

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ

+ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ
И НА ПОСТРОЕНИЕ



8

К заданиям учебника
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова

ГЕОМЕТРИЯ

А. А. Белова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ

из учебника

ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов

Л.С. Атанасяна и др.

(М.: Просвещение)

+ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

+ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

8 класс

УДК 372.8:512

ББК 74.262.21

Б43

Белова А.А.

Б43 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии:
8 класс. – М.: ВАКО, 2012. – 160 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-408-00572-7

Издание, написанное практикующим педагогом, содержит справочный материал, алгоритмы решения типовых задач, а также подробный разбор абсолютно всех заданий из учебника по геометрии для 7–9 классов Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение), включая задачи повышенной трудности.

Поможет родителям и гувернерам школьников проверить уровень усвоения детьми учебного материала, объяснить непонятное, привить им навыки самопроверки и обучить решению задач.

УДК 372.8:512

ББК 74.262.21

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

Учебно-методическое пособие

Белова Анна Александровна

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ
ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ**

авторов Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение)

8 класс

Налоговая льгота –

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 05.07.2011.

Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 6,5. Тираж 5000 экз. Заказ № 2134

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300, г. Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru

Телефон 8 (495) 988-63-87, факс 8 (496) 726-54-10

ISBN 978-5-408-00572-7

© ООО «ВАКО», 2012

Оглавление

Глава V. Четырехугольники	
§ 1 Многоугольники	4
§ 2 Параллелограмм и трапеция	6
§ 3 Прямоугольник, ромб, квадрат	14
Глава VI. Площадь	
§ 1 Площадь многоугольника	26
§ 2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	28
§ 3 Теорема Пифагора	33
Глава VII. Подобные треугольники	
§ 1 Определение подобных треугольников	54
§ 2 Признаки подобия треугольников	58
§ 3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	62
§ 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	69
Глава VIII. Окружность	
§ 1 Касательная к окружности	84
§ 2 Центральные и вписанные углы	88
§ 3 Четыре замечательные точки треугольника	94
§ 4 Вписанная и описанная окружности	97
Глава IX. Векторы	
§ 1 Понятие вектора	111
§ 2 Сложение и вычитание векторов	114
§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	120
Задачи повышенной трудности	
Задачи к главе V	131
Задачи к главе VI	136
Задачи к главе VII	141
Задачи к главе VIII	149
Задачи к главе IX	158

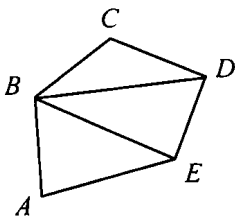
Глава V.

Четырехугольники

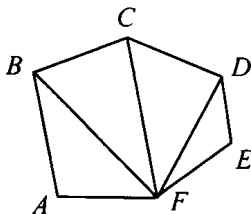


Многоугольники

363.



$\triangle ABE$; $\triangle EBD$; $\triangle BCD$.



$\triangle ABF$; $\triangle BFC$; $\triangle CFD$; $\triangle DFE$.

364. Используя стандартную формулу учебника, найдем:

а) $S_5 = 180 \cdot (5 - 2) = 540^\circ$; б) $S_6 = 180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$;

в) $S_{10} = 180^\circ \cdot (10 - 2) = 1440^\circ$.

Ответ: 540° , 720° , 1440° .

365. Предположим, что выпуклый многоугольник имеет x сторон.

Тогда:

а) если каждый его угол равен 90° , то

$$180^\circ \cdot (x - 2) = 90^\circ \cdot x, \text{ откуда } 180^\circ \cdot x - 360^\circ = 90^\circ \cdot x;$$

$$180^\circ \cdot x - 90^\circ \cdot x = 360^\circ; 90^\circ \cdot x = 360^\circ; x = 4;$$

б) если каждый его угол равен 60° , то

$$180^\circ \cdot (x - 2) = 60^\circ \cdot x \text{ или } 180^\circ \cdot x - 360^\circ = 60^\circ \cdot x;$$

$$120^\circ \cdot x = 360^\circ; x = 3;$$

в) если каждый его угол равен 120° , то

$$180^\circ \cdot (x - 2) = 120^\circ \cdot x; 60^\circ \cdot x = 360^\circ; x = 6;$$

г) если каждый его угол равен 108° , то

$$180^\circ \cdot (x - 2) = 108^\circ \cdot x, \text{ откуда } 72^\circ \cdot x = 360^\circ; x = 5.$$

Ответ: а) 4; б) 3; в) 6; г) 5.

366. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник. $P_{ABCD} = 8 \text{ см} = 80 \text{ мм}$;
 $AD > AB$ на 5 мм; $AD > BC$ на 4 мм; $AD > CD$ на 3 мм.

Пусть $AD = x$, тогда $CD = x - 3$, $BC = x - 4$; $AB = x - 5$.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$; $80 = x - 5 + x - 4 + x - 3 + x$;

$92 = 4x$; $x = 23$.

Значит $AD = 23 \text{ мм}$; $CD = 20 \text{ мм}$; $BC = 19 \text{ мм}$; $AB = 18 \text{ мм}$.

Ответ: 18; 19; 20; 23.

367. $a \text{ см}$ – первая сторона четырехугольника, тогда $(a - 8) \text{ см}$ – вторая сторона, $(a + 8) \text{ см}$ – третья сторона; $3 \cdot (a - 8) \text{ см}$ – четвертая сторона. Мы знаем, что периметр равен 66 см, отсюда: $a + (a - 8) + (a + 8) + 3(a - 8) = 66$; $a + a - 8 + a + 8 + 3a - 24 = 66$ или $6a = 90$; $a = 15$.

Ответ: 15 см; 7 см; 23 см; 21 см.

368. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник. По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника $(n - 2) \cdot 180^\circ = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. По условию $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, значит $\angle A = 360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

369. Мы знаем, что $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$. Тогда

$\angle A + \angle B + \angle C = 360^\circ - \angle D$

или $\angle A + \angle B + \angle C = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$.

По условию $\angle A = \angle B = \angle C$, значит,

$\angle A = \angle B = \angle C = 225^\circ : 3 = 75^\circ$.

Ответ: 75° .

370. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник.

$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 2 : 4 : 5$.

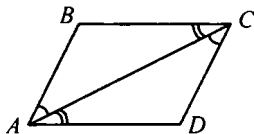
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, пусть $\angle A = x$, тогда $\angle B = 2x$, $\angle C = 4x$,

$\angle D = 5x$, значит $x + 2x + 4x + 5x = 360^\circ$; $12x = 360^\circ$; $x = 30^\circ$.

Отсюда

$\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, $\angle C = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, $\angle D = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$.

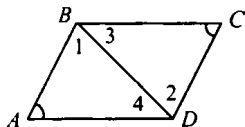
371. а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по стороне и прилежащим углам ($\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle CAD$, AC – общая). Значит $BC = AD$.



Т.к. $\angle BAC = \angle ACD$ – накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC , следовательно $BC \parallel AD$.

Т.к. $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, по первому признаку параллелограмма $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

- б) $AB \parallel CD$ (по условию), значит $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие); т.к. сумма углов треугольника равна 180° , то $\angle 3 = \angle 4$.



$\triangle ABD = \triangle CBD$ по стороне и прилежащим углам (BD – общая, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$). Значит $AB = CD$.

$AB \parallel CD$ и $AB = CD$, следовательно по первому признаку параллелограмма $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

372. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм.

- а) $AD > AB$ на 3 см.

Если $AB = x$, то $AD = x + 3$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е. $48 = 2 \cdot (x + (x + 3))$; $2x = 21$; $x = 10,5$ см;

$AB = CD = x = 10,5$ см; $AD = BC = x + 3 = 13,5$ см.

- б) $AD > AB$ на 7 см ($AD - AB = 7$).

Если $AB = x$, то $AD = x + 7$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е. $48 = 2 \cdot (x + (x + 7))$; $2x = 17$; $x = 8,5$ см; $AB = CD = x = 8,5$ см;

$AD = BC = x + 7 = 15,5$ см.

- в) $AD > AB$ в 2 раза.

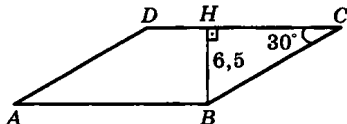
Если $AB = x$, то $AD = 2x$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е. $48 = 2 \cdot (x + 2x)$; $3x = 24$; $x = 8$ см;

$AB = CD = x = 8$ см; $AD = BC = 2x = 16$ см.

373. По условию $BH \perp CD$;

$\angle BCH = 90^\circ$, значит,

$\triangle BCH$ – прямоугольный. В прямоугольном треуголь-



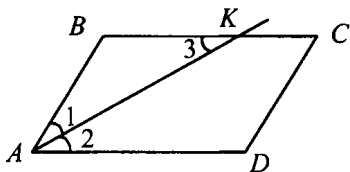
нике катет (BH), лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы, т. е. $CB = 2BH = 6,5 \text{ см} \cdot 2 = 13 \text{ см}$. Периметр $ABCD$ равен 50 см, т. е. $AB + DC + CB + AD = 50$, но $CB = AD = 13 \text{ см}$, значит, $AB + DC = 50 - (CB + AD)$, $AB + DC = 50 - 26 = 24$. Тогда получаем: $AB = DC = 12 \text{ см}$.

Ответ: $AB = DC = 12 \text{ см}$; $AB = BC = 13 \text{ см}$.

374. $ABCD$ – параллелограмм, значит $BC \parallel AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (накрест лежащие).

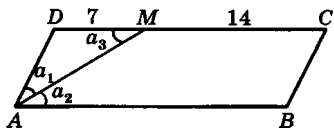
$\angle 1 = \angle 2$ (по свойству биссектрисы), значит и $\angle 1 = \angle 3$, т.е. $\triangle ABK$ – равнобедренный. Значит $AB = BK = 15 \text{ см}$, а т. к. $AB = CD$, то $CD = 15 \text{ см}$.

$BC = BK = 15 + 9 = 24 \text{ см}$. $P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 24) = 2 \cdot 39 = 78 \text{ см}$.



375. По условию биссектриса $\angle A$ делит противоположную сторону параллелограмма на отрезки $DM = 7 \text{ см}$ и $MC = 14 \text{ см}$. Имеем:

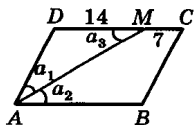
$\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. AM – биссектриса $\angle DAB$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (т. к. эти углы накрест лежащие при пересечении $DC \parallel AB$ секущей AM). Отсюда следует, что $\angle a_1 = \angle a_3$ и $\triangle ADM$ – равнобедренный, $AD = DM = 7 \text{ см}$. Точка M лежит на стороне DC : $MC = 14 \text{ см}$; $DC = AB = DM + MC$, $DC = 21 \text{ см}$. $P_{ABCD} = 2 \cdot (7 + 21) \text{ см} = 56 \text{ см}$.



Возможен другой вариант. Биссектриса $\angle DAB$ пересекает сторону DC в точке M и делит ее на отрезки $DM = 14 \text{ см}$ и $MC = 7 \text{ см}$. Выше было доказано, что

$\triangle ADM$ – равнобедренный, значит, $AD = DM = 14 \text{ см}$. $DC = DM + MC = 14 \text{ см} + 7 \text{ см} = 21 \text{ см}$.

$P_{ABCD} = 2 \cdot (14 + 21) \text{ см} = 70 \text{ см}$.



376. а) $\angle A = 84^\circ$; по свойству углов параллелограмма:

$\angle A = \angle C = 84^\circ$; $\angle B = \angle D$; т. к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$, следовательно, $\angle D = 96^\circ$.

Ответ: $84^\circ, 96^\circ, 84^\circ, 96^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \angle A - \angle B = 55^\circ; \quad & \begin{cases} \angle A - \angle B = 55^\circ \\ \angle A + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \quad \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ (55^\circ + \angle B) + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \\ & \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ 2\angle B = 125^\circ \end{cases}; \quad \begin{cases} \angle A = 117^\circ 30' \\ \angle B = 62^\circ 30' \end{cases}; \quad \angle A = \angle C = 117^\circ 30'. \end{aligned}$$

Ответ: $117^\circ 30'$, $62^\circ 30'$, $117^\circ 30'$, $62^\circ 30'$.

в) $\angle A + \angle C = 142^\circ$;

по свойству параллелограмма: $\angle A = \angle C$, следовательно:

$\angle A = \angle C = 142^\circ : 2 = 71^\circ$; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (свойство параллелограмма); $\angle B = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$, $\angle D = \angle B = 109^\circ$.

Ответ: 71° , 109° , 71° , 109° .

г) $\angle A = 2\angle B$; по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $2\angle B + \angle B = 180^\circ$; $3\angle B = 180^\circ$; $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = \angle B = 60^\circ$, $\angle A = 2\angle B = 120^\circ$; $\angle C = \angle A = 120^\circ$.

Ответ: 120° , 60° , 120° , 60° .

д) если $\angle CAD = 16^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$. $\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180^\circ$.

$16^\circ + 37^\circ + \angle D = 180^\circ$; $\angle D = 127^\circ$, $\angle B = \angle D = 127^\circ$;

по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle A + 127^\circ = 180^\circ$, $\angle A = 53^\circ$, $\angle C = \angle A = 53^\circ$.

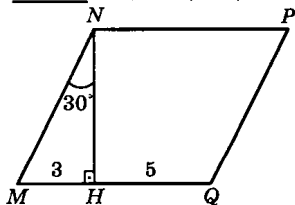
Ответ: 53° , 127° , 53° , 127° .

377. По условию, точка H находится на стороне MQ ,

$MQ = MH + HQ = 8$ см. $\triangle MNH$ – прямоугольный (т. к.

$NH \perp MQ$), $\angle MNH = 30^\circ$, зна-

чит, MH (катет) равен $\frac{1}{2} MN$



(MN – гипотенуза): $MN = PQ = 6$ см. $\angle M = 60^\circ$ (т. к. $\triangle MNH$ – прямоугольный). $\angle N = \angle Q = 180^\circ - \angle M = 120^\circ$.

Ответ: 8 см, 6 см, 60° , 120° .

378. Решение приведено в учебнике.

379. Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle CDM$.

$AB = CD$; $AB \parallel CD$ (по 1-му признаку параллелограмма);

AC – общая, следовательно

$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей

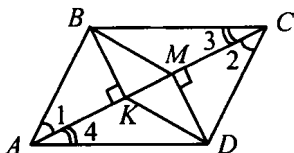
AC), значит, $\triangle ABK = \triangle CDM$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $BK = MD$ (из определения равных треугольников).

Рассмотрим $\triangle CBM$ и $\triangle ADK$:

$AD = CB$; $AD \parallel CB$ (по 1-му признаку параллелограмма);

AC – общая, следовательно, $\angle 4 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AC), следовательно, $\triangle ADK = \triangle CBM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $KD = BM$;

$BK = MD$; $KD = BM$, значит, $BMDK$ – параллелограмм, ч.т.д.



380. $BC = BN + NC = DQ + QA = AD$; $BC = AD$;

$AB = AM + MB = PC + DP = DC$; $AB = DC$;

следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

Тогда по свойству параллелограмма

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

$\triangle AMQ$ и $\triangle CPN$ по 2 сторонам и углу

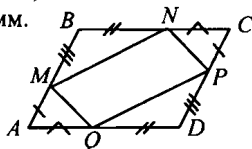
между ними ($AM = CP$, $\angle AQ = \angle CN$,

$\angle A = \angle C$), значит $MQ = NP$.

$\triangle MBN = \triangle QPD$ по 2 сторонам и углу между ними ($MB = DP$,

$BN = QD$, $\angle B = \angle D$), следовательно, $MN = QP$;

$MQ = NP$, $MN = QP$, значит $MNPQ$ – параллелограмм, ч.т.д.

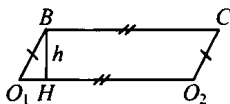


381. По условию $O_1A = O_2B$;

$AB = O_1O_2$, значит ABO_2O_1 – параллелограмм и $AB \parallel O_1O_2$.

$AH = h$ – высота параллелограмма,

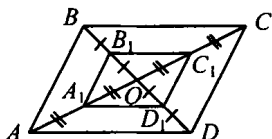
$R \leq h \leq 0$, где R – радиус колеса. Если $h = R$, то ABO_1O_2 – прямоугольник, если $h = 0$, то AB и O_1O_2 лежат на одной прямой.



382. $ABCD$ – параллелограмм, значит

по свойству диагоналей параллелограмма: $AO = OC$, $BO = OD$;

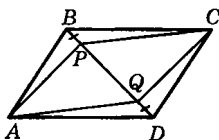
$A_1O = \frac{1}{2}AO$ и $C_1O = \frac{1}{2}OC$, сле-



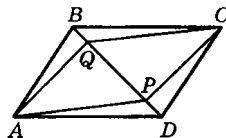
довательно, $A_1O = C_1O$, $B_1O = \frac{1}{2}OB$ и $D_1O = \frac{1}{2}OD$, т. е. $B_1O = D_1O$; $B_1D_1 \cap A_1C_1 = O$, $A_1O = C_1O$, $B_1O = D_1O$, следовательно: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм, ч.т.д.

383. Рассмотрим два варианта.

1) Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$; $\angle ABD = \angle BDC$ (как накрест лежащие углы), $BP = QD$ (по условию). Отсюда следует, что $\triangle ABP = \triangle QCD$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AP = CQ$. Так же доказывается равенство $\triangle BCP$ и $\triangle ADQ$ и, следовательно, $PC = AQ$. В четырехугольнике $APCQ$ противоположные стороны попарно равны ($AP = CQ$; $AQ = PC$), значит, это параллелограмм.



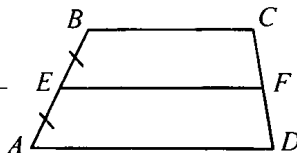
2) Точка Q лежит на прямой BD между точками B и P . По условию, $BP = QD$. $BP = BQ + QP$; $QD = PD + QP$. Отсюда следует, что $BQ = PD$. Исходя из доказанного в I варианте, четырехугольник $APCQ$ – параллелограмм.



384. Решение приведено в учебнике.

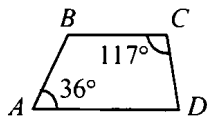
385. Решение приведено в учебнике.

386. Пусть E – середина AB . Проведем прямую $EF \parallel AD \parallel BC$. Точка F – середина CD по т. Фалеса. Докажем, что EF –



единственный. Через точки E и F можно провести только одну прямую (аксиома), т. е. отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции $ABCD$ параллелен основаниям, ч.т.д.

387. $AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$;
 $36^\circ + \angle B = 180^\circ$;
 $\angle B = 144^\circ$; $\angle C + \angle D = 180^\circ$;
 $117^\circ + \angle D = 180^\circ$; $\angle D = 63^\circ$.



Ответ: 144° , 63° .

388. **Дано:** $AB = CD$.

Доказать:

1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$,

2) $AC = BD$.

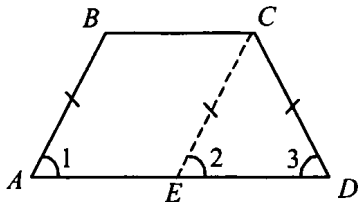
Доказательство. Проведем $CE \parallel AB$, $ABCE$ – параллелограмм, т. е.

$AB \parallel CE$, следовательно,

$\angle 1 = \angle 2$ как соответственные.

$\triangle ECD$ – равнобедренный, значит $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. $\angle A = \angle D$; $AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle D + \angle C = 180^\circ$, $\angle B = 180^\circ - \angle A$, $\angle C = 180^\circ - \angle D$, т. к. $\angle A = \angle D$, то $\angle B = \angle C$.

$\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD – общая, $\angle A = \angle D$) следовательно, $BD = AC$.



389. **Дано:** а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$;

б) $\angle AC = \angle BD$.

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство.

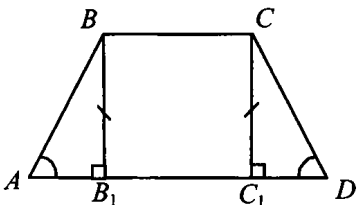
а) Проведем $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$, BCC_1B_1 – прямоугольник.

$\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ по катету и острому углу

($BB_1 = CC_1$ – из прямоугольника BCC_1B_1), $\angle A = \angle D$, следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.

б) $\triangle ACC_1 = \triangle DBB_1$ по катету и гипотенузе ($AC = BD$, $CC_1 = BB_1$), следовательно, $AC_1 = B_1D$; $AB_1 = AC_1 - B_1C_1$, $C_1D = B_1D - B_1C_1$, значит $AB_1 = C_1D$.

$\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ по двум катетам ($BB_1 = CC_1$, $AB_1 = DC_1$), следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.



390. **Дано:** $\angle A = 68^\circ$, $AB = CD$; $\angle B$, $\angle C$, $\angle D = ?$

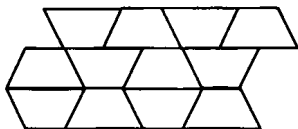
Решение. Трапеция $ABCD$ – равнобедренная, значит

$\angle A = \angle D = 68^\circ$, а $\angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

$\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$; $\angle C = \angle B = 112^\circ$.

Ответ: 112° , 112° , 68° .

391. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (внутренние односторонние углы при параллельных прямых и секущей). $\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие). Значит



$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, т. е. при совмещении трапеций получается развернутый угол. Таким образом, трапеции можно непрерывно уложить в ряд, как показано на рисунке.

Однако условие задачи сформулировано некорректно. Например, если S – площадь паркетной плитки в виде равнобедренной трапеции, S_1 – некая площадь, ограниченная стенами, и $S > S_1$, то в этом случае паркет уложить нельзя.

392. Дано: $\angle D = 90^\circ$, $AD = b$,

$BC = a$, $\angle A = \alpha$;

а) $\angle AB = ?$ б) $\angle CD = ?$

Решение. а) $a = 4$ см, $b = 7$ см,

$\alpha = 60^\circ$; проведем: $BB_1 \perp AD$;

$AB_1 = AD - DB_1$; $AB_1 = 7 - 4 = 3$ см,

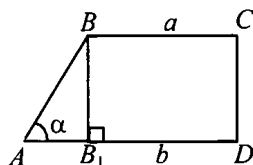
в $\triangle ABB_1$ $\angle A = 60^\circ$ (по условию), тогда $\angle B = 30^\circ$, значит,

$AB_1 = \frac{1}{2} AB$ (свойство прямоугольного треугольника), т. е.

$\angle AB = 2 \cdot 3 = 6$ см.

б) $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45^\circ$; $AB_1 = AD - DB_1$;

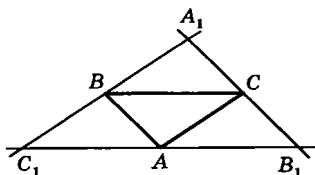
$AB_1 = 15 - 10 = 5$ см, следовательно $\angle CD = 5$ см (свойство прямоугольника).



Ответ: а) 6 см; б) 5 см.

393. Решение приведено в учебнике.

394. По условию, точки A , B и C не лежат на одной прямой. Соединим их отрезками. Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противоположащей стороне. Таким образом, $B_1C_1 \parallel BC$,

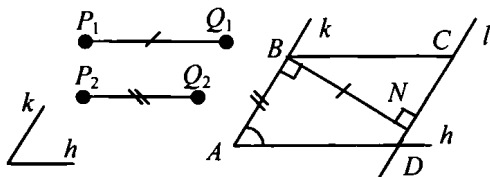


$C_1A_1 \parallel CA$, $AB \parallel A_1B_1$. Отсюда следует, что четырехугольники

C_1BCA ; ABA_1C ; $ABCB_1$ – параллелограммы, т. к. их противо-

положные стороны попарно параллельны. Задача имеет 3 решения, т. е. можно построить три параллелограмма.

395.

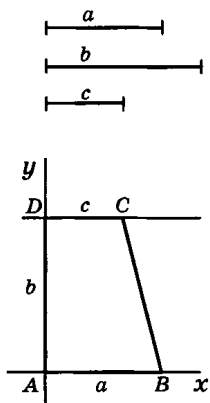


- 1) Строим $\angle A = \angle hk$; $AB = P_2Q_2$;
- 2) строим перпендикуляр из точки B к лучу AB ; $BN \perp AB$, $BN \perp P_1Q_1$;
- 3) через N проведем прямую $l \parallel AB$;
- 4) $l \cap h = D$, от D отложим отрезок, равный P_2Q_2 , $DC = P_2Q_2$;
- 5) соединим B и C , получим $ABCD$ – параллелограмм.

396. Решение приведено в учебнике.

397. а) 1) отрезок AD ; 2) $\angle A$; 3) AB , на стороне угла;
- 4) $\angle D = \angle C$; 5) $DC = AB$; 6) $ABCD$ – искомая трапеция.
 - б) 1) отрезок BC ; 2) окружности с центрами в B и C и радиусом AB ;
 - 3) окружность с центром в B и радиусом BD .
 - 4) Попарное пересечение этих окружностей даст точки A и O .
 - 5) $ABCD$ – равнобедренная трапеция.
- Построение возможно только тогда, когда из отрезков BC , AB и BD можно построить треугольник.

398. Даны отрезки a , b и c . Проведем две взаимно перпендикулярные прямые x и y с пересечением в точке A . От точки A на прямой x отложим отрезок AB , равный a . На прямой y от точки A отложим отрезок, равный b . Через точку D проведем прямую параллельную прямой AB и отложим на ней отрезок, равный c от точки D , чтобы точка D лежала на прямой по ту же сторону, что и точка B . Соединим точки B и C . Получаем трапецию $ABCD$. Задача имеет единственное решение.



399. Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $\angle A = 90^\circ$.

Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство. $ABCD$ – параллелограмм, следовательно, $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\angle B = \angle D$.

Т. к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Значит $\angle D = \angle B = 90^\circ$. Т. е. в $ABCD$ стороны попарно равны; все углы прямые, значит, $ABCD$ – прямоугольник, ч.т.д.

400. Предположим, что в четырехугольнике $MNPQ$ все углы прямые. Имеем $\angle M = \angle N = 90^\circ$, значит, $MQ \parallel NP$ и $\angle P = \angle Q = 90^\circ$, значит, $MN \parallel PQ$. Получаем, что противоположные стороны четырехугольника $MNPQ$ попарно параллельны, значит, данный четырехугольник – параллелограмм, а т. к. все его углы прямые, то $MNPQ$ – прямоугольник.

401. а) Пусть AE – биссектриса $\angle A$; $E \in BC$, $BE = 45,6$ см, $EC = 7,85$ см.

$\angle 1 = \angle 3$, т. к. $\angle 1 = \angle 2$ (по условию),

$\angle 2 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AE),

значит $\triangle ABE$ – равнобедренный и

$AB = BE = 45,6$ см.

$BC = BE + EC$, $BC = 45,6 + 7,85 = 53,45$ см, $AD = BC = 53,45$ см.

$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$; $P_{ABCD} = 2 \cdot (45,6 + 53,45) = 198,1$ см.

б) $E \in DC$, $CE = 2,7$ дм, $ED = 4,5$ дм. $\triangle AED$ –

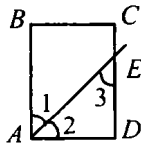
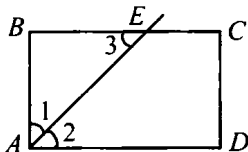
равнобедренный ($\angle 2 = \angle 3$),

следовательно, $AD = ED = 4,5$ дм;

$CD = CE + ED = 2,7 + 4,5 = 7,2$ дм;

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AD + CD)$;

$P_{ABCD} = 2 \cdot (4,5 + 7,2) = 23,4$ дм.

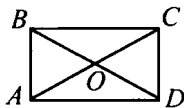


402. $ABCD$ – прямоугольник, следовательно,

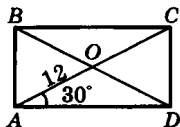
$AC = BD$, $BO = OD$, $AO = OC$ (по свойствам прямоугольника, т. е. $AO = OC =$

$= OB = OD$. Итак, $AO = OD$ и $\angle AO = \angle OB$,

значит $\triangle AOD$ и $\triangle AOB$ – равнобедренные (по определению).



403. Рассмотрим $\triangle CAD$. Это прямоугольный треугольник (т. к. $ABCD$ – прямоугольник) с $\angle CAD = 30^\circ$ и гипотенузой $AC = 12$ см.

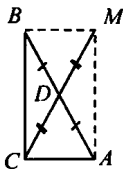


Значит, катет $CD = \frac{1}{2} AC = 6$ см.

Диагонали прямоугольника в точке пересечения делятся пополам, а значит, $AO = OC = BO = OD$. Так как $AC = 12$ см, то $AO = OC = 6$ см. Но $CD = 6$ см, а значит, $\triangle AOB$ – равнобедренный. Тогда получаем: $P_{\triangle AOB} = 3 \cdot 6 = 18$ см.

404. Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle C = 90^\circ$;

$BD = AD$; CD – медиана. Доказать: $CD = \frac{1}{2} AB$.



Доказательство.

Продлим отрезок CD и отметим на луче отрезок $DM = CD$, получим четырехугольник $AMBC$, который является прямоугольником.

$\triangle ADM = \triangle CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AB$ и $MD = DC$ – по условию, $\angle ADM = \angle CDB$ – вертикальные), следовательно $AM = BC$.

Аналогично из $\triangle ADC = \triangle BDM$ следует $AC = MB$. Значит, $AM = BC$, $AC = MB$, $\angle C = 90^\circ$, т. е. $AMBC$ – прямоугольник.

AB и MC – диагонали прямоугольника $AMBC$, т. е. $AB = MC$,

$AD = DB = MD = DC$, значит, $DC = \frac{1}{2} AB$, ч.т.д.

405. Дано: $ABCD$ – ромб; $AC = AB$;

а) $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$ б) $\angle 1, \angle 2 = ?$

Решение:

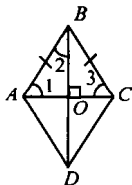
$AB = AC$, следовательно, $\triangle ABC$ – равносторонний, т. е. $\angle 1 = \angle B = \angle 3 = 60^\circ$;

По св-ву углов ромба $\angle A + \angle B = 180^\circ$, т. е.

$\angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

$\triangle ABO$ – прямоугольный, значит $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

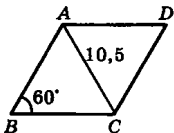
$60^\circ + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$.



406. Рассмотрим $\triangle ABC$. $AB = BC$ (как стороны ромба). Значит, $\triangle ABC$ – равнобедренный.

$\angle B = 60^\circ$ и $AC = 10,5$ (по условию). Отсю-

да следует, что и $AB = 10,5$ см, а $P_{ABCD} = 10,5 \cdot 4 = 42$ см.



407. Дано: $ABCD$ – ромб; $\angle B = 45^\circ$; $\angle 1, \angle 2 = ?$

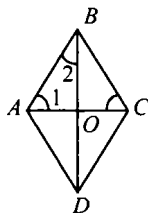
Решение.

BD – биссектриса $\angle ABC$, следовательно,

$$\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} 45^\circ = 22^\circ 30'.$$

$\triangle ABO$ – прямоугольный, значит,

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 1 = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$



408. Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

а) $\angle BOC = 90^\circ$;

б) AC – биссектриса угла.

Доказать: $ABCD$ – ромб.

Доказательство.

а) $AC \perp BD$. $\triangle BCO = \triangle DCO$ по 2 катетам (по свойству диагоналей $BO = OD$, CO – общая), значит $BC = CD$.

Т. к. $BC = AD$, $BC = CD$, то $AB = BC = CD = AD$, значит $ABCD$ – ромб, ч.т.д.

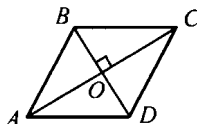
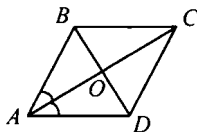
б) $\triangle ACD$ – равнобедренный по признаку,

т. к. $\angle A = \angle C$, следовательно, $AD = DC$;

$AD = BC$,

$AD = DC$. Таким образом,

$AD = DC = BC = AB$, т. е. $ABCD$ – ромб, ч.т.д.



409. Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle A = 90^\circ$. Доказать: $ABCD$ – квадрат.

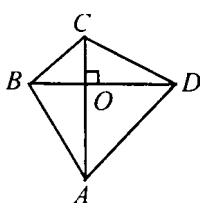
Доказательство.

$ABCD$ – ромб, значит $AB = BC = CD = AD$;

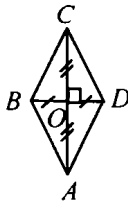
$\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, т. е. $\angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$.

Т. к. все стороны равны и все углы равны 90° , то $ABCD$ – квадрат, ч.т.д.

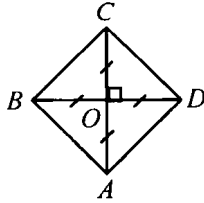
410.



а) нет;



б) нет;



в) да.

411. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, CE – биссектриса; $EK \parallel AC$, $ME \parallel CK$.

Доказать: $CMEK$ – квадрат.

Доказательство.

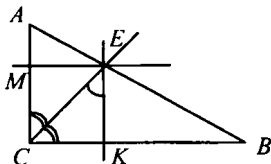
По условию $MC \parallel EK$, значит, по определению $CMEK$ – параллелограмм.

По свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle E$;

т. к. CE – биссектриса $\angle C$, то EC – биссектриса $\angle E$, значит $\angle 1 = \angle 2$ и $\triangle CKE$ – равнобедренный, т. е. $CK = EK$.

$CK = ME$, т. к. $CMEK$ – параллелограмм, значит $CMEK$ – ромб. $\angle C = 90^\circ$, значит, $\angle E = 90^\circ$, $\angle M = \angle K = 90^\circ$.

Следовательно, $CMEK$ – квадрат, что и требовалось доказать.



412. $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle B = 45^\circ$,

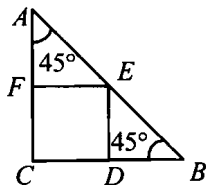
т. е. $\triangle ADE$ и $\triangle EFB$ – равнобедренные прямоугольные треугольники, где $AD = DE$ и $EF = BF$;

$CDEF$ – квадрат, следовательно, $DE = EF$, т. е. $AD = DE = EF = BF$.

