.



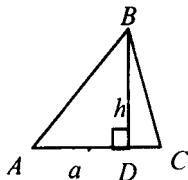
Дано: ABCD – квадрат;  
 MNKE – ромб;  
 $P_{ABCD} = P_{MNKE}$ .  
 Сравнить  $S_{ABCD}$  и  $S_{MNKE}$ .

$S_{ABCD} = a^2$ ,  $S_{MNKE} = a \cdot h$ ;  
 $\triangle MNF$  – прямоугольный;



$MF < MN$ , следовательно,  $h < a$ , и соответственно  $a^2 > ah$ , значит,  $S_{ABCD} > S_{MNKE}$ , что и требовалось доказать.

**468.**



$$S = \frac{1}{2} ah;$$

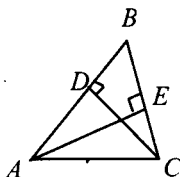
а)  $a = 7$  см,  $h = 11$  см, следовательно,  
 $S = 38,5$  см<sup>2</sup>;

б)  $a = 2\sqrt{3}$  см,  $h = 5$  см, следовательно,  
 $S = 5\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>;

в)  $S = 37,8$  см<sup>2</sup>,  $a = 14$  см, следовательно,  $37,8 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h$ ;  $h = 5,4$  см;

г)  $S = 12$  см<sup>2</sup>,  $h = 3\sqrt{2}$  см, следовательно,  $12 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot a$ ;  $a = 4\sqrt{2}$  см.

**469.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AB = 16$  см,  $BC = 11$  см;

$AE \perp BC$ ;

$AE = ?$

Решение:

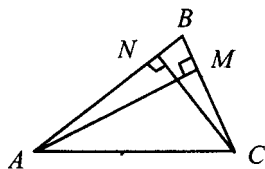
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 11 = 88 \text{ см}^2.$$

$$\text{Также: } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE;$$

$$88 = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot AE, \text{ откуда } AE = 8 \text{ см.}$$

Ответ: 8 см.

**470.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AB = 7,5$  см,  $BC = 3,2$  см;

$CN \perp AB$ ,  $CN = 2,4$  см;

$AM \perp BC$ ;

$AM = ?$

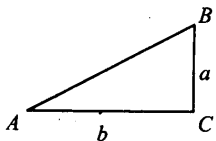
Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 2,4 = 9 \text{ см}^2, \text{ также}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC; 9 = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot 3,2; \text{ откуда } AM = 5,625 \text{ см.}$$

Ответ: 5,625 см.

**471.**



$$S = \frac{1}{2} ab;$$

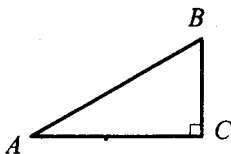
а)  $a = 4 \text{ см}$ ,  $b = 11 \text{ см}$ , следовательно

$$S_{\Delta} = 22 \text{ см}^2;$$

б)  $a = 1,2 \text{ дм}$ ,  $b = 3 \text{ дм}$ ,  $S_{\Delta} = 1,8 \text{ дм}^2$ .

Ответ:  $22 \text{ см}^2$ ;  $1,8 \text{ дм}^2$ .

**472.**



Дано:  $\Delta ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$$AC:BC = 7:12;$$

$$S_{ABC} = 168 \text{ см}^2;$$

$$AB, BC = ?$$

Решение:

Пусть  $x \text{ см}$  – 1 часть, следовательно,

$$AC = 7x \text{ см}, BC = 12x \text{ см};$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \text{ следовательно, } 168 = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x;$$

$$x^2 = 4, x = 2;$$

$$AC = 7 \cdot x = 14 \text{ см}; BC = 12 \cdot x = 24 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см, 24 см.

**473.**

Дано:  $\Delta ABC$ ,  $C \in m$ ,  $m \parallel AB$ ,  $D \in m$ .

Доказать:  $S_{ABC} = S_{ABD}$ .

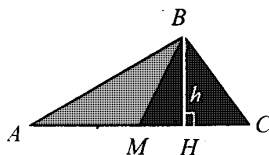
Доказательство:

$$1) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 \perp AB, \text{ или}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DD_1, (DD_1 \perp AB);$$

2) Надо доказать, что  $CC_1 = DD_1$ .  
 3) В четырехугольнике  $CDD_1C_1$ ;  
 $CD \parallel C_1D_1$  ( $CD \in m$ ,  $C_1D_1 \in AB$ );  
 $CC_1 \parallel DD_1$  ( $CD \in m$ ,  $C_1D_1 \in AB$ );  
 $CC_1 \parallel DD_1$  ( $CC_1 \perp AB$ ,  $DD_1 \perp AB$ ), значит,  
 $CDD_1C_1$  – параллелограмм, где  $CC_1 = DD_1$  (по св-ву).  
 Следовательно,  $S_{ABC} = S_{ABD}$ .

474.

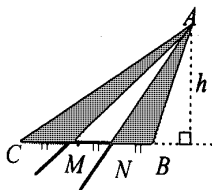


Дано:  $\triangle ABC$ , где  
 $BM$  – медиана.  
 Сравнить:  $S_{ABC}$  и  $S_{MBC}$ .

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH, \text{ т.к. } BM \text{ – медиана, } AM = MC,$$

$$S_{ABC} = S_{MBC}.$$

475.



Разделим  $BC$  на три равные части,  
 имеем  $\triangle CAM$ ,  $\triangle MAN$ ,  $\triangle NAB$ .

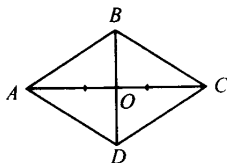
$S_{\triangle} = a \cdot h$ , следовательно,

$S_{AMC} = CM \cdot h$ ,

$S_{MAN} = MN \cdot h$ ,

$S_{NAB} = NB \cdot h$ , где  $BM = MN = NB = a$ .

476.



Дано:  $ABCD$  – ромб.

Доказать:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ .

Доказательство:

1)  $AC$ ,  $BD$  – диагонали;  $\triangle AOD = \triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD$  – прямоугольные.

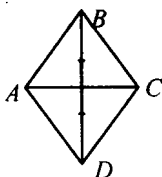
В  $\triangle ABO$ :  $S_{ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot OB$ , где  $AO = \frac{1}{2} AC$ ;  $BO = \frac{1}{2} BD$ .

2)  $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABO} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB = 2 \cdot \frac{1}{4} (AC \cdot BD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , что и требовалось доказать.

а)  $d_1 = 3,2$  дм,  $d_2 = 14$  см, следовательно,  $S = \frac{1}{2} 32 \cdot 14 = 224 \text{ см}^2$ ;

б)  $d_1 = 4,6$  дм,  $d_2 = 2$  дм, следовательно,  $S = \frac{1}{2} 4,6 \cdot 2 = 4,6 \text{ дм}^2$ .

**477.**



Дано:  $ABCD$  – ромб;  
 $S_{ABCD} = 27 \text{ см}^2$ ;  
 $AC < BD$  в 1,5 раза;  
 $AC, BD = ?$

Решение:

Пусть  $AC = x$  см, тогда  $BD = 1,5x$  см;

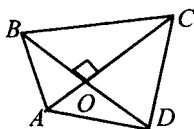
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \Rightarrow 27 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1,5x, \text{ тогда}$$

$$x^2 = 36; x = 6;$$

$$AC = 6 \text{ см}, BD = 9 \text{ см}.$$

Ответ: 6 см, 9 см.

**478.**



Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;  
 $BD \perp AC$ .

$$\text{Доказать: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

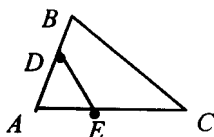
Доказательство:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{DOA};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA);$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AO \cdot (OB + OD) + \frac{1}{2} OC \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2} AO \cdot BD + \frac{1}{2} OC \cdot BD = \frac{1}{2} BD \cdot AC.$$

479.



а)  $AB = 5\text{ см}$ ,  $AC = 6\text{ см}$ ,  
 $AD = 3\text{ см}$ ,  $AE = 2\text{ см}$ ,  
 $S_{ABC} = 10\text{ см}^2$   
 $S_{ADE} = ?$   
 $\angle A$  – общий, значит:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} \text{ т.е.}$$

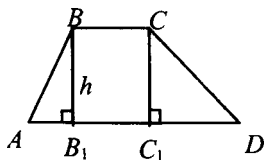
$$\frac{10}{S_{\triangle ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2}, S_{\triangle ADE} = 2\text{ см};$$

б)  $AB = 8\text{ см}$ ,  $AC = 3\text{ см}$ ,  $AE = 2\text{ см}$ ,  $S_{ADE} = 10\text{ см}^2$ ,  $AD = ?$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{AD \cdot 2}{8 \cdot 3}, \text{ откуда } AD = 2,4\text{ см}.$$

480.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AD + CB) \cdot h;$$

а)  $AD = 21\text{ см}$ ,  $CB = 17\text{ см}$ ,  
 $h = 7\text{ см}$ , следовательно,

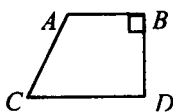
$$S = \frac{1}{2} (21 + 17) \cdot 7 = 133\text{ см};$$

б)  $\angle D = 30^\circ$ ,  $BC = 2\text{ см}$ ,  $AD = 10\text{ см}$ ,  $DC = 8\text{ см}$ ,  $S = ?$

Рассмотрим  $\triangle DCC_1$ :  $\angle C_1 = 90^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ , следовательно,

$$CC_1 = \frac{1}{2} CD, CC_1 = 4\text{ см}, \text{ т.к. } CC_1 = h, \text{ то } h = 4\text{ см}.$$

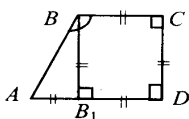
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (2+10) \cdot 4 = 24\text{ см}^2.$$



в)  $AB = 5\text{ см}$ ,  $BC = 8\text{ см}$ ,  $CD = 13\text{ см}$ ,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (5 + 13) \cdot 8 = 72\text{ см}^2.$$

481.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $\angle D = 90^\circ$ ,  $BC = CD = 6$ ;  
 $\angle B = 135^\circ$ ;  
 $S_{ABCD} = ?$

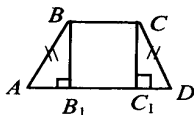
Решение:

1)  $BB_1 \perp AD$ , в  $\triangle ABB_1$ :  $\angle B_1 = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , тогда,  
 $AB_1 = CD = BB_1 = 6$  см,  
отсюда  $AD = B_1D + AB_1 = 6 + 6 = 12$  см

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} (12 + 6) \cdot 6 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $54 \text{ см}^2$ .

482.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $AB = CD$ ;  
 $\angle B = 135^\circ$ ;  
 $S = ?$

Решение:

1) В  $\triangle ABB_1$ :  $\angle B_1 = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , значит,  $AB_1 = BB_1 = 1,4$  см, также из  $\triangle CC_1D$ :  $C_1D = C_1C = 1,4$  см;

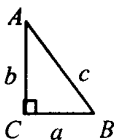
2)  $B_1C_1 = B_1D - C_1D = 3,4 - 1,4 = 2$  см. Т.к.  $B_1C_1 = BC$ , то  $BC = 2$  см;  
 $AD = AB_1 + B_1D = 1,4 + 3,4$ ,  $AD = 4,8$  см;

$$3) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} (4,8 + 2) \cdot 1,4 = 4,76 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $4,76 \text{ см}^2$ .

### § 3. Теорема Пифагора

483.



$$c^2 = a^2 + b^2;$$

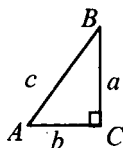
$$a) a = 6, b = 8, c^2 = 36 + 64 = 100, c = \sqrt{100} = 10;$$

$$б) a = 5, b = 6, c^2 = 25 + 36 = 61, c = \sqrt{61};$$

$$\text{в) } a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}, c^2 = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}, c = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7};$$

$$\text{г) } a = 8, b = 8\sqrt{3}, c^2 = 64 + 192 = 256, c = \sqrt{256} = 16.$$

**484.**



$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$\text{а) } a = 12, c = 13, 13^2 = 12^2 + b^2, b^2 = 25, b = \sqrt{25} = 5;$$

$$\text{б) } a = 7, c = 9, 81 = 49 + b^2, b^2 = 34, b = \sqrt{34}$$

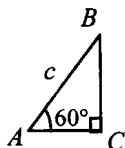
$$\text{в) } a = 12, c = 2b, 4b^2 = 144 + b^2, 3b^2 = 144;$$

$$b^2 = 48, b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{г) } a = 2\sqrt{3}, c = 2b, 4b^2 = 12 + b^2, 3b^2 = 12; b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2;$$

$$\text{д) } a = 3b, c = , 40 = 9b^2 + b^2, 10b^2 = 40; b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2.$$

**485.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = c$ ;

$BC = ?$

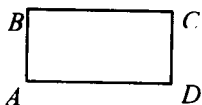
Решение:

$$1) \angle A = 60^\circ, \angle C = 90^\circ, \text{ следовательно, } \angle B = 30^\circ, \text{ значит, } AC = \frac{1}{2}c;$$

$$2) BC^2 = AB^2 - AC^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2, \text{ т.е. } BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

**486.**



$$\text{а) } AB = 5, AC = 13, AD = ?$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ отсюда}$$

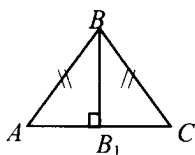
$$AD^2 = AC^2 - CD^2;$$

$$AD^2 = 169 - 25 = 144;$$

$$AD = \sqrt{144} = 12;$$

б)  $CD = 1,5$ ,  $AC = 2,5$ ,  $BC = ?$   $AC^2 = BC^2 + AB^2$ , отсюда  
 $BC^2 = AC^2 - AB^2$ ,  $BC^2 = 6,25 - 2,25 = 4$ ,  $BC = \sqrt{4} = 2$ ;  
 в)  $BD = 17$ ,  $BC = 15$ ,  $CD = ?$   $BD^2 = CD^2 + BC^2$ , отсюда  
 $CD^2 = BD^2 - BC^2$ ,  $CD^2 = 289 - 225 = 64$ ,  $CD = \sqrt{64} = 8$ .

**487.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = BC = 17$  см;  
 $AC = 16$  см,  $BB_1 \perp AC$ ;  
 $BB_1 = ?$

Решение:

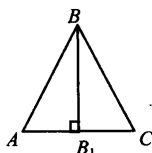
1) известно, что высота равнобедренного треугольника является медианой, следовательно,  $AB = BC = 8$  см.

2) В  $\triangle ABB_1$ :  $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ , отсюда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2, BB_1^2 = 289 - 64 = 225; BB_1 = \sqrt{225} = 15.$$

Ответ: 15 см.

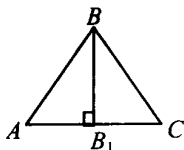
**488.**



а)  $\triangle ABC$  – равносторонний,  
 $AB = 6$  см;  
 $h = ?$

$$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2, \text{ отсюда}$$

$$BB_1^2 = AB_1^2 - AB_1^2, BB_1^2 = 36 - 9 = 27, BB_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$$



б)  $\triangle ABC$  – равносторонний,  
 $h = 4$  см;  
 $AB = ?$

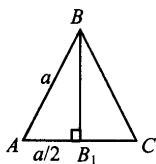
Пусть  $AB_1 = x$ , тогда  $AB = 2x$  и

$$AB_1 = BB_1^2 + AB_1^2, 4x^2 = 16 + x^2; 3x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{16}{3}, \text{ т.е. } x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$



489.



Дано:  $\triangle ABC$  – равносторонний;  
 $AB = a$ .

Доказать:  $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Доказательство:

1) В  $\triangle ABB_1$ :  $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ , отсюда

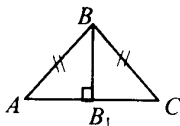
$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; BB_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

а)  $a = 5$ ,  $S_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

б)  $a = 1,2$ ,  $S_{ABC} = 0,36 \sqrt{3}$ ; в)  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$ .

490.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ;  
 $AB = ?$  и  $S_{ABC} = ?$

Решение:

а)  $AC = 12$  см,  $BB = 8$  см,  $BB_1 \perp AC$ ;

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$  (из прямоугольного  $\triangle ABB_1$ );

$$AB^2 = 64 + 36 = 100; AB = \sqrt{100} = 10;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2;$$

б)  $AC = 8$  см,  $\angle B = 120^\circ$ ;

1) В  $\triangle ABB_1$ ,  $\angle B_1 = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , значит,  $\angle A = 30^\circ$ ;

пусть  $BB_1 = x$ , тогда  $AB = 2x$ ,

$$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2; 4x^2 = 16 + x^2; 3x^2 = 16; x^2 = \frac{16}{3},$$

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ т.к. } AB = 2x, \text{ то } AB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см, а } BB_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

$$2) S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2;$$

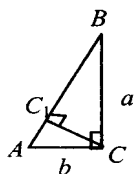
$$в) \angle B = 90^\circ, BB_1 = 7 \text{ см.}$$

В  $\triangle ABB_1$ :  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , следовательно,  
 $AB_1 = BB_1 = 7 \text{ см}$ ;  $AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$ ;  $AB^2 = 49 + 49 = 98$ ;

$$AB = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \text{ см};$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2.$$

**491.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$CC_1 \perp AB$ ;

$CC_1 = ?$

Решение:  $c^2 = a^2 + b^2$ ;

$$а) a = 5, b = 12, c = 144 + 25 = 169, c = \sqrt{169} = 13;$$

$$1) \text{ в } \triangle ACC_1: CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2;$$

в  $\triangle BCC_1$ :  $CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2$ , значит,

$$AC^2 - AC_1^2 = BC^2 - BC_1^2; 144 - x^2 = 25 - (13 - x)^2, \text{ где } AC_1 = x;$$

$$144 - x^2 = 25 - 169 + 26x - x^2;$$

$$26x = 288; x = 11 \frac{1}{13}; \text{ т.е. } AC_1 = 11 \frac{1}{13}$$

из  $\triangle ACC_1$ :  $AC^2 = CC_1^2 + AC_1^2$ , т.е.

$$2) CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2;$$

$$CC_1^2 = 144 - \left(11 \frac{1}{13}\right)^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2 = \frac{144 \cdot 169 - 144 \cdot 144}{169} = \frac{144 \cdot 25}{169}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = 4 \frac{8}{13}$$

Ответ:  $4 \frac{8}{13}$

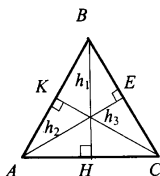
$$б) a = 12, b = 16, c = 20; 256 - x^2 = 144 - (20 - x)^2 \text{ (см. выше);}$$

$$256 - x^2 = 144 - 400 + 40x - x^2; 40x = 512; x = 12,8, \text{ где } x = AC_1;$$

$$AC_1 = 12,8 \text{ см, следовательно, } CC_1^2 = 16^2 - 12,8^2;$$

$$CC_1^2 = 3,2 \cdot 28,8 = 92,16, CC = \sqrt{92,16} = 9,6 \text{ см.}$$

492.



Дано:

$$AB = BC = 10 \text{ см};$$

$$AC = 12 \text{ см};$$

$$h_1, h_2, h_3 = ?$$

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle ABH$ :  $AB^2 = BH^2 + AH^2$ , следовательно,  
 $BH^2 = AB^2 - AH^2$ ,  $BH^2 = 100 - 36 = 64$ ,  $BH = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$ .

2) Рассмотрим  $\triangle AEC$ :  $AE^2 = AC^2 - CE^2$ ;

$\triangle ABE$ :  $AE^2 = AB^2 - BE^2$ , если  $CE = x$ , то имеем:

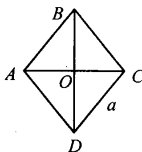
$$12^2 - x^2 = 100 - (10 - x)^2; 144 - x^2 = 100 - 100 + 20x - x^2;$$

$$20x = 44; x = 7,2 \text{ см, т.е. } x = EC = 7,2 \text{ см};$$

$$3) AE^2 = AC^2 - CE^2; AE^2 = 144 - 51,84 = 92,16; AE = \sqrt{92,16} = 9,6.$$

Ответ:  $h_2 = h_3 = 9,6 \text{ см}$ ,  $h_1 = 8 \text{ см}$ .

493.



Дано: ABCD – ромб;

$$AC = 10 \text{ см}, BD = 24 \text{ см};$$

$$S = ?, AB = ?$$

Решение:

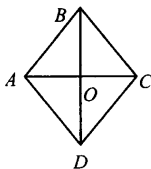
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ см}^2.$$

Рассмотрим  $\triangle ABO$ :  $AB^2 = AO^2 + BO^2$ ,  $AB^2 = 5^2 + 12^2$ ;

$$AB = \sqrt{169} = 13 \text{ см}.$$

Ответ:  $13 \text{ см}$ ;  $120 \text{ см}^2$ .

494.



Дано: ABCD – ромб;

$$AB = 10 \text{ см}, AC = 12 \text{ см};$$

$$S = ?, BD = ?$$

Решение:

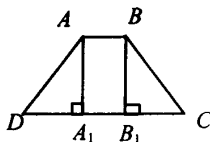
Рассмотрим  $\triangle ABO$ :  $BO^2 = AB^2 - AO^2$ ;  $BO^2 = 100 - 36 = 64$ ;

$BO = \sqrt{64} = 8$  см, т.к.  $BD = 2BO$ , то  $BD = 16$  см;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD; S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ см}^2.$$

Ответ: 16 см; 96 см<sup>2</sup>.

**495.**



Дано: ABCD – трапеция;

$AB \parallel CD$ ;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

а)  $AB = 10$  см,  $BC = DA = 13$  см,  $CD = 20$  см,

по усл.  $DA = BC$ , следовательно,  $\triangle ADA_1 = \triangle BCB_1$  по катету и гипотенузе, где  $AA_1^2 = AD^2 - DA_1^2$ ;  $AA_1^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ ,

$AA_1 = \sqrt{144} = 12$  см;

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC) \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot (10 + 20) \cdot 12 = 180 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см<sup>2</sup>.

б)  $\angle C = \angle D = 60^\circ$ ,  $AB = BC = 8$  см.

Рассмотрим  $\triangle BCB_1$ :  $\angle B_1 = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , следовательно-

но,  $B_1C = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$  см;

имеем:  $\triangle DAA_1 = \triangle CBB_1$ , значит  $DA_1 = 4$  см;

$DC = DA_1 + B_1C + A_1B_1$ ;  $DC = 4 + 4 + 8 = 16$  см; из  $\triangle BB_1C$  имеем:

$$BB_1^2 = BC^2 - B_1C^2; BB_1^2 = 64 - 16 = 48; BB_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot (8 + 16) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ:  $48\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

в)  $\angle C = \angle D = 45^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $BC = 9\sqrt{2}$  см.

по усл.  $\angle C = \angle D = 45^\circ$ , значит  $\triangle DAA_1 = \triangle BCC_1$  (по катету и острому углу) т.к.  $DA_1 = A_1A = BB_1 = B_1C_1$ , то они равнобедренные

из  $\triangle AA_1D$  следует:  $AD^2 = AA_1^2 + DA_1^2$ ;

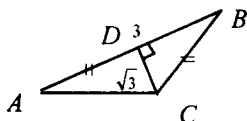
$$162 = x^2 + x^2; x^2 = 81, x = \sqrt{81} = 9; B_1C = BB_1 = 9 \text{ см};$$

$$DC = A_1B_1 + DA_1 + B_1C = 6 + 9 + 9 = 24 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot AA_1 = \frac{1}{2} (6 + 24) \cdot 9 = 135 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $135 \text{ см}^2$ .

**496.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $CD \perp AB$ ,  $AD = BC$ ;  
 $AB = 3$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ;  
 $AC = ?$

Решение:

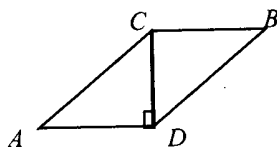
1) Пусть  $BC = AD = x$ , тогда в  $\triangle DBC$ :  $BC^2 = DC^2 + DB^2$ ;  
 $x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2 = 3 + 9 - 6x + x^2$ ;  $6x = 12$ ;  $x = 2$ ; т.е.

$BC = AD = 2 \text{ см}$ ;

2) из  $\triangle ADC$ :  $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 3 = 7$ ;  $AC = \sqrt{7}$ .

Ответ:  $\sqrt{7}$ .

**497.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  
 $BD \perp AC$ ;  
 $P_{ABCD} = 50 \text{ см}$ ;  
 $AC - AD = 1 \text{ см}$ ;  
 $CD = ?$

Решение:

1) Пусть  $AD = x \text{ см}$ , тогда  $AC = (x + 1) \text{ см}$ , поскольку

$P_{ABCD} = 2(AC + AD)$ , то  $50 = 2 \cdot (x + x + 1)$ ;

$25 = 2x + 1$ ;  $2x = 24$ ;  $x = 12$ , т.е.  $AD = 12 \text{ см}$ ,  $AC = 13 \text{ см}$ ;

2) из  $\triangle ACD$ :  $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ;

$CD^2 = 13^2 - 12^2$ ;  $CD^2 = 25$ ,  $CD = \sqrt{25} = 5 \text{ см}$ .

Ответ:  $5 \text{ см}$ .

**498.**

Является ли треугольник прямоугольным?  $a^2 + b^2 = c^2$ , где  $ab$  – катет,  $c$  – гипотенуза.

а)  $6, 8, 10$ :  $6^2 + 8^2 = 10^2$ , следовательно, да;

б)  $5, 6, 7$ :  $5^2 + 6^2 \neq 7^2$ , следовательно, нет;

в) 9, 12, 15:  $9^2 + 12^2 = 15^2$ ,

$225 = 225$ , следовательно, да;

г) 10, 24, 26:  $10^2 + 24^2 = 26^2$ ,

$676 = 676$ , следовательно, да;

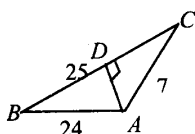
д) 3, 4, 6:  $3^2 + 4^2 \neq 6^2$ ,  $25 \neq 36$ , следовательно, нет;

е) 11, 9, 13:  $11^2 + 9^2 \neq 13^2$ ,  $202 \neq 169$ , следовательно, нет;

ж) 15, 20, 25:  $15^2 + 20^2 = 25^2$ ,

$625 = 625$ , следовательно, да.

**499.**



а) Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AB = 24\text{см}$ ,  $BC = 25\text{см}$ ,  $AC = 7\text{см}$ .

Найти: меньшую высоту.

Решение:

Высота, которая опущена на большую сторону, является меньшей.

из  $\triangle ABD$ :  $AD^2 = AB^2 - BD^2$ ;

из  $\triangle ACD$ :  $AD^2 = AC^2 - CD^2$ ;

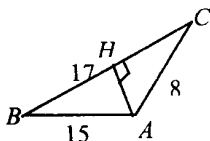
т.е.  $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ ;

$24^2 - x^2 = 7^2 - (25-x)^2$ , где  $BD = x$ ;

$50x = 1152$ ;  $x = 23,04$ ,  $x = BD = 23,04\text{ см}$ ;

$AD^2 = AB^2 - BD^2$ , т.е.

$AD^2 = 24^2 - (23,04)^2 = 45,1584$ ;  $AD = \sqrt{45,1584} = 6,72\text{см}$ .



б) Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AB = 17\text{см}$ ,  $AC = 15\text{см}$ ;

$BC = 8\text{см}$ .

$CH = ?$

Решение:

из  $\triangle ACH$ :  $HC^2 = AC^2 - AH^2$ ;

из  $\triangle BCH$ :  $HC^2 = BC^2 - BH^2$ , т.е.  $AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$ ;

$225 - x^2 = 64 - (17-x)^2$ ;  $225 - x^2 = 64 - 289 + 34 - x^2$ , где  $AH = x$ ;

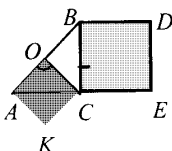
$34x = 540$ ;  $x = 13\frac{4}{17}$ , т.к.  $AH = x$ , то  $AH = 13\frac{4}{17}$

$HC^2 = AC^2 - AH^2$ ;

$$HC^2 = 15^2 - \left(13\frac{4}{17}\right)^2 = \frac{225 \cdot 64}{289}, HC = \sqrt{\frac{225 \cdot 64}{289}} = 17\frac{1}{17} \text{ см.}$$

Ответ:  $17\frac{1}{17}$  см.

**500.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC$ ;  
BDEK, AOCK – квадраты.

Доказать:  $S_{BDEK} = 2 \cdot S_{AOCK}$ .

Доказательство:

1) Пусть  $AC = BC = a$ , тогда  $S_{BDEC} = a^2$ ;

в  $\triangle AOC$ :  $OC = \frac{1}{2} AB$ , т.к.  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , то  $AB^2 = 2a^2$ , т.е.

$AB = a\sqrt{2}$ , значит,  $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , и

$$S_{AOCK} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

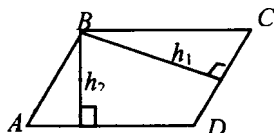
Сравнивая  $S_{BDEC} = a^2$  и  $S_{AOCK} = \frac{a^2}{2}$ , получаем  $S_{BDEC} = 2 \cdot S_{AOCK}$ .

Что и требовалось доказать.

**501.**

$$27\text{Га} = 0,27\text{км}^2 = 270000\text{м}^2.$$

**502.**



Дано: ABCD – параллелограмм;

$$P_{ABCD} = 42 \text{ см};$$

$$h_1 = 5 \text{ см}, h_2 = 4 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Решение:

1)  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$ ; т.е.  $42 = 2 \cdot (AB + AD)$ , следовательно,  
 $AB = 21 - AD$ ;

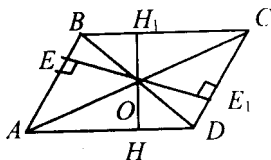
$$2) AD \cdot h_2 = AB \cdot h_1; AD \cdot 4 = (21 - AD) \cdot 5;$$

$$AD = 11 \frac{2}{3}, \text{ значит, } AB = 21 - 11 \frac{2}{3} = 9 \frac{1}{3} \text{ см};$$

$$3) S_{ABCD} = AD \cdot h_2 = 11 \frac{2}{3} \cdot 4 = 46 \frac{2}{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{Ответ: } 46 \frac{2}{3} \text{ см}^2.$$

**503.**



Дано: ABCD – параллелограмм;

$$S_{ABCD} = 24 \text{ см}^2;$$

$$OH \perp AD, OH = 2 \text{ см};$$

$$OE \perp AB, OE = 3 \text{ см};$$

$$P_{ABCD} = ?$$

Решение:

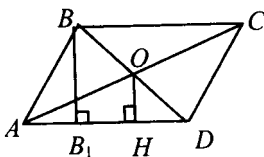
$$S_{ABCD} = HH_1 \cdot AD; 24 = 4 \cdot AD; AD = 6 \text{ см, также}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot EE_1; 24 = AB \cdot 6; AB = 4 \text{ см};$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (6 + 4) = 20 \text{ см.}$$

Ответ: 20 см.

**504.**



Дано: ABCD – параллелограмм;

$$AB = 29 \text{ см, } OH \perp AD,$$

$$AH = 33 \text{ см, } HD = 12 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Решение:

$$1) BB_1 \perp AD, \text{ в } \triangle BDB_1: \text{ по свойству диагоналей } BO = OD;$$

$$B_1H \perp BB_1 \text{ (т.к. } B_1B \perp AD, OH \perp AD), \text{ по теореме Фалеса имеем:}$$

$$HD = HB_1 = 12 \text{ см.}$$

$$2) \text{ В } \triangle ABB_1: BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 29^2 - (33 - 12)^2 = 400;$$

$$BB_1 = \sqrt{400} = 20 \text{ см; } AD = AH + HD = 45 \text{ см};$$

$$3) S_{ABCD} = AD \cdot BB_1; S_{ABCD} = 45 \cdot 20 = 900 \text{ см}^2.$$

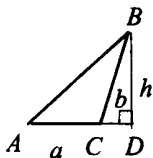
Ответ: 900 см<sup>2</sup>.



505.

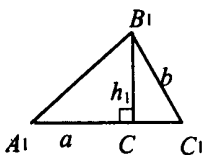
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$$

1)



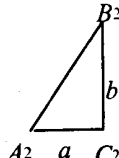
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h;$$

2)



$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} a \cdot h_1;$$

3)



$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

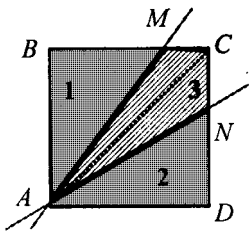
В случаях 1) и 2)  $h$  и  $h_1 < b$ , (в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета).

Сравнивая правые части формул, имеем:

$$\frac{1}{2} a \cdot h < \frac{1}{2} a \cdot b; \quad \frac{1}{2} a \cdot h_1 < \frac{1}{2} a \cdot b, \text{ следовательно,}$$

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} a \cdot b - \text{наибольшая.}$$

506.



Пусть  $AB = a$ , тогда  $S_1 = \frac{1}{2} BM \cdot AB$ ,

$$S_2 = \frac{1}{2} DN \cdot AD, \quad S_3 = S_{ABCD} - 2 \cdot S_1.$$

Пусть  $M \in BC$ , тогда  $BM = \frac{2}{3} BC$ , а

$N \in CD$ , тогда  $DN = \frac{2}{3} CD$ , значит,

$AM$ ,  $AN$  – искомые прямые.

$$\text{Имеем: } S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} a \cdot BM, \quad S_{\Delta ADN} = \frac{1}{2} a \cdot DN,$$

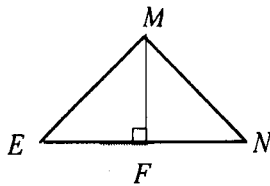
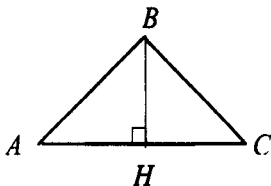
$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} a \cdot MC, \quad S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2} a \cdot CN, \text{ т.е. } DN = BM = MC + CN,$$

следовательно,  $(BC + CD)$  делим на 6 равных частей, именно:

$BC$  и  $CD$  на 3 равные части, т.е.  $BM = \frac{2}{3} BC$  и  $DN = \frac{2}{3} CD$ .

507.

В  $\triangle ABC$ :  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 14$  см;  
в  $\triangle EMN$ :  $EM = MN = EN = 12$  см;



а) из прямоугольного  $\triangle ABH$ :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2;$$

$$BH^2 = 169 - 49 = 120;$$

$$BH = \sqrt{120} = 2\sqrt{30};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2\sqrt{30} = 14\sqrt{30} \text{ см}^2;$$

б) из прямоугольного  $\triangle EMF$ :

$$MF^2 = EM^2 - EF^2;$$

$$MF^2 = 144 - 36 = 108;$$

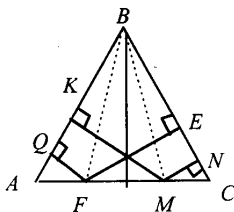
$$MF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3};$$

$$S_{EMN} = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot MF;$$

$$S_{EMN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ см}^2;$$

т.к.  $14\sqrt{30} > 36\sqrt{3}$ , то  $4S_{ABC} > S_{EMN}$ .