$P_{CDEF} = CD + DE + EF + CF$, где $DE = AD$; $EF = BF$;

$P_{CDEF} = CD + AD + BF + CF$, где $CD + AD = AC$; $BF + CF = BC$;

$P_{CDEF} = AC + BC = 12 + 12 = 24$ см.



413. а) 1) Строим $\angle mn = 90^\circ$;

2) откладываем на луче n отрезок, равный a ;

3) откладываем на луче m отрезок, равный b ;

4) через A и B проводим $l_1 \parallel m$ и $l_2 \parallel n$;

5) $l_1 \cap l_2 = C$, $OABC$ – прямоугольник.

б) 1) Строим $\angle mn = 90^\circ$,

2) откладываем на луче n отрезок, равный a ;

3) Окр. $(A; d)$, окр. $(A; d) \cap m = C$;

4) через C проводим прямую $l_1 \parallel m$, через A провести прямую $l_2 \parallel n$;

5) $OABC$ – искомый прямоугольник.

в) 1) Строим $\angle O = \alpha$;

2) Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно от т. O в разные стороны отложим

отрезки, равные $\frac{1}{2}d$: $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d$;

3) $ADBC$ – искомый прямоугольник.

414. а) Диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, $a \perp b$, так же диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

Значит, на прямой b от O отложим $OA = OB = OC = \frac{1}{2} d_1$,

$ABCD$ – искомый ромб.

б) Построим $\angle A = \alpha$, проведем $AB = a$, через B проведем $l_1 \parallel n$, $BC = a$, через C проведем $l_2 \parallel m$, получим $l_2 \cap n = D$, тогда $ABCD$ – искомый ромб.

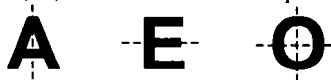
415. а) Построим $n \perp m$, $n \cap m = A$, от A на n отложим $AB = a$ и $AD = a$ на m , через B и D проведем прямые $l_1 \parallel m$, $l_2 \parallel n$, имеем $l_1 \cap l_2 = \angle C$, тогда $ABCD$ – искомый квадрат.

б) Построим $n \perp m$, $n \cap m = O$. Диагонали взаимно перпендикулярны, равны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, отложим на m $OA = OC = \frac{1}{2} d$.

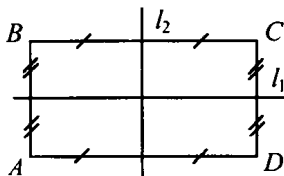
$OB = OD = \frac{1}{2} d$ на n , имеем $ABCD$ – искомый квадрат.

416. Провести к прямой a перпендикуляр через M , провести окружность с центром O и радиусом OM . При пересечении окружности с перпендикуляром получится M' – искомая.
417. а) Две оси симметрии, это прямая на которой лежит отрезок и серединный перпендикуляр;
 б) бесконечное множество осей симметрии, это любой перпендикуляр и сама прямая;
 в) одну ось симметрии, это прямая, на которой лежит луч.

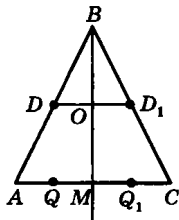
418. А, Е, О имеют ось симметрии.



419. Из определения фигуры, симметричной относительно прямой, следует, что каждая точка прямоугольника имеет симметричную точку прямоугольника относительно любой на прямой l_1 и l_2 .



420. Возьмем равнобедренный $\triangle ABC$, где AC – основание, BM – биссектриса. Тогда BM – высота и медиана $\triangle ABC$, значит, $BM \perp AC$ и $AM = MC$. Отсюда следует, что точки A и C симметричны относительно прямой BM . Точка B лежит на прямой BM и значит, симметрична самой себе относительно прямой BM .



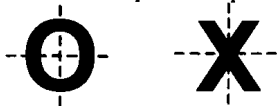
Возьмем произвольную точку Q на прямой AC (Q лежит между точками A и M). Отметим точку Q_1 между точками M и C так, чтобы $QM = MQ_1$. Отсюда следует, что точки Q и Q_1 симметричны относительно прямой BM . Поэтому для каждой точки на основании AC точка, симметричная ей относительно BM , также лежит на основании AC .

Теперь возьмем произвольную точку D на стороне AB $\triangle ABC$. Отложим на стороне BC отрезок $BD_1 = BD$. Рассмотрим $\triangle DBD_1$. Он равнобедренный. BO – биссектриса, а также высота и медиана, т. е. $BO \perp DD_1$ и $DO = D_1O$, а значит, точки D и D_1 симметричны относительно прямой BM . Это и означает, что прямая BM , содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, является осью симметрии этого треугольника.

421. Точка M_1 – симметрична точке M относительно точки O , где O середина AB .



422. а) да; б) нет; в) да; г) да.
423. О и Х имеют центр симметрии.



424. Дано: $ABCD$ – четырехугольник, у которого не все углы равны друг другу.

Доказать: хотя бы один угол – тупой.

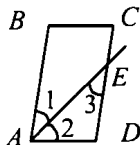
Доказательство. Пусть в четырехугольнике все углы острые, а именно $\angle A < 90^\circ$; $\angle B < 90^\circ$; $\angle C < 90^\circ$; $\angle D = 90^\circ$, то $\angle A + \angle B +$

$+ \angle C + \angle D < 360^\circ$, а такого не может быть, т. к. сумма углов четырехугольника равна 360° . Т. е. предположение о том, что не все углы острые – неверно. Следовательно, хотя бы один угол – тупой, что и требовалось доказать.

425. $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, $46 = 2 \cdot (14 + AD)$, значит, $AD = 9$ см,

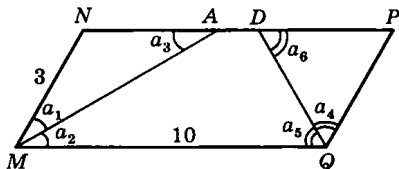
$AD < AB$, значит, $E \in DC$.

$\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AE); по условию $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. $\triangle AED$ – равнобедренный и $AD = ED = 9$ см. $CE = CD - ED = 14 - 9 = 5$ см.



Ответ: 5 см, 9 см.

426. Биссектриса $\angle M$ пересекает противоположную сторону NP в точке A . Биссектриса $\angle Q$ пересекает противоположную сторону в точке D . Таким образом, на стороне NP получаем три отрезка: NA , AD и DP . По условию $MQ = 10$ см, $MN = 3$ см. В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $MQ = NP = 10$ см, $MN = PQ = 3$ см.



Учтем, что $\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. MA – биссектриса $\angle M$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (как накрест лежащие при пересечении прямых $MQ \parallel NP$ секущей MA). Значит, $\angle a_1 = \angle a_3$ и $\triangle MNA$ – равнобедренный: $MN = NA = 3$ см. Аналогично рассматриваем $\triangle QDP$: $DP = PQ = 3$ см. Так как $NP = 10$ см, то

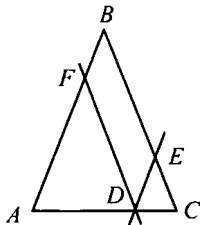
$AD = NP - (NA + DP) = 10 \text{ см} - (3 \text{ см} + 3 \text{ см}) = 4 \text{ см}$.

427. **Дано:** $\triangle ABC$, $AB = BC$, $D \in AC$,
 $DE \parallel AB$, $FE \parallel AC$.

Доказать: $P_{AFED} = AB + BC$.

Доказательство.

1) $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle C$;
 $AB \parallel DE$, следовательно, $\angle A = \angle D$ (соответственные), т. е. $\angle D = \angle C$ и $DE = EC$.



2) $FB \parallel DE$; $FD \parallel BE$, следовательно, $BEDF$ – параллелограмм, т.е. $FD = BE$ и $FB = DE$. $FD \parallel BC$, значит, $\angle C = \angle ADF$, $\angle A = \angle C$, т.е. $\angle A = \angle ADF$, следовательно, $AF = FD$.

3) $P_{FBED} = FB + BE + ED + FD$, где $ED = EC$; $FD = AF$.

$P_{AFED} = FB + BE + EC + AF = AB + BC$, ч.т.д.

428. Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $AB \neq AD$, AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 – биссектрисы углов.

Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник.

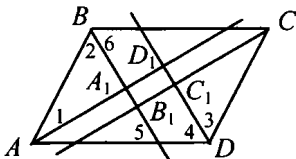
Доказательство.

1) По свойству углов параллелограмма $\angle A = \angle B = 180^\circ$. Значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ (т.к. $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B$), следовательно, в $\triangle ABA_1$ $\angle A_1 = 90^\circ$ и

$\triangle ABA_1$ – прямоугольный. Аналогично: в $\triangle CC_1D$ $\angle C_1 = 90^\circ$.

2) По свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D$, BB_1 ; DD_1 – биссектрисы, значит, $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6$; $BC \parallel AD$, следовательно, $\angle 6 = \angle 5$, т.е. $\angle 5 = \angle 4$ как соответственные углы при прямых BB_1 и DD_1 и секущей AD , отсюда $BB_1 \parallel DD_1$. Аналогично $AA_1 \parallel CC_1$.

3) $AA_1 \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel DD_1$, $\angle A_1 = \angle C_1 = 90^\circ$, значит, $\angle A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник, что и требовалось доказать.



429. Дано: $ABCD$ – четырехугольник; $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$.

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство.

1) $\angle A$ и $\angle B$ – односторонние при прямых AD и BC и секущей AB . Т.к. по условию $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то по признаку параллельных прямых $AD \parallel BC$.

2) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC . Т.к. по условию $\angle B + \angle C = 180^\circ$, то по признаку $AB \parallel CD$.

3) Т.к. $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, то по определению $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

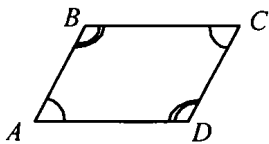
430. Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

Доказать: $ABCD$ параллелограмм.

Доказательство.

1) По свойству суммы углов четырехугольника: $\angle A + \angle B +$



$+ \angle C + \angle D = 360^\circ$, где $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отсюда следует $2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 360^\circ$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

2) $\angle A$, $\angle B$ – односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB , $\angle A + \angle B = 180^\circ$, значит, $AD \parallel BC$;

3) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние углы при прямых AB и CD и секущей BC , $\angle B + \angle C = 180^\circ$, значит, $AB \parallel CD$;

4) $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, т. е. $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.

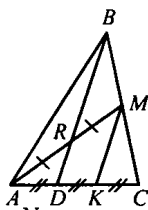
431. Проведем $MK \parallel BD$, тогда $DK = KC$

(по т. Фалеса).

В $\triangle AMK$ $KD \parallel MR$; $AK = KM$, следовательно, по т. Фалеса $AD = DK$.

$AC = AD + DK + KC$, но $AD = DK = KC$, значит,

$AC = 3AD$, т. е. $AD = \frac{1}{3} AC$, ч.т.д.



432. $\triangle ABN = \triangle CDM$ по двум сторо-

нам и углу между ними

($AB = CD$ – по свойству па-

раллелограмма, $BN = MD$ и

$\angle B = \angle D$ – по условию), значи-

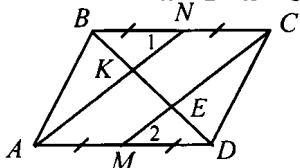
т $\triangle ABN = \triangle CDM$, следова-

тельно, $AN = MC$.

По условию $NC = AM$, и $AN = MC$, значит, $ANCM$ – параллелограмм, и $AN \parallel MC$.

В $\triangle BCE$: $NK \parallel CE$; $BN = NC$, значит $BK = KE$ (т. Фалеса).

В $\triangle AKD$: $ME \parallel AK$; $AM = MD$, следовательно $KE = ED$ (т. Фалеса), следовательно, $BK = KE = ED$, ч.т.д.



433. $\angle B = \angle D$ по св-ву углов ромба, а по св-ву диагонали BD – биссектриса.

$\angle DBM = \angle DBK$.

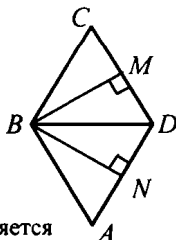
$\triangle BCM = \triangle BAK$ по гипотенузе и острому

углу ($BC = BA$, т.к. $ABCD$ – ромб,

$\angle C = \angle A$,) значит $\angle CBM = \angle ABK$.

$\angle MBD = \angle DBC - \angle MBC$; $\angle DBK = \angle DBA -$

$-\angle ABK$, значит, $\angle MBD = \angle DBK$, т.е. BD является биссектрисой $\angle MBK$, ч.т.д.



434. Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$.

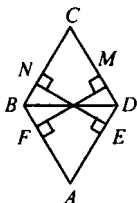
Доказать: $ON = OM = OE = OF$.

Доказательство.

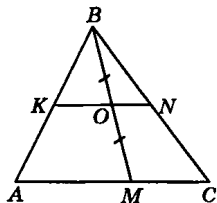
$\triangle BON = \triangle BOM$ по гипотенузе и острому углу (BO – общая сторона, $\angle NBO = \angle MBO$ – по св-ву ромба). Значит, $OM = ON$.

Аналогично $\triangle FOD = \triangle EOD$ и $OE = OF$.

$\triangle AOF = \triangle COM$ по гипотенузе и острому углу ($AO = OC$ – по св-ву ромба, $\angle OAF = \angle OCM$), следовательно, $OF = OM$. $OM = ON$, $OE = OF$, $OF = OM$, следовательно, $ON = OM = OE = OF$. Что и требовалось доказать.



435. Возьмем произвольную точку M на стороне AC $\triangle ABC$. Точка O является серединой отрезка BM . Через точку O проведем $KN \parallel AC$. Точки K и N находятся на сторонах AB и BC соответственно. $AK = KB$ и $BN = NC$ (доказано в задаче 384 из учебника). Отсюда получаем: точка O находится на отрезке KN , концы которого являются серединами сторон, что и требовалось доказать.



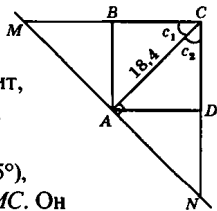
436. $MN \perp AC$ и $\angle CAN$ – прямой.

$\angle C_1 = \angle C_2 = 45^\circ$ (т. к. диагональ AC делит $\angle C$ квадрата $ABCD$ пополам). Значит, $\angle N = 45^\circ$. Следовательно, и $\angle M = 45^\circ$, т. к.

$\triangle NMC$ – прямоугольный.

$\triangle ACN$ – равнобедренный (т. к. $\angle C_2 = \angle N = 45^\circ$), $AC = AN = 18,4$ см. Это относится и к $\triangle AMC$. Он прямоугольный и равнобедренный.

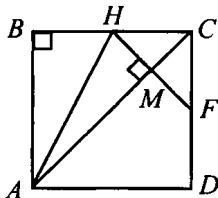
Значит, $AC = AM = 18,4$ см. Поэтому $MN = 2AC = 36,8$ см.



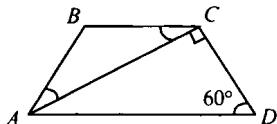
437. $\triangle HMC = \triangle FMC$ по катету и острому углу (CM – общая, $\angle HCM = \angle FCM = 45^\circ$), значит $HC = CF$, $HM = MF$.

$\triangle ABH = \triangle AMH$ по катету и гипотенузе (AH – общая, $AB = AM$ – по условию), следовательно, $BH = HM$.

Итак, $CM = HM = BH$, ч.т.д.



438. В $\triangle ACD$ $\angle C = 90^\circ$,
 $\angle D = 60^\circ$, значит, $\angle A = 30^\circ$,
 следовательно, $CD = \frac{1}{2} AD$.



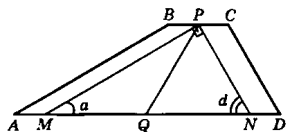
Т. к. $\angle BAC = \angle CAD = 30^\circ$, то
 $\angle A = 60^\circ$, следовательно, $ABCD$ – равнобедренная, т. е. $CD = AB$.
 Т. к. $\angle CAD = \angle BAC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, значит, $\triangle ABC$ – равнобедренный, т. е. $AB = BC$.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$, где $CD = \frac{1}{2} AD$, $AB = BC = CD$,

$$20 = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD = 2,5 AD; 20 = 2,5 AD,$$

$$\angle AD = 20 : 2,5 = 8.$$

439. Сделаем дополнительное построение. Возьмем точки P и Q на основаниях BC и AD соответственно, причем $BP = PC$ и $AQ = QD$. Соединим точки P и Q . Сумма $\angle A + \angle D$ на основании AD равна 90° (по условию).



Проведем прямые $PM \parallel AB$ и $PN \parallel CD$. Таким образом, $ABPM$ и $PNCD$ – параллелограммы, а значит, $AM = BP$ и $PC = ND$, $BP = PC$ и $AQ = QD$ – по условию. Поэтому $MQ = QN$, $MN = AD - (AM + ND)$, но $AM + ND = BC$, значит, $MN = AD - BC$. Так как $AB \parallel PM$, то $\angle A = \angle \alpha$ и т. к. $CD \parallel PN$, то $\angle D = \angle d$; $\angle \alpha + \angle d = 90^\circ$. Отсюда $\triangle MPN$ – прямоугольный ($\angle P$ – прямой). PQ является медианой этого треугольника и

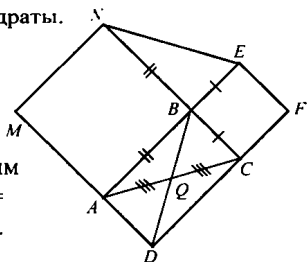
значит, $PQ = \frac{1}{2} MN$ или $PQ = \frac{1}{2} (AD - BC)$, ч.т.д.