508.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ;

$MN \perp BC$ ,  $MK \perp AB$ ;

$FE \perp BC$ ,  $FQ \perp AB$ .

Доказать:  $NM + MK = EF + FQ$ .

Доказательство:

1)  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC}$  также

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FBC}$ , т.е.

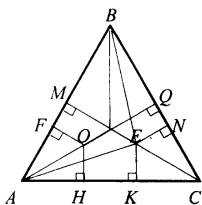
$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FBC}$  или

$$\frac{1}{2} BC \cdot MN + \frac{1}{2} AB \cdot MK = \frac{1}{2} AB \cdot FQ + \frac{1}{2} BC \cdot EF,$$

$$AB \cdot (MN + MK) = AB \cdot (FQ + FE),$$

т.е.  $MN + MK = FQ + FE$ .

509.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = BC = AC$ ;  
 $EN \perp BC, EK \perp AC, EM \perp AB$ ;  
 $OQ \perp BC, OH \perp AC, OF \perp AB$ .  
 Доказать:  $EN + EK + EM =$   
 $= OQ + OH + OF$ .

Доказательство:

1)  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE}$ , также  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$ ,

т.е.  $S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$  или

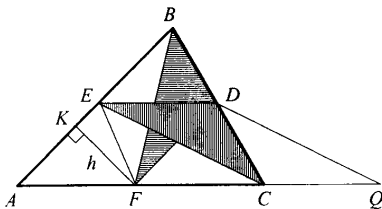
$$\frac{1}{2} AC \cdot EK + \frac{1}{2} BC \cdot EN + \frac{1}{2} AB \cdot EM = \frac{1}{2} AC \cdot OH + \frac{1}{2} BC \cdot OQ +$$

$$+ \frac{1}{2} AB \cdot OF, \text{ имеем:}$$

$$AC \cdot EK + EN \cdot BC + AB \cdot EM = AC \cdot OH + BC \cdot OQ + OF \cdot AB$$

Что и требовалось доказать.

510.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $D \in BC$ ;  
 $ED \parallel AC, DF \parallel AB$ .  
 Доказать:  $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BDF}$ .

Доказательство:

1) Проведем  $FK \perp BD$ , имеем  $FKBD$  и  $AEDF$  – параллелограммы.

$S_{\triangle AEDF} = AE \cdot h, S_{\triangle FKDB} = KB \cdot h, AE = KB$ , следовательно,

$$S_{\triangle AEDF} = S_{\triangle FKDB};$$

$$\triangle FBD = \frac{1}{2} FKDB, \text{ следовательно, } S_{\triangle FBD} = \frac{1}{2} S_{\triangle FKDB} = \frac{1}{2} S_{\triangle AEDF} (1);$$

2) Проведем  $CQ \parallel ED, CQ = ED$ , имеем  $QCED$  – параллелограмм и параллелограмм  $AEDF$ , у которых стороны равны; т.е.

$$S_{\triangle QCD} = S_{\triangle AEDF};$$

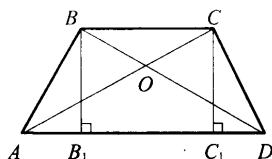
$$\triangle EDC = \frac{1}{2} \text{ параллелограмма } QCED, \text{ следовательно,}$$

$$S_{\Delta EDC} = \frac{1}{2} S_{QCED} = \frac{1}{2} S_{\Delta EDF} \quad (2);$$

3) Сравнивая (1) и (2) имеем:  $S_{\Delta EDC} = S_{\Delta FDB}$ .

Что и требовалось доказать.

**511.**



Дано: ABCD – трапеция;

$$AC \cap BD = O.$$

1) Сравнить:  $S_{\Delta ABC}$  и  $S_{\Delta ACD}$ .

2) Сравнить:  $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO}$ .

Доказать:  $AO \cdot OB = OC \cdot OD$ .

1) Сравнивая  $\Delta ABD$  и  $\Delta ACD$ , имеем:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BB_1; \quad S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CC_1, \quad BB_1 = CC_1, \text{ т.е.}$$

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD};$$

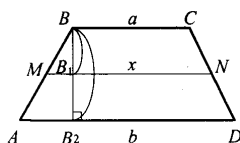
2)  $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOD}$ ;  $S_{\Delta CDO} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD}$ ;  $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO}$ ;

3) в  $\Delta AOB$  и  $\Delta COD$  вертикальные углы  $\angle AOB = \angle COD$ , следова-

тельно,  $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDO}} = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$ , т.е.  $1 = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$ , т.е.  $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ ,

что и требовалось доказать.

**512.**



Дано: ABCD – трапеция;

$$BC = a, \quad AD = b;$$

$$MN \parallel AD$$

$$S_{\Delta MND} = S_{\Delta MNC};$$

$$MN = ?$$

Решение:

Пусть  $MN = x$  см, тогда

$$1) S_{\Delta MND} = \frac{1}{2} (b + x)(h - h_1) = \frac{1}{2} (x + a)h_1, \text{ т.е.}$$

$$(h - h_1)(b + x) = (x + a)h_1; \quad h(b + x) = (a + b + 2x)h_1;$$

$$2) S_{ABCD} = S_{\Delta MND} + S_{\Delta MNC}, \text{ т.е. } \frac{1}{2} (a + b) \cdot h = (b + x)(h - h_1) + \frac{1}{2} (x + a)h_1$$

$$\text{или } (a + b) \cdot h = (b + x)h + (a - b)h_1; \quad (a - x)h = (a - b)h_1.$$

3) Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} (b+x) \cdot h = (a+b+2x) \cdot h_1; \\ (a-x) \cdot h = (a-b) \cdot h_1 \end{cases}$$

$$(a-x)(a+b+2x) = (b+x)(a-x);$$

$$a^2 + ab + 2ax - ax - bx - 2x^2 = ab + ax - b^2 - bx, a^2 - 2x^2 + b^2 = 0;$$

$$2x^2 = a^2 + b^2 = 0; \text{ т.е. } x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ а } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$\text{Ответ: } MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

**513.**

Дано: ABCD – ромб;

$$d_1 = 18\text{м}, d_2 = 24\text{м};$$

$$P_{ABCD} = ?, h = ?$$

Решение:

$$1) S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24 = 216\text{м}.$$

$$2) \text{ Из } \triangle ABO: AB^2 = AO^2 + BO^2, \text{ т.е.}$$

$$AB^2 = 9^2 + 12^2; AB^2 = 225; AB = \sqrt{225} = 15\text{м};$$

$$3) S_{ABCD} = h \cdot AB; 216 = h \cdot 15; h = 14,4\text{м};$$

$$4) P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 15 = 60\text{м}.$$

Ответ: 60м, 14,4 м.

**514.**

Дано: ABCD – ромб,  $S_{ABCD} = 540\text{см}$ ,  $d = 4,5\text{дм}$ ,  $OH \perp AB$ ;

$OH = ?$

Решение:

$$1) S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2; \text{ т.е. } 540 = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot d_2; \text{ отсюда } d_2 = 24\text{м};$$

$$AO = \frac{1}{2} d_1 = 22,5\text{см}; OB = \frac{1}{2} d_2 = 12\text{м};$$

$$2) \text{ из } \triangle ABO: AB^2 = AO^2 + OB^2;$$

$$AB^2 = 506,25 + 144 = 650,25; AB = \sqrt{650,25} = 25,5\text{ м};$$

$$3) S_{ABCD} = HH_1 \cdot AB; 540 = HH_1 \cdot 22,5;$$

$$HH_1 = 21 \frac{3}{17}, HO = \frac{1}{2} HH_1 = 10 \frac{10}{17} \text{ м}.$$

**515.**

а) Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = 20\text{см}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ;

$S_{ABC} = ?$

Решение:

1) из  $\triangle ABM$ :  $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , следовательно,  $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10\text{см}$ .

2)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 20\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}\text{см}$ ;

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 400 - 100 = 300$ ,  $AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\text{см}$ ,

значит  $AC = 20\sqrt{3}\text{см}$ .

б) Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ;  $AN \perp BC$ ,  $AN = 6\text{см}$ ,  $\angle CAN = 45^\circ$

Найти:  $S_{ABC} = ?$

Решение:

1) в  $\triangle AMC$ :  $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle A = 45^\circ$ , значит,  $\angle C = 45^\circ$ , следовательно,  $AN = NC = 6\text{см}$ ;

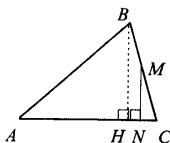
$AC^2 = AN^2 + NC^2 = 36 + 36 = 72$ , следовательно  $AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ ;

2)  $\angle C = 45^\circ$  и  $AB = BC$ , следовательно  $\angle BAC = 45^\circ$ , значит  $\triangle ABC$  – прямоугольный, значит,  $AN$  и  $AB$  совпадают, следовательно,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AN \cdot NC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\text{см}^2$ .

Ответ:  $18\text{см}^2$ .

**516.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC = 34\text{см}$ ;

$MN \perp AC$ ,  $BM = MC$ ;

$AN = 25\text{см}$ ,  $NC = 15\text{см}$ ;

$S_{ABC} = ?$

Решение:

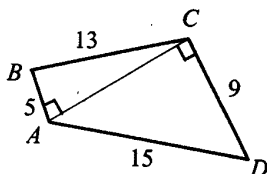
1)  $BH \perp AC$ ; из  $\triangle BCH$ :  $BM = MC$ ,  $MN \parallel BH$ , значит,  $NC = NH = 15\text{см}$ ;

2) из  $\triangle BCH$ :  $BC^2 = BH^2 + HC^2$ , т.е.  $BH^2 = BC^2 - HC^2$ ,  
 $BH^2 = 34^2 - 30^2 = 256$ ,  $BH = \sqrt{256} = 16\text{см}$ ;

2)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 16 = 320\text{см}^2$ .

Ответ:  $320\text{см}^2$ .

517.



Дано: ABCD – четырехугольник;  
 $AB = 5\text{ см}$ ,  $BC = 13\text{ см}$ ;  
 $CD = 9\text{ см}$ ,  $DA = 15\text{ см}$ ,  $AC = 12\text{ см}$ ;  
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:  $BC^2 = BA^2 + AC^2$ , т.е.  $AC^2 = BC^2 - BA^2$ .

Т.к.  $AB^2 = 25$ ,  $BC^2 = 169$  (по усл.), то  $AC^2 = 169 - 25 = 144$ .

Т.к.  $CD^2 = 81$ ,  $AD^2 = 225$  (по усл.), то  $AC^2 = 225 - 81 = 144$ ,

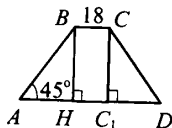
следовательно,  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$  – прямоугольные, имеющие общую сторону  $AC = 12\text{ см}$ .

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AC + \frac{1}{2} AC \cdot CD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 12 + 9 \cdot 12) = 98 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $98 \text{ см}^2$ .

518.



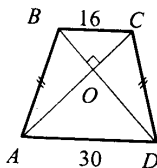
а) Дано: ABCD – трапеция;  
 $AB = CD$ ,  $BC = 18\text{ см}$ ;  
 $BH = 9\text{ см}$ ,  $\angle A = 45^\circ$ ;  
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) из  $\triangle ABH$ :  $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle A = 45^\circ$ , значит,  $\angle B = 45^\circ$ , значит,  $HB = AH = 9\text{ см}$ ;

ABCD – равнобедр., значит  $AH = C_1D = 9\text{ см}$  и  $AD = 36\text{ см}$ .

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2} (18 + 36) \cdot 9 = 243 \text{ см}^2.$$



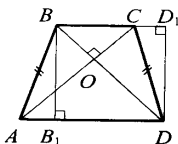
б) Дано: ABCD – трапеция;  
 $AB = CD$ ;  
 $AB = 16\text{ см}$ ,  $AD = 30\text{ см}$ ;  
 $AC \perp BD$ ;  
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) ABCD – равнобедр., значит,  $BD = AC$  и  $OD = AO$ ;  $BO = OC$ ;  
из  $\triangle BOC$ :  $BO^2 + OC^2 = 16^2$ ;  $2x^2 = 256$ ;  $x = 8\sqrt{2}$ , где  $x = BO = OC$ ;  
в  $\triangle AOD$ :  $AO^2 + OD^2 = AD^2$ ;  $2y^2 = 900$ ;  $y = 15\sqrt{2}$ , где  $y = AO = OD$ ;  
 $AC = AO + OC = 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$ ;

2)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , т.е.  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 23\sqrt{2} = 529 \text{ см}^2$ .

**519.**



Дано: ABCD – трапеция;

$AC \perp BD$ ;

$BB_1 \perp AD$ ,  $BB_1 = h$ ;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) Проведем:  $DD_1 \perp BC$ , имеем  $BB_1DD_1$  – прямоугольник;

$S_{B_1BD_1} = S_{ABCD}$  (т.к.  $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CDD_1}$ ,  $S_{B_1BCD_1}$  – общая).

2) Надо доказать, что  $BB_1DD_1$  – квадрат,

т.к. ABCD – параллелограмм, то  $AC = B_1D_1$ ;

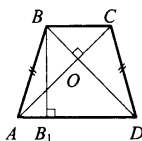
из  $BD \perp AC$ ,  $AC \parallel B_1D_1$  следует, что  $BD \perp B_1D_1$ ,  $BD = B_1D_1$ ,

но т.к. четырехугольник, диагонали которого равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам – квадрат, то

$BB_1 = BD_1 = h$ ;  $= S_{B_1BD_1} = S_{ABCD} = h^2$ .

Ответ:  $h^2$

**520.**



Дано: ABCD – равнобедренная трапеция;

$AC \perp BD$ ,  $AB = CD$ ;

$AD + BC = 2a$ ;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

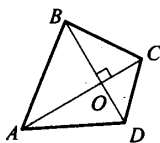
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BB_1$ ,  $S_{ABCD} = BB_1^2$  (см. 519), следовательно,

$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot BB_1 = BB_1^2$ , где  $a = BB_1$ , т.е.  $S_{ABCD} = a^2$ .

Ответ:  $S_{ABCD} = a^2$ .



521.



Дано: ABCD – четырехугольник;

$AC \perp BD$ .

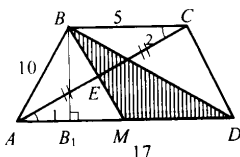
Доказать:  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ .

Доказательство:

Рассмотрим  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$  и  $\triangle AOD$ .

$AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) + (BO^2 + OC^2) = (AO^2 + BO^2) + (OD^2 + OC^2) = AB^2 + CD^2$  (по теореме Пифагора).

522.



Дано: ABCD – трапеция;

$AB = CD$ ;

$AD = 17$  см,  $BC = 5$  см;

$AB = 10$  см;

$BM \cap AC = E$ ,  $AE = EC$ ;

$S_{BDM} = ?$

Решение:

1) из  $\triangle ABB_1$ :  $BB_1^2 = AB^2 - AB^2 = 10^2 - ((17-5):2)^2 = 100 - 36 = 64$ ,

$BB_1 = \sqrt{64} = 8$  см;

2) из  $\triangle AEM$  и  $\triangle BEC$ :  $AE = EC$ ,  $\angle AEM = \angle BEC$ ,

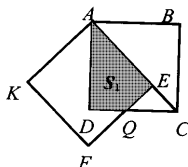
$\angle 1 = \angle 2$  (как накрест лежащие при  $AD \parallel BC$  и сек. AC), значит,  $\triangle BEC = \triangle AEM$  (по стороне и 2 прилежащим углам), и  $AM = BC = 5$  см,

$MD = AD - AM = 17 - 5 = 12$  см;

3)  $S_{BDM} = \frac{1}{2} MD \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2$ .

Ответ:  $48 \text{ см}^2$ .

523.



Дано: ABCD, AEFK – квадраты;

$AB = AE = a$ ;

$S_1 = ?$

Решение:

1) из прямоугольного  $\triangle ABC$ :  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$ , т.е.

$AC = a\sqrt{2}$ ;

$$2) EC = AC - AE = a\sqrt{2} - a;$$

$$3) S_{ECQ} = \frac{1}{2} EC \cdot EQ, \text{ но } EC = EQ, \text{ следовательно, } S_{ECQ} = \frac{1}{2} (EC)^2;$$

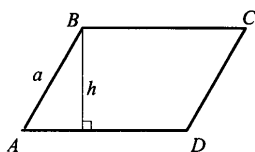
$$S_{ECQ} = \frac{1}{2} a^2 (\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{(3 - 2\sqrt{2}) \cdot a^2}{2}$$

$$S_1 = S_{ABC} - S_{ECQ} = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} (3 - 2\sqrt{2}) a^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \frac{3}{2} a^2 + \sqrt{2} a^2 = a^2 (\sqrt{2} - 1).$$

Ответ:  $a^2 (\sqrt{2} - 1)$ .

**524.**



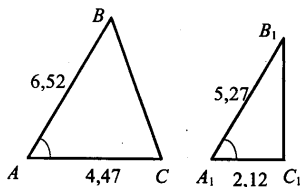
Дано: ABCD – параллелограмм;  
 $a = 11,735$  м;  
 $h < a$  на 3,485 м;  
 $S = ?$

Решение:

$S_{ABCD} = a \cdot h$ ;  $h$  (по условию)  $= 11,735 - 3,485 = 8,25$  м; следовательно-  
но  $S = 11,735 \cdot 8,25 = 96,8138$  м<sup>2</sup>;

а)  $S \approx 96,814$  м<sup>2</sup>, б)  $S \approx 96,81$  м<sup>2</sup>, в)  $S \approx 96,8$  м<sup>2</sup>.

**525.**



Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ;

$$\angle A = \angle A_1;$$

$$AB = 6,52 \text{ см}, AC = 4,47 \text{ см};$$

$$A_1B_1 = 5,27 \text{ см};$$

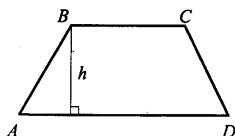
$$A_1C_1 = 2,12 \text{ см}.$$

Найти:  $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle A_1B_1C_1} - ?$

Решение:

т.к.  $\angle A = \angle A_1$ , то  $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle A_1B_1C_1} = 6,52 \cdot 4,47 / 5,27 \cdot 2,12 \approx 2,61$ .

**526.**



Дано: ABCD – трапеция;

$$BC = 1,17 \text{ дм}, AD = 3,58 \text{ см};$$

$$h = 2,33 \text{ дм}.$$

Найти:  $S_{ABCD} - ?$

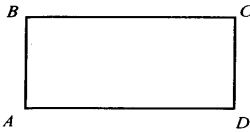
Решение:

$$S = (AD + BC) \cdot h;$$

$$S = \frac{1}{2} (1,17 + 3,58) \cdot 2,33 = 2,375 \cdot 2,33 = 5,53375 \approx 5,53 \text{ дм}^2.$$

Ответ:  $5,53 \text{ дм}^2$ .

**527.**



Дано:  $S_{ABCD} = 17,635 \text{ см}^2$ ;

$AB = 5,28 \text{ см}$ .

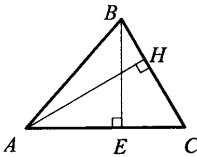
Найти:  $AD$  – ?

Решение:

$$AD = 17,635 : 5,28 = 3,3399621 \dots \text{ см};$$

а)  $AD \approx 3,34 \text{ см}$ ; б)  $AD \approx 3,3 \text{ см}$ .

**528.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$BC = 5,62 \text{ м}$ ,  $AC = 4,35 \text{ м}$ ;

$BE \perp AC$ .

Найти:  $BE$  – ?

Решение:

$$1) S_{\triangle} = \frac{1}{2} BC \cdot AH; S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 5,62 \cdot 4,35 = 12,2235 \text{ м}^2;$$

$$2) S_{\triangle} = \frac{1}{2} AC \cdot BE, \quad 12,2235 = \frac{1}{2} \cdot 4,35 \cdot BE,$$

следовательно,  $BE = 3,400139 \approx 3 \text{ м } 40 \text{ см}$ .

Ответ:  $3 \text{ м } 40 \text{ см}$ .

**529.**

$$\text{а) } a = 2,5 \text{ см}, b = 1,7 \text{ см}; S = 2,5 \cdot 1,7 = 4,25 \text{ см}^2,$$

можно  $S = (4 \pm 1) \text{ см}^2$ ;

$$\text{б) } a = 3,2 \text{ см}, b = 2,5 \text{ см}; S = 3,2 \cdot 2,5 = 8 \text{ см}^2,$$

можно  $S = (8 \pm 1) \text{ см}^2$ ;

в)  $a = 5,6\text{см}$ ,  $b = 7,2\text{см}$ ;  $S = 5,6 \cdot 7,2 = 40,32\text{см}^2$ , нет, т.к.  
 $39,05 \leq S \leq 41,61\text{см}^2$ .

**530.**

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

если  $a = 7,25$ ,  $b = 3,67$ , то

$$c^2 = 7,25^2 + 3,67^2 = 52,5625 + 13,4689;$$

$$c^2 = 66,0314; c \approx 8,13\text{см}.$$

**531.**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

а) если  $a < c$  в три раза, найти  $b$  – ?

$$a = 11,2 : 3 = 3,7333...; b^2 = c^2 - a^2;$$

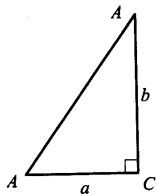
$$b^2 = 11,2^2 - \left(\frac{11,2}{3}\right)^2 = \frac{11,2^2 \cdot 9 - 11,2^2 \cdot 1}{9} = \frac{11,2^2 \cdot 8}{9} = \frac{125,44 \cdot 8}{9} = \frac{1003,52}{9} =$$

$$= 111,5022;$$

$$b = 10,559446...$$

б)  $b \approx 10\text{дм } 6\text{см} = 106\text{см}$ ; в)  $105,6\text{см}$ .

**532.**



$$a \approx 3,5\text{см}, b \approx 4,8\text{см};$$

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$c = \sqrt{3,5^2 + 4,8^2} = \sqrt{12,25 + 23,04} =$$

$$= \sqrt{35,29} \approx 5,94053.$$

а) Нельзя, т.к.  $5,80\text{ см} \leq c \leq 6,08\text{см}$ .

б) Можно, т.к.  $c = (5,9 \pm 0,2)\text{см}$ .

## Глава VII. Подобные треугольники

### § 1. Определение подобных треугольников

533.

Дано:  $AB = 15\text{см}$ ,  $CD = 20\text{см}$ ;

$$\frac{AB}{CD} = ?$$

Решение:  $\frac{AB}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Если длины отрезков выразить в миллиметрах, то их соотношение не изменится.

534.

а) имеем:  $AB = 12$  ед.,  $CD = 6$  ед.,  $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ;  $M_1M_2 = 2$  ед.;

$MM_1 = 2$  ед.;  $\frac{MM_1}{M_1M_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $\frac{CD}{AD} = \frac{MM_1}{M_1M_2}$  – пропорциональны;

б)  $AB = 9$  ед.,  $BC = 3$  ед.,  $CD = 6$  ед.

$MM_2 = 3$  ед.,  $MM_1 = 1$  ед.,  $M_1M_2 = 2$  ед.

$$\frac{AB}{MM_2} = 3; \frac{BC}{MM_1} = 3; \frac{CD}{M_1M_2} = 3.$$

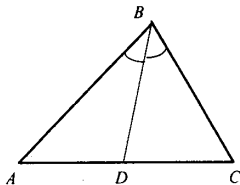
Т.е.  $\frac{AB}{MM_2} = \frac{BC}{MM_1} = \frac{CD}{M_1M_2}$  – пропорциональны.

в)  $AB = 9$  ед.,  $BD = 9$  ед.;  $MM_1 = 1$  ед.;  $M_1M_2 = 2$  ед.;

$$\frac{AB}{MM_1} = 9; \frac{BD}{M_1M_2} = 4,5.$$

Т.е.  $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$ , следовательно, отрезки непропорциональны.

536.



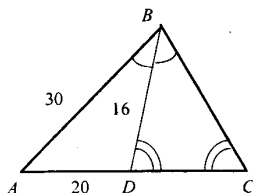
а) Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $BD$  – биссектриса,  
 $BC = 9\text{см}$ ,  
 $DC = 4,5\text{см}$ ;  
 $AD = 7,5\text{см}$ ;  
 $AB = ?$

Решение:

BD – биссектриса, следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}; \frac{7,5}{AB} = \frac{4,5}{9}; \frac{5}{AB} = \frac{3}{9}; AB = 15.$$

Ответ: 15 см.



б) Дано:  $\triangle ABC$ ;  
BD – биссектриса;  
AB = 30, AD = 20,  
BD = 16;  
 $\angle BDC = \angle C$ ;  
DC = ?

Решение:

1) BD – биссектриса, следовательно,  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{30}{20}$ , т.е.

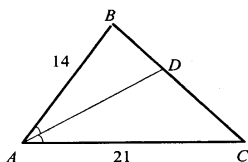
$$\frac{BC}{DC} = \frac{3}{2}, BC = 3x, DC = 2x;$$

2)  $\angle BDC = \angle C$ , BD = BC, значит,  $16 = 3x$ ,  $x = 5\frac{1}{3}$ ,  $BC = 3 \cdot x = 5$ ;

$$3) DC = 2 \cdot x = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Ответ:  $10\frac{2}{3}$

**537.**



Дано:  $\triangle ABC$   
AD – биссектриса;  
AB = 14 см, BC = 20 см;  
AC = 21 см;  
BD и DC = ?

Решение:

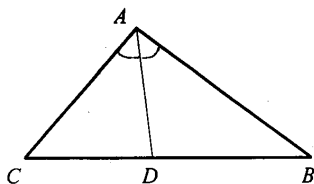
AD – биссектриса, следовательно,  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

Пусть DC = x см, тогда BD = 20 – x см,  $\frac{x}{21} = \frac{20-x}{14}$ ;

$$2x = 60 - 3x; x = 12; x = DC = 12 \text{ см}; BD = 20 - x = 20 - 12 = 8 \text{ см}.$$

Ответ: BD = 8 см, DC = 12 см.

538.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AD$  – биссектриса;  
 $CD = 4,5\text{см}$ ,  $BD = 13,5\text{см}$ ;  
 $P_{ABC} = 42\text{см}$ ;  
 $AB$  и  $AC = ?$

Решение:

$$CB = CD + DB = 4,5 + 13,5 = 18\text{см};$$

$$P_{ABC} = AB + BC + CA = AC + AB + 18 = 42, \text{ т.е.}$$

$$AC + AB = 24 \quad (1);$$

$$3) \text{ } AD - \text{биссектриса, следовательно, } \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{DB},$$

$$\frac{AC}{4,5} = \frac{AB}{13,5}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{4,5}{13,5} = \frac{1}{3} \quad (2).$$

$$\text{Т.е. } AC = x, AB = 3x.$$

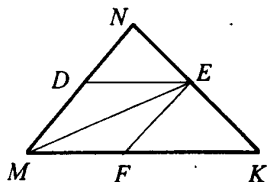
4) Подставляя (2) в (1), имеем:

$$x + 3x = 24, \quad 4x = 24, \quad x = 6; \text{ т.к. } AC = x, AB = 3x, \text{ то}$$

$$AC = 6\text{см}, AB = 18\text{см}.$$

Ответ: 6; 18.

539.



Дано:  $\triangle MNK$ ;  
 $MDEF$  – ромб;  
 $D \in MN$ ,  $E \in NK$ ,  $F \in MK$ ;  
 $MN = 7\text{см}$ ,  $NK = 6\text{см}$ ,  
 $MK = 5\text{см}$ ;  
 $NE$ ,  $EK = ?$

Решение:

1)  $ME$  – диагональ ромба  $MDEF$ , следовательно,  $ME$  – биссектриса (по свойству диагоналей ромба), т.е.

$$\frac{MN}{NE} = \frac{MK}{EK} \quad (1).$$

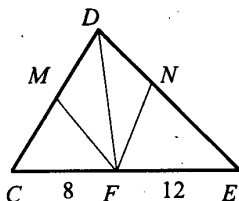
$$\text{Пусть } NE = x, \text{ тогда } EK = 6 - x, \text{ из (1) следует: } \frac{7}{x} = \frac{5}{6 - x}$$

$$7(6 - x) = 5x, \quad 12x = 42, \quad x = 3,5;$$

$$NE = 3,5\text{см}, EK = 2,5\text{см}.$$

Ответ: 3,5; 2,5.

540.



Дано:  $\triangle CDE$ ;  
 $P_{CDE} = 55$  см;  
 $DMFN$  – ромб;  
 $M \in CD, F \in CE, N \in DE$ ;  
 $CF = 8$  см,  $EF = 12$  см;  
 $CD$  и  $DE = ?$

Решение:

1)  $DF$  – диагональ ромба  $DNFM$ ,  $DF$  – биссектриса (св-во ромба),  
 следовательно:  $\frac{DC}{CF} = \frac{DE}{FE}$ ,  $\frac{DC}{8} = \frac{DE}{12}$ , т.е.  $\frac{DC}{DE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ , значит,

$DE = 3x$ .

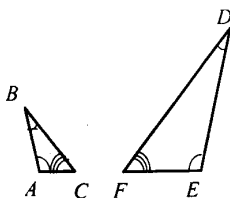
2)  $P_{CDE} = CD + DE + CE$ , т.е.

$55 = 2x + 3x + 8 + 12$ ,  $x = 7$ ;

$DC = 2 \cdot 7 = 14$  см;  $DE = 3 \cdot 7 = 21$  см.

Ответ: 14; 21.

541.



Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle DEF$ ;  
 $\angle A = 106^\circ, \angle E = 106^\circ$ ;  
 $\angle B = 34^\circ, \angle D = 34^\circ$ ;  
 $AC = 4,4$  см,  $DE = 15,6$  см;  
 $AB = 5,2$  см,  $FD = 22,8$  см;  
 $BC = 7,6$  см,  $EF = 13,2$  см.  
 Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Доказательство:

1)  $\angle A = \angle E = 106^\circ, \angle B = \angle D = 34^\circ, \angle C = \angle F = 40^\circ$ .

Все углы соответственно равны.

2)  $\frac{AC}{FE} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}, \frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3}, \frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}$ ,

$\frac{AC}{FE} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$ ;

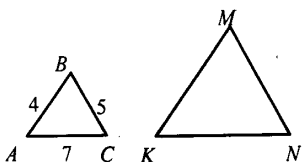
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Т.к. стороны соответственно пропорциональны с

$k = \frac{1}{3}$ , углы соответственно равны.



**542.**

Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle KMN$ ;



AB и KM, BC и MN – сходные;

AB = 4 см, BC = 5 см, CA = 7 см;

$$\frac{KM}{AB} = 2,1;$$

KM, MN, KN = ?

Решение:

1)  $\triangle ABC \sim \triangle KMN$ , следовательно,  $\frac{AM}{KM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{KN}$ ;

$$\frac{4}{KM} = \frac{5}{MN} = \frac{7}{KN}$$

2)  $\frac{KM}{AB} = 2,1$ , следовательно,  $KM = 2,1 \cdot 4 = 8,4$ ;

$$5 \cdot 2,1 = MN = 10,5; 7 \cdot 2,1 = KN; KN = 14,7.$$

Ответ: 8,4; 10,5; 14,7.

**543.**

Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказать:  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$

Доказательство:

1)  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , значит,  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ ,

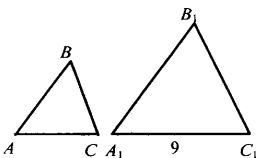
т.к.  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ ,  $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1$ , то:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1},$$

по условию  $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ , а из  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  следует:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \text{ т.е. } \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

544.



Дано:  $S_{ABC} = 75\text{м}^2$ ;

$S_{A_1B_1C_1} = 300\text{м}^2$ ;

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$A_1C_1 = 9\text{м}$ ;

$AC = ?$

Решение:

а)  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{75}{300} = k^2, k^2 = \frac{1}{4}$ ,

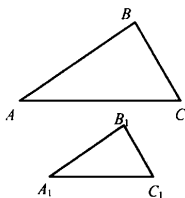
$$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

б)  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно,  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$ , где  $A_1C_1 = 9\text{ см}$ , т.е.

$AC = 4,5\text{м}$ .

Ответ: 4,5 м.

545.



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{5}$$

$S_{ABC} > S_{A_1B_1C_1}$  на  $77\text{ см}^2$ ;

$S_{ABC}, S_{A_1B_1C_1} = ?$

Решение:

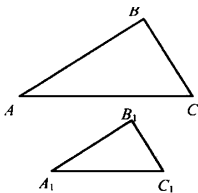
Пусть  $S_{A_1B_1C_1} = x\text{ см}^2$ , тогда  $S_{ABC} = (x+77)\text{см}^2$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  с  $k = \frac{6}{5}$ , имеем:  $\frac{x+77}{x} = \left(\frac{6}{5}\right)^2$

$25(x+77) = 36x, x = 175; S_{ABC} = 252\text{см}^2, S_{A_1B_1C_1} = 175\text{ см}^2$ .

Ответ: 252; 175.

546.



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$S_{A_1B_1C_1} = 87,5\text{см}^2$ ;

$k = 1:1000000$ ;

$S_{ABC} = ?$

Решение:

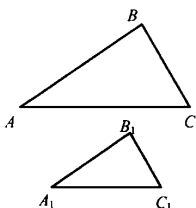
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 100000^2$ ;

$$S_{ABC} = 87,5 \cdot 10^{10} = 87,5 \cdot 10^{11} \text{ см}^2;$$

$$87,5 \cdot 10^{11} \text{ см}^2 = 87,5 \text{ км}^2.$$

Ответ:  $87,5 \text{ км}^2$ .

**547.**



Дано:  $\triangle ABC$  пропорционален  $\triangle A_1B_1C_1$  с коэффициентом  $k$ .

Доказать:  $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$ .

Доказательство:

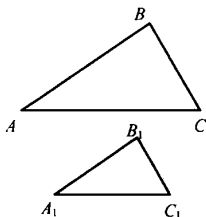
1)  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  с коэффициентом  $k$ , следовательно

$$A_1B_1 = k \cdot AB, B_1C_1 = k \cdot BC, A_1C_1 = k \cdot AC$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} &= \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \\ &= \frac{k(AB + BC + AC)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**548.**



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$$BC = 1,4 \text{ м}, B_1C_1 = 56 \text{ см};$$

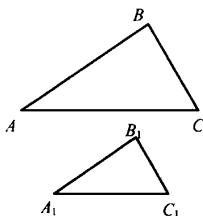
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = ?$$

Решение:

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно,  $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140}{56} = 2,5$ ;  $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 2,5$ .

Ответ:  $2,5$ .

549.