440. Дано: $\triangle ABC$; $ABNM$, $BEFC$ – квадраты.

Доказать: $BQ = \frac{1}{2} NE$.

Доказательство.

Построим
 $QD = QB$; $ABCD$ – параллелограмм
 (по признаку). $\angle A = \angle Q$, $\angle BQ =$
 $= \angle QD$. Следовательно, $AD = BC$.



$\triangle BNE = \triangle ABD$ по двум сторонам и углу между ними
($NB = AB$, $BE = AD$,

$\angle B = \angle A$), значит $NE = BD$, т. е. $BQ = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} NE$, ч.т.д.

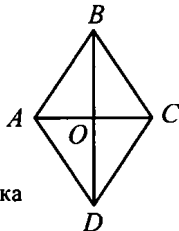
441. Дано: $ABCD$ – ромб.

Доказать: BD , AC – оси симметрии.

Доказательство.

$\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равнобедренные.

Биссектриса BD – ось симметрии
равнобедренного треугольника (любая точка
отрезка AB имеет симметричную точку отрезка
 BC относительно BD).



442. Дано: $ABCD$ – ромб. Доказать: O – ось симметрии.

Доказательство – см. 434.

443. Бесконечное множество.

444. Дано: $a \perp b$, $a \cap b = O$, a , b – оси симметрии окр. (O ; R).

Доказать: O – центр симметрии.

Доказательство.

$\triangle MFO = \triangle M_1OF$ по катету и гипотенузе ($OM = OM_1 = R$; OF – общая сторона),

т. е. $MF = FM_1$, следовательно, $\angle M$ и $\angle M_1$ – симметричные относительно прямой a .

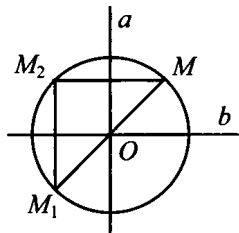
M_1 и M_2 – симметричны относительно прямой b , т. к.

$\triangle M_1OQ = \triangle M_2OQ$, откуда, $M_1Q = QM_2$.

$MF \parallel b$, $M_1Q \parallel a$, $\angle O = 90^\circ$, значит, $MFOQ$ – прямоугольник и $\angle M_1 = 90^\circ$.

Следовательно, $\triangle M_2MM_1$ – прямоугольный с $\angle M_1 = 90^\circ$.

Т. е. M_2M_1 – диаметр окружности и $M_2O = OM$, следовательно, M_2 и M – симметричны относительно O , что и требовалось доказать.



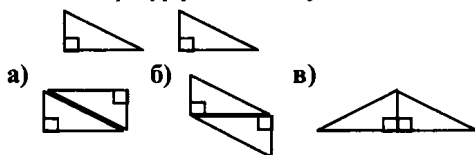
Глава VI.

Площадь

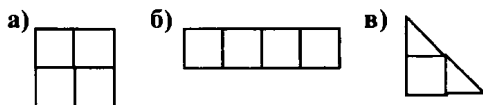
§ 1 Площадь многоугольника

445. Пусть площади треугольников равны S .

Площади фигур равны между собой и составляют $2S$.

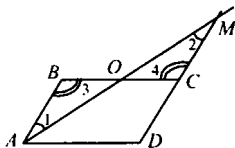


446.



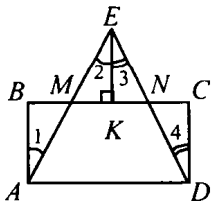
447. $\triangle ABO = \triangle MCO$ по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CM$, $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AM , $\angle 3 = \angle 4$ – накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BC),

т.е. по свойству площадей $S_{ABO} = S_{MCO}$. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{AOC D}$, где $S_{ABC} = S_{MCO}$; $S_{AMD} = S_{MCO} + S_{AOC D}$. $S_{ABCD} = S_{AMD}$, ч.т.д.



448. $EK \perp MN$. $\triangle ABM = \triangle EKM$ по гипотенузе и острому углу ($AM = ME$, $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при $AB \parallel EK$ при секущей AC), значит, по свойству площадей $S_{ABM} = S_{EKM}$.

$\triangle KEN = \triangle CDN$ по катету и острому углу ($EK = CD$, $\angle 3 = \angle 4$ – накрест лежащие при $KE \parallel CD$ и секущей ED), т.е. по свойству площадей $S_{KEN} = S_{CDN}$. $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{CDN}$, следовательно, $S_{AED} = S_{MEK} + S_{AMND} + S_{KEN}$, т.е. $S_{ABCD} = S_{ADE}$, ч.т.д.



449. $S = a^2$. а) $a = 1,2$ см, $S = 1,44$ см²;
б) $a = \frac{3}{4}$ дм, $S = \frac{9}{16}$ дм²; в) $a = 3\sqrt{2}$ м, $S = 18$ м².
450. $S = a^2$, или $a = \sqrt{S}$. а) $S = 16$ см², $a = 4$ см;
б) $S = 2,25$ дм², $a = 1,5$ дм; в) $S = 12$ м², $a = 2\sqrt{3}$ м.
451. $S = 24$ см² = 2400 мм² = 0,24 дм².
452. $S = ab$;
а) $a = 8,5$ см, $b = 3,2$ см, $S = 27,3$ см²;
б) $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см, $S = 6\sqrt{2}$ см²;
в) $a = 32$ см, $S = 684,8$ см², т. к. $b = S : a$, $b = 21,4$ см;
г) $b = 4,5$ см, $S = 12,5$ см², $12,5 = a \cdot 4,5$; $a = 2,7$ см ($a = S : b$).
453. $S = a \cdot b$, следовательно, а) S увеличится в 2 раза, б) S увеличится в 4 раза, в) S не изменится.
454. а) По условию $S = 250$ см², a и b – смежные стороны прямоугольника, где $a = 2,5b$. $S = a \cdot b = 2,5b^2 = 250$ см² или $b = 10$ см; $a = 25$ см.
б) $S = 9$ м²; $P = 12$ м (по условию).
 $S = a \cdot b = 9$ м²; $P = 2(a + b) = 12$ м. Отсюда $a = b = 3$ м.
455. $S_{\text{пола}} = 6 \text{ м} \cdot 5,5 \text{ м} = 33 \text{ м}^2$. $S_{\text{дощечки}} = 0,3 \text{ м} \cdot 0,05 \text{ м} = 0,015 \text{ м}^2$.
 $33 : 0,015 = 2200$ дощечек.
456. 1) Найдем площадь плитки: $15 \cdot 15 = 225$ см².
2) Найдем площадь стены: $3 \cdot 2,7 = 8,1 \text{ м}^2 = 81\,000 \text{ см}^2$.
3) $81\,000 : 225 = 360$, т. е. 360 плиток потребуется на облицовку.
457. $S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b = 8 \cdot 18 = 144 \text{ м}^2$.
 $S_{\text{прямоуг.}} = S_{\text{кв.}}$, следовательно, сторона квадрата равна 12 м.
458. P – периметр участка; S – его площадь. S_1 – площадь квадратного участка; a – его сторона.
Сначала обсудим характеристики прямоугольного участка. Его площадь $S = 220 \text{ м} \cdot 160 \text{ м} = 35200 \text{ м}^2$ и периметр $P = 2 \cdot (220 + 160) \text{ м} = 760 \text{ м}$.
Теперь по найденному периметру квадрата $P_{\text{квадрата}} = 4a = 760 \text{ м}$ (где $a = 190 \text{ м}$) найдем его площадь $S_1 = a^2 = 190^2 \text{ м}^2 = 36\,100 \text{ м}^2$.
Получим: $S_1 = 36\,100 \text{ м}^2$ и $S = 35\,200 \text{ м}^2$, откуда $S_1 - S = 900 \text{ м}^2$, т. е. площадь квадратного участка больше.

459. $S = ah$;

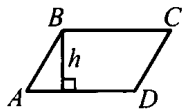
а) $a = 15$ см, $h = 12$ см, $S = 15 \cdot 12 = 180$ см²;

б) $S = 34$ см², $h = 8,5$ см, $a = 4$ см;

в) $S = 162$ см², $h = \frac{1}{2}a$, $162 = a \cdot \frac{1}{2}a$;

$324 = a^2$; $a = 18$ см;

г) $h = 3a$, $S = 27$, $27 = a \cdot 3a$; $9 = a^2$; $a = 3$, $h = 9$.



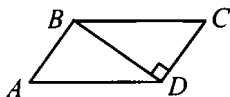
460. Дано: $ABCD$ – параллелограмм

$BD \perp CD$,

$BD = 13$ см, $CD = 12$ см, $S = ?$

Решение.

$S = BD \cdot CD = 13 \cdot 12 = 156$ см².

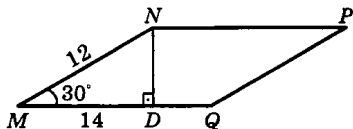


461. $MN = 12$ см; $MQ = 14$ см;

$\angle NMQ = 30^\circ$, ND – высота, т. е. $ND \perp MQ$. $\triangle MDN$ – прямоугольный, поэтому

$ND = \frac{1}{2} MN = 6$ см.

$S_{MNPQ} = MQ \cdot ND = 14$ см \cdot 6 см = 84 см².



462. По условию: $AB = 6$ см,

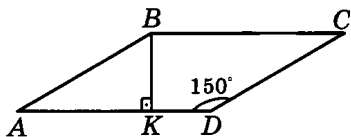
BK – высота ромба,

$\angle D = 150^\circ$, $\angle A = 180^\circ -$

$-\angle D = 30^\circ$. $\triangle AKB$ – прямоугольный.

$BK = \frac{1}{2} AB = 3$ см (т. к. $\angle A = 180^\circ - \angle D = 30^\circ$).

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot BK = 6$ см \cdot 3 см = 18 см².



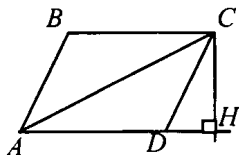
463. Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$AD = 8,1$ см, $AC = 14$ см,

$\angle CAD = 30^\circ$; $S = ?$

Решение.

$CH \perp AD$, $S_{ABCD} = AD \cdot CH$.



В $\triangle ACH$ $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, значит $CH = \frac{1}{2} AC$. $CH = 7$ см,

т.е. $S_{ABCD} = 8,1 \cdot 7 = 56,7$ см².

464. $S = ah_1$ или $S = bh_2$.

а) $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см,

$h_2 > h_1$, $h_2 = ?$, $18 \cdot h_2 = 30 \cdot 6$, $h_2 = 10$.

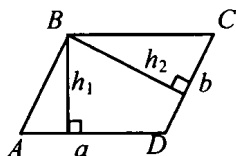
б) $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см;

$h_2 > h_1$, $h_1 = ?$, $10 \cdot 6 = 15 \cdot h_1$, $h_1 = 4$.

в) $S = 54$ см², $a = 4,5$ см, $b = 30$ см,

$h_2 = ?$, $h_1 = ?$, $54 = 4,5 \cdot h_1$, $h_1 = 12$,

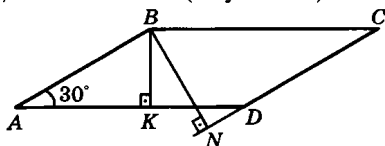
$54 = 6 \cdot h_2$, $h_2 = 9$.



465. $\angle A = 30^\circ$, $BK \perp AD = 2$ см; $BN \perp DC = 3$ см (по условию).

$\triangle AKB$ – прямоугольный и $AB = 2BK = 4$ см.

$S_{ABCD} = CD \cdot BN =$
 $= 4 \text{ см} \cdot 3 \text{ см} = 12 \text{ см}^2$.



466. Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

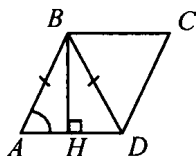
$\angle A = 45^\circ$, $AD = 15,2$ см, $BD = AB$; $S = ?$

Решение.

По условию $AB = BD$, значит $\triangle ABD$ – равнобедренный; $\angle A = 45^\circ$, значит и $\angle D = 45^\circ$, а $\angle B = 90^\circ$.

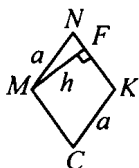
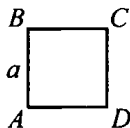
По свойству медианы прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, имеем: $BH = \frac{1}{2} AD = 7,6$ см.

$S_{ABCD} = BH \cdot AD = 7,6 \cdot 15,2 = 115,52$ см².



467. Пусть $ABCD$ – квадрат; $MNKE$ – ромб; $P_{ABCD} = P_{MNKE}$. Сравним S_{ABCD} и S_{MNKE} . $S_{ABCD} = a^2$.

$S_{MNKE} = a \cdot h$; $\triangle MNF$ – прямоугольный; $MF < MN$, следовательно, $h < a$, и соответственно $a^2 > ah$, значит, $S_{ABCD} > S_{MNKE}$, ч.т.д.



468. $S = \frac{1}{2}ah$;

а) $a = 7$ см, $h = 11$ см, следовательно $S = 38,5$ см²;

б) $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см, следовательно $S = 5\sqrt{3}$ см²;

в) $S = 37,8$ см², $a = 14$ см, следовательно, $37,8 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h$; $h = 5,4$ см;

г) $S = 12$ см², $h = 3\sqrt{2}$ см, следовательно, $12 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot a$;

$a = 4\sqrt{2}$ см.

469. CD и AK – высоты, проведенные к сторонам AB и BC соответственно.

Запишем $S_{\triangle ABC}$: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AK$, откуда $AB \cdot CD = BC \cdot AK$, т. е.

$16 \text{ см} \cdot 11 \text{ см} = 22 \text{ см} \cdot AK$ и $AK = 8$ см.

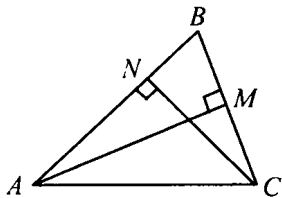
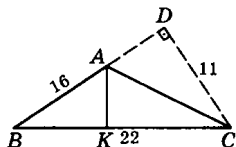
470. Дано: $\triangle ABC$; $AB = 7,5$ см,
 $BC = 3,2$ см; $CN \perp AB$, $CN = 2,4$ см;
 $AM \perp BC$; $AM = ?$

Решение.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 2,4 =$$

$= 9$ см², с другой стороны

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot BC; 9 = \frac{1}{2}AM \cdot 3,2; \text{откуда } AM = 5,625 \text{ см.}$$



471. $S = \frac{1}{2}ab$;

а) $a = 4$ см, $b = 11$ см, следовательно $S_{\triangle} = 22$ см²;

б) $a = 1,2$ дм, $b = 3$ дм, $S_{\triangle} = 1,8$ дм².

472. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$; $AC : BC = 7 : 12$; $S_{\triangle ABC} = 168$ см²; AB , $BC = ?$

Решение.

Пусть x см – 1 часть, следовательно, $AC = 7x$ см, $BC = 12x$ см;

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \text{ следовательно, } 168 = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x;$$

$$x^2 = 4, x = 2; AC = 7 \cdot x = 14 \text{ см}; BC = 12 \cdot x = 24 \text{ см}.$$

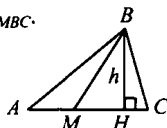
$$473. S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 \perp AB, \text{ или } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DD_1, (DD_1 \perp AB);$$

В четырехугольнике CDD_1C_1 : $CD \parallel C_1D_1$, ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$); $CC_1 \parallel DD_1$ ($CD_1 \perp AB$, $\angle DD_1 \perp AB$), значит, CDD_1C_1 – параллелограмм, где $CC_1 = DD_1$ (по св-ву). Следовательно, $S_{ABC} = S_{ABD}$.

$$474. \text{ Пусть } BM - \text{ медиана } \Delta ABC. \text{ Сравним } S_{ABM} \text{ и } S_{MBC}.$$

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH, \text{ т. к.}$$

$$BM - \text{ медиана, } AM = MC, S_{ABC} = S_{MBC}.$$



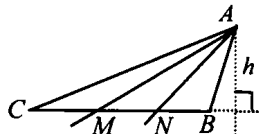
$$475. \text{ Разделим } BC \text{ на три равные части, получим } \Delta CAM, \Delta MAN, \Delta NAB.$$

$$S_{\Delta} = a \cdot h, \text{ следовательно,}$$

$$S_{AMC} = CM \cdot h,$$

$$S_{MAN} = MN \cdot h, S_{NAB} = NB \cdot h,$$

$$\text{где } BM = MN = NB = a.$$



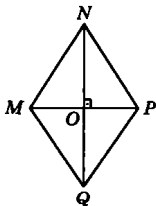
$$476. \text{ Ромб } MNPQ. \text{ Диагонали } NQ \text{ и } MP \text{ взаимно перпендикулярны, пересекаются в точке } O.$$

$$\text{Тогда: } S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MP \cdot NO; S_{\Delta MQP} = \frac{1}{2} MP \cdot$$

$$OQ. \text{ Отсюда } S_{MNPQ} = S_{\Delta MNP} + S_{\Delta MQP} =$$

$$= \frac{1}{2} MP \cdot NO + \frac{1}{2} MP \cdot OQ =$$

$$= \frac{1}{2} MP (NO + OQ) = \frac{1}{2} MP \cdot NQ, \text{ ч.т.д.}$$



$$\text{а) } S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \text{ дм} \cdot 1,4 \text{ дм} = 2,24 \text{ дм}^2;$$

$$\text{б) } S = \frac{1}{2} \cdot 4,6 \text{ дм} \cdot 2 \text{ дм} = 4,6 \text{ дм}^2.$$

$$477. \text{ Дано: } ABCD - \text{ ромб; } S_{ABCD} = 27 \text{ см}; AC < BD \text{ в } 1,5 \text{ раза; } AC, BD = ?$$

Решение.