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$AB = 15\text{см}$ ,

$AC = 30\text{см}$ ;

$BC = 20\text{см}$ ;

$P_{A_1B_1C_1} = 26\text{см}$ ;

$A_1B_1$ ;  $B_1C_1$ ;  $A_1C_1 = ?$

Решение:

1)  $P_{ABC} = AB + BC + AC$ ;  $P_{ABC} = 15 + 20 + 30 = 65\text{см}$ ;

2)  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно,  $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{65}{26} = 2,5$ ,

значит,  $k = 2,5$ , т.к. треугольники пропорциональны, то

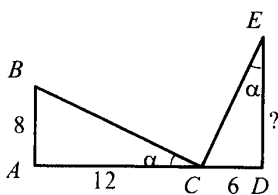
3)  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2,5$ ;  $A_1B_1 = \frac{AB}{2,5} = \frac{20}{2,5} = 6\text{см}$ ;

$B_1C_1 = \frac{20}{2,5} = 8\text{см}$ ;  $A_1C_1 = \frac{30}{2,5} = 12\text{см}$ .

Ответ: 6; 8; 12.

## § 2. Признаки подобия треугольников

550.



а) Из условия следует:

$\angle C = \angle E = \alpha$ ,

$\angle A = \angle D = 90^\circ$ ,

значит,  $\triangle ABC \sim \triangle DCE$  (по двум углам), значит

$\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DC}$ ;  $\frac{8}{6} = \frac{12}{ED}$ ,  $ED = 9$ .

б)

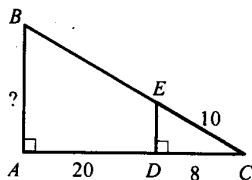
1) Из условия следует:

$\angle A = \angle D = 90^\circ$

$\angle C$  – общий, то

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$  (по двум углам),

значит, по теореме Пифагора:

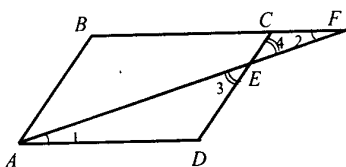


$$DE = \sqrt{100 - 64}, DE = 6;$$

$$2) \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}; \frac{AB}{6} = \frac{28}{8}; AB = 21.$$

Ответ: 9; 21

**551.**



а) Дано: ABCD – параллелограмм;  
 $E \in CD$ ,  $AE \cap BC = F$ ;  
 $DE = 8$  см,  $EC = 4$  см,  
 $BC = 7$  см,  $AE = 10$  см;  
 $EF$ ,  $FC = ?$

Решение:

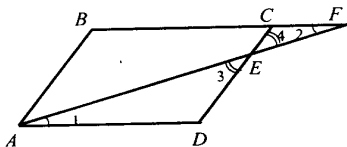
1)  $\triangle AED$  и  $\triangle FCE$ ;

$\angle 2 = \angle 1$  (накрест лежащие при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AF$ ),

$\angle 4 = \angle 3$  (вертикальные), значит,

$$\frac{AE}{FE} = \frac{AD}{FC} = \frac{DE}{CE}; \frac{10}{FE} = \frac{7}{FC} = \frac{8}{4};$$

2)  $\frac{7}{FC} = \frac{8}{4}$  и  $\frac{10}{FE} = \frac{8}{4}$ ; следовательно  $FC = 3,5$  см;  $FE = 5$  см.



б) Дано: ABCD – параллелограмм  
 $AB = 8$  см,  $AD = 5$  см,  
 $CF = 2$  см;  
 $DE$ ,  $EC = ?$

Решение:

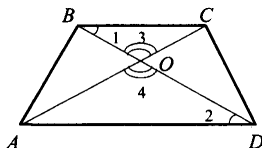
$\triangle AED$  подобен  $\triangle FED$ , значит  $\frac{DE}{EC} = \frac{AD}{FC} = \frac{AE}{FE}; \frac{DE}{EC} = \frac{5}{2}$

$DE + EC = CD = 8$  см, значит  $\frac{DE}{8 - DE} = \frac{5}{2};$

Решая это уравнение с неизвестным  $DE$ , получим

$$7DE = 40, \text{ значит } EC = 8 - 5\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7} \text{ см.}$$

**552.**



Дано: ABCD – трапеция;  
 $AC \cap BD = O$ ;  
 $OB = 4$  см,  $OD = 10$  см;  
 $DC = 25$  см;  
 $AB = ?$

Решение:

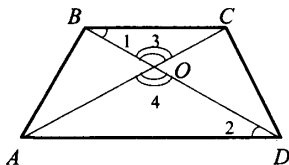
1)  $\triangle AOB$  и  $\triangle COD$ ;

$\angle 2 = \angle 1$  (накрест лежащие при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AF$ );

$\angle 4 = \angle 3$  (вертикальные), значит,

$\triangle AOB$  и  $\triangle COD$  пропорциональны (по 2 углам);

$$\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}; \quad \frac{AO}{CO} = \frac{4}{10} = \frac{AB}{25}, \text{ откуда } AB = 10 \text{ см.}$$



б) Дано:  $ABCD$  – трапеция;

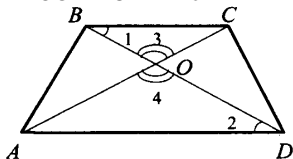
$AC \cap BD = O$ ;

$AB = a$ ,  $DC = b$ ;

$$\frac{AC}{OC} \text{ и } \frac{BO}{OD} = ?$$

Решение: 1)  $\triangle AOB \sim \triangle COD$  (см. выше), значит  $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$

Ответ:  $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{a}{b}$



в) Дано:  $ABCD$  – трапеция

$AC \cap BD = O$

$AB = 9,6 \text{ дм}$ ,  $DC = 24 \text{ см}$ ,

$BC = 15 \text{ см}$

$AO = ?$

Решение:

$\triangle AOB \sim \triangle COD$ , следовательно

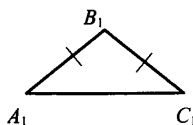
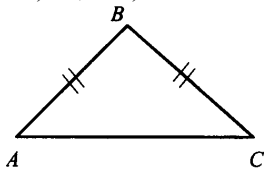
$$\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}; \quad \frac{AO}{OC} = \frac{96}{24}$$

$$AO + OC = AC = 15; \quad OC = 15 - AO$$

т.е.  $\frac{96}{24} = \frac{AO}{15 - AO}; \quad 4(15 - AO) = AO; \quad AO = 12 \text{ см.}$

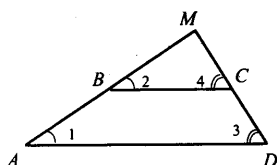
**553.**

а) да; б) да; в) да.



Треугольники равнобедренные, имеют по одному равному углу, следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника и теореме о сумме углов треугольника, находим другие углы, т.е.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по двум углам).

**554.**



Дано: ABCD – трапеция;  
 $BC = 5$  см,  $AD = 8$  см;  
 $CD = 3,6$  см,  $AB = 3,9$  см;  
 $AB \cap CD = M$ ;  
 $MC, MB = ?$

Решение:

1)  $\triangle AMD$  и  $\triangle BMC$ ;

$\angle 2 = \angle 1$  (соответственные при  $AD \parallel BC$  и секущей AB),

$\angle 4 = \angle 3$  (соответственные при  $AD \parallel BC$  и секущей DC),

значит  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$  (по двум углам), следовательно,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}. \text{ Пусть } BM = x, \text{ а } MC = y, \text{ тогда } AM = 3,9 + x,$$

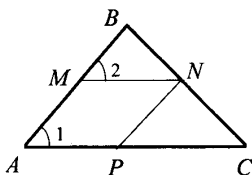
$$DM = 3,6 + y; \quad \frac{3,9 + x}{x} = \frac{3,6 + y}{y} = \frac{8}{5};$$

$$2) \quad \frac{3,9 + x}{x} = \frac{8}{5}; \quad 19,5 = 3x; \quad x = 6,5;$$

$$\frac{3,6 + y}{y} = \frac{8}{5}; \quad y = 6, \text{ т.е. } BM = 6,5 \text{ см, } MC = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6,5; 6.

**555.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $M \in AB, N \in BC; P \in CA$ ;  
 $MN \parallel AC, NP \parallel AB$ ;  
 $AB = 10$  см,  $AC = 15$  см;  
 $PN:MN = 2:3$ ;  
 $AM, MN, NP, AP = ?$

Решение:

$\triangle ABC$  и  $\triangle MBN$ ;

$\angle B$  – общий,  $\angle 2 = \angle 1$  (соответственные при  $AC \parallel MN$  и секущей AB), значит,  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$  (по двум углам).

Т.е.:  $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$  (1);

2)  $PN:MN = 2:3$ , т.е.  $PN = 2x$ ,  $MN = 3x$ ;

AMNP – параллелограмм, следовательно,  $PN = AM = 2x$ ,  
 $MN = AD = 3x$ .

3) Подставляем в (1):

$$\frac{10}{10-2x} = \frac{15x}{3x}; 10x = 5(10-2x); 20x = 50; x = 2,5;$$

$$AM = PN = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ см} \quad AP = MN = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ см}.$$

Ответ: 5; 5; 7,5; 7,5.

б) AM, MN, NP и AP = ?,  $AM = AP$ ,  $AB = a$ ,  $AC = b$ .

Решение:

1)  $AM = AP$ , следовательно, AMNP – ромб.

Пусть  $AM = x$ , тогда из  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$  следует, что

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}; \frac{b}{x} = \frac{a}{a-x};$$

$$ax = ab - bx; x = \frac{ab}{a+b}; AM = MN = NP = AP = \frac{ab}{a+b}$$

**557.**

Дано:  $\angle A$ ,  $BC \parallel DE$ ,  $CE = 10 \text{ см}$ ,  $AD = 22 \text{ см}$ ,  $BD = 8 \text{ см}$ .

Найти:  $AC = ?$

Решение:

Т.к.  $BC \parallel DE$ , значит,  $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$ , т.е.  $AB = AD - BD = 22 - 8 = 14 \text{ см}$ ;

$$\frac{14}{AC} = \frac{8}{10}; AC = 17,5 \text{ см};$$

б)  $AB = 10$ ,  $AC = 8 \text{ см}$ ,  $BC = 4 \text{ см}$ ,  $CE = 4 \text{ см}$ ;

$BD$ ,  $DE = ?$

1)  $BC \parallel DE$ , следовательно,  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}; \frac{BD}{4} = \frac{10}{8}; BD = 40:8 = 5 \text{ см}$ ;

2)  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  ( $\angle A$  – общий,  $\angle B = \angle D$

как соответственные при  $BC \parallel DE$  и секущей  $AD$ ), значит:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}; \frac{10}{15} = \frac{4}{DE}; DE = 6 \text{ см};$$

в)  $AB:BD = 2:1$ ,  $DE = 12 \text{ см}$ ;  $BC = ?$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE, \text{ значит, } \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AO};$$



$$AD = AB + BD = 3,$$

$$\frac{BC}{12} = \frac{2}{3},$$

$$3BC = 24, BC = 8\text{см.}$$

**558.**

Дано:  $a, b$  – прямые;

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1.$$

$$\text{Доказать: } \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Доказательство:

1) Проведем  $c \parallel b$  так, что  $A \in c, B_2, C_2 \in c$ .

2) В  $\triangle ABB_2$  и  $\triangle ACC_2$ :  $\angle A$  – общий

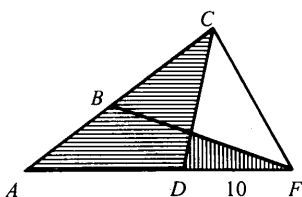
$\angle C = \angle B$  (соответственные при  $BB_1 \parallel CC_1$  и секущей  $AC$ ),  $\triangle ABB_2$  пропорционален  $\triangle ACC_2$  по двум углам,

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$$

значит,  $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$   
По свойству параллелограмма имеем:  $AB_2 = A_1B_1, B_2C_2 = B_1C_1$ , следовательно,

$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ ; по свойству пропорции  $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}$ , что и требовалось доказать.

**559.**



Дано:  $\angle A$

$$AB = 5\text{см}, AC = 16\text{см};$$

$$AD = 8\text{см}, AF = 10\text{см};$$

$$\triangle ACD \sim \triangle AFB = ?$$

Доказательство:

В  $\triangle ACD$  и  $\triangle AFB$ :

$\angle A$  – общий,

$$\text{по усл.: } \frac{AB}{AD} = \frac{5}{8}, \frac{AF}{AC} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \text{ значит,}$$

$\triangle ACD \sim \triangle AFB$  (по двум сторонам и углу между ними), что и требовалось доказать.

560.

$\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ;

а)  $AB = 3\text{ см}$ ,  $BC = 3\text{ см}$ ,  $AC = 7\text{ см}$ ;  $B_1A_1 = 4,5\text{ см}$ ;  $B_1C_1 = 7,5\text{ см}$ ;

$C_1A_1 = 10,5\text{ см}$ ;

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{4,5}{3} = \frac{3}{2}; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{7,5}{3} = \frac{5}{2}; \quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{10,5}{7} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по трем сторонам).

б)  $AB = 1,7\text{ см}$ ,  $BC = 3\text{ см}$ ,  $AC = 4,2\text{ см}$ ;

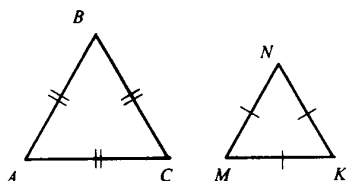
$A_1B_1 = 340\text{ см}$ ,  $B_1C_1 = 600\text{ см}$ ,  $A_1C_1 = 840\text{ см}$ ;

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{340}{1,7} = \frac{200}{1}; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{600}{3} = \frac{200}{1}; \quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{840}{4,2} = \frac{200}{1}.$$

Вывод:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по трем сторонам).

561.



Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle MNK$ ;

$AB = BC = AC$ ;

$MN = NK = MK$ ;

$\triangle ABC \sim \triangle MNK - ?$

Доказательство:

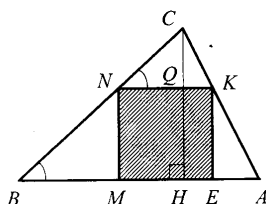
1) Т.к.  $\triangle ABC$  – равносторонний, то  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ ;

т.к.  $\triangle MNK$  – равносторонний, то  $\angle M = \angle N = \angle K = 60^\circ$ ;

2)  $\angle M = \angle N = \angle K = \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ , следовательно,

$\triangle ABC \sim \triangle MNK$  по двум углам.

562.



Дано:  $\triangle ABC$

$AB = a$ ,  $CH \perp AB$ ,  $CH = h$ ;

$MNKE$  – квадрат;

$MN = ?$

Решение:

В  $\triangle ABC$  и  $\triangle KNC$ , где  $\angle C$  – общий,  
 $\angle N = \angle B$  (соответственные при  $AB \parallel NK$  и секущей  $BC$ ),  
значит  $\triangle ABC \sim \triangle KNC$  по двум углам,

$$\text{т.е. } \frac{CH}{CQ} = \frac{AB}{NK} \quad (1).$$

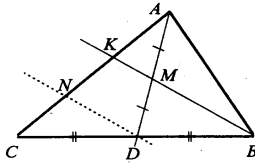
Пусть  $MN = NK = KE = ME = x$ , тогда  $CQ = h - x$ .

$$\text{Подставляя в (1), имеем: } \frac{a}{x} = \frac{h}{h - x}$$

$$a(h - x) = hx; ah = hx + ax; x = \frac{ah}{a + h} = MN.$$

$$\text{Ответ: } MN = \frac{ah}{a + h}$$

**563.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  
 $AD$  – медиана;  
 $M \in AD$ ;  
 $BM \cap AC = K$ ;  
 $\frac{AK}{KC} = ?$

Решение:

а) Проводим  $ND \parallel KB$ ,  $M$  – середина  $AD$ .

1) В  $\triangle AKM$  и  $\triangle AND$ :  $\angle A$  – общий;

$\angle N = \angle K$  (соответственные при  $KB \parallel AD$  и секущей  $AN$ ), значит,

$$\triangle AKM \sim \triangle AND \text{ (по двум углам), т.е. } \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2}$$

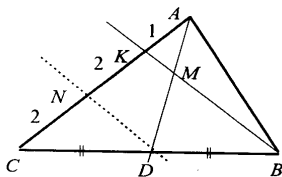
2) В  $\triangle CND$  и  $\triangle CKB$ :  $\angle C$  – общий;

$\angle B = \angle D$  (соответственные при  $ND \parallel KB$  и секущей  $DB$ ), значит,

$$\triangle CND \sim \triangle CKB \text{ (по двум углам), т.е. } \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}$$

$$3) \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}, \text{ отсюда:}$$

$$AK = NK = CN, \text{ т.е. и } \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$



$$\text{б) } \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$$

$$1) \text{ в } \triangle AKM \sim \triangle AND \quad \frac{AK}{AN} = \frac{1}{3}$$

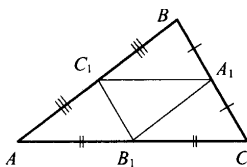
$$2) \text{ в } \triangle NCD \sim \triangle KCB \text{ (по двум уг-лам)} \quad \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}$$

$$3) \quad \frac{AK}{AN} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2}; \quad \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}, \text{ значит, } CN = NK = 2; \text{ т.е.}$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

### § 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

564.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = 8 \text{ см}$ ,

$BC = 5 \text{ см}$ ,  $AC = 7 \text{ см}$

$A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in AC$ ,  $C_1 \in AB$

$A_1, B_1, C_1$  – середины сторон

$P_{A_1 B_1 C_1} = ?$

Решение:

Т.к.  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$ ,  $A_1 C_1$  – средние линии  $\triangle ABC$ , то

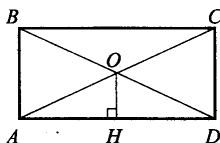
$$A_1 C_1 = \frac{1}{2} AC; \quad B_1 C_1 = \frac{1}{2} BC; \quad A_1 B_1 = \frac{1}{2} AB;$$

$$A_1 C_1 = 3,5 \text{ см}; \quad B_1 C_1 = 2,5 \text{ см}; \quad A_1 B_1 = 4 \text{ см};$$

$$P_{A_1 B_1 C_1} = A_1 B_1 + B_1 C_1 + A_1 C_1 = 3,5 + 2,5 + 4 = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см.

565.



Дано:  $ABCD$  – прямоугольник;

$AC \cap BD = O$ ;

$OH \perp AD$ ,  $OH = 2,5 \text{ см}$ ;

$AB = ?$

Решение:

1) В  $\triangle AOH$  и  $\triangle ACD$ :  $\angle A$  – общий,

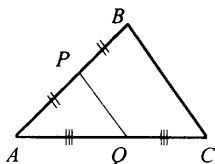
$\angle D = \angle H = 90^\circ$ , значит,  $\triangle AOH \sim \triangle ACD$ , т.е.  $\frac{AO}{OC} = \frac{OH}{CD}$ ;

O – середина AC, следовательно,  $AO = \frac{1}{2} AC$ , и  $\frac{OH}{CD} = \frac{1}{2}$ , т.е.

$2OH = CD$ ;  $CD = 2 \cdot 2,5 = 5$  см, т.к.  $CD = AB$ , то  $AB = 5$  см.

Ответ: 5 см.

**566.**



Дано:  $\triangle ABC$

$P \in AB$ ,  $AP = PB$ ;

$Q \in AC$ ,  $AQ = QC$ ;

$P_{APQ} = 21$  см;

$P_{ABC} = ?$

Решение:

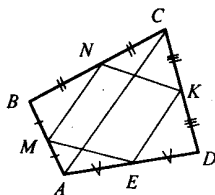
1) P и Q – середины сторон AB и AC, следовательно, PQ – средняя линия  $\triangle ABC$ ,

$$PQ = \frac{1}{2} BC;$$

$$2) P_{ABC} = AB + BC + AC = 2AP + 2PQ + 2AQ = 2P_{APQ} = 2 \cdot 21 = 42 \text{ см.}$$

Ответ: 42 см.

**567.**



Дано: ABCD – четырехугольник;

M, N, K, E – середины сторон.

Доказать: MNKE – параллелограмм.

Доказательство:

1) В  $\triangle ABC$  и  $\triangle MBN$ :  $\angle B$  – общий из условия,

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ значит,}$$

$\triangle ABC \sim \triangle MBN$  (по двум сторонам и углу между ними), т.е.

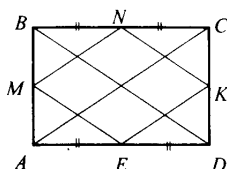
$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC.$$

2) В  $\triangle ABC$ :  $KE$  – средняя линия  $\triangle ADC$ , т.е.  $KE = \frac{1}{2} AO$  и  $KE \parallel AC$ .

3) Имеем:  $MN = KE = \frac{1}{2} AC$ ,  $AC \parallel KE \parallel MN$ , следовательно,

$MNKE$  – параллелограмм по признаку, что и требовалось доказать.

**568.**



а) Дано:  $ABCD$  – прямоугольник;  
 $M, N, K, E$  – середины сторон.  
 Доказать:  $MNKE$  – ромб.

Доказательство:

1)  $ME$  – средняя линия  $\triangle ABD$  (по определению). Значит,

$ME = \frac{1}{2} BD$  (средняя линия  $\triangle ABD$ ) и  $ME \parallel BD$ ;  $NK$  – средняя ли-

ния  $\triangle BCD$ , т.е.  $NK = \frac{1}{2} BD$  и  $BD \parallel ME \parallel NK$ .

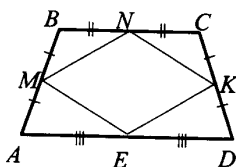
Имеем:  $NK = ME = \frac{1}{2} BD$ ,  $ME \parallel BD \parallel NK$ , значит,

$MNKE$  – параллелограмм.

2) Аналогично:

$MN = EK = \frac{1}{2} AC$ ,  $MN \parallel KE \parallel AC$ .

3) По св-ву диагоналей прямоугольника  $AC = BD$ , значит,  $ME = MN$ , т.е.  $MNKE$  – ромб (по определению), что и требовалось доказать.



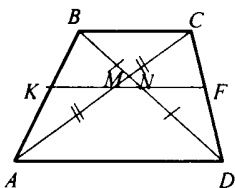
б)  $ABCD$  – равнобедренная трапеция;  
 $M, N, K, E$  – середины сторон.  
 Доказать:  $MNKE$  – ромб.

Доказательство:

Аналогично доказанному выше:

$AC = BD$  – диагонали.

**569.**



Дано:  $ABCD$  – трапеция;

$M \in AC$ ,  $AM = MC$ ;

$N \in BD$ ,  $BM = ND$ .

Доказать: 1)  $MN \parallel AD$ ;

2)  $MN = \frac{1}{2} (AD - BC)$ .

Доказательство:

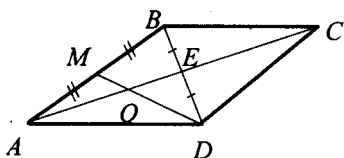
1) По теореме Фалеса: средняя линия  $KF$  трапеции  $ABCD$  проходит через середины  $AC$  и  $BD$ , следовательно,  $MN \in KF$  и  $MN \parallel AD$ .

2) Используя свойство средней линии трапеции:

$$\triangle ACD: MF = \frac{1}{2} AD; \triangle BCD: NF = \frac{1}{2} BC;$$

$$MN = MF - NF = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (AD - BC).$$

**570.**



Дано:  $ABCD$  –

параллелограмм;

$AC = 18\text{см}$ ;

$M \in AB$ ,  $AM = MB$ ;

$MD \cap AC = O$ ;

$AO$ ,  $OC = ?$

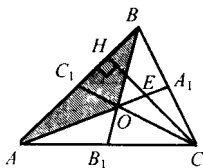
Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle ABD$ , где  $DM$ ,  $AE$  – медианы и  $AE \cap DM = O$ , из св-ва медианы получаем:  $AO:OE = 2:1$ .

2) По свойству диагонали параллелограмма  $AE = 9\text{см}$  тогда,  $AO = 6\text{см}$ ,  $OE = 3\text{см}$ , отсюда,  $OC = OE + EC = 3 + 9 = 12\text{см}$ .

Ответ:  $6\text{см}$ ,  $12\text{см}$ .

**571.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$  – медианы;

$AA_1 \cap BB_1 = O$ ;

$S_{ABO} = S$ ;

$S_{ABC} = ?$

Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH, S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot HE, \text{ имеем } \frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{CH}{HE}$$

$\Delta HCC_1$  и  $\Delta ECO$ :  $\angle C$  – общий,

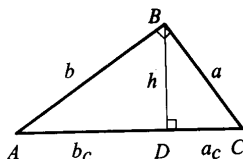
$\angle E = \angle H = 90^\circ$  (соответственные при  $AB \parallel OC$  и секущей  $CH$ ), т.е.

$\Delta HCC_1 \sim \Delta ECO$  (по двум углам), значит,

$$\frac{CC_1}{CO} = \frac{CH}{HE} = \frac{3}{2}, CH = \frac{3}{2} EC = 3HE, \text{ т.е.}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{3EH}{HE} = 3, \text{ значит, } S_{ABC} = 3S, \text{ что и требовалось доказать.}$$

**572.**



а) Дано:  $b_c = 25, a_c = 16$ ;  
 $h, a, b = ?$

Решение:

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20; \quad 2) c = b_c + a_c = 25 + 16 = 41;$$

$$3) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25}; b = 5\sqrt{41}; \quad 4) a = \sqrt{c \cdot a_c} = 4\sqrt{41}.$$

Ответ:  $20; 5\sqrt{41}; 4\sqrt{41}$ .

б) Дано:  $b_c = 36, a_c = 64$ ;

$h, a, b = ?$

Решение:

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = 6 \cdot 8 = 48;$$

$$2) c = b_c + a_c = 100;$$

$$3) a = \sqrt{a_c \cdot c} = 8 \cdot 10 = 80;$$

$$4) b = \sqrt{b_c \cdot c} = 6 \cdot 10 = 60.$$

Ответ:  $80; 48; 60$ .

в) Дано:  $b = 12, b_c = 6$ ;

$a, c, a_c = ?$

Решение:

$$1) b^2 = b_c \cdot c; c = \frac{b^2}{b_c}; \quad 2) c = b_c + a_c; a_c = c - b_c = 24 - 16 = 8;$$

$$3) a = \sqrt{a_c \cdot c} = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ:  $24; 18; 12\sqrt{3}$ .

г) Дано:  $a = 8, a_c = 4$ ;



$b, c, b_c = ?$

Решение:

$$1) a = \sqrt{a_c \cdot c}; c = a^2/a_c = 64:4 = 16;$$

$$2) c = b_c + a_c; b_c = c - a_c = 16 - 4 = 12;$$

$$3) b = \sqrt{b_c \cdot c} = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}.$$

Ответ: 16; 12;  $8\sqrt{3}$ .

д) Дано:  $a = 6, c = 9$ ;

$h, b, a_c, b_c = ?$

Решение:

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = 6 \cdot 8 = 48;$$

$$3) a = \sqrt{a_c \cdot c} = 8 \cdot 10 = 80;$$

$$2) c = b_c + a_c = 100;$$

$$4) b = \sqrt{b_c \cdot c} = 4 \cdot 10 = 60.$$

Ответ:  $2\sqrt{5}$ ;  $3\sqrt{5}$ ; 4; 5.

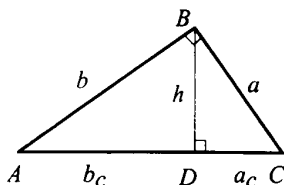
**573.**

Выразить  $a_c$  и  $b_c$  через  $a, b, c$ ;  $a^2 = b^2 + c^2$  (\*)

$$a^2 = a_c \cdot c; \quad a_c = a^2:c = a^2: \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (из (*))};$$

$$b^2 = b_c \cdot c; \quad b_c = b^2:c = b^2: \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (из(*)}).$$

**574.**



Дано:  $\triangle ABC$  – прямоугольный

Доказать:

$$1) h = \frac{ab}{c}$$

$$2) \frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$$

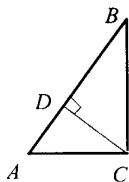
Доказательство:

$$1) b_c = \frac{b^2}{c}; a_c = \frac{a^2}{c}, \text{ отсюда, } h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}} = \frac{ab}{c}$$

$$2) b^2 = b_c \cdot c, \text{ т.е. } c = \frac{b^2}{b_c}; a^2 = a_c \cdot c, \text{ т.е. } c = \frac{a^2}{a_c},$$

имеем:  $\frac{b^2}{b_c} = \frac{a^2}{a_c}$ , что и требовалось доказать.

575.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;  
 $AC:BC = 3:4$ ;  
 $AB = 50\text{мм}$ ;  
 $CD \perp AB$ ;  
 $AD, BD = ?$

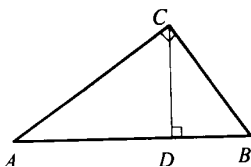
Решение:

1)  $AC = 3x$ ;  $BC = 4x$ ;  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ;  $(3x)^2 + (4x)^2 = 2500$ ;  
 $25x^2 = 2500$ ;  $x = 10$ , т.е.  $AC = 30\text{мм}$ ,  $BC = 40\text{мм}$ ;

2)  $AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{900}{50} = 18$ ;  $BD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{1600}{50} = 32$ .

Ответ: 18мм; 32 мм.

576.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;  
 $AC:BC = 6:5$ ;  
 $CD \perp AB$ ;  
 $AD > DB$  на 11см;  
 $AB = ?$

Решение:

$$1) \frac{CB^2}{DB} = \frac{AC^2}{AD}$$

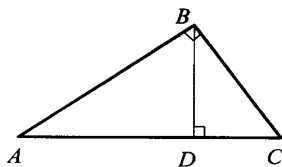
Пусть  $BD = x$  см, тогда  $AD = x + 11$  см;  $\frac{36}{x+11} = \frac{25}{x}$

$36x = 25(x+11)$ ;  $x = 25$ , т.е.  $D = 25\text{см}$ ,  $AD = 36\text{см}$ ;

2)  $AB = AD + DB = 25 + 36 = 61$  см .

Ответ: 61см.

577.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = 5\text{см}$ ,  $BC = 12\text{см}$ ;  
 $AC = 13\text{мм}$ ;  
 $BD \perp AC$ ;  
 $AD, CD = ?$

Решение:

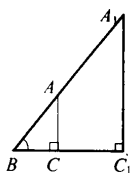
$\triangle ABC$  – прямоугольный по теореме Пифагора ( $25 + 144 = 169$ ),  
 $\angle B = 90^\circ$ .

$$2) CD = \frac{CB^2}{AC} = \frac{144}{13} = 11 \frac{1}{13}$$

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{25}{13} = 1 \frac{12}{13}$$

Ответ:  $11 \frac{1}{13}$ ;  $1 \frac{12}{13}$

**579.**



Дано:  $BC_1 = 6,3\text{м}$ ;

$BC = 3,4\text{м}$ ;

$AC = 1,7\text{м}$ ;

$A_1C_1 = ?$

Решение:

В  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1BC_1$ :  $\angle B$  – общий,

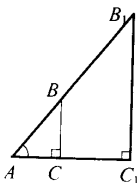
$\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$  (по двум углам), т.е.

$$\frac{AB}{A_1C_1} = \frac{BC}{BC_1}; \quad \frac{1,7}{A_1C_1} = \frac{3,4}{6,3}, \text{ отсюда}$$

$$A_1C_1 = \frac{12}{13} = 6,936.$$

Ответ: 6,936 м.

**580.**



Дано:  $AC_1 = 10,2\text{м}$ ;

$AC = 2,5\text{м}$ ;

$BC = 1,7\text{м}$ ;

$B_1C_1 = ?$

Решение:

В  $\triangle ABC$  и  $\triangle AB_1C_1$ :  $\angle A$  – общий,

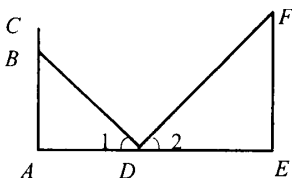
$\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$  (по двум углам),

$$\text{т.е. } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1},$$

$$\text{т.е. } B_1C_1 = \frac{17 \cdot 10,2}{2,5} = 6,936.$$

Ответ: 6,936.

**581.**



Дано:  $AC = 165\text{см};$   
 $BC = 12\text{см};$   
 $AD = 120\text{см};$   
 $DE = 4,8\text{м};$   
 $\angle 1 = \angle 2;$   
 $FE = ?$

Решение:

1) В  $\triangle ABD$  и  $\triangle FED$ :  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle A = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ABD \sim \triangle FED$  (по двум углам) и

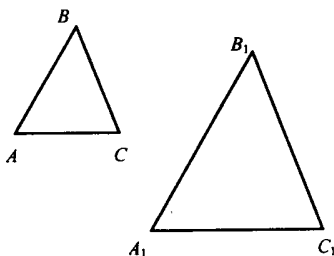
$$\frac{BD}{FD} = \frac{AD}{ED} = \frac{AB}{EF};$$

2)  $AB = AC - BC = 165 - 12 = 153\text{см};$  имеем:

$$\frac{153}{EF} = \frac{120}{480}, \text{ откуда } EF = 153 \cdot 4 = 612 \text{ см.}$$

Ответ: 612см.

**582.**



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1;$   
 $AC = 42\text{м},$   
 $A_1C_1 = 6,3\text{см};$   
 $A_1B_1 = 7,2\text{см};$   
 $AB = ?$

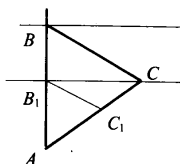
Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ следовательно, } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \frac{AB}{7,2} = \frac{4200}{6,3},$$

$$\text{отсюда: } AB = \frac{7,2 \cdot 4200}{6,3} = \frac{72 \cdot 4200}{63} = 8 \cdot 600 = 4800.$$

Ответ: 48м.

**583.**



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$AC = 100\text{м,}$

$AC_1 = 32\text{м,}$

$AB_1 = 34\text{м,}$

$BB_1 = ?$

Решение:

1)  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ , следовательно,

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}, \quad \frac{AB}{34} = \frac{100}{32}, \quad AB = \frac{34 \cdot 100}{32} = 106,25;$$

$$2) BB_1 = AB - AB_1 = 106,25 - 34 = 72,25 \text{ м.}$$

Ответ: 72,25 м.

**585.**

Дано:

**A**

**B**

Разделить на отрезки: а) 2:5;      б) 3:7;    в) 4:3.

Построение:

а) АВ делим на 7 равных частей.

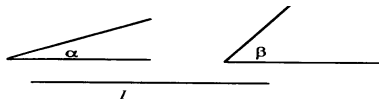
Проводим произвольный луч АС, откладываем 7 равных отрезков.

Соединяем ВМ. Через точки  $M_1, M_2, M_6$  строим прямые, параллельные прямой ВМ. По теореме Фалеса имеем:

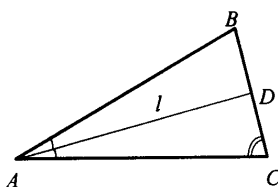
$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_4D_5 = D_5D_6 = D_6B; \quad AD_2:D_2B = 2:7.$$

**586.**

Дано:



Построить:  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \alpha$ ,  
 $\angle C = \beta$ ,  
 $AD = l$ .



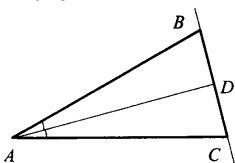
Построение:

- 1)  $\angle A = \alpha$ .
- 2) Провести биссектрису  $\angle A$ ,  $AD = l$ .
- 3) Строим  $\angle D = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

Сторона  $\angle D$  пересечет сторону угла  $A$  в точке  $C$ .

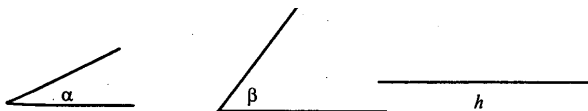
- 4) Строим угол, смежный с  $\angle ADC$ . Сторона этого угла пересечет другую сторону  $\angle A$  в точке  $B$ .

- 5)  $\triangle ABC$  – искомый



**587.**

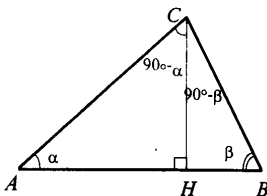
Дано:



Построить:  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $CH \perp AB$ ,  $CH = h$ .

Анализ:

Построение:

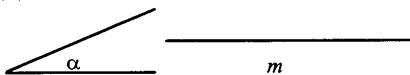


- 1) Строим прямую  $l$ ;
- 2)  $CH \perp l$ ,  $CH = h$ ,  $H \in l$ ;
- 3)  $\angle C = 90^\circ - \beta$ , одна из сторон пересекает прямую в точке  $B$ ;
- 4)  $\angle C = 90^\circ - \alpha$  в другой полуплоскости, одна из сторон пересекает прямую в точке  $A$ ;

- 5)  $\triangle ABC$  – искомый.

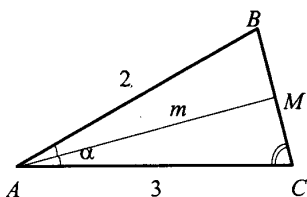
**588.**

Дано:



Построить  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \alpha$ ,  
 $AM = m$ .

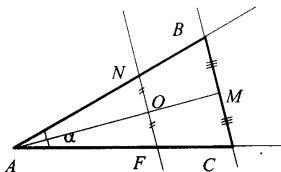
Анализ:



Построение:

- 1)  $\angle A = \alpha$ .
- 2) На одной из сторон угла A отложить 2 одинаковых отрезка, а на другой – 3 таких же отрезка.  
Соединить FN.
- 3) Найти середину NF.

- 4) На луче AO – отрезок AM = m.
- 5) Через M строим прямую  $l \parallel NF$ .
- 6)  $l \cap AF = C$ ;  $l \cap AN = B$ .
- 7)  $\triangle ABC$  – искомый:  $\triangle ANF \sim \triangle ABC$ , где  $\angle A$  – общий;  
 $\angle B = \angle N$  (соответственные при  $NF \parallel BC$  и секущей AB).  
 $NO = OF$ , значит,  $BM = MC$ , т.е. AM – медиана.



#### § 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg} \angle A$  и  $\angle B = ?$

Решение:  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ;

а)  $BC = 8$ ,  $AB = 17$ , т.к.  $AC^2 = AB^2 - BC^2$ , то

$$AC = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15;$$

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$$

$$\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{8}$$

б)  $BC = 21$ ,  $AC = 20$ , т.к.  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , то

$$AB = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29;$$

$$\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$$

$$\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{21}$$

в)  $BC = 1$ ,  $AC = 2$ , т.к.  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , то  $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\cos \angle B = \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \angle A = \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = 2$$

г)  $AC = 24$ ,  $AB = 25$ , т.к.  $BC^2 = AB^2 - AC^2$ , то

$$BC = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}$$

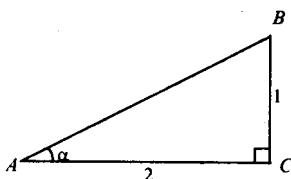
$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{24}{7}$$

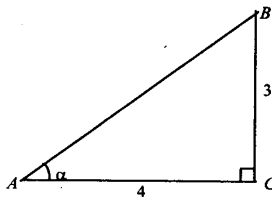
**592.**

Построить  $\angle \alpha$ , если:

а)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

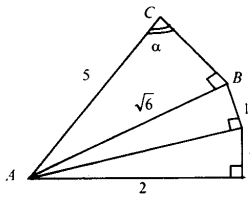


б)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$



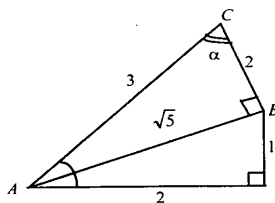
в)  $\cos \alpha = 0,2$ ;

$\angle C$  – искомый угол;



г)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$

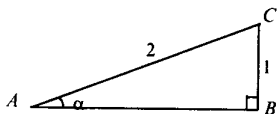
$\angle C$  – искомый угол;





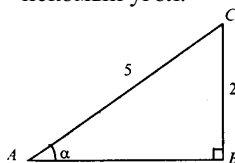
$$\text{д) } \sin \alpha = \frac{1}{2}; \sin \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$\angle A$  – искомый угол;



$$\text{е) } \sin \alpha = 0,4 \quad \sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$$

$\angle A$  – искомый угол.



**593.**

$$\text{а) } \cos \alpha = \frac{1}{2}; \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ , следовательно

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = \frac{2}{3}; \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

аналогично а):

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

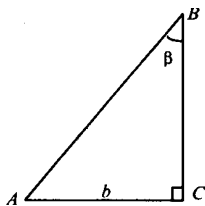
$$\text{в) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3};$$

$$\text{г) } \sin \alpha = \frac{1}{4}; \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

**594.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$\angle B = \beta$ ,  $AC = b$ .

Выразить:  $BC$  и  $\angle A$ ,  $AB$ .

Решение:

1) Из определения:  $\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC}$ , т.е.

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg} \angle \beta} = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}, AB = \frac{b}{\sin \beta}$$

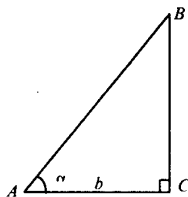
$$\angle A = 90^\circ - \beta;$$

$$2), b = 10 \text{ см}, \beta = 50^\circ; BC = \frac{10}{\operatorname{tg} 50^\circ} \approx \frac{10}{1,1918} \approx 8,39 \text{ см};$$

$$\angle A = 40^\circ; AB = \frac{10}{\sin 50^\circ} \approx \frac{10}{0,766} \approx 13,05.$$

Ответ:  $\frac{b}{\operatorname{tg} \beta}; 90^\circ - \beta; \frac{b}{\sin \beta}; \approx 8,39; 40^\circ; \approx 13,05$ .

**595.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$

$\angle A = \alpha$ ,  $AC = b$ .

Выразить:  $BC$  и  $\angle B$ ,  $AB$ .

Решение:

1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$ , отсюда  $AB = b \cdot \cos \alpha$ ;  $BC = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ;

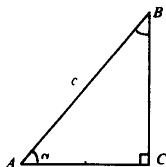
$$\angle B = 90^\circ - \alpha$$

$$2) b = 12 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ = 12 \cdot 0,9004 \approx 10,8 \text{ см}$$

$$AB = \frac{12}{\cos 42^\circ} = \frac{12}{0,7431} \approx 16,15 \text{ см}; \angle B = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

Ответ:  $b \cdot \operatorname{tg} \alpha; \frac{b}{\cos \alpha} 90^\circ - \alpha \approx 11 \text{ см}; \approx 16 \text{ см}; 48^\circ$ .

**596.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$\angle A = \alpha$ ,  $AB = c$ ;

$BC$ ,  $AC$  и  $\angle B = ?$

Решение:

$$1) BC = AB \cdot \sin \angle A = c \cdot \sin \alpha; \quad AC = AB \cdot \cos \angle A = c \cdot \cos \alpha;$$

$$\angle B = 90^\circ - \alpha;$$

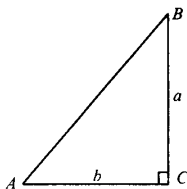
$$2) c = 24 \text{ см}, \alpha = 35^\circ: BC = 24 \cdot \sin 35^\circ = 24 \cdot 0,5736 \approx 14 \text{ см};$$

$$AC = 24 \cdot \cos 35^\circ = 24 \cdot 0,8192 \approx 20 \text{ см};$$

$$\angle B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Ответ:  $c \cdot \sin \alpha$ ;  $c \cdot \cos \alpha$ ;  $90^\circ - \alpha$ ;  $\approx 14 \text{ см}$ ;  $\approx 20 \text{ см}$ ;  $55^\circ$ .

**597.**



Дано:  $\angle C = 90^\circ$ ;  
 $BC = a$ ,  $AC = b$ ;  
 $AC$ ,  $\angle A$  и  $\angle B = ?$

Решение:

$$1) AB^2 = AC^2 + BC^2, AB = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (по т. Пифагора);}$$

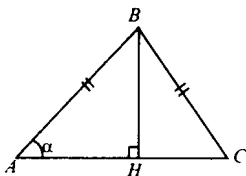
$$a) \sin \angle B = \cos \angle A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad б) \operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}$$

$$2) a = 12 \text{ см}, b = 15, AB = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{369} \approx 19 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{12}{15} \approx 0,8, \text{ т.е. } \angle A \approx 38^\circ 39';$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{15}{12} = 1,25, \text{ т.е. } \angle B \approx 51^\circ 21'.$$

**598.**



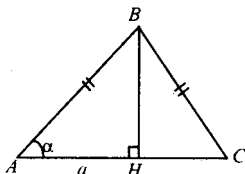
а) Дано:  $AB = BC$ ;  
 $\angle A = \alpha$ ,  $AB = b$ ;  
 $S_{ABC} = ?$

Решение:  $BH \perp AC$ ;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH,$$

из  $\triangle ABH$ :  $BH = AB \cdot \sin \angle A = b \cdot \sin \alpha$ ,  $AH = AB \cdot \cos \angle A = b \cdot \cos \alpha$ ,  
следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$



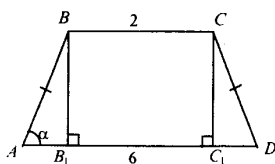
б) Дано:  $AB = BC$ ;  
 $\angle A = \alpha$ ,  $AC = a$ ;  
 $S_{ABC} = ?$

Решение:

$$\triangle ABH: BH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

**599.**



Дано:  
 $AB = CD$ ;  
 $BC = 2 \text{ см}$ ,  $AD = 6 \text{ см}$ ;  
 $\angle A = \alpha$ ;  
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

$ABCD$  – равнобедренная трапеция, следовательно,

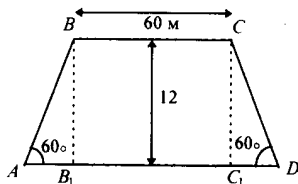
$\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ , где  $AB_1 = C_1D = (6 - 2):2 = 2 \text{ см}$ .

В  $\triangle ABB_1$ :  $BB_1 = AB_1 \cdot \operatorname{tg} \angle A$ ;  $BB_1 = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , значит,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BB_1; S_{ABCD} = \frac{1}{2} (6 + 2) \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2.$$

Ответ:  $8 \operatorname{tg} \alpha$ .

**600.**



Дано:  
 $BC = 60 \text{ м}$ ;  
 $h = 12 \text{ м}$ ;  
 $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ;  
 $AD = ?$

Решение:

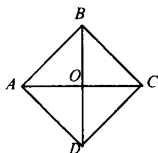
1)  $\triangle ABB_1$ :  $BB_1 \cdot \cos \angle A = AB_1$ , отсюда  $AB_1 = 12 : \operatorname{tg} 60^\circ = 12 : \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  м;

2)  $C_1D = AB_1 = 4\sqrt{3}$  м;

3)  $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 4\sqrt{3} + 60 + 4\sqrt{3} \approx 60 + 13,9 = 73,9$  м.

Ответ: 73,9 м.

**601.**



Дано: ABCD – ромб;

$AC = 3$ ,  $BD = 2\sqrt{3}$ ;

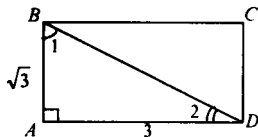
$\angle A$ ,  $\angle B = ?$

Решение:

$\triangle AOB$ :  $AO = 1$ ,  $BO = \sqrt{3}$ ;  $\operatorname{tg} \angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ , значит,  $\angle BAO = 60^\circ$ , т.е.  $\angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ;

AC, BD – биссектрисы углов A и B, значит,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle A = 120^\circ$ .

**602.**



Дано: ABCD – прямоугольник;

$AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 3$ ;

$\angle 1$ ,  $\angle 2 = ?$

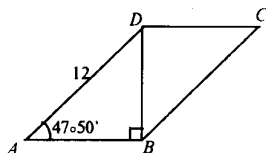
Решение:

$\triangle ABD$ :  $\operatorname{tg} \angle 1 = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ , т.е.  $\angle 1 = 60^\circ$ , значит,

$\angle 2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$  и  $30^\circ$ .

**603.**



Дано: ABCD – параллелограмм;

$BD \perp AB$ ,  $AD = 12$  см;

$\angle BAD = 47^\circ 50'$ ;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD;$$

$$1) AB = AD \cdot \cos \angle A;$$

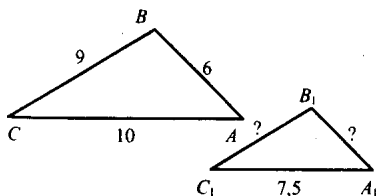
$$AB = 12 \cdot \cos 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,6712 \approx 8,06 \text{ см};$$

$$BD = AD \cdot \sin \angle A; BD = 12 \cdot \sin 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,7412 \approx 8,89 \text{ см};$$

$$2) S_{ABCD} = 8,06 \cdot 8,89 \approx 71,76 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $\approx 72 \text{ см}^2$ .

**604.**



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$AB = 6 \text{ см}, BC = 9 \text{ см},$

$AC = 10 \text{ см}, A_1C_1 = 7,5 \text{ см};$

$A_1B_1; B_1C_1 = ?$

Решение:

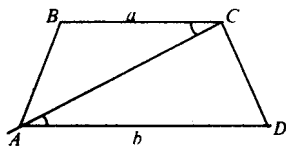
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , следовательно;  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ ;

$$\frac{6}{A_1B_1} = \frac{10}{7,5} = \frac{9}{B_1C_1}, \text{ отсюда:}$$

$$A_1B_1 = \frac{6 \cdot 7,5}{10} = 4,5, \text{ а } B_1C_1 = \frac{9 \cdot 7,5}{10} = 6,75.$$

Ответ: 4,5 см, 6,75 см.

**605.**



Дано: ABCD – трапеция;

$\triangle ABC \sim \triangle DCA$ ,  $AD = b$ ,

$BC = a$ .

Доказать:  $AC^2 = ab$ .

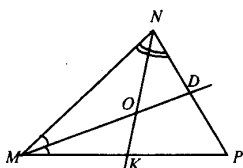
Доказательство:

$\triangle ABC \sim \triangle DCA$ , значит,  $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{DA}$

$AC^2 = BC \cdot DA$  (свойство пропорции),

т.е.  $AC^2 = a \cdot b$ , что и требовалось доказать.

606.



Дано:  $\triangle MNP$ ;  
 $MD, NK$  – биссектрисы;  
 $MD \cap NK = O$ ;  
 $MN = 5$  см,  $NP = 3$  см,  $MP = 7$  см;  
 $OK:ON = ?$

Решение:

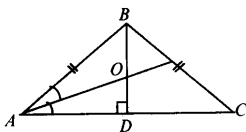
1)  $NK$  – биссектриса, следовательно,  $\frac{MN}{MK} = \frac{NP}{KP}$ ,  $\frac{5}{MK} = \frac{3}{KP}$ , пусть  $MK = x$ , тогда  $KP = 7 - x$ , значит,  $\frac{5}{x} = \frac{3}{7-x}$ ;  $35 - 5x = 3x$ ,  $x = MK = 4\frac{3}{8}$  см;

2)  $MD$  – биссектриса, следовательно,  $\frac{MK}{KO} = \frac{MN}{NO}$

$$\frac{MK}{MN} = \frac{KO}{NO} = \frac{4\frac{3}{8}}{5} = \frac{35}{8,5} = \frac{7}{8} \text{ (свойство пропорций).}$$

Ответ:  $OK:ON = 7:8$ .

607.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = BC$ ;  
 $BD \perp AC$ ,  $BD = 30$  см;  
 $AO$  – биссектриса;  
 $BO, OD = ?$

Решение:

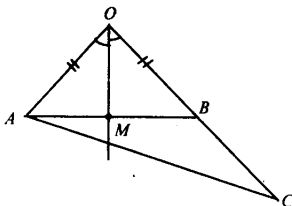
1) В  $\triangle ABC$ :  $AB:AD = 3:2$ ,  $AD = 2x$ ,  $AB = 3x$ ;  
 $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ;  $4x^2 + 900 = 9x^2$ ;  $x^2 = 180$ ;  $x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$  см,  
 значит,  $AB = 18\sqrt{5}$  см,  $AD = 12\sqrt{5}$ ;

2)  $AO$  – биссектриса, следовательно,  $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$   
 пусть  $DO = x$ , тогда  $BO = 30 - x$ , значит,  $\frac{18\sqrt{5}}{30-x} = \frac{12\sqrt{5}}{x}$

$3x = 2(30-x)$ ;  $x = 12$ ; т.е.  $DO = 12$  см,  $BO = 30 - 12 = 18$  см.

Ответ: 12; 18.

608.



Дано:  $\triangle AOB$ ,  $AO = OB$ ,  $C \in OB$ ;  
 $OM$  – биссектриса  $\angle AOB$ .  
 Доказать:  $MA < MC$ .

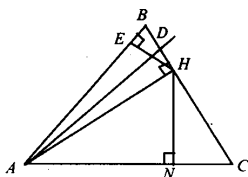
Доказательство:

$OM$  – биссектриса, следовательно,  $\frac{AO}{AM} = \frac{OC}{MC} = \frac{OB + BC}{MC}$ ;

$AO < (OB + BC)$ ,  $\frac{AO}{AM} = \frac{OB + BC}{MC}$ , следовательно,

$AM < MC$ , что и требовалось доказать.

609.



Дано:  
 $\triangle ABC$ ,  $D \in BC$ ;  
 $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ .  
 Доказать:  $AD$  – биссектриса.

Доказательство:

$AN$  – высота  $\triangle ABD$  и  $\triangle ACD$ , т.е.  $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$  (1).

Так же  $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE$ ,  $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DN$ , имеем:

$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DN}$  (2).

Сравнивая (1) и (2) имеем:

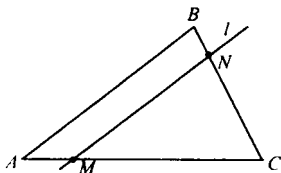
$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DN}$ ,  $\left( \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ по условию} \right)$ ,

$1 = \frac{DE}{DN}$ , значит,

$DE = DN$ ,  $AD$  – биссектриса (по свойству).



610.



Дано:  $\triangle AOC$ ;  
 $l \cap AC = M$ ,  $l \cap BC = N$ ;  
 $AM:MC = 2:7$ ;  
 $AB = 10$  см,  $BC = 18$  см,  
 $CA = 21,6$  см;  
 $MC$ ,  $NC$ ,  $MN = ?$

Решение:

1) В  $\triangle ABC$  и  $\triangle MNC$ :  $\angle C$  – общий,  
 $\angle M = \angle A$  (соответственные при  $AB \parallel l$  и секущей  $AC$ ),  
 значит  $\triangle ABC \sim \triangle MNC$  (по 2 углам), т.е.

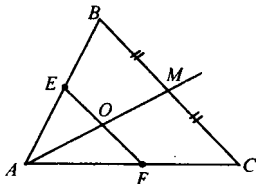
$$\frac{BC}{NC} = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MC} = \frac{9}{7};$$

$$2) \frac{AB}{MN} = \frac{9}{7}; \quad \frac{BC}{NC} = \frac{9}{7}; \quad \frac{AC}{MC} = \frac{9}{7};$$

$$MN = \frac{7}{9} AB = \frac{7}{9} \cdot 10 = 7\frac{7}{9} \text{ см};$$

$$NC = \frac{7}{9} \cdot 18 = 14 \text{ см}; \quad MC = \frac{7}{9} \cdot AC = \frac{7}{9} \cdot 21,6 = 16,8 \text{ см}.$$

611.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AM$  – медиана,  $EF \parallel BC$ ;  
 $AM \cap EF = O$ .  
 Доказать:  $EO = OF$ .

Доказательство:

В  $\triangle AOF$  и  $\triangle AMC$ :  $\angle A$  – общий,  
 $\angle C = \angle F$  (соответственные при  $EF \parallel MC$ ), значит  $\triangle AOF \sim \triangle AMC$   
 (по 2 углам), т.е.

$$\frac{OF}{MC} = \frac{AO}{AM}, \text{ отсюда } OF = \frac{OA \cdot MC}{AM} \quad (1)$$

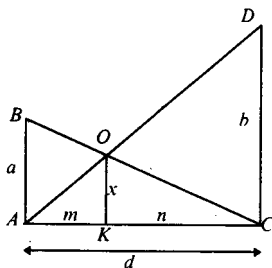
В  $\triangle AOE$  и  $\triangle AMB$ :  $\angle A$  – общий,  
 $\angle B = \angle E$  (соответственные при  $EF \parallel BC$ ), значит,  
 $\triangle AOE \sim \triangle AMB$  (по 2 углам), т.е.

$$\frac{OE}{BM} = \frac{AO}{AM}, \text{ отсюда } OE = \frac{AO \cdot BM}{AM} \quad (2).$$

Сравним (1) и (2):

$OF = \frac{OA \cdot MC}{AM}$ ;  $OE = \frac{AO \cdot BM}{AM}$ , т.к.  $MC = BM$ , то можно сделать вывод, что  $OF = OE$ .

**612.**



Дано:  $AB = a$ ,  $DC = b$ ;

$AK = m$ ,  $KC = n$ ;

$AC = d$ ,  $OK = x$ .

Доказать:

а)  $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$  и  $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$

б)  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ ;  
 $x = ?$

Решение:

1) В  $\triangle ADC$  и  $\triangle AOK$ :  $\angle A$  – общий,

$\angle K = \angle C = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ADC \sim \triangle AOK$  (по 2 углам), т.е.

$$\frac{DC}{OK} = \frac{AC}{AK}, \text{ отсюда } \frac{b}{x} = \frac{d}{m}$$

2) В  $\triangle ABC$  и  $\triangle KOC$ :

$\angle C$  – общий,  $\angle A = \angle K = 90^\circ$ , значит,

$\triangle ABC \sim \triangle KOC$  (по 2 углам)

$$\frac{AB}{KO} = \frac{AC}{KC}, \text{ отсюда } \frac{a}{x} = \frac{d}{n}$$

3)  $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$  и  $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ ,

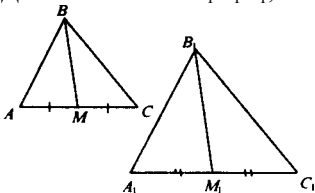
значит  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d} + \frac{d}{d} = 1$  ( $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ ), что и требовалось доказать.

4)  $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ ;  $\frac{xb + ax}{ab} = 1$ ;  $\frac{x(a+b)}{ab} = 1$ ,

т.е.  $x = \frac{ab}{a+b}$ .

613.

а) Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ;



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1};$$

$BM, B_1M_1$  – медианы.

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

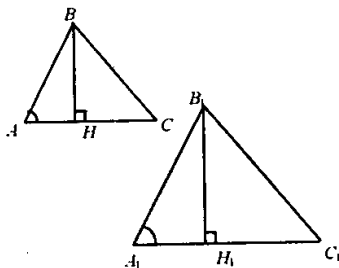
В  $\triangle ABM$  и  $\triangle A_1B_1M_1$  по условию

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1}, \text{ следовательно,}$$

$\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$  (по трем сторонам), значит,  $\angle A = \angle A_1$ .

2) Из условия  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ;  $\angle A = \angle A_1$  (см. выше);

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по 2 сторонам и углу между ними).



б) Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ;

$\angle A_1 = \angle A$ ;

$$\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

$BH \perp AC, B_1H_1 \perp A_1C_1$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство:

1) В  $\triangle ABH$  и  $\triangle A_1B_1H_1$ :  $\angle A = \angle A_1$ ,

$\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$  (по 2 углам),

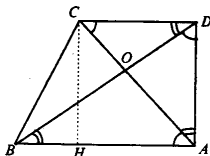
$$\text{т.е. } \frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

2) В  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ :  $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$  и  $\angle A = \angle A_1$ , значит,

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ : (по 2 сторонам и углу между ними).

Что и требовалось доказать.

614.



Дано: ABCD – трапеция;  
 $\angle A = 90^\circ$ ;  
 $AC \perp BD$ ,  $BD \cap CA = O$ ;  
 $AB = 6$  см,  $AD = 4$  см;  
 $DC$ ,  $DB$ ,  $CB = ?$

Решение:

1)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ (т. Пифагора); } BD^2 = 36 + 16 = 52; BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ см;}$$

2)  $\triangle ADC$  и  $\triangle BAD$ ;  $\angle D = \angle A = 90^\circ$ ;  $\angle C = \angle D$ , значит,  
 $\triangle ADC \sim \triangle BAD$  (по двум углам), т.е.

$$\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BD}; \frac{DC}{4} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{BD}; DC = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$$

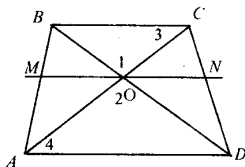
$$3) BH = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{из прямоугольного } \triangle BCH: BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + \left(3\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= 16 + \frac{100}{9} = \frac{244}{9}, \text{ т.е. } BC = \sqrt{\frac{244}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{13} \text{ см; } 2\frac{2}{3} \text{ см; } \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$

615.



Дано: ABCD – трапеция;  
 $AC \cap BD = O$ ;  
 $MN \parallel AD$ ;  
 $AD = a$ ,  $BC = b$ ;  
 $MN = ?$

Решение:

1) В  $\triangle AOD$  и  $\triangle COB$ :  $\angle 2 = \angle 1$  (вертикальные),  
 $\angle 4 = \angle 3$  (накрест лежащие при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$ ),  
 значит  $\triangle AOD \sim \triangle COB$  (по двум углам), т.е.

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}.$$

2) В  $\triangle ABD$  и  $\triangle MBO$ :  $\angle B$  – общий,  
 $\angle M = \angle A$  (соответственные при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AC$ ),  
 значит  $\triangle ABD \sim \triangle MBO$  (по двум углам), т.е.

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AD}{OM}, \text{ отсюда } OM = \frac{AD \cdot BO}{BD} = \frac{a \cdot BO}{BD}$$

3)  $\triangle BDC \sim \triangle ODN$  (по двум углам), следовательно

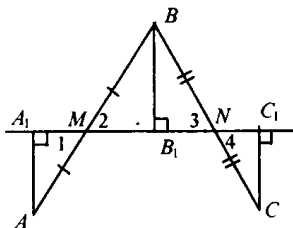
$$\frac{BC}{ON} = \frac{BD}{OD} = \frac{DC}{DN}, \text{ т.е. } ON = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{b \cdot OD}{BD}$$

$$4) MN = ON + MO = \frac{b \cdot OD}{BD} + \frac{a \cdot BO}{BD} = \frac{b \cdot OD + a \cdot BO}{BD};$$

$$BD = OB + OD = OB + \frac{a}{b} OB = OB \cdot \frac{b+a}{b}$$

$$\frac{a \cdot BO + b \cdot \frac{a}{b} OB}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{OB(a+a)}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

**616.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $MN$  – средняя линия;  
 $AA_1 \perp MN$ ,  $BB_1 \perp MN$ ,  
 $CC_1 \perp MN$ .  
 Доказать:  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ .

Доказательство:

1) В  $\triangle AA_1M$  и  $\triangle BB_1M$ :  $AM = MB$ ,

$\angle 1 = \angle 2$  (вертикальные), значит,

$\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$  (по гипотенузе и острому углу),

т.е.  $AA_1 = BB_1$  (1).

2) В  $\triangle BB_1N$  и  $\triangle CC_1N$ :  $BN = NC$ ,

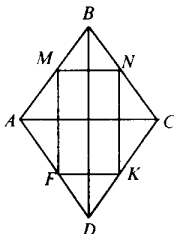
$\angle 3 = \angle 4$  (вертикальные), т.е.

$\triangle BB_1N = \triangle CC_1N$  (по гипотенузе и острому углу), значит,

$BB_1 = CC_1$  (2).

3) Сравним (1) и (2), получим  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ , что и требовалось доказать.

617.



Дано:  $ABCD$  – ромб;  
 $M, N, K, F$  – середины сторон.  
 Доказать:  $MNKF$  –  
 прямоугольник.

Доказательство:

1) В  $\triangle ABD$ :  $FM$  – средняя линия, следовательно,

$$BD \parallel FM \text{ и } FM = \frac{1}{2} BD.$$

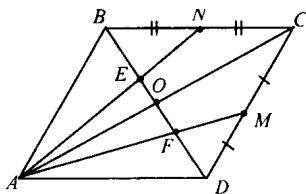
$$\text{В } \triangle BCD: NK \parallel BD \text{ и } NK = \frac{1}{2} BD.$$

По признаку  $FMNK$  – параллелограмм.

2)  $BD \parallel FM \parallel NK$ ,  $DB \perp AC$  (по свойству диагонального ромба),  
 значит  $NK \perp AC$  и  $FM \perp AC$ ;

$MN \parallel AC \parallel FK$ ,  $FM \perp AC$ , значит,  $FM \perp MN$ ,  $NK \perp AC$ ,  
 $FK \perp FM$  и  $NK \perp MN$ ,  $NK \perp FK$ , следовательно,  $MNFK$  – прямо-  
 угольник, что и требовалось доказать.

618.



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;  
 $M \in CD$ ,  $CM = MD$ ;  
 $N \in BC$ ,  $BN = NC$ ;  
 $AN \cap BD = E$ ,  $AM \cap BD = F$ .  
 Доказать:  $BE = EF = FD$ .

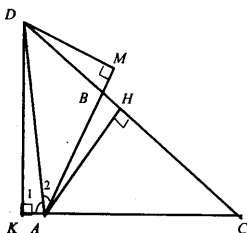
Доказательство:

1) В  $\triangle ABC$ :  $AN$ ,  $BO$  – медианы,  
 $BE:EO = 2:1$  (свойство медиан).

2) В  $\triangle ACD$ :  $DF:FO = 2:1$ .

3) В параллелограмме  $ABCD$  диагонали точкой  
 пересечения делятся пополам, следовательно,  $BO = OD$ ;  
 $BE + EO = OF + FD$ , значит,  $BE = EF = FD$ ;  
 $2x = 1x + 1x = 2x$ , что и требовалось доказать.

619.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AD$  – биссектриса;  
 $AD \cap BC = D$ .

Доказать:  $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

Доказательство:

1)  $AH \perp DC$  ( $AH$  – высота для  $\triangle ABD$  и для  $\triangle ADC$ );

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD$ ,  $S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD$ , имеем:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad (1);$$

2)  $S_{ABD} = \frac{1}{2} DM \cdot AB$ ,  $S_{ACD} = \frac{1}{2} DK \cdot AC$ ,  $DK = DM$ ;

в  $\triangle ADK$  и  $\triangle ADM$ :  $DA$  – общая,  $\angle 1 = \angle 2$ , т.е.

$\triangle ADK = \triangle ADM$  (по гипотенузе и острому углу), следовательно,

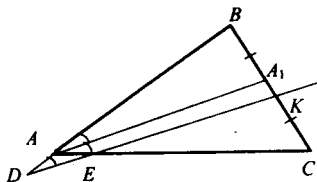
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$$

3) Сравнивая (1) и (2), имеем по свойству пропорциональности:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD},$$

что и требовалось доказать.

620.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AD$  – биссектриса,  
 $K \in BC$ ,  $BK = KC$ ;  
 $KD \parallel AA_1$ .  
 Доказать:  $BD = EC$ .

Доказательство:

1)  $AA_1$  – биссектриса, следовательно:  $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}$

2)  $\triangle DBK \sim \triangle ABA_1$  (по двум углам:  $\angle B$  – общий,  $\angle A = \angle D$ ),

$$\text{т.е. } \frac{DB}{BA} = \frac{BK}{BA_1}, \quad BD = BK \cdot \frac{BA}{BA_1} \quad (1);$$

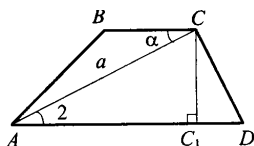
$$3) \triangle AA_1C \sim \triangle EKC \quad (\angle C - \text{общий}, \angle A = \angle C), \text{т.е. } \frac{AC}{KC} = \frac{AC}{EC},$$

$$EC = KC \cdot \frac{AC}{A_1C} \quad (2).$$

4) Сравнивая (1) и (2), имеем:  $BK = KC$ ,

$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}, \quad \text{т.е. } BD = EC, \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

**621.**



Дано:  $ABCD$  – трапеция;

$$AD + BC = b, \quad AC = a;$$

$$\angle ACB = \alpha;$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Решение:

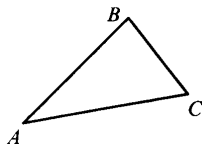
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CC_1;$$

$$\triangle ACC_1A: \angle C_1 = 90, \angle A = \alpha, AC = a, \text{ т.е. } CC_1 = a \sin \alpha;$$

$$2) BC + AD = b, \text{ следовательно, } S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

**622.**



Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$$2S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}.$$

Построить:  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Построение:

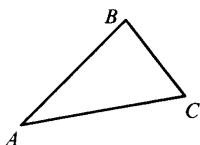
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ значит, } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2;$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}, \text{ значит, } k^2 = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Используя свойство параллельных прямых строим  $\Delta A_1B_1C_1$ , стороны которого в  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  больше  $\Delta ABC$ .

**623.**



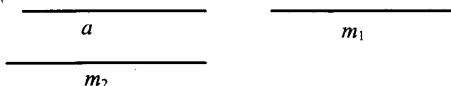
Дано: A, B, C – середины сторон;  
некоторого  $\Delta A_1B_1C_1$ .  
Построить:  $\Delta A_1B_1C_1$ .

Построение:

- 1) Через точки A, B, C строим прямые  $a \parallel BC$ ;  
 $b \parallel AC$ ;  $c \parallel AB$ .
- 2) a, b, c попарно пересекутся в точках  $A_1$ ;  $B_1$ ;  $C_1$ .  $\Delta A_1B_1C_1$  – искомый.

**624.**

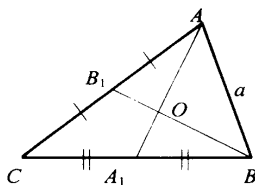
Дано:



Построить:  $\Delta ABC$ :  $AB = a$ ,  $AA_1 = m_1$ ,  $BB_1 = m_2$

Анализ:

Построение:



- 1)  $AB = a$ ;
- 2)  $AA_1 = m_1$ ,  $O \in AA_1$  и  $O \in BB_1$ , медианы пересекаются и делятся этой точкой  $AO:OA_1 = 2:1$   $BO:OB_1 = 2:1$ .