Пусть $AC = x$ см, тогда $BD = 1,5x$ см;

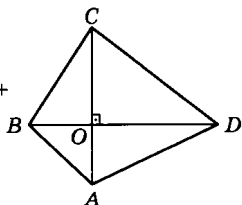
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, 27 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1,5x, \text{ тогда } x^2 = 36; x = 6;$$

$$AC = 6 \text{ см. } BD = 9 \text{ см.}$$

478. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

$AC \perp BD$. Тогда: $S_{ABCD} = BD \cdot CO$ и

$$S_{ABD} = BD \cdot AO \text{ Отсюда: } S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{ABD} = BD \cdot CO + BD \cdot AO = BD(CO + AO) = BD \cdot AC, \text{ ч.т.д.}$$



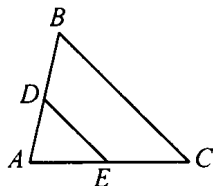
479. а) $\angle A$ – общий, значит:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{10}{S_{\triangle ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2}; S_{\triangle ADE} = 2 \text{ см}^2.$$

б) $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}, \text{ т. е. } \frac{2}{10} = \frac{AD \cdot 2}{8 \cdot 3}$

откуда $AD = 2,4 \text{ см.}$



480. $S_{ABC} = \frac{1}{2} (AD + CB) \cdot h;$

а) $S = \frac{1}{2} (21 + 17) \cdot 7 = 133 \text{ см}^2;$

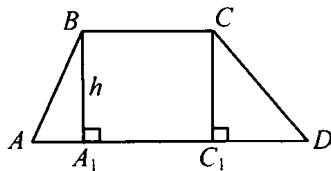
б) Рассмотрим $\triangle OCC_1$:

$\angle C_1 = 90^\circ, \angle D = 30^\circ$, зна-

чит $CC_1 = \frac{1}{2} CD, CC_1 = 4 \text{ см}; \text{ т.к. } CC_1 = h, \text{ то } h = 4 \text{ см.}$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (2 + 10) \cdot 4 = 24 \text{ см}^2.$$

в) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (5 + 13) \cdot 8 = 72 \text{ см}^2.$

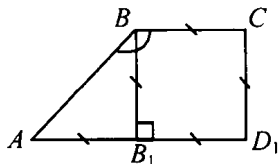


481. Дано: $ABCD$ – трапеция;

$\angle B = 90^\circ, BC = CD = 6;$

$\angle B = 135^\circ; S_{ABCD} = ?$

$BB_1 \perp AD$, в $\triangle ABB_1: \angle B_1 = 90^\circ$,



$\angle A = \angle B = 45^\circ$, тогда $AB_1 = CD =$

$= BB_1 = 6$ см, отсюда

$AD = B_1D + AB_1 = 6 + 6 = 12$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} (12 + 6) \cdot 6 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ: 54 см^2 .

482. По условию $MNPQ$ – равнобедренная трапеция, $\angle N = 135^\circ$;

$NC \perp MQ$; $MC = 1,4$ см;

$CQ = 3,4$ см. Рассмотрим $\triangle MNC$. Это прямоугольный треугольник:

$\angle MNC = 45^\circ$; $\angle M = 90^\circ - \angle MNC = 45^\circ$. Таким образом,

$MC = NC$ (равнобедренный). Проведем высоту PD . Тогда, рассмотрев $\triangle DPQ$, получим $DQ = PD = 1,4$ см (аналогично $\triangle MNC$). Тогда: $CD = NP = CQ - DQ = 3,4 \text{ см} - 1,4 \text{ см} = 2$ см.

$MQ = MC + CQ = 1,4 \text{ см} + 3,4 \text{ см} = 4,8$ см.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot (MQ + NP) \cdot NC = \frac{1}{2} \cdot (4,8 + 2) \text{ см} \cdot 1,4 \text{ см} = 4,76 \text{ см}^2.$$

Ответ: $4,76 \text{ см}^2$.



3 Теорема Пифагора

483. $c^2 = a^2 + b^2$;

а) $a = 6, b = 8, c^2 = 36 + 64 = 100$,

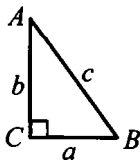
$c = \sqrt{100} = 10$;

б) $a = 5, b = 6, c^2 = 25 + 36 = 61, c = \sqrt{61}$;

в)

$a = 37, b = \frac{4}{7}, c^2 = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}, c = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$;

г) $a = 8, b = 8\sqrt{3}, c^2 = 64 + 192 = 256, c = \sqrt{256} = 16$.



484. $c^2 = a^2 + b^2$;

а) $a = 12, c = 13, 13^2 = 12^2 + b^2, b^2 = 25, b = \sqrt{25} = 5$;

б) $a = 7, c = 9, 81 = 49 + b^2, b^2 = 34, b = \sqrt{34}$;

в) $a = 12, c = 2b, 4b^2 = 144 + b^2, 3b^2 = 144 + b^2 = 48, b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;

г) $a = 2\sqrt{3}, c = 2b, 4b^2 = 12 + b^2, 3b^2 = 12, b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2$;

д) $a = 3b, c = 2\sqrt{10}, 40 = 9b^2 + b^2, 10b^2 = 40, b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2$.

485. Дано: $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ; \angle A = 60^\circ, AB = c; BC = ?$

Решение.

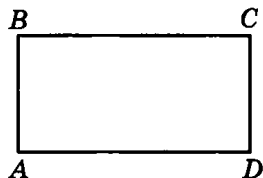
$\angle A = 60^\circ, \angle C = 90^\circ$, значит $\angle B = 30^\circ$, значит, $AC = \frac{1}{2}c$;

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$, т. е. $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

486. а) По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle ACD$: $AC^2 = AD^2 + CD^2$

и $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$. Но в прямоугольнике $CD = AB = 5$, поэтому

$AD = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$.



б) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$. Аналогично,

но, $AB = CB = 1,5$. Отсюда $BC = \sqrt{6,25 - 2,25} = \sqrt{4} = 2$.

в) $CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 8$.

487. Дано: $\triangle ABC; AB = BC = 17$ см;

$AC = 16$ см, $BB_1 \perp AC$; $BB_1 = ?$

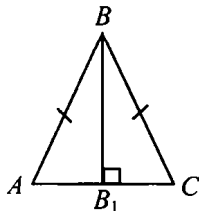
Решение.

Так как высота равнобедренного треугольника является медианой,

$AB = BC = 17$ см.

В $\triangle ABB_1$: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, откуда $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2, BB_1^2 = 289 - 64 = 225$;

$BB_1 = \sqrt{225} = 15$ см.



488. а) $\triangle ABC$ – равносторонний, $AB = 6$ см; $h = ?$
 $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, откуда $BB_1^2 = AB_1^2 - AB_1^2$,

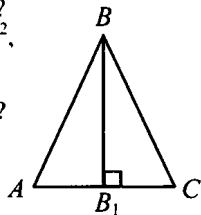
$$BB_1^2 = 36 - 9 = 27, BB_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$$

б) $\triangle ABC$ – равносторонний, $h = 4$ см; $AB = ?$

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2x$ и

$$AB_1 = BB_1^2 + AB_1^2, 4x^2 = 16 + x^2; 3x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{16}{3}, \text{ т. е. } x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$



489. Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний; $AB = a$.

$$\text{Доказать: } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Доказательство.

В $\triangle ABB_1$: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, откуда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4};$$

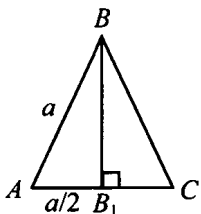
$$BB_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{а) } a = 5, S_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б) } a = 1,2, S_{ABC} = 0,36\sqrt{3}.$$

$$\text{в) } a = 2\sqrt{2}; S_{ABC} = 2\sqrt{3}.$$



490. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$; $AB = ?$ $S_{ABC} = ?$

Решение.

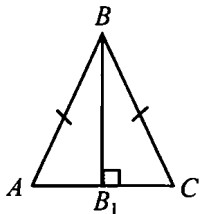
а) $AC = 12$ см, $BB = 8$ см, $BB_1 \perp AC$;

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ (из прямоугольного $\triangle ABB_1$);

$$AB^2 = 64 + 36 = 100; AB = \sqrt{100} = 10;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2;$$

б) $AC = 8$ см, $\angle B = 120^\circ$;



1) В $\triangle ABB_1$, $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, значит, $\angle A = 30^\circ$; пусть $BB_1 = x$, тогда $AB = 2x$,

$$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2; 4x^2 = 16 + x^2; 3x^2 = 16; x^2 = \frac{16}{3},$$

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}; \text{ т.к. } AB = 2x, \text{ то } AB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см, а } BB_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

$$2) S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2;$$

в) $\angle B = 90^\circ$, $BB_1 = 7$ см.

В $\triangle ABB_1$: $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, следовательно, $AB_1 = BB_1 = 7$ см; $AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$; $AB^2 = 49 + 49 = 98$;

$$AB = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \text{ см; } S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2.$$

$$491. c^2 = a^2 + b^2;$$

$$\text{а) } a = 5, b = 12, c^2 = 144 + 25 = 169,$$

$$c = \sqrt{169} = 13.$$

В $\triangle ACC_1$: $CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2$; в $\triangle BCC_1$:

$$CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2, \text{ отсюда}$$

$$AC^2 - AC_1^2 = BC^2 - BC_1^2;$$

$$144 - x^2 = 25 - (13 - x)^2, \text{ где } AC_1 = x;$$

$$144 - x^2 = 25 - 169 + 26x - x^2;$$

$$26x = 288; x = 11 \frac{1}{13}; \text{ т. е. } AC_1 = 11 \frac{1}{13}.$$

$$\text{Из } \triangle ACC_1: AC^2 = CC_1^2 + AC_1^2, \text{ т. е. } CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2;$$

$$CC_1^2 = 144 - \left(11 \frac{1}{13}\right)^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2 = \frac{144 \cdot 169 - 144 \cdot 144}{169} = \frac{144 \cdot 25}{169};$$

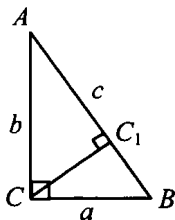
$$CC_1 = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = 4 \frac{8}{13}.$$

$$\text{б) } a = 12, b = 16, c = 20; 256 - x^2 = 144 - (20 - x)^2 \text{ (см. а));}$$

$$256 - x^2 = 144 - 400 + 40x - x^2. 40x = 512; x = 12,8, \text{ где } x = AC_1;$$

$$AC_1 = 12,8 \text{ см, следовательно, } CC_1^2 = 16^2 - 12,8^2;$$

$$CC_1^2 = 3,2 \cdot 28,8 = 92,16, CC_1 = \sqrt{92,16} = 9,6 \text{ см.}$$



492. По условию треугольник ABC является равнобедренным ($AB = BC = 10$ см), BK – высота, проведенная к основанию AC . В данном $\triangle ABC$ она является и медианой.

Отсюда $AK = \frac{1}{2} AC = 6$ см. По теореме

Пифагора

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см.}$$

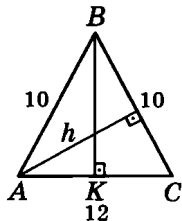
Проведем высоту h к любой из сторон $\triangle ABC$ ($AB = BC$). От-

сюда их высоты равны. Исходя из формулы $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h$,

находим h :

$$h = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2} AB} \quad \text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см} = 48 \text{ см}^2 \text{ и}$$

$$h = \frac{48 \text{ см}^2}{\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ см}} = 9,6 \text{ см.}$$



493. Дано: $ABCD$ – ромб; $AC = 10$ см,
 $BD = 24$ см; $S = ?$, $AB = ?$

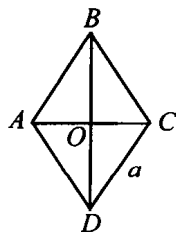
Решение.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ см}^2.$$

Рассмотрим $\triangle ABO$: $AB^2 = AO^2 + BO^2$,

$$AB^2 = 5^2 + 12^2; AB = \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

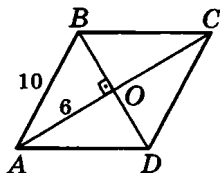
Ответ: 13 см; 120 см².



494. Диагонали ромба пересекаются в точке O . Рассмотрим прямоугольный $\triangle AOB$. Гипотенуза $AB = 10$ см, катет

$$AO = 6 \text{ см; отсюда } OB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ см; } BD = 2 \cdot OB = 16 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = AC \cdot BD = 96 \text{ см}^2.$$



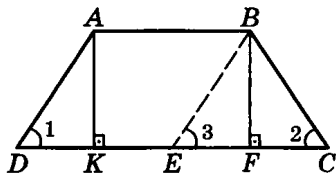
495. Проведем высоты AK и BF к основанию CD .

а) Трапеция $ABCD$ – равнобедренная (по условию):

$BC = DA$. Отсюда

$DK = FC =$

$$= \frac{1}{2}(DC - AB) = 5 \text{ см.}$$



$\triangle AKD$ – прямоугольный: $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см) – по теореме Пифагора.

б) Проведем $BE \parallel AD$. Получаем $\angle 1 = \angle 3$ – соответственные углы при пересечении параллельных прямых AD и BE секущей CD . По условию $\angle C = \angle D = 60^\circ$, отсюда $\angle 3 = \angle 2 = 60^\circ$. Получаем $DK = FC$. $\triangle ADK$ – прямоугольный; $\angle D = 60^\circ$;

$\angle DAK = 30^\circ$, $DK = \frac{1}{2}DA = 4$ см ($BC = AD$). По теореме Пифагора

$AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{64 - 16} = 4$ см. Получаем:

$DC = DK + FC + AB = 4 + 4 + 8 = 16$ см и

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot (8 + 16) \cdot 4 = 48 \text{ см}^2.$$

в) Рассмотрим $\triangle ADK$: $AK \perp DC$ (по построению). $\angle D = 45^\circ$, значит, $\angle DAK = 45^\circ$ и $\triangle ADK$ – равнобедренный, где $AK = DK$. Имеем: $AD^2 = AK^2 + DK^2$ (по теореме Пифагора), $AD = BC$ (т. к. трапеция

$ABCD$ – равнобедренная – $\angle D = \angle C = 45^\circ$ по условию). Получаем: $AD = BC = 9\sqrt{2}$; $(9\sqrt{2})^2 = 2AK^2$; $AK^2 = 81 \text{ см}^2$; $AK = 9$ см. Но $AK = DK$, отсюда $DK = 9$ (см); $KF = AB = 6$ см (по условию). Тогда $DC = DK + KF + FC = 9 + 6 + 9 = 24$ (см) и

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC) \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot (6 + 24) \cdot 9 = 135 \text{ (см}^2\text{)}.$$

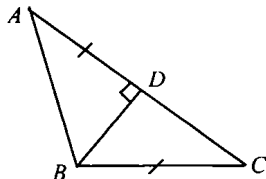
496. Пусть $BC = AD = x$, тогда в $\triangle DBC$:

$$BC^2 = DC^2 + DE^2;$$

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2 =$$

$$= 3 + 9 - 6x + x^2; 6x = 12;$$

$$x = 2; \text{ т. е. } BC = AD = 2 \text{ см.}$$



Из $\triangle ADC$: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 3 = 7$; $AC = \sqrt{7}$.

497. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм;
 $BD \perp AD$;
 $P_{ABCD} = 50$ см; $AC - AD = 1$ см, $CD = ?$

Решение.

Пусть $AD = x$ см, тогда $AC = (x + 1)$ см.

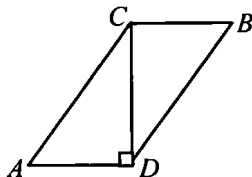
Т. к. $P_{ABCD} = 2(AC + AD)$, то

$$50 = 2(x + x + 1);$$

$$25 = 2x + 1; 2x = 24; x = 12, \text{ т. е. } AD = 12 \text{ см, } AC = 13 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle ACD: CD^2 = AC^2 - AD^2; CD^2 = 13^2 - 12^2; CD^2 = 25,$$

$$CD = \sqrt{25} = 5 \text{ см.}$$



498. а) $6, 8, 10$: $6^2 + 8^2 = 10^2$ ($100 = 100$) – да;
 б) $5, 6, 7$: $5^2 + 6^2 \neq 7^2$ ($61 \neq 49$) – нет;
 в) $9, 12, 15$: $9^2 + 12^2 = 15^2$ ($225 = 225$) – да;
 г) $10, 24, 26$: $10^2 + 24^2 = 26^2$ ($676 = 676$) – да;
 д) $3, 4, 6$: $3^2 + 4^2 \neq 6^2$ ($25 \neq 36$) – нет;
 е) $11, 9, 13$: $11^2 + 9^2 \neq 13^2$ ($202 \neq 169$) – нет;
 ж) $15, 20, 25$: $15^2 + 20^2 = 25^2$ ($625 = 625$) – да.

499. Высота, которая опущена на большую сторону, является меньшей.

а) Из $\triangle ABD$: $AD^2 = AB^2 - BD^2$; из

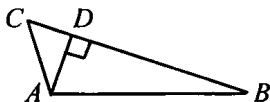
$$\triangle ACD: AD^2 = AC^2 - CD^2.$$

Отсюда $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$; $24^2 - x^2 = 7^2 - (25 - x)^2$, где $BD = x$;

$$50x = 1152; x = 23,04, x = BD = 23,04 \text{ см;}$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2, \text{ т. е. } AD^2 = 24^2 - (23,04)^2 = 45,1584;$$

$$AD = \sqrt{45,1584} = 6,72 \text{ см.}$$

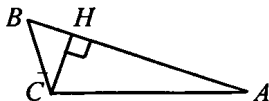


б) Из $\triangle ACH$: $HC^2 = AC^2 - AH^2$; из

$$\triangle BCH:$$

$$HC^2 = BC^2 - BH^2, \text{ т. е. } AC^2 - AH^2 =$$

$$= BC^2 - BH^2; 225 - x^2 = 64 -$$



$$-(17-x)^2; 225 - x^2 = 64 - 289 + 34 - x^2, \text{ где } AH = x; 34x = 540;$$

$$x = 13 \frac{4}{17}, \text{ т. к. } AH = x, \text{ то } AH = 13 \frac{4}{17}; HC^2 = AC - AH^2;$$

$$HC^2 = 15^2 - \left(13 \frac{4}{17}\right)^2 = \frac{225 \cdot 64}{289}; HC = \sqrt{\frac{225 \cdot 64}{289}} = 17 \frac{1}{17} \text{ см.}$$

500. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$;

$BDEK$, $AOCK$ – квадраты.

Доказать: $S_{BDEC} = 2S_{AOCK}$.

Доказательство.

Пусть $AC = BC = a$, тогда

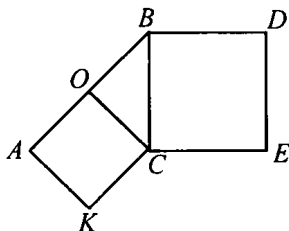
$$S_{BDEC} = a^2;$$

в $\triangle AOC$: $OC = \frac{1}{2} AB$, т. к.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ то } AB^2 = 2a^2, \text{ т. е.}$$

$$AB = a\sqrt{2}, \text{ значит, } OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ и } S_{AOCK} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Сравнивая $S_{BDEC} = a^2$ и $S_{AOCK} = \frac{a^2}{2}$, получаем $S_{BDEC} = 2S_{AOCK}$, ч.т.д.



501. $27 \text{ га} = 0,27 \text{ км}^2 = 270 \text{ 000 м}^2$.

502. Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$$P_{ABCD} = 42 \text{ см};$$

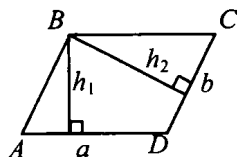
$$h_1 = 5 \text{ см}, h_2 = 4 \text{ см}; S_{ABCD} = ?$$

Решение.

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD); \text{ т.е.}$$

$$42 = 2(AB + AD), \text{ следовательно}$$

$$AB = 21 - AD;$$



$$AD \cdot h_2 = AB \cdot h_1; AD \cdot 4 = (21 - AD) \cdot 5; AD = 11 \frac{2}{3}, \text{ значит,}$$

$$AB = 21 - 11 \frac{2}{3} = 9 \frac{1}{3} \text{ см}; S_{ABCD} = AD \cdot h_2 = 11 \frac{2}{3} \cdot 4 = 46 \frac{2}{3} \text{ см}^2.$$

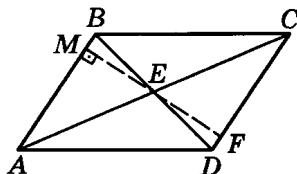
503. В параллелограмме $ABCD$ проведем диагонали AC и BD . Они пересекутся в точке E .

$EM \perp AB$; $EM = 2$ см (по условию). Продолжим EM до пересечения с противоположной стороной параллелограмма CD

в точке F . Получаем MF – высота параллелограмма. E – центр симметрии, поэтому $ME = EF$; $MF = 2 \cdot ME = 4$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot MF$, тогда $AB = 6$ см.

Аналогично находим AD . Точка E удалена от сторон параллелограмма на 3 см (по условию). Поэтому высота параллелограмма, проведенная к противоположным сторонам AD и BC равна 6 см. Отсюда $AD = 4$ см. Находим периметр параллелограмма: $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ см.

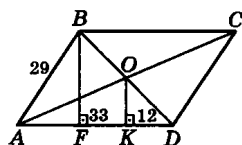


504. По условию $AB = 29$ см, $AK = 33$ см; $KD = 12$ см (по построению). BF – высота параллелограмма. Так как $BO = OD$; $BF \parallel OK$, то $FK = KD = 12$ см (согласно задаче № 384). Отсюда $AF = AK - FK = 33 - 12 = 21$ (см).

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABF$. По теореме Пифагора

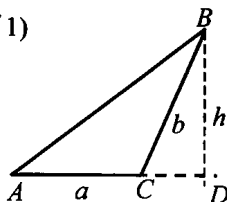
$$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20 \text{ (см)}.$$

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot BF$; $S_{ABCD} = (33 + 12) \cdot 20 = 900 \text{ (см}^2\text{)}.$



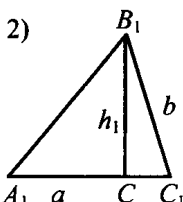
Ответ: 900 см^2 .

505. 1)



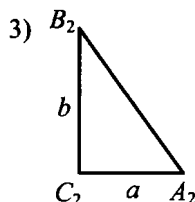
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h;$$

- 2)



$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} a \cdot h_1;$$

- 3)



$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} a \cdot b$$

В случаях 1) и 2) h и $h_1 < b$, (в прямоугольном треугольнике

гипотенуза больше любого катета).

Сравнивая правые части формул, имеем: $\frac{1}{2}a \cdot h < \frac{1}{2}a \cdot b$:

$\frac{1}{2}a \cdot h_1 < \frac{1}{2}a \cdot b$, следовательно, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}a \cdot b$ — наибольшая.

506. Пусть $AB = a$, тогда $S_1 = \frac{1}{2}BM \cdot AB$,

$$S_2 = \frac{1}{2}DN \cdot AD, S_3 = S_{ABCD} - 2 \cdot S_1.$$

Пусть $M \in BC$, тогда $BM = \frac{2}{3}BC$, а

$N \in CD$, тогда $DN = \frac{2}{3}CD$, значит,

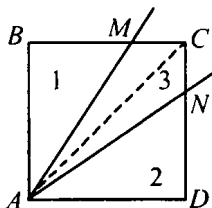
AM, AN — искомые прямые.

$$\text{Имеем: } S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}a \cdot BM, S_{\triangle ADN} = \frac{1}{2}a \cdot DN, S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}a \cdot MC,$$

$$S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2}a \cdot CN, \text{ т. е. } DN = BM = MC + CN, \text{ следовательно,}$$

$(BC + CD)$ делим на 6 равных частей, именно:

$$BC \text{ и } CD \text{ на 3 равные части, т. е. } BM = \frac{2}{3}BC \text{ и } DN = \frac{2}{3}CD.$$



507. 1) В $\triangle ABC$: $AB = BC = 13$ см, $AC = 14$ см;

в $\triangle EMN$: $EM = MN = EN = 12$ см.

Из прямоугольного $\triangle ABH$: $BH^2 = AB^2 - AH^2$;

$$BH^2 = 169 - 49 = 120; BH = \sqrt{120} = 2\sqrt{30};$$

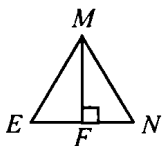
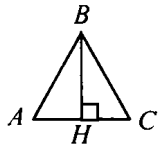
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2\sqrt{30} = 14\sqrt{30} \text{ см}^2.$$

2) Из прямоугольного $\triangle EMF$: $MF^2 = EM^2 - EF^2$;

$$MF^2 = 144 - 36 = 108; MF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3};$$

$$S_{\triangle EMN} = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Т. к. $14\sqrt{30} > 36\sqrt{3}$, то $S_{\triangle ABC} > S_{\triangle EMN}$.



508. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$; $MN \perp BC$,
 $MK \perp AB$; $FE \perp BC$, $FQ \perp AB$.

Доказать: $NM + MK = EF + FQ$.

Доказательство.

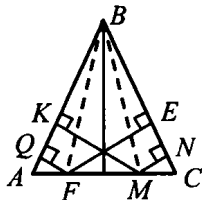
$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC}$, иначе

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FBC}$.

Значит $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FBC}$, т.е.

$$\frac{1}{2} BC \cdot MN + \frac{1}{2} AB \cdot MK = \frac{1}{2} AB \cdot FQ + \\ + \frac{1}{2} BC \cdot HF,$$

$AB(MN + MK) = AB(FQ + FE)$, т. е. $MN + MK = FQ + FE$, ч.т.д.



509. Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC = AC$; $EN \perp BC$, $EK \perp AC$, $EM \perp AB$;
 $OQ \perp BC$, $OH \perp AC$, $OF \perp AB$.

Доказать: $EN + EK + EM = OQ + OH + OF$.

Доказательство.

1) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE}$, также

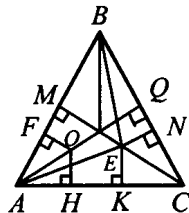
$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$ т.е.

$S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$

$$\text{или } \frac{1}{2} AC \cdot EK + \frac{1}{2} BC \cdot EN + \frac{1}{2} AB \cdot EM =$$

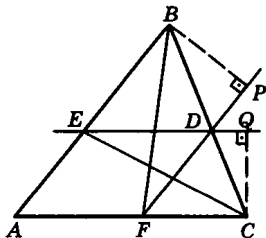
$$= \frac{1}{2} AC \cdot OH + \frac{1}{2} BC \cdot OQ + \frac{1}{2} AB \cdot OF, \text{ имеем: } AC \cdot EK +$$

$$+ EN \cdot BC + AB \cdot EM = AC \cdot OH + BC \cdot OQ + OF \cdot AB, \text{ ч.т.д.}$$



510. Рассмотрим $\triangle CDE$. CQ – его высота;
 BP – высота $\triangle BDF$. $AEDF$ – параллелограмм (по построению).
 BP и CQ равны высотам параллелограмма $AEDF$. Отсюда

$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle AEDF}$, $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AEDF}$, а значит,
 $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BDF}$, что и требовалось доказать.



511. а) Сравнивая $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$,
имеем:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BB_1; S_{ACD} = \\ = \frac{1}{2} AD \cdot CC_1, BB_1 = CC_1,$$

т.е. $S_{ABD} = S_{ACD}$.

б) $S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD}$; $S_{CDO} = S_{ACD} - S_{AOD}$; $S_{ABO} = S_{CDO}$.

в) В $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ вертикальные углы $\angle AOB = \angle DOC$, следовательно $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle CDO}} = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т.е. $1 = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т.е.

$AO \cdot OB = CO \cdot OD$, ч.т.д.

512. Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $BC = a$, $AD = b$; $MN \parallel AD$;
 $S_{AMND} = S_{MBCN}$; $MN = ?$

Решение.

Пусть $MN = x$ см, тогда

$$S_{AMND} = \frac{1}{2} (b+x)(h-h_1) = \frac{1}{2} (x+a)h_1, \text{ т.е. } (h-h_1)(b+x) = \\ = (x+a)h_1; h(b+x) = (a+b+2x)h_1,$$

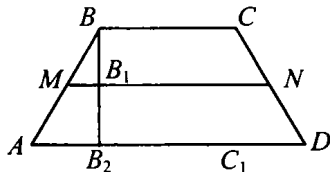
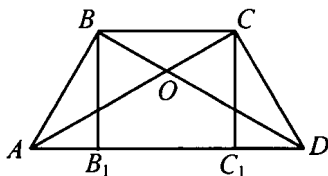
$$S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{MBCN}. \text{ т.е. } \frac{1}{2} (a+b)h = (b+x)(h-h_1) + \\ + \frac{1}{2} (x+a)h_1 \text{ или } (a+b)h = (b+x)h + (a-b)h_1; (a-x)h = (a-b)h_1.$$

Имеем систему из двух уравнений:

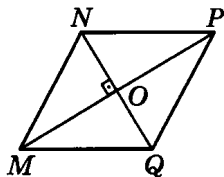
$$\begin{cases} (b+x) \cdot h = (a+b+2x) \cdot h_1; & (a-x)(a+b+2x) = (b+x)(a-x); \\ (a-x) \cdot h = (a-b) \cdot h_1 \end{cases}$$

$$a^2 + ab + 2ax - ax - bx - 2x^2 = ab + ax - b^2 - bx, a^2 - 2x^2 + b^2 = 0;$$

$$2x^2 = a^2 + b^2 = 0; \text{ т.е. } x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}; x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



- 513. а)** В ромбе $MNPQ$ диагонали пересекаются в точке O . $NO \perp MP$ и $MO \perp QN$; $NO = OQ$; $MO = OP$. Рассмотрим $\triangle MON$: $MO = \frac{1}{2} MP = 9$ м;
 $NO = \frac{1}{2} NQ = 12$ м. По теореме Пифа-



гора: $MN^2 = MO^2 + ON^2$; $MN = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (м). Тогда:
 $P_{MNPQ} = 4 \cdot MN = 60$ м.

- б)** Расстояние между параллельными сторонами ромба равно его высоте h . $S_{MNPQ} = MN \cdot h$, но $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MP \cdot NQ$ (согласно

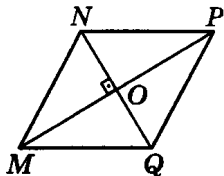
задаче 476), получаем: $MN \cdot h = \frac{1}{2} MP \cdot NQ$; $h = \frac{\frac{1}{2} MP \cdot NQ}{MN}$;

$$h = \frac{\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24}{15}; h = 14,4 \text{ м.}$$

- 514.** Имеем ромб $MNPQ$. Его диагонали MP и NQ пересекаются в точке O .
 $MP = 4,5$ дм (по условию).

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MP \cdot NQ, \text{ тогда}$$

$$NQ = \frac{2S_{MNPQ}}{MP} = \frac{2 \cdot 540}{45} = 24 \text{ см.}$$



Рассмотрим прямоугольный $\triangle MON$. $MO = 22,5$ см, $ON = 12$ см.

По теореме Пифагора: $MN = \sqrt{22,5^2 + 12^2} = 25,5$ см.

Имеем: $S_{MNPQ} = MN \cdot H$; отсюда $H = \frac{S_{MNPQ}}{MN} = \frac{540}{22,5} = 21 \frac{3}{17}$ и

$$h = \frac{1}{2} H; h = 21 \frac{3}{17} : 2 = 10 \frac{10}{17} \text{ см.}$$

515. а) $\triangle ABC$, $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 30^\circ$; $S_{ABC} = ?$

Из $\triangle ABM$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, следовательно,

$$BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 20 \sqrt{3} \cdot 10 = 100 \sqrt{3} \text{ см; } AH^2 = AB^2 - BH^2 =$$

$$= 400 - 100 = 300, AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ см, значит } AC = 20\sqrt{3} \text{ см.}$$

б) $\triangle ABC$, $AB = BC$; $AH \perp BC$, $AH = 6$ см, $\angle CAH = 45^\circ$; $S_{ABC} = ?$

В $\triangle AMC$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, значит, $\angle C = 45^\circ$, следовательно, $AH = HC = 6$ см;

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 36 + 36 = 72, \text{ следовательно } AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2};$$

$\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$, следовательно $\angle BAC = 45^\circ$, значит $\triangle ABC$ — прямоугольный, значит, AH и AB совпадают, следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ м}^2.$$

Ответ: 18 см².

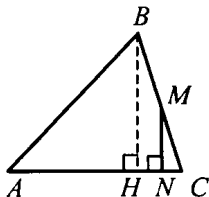
516. $BH \perp AC$; из $\triangle BCH$: $BM = MC$, $MN \parallel BH$, значит, $NC = NH = 15$ см;

Из $\triangle BCH$: $BC^2 = BH^2 + HC^2$, т.е.

$$BH^2 = BC^2 - HC^2; BH^2 = 34 - 30 = 256,$$

$$BH = \sqrt{256} = 16 \text{ см;}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 16 = 320 \text{ см}^2.$$



517. $BC^2 = BA^2 + AC^2$, т. е.

$$AC^2 = BC^2 - BA^2.$$

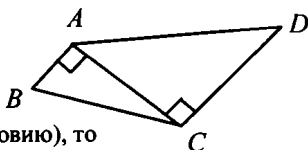
Т. к. $AB^2 = 25$, $BC^2 = 169$ (по условию), то $AC^2 = 169 - 25 = 144$.