- 3) Строим Окр.  $\left( A; R_1 = \frac{2}{3}m_1 \right)$  и

Окр.  $\left( B; R_2 = \frac{2}{3}m_2 \right)$ . Они пересекутся в точке O.

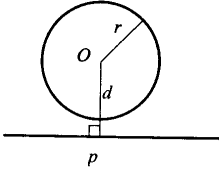
- 4) Лучи AO и BO продлеваем на длину  $AA_1 = m_1$  и  $BB_1 = m_2$ .
- 5)  $BA_1$  и  $AB_1$  пересекутся в точке C.
- 6)  $\Delta ABC$  – искомый.

## Глава VIII. Окружность

### § 1. Касательная к окружности

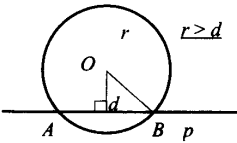
631.

Определить взаимное расположение прямой  $p$  и окружности;



а)  $r = 16\text{см}$ ;  $d = 12\text{см}$ ;

$r > d$ , следовательно, прямая и окружность пересекаются в двух точках.



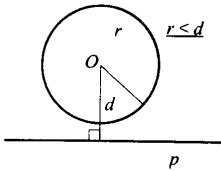
б)  $r = 5\text{см}$ ;  $d = 4,2\text{см}$ ;

$r > d$ , следовательно  $l \cap \text{Окружность}$

$(O; r) = \{A; B\}$ ;

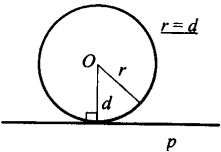
в)  $r = 7,2\text{дм}$ ;  $d = 3,7\text{дм}$ ;

(а; О) пересекаются в двух точках.



г)  $r = 8\text{дм}$ ;  $d = 1,2\text{дм}$ ;

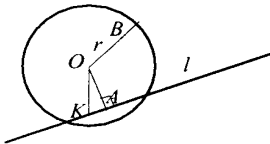
$r < d$ , следовательно, прямая и окружность не пересекаются.



д)  $r = 5\text{дм}$ ;  $d = 50\text{дм}$ , следовательно,

$r = d$ , значит, прямая и окружность касаются.

632.



Дано: окружность  $(O; r)$ ;

$OA = d$ ,  $OB = r$ ;

$d < r$ ,  $A \in l$ .

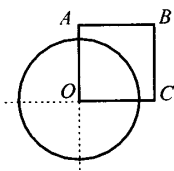
Доказать:  $l$  – секущая.

Доказательство:

- 1) Пусть  $l \perp OA$ , тогда  $d < r$  и  $l$  – секущая (по опр.).  
 2) Пусть  $l$  не  $\perp OA$ , тогда  $OK \perp l$   $\triangle OAK$  – прямоугольный  
 т.к.  $OA$  – гипотенуза, то  $OA > OK$ ;  
 $r > OA$ ,  $r > OK$  (по условию), следовательно,  $l$  – секущая по определению.

Что и требовалось доказать.

**633.**



Дано:  $ABCO$  – квадрат;

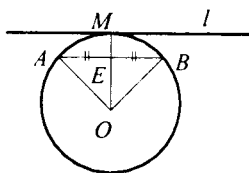
$AB = 6$  см.

Окружность  $(O; 5$  см).

Определить: какие из прямых  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  секущие по отношению к окружности  $(O; 5$  см).

$r < AB$ , значит, прямые  $OA$  и  $OC$  – секущие.

**634.**



Дано: Окружность  $(O; R)$

$AB$  – хорда;

$OM = R$ ,  $AB \cap OM = E$ ;

$AE = EB$ ;

$M \in l$  – касательная.

Доказать:  $l \parallel AB$ .

Доказательство:

1) В  $\triangle AOB$ :  $AO = OB = AB = R$ , следовательно,

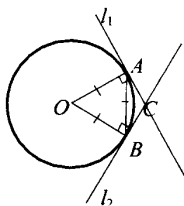
$\angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$ .

2) По свойству касательных  $OA \perp l$ , значит,

$\angle \alpha = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

**636.**



Дано: Окр  $(O; R)$ ;

$AB = R$ ;

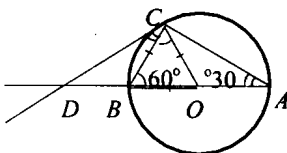
$l_1 \cap l_2 = C$ ;

$\angle ACB = ?$

Решение:

- 1)  $AB = OA = OB = R$ ,  $\angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$ .
- 2) Из свойства касательных  $OA \perp l_1$ ,  $OB \perp l_2$ , значит,  
 $\angle CAB = \angle CBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .
- 3)  $\triangle ABC$ :  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , т.е.  $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .  
 Ответ:  $120^\circ$ .

**637.**

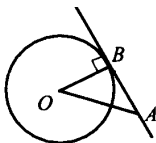


Дано: Окр  $(O; R)$ ;  
 $AB = 2R$ ;  
 $\angle CAB = 30^\circ$ ;  
 $CD \cap AB = D$ .  
 Доказать:  $\triangle ACD$  – равнобедренный.

Доказательство:

- 1)  $AO = OC = R$ , следовательно,  $\triangle AOC$  – равнобедренный, т.е.  
 $\angle C = \angle A = 30^\circ$ ;
- 2)  $OC \perp CD$ , следовательно,  $\angle ACD = \angle OCA + \angle DCO$ ;  
 $\angle ACD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ ;
- 3)  $\triangle ACD$ :  $\angle D + \angle A + \angle C = 180^\circ$ ,  
 $\angle D + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ , т.е.  
 $\angle A = \angle D = 30^\circ$ , следовательно,  
 $AC = CD$  и  $\triangle ACD$  – равнобедренный.  
 Что и требовалось доказать

**638.**



Дано: Окр  $(O; 1,5\text{см})$ ;  
 $AB$  – касательная;  
 $OB = 1,5\text{см}$ ,  $OA = 2\text{см}$ ;  
 $AB = ?$

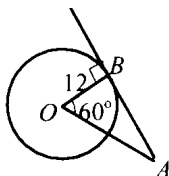
Решение:

- 1)  $AB$  – касательная (по усл.), следовательно  $OB \perp AB$  и  $\triangle AOB$  – прямоугольный;  
 $AB^2 = OA^2 - OB^2 = 4 - 2,25 = 1,74$  (по т. Пифагора), т.е.

$$AB = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ см.}$$

639.



Дано: Окр (O; 12см);  
AB – касательная;  
 $\angle AOB = 60^\circ$ ;  
AB = ?

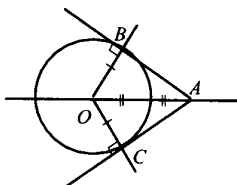
Решение:

1) AB – касательная (по усл.), следовательно,  $OB \perp AB$ ;

из  $\triangle AOB$ :  $\operatorname{tg} \angle O = \frac{AB}{OB}$ , отсюда:

$$AB = OB \cdot \operatorname{tg} \angle O = 12 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

640.



Дано: Окр (O; 4,5см);  
OA = 9см;  
AB, AC – касательные;  
 $\angle BAC = ?$

Решение:

1) В  $\triangle AOB$ :  $\angle B = 90^\circ$ , OA = 9, OB = 4,5, т.е.  $OB = \frac{1}{2} OA$ .

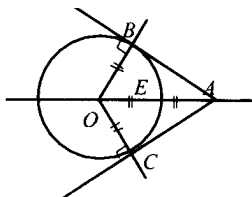
Имеем:  $\angle OAB = 30^\circ$ .

2) Также, из  $\triangle AOC$   $\angle OAC = 30^\circ$ .

3)  $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

641.



Дано: Окр (O; R);  
AB, AC – касательные;  
 $OA \cap \text{Окр (O; R)} = E$ ;  
OE = EA;  
 $\angle BAC = ?$

Решение:

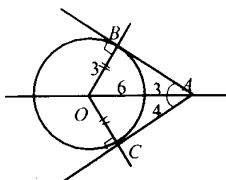
1)  $OE = OC = OB = R$  ( $OA = 2OE = 2R$ );

2)  $\triangle AOB:OB = \frac{1}{2} OA$ , следовательно,  $\angle BAO = 30^\circ$ , а  $\angle B = 90^\circ$ ;

3)  $AO$  – биссектриса  $\angle BAC$ , значит,  $\angle BAC = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$

**642.**



Дано:  $OB = 3$  см,  $OA = 6$  см;

$AB, AC, \angle 3, \angle 4 = ?$

Решение:

1) В  $\triangle AOB$ :  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB^2 = OA^2 - OB^2$  (по т. Пифагора);

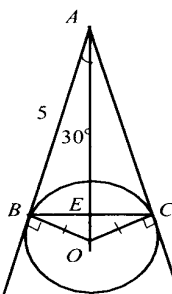
$AB^2 = 36 - 9 = 27$ ;  $AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$  см;

2)  $\sin \angle 3 = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , значит,  $\angle 3 = 30^\circ$ ;

3)  $\triangle AOB = \triangle AOC$ , т.е.  $AC = AB = 3\sqrt{3}$  см;  $\angle 4 = \angle 3 = 30^\circ$ .

Ответ:  $3\sqrt{3}$  см;  $3\sqrt{3}$  см;  $30^\circ, 30^\circ$ .

**643.**



Дано: Окр  $(O; R)$ ;

$AB, AC$  – касательные;

$AB = 5$  см,  $\angle OAB = 30^\circ$ ;

$BC = ?$

Решение:

1) В  $\triangle AOB$ :  $\angle B = 90^\circ$ ;

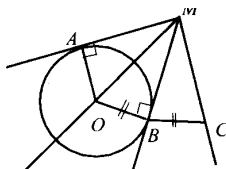
$\angle A = 30^\circ$ , следовательно,  $BO = \frac{1}{2} AO$ .

$$AO^2 = BO^2 + AB^2; 4x^2 = x^2 + 25; x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Отсюда  $\angle OBE = 30^\circ$ ;  $BE = BO \cdot \cos \angle B$ , т.е.

$$BE = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} = 5\text{cm.}$$

**644.**



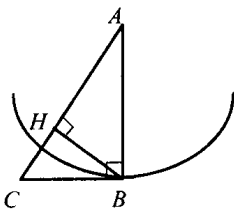
Доказать:  $\angle AMC = 3\angle BMC$ .

$\angle OMB = \angle BMC = \angle AMO$ , что и требовалось доказать.

Доказать:  $A_1C = CB_1$ .

и  $A_1C = CB_1$ , что и требовалось доказать.

646.

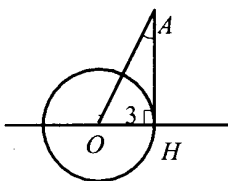


Из условия  $CB \perp AB$ ;  
 $AB = R$  Окр (A; AB),  
 значит по признаку  
 $CB$  – касательная к Окр (A; AB).  
 2) Из условия  $CB \perp AB$ ,  
 $CB = r$  Окр (C; CB), значит по признаку  
 $AB$  – касательная к Окр (C; BC).

3) Пусть Окр (B; BC), тогда AC секущая к этой окружности,  
 (BC > BH).

Пусть Окр (B; AB), тогда AC секущая к этой окружности,  
 (AB > BH).

647.



Дано: Окр (O; 3см).  
 Найти: является ли АН касательной?

а)  $OA = 5$  см,  $АН = 4$  см.

В  $\triangle AHO$ :  $OA = 5$ ,  $АН = 4$ ,  $ОН = 3$ , по т. Пифагора

$5^2 = 4^2 + 3^2$ ;  $25 = 25$ , следовательно,  $\triangle AHO$  – прямоугольный, т.е.

$\angle OHA = 90^\circ$  и АН является касательной;

б)  $\angle HAO = 45^\circ$ ,  $OA = 4$  см.

В  $\triangle AHO$ :

$ОН = 3$ ,  $OA = 4$ ,  $\angle HAO = 45^\circ$ .

Допустим:  $\angle H = 90^\circ$ , тогда  $АН = ОН = 3$ , т.е.  $АО = 3\sqrt{2}$ , а это противоречит условию  $АО = 4$ , следовательно, предположение неверно и АН не является касательной.

в)  $\angle HAO = 30^\circ$ ,  $OA = 6$  см.

В  $\triangle AHO$ :  $OA = 6$ ,  $ОН = 3$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ;

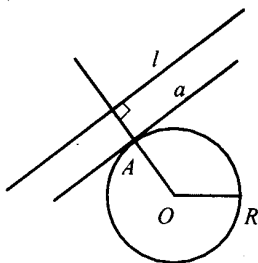
$ОН = \frac{1}{2} OA$ , значит,  $\angle H = 90^\circ$ , т.е.

АН является касательной.



648.

Дано:



а) Построить касательную к окружности, параллельную  $l$ .

Построение:

1) Строим  $OM \perp l$ .

2)  $OM \cap \text{Окр} (O; R) = A$ .

3) Через точку A проведем прямую  $a \parallel l$ .

4)  $a$  – искомая касательная.

Дано:

б) Построить касательную к окружности, перпендикулярную  $l$ .

Построение:

1) Строим  $OM \perp l$

2) Через точку O проводим прямую  $b \parallel l$ .

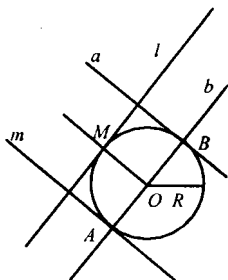
3)  $b \cap \text{Окр} (O; R) = \{A; B\}$ .

4) Через A или B проводим прямую  $a \parallel l$ .

3)  $b \cap \text{Окр} (O; R) = \{A; B\}$ .

4) Через A или B проводим прямую  $a \parallel OM$ .

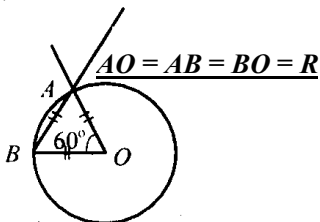
5) а или  $a_1$  – является искомым касательными.



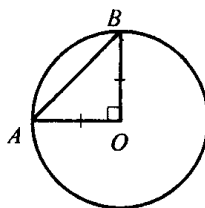
## § 2. Центральные и вписанные углы

649.

а)

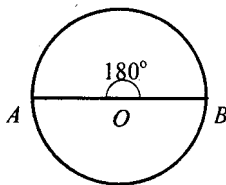
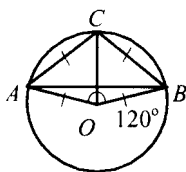


б)

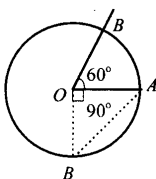


в)  $\triangle ABO$  и  $\triangle BOC$  – равнобедренные.

г)



650.



Дано: Окр: (O; 16)

AB = ?

Решение:

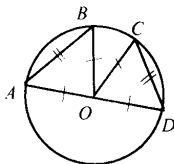
а)  $\angle AOB = 60^\circ$ , значит  $\triangle AOB$  –

равносторонний и  $AB = 16$

б)  $\angle AOB = 90^\circ$ , значит,  $\triangle AOB$  – прямоугольный и  $AB = 16\sqrt{2}$

в)  $\angle AOB = 180^\circ$ , значит,  $AB = AO + OB = 2 \cdot 16 = 32$ .

651.



а) Дано: Окр (O; R);

$AB = CD$ .

Доказать:  $AB = CD$ .

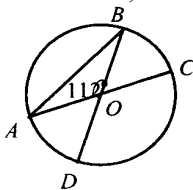
Доказательство:

В  $\triangle AOB$  и  $\triangle COD$ :  $OC = OA = R$ ,  $OD = OB = R$ ,

из усл.:  $AB = CD$ , т.е.

$\triangle AOB = \triangle COD$  (по трем сторонам), т.е.

$\angle AOB = \angle COD$ ,  $AB = CD$ .



б) Дано: Окр (O; R);

$AB = CD$ ;

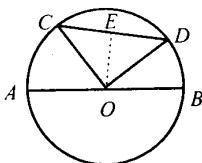
CD и CBD = ?

Решение:

- 1)  $AB = CD$  (см. выше),  
 $\angle AOB = 112^\circ$ , значит,  
 $AB = 112$  и  $CD = 112^\circ$ .  
 2) Т.е.  $\angle CBD = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$ .

Ответ:  $112^\circ$  и  $248^\circ$ .

**652.**



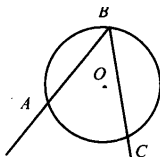
Дано:  $AC = 37^\circ$ ;  
 $BD = 23^\circ$ ;  
 $R = 15\text{см}$ ;  
 $CD = ?$

Решение:

- 1)  $CD = 180^\circ - (AC + DB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ;  
 2) из  $\triangle COD$ :  $\angle O = 120^\circ$ ,  $OD = OC = 15\text{см}$ ,  
 т.к.  $OE \perp CD$ ,  $\sin \angle EOD = \frac{ED}{OD}$ ; т.е.  $ED = OD \cdot \sin \angle EOD =$   
 $= 15 \cdot \sin 60^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}$  и  $CD = 2 \cdot ED = 15\sqrt{3} \text{ см}$ .

Ответ:  $15\sqrt{3} \text{ см}$ .

**653.**



Дано:  $\angle ABC$  – вписанный;  
 $\angle ABC = ?$

Решение:

$$\angle ABC = \overline{AC} : 2.$$

- а)  $\overline{AC} = 48^\circ$ , следовательно,  $\angle ABC = 24^\circ$ ;  
 б)  $\overline{AC} = 57^\circ$ , следовательно,  $\angle ABC = 28^\circ 34'$ ;  
 в)  $\overline{AC} = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle ABC = 45^\circ$ ;  
 г)  $\overline{AC} = 124^\circ$ , следовательно,  $\angle ABC = 62^\circ$ ;  
 д)  $\overline{AC} = 180^\circ$ , следовательно,  $\angle ABC = 90^\circ$ .

654.

а)  $\angle x = \frac{1}{2}(360^\circ - 80^\circ - 152^\circ) = 64^\circ$ ; в)  $\angle x = (180^\circ - 112^\circ):2 = 34^\circ$ ;

б)  $x = 360^\circ - (60^\circ + 125^\circ) = 175^\circ$ ; г)  $x = 360^\circ - (215^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$ .

655.



Дано:  $\angle ABC > \angle ACB$  на  $30^\circ$ ;  
 $\angle AOB, \angle ACB = ?$

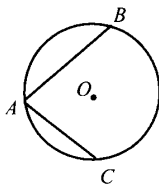
Решение:

Пусть  $\angle ACB = x$ , тогда  $\angle AOB = x + 30^\circ$ ;

$\angle AOB = 2\angle ACB$ , следовательно,  $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ACB$ ;  $x = \frac{1}{2}(x + 30^\circ) = 30^\circ$ ,

значит,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ .

656.



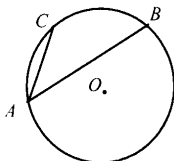
а) Дано:  $\angle B = 115^\circ$ ;

$\angle C = 43^\circ$ .

Найти:  $\angle A = ?$

Решение:

$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$ ; отсюда  $\angle BOC = 360^\circ - (115^\circ + 43^\circ) = 202^\circ$ , следовательно,  $\angle A = 101^\circ$ ;



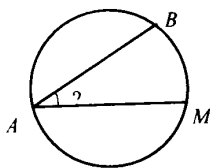
б)  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$ , где

$\angle BOC = \angle B - \angle C = 115^\circ - 43^\circ = 72^\circ$ ,

т.е.  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = 36^\circ$ .

Ответ:  $101^\circ$  или  $36^\circ$ .

657.



Дано:  $\overline{AB} = 140^\circ$

$M \in \overline{AB}$ ,  $\overline{AM} : \overline{MB} = 6:5$ ;

$\angle BAM = ?$

Решение:

1)  $\angle AMB = 360^\circ$ ; где  $\overline{BA} = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ ;

$\overline{AM} : \overline{MB} = 6:5$ , следовательно,  $\overline{AM} = 6x$ ,  $\overline{AM} + \overline{MB} = 220^\circ$ ;

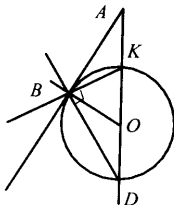
$\overline{MB} = 5x$ ;  $6x + 5x = 220$ ;  $x = 20$ ,

т.е.  $\overline{AM} = 20 \cdot 6 = 120^\circ$ ,  $\overline{MB} = 20 \cdot 5 = 100^\circ$ ;

2)  $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$ .

Ответ:  $50^\circ$

658.



Дано: AB – касательная;

AD – секущая;

$D \in \text{Окр}(O; R)$ ;

$BD = 110^\circ 20'$ ;

$\angle BAD, \angle ADB = ?$

Решение:

1) т.к.  $\angle BKD$  – вписанный, то

$\angle BKD = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} 110^\circ 20' = 55^\circ 10'$ .

2) Имеем  $\angle DBK = \frac{1}{2} \overline{DK} = 90^\circ$ , следовательно,

$\angle DBA = 90^\circ - \angle BKD$ ;  $\angle BDA = 89^\circ 60' - 55^\circ 10' = 34^\circ 50'$ ;

3)  $OB = OD = R$ , значит,  $\triangle BOD$  – равнобедренный, т.е.

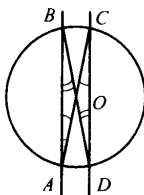
$\angle DBO = \angle BDO = 34^\circ 50'$ , следовательно,

$\angle DBA = \angle DBO + \angle OBA = 34^\circ 50' + 90^\circ = 124^\circ 50'$ , значит,

$\angle BAD = 180^\circ - (124^\circ 50' + 34^\circ 50') = 179^\circ 60' - 159^\circ 40' = 20^\circ 20'$ .

Ответ:  $20^\circ 20'$  и  $34^\circ 50'$ .

659.



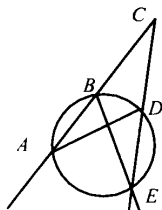
Дано:  $AB \parallel CD$ .  
Доказать:  $AD = BC$ .

Доказательство:

1)  $\angle BAC$  и  $\angle ACD$  – накрест лежащие при  $AB \parallel CD$  и секущей  $AC$ , т.е.  $\angle BAC = \angle ACD$ ;

2) т.к.  $\angle ACD = \frac{1}{2} \widehat{AD}$  и  $\angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{CB}$ , то  $\widehat{CB} = \widehat{AD}$ , что и требовалось доказать.

660.



Дано:  $AC, AE$  – секущие;  
 $\angle ACE = 32^\circ$ ;  
 $\angle AEF = 100^\circ$ ;  
 $\widehat{BD} = ?$

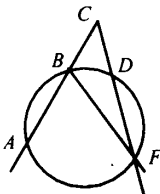
Решение:

1)  $\angle ABE$  – вписанный, следовательно,  $\angle ABE = \frac{1}{2} \widehat{AE} = \frac{1}{2} 100^\circ = 50^\circ$ ;

2) т.к.  $\angle EBC$  и  $\angle ABE$  смежные, то  $\angle BED = 180^\circ - (50^\circ + 32^\circ) = 98^\circ$ , следовательно,  $\widehat{BD} = 2 \cdot \angle BED = 2 \cdot 98^\circ = 196^\circ$ .

Ответ:  $196^\circ$ .

661.



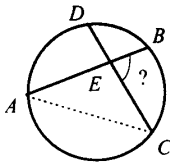
Дано:  $AC, FC$  – секущие;  
 $\angle ACF = 140^\circ$ ,  $\widehat{BD} = 52^\circ$ ;  
 $\angle ACF = ?$

Решение:

- 1) Т.к.  $\angle ABF$  – вписанный, то  $\angle ABF = \frac{1}{2} \text{AF} = 70^\circ$ .  
2) Т.к.  $\angle BFD$  – вписанный, то  $\angle BFD = \frac{1}{2} \text{BD} = 26^\circ$ .  
3) Из  $\triangle BCF$ :  $\angle F = 26^\circ$ ,  $\angle B$  (смежный с  $\angle ABF$ )  $= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ;  
 $\angle C = 180^\circ - (26^\circ + 110^\circ) = 44^\circ$ .

Ответ:  $44^\circ$ .

**662.**



Дано:

$AB \cap CD = E$ ;

$AD = 54^\circ$ ,  $BC = 70^\circ$ ;

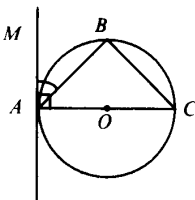
$\angle BEC = ?$

Решение:

- 1) Т.к.  $\angle ACD = \frac{1}{2} \text{AD}$ , то  $\angle ACD = 27^\circ$ ;  
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \text{BC}$ , т.е.  $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$ ;  
2)  $\triangle AEC$ :  $\angle E = 180^\circ - (\angle C + \angle A)$ ;  
 $\angle E = 180^\circ - (35^\circ + 27^\circ) = 118^\circ$ .  
3) Т.к.  $\angle BEC$  и  $\angle AEC$  – смежные, то  $\angle BEC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$ .

Ответ:  $62^\circ$ .

**663.**



Дано:

AC – диаметр;

Окр(O;R);

AB – хорда, AM – касательная;

$\angle MAB < 90^\circ$ .

Доказать:  $\angle MAB = \angle ACB$ .

Доказательство:

- 1)  $B = \frac{1}{2} \text{AC} = 90^\circ$ , следовательно,  $\triangle ABC$  – прямоугольный,

$$\angle C = 90^\circ - \angle BAC \quad (1).$$

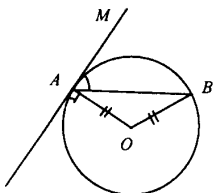
2)  $AM$  – касательная к окружности, значит,  $AM \perp AC$  и

$$\angle MAB = 90^\circ - \angle BAC \quad (2).$$

3) Сравнивая (1) и (2), имеем:

$\angle C = \angle MAB$ , что и требовалось доказать.

**664.**



Дано:  $AM$  – касательная;

$AB$  – хорда.

Доказать:  $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB$ .

Доказательство:

Т.к.  $AO = BO = R$ ,  $\triangle AOB$  – равнобедренный, следовательно,

$$\angle B = \angle A = \alpha, \text{ т.е. } \angle AOB = 180^\circ - 2\alpha \quad (1),$$

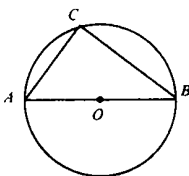
$\angle AOB$  – центральный, значит,  $\angle AOB = 2\angle C$ .

Т.к.  $AM$  – касательная,  $AM \perp AO$ , т.е.  $\angle MAO = 90^\circ - \alpha$ .

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$$\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB, \text{ что и требовалось доказать.}$$

**665.**



Дано:  $A, B, C \in \text{Окр}$ ,  $AB$  – диаметр.

Доказать:  $\angle C > \angle A$ ,  $\angle C > \angle B$ .

Доказательство:

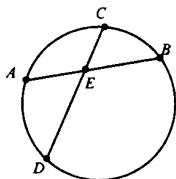
$$1) \text{ Т.к. } \angle ACB \text{ – вписанный, то } \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

следовательно  $\triangle ABC$  – прямоугольный, т.е.  $\angle C > \angle A$ ,  $\angle C > \angle B$ .

$\angle A + \angle B = 90^\circ$  (по свойству углов прямоугольного треугольника), следовательно, каждый из углов меньше  $\angle C$ .



666.



Дано:  $AB \cap CD = E$ ;  
 $ED = ?$

Решение:

а)  $AE = 5$ ,  $BE = 2$ ,  $CE = 2,5$ , по свойству хорд имеем:

$AE \cdot EB = CE \cdot ED$ ;  $5 \cdot 2 = 2,5 \cdot ED$ , отсюда

$$ED = \frac{10}{2,5} = \frac{100}{25} = 4;$$

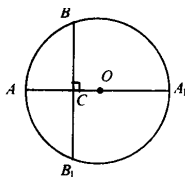
б)  $AE = 16$ ,  $EB = 9$ ,  $CE = ED$ , значит,  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ ;

$$16 \cdot 9 = x \cdot x; x^2 = 16 \cdot 9; \quad x = \sqrt{16 \cdot 9} = 12;$$

в)  $AE = 0,2$ ;  $BE = 0,5$ ;  $CE = 0,4$ , значит,  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ , т.е.

$$0,2 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot ED; ED = 0,1 : 0,4 = 0,25.$$

667.



Дано:  $AA_1$  – диаметр;  
 $AA_1 \perp BB_1$ ,  $AA_1 \cap BB_1 = C$ ;  
 $AC = 4$  см,  $CA_1 = 8$  см;  
 $BB_1 = ?$

Решение:

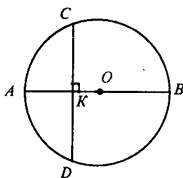
1)  $AA_1 \perp BB_1$ , следовательно,  $OC$  – высота равнобедренного  $\triangle BOB_1$ , следовательно,  $OC$  – медиана, значит,  $BC = CB_1$ ;

2)  $AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1$  (св-во хорд), т.е.

$$4 \cdot 8 = x \cdot x; x^2 = 32, x = 4\sqrt{2}, BC = 4\sqrt{2}, BB_1 = 2BC = 8\sqrt{2} \text{ см.}$$

Отсюда,  $BB_1 = 8\sqrt{2}$  см.

668.



Дано:  $AB$  – диаметр,  
 $CD \perp AB$ ,  $CD \cap AB = K$ .

Доказать:  $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ .

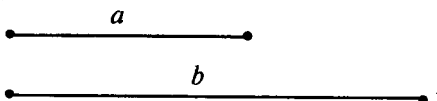
Доказательство:

1)  $CD \perp AB$ , следовательно,  $CK = KD$  (см. 667).

2) По свойству хорд:  $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ , т.к.  $CK = KD$ , то  $AK \cdot KB = CK^2$ ;  $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ , что и требовалось доказать.

**669.**

Дано:



Построить:  $AB: AB = \sqrt{a \cdot b}$ ,

Построение:

проводим прямую  $l$ , на ней откладываем два отрезка  $KN = a$ ,  $NM = b$ ;

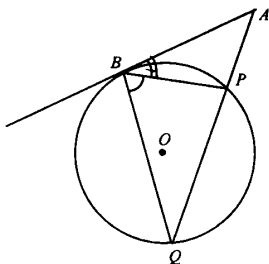
строим окружность с центром на  $l$  и диаметром  $KM$ ;

проводим прямую, перпендикулярную  $l$ , через точку  $N$ ;

перпендикуляр пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ , имеем:

$AB$  – искомый отрезок.

**670.**



Дано:  $AB$  – касательная;

$AQ$  – секущая.

Доказать:  $AB^2 = AP \cdot AQ$ .

Доказательство:

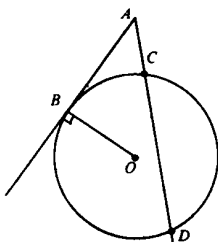
В  $\triangle ABP$  и  $\triangle AQB$ :

$\angle A$  – общий,  $\angle Q = \angle B$ , следовательно,

$\triangle ABP \sim \triangle AQB$ , т.е.  $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$

$AB^2 = AQ \cdot AP$  (по свойству пропорции), что и требовалось доказать.

671.



Дано:  $AB$  – касательная;  
 $AD$  – секущая;  
 $CD = ?$

Решение:

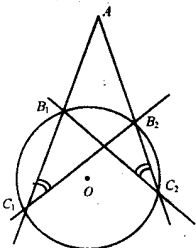
а)  $AB = 4$  см,  $AC = 2$  см, тогда  $AB^2 = AC \cdot AD$ ;  
 пусть  $CD = x$ , тогда  $4^2 = 2(x + 2)$ ;  $16 = 2x + 4$ ,  
 $x = 6$ , т.е.  $CD = 6$  см.

Ответ: 6 см.

б)  $AB = 5$  см,  $AD = 10$  см, тогда  $AB^2 = AC \cdot AD$ ;  
 $25 = AC \cdot 10$ , отсюда  $AC = 2,5$  см;  
 $CD = AD - AC = 10 - 2,5 = 7,5$  см.

Ответ: 7,5 см.

672.



Дано:  $AC_1$  и  $AC_2$  – секущие.  
 Доказать:  $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ .

Доказательство:

1) В  $\triangle AC_1B_2$  и  $\triangle AC_2B_1$ :

$\angle A$  – общий,  $\angle C_2 = \angle C_1 = \frac{1}{2} \angle B_1B_2$ , т.е.

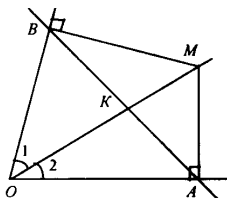
$\triangle AC_1B_2 \sim \triangle AC_2B_1$  (по двум углам), значит,

$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$  (из свойства пропорции), т.е.

$AC_1 \cdot AB_1 = AB_2 \cdot AC_2$ , что и требовалось доказать.

### § 3. Четыре замечательные точки треугольника

674.

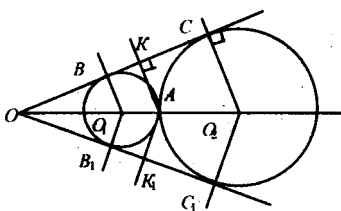


Дано:  $\angle O$ ;  
 $OM$  – биссектриса;  
 $MA \perp OA$ ,  
 $MB \perp OB$ .  
 Доказать:  $AB \perp OM$ .

Доказательство:

1) В  $\triangle MOB$  и  $\triangle MOA$ :  $OM$  – общая, т.к.  $OM$  – биссектриса, то  $\angle 1 = \angle 2$ , значит,  
 $\triangle MOB = \triangle MOA$  (по гипотенузе и острому углу), следовательно,  
 $OB = OA$  и  $\triangle OAB$  – равнобедренный.  
 2) В  $\triangle OBK$  и  $\triangle OAK$ :  $OB = OA$ ,  
 $\angle 1 = \angle 2$ ,  $OK$  – общая, значит,  
 $\triangle OBK = \triangle OAK$  (по двум сторонам и углу между ними), т.е.  
 $BK = KA$ , следовательно,  $OK$  – медиана, тогда по св-ву медианы  
 равнобедренного  $\triangle OK \perp BA$ , что и требовалось доказать.

675.

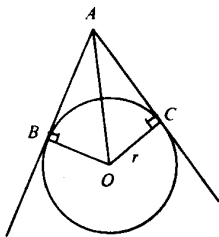


Дано:  $\angle O$ ;  
 $\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; r) = A$ .  
 Доказать:  $O_1, O_2 \in OA$ .

Доказательство:

1)  $BC$  и  $B_1C_1$  – касательные к окружностям, значит,  
 $O_1B \perp BC$ ,  $O_2C \perp BC$  и  $O_2C_1 \perp B_1C_1$ ,  $O_1B_1 \perp B_1C_1$ , т.е.  
 точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат на биссектрисе  $\angle O$  ( по свойству биссектрисы),  
 2) т.к.  $AK = AK_1$  (по свойству биссектрисы), то  $A$  лежит на биссектрисе.

676.



Дано:  $AB, AC$  – касательные к  $\text{Окр } (O;r)$ .  
Найти: а)  $OA$ ; б)  $r$ .

Решение:

а)  $r = 5\text{ см}$ ,  $\angle A = 60^\circ$  (усл.);

1)  $OB \perp AB$ ,  $OC \perp AC$ , следовательно,  $AO$  является биссектрисой.