Т. к. $CD^2 = 81$, $AD^2 = 225$ (по условию), то $AC^2 = 225 - 81 = 144$,

следовательно, $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ – прямоугольные, имеющие общую сторону $AC = 12$ см.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AC + \frac{1}{2} AC \cdot CD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (5 \cdot 14 + 9 \cdot 14) = 98 \text{ см}^2.$$



Ответ: 98 см^2 .

518. а) Равнобедренная трапеция $MNPQ$, где $NP = 18$ см;

$ND = 9$ см; $\angle M = 45^\circ$;

$ND \perp MQ$. Тогда $\triangle MND$ – прямоугольный: $\angle M = 45^\circ$,

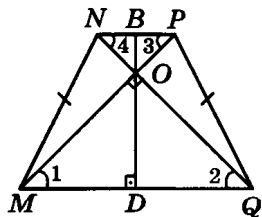
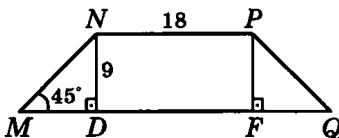
значит, $\triangle MND$ – равнобедренный,

$MD = DN = 9$ см. $MNPQ$ – равнобедренная трапеция (по условию), поэтому $MD = FQ = ND = 9$ см.

Найдем $MQ = 2MD + DF = 2 \cdot 9 + 18 = 36$ см. Получаем:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MQ + NP) \cdot ND;$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot (18 + 36) \cdot 9 = 243 \text{ см}^2.$$



б) Равнобедренная трапеция $MNPQ$, где $NP = 16$ см; $MQ = 30$ см; $MP \perp NQ$; O – точка пересечения диагоналей; BD – высота трапеции, проходящая через точку O .

Рассмотрим $\triangle MNQ$ и $\triangle MPQ$: $MN = PQ$ (по условию); MQ – общая сторона; $\angle M = \angle Q$, а значит, и $\angle 1 = \angle 2$.

Отсюда $\triangle MNQ = \triangle MPQ$.

Рассмотрим $\triangle MOQ$ и $\triangle NOP$: $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$ ($MQ \parallel NP$),

но $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 4 = \angle 3$, т. е. $\triangle MOQ$ и $\triangle NOP$ – равнобедренные. Но $MP \perp NQ$, значит, они прямоугольные.

Высоты OD и OB являются и медианами, поэтому (задача

$$404) OD = \frac{1}{2} MQ; OB = \frac{1}{2} NP, \text{ т. е. } BD = \frac{1}{2} (MQ + NP) = \\ = \frac{1}{2} \cdot (30 + 16) = 23 \text{ см. } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MQ + NP) \cdot BD = 529 \text{ см}^2.$$

Ответ: а) 243 см²; б) 529 см².

519. **Дано:** $ABCD$ – трапеция; $AC \perp BD$; $BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$; $S_{ABCD} = ?$

Решение.

Проведем: $DD_1 \perp BC$, имеем BB_1DD_1 – прямоугольник;

$S_{B_1BD_1} = S_{ABCD}$ (т.к. $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CDD_1}$, S_{B_1BCD} – общая).

BB_1DD_1 – квадрат: т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $AC = B_1D_1$;

из $BD \perp AC$, $AC \parallel B_1D_1$ следует, что $BD \perp B_1D_1$, $BD = B_1D_1$,

но т.к. четырехугольник, диагонали которого равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам – квадрат, то

$BB_1 = BD_1 = h$; $S_{B_1BD_1D} = S_{ABCD} = h^2$.

Ответ: h^2 .

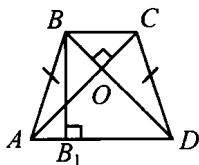
520. **Дано:** $ABCD$ – равнобедренная трапеция; $AC \perp BD$, $AB = CD$; $AD + BC = 2a$; $S_{ABCD} = ?$

Решение.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BB_1,$$

$S_{ABCD} = BB_1^2$ (см. 519), следовательно,

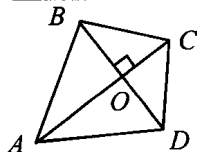
$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot BB_1 = BB_1^2, \text{ где } a = BB_1, \text{ т.е. } S_{ABCD} = a^2.$$



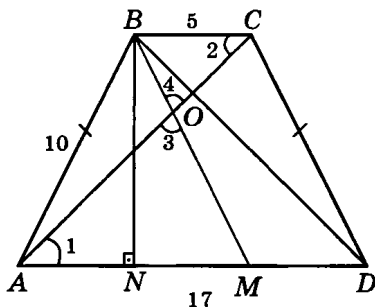
Ответ: $S_{ABCD} = a^2$.

521. Рассмотрим $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$.

$$AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) + (BO^2 + OC^2) = \\ = (AO^2 + BO^2) + (OD^2 + OC^2) = AB^2 + CD^2 \\ (\text{по теореме Пифагора}).$$



522. BM пересекает AC в точке O , причем $AO = OC$. Рассмотрим $\triangle AOM$ и $\triangle BOC$.
 $AO = OC$; $\angle 1 = \angle 2$;
 $\angle 3 = \angle 4$. Значит,
 $\triangle AOM = \triangle BOC$;
 $AM = BC = 5$ см. Отсюда
 $MD = 12$ см.



$$AN = \frac{AD - BC}{2} \quad (\text{т. к.}$$

трапеция $ABCD$ равнобедренная) $AN = 6$ см. По теореме Пифагора: $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = 8$ см.

$$S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} MD \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ: 48 см^2 .

523. Даны два квадрата $ABCD$ и $MCPN$, где $AB = CM = a$. Надо найти S_{MCPN} .

$$S_{MCPN} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AMQ}.$$

Вычислим эти площади.

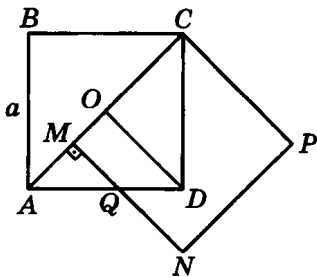
$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}. \text{ Рас-}$$

смотрим $\triangle AMQ$. Он прямоугольный, $\angle MAQ = 45^\circ$, значит, $\triangle AMQ$ – равнобедренный:

$$AM = MQ = AC - MC = a\sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1)a.$$

$$\text{Имеем: } S_{\triangle AMQ} = \frac{1}{2} MQ^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot a^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 \text{ и}$$

$$S_{MCPN} = \frac{a^2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} a^2 = a^2 (\sqrt{2} - 1).$$



Ответ: $a^2 (\sqrt{2} - 1)$.

524. Решение приведено в учебнике.

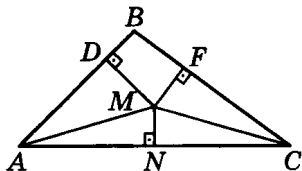
525. Получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84 \text{ (см}^2\text{)} -$$

по теореме Герона. Проведем высоты MD , MF и MN в треугольниках ABM , BMC , AMC .
 $MD = 6$ см; $MN = 2$ см.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{\triangle AMC} + S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC} = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot MN + \frac{1}{2} AB \cdot BM + \frac{1}{2} BC \cdot FM. \end{aligned}$$

$$84 = \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 2 + 13 \cdot 6 + 14 \cdot FM), \text{ откуда } FM = 4 \frac{2}{7} \text{ см.}$$



Ответ: $4 \frac{2}{7}$ см.

526. **Дано:** $ABCD$ – ромб, BK – высота.

$$BK = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ см, } BK = \frac{2}{3} AC; S_{ABCD} = ?$$

$$AC = \frac{4\sqrt{2}}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ см.}$$

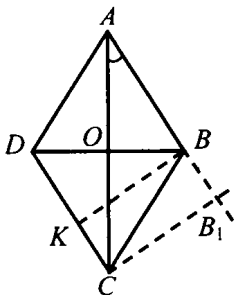
Решение.

Продолжим сторону AB и проведем к ее продолжению перпендикуляр CB_1 .

$$\text{Из } \triangle AB_1C: \sin \angle OAB = \frac{CB_1}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AOB: \operatorname{tg} \angle OAB = \frac{OB}{OA}.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{2}{3} \right) = \frac{OB}{\sqrt{2}/3}; \frac{\sin \left(\arcsin \frac{2}{3} \right)}{\cos \left(\arcsin \frac{2}{3} \right)} = \frac{3OB}{\sqrt{2}};$$

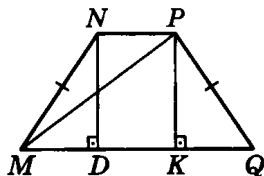


$$\frac{\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}} = \frac{3OB}{\sqrt{2}}; \quad \frac{2/3}{\sqrt{1-4/9}} = \frac{3OB}{\sqrt{2}}; \quad \frac{3OB}{\sqrt{2}} = \frac{2/3}{\sqrt{5/3}};$$

$$OB = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AC \cdot OB = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{8}{9\sqrt{5}} \text{ см}^2.$$

527. $MP = 10$ см; $ND = 6$ см; $MN = PQ$ (по условию). Рассмотрим прямоугольный $\triangle MPK$. По теореме Пифагора $MK = \sqrt{MP^2 - PK^2} = 8$ см. $MD = KQ$ (т. к. трапеция $MNPQ$ – равнобедренная). $DK = NP$.



Получаем: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MQ + NP) \cdot D$. Учтем, что

$$\frac{1}{2} (MQ + NP) = \frac{1}{2} (DK + 2MD + DK) = MK, \text{ тогда}$$

$$S_{MNPQ} = MK \cdot ND = 8 \cdot 6 = 48 \text{ см}^2.$$

Ответ: 48 см².

528. Пусть h – высота трапеции.

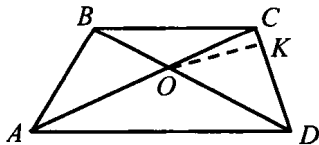
$$\text{Тогда } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot h.$$

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD}, \quad S_{\triangle COD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD}.$$

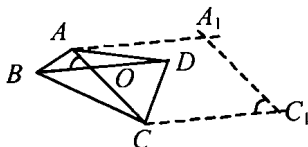
$$\text{Значит } S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}.$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 \text{ см}^2.$$

$$\text{Значит } S_{\triangle AOB} = 30 \text{ см}^2.$$



529. Построим $AA_1 \parallel BD$ и $A_1C_1 \parallel AC$;
 $CC_1 \parallel AA_1$ и $\angle CC_1A = \angle AOB =$
 $= 30^\circ$. Таким образом,
 AA_1C_1C – параллелограмм с
 острым углом 30° .



$$S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot CC_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin \angle CC_1A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 80 \text{ см}^2.$$

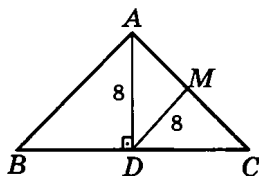
530. Рассмотрим $\triangle ADC$. $AD \perp BC$. По-
 этому $\triangle ADC$ – прямоугольный. От-
 сюда $DM = \frac{1}{2} AC$ (задача 404),

$AC = 16$ см. По теореме Пифагора

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 8\sqrt{3} \text{ см.}$$

$\triangle ABC$ – равнобедренный (по условию). AD – высота и медиана,

$$\text{значит, } BC = 2DC = 16\sqrt{3} \text{ см. } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 8 \cdot 8 = 64 \text{ см}^2.$$



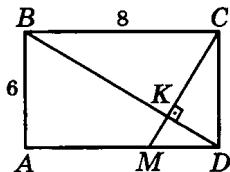
Ответ: 64 см^2 .

531. Рассмотрим $\triangle ABD$:

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABKM} + S_{\triangle KMD}, S_{\triangle AMKM} = S_{\triangle ABD} -$$

$$- S_{\triangle KMD}; S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2. \text{ Рассмотрим } \triangle BCD:$$



CK – высота, проведенная к гипотенузе BD . Найдем площадь

$$\text{этого треугольника: } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BC; S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot KC \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} CD \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot KC, \text{ тогда } CK = \frac{CD \cdot BC}{BD}.$$

По теореме Пифагора $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 10$ см.

$$\text{Получаем: } CK = \frac{CD \cdot BC}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = 4,8 \text{ см.}$$

Находим: $KD = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6$ см.

В $\triangle CDM$ KD является высотой, проведенной к гипотенузе CM .

Отсюда: $KD = \frac{CD \cdot DM}{\sqrt{CD^2 + DM^2}}$ или $3,6 = \frac{6 \cdot DM}{\sqrt{6^2 + DM^2}}$;

$3,6 \sqrt{36 + DM^2} = 6 \cdot DM$. Тогда находим: $DM = 4,5$ см.

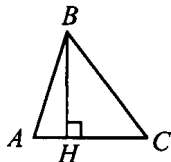
Теперь получаем величину KM : $KM = \sqrt{DM^2 - KD^2} = 2,7$ см

(по теореме Пифагора). Тогда: $S_{\triangle KMD} = \frac{1}{2} KM \cdot KD =$

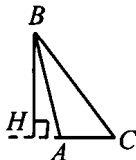
$$= \frac{1}{2} \cdot 2,7 \cdot 3,6 = 4,86 \text{ см}^2 \text{ и } S_{\triangle BKM} = 24 \text{ см}^2 - 4,86 \text{ см}^2 = 19,14 \text{ см}^2.$$

Ответ: $19,14 \text{ см}^2$.

$$\begin{aligned} 532. \text{ а) } BC^2 &= CH^2 + BH^2 = (AC - AH)^2 + AB^2 - AH^2 = \\ &= AC^2 - 2AC \cdot AH + AH^2 + AB^2 - AH^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{б) } BC^2 &= CH^2 + BH^2 = (AC + AH)^2 + AB^2 - AH^2 = \\ &= AC^2 + 2AC \cdot AH + AH^2 + AB^2 - AH^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$



Глава VII.

Подобные треугольники



1 Определение подобных треугольников

533. $\frac{AB}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $\frac{AB}{CD} = \frac{150 \text{ мм}}{200 \text{ мм}} = \frac{3}{4}$; отношение не изменится.

534. а) $AB = 12$ ед., $CD = 6$ ед. $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $M_1M_2 = 2$ ед.; $MM_1 = 2$ ед.;

$\frac{MM_1}{M_1M_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{CD}{AD} = \frac{MM_1}{M_1M_2}$ – пропорциональны;

б) $AB = 9$ ед., $BC = 3$ ед., $CD = 6$ ед.

$MM_2 = 3$ ед., $MM_1 = 1$ ед., $M_1M_2 = 2$ ед.

$\frac{AB}{MM_2} = 3$; $\frac{BC}{MM_1} = 3$; $\frac{CD}{M_1M_2} = 3$,

т. е. $\frac{AB}{MM_2} \neq \frac{BC}{MM_1} \neq \frac{CD}{M_1M_2}$ – пропорциональны.

в) $AB = 9$ ед., $BD = 9$ ед.; $MM_1 = 1$ ед.; $M_1M_2 = 2$ ед.;

$\frac{AB}{MM_1} = 9$; $\frac{BD}{M_1M_2} = 4,5$, т. е. $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$ – не пропорциональны.

535. Решение приведено в учебнике.

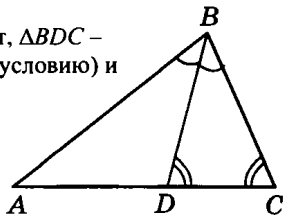
536. а) По условию BD – биссектриса $\triangle ABC$. Значит $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, и

$AB = \frac{AD \cdot BC}{DC} = 15$ см.

б) $\angle BDC = \angle C$ (по условию), значит, $\triangle BDC$ – равнобедренный: $BD = BC = 16$ (по условию) и

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$;

$DC = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 16}{30} = 10\frac{2}{3}$.

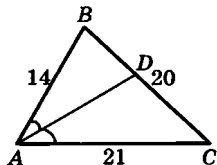


537. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ и $DC = BC - BD = 20 - BD$.

Имеем: $\frac{BD}{20 - BD} = \frac{14}{21}$, отсюда получаем

$21 \cdot BD = 14 \cdot (20 - BD)$, тогда $BD = 8$ см;

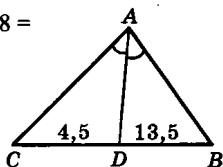
$DC = BC - BD = 20 - 8 = 12$ см.



538. $BC = CD + BD = 18$ см и $AB + AC = 42 - 18 =$

$= 24$ см. Имеем: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 3$, отсюда

получаем $AB = 3AC$. Тогда $3AC + AC = 24$ см и $AC = 6$ см, $AB = 18$ см.

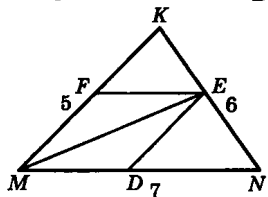


539. Проведем ME – диагональ ромба, которая делит $\angle M$ пополам. Значит, ME – биссектриса $\triangle MKN$. Тогда:

$\frac{NE}{EK} = \frac{MN}{MK}$; $EK = KN - NE$;

$EK = 6 - NE$. Имеем: $\frac{NE}{6 - NE} = \frac{7}{5}$,

отсюда: $NE = 3,5$ см и $EK = 6 - 3,5 = 2,5$ см.