2) В  $\triangle ACO$ :

$\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $AO = 2 \cdot 5$ ,  $OC = 5\text{ см}$ , т.е.

$AO = 2OC$  (из прямоуг. треугольника  $AOC$ ),

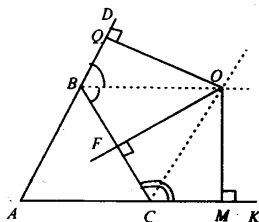
$AO = 2 \cdot 5 = 10\text{ см}$ ;

б)  $AO$  – биссектриса, тогда в  $\triangle AOC$ :  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,

$\angle O = 45^\circ$ , т.е.  $AC = OC = r$ ;

$14^2 = 2r^2$ ;  $r^2 = 98$  (т. Пифагора),  $r = 7\sqrt{2}$ .

**677.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$BO, CO$  – биссектрисы.

Доказать:  $O$  – центр окружности,  
 $AB, AC$  и  $BC$  – ее касательные.

Доказательство:

1)  $BO$  – биссектриса  $\angle CBD$ , следовательно,

$OQ \perp BD$  и  $OF \perp BC$  равны (свойство биссектрисы);

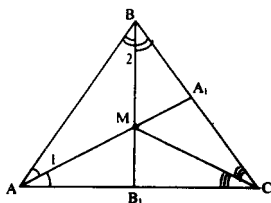
2)  $CO$  – биссектриса  $\angle BCK$ , следовательно,  $OF \perp BC$  и  $OM \perp CK$ ,  
равны (свойство биссектрисы).

3) Имеем:  $OQ = OF$ ,  $OF = OM$ , т.е.

$OQ = OM = OF$  – радиусы окружности с центром в точке  $O$ ,

а  $AC, BC, AB$  – касательные.

**678.**



Дано:  
 $\triangle ABC$ ;  
 $AA_1$ ;  $BB_1$  – биссектрисы;  
 $AA_1 \cap BB_1 = M$ .  
 Найти:  $\angle ACM$  и  $\angle BCM$ .

Решение:

а)  $\angle AMB = 136^\circ$

1)  $M$  – точка пересечения биссектрис  $AA_1$  и  $BB_1$ , следовательно,  $CM$  – биссектриса  $\angle ACB$  и  $\angle ACM = \angle BCM$ ;

2)  $\triangle ABM$ :  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , т.е.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ;$$

3)  $\triangle ABC$ :  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ;

$$\angle C = 180^\circ - (\angle B + \angle A), 2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ;$$

$$\angle C = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ, \text{ т.е. } \angle BCM = \angle ACM = 46^\circ;$$

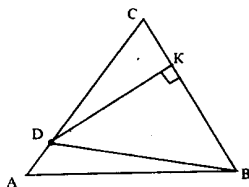
б)  $\angle AMB = 111^\circ$ .

$$\text{Имеем: } \angle C = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 111^\circ) = 42^\circ, \text{ т.е.}$$

$$\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ.$$

Ответ: а)  $46^\circ$ ;  $46^\circ$ ; б)  $21^\circ$ ;  $21^\circ$ .

**679.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $DK \perp BC$ ,  $CK = KB$ ;  
 а)  $AD$  и  $CD = ?$   
 б)  $AC = ?$

Решение:

а)  $BD = 5\text{ см}$ ,  $AC = 8,5\text{ см}$ ,

$DK$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ , следовательно,  $BD = DC$  (по св-ву), т.е.  $DC = 5\text{ см}$ , тогда

$$AD = AC - DC = 8,5 - 5 = 3,5\text{ см};$$

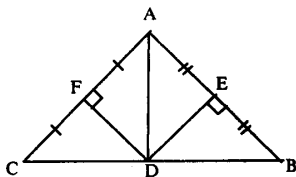
б)  $BD = 11,4\text{ см}$ ,  $AD = 3,2\text{ см}$ ,

$DK$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ , следовательно,  $DC = BD = 11,4\text{ см}$ ;

$$AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 + 14,6 \text{ см.}$$

Ответ: а) 5 см; 3,5 см; б) 11,4 см и 14,6 см.

**680.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $FD \perp AC$ ,  $ED \perp AB$ ;  
 $CF \perp FA$ ,  $AE = EB$ .  
 Доказать:  
 а)  $D$  – середина  $BC$ ;  
 б)  $\angle A = \angle B + \angle C$ .

Доказательство:

- а) 1)  $DE \perp AB$ ,  $AE = EB$ , следовательно,  $BD = AD$ , по свойству серединного перпендикуляра;  
 2)  $FD \perp AC$ ,  $CF = FA$ , следовательно,  $CD = DA$ , по свойству серединного перпендикуляра.  
 3) Имеем:  $AD = BD$ ,  $CD = DA$ , т.е.  
 $CD = DB$ , значит  $D$  – середина  $CB$ ;  
 б)  $\angle A = \angle CAD + \angle DAB$ ;  
 $\triangle ACD$  – равнобедренный, значит,  $\angle CAD = \angle C$ ;  
 $\triangle ADB$  – равнобедренный, значит,  $\angle DAC = \angle B$ , т.е.  
 $\angle A = \angle B + \angle C$ , что и требовалось доказать.

**681.**

Дано:  $\triangle ABC$  – равнобедренный;

$EE_1 \perp AB$ ,  $AE_1 = E_1B$ ;

$P_{ABC} = 27 \text{ см}$ ,  $AB = 18 \text{ см}$ ;

$AC = ?$

Решение:

В  $\triangle AEC$ :  $P_{AEC} = AE + EC + AC$ , по свойству серединного перпендикуляра  $AE = BE$ , значит,

$P_{ABC} = BE + EC + AC$ ,

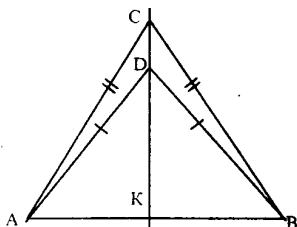
$P_{AEC} = BC + AC$ , где  $BC = AB$  по условию, т.е.

$P_{AEC} = AB + AC$ ,  $27 = 18 + AC$ ,

$AC = 9 \text{ см}$ .

Ответ: 9 см.

**682.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AC = CB$ ;  
 $\triangle ADB$ ,  $AD = DB$ .  
 Доказать:  $CD \perp AB$  и  $AK = KB$ .

Доказательство:

1) Из условия  $AC = CB$ ,  $C \in l_1$ ,  $l_1 \perp AB$ , где

$l_1$  – серединный перпендикуляр

$AD = DB$ , следовательно,  $D \in l_1$ , где  $l_1 \perp AB$

Имеем:  $C$  и  $D$  лежат на одном серединном перпендикуляре к  $AB$ ,  
 и  $l$  и  $l$  совпадают, т.к.

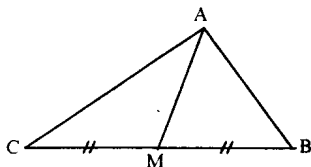
$AK = KB$ ;

$AK = KB$ , а именно:

через  $K$  проведены два перпендикуляра к одному отрезку, но это  
 невозможно по теореме,  $l$  и  $l$  совпали, значит,

$CD \perp AB$ ,  $CD \cap AB = K$ ,  $AK = KB$ .

**683.**



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB \neq AC$ ;  
 $AM$  – медиана.  
 Доказать:  $AM \not\perp BC$ .

Доказательство:

1) Пусть  $AM \perp BC$ .

2) В  $\triangle AMC$  и  $\triangle AMB$ :

$AM$  – общая,  $CM = MB$ , т.е.

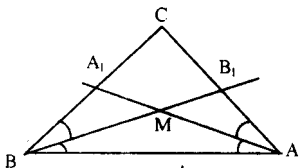
$\triangle AMC = \triangle AMB$  (по двум катетам), значит,

$AC = AB$ , но это противоречит условию  $AB \neq AC$ .

3) Следовательно, наше предположение неверно, и  $AM \not\perp BC$ ,  
 что и требовалось доказать.

**684.**



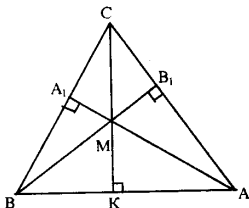


Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AC = BC$ ;  
 $AA_1, BB_1$  – биссектрисы;  
 $AA_1 \cap BB_1 = M$ .  
 Доказать:  $CM \perp AB$ .

Доказательство:

$AA_1 \cap BB_1 = M$ , следовательно,  $CM$  – биссектриса  $\angle C$ , опущенная на основание равнобедренного треугольника, т.е.  $CM \perp AB$ , что и требовалось доказать.

**685.**

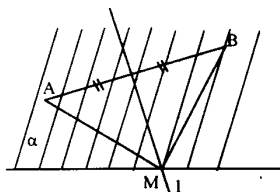


Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AA_1 \cap BB_1 = M$ ;  
 $AC = BC$ ;  
 $BB_1 \perp AC, AA_1 \perp BC$ .  
 Доказать:  $CM \perp BA$ ,  
 $BK = KA$ .

Доказательство:

- 1)  $AA_1 \cap BB_1 = M$ , следовательно по замечательному свойству треугольника:  $CM \perp AB$ .
- 2) В  $\triangle BCK$  и  $\triangle ACK$ :  $CK$  – общая,  $BC = AC$ , т.е.  $\triangle ACK = \triangle BCK$  (по катету и гипотенузе), значит,  $KA = BK$ , что и требовалось доказать.

**687.**



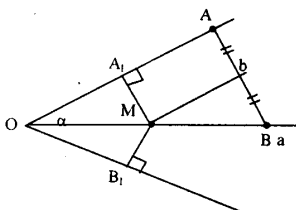
Дано:  $a$ ;  
 $A, B \in a$ ;  
 Построить:  $M \in a, AM = MB$ .

Построение:

- 1) Строим отрезок  $AB$ .
- 2) Строим  $l \perp AB$ , где  $l$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$
- 3)  $l$  пересекает в точке  $M$ .

4) М – искомая точка.

688.



Дано:  $\angle \alpha$ , АВ.

Построить: М, такую, чтобы

$MA_1 \perp OA_1$ ;

$MB_1 \perp OB_1$  и

$AM = MB$ .

Построение:

Строим биссектрису  $\angle O$ .

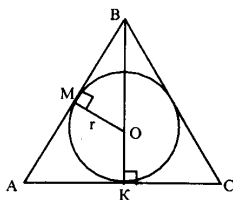
Строим серединный перпендикуляр к АВ.

$a \cap b = M$ .

М – искомая точка.

#### § 4. Вписанная и описанная окружности

689.



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AC = 10$  см,  $AB = BC = 13$  см;

Окр.  $(O; r)$  – вписана в  $\triangle ABC$ ;

$r = ?$

Решение:

В  $\triangle ABK$  и  $\triangle OBM$ :

$\angle B$  – общий,  $\angle M = \angle K = 90^\circ$ , т.е.

$\triangle ABK \sim \triangle OBM$  (по двум углам), значит,

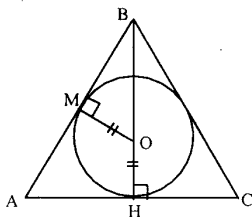
$$\frac{BK}{BM} = \frac{AK}{OM} = \frac{AB}{OB};$$

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 \text{ (т. Пифагора); } 13^2 = 5^2 + BK^2; BK = 12;$$

$$\frac{13}{12-r} = \frac{12}{BM}, 5(12-r) = 13r, r = 3\frac{6}{8} = 3\frac{1}{3}$$

Ответ:  $3\frac{1}{3}$  см.

690.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = BC = 60\text{см}$ ;  
 $BO:OH = 12:5$ ;  
 $BH \perp AC$  – центр вписанной окружности;  
 $AC = ?$

Решение:

В  $\triangle ABH$  и  $\triangle OBM$ :  $\angle B$  – общий,  $\angle M = \angle H = 90^\circ$ , т.е.

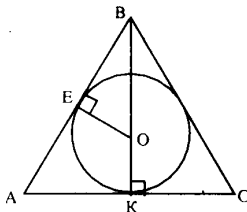
$\triangle ABH \sim \triangle OBM$  (по двум углам), значит,  $\frac{BH}{BM} = \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{OB}$ ;

$BM = 12x$ ,  $OM = 5x$ , следовательно,

$$\frac{60}{12x} = \frac{AH}{5x}; AH = \frac{60 \cdot 5x}{12x}; AH = 25\text{см}.$$

Отсюда,  $AC = 2 \cdot AH = 50\text{см}$ .

691.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $BE = 2\text{см}$ ,  $AE = 3\text{см}$ ;  
 $AB = BC$ .  
 Найти:  $P_{ABC} - ?$

Решение:

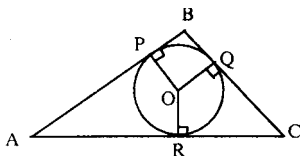
1)  $AE = AK$  (свойство касательных отрезков), значит,  $AK = 3\text{см}$  и  $AC = 6\text{см}$ ;

2)  $AB = AE + EB = 3 + 4 = 7\text{см}$ ;

3)  $P_{ABC} = 7 + 7 + 6 = 20\text{см}$ .

Ответ:  $20\text{см}$ .

692.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 Окр  $(O; R)$  – вписана;  
 $AB = 10\text{см}$ ,  $BC = 12\text{см}$ ,  $CA = 5\text{см}$ ;

AP, PB, BQ, QC, CR, RA = ?

Решение:

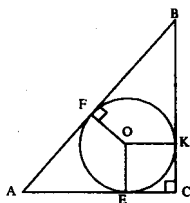
PB = BQ, QC = CR, AR = AP (по св-ву касательных отрезков).

Пусть PB = x, тогда QC = 12 - x и AP = 10 - x,

AR + RC = 5, 12 - x + 10 - x = 5  $\Rightarrow$  x = 8,5,

PB = BQ = 8,5 см, AP = AR = 1,5 см, RC = QC = 3,5 см.

**693.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

$P_{ABC} = ?$

Решение:

а) AB = 26 см, r = 4 см;

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 26$ ,  $P_{ABC} = BK + KC + CE + AE$ ;

$P_{ABC} = 26 + 8 + BK + AE$ ,  $FB + FA = 26$ ,  $P_{ABC} = 26 + 8 + 26 = 60$  см.

б) AF = 5 см, FB = 12 см;

1) AF = AE = 5 см, FB = BK = 12 см (св-во касательных отрезков).

Пусть EC = CK = r,

тогда AC = 5 + r; BC = 12 + r;

$AB^2 = AC^2 + BC^2$  (т. Пифагора для  $\triangle ABC$ )

$17^2 = (5+r)^2 + (12+r)^2$ ,

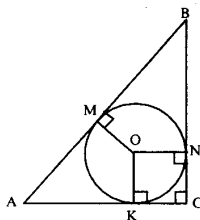
$2r^2 + 34r - 120 = 0$ ,  $r^2 + 17r - 60 = 0$ , ищем корни уравнения

$\begin{cases} r_1 = -20 - \text{не подходит по смыслу} \\ r_2 = 3 \end{cases}$ , следовательно, EC =  $r_2 = 3$  см;

2)  $P_{ABC} = AB + BC + AC = (5 + 12) + (5 + 3) + (12 + 3) = 40$  см.

Ответ: 40 см.

**694.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;

AB = c;

AC + CB = m;

$d - ?$

Решение:

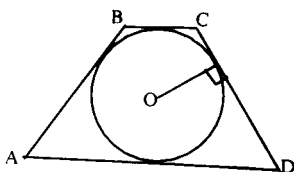
По свойству касательных отрезков:  $NB = MB$ ,  $KC = CN$ ,  $AM = AK$ .

Пусть  $AK = AM = x$ , тогда  $BN = MB = c - x$  и, т.к.

$AC + CB = m$ , то

$$(x + r) + (c - x) + r = m, 2r = m - c, d = m - c.$$

**695.**



Дано:  $ABCD$  – четырехугольник;

Окр  $(O; R)$  – вписана;

$AB + CD = 15\text{см}$ ;

$P_{ABCD} = ?$

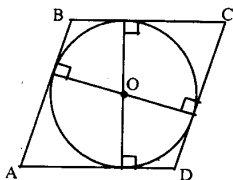
Решение:

1)  $ABCD$  – описанный четырехугольник, следовательно,

$AB + CD = AD + BC$ , т.е.  $AD + DC = 15\text{см}$ ;

2)  $P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD = 30\text{см}$ .

**696.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм;

Окр  $(O; R)$  – вписана.

Доказать:  $ABCD$  – ромб.

Доказательство:

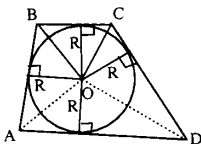
$ABCD$  – описанный около Окр  $(O; R)$ , следовательно,

$AB + CD = AD + BC$ .

Мы знаем, что стороны в параллелограмме попарно равны, следовательно, запишем:  $2AB = 2AD$ , т.е.

$AB = AD$  (соседние стороны равны), следовательно,  $ABCD$  – ромб. Что и требовалось доказать.

**697.**



Дано: ABCD – описанный четырехугольник.

Доказать:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$ .

Доказательство:

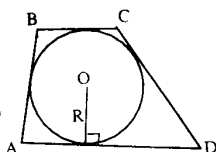
$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{ABO};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R + \frac{1}{2} AD \cdot R + \frac{1}{2} AB \cdot R =$$

$$= \frac{1}{2} R (AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R.$$

Что и требовалось доказать.

**698.**



Дано: ABCD – описанный четырехугольник ;

$AB + CD = 12\text{см}, R = 5\text{см};$

$S_{ABCD} = ?$

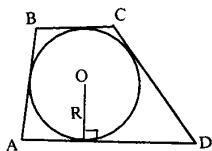
Решение:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 12 = 24\text{см}, \text{ следовательно,}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60\text{см}^2.$$

Ответ:  $60\text{см}^2$ .

**699.**



Дано: ABCD – описанный четырехугольник;

$AB + CD = 10\text{см}, S_{ABCD} = 12\text{см}^2;$

$R = ?$

Решение:

1) ABCD – описанный, следовательно,  $P_{ABCD} = 2 \cdot 10 = 20\text{см};$

2)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} R \cdot P_{ABCD}$ , т.е.  $R = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 12}{20} = 1,2\text{ см}.$

Ответ:  $1,2\text{см}.$

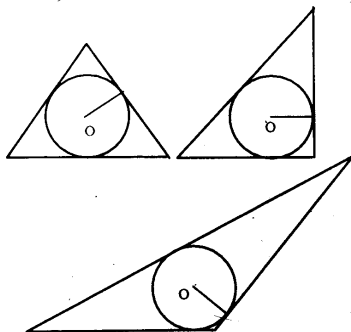
**700.**

Суммы противоположных сторон ромба равны, следовательно, в любой ромб можно вписать окружность.

**701.**

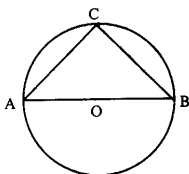
а) остроугольный;

б) прямоугольный;



в) тупоугольный.

**702.**



Дано:  $\triangle ABC$  – вписан в Окр (O;R);  
AB – диаметр;  
 $\angle A, \angle B, \angle C = ?$

Решение:

а)  $\angle C = 134^\circ$ ;

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle C = 67^\circ, \angle B = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ, \angle C = \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ.$$

Ответ:  $90^\circ, 67^\circ, 23^\circ$ .

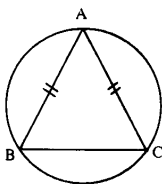
б)  $\angle C = 70^\circ$ ;

$$\angle C = 90^\circ \text{ (опирается на диаметр)}, \angle B = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ;$$

$$\angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Ответ:  $90^\circ, 35^\circ, 55^\circ$ .

703.



Дано:  $\triangle ABC$  – вписанный;  
 $AB = AC$ ,  $\angle C = 102^\circ$ ;  
 $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C = ?$

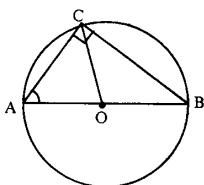
Решение:

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle C = 51^\circ;$$

$AB = AC$ , следовательно,  $\angle B = \angle C = (180^\circ - 51^\circ):2 = 64^\circ 30'$ .

Ответ:  $51^\circ$ ;  $64^\circ 30'$ ;  $64^\circ 30'$ .

704.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$  – вписанный в  
 Окр (O;R).

Доказать: 1)  $O \in AB$ ;  
 2)  $OA = OB$ .

Доказательство:

1)  $\angle C = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle AOB = 180^\circ$ , значит,  
 $AB$  – диаметр Окр (O;R)  $\Rightarrow O \in AB$  и  $AO = OB$ .

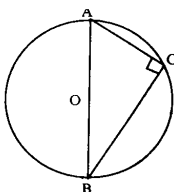
2)  $AC$ ,  $BC$  и  $AB = ?$  Если  $AB = d$  и  $\angle A = \alpha$ ;

$\triangle ABC$  – прямоугольный, следовательно,

$BC = AB \cdot \sin \angle A$ , т.е.  $BC = d \cdot \sin \alpha$ ;

$AC = AB \cdot \cos \angle A$ , т.е.  $AC = d \cdot \cos \alpha$ .

705.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$  – вписанный;  
 $OA = ?$



Решение:

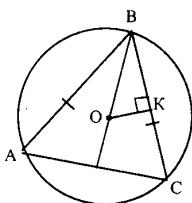
а)  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ;

$AB^2 = 64 + 36 = 100$ ,  $AB = \sqrt{100} = 10$ , следовательно,  $AO = 5$ см;

б)  $AC = 18$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , тогда  $AC = \frac{1}{2} AB$ ,

т.е.  $AB = 2AC = 36$ см, тогда  $AO = 18$ см.

**706.**



Дано:  $\triangle ABC$  – вписанный;

$AB = BC = AC$ ;

$OB = 10$ см;

$AB = ?$

Решение:

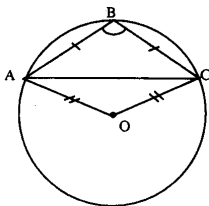
1)  $\triangle ABC$  – равносторонний, следовательно,  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ ;

2) В  $\triangle BKO$ :  $\angle K = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $OB = 10^\circ$ , значит,

$BK = OB \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ ;

3)  $BC = 2BK = 10\sqrt{3}$ .

**707.**



Дано:  $\triangle ABC$  – вписанный;

$AB = BC = 8$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ;

$d = ?$

Решение:

1)  $\triangle ABC$  – равнобедренный, следовательно,

$\angle C = \angle A = (180^\circ - 120^\circ):2 = 30^\circ$ ;

2)  $\angle C = \frac{1}{2} AB$ , т.е.  $AB = 60^\circ$ ,  $\angle A = \frac{1}{2} BC$ , т.е.  $BC = 60^\circ$ , значит,

$\angle ABC = 120^\circ$  и  $\angle AOC = 120^\circ$ ;

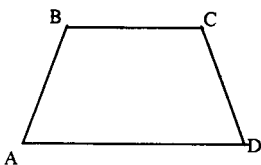
3)  $ABCO$  – параллелограмм (т.к.  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle O$ ), т.е.

$AB = OC$ ,  $BC = AO$  (по свойству);

$AB = BC = 8$ ,  $OC = OA = 8$  см;

4)  $d = 2r = 2 \cdot 8 = 16$  см.

**708.**



а) В прямоугольнике все углы прямые, следовательно, суммы противоположных углов равны по  $180^\circ$ , что является необходимым условием для того, чтобы описать окружность около 4-угольника.

б)

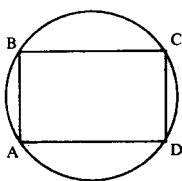
1)  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle C = \angle B$  (по свойству равнобедренной трапеции);

2)  $\angle B + \angle A = 180^\circ$ ,  $\angle C + \angle D = 180^\circ$  (по свойству равнобедренной трапеции)

Имеем:  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$  необходимое условие для того, чтобы можно было описать окружность.

Т.е. около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

**709.**



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм вписанный.

Доказать:  $ABCD$  – прямоугольник.

Доказательство:

$ABCD$  – вписанный, следовательно,  $\angle C + \angle A = 180^\circ$ ;  $\angle D + \angle B = 180^\circ$ ,

но по свойству углов параллелограмма  $\angle C = \angle A$  и  $\angle B = \angle D$ ,

т.е.  $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$ , значит

$ABCD$  – прямоугольник (по определению).

**710.**

Дано:  $ABCD$  – трапеция вписанная

Доказать:  $AB = CD$

Доказательство:

1)  $ABCD$  – вписанная трапеция, следовательно

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle C + \angle A = 180^\circ \quad (1);$$

Так же:  $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ$  (2);

по свойству углов при  $AD \parallel BC$ .

2) Сравниваем (1) и (2):

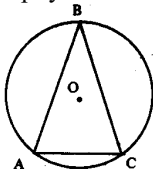
$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle B = \angle C;$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle A = \angle D.$$

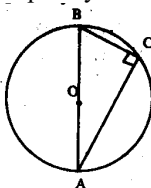
Имеем: углы при верхнем и нижнем основаниях попарно равны, следовательно,  $ABCD$  – равнобедренная.

711.

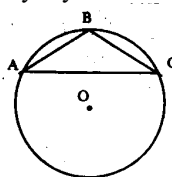
1) Остроугольный:



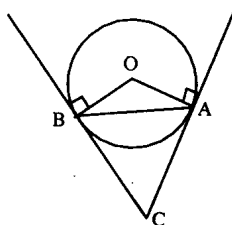
2) Прямоугольный:



3) Тупоугольный:



712.



Дано: Окр( $O$ ;  $R$ );

$AB$  – хорда;

$AC$ ,  $BC$  – касательные.

Доказать:  $AC \cap BC = C$ .

Доказательство:

$$1) \angle BAC = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ и } \angle ABC = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ (см. 644), тогда, } \angle BAC =$$

$= \angle ABC < 90^\circ$ , т.к.  $AB < 180^\circ$ , значит,

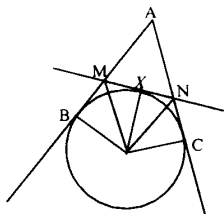
хорда  $AB$  не является диаметром.

2)  $\angle ABC = \angle BAC \neq 90^\circ$ , следовательно,

$AC \not\perp AB$ ,  $BC \not\perp AB$ , значит,  $AC \cap BC$ .

Что и требовалось доказать.

713.



Дано:  $\text{Окр}(O; R)$ ;

$AB, AC$  – касательные;

$X \in BC, X \in l$ ;

$l$  – касательная;

$AB \cap l = M, AC \cap l = N$ .

Доказать:  $P_{ABCD}$  и  $\angle MON$  не зависят от выбора точки  $X$ .

Доказательство:

1)  $P_{ANM} = AM + AN + MN$ ;

$BM = MX$  и  $XN = NC$  (свойство касательных отрезков), т.е.

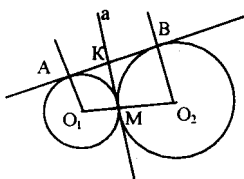
$P_{ANM} = NA + (MX + XN) + AM = NA + MB + NC + AM = AB + AC$ , что и требовалось доказать.

2)  $\angle MON = \angle XON + \angle MOX$ ;

$\triangle BMO = \triangle MXO$  (по катету  $BM = MX$  и гипотенузе  $MO$ ), значит  $\angle MOX = \angle BOM$ .

Также из  $\triangle CON = \triangle XON$ :  $\angle CON = \angle XON$ , т.е.  $\angle MON = \angle BOM + \angle CON$ , а именно, не зависит от  $X$ , что и требовалось доказать.

714.



Дано:  $\text{Окр}(O_1; R)$  и  $\text{Окр}(O_2; r)$ ;

$\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; r) = M$ ;

$a$  – общая касательная;

$AB$  – касательная.

Доказать:  $M \in \text{Окр}(K; \frac{1}{2} AB)$ .

Доказательство:

1)  $M$  – точка касания окружностей,  $a$  – их касательная;

$a \perp O_1O_2$ ;

2) по свойству касательных к окружности  $O_1A \perp AB$ ,  $O_2B \perp AB$ , т.е.  $O_1A \parallel O_2B$  (по свойству параллельных прямых).

3)  $\triangle MKO_2$ :

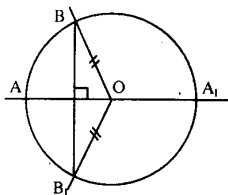
$BO_2 = MO_2 = R$ ,  $\angle M = \angle B = 90^\circ$ , т.е.  $MKBO_2$  – квадрат.

4) Также,  $\triangle AKO_1$  – квадрат, т.е.  $MK = KB = AK$ , значит,

К равноудалена от А, М, В, т.е. К – центр окружности радиуса АК, где  $AK = \frac{1}{2} AB$ .

Имеем:  $M \in \text{Окр}(K; \frac{1}{2} AB)$ . т.к.  $MK = AK = \frac{1}{2} AB$ ,  
прямые  $AO_1, BO_2, O_1O_2$  – касательные к этой окружности.

**715.**

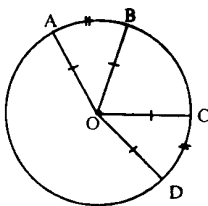


Дано:  $\text{Окр}(O; R)$ ;  
 $AA_1$  – диаметр,  $BB_1$  – хорда;  
 $AA_1 \perp BB_1$ .  
Доказать:  $AB = AB_1 < 180^\circ$ .

Доказательство:

1)  $BO = OB_1 = R$ , следовательно,  $\triangle B_1BO$  – равнобедренный  
из усл.  $OA \perp BB_1$ , значит  $AB = AB_1$ ;  
2)  $AB + AB_1 = BB_1$  (или  $2AB = BB_1$ );  
 $BB_1 = 180^\circ$  – наибольшее значение,  
допустим,  $BB_1$  – диаметр окружности, но это противоречит условию, значит,  $BB_1 < 180^\circ$ ,  
т.е.  $AB = AB_1 < 90^\circ < 180^\circ$ .

**716.**



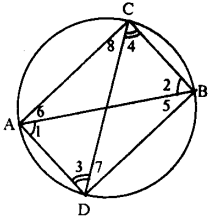
Дано:  $A, B, C, D \in \text{Окр}(O; R)$ ;  
 $AB = CB$ .  
Доказать:  $AB = CB$

Доказательство:

1) По св-ву  $AB = DC$ , следовательно,  $\angle AOB = \angle DOC$ .  
2) В  $\triangle AOB$  и  $\triangle DOC$ :  $OC = AO = R$ ,  $OD = OB = R$ ,  
 $\angle AOB = \angle DOC$ , значит,  
 $\triangle AOB = \triangle DOC$  (по двум сторонам и углу между ними),

значит,  $AB = CD$ , что и требовалось доказать.

717.



Дано:  $AB$  – диаметр;  
 Окр( $O$ ;  $R$ );  
 $AD \parallel CB$ .  
 Доказать:  $CD$  – диаметр.

Доказательство:

- 1)  $AD \parallel CB$ , следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 4 = \angle 3$  (накрест лежащие);
- 2)  $\triangle ACB$ ,  $\triangle ABD$  – прямоугольные треугольники,  
 $\angle D = \angle C = 90^\circ$ ,  $AB$  – общая,  $\angle 1 = \angle 2$ , т.е.  
 $\triangle ABC = \triangle ABD$  (по гипотенузе и углу), значит,  
 $\angle 8 = \angle 7 = 90^\circ - \angle 4$ ,  $\angle 6 = \angle 5$ .

3) В  $\triangle ACD$ :

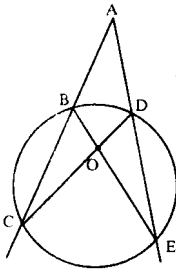
$$\angle A + \angle D + \angle C = 180^\circ;$$

$$\angle A + \angle 3 + 90^\circ - \angle 3 = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle A = 90^\circ$$

Имеем:  $CD = 2\angle A = 180^\circ$ , значит,

$CD$  – диаметр окружности, что и требовалось доказать.

719.



Дано: Окр( $O$ ;  $R$ );  
 $AC$ ,  $AE$  – секущие.

Доказать:  $\angle CAE = \frac{1}{2} (CE - BD)$ .

Доказательство:

- 1) В  $\triangle ACD$ :  $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle D)$  (I);
- 2)  $\angle D = 180^\circ - \angle CDE$ ,  $\angle CDE$  – вписанный, следовательно,  
 $\angle CDE = \frac{1}{2} CE$ , т.е.  $\angle D = 180^\circ - \frac{1}{2} CE$  (1);

$\angle C$  – вписанный, следовательно,  $\angle C = \frac{1}{2} \text{BD}$  (2).

Подставим в I формулу значения (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned} \angle A &= 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2} \text{CE} + \frac{1}{2} \text{BD}) = 180^\circ - 180^\circ - \frac{1}{2} \text{CE} + \frac{1}{2} \text{BD} = \\ &= \frac{1}{2} (\text{CE} - \text{BD}), \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

**720.**

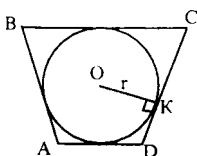
*Вершина разностороннего треугольника не может лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне, т.к. каждая точка серединного перпендикуляра должна быть равноудалена от концов отрезка, к которому проведен этот перпендикуляр (по св-ву). А это условие не выполняется, т.к.  $AB \neq AC \neq BC$ .*

**721.**

*Необходимым условием вписать окружность в четырехугольник является равенство сумм длин противоположных сторон, значит квадрат – единственный прямоугольник, который удовлетворяет этому условию. Следовательно, прямоугольник,*

*описанный около окружности – квадрат.*

**722.**



Дано: ABCD – четырехугольник,  
описанный около Окр(O; r);  
 $AB:CD = 2:3$ ;  $AD:BC = 2:1$ ;  
 $S_{ABCD} = S$ .  
Найти: AB, BC, CD, AD – ?

Решение:

1) ABCD – описанный, следовательно,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot OK$ , т.е.

$$P_{ABCD} = \frac{2S_{ABCD}}{OK} = \frac{2S}{R}$$

2) Также,  $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$

ABCD – описанный, следовательно,

$$CD + AB = AD + BC = \frac{1}{2} P_{ABCD}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} CD + AB = \frac{S}{r}; \\ AD + BC = \frac{S}{r} \end{cases}; \begin{cases} 3x + 2x = \frac{S}{r}; \\ y + 2y = \frac{S}{r} \end{cases};$$

$x$  см – длина  $l$  части,  $y$  см – длина  $l$  части

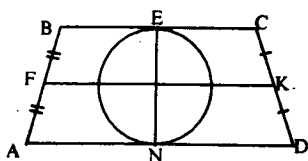
$$\begin{cases} 5x = \frac{S}{r}; \\ 3y = \frac{S}{r} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{S}{5r}; \\ y = \frac{S}{3r} \end{cases}.$$

Имеем:

$$AB = 2 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{2S}{5r}, BC = 2 \cdot \frac{S}{3r} = \frac{2S}{3r}, CD = 3 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{3S}{5r}, AD = \frac{S}{3r}$$

Ответ:  $\frac{2S}{5r}; \frac{3S}{5r}; \frac{2S}{3r}; \frac{S}{3r}$ .

723.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $BC, AD$  – касательные к  
 $\text{Окр}(O; R)$ ;  
 $FK$  – средняя линия.  
 Доказать:  $O \in FK$ .

Доказательство:

1)  $BC$  – касательная, следовательно,  $OE \perp BC$ ,

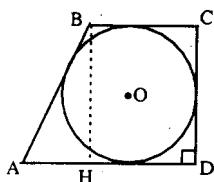
$AD$  – касательная, следовательно,  $ON \perp AD$ ;

$BC \parallel AD$  (из определения трапеции), значит,

$FN$  – единственный перпендикуляр к  $BC$  и  $AD$ ,  
 проходящий через точку  $O$ .

2)  $FK$  – средняя линия трапеции, следовательно,  $FK \parallel BC \parallel AD$  и  
 $FK \cap EN = O$  и  $EO = ON$  (т. Фалеса).

725.



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  
 $\angle D = 90^\circ$ ;  
 $BC = a; AD = b$ ;



$$CD = ?$$

Решение:

В  $\triangle ABH$ :  $\angle H = 90^\circ$ ,  $AH = b - a$ ;

$ABCD$  – описанный, следовательно,  $AB + CD = AD + BC = a + b$ ,  
т.е.  $AB + BH = a + b$ .

Пусть  $BH = x$ , тогда  $AB = (a + b) - x$

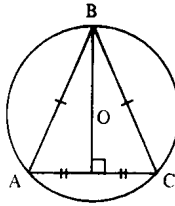
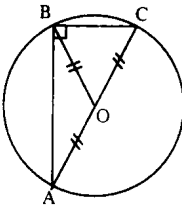
$BH^2 = AB^2 - AH^2$  (по т. Пифагора), т.е.

$$x^2 = (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 - (b - a)^2$$

$$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a + b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2$$

$$2x(a + b) = 2ab, x = \frac{2ab}{2(a + b)} = \frac{ab}{(a + b)}$$

**726.**



Дано:  $\triangle ABC$  –  
вписанный в  $\text{Окр}(O; R)$

$O \in$  медиане

Доказать:  $\triangle ABC$  –  
равнобедренный или  
прямоугольный

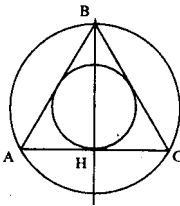
Доказательство:

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам  $\triangle ABC$ . Т.к.  $O \in$  медиане, значит медиана и серединный перпендикуляр совпадают, т.е. треугольник равнобедренный или равнобедренный (одна из медиан является серединным перпендикуляром к стороне).

дикуляром к осно-  
ванию).

$O$  – лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника  
 $BO = AO = OC$ .

727.

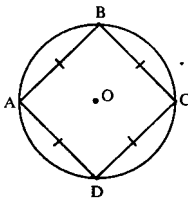


Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ;  
 $O_1$  – центр вписанной окружности;  
 $O_2$  – центр описанной окружности;  
 $BH \perp AC$ ,  $AH = HC$ .  
Доказать:  $O_1, O_2 \in BH$ .

Доказательство:

- 1)  $O_2$  – центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, значит,  $O_2 \in HB$ , т.к.  $HB \perp AC$ .
- 2)  $O_1$  – центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, значит,  $O_1 \in HB$ ,  $HB$  – биссектриса (свойство высоты равнобедренного треугольника).
- 3) Имеем:  $O_2 \in HB$  и  $O_1 \in HB$ .

728.

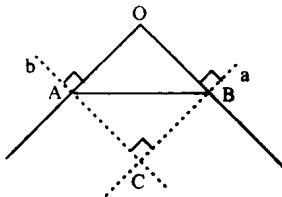


Дано:  $ABCD$  – ромб вписанный.  
Доказать:  $ABCD$  – квадрат.

Доказательство:

$ABCD$  – вписанный, следовательно,  $\angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180^\circ$ .  
В ромбе  $\angle D = \angle B$ ,  $\angle C = \angle A$ , то  $\angle C = \angle B = \angle A = \angle D = 90^\circ$ , следовательно,  $ABCD$  – квадрат.

730.



Дано:  $\triangle AOB$ ;  
 $a \perp b$ ,  $b \perp OA$ ;

$$a \cap b = C.$$

Доказать: около  $\triangle ABO$  можно описать окружность.

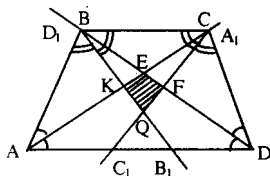
Доказательство:

1)  $a \perp b$ ,  $b \perp OA$ , следовательно,  $\angle AOC = \angle OBC = 90^\circ$ , т.е.  
 $\angle OBC + \angle OAC = 180^\circ$ .

2) В четырехугольнике  $\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360^\circ$ ;  
 $\angle C = \angle O = 180^\circ$ , а именно:

суммы противоположных углов равны по  $180^\circ$ , и около  $\triangle OBC$  можно описать окружность.

**731.**



Дано:  $ABCD$  – трапеция;

$AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  – биссектрисы.

Доказать: около  $KEFQ$  можно описать окружность.

Доказательство:

1)  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  (как односторонние при  $BC \parallel AD$  и секущей

$AB$ ), следовательно,  $\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B = 90^\circ$ .

Из  $\triangle ABK$ :  $\angle 1 + \angle 2 (=90^\circ) + \angle K = 180^\circ$ , где  $\angle 2 = 90^\circ$ ,  
 т.е.  $\angle K = 90^\circ$ .

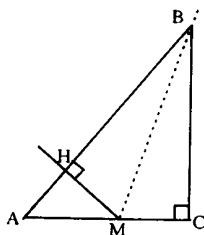
2) Также, из  $\triangle CFD \Rightarrow \angle F = 90^\circ$ .

3) Имеем: в четырехугольнике  $KEFQ$

$\angle F + \angle K = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , т.е.

$\angle E + \angle Q = 180^\circ$ , значит, около  $KEFQ$  можно описать окружность.

**732.**



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $M \in AC$ ;

$MN \perp AB$ .

Доказать:  $\angle MNC = \angle MBC$ .

Доказательство:

В четырехугольнике НВСМ

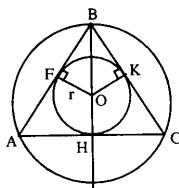
$\angle C = \angle H = 90^\circ$ , т.е.  $\angle C + \angle H = 180^\circ$ , тогда

$\angle M + \angle B = 180^\circ$ , значит около НВСМ можно описать окружность.

$\angle MHC$  – вписанный, следовательно,  $\angle MHC = \frac{1}{2} \angle C$ , значит,

$\angle MHC = \angle MBC$ , что и требовалось доказать.

733.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $AB = BC = AC$ ;  
 $R = 10\text{ см}$ ;  
 $r = ?$

Решение:

1)  $\triangle ABC$  – равносторонний, следовательно, центры окружностей совпадают.

2)  $BH \perp AC$ , следовательно,

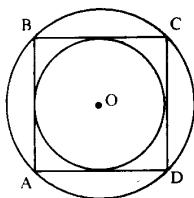
$BH$  – биссектриса (свойство равностороннего треугольника).

Т.е. в  $\triangle FBO$ :  $\angle F = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $BO = 10\text{ см}$ , значит,

$OF$  лежит против  $\angle B = 30^\circ$ , т.е.,  $FO = \frac{1}{2} BO = 5\text{ см}$ .

Ответ: 5 см.

734.



Дано:  $ABCD$  – параллелограмм,  
вписанный и описанный.

Доказать:  $ABCD$  – квадрат.

Доказательство:

1)  $ABCD$  – вписанный, следовательно,  $\angle C + \angle A = 180^\circ$ ,  $\angle D + \angle B = 90^\circ$ , т.е.  $ABCD$  – квадрат.

2)  $ABCD$  – описанный, следовательно,  $CD + AB = AD + BC$

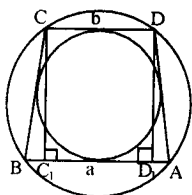
В параллелограмме  $BC = AD$ ,  $AB = CD$ , значит,

$AB = BC = CB = AD$ , т.е.,  $ABCD$  – ромб, но

$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$ , значит этот ромб – квадрат.

Четырехугольник вписанный и описанный одновременно – квадрат.

**735.**



Дано:  $ABCD$  – трапеция вписанная и описанная;

$AB = a$ ,  $CD = b$ ;

$r = ?$

Решение:

1)  $ABCD$  – трапеция вписанная в окружность, следовательно,  $ABCD$  – равнобедренная трапеция и  $BC = AD$ ;

2)  $ABCD$  – трапеция, описанная около окружности, значит,

$$AD + BC = CD + AB = b + a, \quad BC = DA = \frac{a+b}{2}, \quad BC_1 = \frac{a-b}{2}$$

3)  $\triangle BCC_1$ :  $\angle C_1 = 90^\circ$ ; по т. Пифагора  $\Rightarrow$

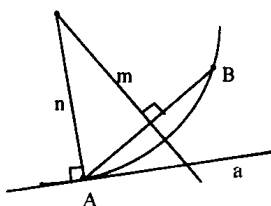
$$CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2, \text{ т.е. } CC_1^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab, \text{ име-}$$

ем:  $CC_1 = \sqrt{ab}$ .

$$\text{Но } r = \frac{1}{2} CC_1, \text{ значит, } r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

**736.**



Дано:  $A \in a$ ,  $B \notin a$ .

Построить окружность такую, чтобы  $B \in \text{Окр}$ ,

$a$  – касалась окружности в точке  $A$ .

Построение:

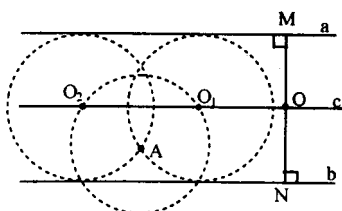
$AB$ .

Строим серединный перпендикуляр  $m$  к  $AB$ .

Из точки  $A$  строим перпендикуляр  $n$  к прямой  $a$

$n \cap m = O$  – центр искомой окружности.

737.



Дано:  $a \parallel b$ ,  $A \notin a$ ,  $A \notin b$ .

Построить окружность, такую, чтобы

$A \in \text{Окр.}$

$a, b$  – касательные к Окр.

Построение:

1)  $a$  и  $b$  — касательные к одной окружности,  $a \parallel b$ , значит, они проходят через концы диаметра.

$r = ?$

а) восстановим перпендикуляр из  $M \in a$  к прямой  $b$ ;

б) построим серединный перпендикуляр к  $MN$ ;

с)  $\cap MN = O$ ,  $ON = MO = R$ ;

в) проведем окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $R$ ;

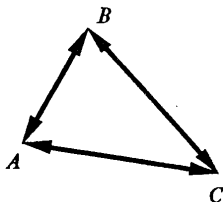
г) окружность пересекает прямую в двух точках  $O_2$  и  $O_1$ ,

$O_2$  и  $O_1$  — есть центры искомых окружностей.

# Глава IX. Векторы

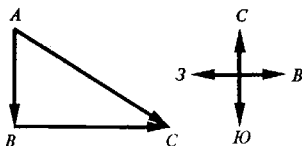
## § 1. Понятие вектора

738.



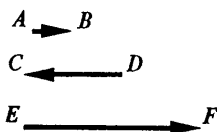
$\overrightarrow{BA}$ , начало – т. В, конец – т. А.  
 $\overrightarrow{CA}$ , начало – т. С, конец – т. А.  
 $\overrightarrow{AB}$ , начало – т. А, конец – т. В.  
 $\overrightarrow{BC}$ , начало – т. В, конец – т. С.  
 $\overrightarrow{AC}$ , начало – т. А, конец – т. С.  
 $\overrightarrow{CB}$ , начало – т. С, конец – т. В.

739.



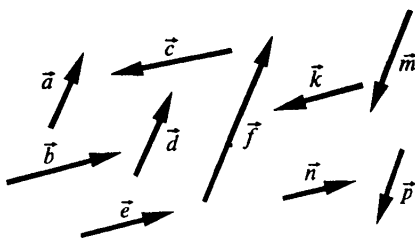
Масштаб: в 1 см 100 км, т.е. 1: 10000000.

740.



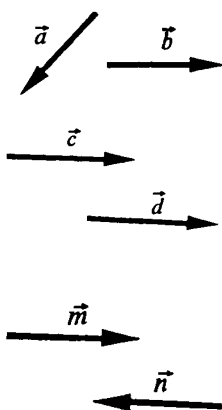
а)  $|\overrightarrow{AB}| = 1$  см, б)  $|\overrightarrow{AB}| = 3$  см,  
 $|\overrightarrow{DC}| = 2,5$  см,  $|\overrightarrow{EF}| = 1$  см,  
 $|\overrightarrow{EF}| = 4,5$  см;  $|\overrightarrow{CD}| = 1,5$  см.

741.



а)  $\vec{a} \uparrow \vec{d}$ ,  $\vec{a} \uparrow \vec{l}$ ;  
б)  $\vec{b} \uparrow \vec{e}$ ,  $\vec{b} \uparrow \vec{h}$ ;  
в)  $\vec{b} \uparrow \vec{k}$ ,  $\vec{b} \uparrow \vec{g}$ ;  
г)  $\vec{a} \uparrow \vec{g}$ ,  $\vec{a} \uparrow \vec{m}$ .

742.

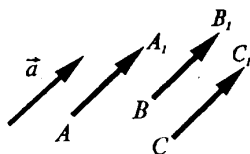


а)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$  см;  
 $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – неколлинеарны.

б)  $\vec{c} \uparrow \vec{d}$ ,  $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 3,5$  см.  $\vec{c} = \vec{d}$ .  
 Векторы равны, т.к. их длины равны и они сопоставимы

в)  $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 3$  см.

743.

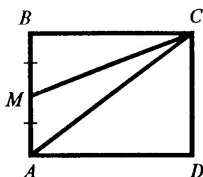


$\overline{AA_1} = \vec{a}$ , т.к.  $|\overline{AA_1}| = |\vec{a}|$  и  $\overline{AA_1} \uparrow \vec{a}$ .  
 $\overline{BB_1} = \vec{b}$ , т.к.  $|\overline{BB_1}| = |\vec{b}|$  и  $\overline{BB_1} \uparrow \vec{b}$ .  
 $\overline{CC_1} = \vec{c}$ , т.к.  $|\overline{CC_1}| = |\vec{c}|$  и  $\overline{CC_1} \uparrow \vec{c}$ .

744.

Векторные величины – скорость и сила, т.к. для них необходимо знать не только числовое значение, но и направление.

745.



Дано: ABCD – прямоугольник,  
 $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  
 М – середина АВ.

Найти:  $|\overline{AB}|$ ,  $|\overline{BC}|$ ,  $|\overline{DC}|$ ,  
 $|\overline{MC}|$ ,  $|\overline{MA}|$ ,  $|\overline{CB}|$ ,  $|\overline{AC}|$  – ?

Решение:

1) в прямоугольнике противоположные стороны равны, значит,  
 $CD = 3$  см,  $AD = 4$  см. Из  $\triangle ACD$ :



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}^2 \text{ (т. Пифагора),}$$

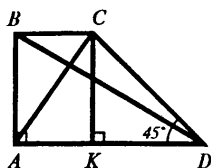
М – середина АВ, следовательно,  $MB = MA = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (см)}$ .

В  $\triangle BCM$   $\angle B = 90^\circ$  по т. Пифагора:

$$MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 1,5^2} = \sqrt{18,25} \text{ (см)}.$$

2) Длиной вектора называется длина отрезка, соединяющая начало вектора и конец, имеем:  $|\overline{AB}| = 3 \text{ см}$ ,  $|\overline{BC}| = 4 \text{ см}$ ,  $|\overline{DC}| = 3 \text{ см}$ ,  $|\overline{CB}| = 4 \text{ см}$ ,  $|\overline{MA}| = 1,5 \text{ см}$ ,  $|\overline{MC}| = \sqrt{18,25} \text{ см}$ ,  $|\overline{AC}| = 5 \text{ см}$ .

**746.**



Дано:

$$\angle D = 45^\circ, \angle A = 90^\circ,$$

$$D = 12 \text{ см}, AB = 5 \text{ см}.$$

$$|\overline{BD}|, |\overline{CD}|, |\overline{AC}| = ?$$

Решение:

1) В  $\triangle ABD$  ( $\angle A = 90^\circ$ );

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ (т. Пифагора);}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{BD} = 13 \text{ см}.$$

2) Построим  $CK \perp AD$ .  $ABCK$  – прямоугольник, значит,  $AK = BC$ ,  $AB = CK = 5 \text{ см}$ .

3) В  $\triangle CKD$ :  $\angle K = 90^\circ$ ,  $\angle D = 45^\circ$ , значит,  $\angle KCD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ,

$\triangle CKD$  – равнобедренный, т.е.  $CK = KD = 5 \text{ см}$ .

В  $\triangle CKD$ : ( $\angle K = 90^\circ$ ) по т. Пифагора:

$$CD^2 = CK^2 + KD^2, \text{ значит,}$$

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \text{ (см)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{CD} = 5\sqrt{2} \text{ см}.$$

4)  $CK = AB = 5 \text{ см}$  и  $BC = AK$ ,  $KD = 5 \text{ см}$ , т.е.

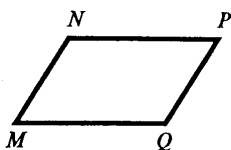
$$AK = AD - KD = 12 - 5 = 7 \text{ (см)}; BC = 7 \text{ см}.$$

В  $\triangle ABC$  по т. Пифагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ значит,}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \text{ (см)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{74} \text{ см}.$$

747.



а) MNPQ – параллелограмм.

Коллинеарные векторы:  $\overrightarrow{NP}$ ,  $\overrightarrow{MQ}$ ,  $\overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{QM}$ ;

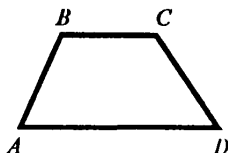
где:  $\overrightarrow{NP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MQ}$  и  $\overrightarrow{NP} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{NP} \uparrow\downarrow \overrightarrow{QM}$ ,

$\overrightarrow{PN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{QM}$  и  $\overrightarrow{PN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NP}$ ,  $\overrightarrow{PN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MQ}$ .

Коллинеарные векторы:  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  и  $\overrightarrow{QP}$ ,

причем:  $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{QP}$  и  $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NM}$  и  $\overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{QP}$ .

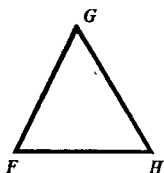


б) ABCD – трапеция.

Коллинеарные векторы:  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DA}$ ,

причем:  $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$  и  $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{DA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$  и  $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$ .



в)

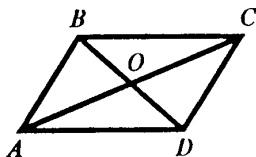
Коллинеарные векторы:

$\overrightarrow{FG} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GF}$ ,

$\overrightarrow{GH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HG}$ ,

$\overrightarrow{FH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{HF}$ .

748.



а) т.к.  $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}|$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  
( $AB = DC$  – противоположные стороны параллелограмма);  $AB \parallel DC$ , т.е.

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$

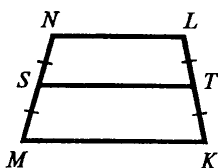
б)  $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$ ,

в)  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ , ( $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$ ).

Т.к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то  $\overline{AO} = \frac{1}{2} \overline{AC}$  и  $\overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ , т.е.  $\overline{OC} \uparrow\uparrow \overline{AO}$ .

г)  $\overline{AC} \neq \overline{BD}$ , т.к. эти векторы не являются сонаправленными.

**749.**



Дано:

$MN = LK$ ,  $S$  – середина  $MN$ ,

$T$  – середина  $LK$ .

$\overline{NL} \neq \overline{KL}$ , (эти векторы не сонаправленные).

$\overline{MS} = \overline{SN}$ , ( $|\overline{MS}| = |\overline{SN}|$ ) и  $\overline{MS} \uparrow\uparrow \overline{SN}$ ,

$MN \neq KL$ , (эти векторы не являются сонаправленными).

$|\overline{MK}| \neq |\overline{TS}|$ , следовательно,  $|\overline{TS}| \neq |\overline{KM}|$ . В  $MNLK$   $TS$  – средняя линия, значит,

$TS = \frac{NL + MK}{2}$ , т.к.  $NL \neq MK$ , то и  $TS \neq MK$

$\overline{TL} = \overline{KT}$ , т.к.  $\overline{KT} \uparrow\uparrow \overline{TL}$  и  $|\overline{TL}| = |\overline{KT}|$  (т.к.  $T$  – середина  $LK$ , т.е.  $TL = KT$ ).

**750.**

1) Дано:  $\overline{AB} = \overline{CD}$

Доказать: середины  $AD$  и  $BC$  совпадают.

Доказательство:

$\overline{AB} = \overline{CD}$ , поэтому и  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ,  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ,

т.е.  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ .

$ABCD$ :  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , следовательно,  $ABCD$  – параллелограмм (по I признаку), диагонали в параллелограмме пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е. середины  $AD$  и  $BC$  совпадают.

2) Дано: середины отрезков  $AD$  и  $DB$  совпадают.

Доказать:  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

Доказательство:

Четырехугольник  $ABCD$ : диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е.

$ABCD$  – параллелограмм (по III признаку). В параллелограмме противоположные стороны параллельны и равны, т.е.  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  и  $CD = AB$  и  $\overline{CD} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ ,  $|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$ , следовательно,  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

**751.**

а)  $\overline{AB} = \overline{DC}$  и  $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$  (по усл.).

Определить: вид четырехугольника  $ABCD$ .

1)  $\overline{DC} = \overline{AB}$ , т.е.  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{DC}$ , значит,  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ,  $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$ , то  $DC = AB$ .

В  $ABCD$  противоположные стороны параллельны и равны, т.е.  $ABCD$  – параллелограмм (по I признаку).

2)  $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ , т.е.  $BC = AB$ , значит смежные стороны равны и все стороны параллелограмма  $ABCD$  равны, значит,  $ABCD$  – ромб.

б) Дано:  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{DC}$ ,  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$  не коллинеарны.

Определить: вид четырехугольника  $ABCD$ .

$\overline{DC} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ , т.е.  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$  и  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$  не коллинеарны  $\Rightarrow AD$  не параллельна  $BC$ .

Т.е. в четырехугольнике  $ABCD$  две стороны параллельны, а две другие не параллельны, следовательно,  $ABCD$  – трапеция.

**752.**

а) если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  и  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ .

Верно.

б) если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , т.е.  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

Верно.

в) если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$  – не может быть.

Не верно.

г) если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , то не обязательно  $\vec{a} = \vec{b}$  (может быть и  $\vec{a} \neq \vec{b}$ )

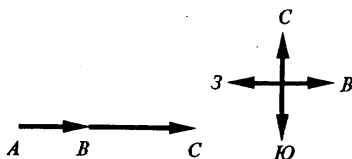
Не верно.

д) если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$  ( $\vec{b}$  сонаправлен с любым вектором).

Верно.

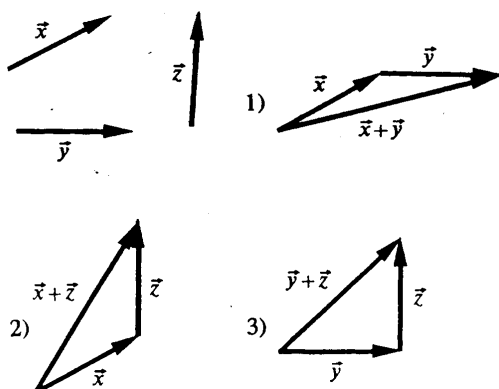
## § 2. Сложение и вычитание векторов

753.

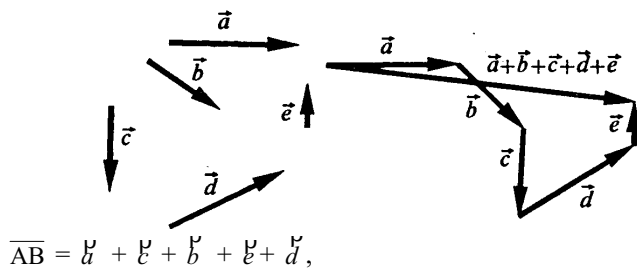


Масштаб: т.е. 1:1 000 000. (в 1 см 10 км);  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

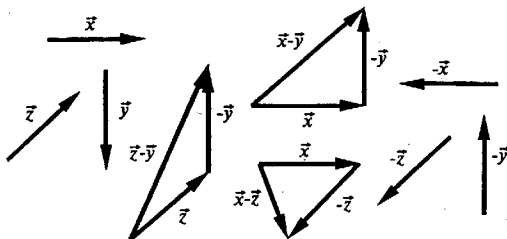
754.



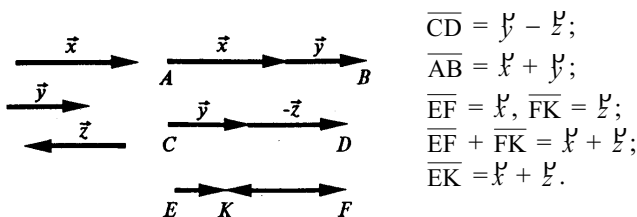
755.



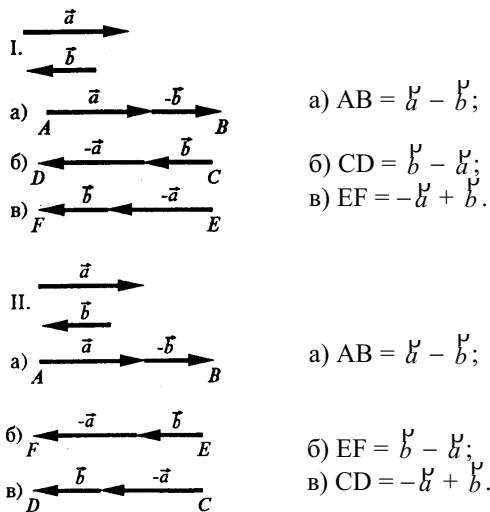
756.



757.



758.



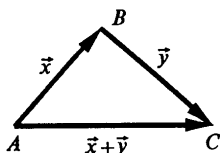
759.

По правилу треугольника имеем:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ;

а)  $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MQ}$  и  $\overline{MP} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$ , тогда,  $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$ ;

б)  $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$  и  $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{MP}$ , тогда,  $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MQ} + \overline{QP}$ .

760.



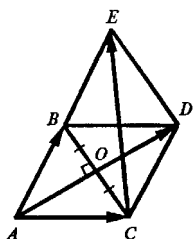
1) Если A, B, C не лежат на одной прямой, то векторы  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{x} + \vec{y}$  образуют  $\triangle ABC$ . По неравенству треугольника  $AC < AC + BC$ , т.е.  $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$ .

2) Если A, B, C лежат на одной прямой, то векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны, но это не так по условию.

761.

По правилу многоугольника имеем:  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA}$ , но  $\overline{AA} = \vec{0}$  из определения.

762.



Дано:  $\triangle ABC$  – равносторонний со стороной a.

а)  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = ?$

б)  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = ?$

в)  $|\overline{AB} + \overline{CB}| = ?$

г)  $|\overline{BA} - \overline{BC}| = ?$

д)  $|\overline{AB} - \overline{AC}| = ?$

Решение:

а)  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC} = a$ .

б) Построим  $CD \parallel AB$  и  $BD \parallel AC$ . Тогда ABCD – параллелограмм (по определению) и смежные стороны  $AB = AC = a$ , следовательно, ABCD – ромб.

По правилу параллелограмма имеем:  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ , значит,  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = AD$ , AD – диагональ ромба, следовательно,

$AD = 2AO$ ,  $AO \perp BC$  и  $O$  – середина  $BC$ . Рассмотрим  $\triangle AOC$ :  
 $(\angle O = 90^\circ)$  по т. Пифагора:

$$AO^2 = AC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ следовательно,}$$

$$AO = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AD = 2 \cdot AO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Построим  $DE \parallel BC$  и  $DE = BC$ . Тогда  $\overline{DE} = \overline{CB}$  и  $\overline{CD} = \overline{AB}$  (как противоположные стороны параллелограмма). Значит,  
 $\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{CE}$ ,  $CDEB$  – ромб по построению со стороной  $a$  и  $CDEB = ABDC$ , тогда, диагональ  $CE = AD = a\sqrt{3}$ .

г) по правилу треугольника имеем:  $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$ , т.е.

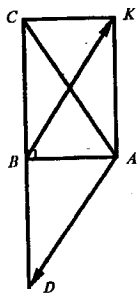
$\overline{BA} - \overline{BC} = -\overline{AC}$ , тогда  $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CA}$ ,  $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}| = CA = a$ .

д) по правилу треугольника имеем:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ , следовательно,  
но,

$\overline{AB} - \overline{AC} = -\overline{BC}$ , тогда  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ ,  $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}| = CB = a$ .

Ответ:  $a$ ,  $a\sqrt{3}$ ,  $a\sqrt{3}$ ,  $a$ ,  $a$ .

**763.**



Дано:  $\angle B = 90^\circ$ ,

$AB = 6$ ,  $BC = 8$ .

а)  $|\overline{BA}| - |\overline{BC}|$  и  $|\overline{BA} - \overline{BC}| = ?$

б)  $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$  и  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = ?$

в)  $|\overline{BA}| + |\overline{BC}|$  и  $|\overline{BA} + \overline{BC}| = ?$

г)  $|\overline{AB}| - |\overline{BC}|$  и  $|\overline{AB} - \overline{BC}| = ?$

Решение:

а)  $|\overline{BA}| - |\overline{BC}| = BA - BC = 6 - 8 = -2$ .  $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}| = CA$ .

По т. Пифагора:  $AC^2 = BA^2 + BC^2$ , значит,

$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ , значит,  $|\overline{BA} - \overline{BC}| = 10$ .

б)  $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$ ,  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC = 10$ .

в)  $|\overline{BA}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$ .

Построим  $AK \parallel BC$  и  $AK = BC$ . Значит,  $ACKB$  – параллелограмм



и  $\angle CBA = \angle BAK = 90^\circ$ , следовательно,  $ACKB$  – прямоугольник.

$$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BK}, |\overline{BA} + \overline{BC}| = \overline{BK} = BK.$$

( $\angle A = 90^\circ$ ) по т. Пифагора:  $AK^2 + AB^2 = BK^2$ , значит,

$$BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10, \text{ тогда } |\overline{BA} + \overline{BC}| = 10.$$

$$г) |\overline{AB}| - |\overline{BC}| = 6 - 8 = -2.$$

Построим  $BD = BC$  и  $C, B, D$  лежат на одной прямой, следовательно,

$$\overline{CB} = \overline{BD} \text{ и } \overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

По т. Пифагора:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ значит,}$$

$$AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10, \text{ значит, } |\overline{AB} - \overline{BC}| = 10.$$

**764.**

Учитывая, что  $\overline{AB} = -\overline{BA}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{MC}) + (\overline{MD} - \overline{KD}) &= \\ = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CM}) + (\overline{MD} + \overline{DK}) &= \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BD}) - (\overline{MK} + \overline{KD}) &= \\ = (\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}) - (\overline{MD}) &= \overline{AD} - \overline{MD} = \overline{AD} + \overline{DM} = \overline{AM}. \end{aligned}$$

**765.**

По правилу треугольника:  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ , имеем:

$$\overset{p}{b} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \overset{b}{b};$$

$$\overset{q}{d} = (\overline{XY} - \overline{XZ}) + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \overset{b}{b};$$

$$\overset{r}{f} = (\overline{ZY} - \overline{XY}) - \overline{ZX} = \overline{ZY} + \overline{YX} + \overline{XZ} = \overline{ZX} + \overline{XZ} = \overline{ZZ} = \overset{b}{b}.$$

**766.**

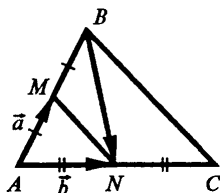
$$\overline{XY} = -\overset{p}{b} + (-\overset{p}{b}) + \overset{r}{f} + \overset{q}{d}.$$

**767.**

Решение задачи приведено в учебнике.

768.

Дано: М – середина АВ,



N – середина AC,  
 $\overline{AM} = \vec{a}$ ,  $\overline{AN} = \vec{b}$ ;  
 $\overline{BM}$ ,  $\overline{NC}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{BN} = ?$

Решение:

$\overline{BM} = -\vec{a}$ , т.к.  $|\overline{BM}| = |\vec{a}|$ , (М – середина АВ) и  $\overline{BM} \uparrow \downarrow \vec{a}$ .

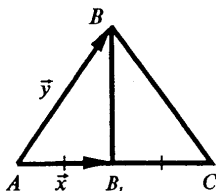
$\overline{NC} = \vec{b}$ , т.к.  $|\overline{NC}| = |\vec{b}|$ , (N – середина AC) и  $\overline{NC} \uparrow \uparrow \vec{b}$ .

$\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}$ , тогда

$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \vec{b} - \vec{a}$ ;

$\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{AN} = -\vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}$ .

769.



Дано:  $BB_1$  – медиана,

$\overline{AB_1} = \vec{x}$ ,  $\overline{AB} = \vec{y}$ ;

$\overline{B_1C}$ ,  $\overline{BB_1}$ ,  $\overline{BA}$ ,  $\overline{BC} = ?$

Решение:

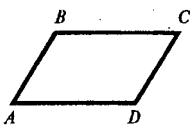
$\overline{B_1C} = \vec{x}$ , т.к.  $|\overline{B_1C}| = |\vec{x}|$ , ( $B_1$  – середина AC) и  $\overline{B_1C} \uparrow \uparrow \vec{x}$ ;

$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{AB_1} = -\overline{AB} + \overline{AB_1} = -\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y}$ ;

$\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{y}$ ,  $|\overline{BA}| = |\vec{y}|$  и  $\overline{BA} \uparrow \downarrow \vec{y}$ ;

$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1C} = -\vec{y} + \vec{x} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{x}$ .

770.



Выразить:  $\overline{AC}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

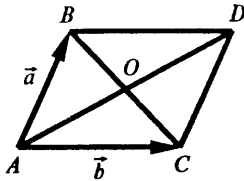
а)  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

б)  $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ ,  $CB \parallel AD$  и  $CB = AD$ ,  $\overrightarrow{CB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AD}$ ,  
следовательно,  $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ , значит:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{CD}) = -\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}.$$

в)  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$ ,  $DA \parallel BC$  и  $DA = BC$ ,  $\overrightarrow{DA} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BC}$ , тогда  
 $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{DA}) = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$

771.



Дано:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}.$$

Выразить:  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$ ,  
 $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \text{ (из } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| \text{ и } \overrightarrow{BC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AD}).$$

$$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$$

$$(\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \text{ и тогда } \overrightarrow{CO} \uparrow \downarrow \overrightarrow{OA} \text{ и } |\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{OA}|).$$

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}.$$

772.

Дано: ABCD – параллелограмм,

X – произвольная точка плоскости.

Доказать:  $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$ .

Доказательство:

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} \text{ – правило треугольника.}$$

$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} \text{ – правило треугольника.}$$

Имеем:

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD},$$

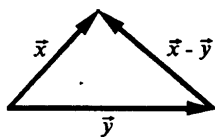
$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{XD}.$$

Сравнивая левую и правую части уравнения, имеем:

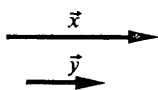
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}, \text{ и это верно.}$$

Из  $\overrightarrow{DC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AB}$  и  $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}|$  (т.к. ABCD – параллелограмм), ч.т.д.

773.



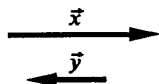
Если  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  неколлинеарны, то по неравенству треугольника имеем:  
 $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$ , т.к.  $|\vec{x} - \vec{y}|$ ,  $|\vec{x}|$ ,  $|\vec{y}|$  — стороны треугольника.



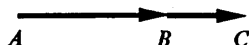
Если  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны и  $\vec{x} \uparrow \vec{y}$ , то точки A, B, C лежат на одной прямой и  $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BC}$ .



$\overline{AB} = \vec{x}$ ,  $\overline{BC} = \vec{y}$ ,  $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$ , то  
 $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$ .

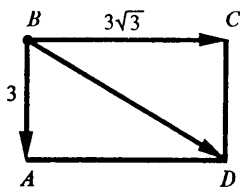


Если  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны и  $\vec{x} \updownarrow \vec{y}$ , то точки A, B, C лежат на одной прямой и  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ,  $\overline{AB} = \vec{x}$ ,  $\overline{BC} = -\vec{y}$ ,  $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$ , т.е.  $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ .



774.

Пусть парашютист находится в точке B. Равнодействующая силы тяжести ( $\overline{AB}$ ) и силы ветра ( $\overline{BC}$ ) есть  $\overline{BD}$ , и ABCD — прямоугольник, AB — вертикаль, следовательно,  $\angle ABD = ?$



$\overline{BC} = \overline{AD}$  и  $DC = AD$  (ABCD — прямоугольник).

( $\angle A = 90^\circ$ ) по теореме Пифагора:

$BD^2 = AD^2 + AB^2$ , значит

$$BD = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6.$$

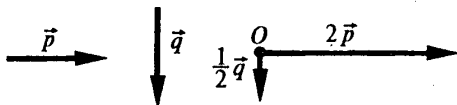
Т.к.  $AB = \frac{1}{2} BD$ , то по свойству пря-

моугольного треугольника имеем:  $\angle ADB = 30^\circ$ . А значит, ABC катет AB = 3 в 2 раза меньше гипотенузы BD = 6, значит,  $\angle ABD = 90^\circ - \angle ADB = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

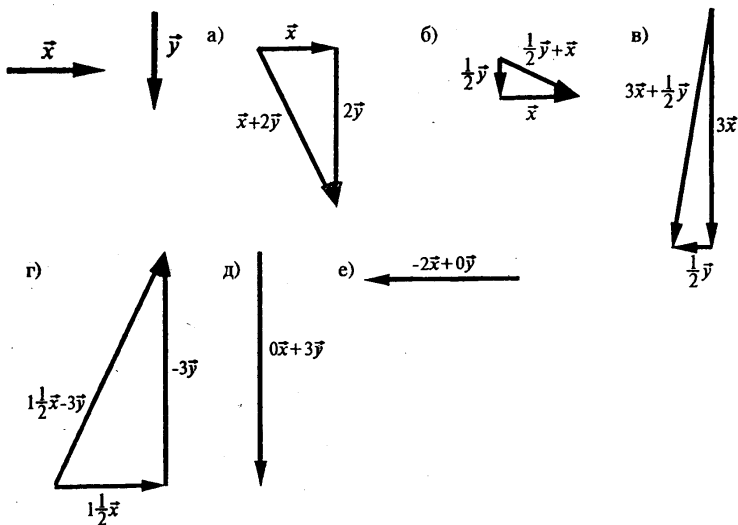
**§ 3. Умножение вектора на число.**  
**Применение векторов к решению задач**

775.

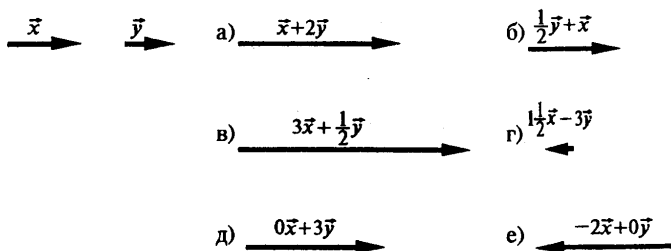


776.

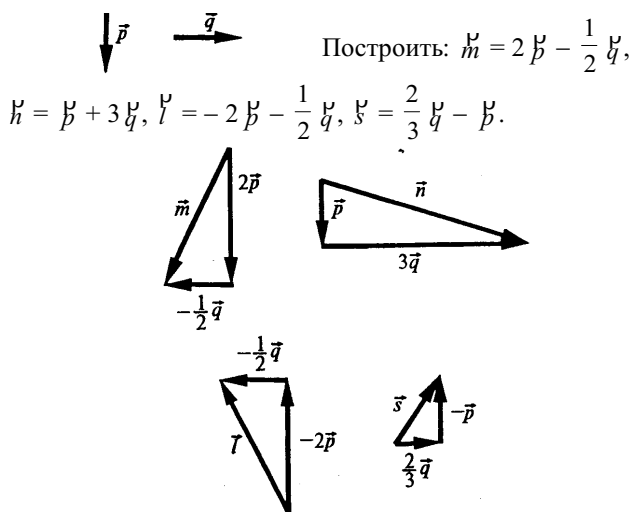
I.  $\vec{y}$  и  $\vec{x}$  неколлинеарны.



II.  $\vec{y}$  и  $\vec{x}$  коллинеарны.

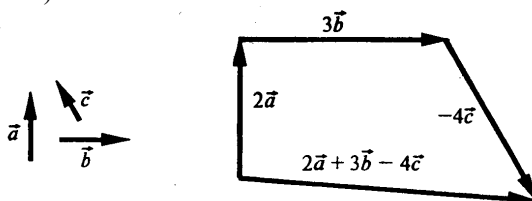


777.

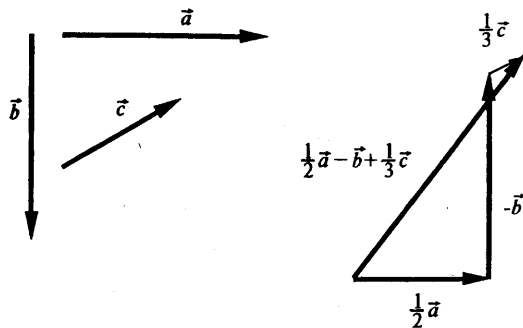


778.

Случай а).



Случай б).



779.

Дано:  $\vec{b} = 3\vec{a}$ .

Решение:

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, -\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, \frac{1}{2} \vec{a} \uparrow 3\vec{a}, -2\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, 6\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}.$$

$$\|\vec{a}\| = \frac{1}{3} \|\vec{b}\|, |-\vec{a}| = \frac{1}{3} \|\vec{b}\|, \left|\frac{1}{2} \vec{a}\right| = \frac{1}{6} \|\vec{b}\|, \|-2\vec{a}\| = \frac{2}{3} \|\vec{b}\|, \|6\vec{a}\| = 2\|\vec{b}\|.$$

780.

Решение:

а)  $|\overline{1 \cdot a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = \|\vec{a}\|, 1 > 0$ , значит,  $\overline{1 \cdot a} \uparrow \uparrow \vec{a}$ , т.е.  $\overline{1 \cdot a} = \vec{a}$ .

б)  $|\overline{-1 \cdot a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = \|\vec{a}\|, -1 < 0$ , значит,  $\overline{-1 \cdot a} \uparrow \uparrow \vec{a}$ , т.е.  $\overline{-1 \cdot a} = -\vec{a}$ .

781.

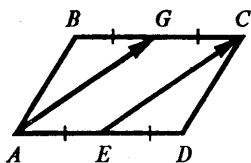
Дано:  $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}, \vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$ .

а)  $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2 \cdot (\vec{m} + \vec{n}) - 2 \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} - 2\vec{m} + 2\vec{n} = 4\vec{n}$ .

б)  $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2 \cdot (\vec{m} + \vec{n}) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} = 2,5\vec{m} + 1,5\vec{n}$ .

в)  $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{3}(\vec{m} - \vec{n}) = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = -1\frac{1}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$ .

782.



Дано:

$$BG = GC, AE = ED,$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$$

Выразить:  $\overrightarrow{EC}$  и  $\overrightarrow{AG}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

$BC = AD$  (т.к.  $ABCD$  – параллелограмм).

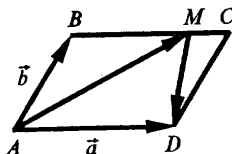
Тогда  $AE = ED = BG = GC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$ .

$$\begin{aligned}\overline{EC} &= \overline{ED} + \overline{DC} = \frac{1}{2} \overline{BC} + \overline{DC} = -\frac{1}{2} \overline{CB} + \overline{DC} = -\frac{1}{2} \vec{b} + \vec{x} = \\ &= \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{b}\end{aligned}$$

$AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , следовательно,  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

$$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = \overline{DC} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{DC} - \frac{1}{2} \overline{CB} = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{b}.$$

**783.**



Дано:

$$BM:MC = 3:1,$$

$$\vec{x} = \overline{AD}, \vec{b} = \overline{AB}.$$

Выразить:  $\overline{AM}$  и  $\overline{MD}$  через  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

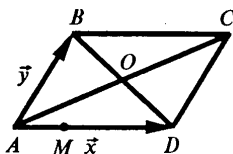
$$1) BM:MC = 3:1, \text{ следовательно, } \overline{BM} = \frac{3}{4} \overline{BC}.$$

$ABCD$  – параллелограмм, значит,  $AB \parallel BC$ ,  $AD = BC$ , значит,  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{BC} = \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{AD} = \vec{b} + \frac{3}{4} \vec{x} = \frac{3}{4} \vec{x} + \vec{b}.$$

$$\begin{aligned}\overline{AM} + \overline{MD} &= \overline{AD}, \text{ следовательно, } \overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \vec{x} - \left(\frac{3}{4} \vec{x} + \vec{b}\right) = \vec{x} - \frac{3}{4} \vec{x} - \vec{b} = \frac{1}{4} \vec{x} - \vec{b}.\end{aligned}$$

**784.**



Дано:

$$AM = \frac{1}{2} MD, \vec{x} = \overline{AD}, \vec{y} = \overline{AB}.$$

$$\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{BC} = \overline{AD}, BO = OD,$$

$AO = OC$  – так как  $ABCD$  – парал-

лелограмм

$$a) \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \vec{x} + \vec{y},$$

$$\overline{AO} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y},$$



$$\overline{CO} = \frac{1}{2} \overline{CA} = -\frac{1}{2} \overline{AC} = -\frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{y}) = -\frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y},$$

$$\overline{DB} = \vec{y} - \vec{x}, \overline{DO} = \frac{1}{2} \overline{DB} = \frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{y} - \frac{1}{2} \vec{x},$$

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{AD} = 2 \overline{AD} = \vec{x},$$

$$\overline{AD} + \overline{CO} = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y} = \frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y},$$

$$\overline{CO} + \overline{OA} = -\overline{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y};$$

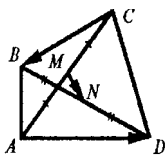
$$\text{б) } \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{MD}, \text{ значит, } \frac{1}{3} \overline{AD} \text{ и } \overline{MD} = \frac{2}{3} \overline{AD};$$

$$\overline{MC} = \overline{MD} + \overline{DC} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \vec{x} + \vec{y},$$

$$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = -\overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AD} = -\vec{y} + \frac{1}{3} \vec{x} = \frac{1}{3} \vec{x} - \vec{y},$$

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{AO} + \overline{AM} = -\overline{AO} + \overline{AM} = -(\frac{1}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y}) + \frac{1}{3} \vec{x} = \\ &= -\frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y} + \frac{1}{3} \vec{x} = -\frac{1}{6} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y}. \end{aligned}$$

**785.**



Дано:

$$\overline{AM} = \overline{MC}, \overline{BN} = \overline{ND}.$$

$$\text{Доказать: } \overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}).$$

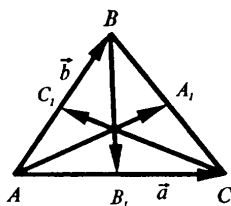
Доказательство:

$\overline{AM} = \overline{MC}, \overline{BN} = \overline{ND}$ , значит,

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{AC} + \overline{CN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}) + \\ &+ \overline{CN} + \frac{1}{2} \overline{DB} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DC} + \overline{CN} + \frac{1}{2} (\overline{DC} + \overline{CB}) = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DC} + \overline{CN} + \frac{1}{2} \overline{DC} + \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \overline{CN} + \\ &+ \overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \overline{CN} + \overline{CN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}).$$

786.



Дано:  $AA_1$

$BB_1, CC_1$  – медианы,

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

Выразить:  $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$

через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

Из  $AA_1, BB_1, CC_1$  – медианы, следует  $BA_1 = A_1C, B_1C = AB_1, AC_1 = C_1B$ .

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}.$$

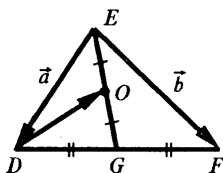
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ , значит,

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

787.



Дано:  $DG = GF, OE = OG$ ,

$\vec{a} = \overrightarrow{DE}, \vec{b} = \overrightarrow{DF}$ .

Выразить:  $\overrightarrow{DO}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}, \text{ значит, } \vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b}, \text{ или } \overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}.$$

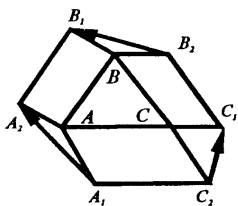
$DG = GF$ , то

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DF} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO}$ . Т.к.  $OE = OG$ , то

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} &= \vec{a} \text{ и } \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}, \text{ имеем: } \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} - \\ &- \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) - \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a}. \end{aligned}$$

789.



Дано:  $ABB_1A_2$ ,  $BCC_1B_2$ ,  
 $ACC_2A_1$  – параллелограммы.  
 Доказать: существует  
 треугольник, стороны которого  
 параллельны и равны соответственно  
 $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ .

Доказательство:

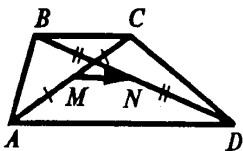
$\overline{AA_1} = \overline{C_2C}$ ,  $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$ ,  $\overline{CC_1} = \overline{BB_2}$ , т.к. это стороны параллелограммов.

Докажем, что  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$ ;

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= \overline{A_1A} + \overline{AA_2} = \overline{C_2C} + \overline{BB_1} = \overline{C_2C_1} + \overline{C_1C} + \overline{BB_2} + \\ &+ \overline{B_2B_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1} + \overline{BB_2} - \overline{CC_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}.\end{aligned}$$

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$ , значит, можно построить треугольник со сторонами, параллельными и равными соответственно сторонам  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ , ч.т.д.

790.



Дано:  $AM = CM$ ;  $BN = DN$ .  
 Доказать:  $MN \parallel AD$ ,

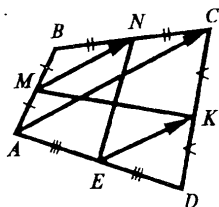
$$MN \parallel BC, MN = \frac{AD - BC}{2}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = \frac{1}{2} \overline{CA} + \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DB} = \overline{AD} + \\ &+ \frac{1}{2} (\overline{CB} + \overline{BA}) + \frac{1}{2} (\overline{DA} + \overline{AB}) = \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \frac{1}{2} \overline{BA} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{DA} + \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \frac{1}{2} \overline{BA} - \frac{1}{2} \overline{AD} - \frac{1}{2} \overline{BA} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}) = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{BC}).\end{aligned}$$

$\overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{BC})$ , значит,  $MN \parallel AD$ ,  $MN \parallel BC$  ( $\overline{BC}$  и  $\overline{AD}$  – коллинеарны, следовательно, им коллинеарен и вектор  $\frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{BC})$ ) и  $MN = \frac{AD - BC}{2}$ .

**791.**



Дано:

M, N, K, E – середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA.

Доказать: MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Построим векторы,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{EK}$  и  $\overline{MN}$ :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC};$$

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

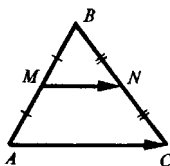
$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC};$$

$$\overline{EK} = \overline{ED} + \overline{DK} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DC} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ и } \overline{EK} = \frac{1}{2} \overline{AC}, \text{ следовательно, } \overline{MN} = \overline{EK}.$$

$\overline{MN} = \overline{EK}$ , т.е.,  $MN \parallel EK$  и  $MN = EK$ , значит MNKE – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, ч.т.д.

**792.**



Дано:  $AM = MB$ ,

$CN = NB$ .

Доказать:  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2} AC$ .

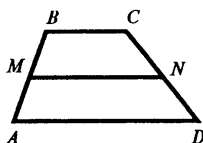
Доказательство:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \text{ и } \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} =$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC};$$

т.е.  $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ , следовательно,  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2} AC$ . ч.т.д.

**793.**



Дано:

$$AB = 13 \text{ см}, CB = 15 \text{ см},$$

$$P_{ABCD} = 48 \text{ см}, MN - \text{средняя линия}$$

$$MN = ?$$

Решение:

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$ , следовательно,

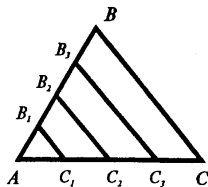
$$BC + AD + 13 + 15 = 48, \text{ значит,}$$

$$BC + AD = 20;$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (см)} - \text{по св-ву средней линии трапеции.}$$

Ответ: 10 см.

**794.**



$$\text{Дано: } AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B,$$

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C, B_1C_1 = 3,4;$$

$$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \parallel BC;$$

$$B_2C_2, B_3C_3 = ?$$

Решение:

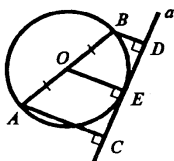
1)  $AB_1 = B_1B_2$  и  $AC_1 = AC_2$ , значит,  $B_1C_1$  – средняя линия  $\triangle AB_2C_2$ , тогда  $B_2C_2 = 2 \cdot B_1C_1 = 2 \cdot 3,4 = 6,8$ .

$B_2C_2 \parallel BC$  и  $B_2B_3 = B_3B$ ,  $C_2C_3 = C_3C$ , значит,  $B_3C_3$  – средняя линия трапеции  $B_2BCC_2$ , следовательно, по свойству

$$B_3C_3 = \frac{B_2C_2 + BC}{2} = \frac{6,8 + 13,6}{2} = 10,2.$$

Ответ: 6,8; 10,2.

795.



Дано:  
 $a$  – касательная к окружности;  
 $BD \perp a$ ,  $AC \perp a$ ,  $AC = 18$  см,  $BD = 12$  см.  
 $AB = ?$

Решение:

$$AO = BO = \frac{1}{2} AB - \text{радиусы.}$$

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит  $OE \perp a$ .

$AC \perp a$  и  $BD \perp a$ , тогда  $AC \parallel BD$ , значит,  $ABCD$  – трапеция.

$OE \perp a$ ,  $AC \perp a$ ,  $BD \perp a$ , тогда  $OE \parallel AC \parallel BD$ , тогда по т. Фалеса  $CE = ED$ , т.е.  $OE$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ .

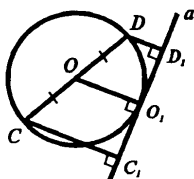
$$OE = \frac{AC + BD}{2} = \frac{18 + 12}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (см)} - \text{по свойству средней линии трапеции.}$$

$OE$  – радиус, следовательно,

$$AB = 2 \cdot OE = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (см).}$$

Ответ: 30 см.

796.



Дано:  
 $a$  – касательная  
 $CC_1 \perp a$ ,  $DD_1 \perp a$ ,  
 $CC_1 = 11$  см,  $CB = 27$  см.  
 $DD_1 = ?$

Решение:

$OO_1 \perp a$ , следовательно,  $OO_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$  и  $CO = OD$ , тогда

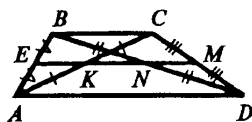
$OO_1$  – средняя линия трапеции  $CDD_1C_1$ , значит,

$$OO_1 = \frac{CC_1 + DD_1}{2}, \text{ тогда}$$

$$13,5 = \frac{11 + DD_1}{2}, \text{ или } DD_1 + 11 = 27, DD_1 = 16 \text{ см, т.к. } OO_1 - \text{радиус.}$$

Ответ: 16 см.

797.



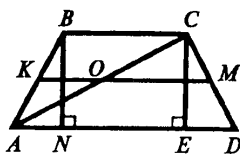
Дано:  $AK = CK$ ;  $BN = DB$ ;  
 $EM$  – средняя линия.

Доказать: что  $EM$  проходит  
 через  $N$  и  $K$ .

Доказательство:

$EM \parallel BC \parallel AD$  (т.к. средняя линия параллельна основаниям).  
 $CM = MD$  и  $EM \parallel BC$ , тогда по т. Фалеса  $EM$  проходит через середину отрезка  $BD$ , т.е. через  $N$ .  
 $AE = EB$  и  $EM \parallel BC$ , тогда по т. Фалеса  
 $EM$  проходит через середину  $AC$ , т.е. через  $K$ . ч.т.д.

798.



Дано:  $AB = CD = 48$  см,  
 $KM$  – средняя линия,  
 $KO = 11$  см,  $MO = 35$  см.  
 Найти: углы трапеции.

$KM$  – средняя линия трапеции, значит,  $KO$  – средняя линия  $\triangle ABC$ ,  
 т.е.  $KO = \frac{1}{2} BC$ , или  $BC = 2 \cdot KO = 2 \cdot 11 = 22$  (см).

$KM$  – средняя линия трапеции, значит,  $MO$  – средняя линия  
 $\triangle ACD$ , т.е.  $MO = \frac{1}{2} AD$ , или  $AD = 2 \cdot MO = 2 \cdot 35 = 70$  (см).

3)  $BN \perp AD$ ,  $CE \perp AD$  – высоты трапеции.

$BN = CE$ ,  $AB = CD$ , т.к. трапеция равнобедренная, тогда  
 $\triangle ABN = \triangle CED$  (по гипотенузе и катету), следовательно,  
 $AN = ED$ .  $NBCE$  – прямоугольник, тогда  $NE = BC = 22$  см и

$$ED = AN = \frac{1}{2} (AD - NE) = \frac{1}{2} (70 - 22) = 24 \text{ (см)}.$$

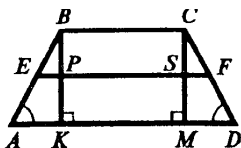
Из  $\triangle CDE$ :  $\angle CED = 90^\circ$ ,  $CD = 48$  см,  $ED = 24$  см. Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то он противолежит углу в  $30^\circ$ , следовательно,  $\angle ECD = 30^\circ$ ,  
 $\angle D = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$  (по свойству прямоуг.  $\triangle$ ).  
 $\angle A = \angle D = 60^\circ$ , т.к.  $ABCD$  – равнобедренная,

$\angle BCD + \angle D = 180^\circ$  (как односторонние при параллельных AD, BC и секущей CD), значит  $\angle BCD = 120^\circ$ .

$\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$ , т.к. ABCD – равнобедренная.

Ответ:  $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$ .

799.



Дано:  $BK, CM \perp AD$ ;

$AB = CD, KD = 7$ ;

EF – средняя линия;

EF = ?

Пусть  $KM = a$ , значит  $BC = a$  (KBСM – прямоугольник). Пусть  $AK = b$ , значит  $MD = b$  ( $\triangle ABK = \triangle DCM$  по гипотенузе  $AB = CD$  и острому углу  $\angle A = \angle D$ ), т.к. ABCD – равнобедренная.

$\triangle ABK$  EP – средняя линия, тогда  $EP = \frac{1}{2}b$ ,

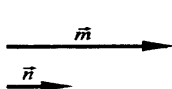
$\triangle DCM$  FS – средняя линия, тогда  $FS = \frac{1}{2}b$ .

$EF \parallel BC$ , следовательно,  $PS \parallel BC, PS \perp BK, PBCS$  – прямоугол. и  $PS = BC = a$ .

5)  $EF = EP + PS + SF = \frac{1}{2}b + a + \frac{1}{2}b = a + b = KM + MD = KD = 7 \text{ см}$

Ответ: 7 см.

800.

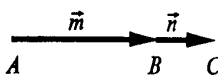


I. Дано:  $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{n}$ .

Доказать:  $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$ .

Выполним сложение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  так:

поместим начало вектора  $\vec{n}$  в конец вектора  $\vec{m}$  и соединим начало вектора  $\vec{m}$  и конец вектора  $\vec{n}$ . Из  $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{n}$  следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C, тогда  $AB + BC = AC$ , и  $AC = |\vec{m} + \vec{n}|$ ,  $AB = |\vec{m}|$  и  $BC = |\vec{n}|$ , значит,  $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$ .

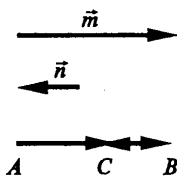


II. Дано:  $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}, |\vec{m}| \geq |\vec{n}|$ .

Доказать:

$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$ .





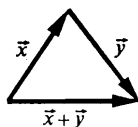
Выполним сложение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  так: поместим начало вектора  $\vec{n}$  в конец вектора  $\vec{m}$  и соединим затем начало вектора  $\vec{m}$  и конец вектора  $\vec{n}$ . Из  $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$  следует, что точки А, В, С лежат на одной прямой и С лежит между А и В, тогда

$$AB = AC + BC, \text{ и } |\overline{AC}| = |\vec{m} + \vec{n}|, |\overline{AB}| = |\vec{m}| \text{ и } |\overline{BC}| = |\vec{n}|.$$

$$AC = AB - BC, \text{ значит } |\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|.$$

**801.**

Доказать:  $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ .



I.  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  неколлинеарны.

Неравенство верно, т.к.  $|\vec{x}|$ ,  $|\vec{y}|$  и  $|\vec{x} + \vec{y}|$  стороны треугольника, и по известному неравенству имеем:

$$|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}| \text{ и } |\vec{x}| < |\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{y}|, \text{ т.е.}$$

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}|.$$

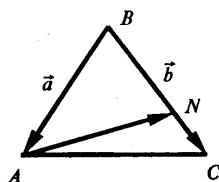
II. Если  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны, то по предыдущей задаче

$$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|, \text{ если } \vec{m} \uparrow \vec{n}, \text{ и } |\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|,$$

если  $\vec{m} \downarrow \vec{n}$ , значит, верно.

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

**802.**



Дано:

$$BN = 2NC,$$

$$\vec{a} = \overline{BA} \text{ и } \vec{b} = \overline{BC}.$$

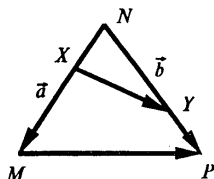
Выразить:  $\overline{AN}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

$$\text{Из } \overline{BN} = 2\overline{NC} \text{ следует: } \overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = -\overline{BA} + \overline{BN} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}.$$

803.



Дано:

$$\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}, \quad \frac{NY}{YP} = \frac{3}{2},$$

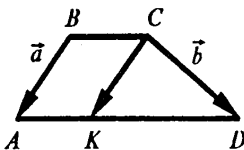
$$\vec{a} = \overrightarrow{NM}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{NP}.$$

Выразить:  $\overrightarrow{XY}$ ,  $\overrightarrow{MP}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Из  $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$  следует:  $\overrightarrow{NX} = \frac{2}{5} \overrightarrow{NM}$ , из  $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$  следует  $\overrightarrow{NY} = \frac{3}{5} \overrightarrow{NP}$ .

$\overrightarrow{NX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{NY}$ , значит,  $\overrightarrow{XY} = \frac{3}{5} \overrightarrow{NP} - \frac{2}{5} \overrightarrow{NM} = \frac{3}{5} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}$ .

804.



Дано:  $BC = \frac{1}{3} AD$ ,

$AK = \frac{1}{3} AD$ ,  $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ .

Выразить:  $\overrightarrow{CK}$ ,  $\overrightarrow{KD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:

$BC = \frac{1}{3} AD$  и  $AK = \frac{1}{3} AD$ , следовательно,

$BC = AK$  и  $BC \parallel AK$ , тогда  $ABCK$  – параллелограмм.

В параллелограмме противоположные стороны параллельны и равны по свойству,  $BA = CK$  и  $BA \parallel CK$ , тогда,  $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$ .

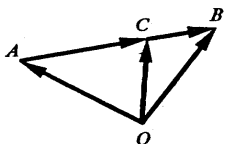
$\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD}$ , значит,  $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}$ .

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$ , тогда  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{KD} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a})$ . Тогда

$ABCK$  – параллелограмм, следовательно,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$ .

805.



Дано:  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ , O – произвольная точка.

Доказать:  $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OC}$ .

Доказательство:

$\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$ , следовательно,  $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ .  $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ ,

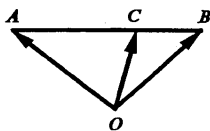
следовательно,

$$\overline{AB} = \frac{2}{3} \overline{AC} = \frac{2}{3} (\overline{OC} - \overline{OA}) = \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA}, \text{ тогда}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA} = \frac{1}{3} \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC}.$$

Ч.т.д.

**806.**



Дано:

$AC:CB = m:n$ ,  $O$  – произвольная точка.

Доказать:  $\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}$

Доказательство:

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ , тогда  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ .

Т.к.  $AC:CB = m:n$ , следует  $\overline{AC} = \frac{m}{m+n} \overline{AB} = \frac{m}{m+n} (\overline{OB} - \overline{OA}) =$   
 $= \frac{m}{m+n} \overline{OB} - \frac{n}{m+n} \overline{OA}$ , тогда

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB} - \frac{m}{m+n} \overline{OA} = \\ &= \overline{OA} \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) + \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \overline{OA} \left(\frac{m+n}{m+n} - \frac{m}{m+n}\right) + \\ &+ \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \frac{m+n-m}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}. \end{aligned}$$

Ч.т.д.

**807.**

Дано:  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – медианы  $\triangle ABC$ ,  $O$  – произвольная точка.

Доказать:  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$ .

Доказательство:

Имеем:

$\overline{OA} + \overline{AA_1} = \overline{OA_1}$ ,  $\overline{OB} + \overline{BB_1} = \overline{OB_1}$  и  $\overline{OC} + \overline{CC_1} = \overline{OC_1}$ , тогда

складывая почленно правые и левые части равенств, будем иметь:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1},$$

Докажем, что  $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$  – нулевой вектор.

По задаче 786 получаем:

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AC}), \overline{BB_1} = \frac{1}{2} (\overline{BA} + \overline{BC}), \overline{CC_1} = \frac{1}{2} (\overline{CA} + \overline{CB}).$$

$$\text{Значит: } \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AC}) + \frac{1}{2} (\overline{BA} + \overline{BC}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BA} + \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{CA} + \frac{1}{2} \overline{BC} +$$

$$+ \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} \overline{AB} - \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{BC} - \frac{1}{2} \overline{BC} =$$

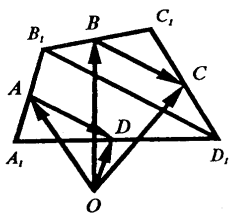
$$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \text{ – доказали.}$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}, \text{ но}$$

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}, \text{ следовательно,}$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}. \text{ ч.т.д.}$$

**808.**



Дано:

A, B, C, D – середины сторон соответственно;

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ ;

O – произвольная точка.

Доказать:  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .

Доказательство:

1) Построим диагональ  $B_1D_1$ .

B – середина  $B_1C_1$ , C – середина  $C_1D_1$  и  $BC = \frac{1}{2} B_1D_1$ .

A – середина  $A_1B_1$ , D – середина  $A_1D_1$ , следовательно,

AD – средняя линия  $\Delta A_1B_1D_1$ , значит,  $AD \parallel B_1D_1$  и  $AD = \frac{1}{2} B_1D_1$ .

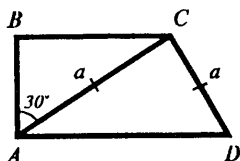
$BC \parallel B_1D_1$ ,  $BC = \frac{1}{2} B_1D_1$  и  $AD = \frac{1}{2} B_1D_1$ , тогда  $\overline{BC} = \overline{AD}$ .

$\overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$ , следовательно,

$$\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}.$$

$\overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OD}$ , следовательно,  
 $\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{AD}$  и  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , тогда  
 $\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}$  и  $\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{BC}$ , значит,  
 $\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{OD} - \overline{OA}$ , или  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ . Ч.т.д.

809.



Дано:  $\angle A = 90^\circ$ ,  
 $\angle C = 120^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $CD = a$ .

средняя линия = ?

Решение:

$\angle C = 120^\circ$ , тогда,  $\angle D = 60^\circ$ , из  $\angle C + \angle D = 180^\circ$   
 (односторонние при параллельных  $BC$ ,  $AD$  и секущей  $CD$ );  
 $\triangle ACD$  – равнобедренный треугольник, из  $AC = CD$ , тогда  
 $\angle DAC = \angle D = 60^\circ$ , значит,  $\triangle ACD$  – равносторонний треугольник  
 (все углы равны),  $AD = a$ ,  $\triangle ACD = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ , значит,  
 $\angle ACB = 60^\circ$ .

Из  $\triangle ABC$ :

$\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ , следовательно,

$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,  $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} a$  (по св-ву – в

прямоугольном треугольнике против угла в  $30^\circ$  лежит катет, равный половине гипотенузы)

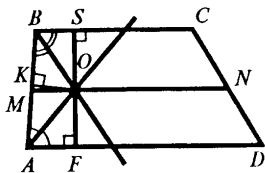
$BC = \frac{1}{2} a$ ,  $AD = a$ .

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т.е.

$$\frac{BC + AD}{2} = \frac{\frac{1}{2}a + a}{2} = \frac{\frac{3}{2}a}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Ответ:  $\frac{3}{4}a$ .

810.



Дано:

$MN$  – средняя линия,  
 $O$  – вершина  $\angle AOB$ ,  
 $AO$  – биссектриса  $\angle A$ ,  
 $BO$  – биссектриса  $\angle B$ .

Доказать:  $O \in MN$ .

Доказательство:

Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.  $OS \perp BC$ ,  $OK \perp AB$ ,  $OF \perp AD$ .

Из точки  $O$  лежит на биссектрисе  $\angle ABC$ , следует  $O$  равноудалена от сторон  $BA$  и  $BC$ , тогда  $OS = OK$ .

Точка  $O$  лежит на биссектрисе  $\angle BAD$ , следовательно  $O$  равноудалена от сторон  $AB$  и  $AD$ , тогда  $OK = OF$ .

$OS = OK$  и  $OK = OF$ , значит,  $OS = OF$ , следовательно,  $O \in MN$ , где  $MN$  средняя линия. Ч.т.д.