540. Проведем диагональ DF ромба $DMFN$. Она является биссектрисой $\triangle CDE$. Получаем: $\frac{CD}{DE} = \frac{CF}{FE}$, отсюда $CD = \frac{2}{3} DE$.

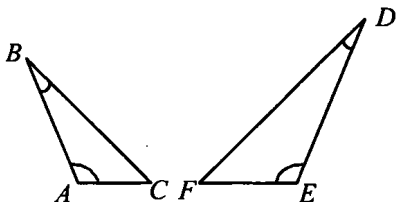
$CE = FE + CF = 20$ см. $P_{\triangle CDE} = 55$ см и $CD + DE = 55 - CE$, т. е.

$CD + DE = 35$ см. Но $CD = \frac{2}{3} DE$, отсюда $\frac{2}{3} DE + DE = 35$ см;

$DE = 21$ см и $CD = 14$ см.

Ответ: $DE = 21$ см, $CD = 14$ см.

541. 1) $\angle A = \angle E = 106^\circ$,
 $\angle B = \angle D = 34^\circ$,
 $\angle C = \angle F = 40^\circ$, т. е.
 все углы соответственно равны.



$$2) \frac{AC}{FE} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}; \frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}. \frac{AC}{FE} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}.$$

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$, т. к. стороны соответственно пропорциональны с коэффициентом $k = \frac{1}{3}$ углы соответственно равны.

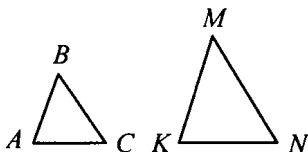
542. $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, значит

$$\frac{AM}{KM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{KN};$$

$$\frac{5}{KM} = \frac{5}{MN} = \frac{7}{KN}.$$

$$\frac{KM}{AB} = 2,1, \text{ значит } KM = 2,1 \cdot 4 = 8,4;$$

$$5 \cdot 2,1 = MN = 10,5; 7 \cdot 2,1 = KN; KN = 14,7.$$



543. Предположим, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. $AB : A_1B_1 = k$. Проведем высоты к сходственным сторонам AB и A_1B_1 . Обозначим их h и h_1 , соответственно.

$$\text{Тогда: } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2 \text{ или } \frac{\frac{1}{2} AB \cdot h}{\frac{1}{2} A_1B_1 \cdot h_1} = k^2.$$

$$\text{Поэтому } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{h}{h_1}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

544. Дано: $S_{ABC} = 75 \text{ м}^2$; $S_{A_1B_1C_1} = 300 \text{ м}^2$; $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;
 $A_1C_1 = 9 \text{ м}$; $AC = ?$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ значит } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{75}{300} = k^2; k^2 = \frac{1}{4}; k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ значит } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{1}{2}, \text{ где } A_1C_1 = 9 \text{ м, т. е. } AC = 4,5 \text{ м.}$$

545. Пусть $S_{A_1B_1C_1} = x \text{ см}^2$, тогда $S_{ABC} = (x + 77) \text{ см}^2$.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом $k = \frac{6}{5}$, тогда

$$\frac{x + 77}{x} = \left(\frac{6}{5}\right)^2,$$

$$25(x + 77) = 36x, x = 175; S_{ABC} = 252 \text{ см}^2, S_{A_1B_1C_1} = 175 \text{ см}^2.$$

546. $\frac{87,5}{S} = k^2; k = \frac{1}{100\,000}$ и $S = 87,5 \text{ км}^2$.

547. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k .

Доказать: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$.

Доказательство.

$$A_1B_1 = k \cdot AB, B_1C_1 = k \cdot BC, A_1C_1 = k \cdot AC.$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} &= \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \\ &= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

548. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140}{56} = 2,5; \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 2,5$.

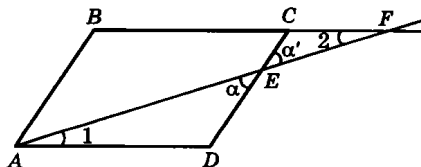
549. $\frac{P}{P_1} = k$, но $k = \frac{15 + 20 + 30}{26} = 2,5$. Поэтому стороны треуголь-

ника, подобного данному в k раз меньше сторон данного треугольника.

$$15 : 2,5 = 6 \text{ (см);}$$

$$20 : 2,5 = 8 \text{ см;}$$

$$30 : 2,5 = 12 \text{ см.}$$

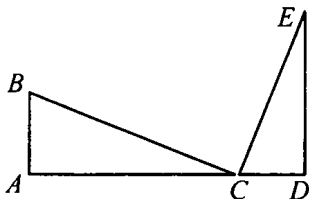


Ответ: 6 см, 8 см, 12 см.



2. Признаки подобия треугольников

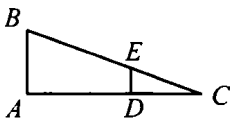
550. 1) Из условия следует, что $\angle C = \angle E = \alpha$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, значит $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ (по двум углам), следовательно $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DC}$; $\frac{8}{6} = \frac{12}{ED}$, $ED = 9$.



- 2) $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle C$ – общий, значит $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (по двум углам). По теореме Пифагора

$$DE = \sqrt{100 - 64}, DE = 6;$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}; \frac{AB}{6} = \frac{28}{8}; AB = 21.$$



551. Рассмотрим $\triangle ECF$ и $\triangle AED$: $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные), $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие), поэтому $\triangle ECF$ подобен $\triangle AED$ (по первому признаку).

а) $\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$; $FC = \frac{AD \cdot EC}{DE}$; $FC = \frac{7 \cdot 4}{8} = 3,5$ см. $AD = BC$ (т. к.

$ABCD$ – параллелограмм). Имеем: $\frac{EF}{AE} = \frac{FC}{AD}$, но $\frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$,

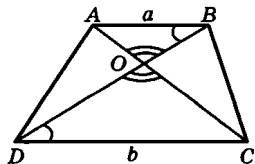
то $\frac{EF}{AE} = \frac{EC}{DE}$; $EF = \frac{AE \cdot EC}{DE}$; $\frac{10 \cdot 4}{8} = 5$ см.

б) $\frac{EC}{DE} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{5}$; $EC = \frac{2}{5} DE$; $DE = AB - CE$; $DE = 5 \frac{5}{7}$ см;

$$EC = \frac{2}{5} DE; EC = 2 \frac{2}{7} \text{ см.}$$

552. Рассмотрим $\triangle COD$ и $\triangle AOB$. Они подобны по двум углам. Отсюда

следует: $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$.



$$\text{а) } AB = \frac{DC \cdot BO}{OD} = 10 \text{ см. } \text{б) } \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{в) } \frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC}; OC = AC - AO; AO = 12 \text{ см.}$$

553. а) Да; б) да; в) да.

Треугольники равнобедренные, имеют по одному равному углу, следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника и теореме о сумме углов треугольника, находим другие углы, т. е.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по двум углам).

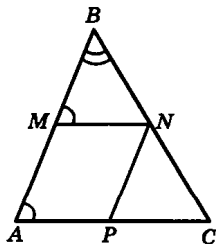
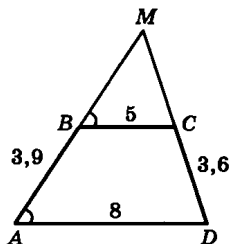
554. По условию $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $CD = 3,6$ см, $AB = 3,9$ см.

Рассмотрим $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$. Они подобны (по двум углам). Отсюда сле-

$$\text{дует: } \frac{BC}{AD} = \frac{MB}{MA}; MA = MB + 3,9;$$

$$\frac{5}{8} = \frac{MB}{MB + 3,9}; MB = 6,5 \text{ см. Так же}$$

$$\text{получаем: } \frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD}; MC = 6 \text{ см.}$$



555. а) Четырехугольник $AMNP$ является параллелограммом (стороны взаимно параллельны). Тогда $AM = NP$, $MN = AP$ и $AM : MN = 2 : 3$.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$. Они подобны (по двум углам). Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MN}; \frac{AB}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \frac{2}{3} = \frac{10 - AM}{MN}; \frac{2}{3} = \frac{10}{MN} - \frac{AM}{MN},$$

$$\text{но } \frac{AM}{MN} = \frac{2}{3} \text{ тогда } \frac{2}{3} = \frac{10}{MN} - \frac{2}{3}; \frac{4}{3} = \frac{10}{MN}; MN = 7,5 \text{ см.}$$

$$AM = \frac{2}{3} \cdot MN = 5 \text{ см; } MN = AP = 7,5 \text{ см; } AM = NP = 5 \text{ см.}$$

$$6) \frac{AM}{AP} = \frac{AM}{MN} \text{ (т. к. } AM = AP), \text{ значит, } \frac{AM}{AP} = \frac{AM}{MN} = 1.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a - AM}{MN}; \frac{a}{b} = \frac{a}{MN} - 1 \text{ и } MN = \frac{ab}{a+b}. \text{ По условию}$$

$$AM = AP, \text{ значит, } AM = NP = MN = \frac{ab}{a+b}.$$

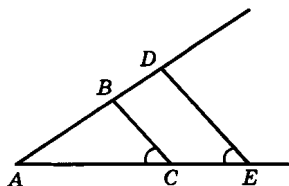
556. Решение приведено в учебнике.

$$557. \text{ а) } \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} \text{ (задача 556) – тео-}$$

$$\text{рема Фалеса. } AC = \frac{CE \cdot AB}{BD};$$

$$AB = AD - BD = 14 \text{ см и}$$

$$AC = \frac{14 \cdot 10}{8} = 17,5 \text{ см.}$$



$$6) BD = \frac{CE \cdot AB}{AC}; BD = \frac{4 \cdot 10}{8} = 5 \text{ см.}$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$. Они подобны (по двум углам), от-

$$\text{сюда } \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}; DE = \frac{AE \cdot BC}{AC} \text{ и}$$

$$DE = \frac{(AC + CE) \cdot BC}{AC} = \frac{(8 + 4) \cdot 4}{8} = 6 \text{ см.}$$

в) $AB : BD = 2 : 1$ (по условию). $AB = 2BD$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB + BD}{AB} = \frac{3BD}{2BD} = \frac{3}{2}.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE: \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}; \frac{12}{BC} = \frac{3}{2}; BC = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8 \text{ см.}$$

558. 1) Проведем $c \parallel b$ так, что $A \in C, B_2, C_2 \in c$.

2) В $\triangle ABB_2$ и $\triangle ACC_2$: $\angle A$ – общий;

$\angle C = \angle B$ (соответственные при $BB_1 \parallel CC_1$ и секущей AC),

$$\triangle ABB_2 \sim \triangle ACC_2 \text{ по двум углам, значит } \frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}.$$

По свойству параллелограмма имеем: $AB_2 = A_1B_1, B_2C_2 = B_1C_1$, сле-

довательно, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; по свойству пропорции $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}$, ч.т.д.

559. Исходя из условия

$$AB : AD = 5 : 8 \text{ и}$$

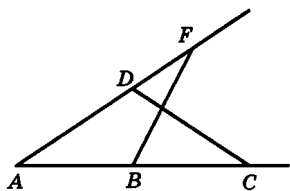
$$AF : AC = 10 : 16 \text{ или}$$

$$AF : AC = 5 : 8. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}, \text{ т. е. стороны } \triangle ADC$$

и $\triangle AFB$ пропорциональны, $\angle A$ –

общий. Значит, $\triangle ACD \sim \triangle AFB$ (по второму признаку подобия треугольников).



560. а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}; \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}; \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{7}{10,5} = \frac{2}{3}$. Значит,

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (третий признак подобия треугольников).

б) Аналогично $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по третьему признаку подобия треугольников):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1,7}{340} = \frac{1}{200}; \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{3}{600} = \frac{1}{200}; \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{4,2}{840} = \frac{1}{200}.$$

561. Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$. $AB = BC = AC$;

$MN = NK = MK$; $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ – ?

Доказательство.

1) Т. к. $\triangle ABC$ – равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$,

т. к. $\triangle MNK$ – равносторонний, то $\angle M = \angle N = \angle K = 60^\circ$;

2) $\angle M = \angle N = \angle K = \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ по двум углам.

562. В $\triangle ABC$ и $\triangle KNC$, где

$\angle C$ – общий,

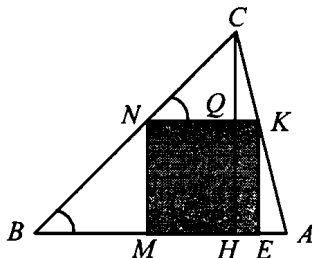
$\angle N = \angle B$ (соответственные

при $AB \parallel NK$ и секущей BC),

значит $\triangle ABC \sim \triangle KNC$ по

двум углам,

т. е. $\frac{CH}{CQ} = \frac{AB}{NK}$ (1).



Пусть $MN = NK = KE = ME = x$, тогда $CQ = h - x$

Подставляя в (1), имеем: $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}$.

$$a(h-x) = hx; ah = hx + ax; x \frac{ah}{a+h} = MN.$$

563. Проведем $DN \parallel BK$.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{KN}{NC}; \frac{AK}{EN} = \frac{AM}{MD} \text{ (см. № 556), но}$$

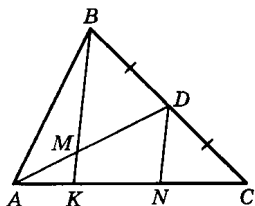
$BD = DC$ (по условию), то $KN = NC$.

а) по условию $AM = MD$, тогда $AK = KN = NC$. $KC = 2KN$ или

$$KC = 2AK; \frac{AK}{KC} = \frac{AK}{2AK} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}; \frac{AK}{KN} = \frac{1}{2}; KN = 2AK, \text{ но } KN = NC, \text{ значит,}$$

$$KC = 4AK; \frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}.$$



§ 3

Применение подобия

к доказательству теорем и решению задач

564. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 8$ см, $BC = 5$ см,

$AC = 7$ см $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ A_1 ,

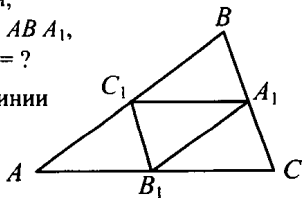
B_1 , C_1 – середины сторон; $P_{A_1B_1C_1} = ?$

Т. к. A_1B_1 , B_1C_1 , A_1C_1 – средние линии $\triangle ABC$, то

$$A_1C_1 = \frac{1}{2} AC; B_1C_1 = \frac{1}{2} BC;$$

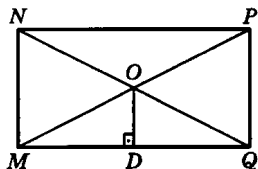
$$A_1B_1 = \frac{1}{2} AB; A_1C_1 = 3,5 \text{ см}; B_1C_1 = 2,5 \text{ см}; A_1B_1 = 4 \text{ см};$$

$$P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = 3,5 + 2,5 + 4 = 10 \text{ см.}$$



Ответ: 10 см.

565. $MNPQ$ – данный прямоугольник:
 $OD \perp MQ$, $OD = 2,5$ см (по условию). $NO = OQ$, $MO = OP$. $MN \parallel OD$.
 Значит, OD – средняя линия $\triangle MNQ$.
 Отсюда $MN = 2OD = 5$ см.



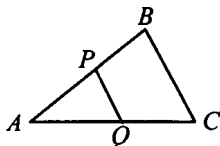
566. Дано: $\triangle ABC$

$P \in AB$, $AP = PB$; $Q \in AC$, $AQ = QC$; $P_{APQ} = 21$ см; $P_{ABC} = ?$

Решение:

1) P и Q – середины сторон AB и AC , следовательно, PQ – средняя линия

$$\triangle ABC, PQ = \frac{1}{2} BC;$$



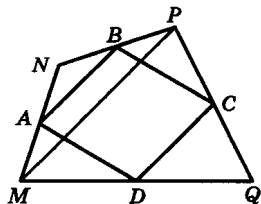
2) $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2AP + 2PQ + 2AQ = 2P_{APQ} = 2 \cdot 21 = 42$ см.

567. $MNPQ$ – четырехугольник, A, B, C, D – середины его сторон. Проведем диагональ MP в четырехугольнике $MNPQ$. Тогда AB – средняя линия $\triangle MNP$; CD – средняя линия $\triangle MPQ$.

$$AB \parallel MP; AB = \frac{1}{2} MP; CD \parallel MP;$$

$$CD = \frac{1}{2} AC, \text{ или } AB \parallel CD, AB = CD.$$

Значит, $ABCD$ – параллелограмм, ч.т.д.



568. а) Дано: $ABCD$ – прямоугольник;
 M, N, K, E – середины сторон.

Доказать: $MNKE$ – ромб.

Доказательство:

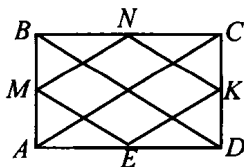
1) ME – средняя линия $\triangle ABD$ (по определению). Значит, $ME = \frac{1}{2} BD$

(средняя линия $\triangle ABD$) и $ME \parallel BD$; NK – средняя линия $ABCD$,

т. е. $NK = \frac{1}{2} BD$ и $BD \parallel ME \parallel NK$. Имеем: $NK = ME = \frac{1}{2} BD$,

$ME \parallel BD \parallel NK$, значит, $MNKE$ – параллелограмм.

2) Аналогично: $MN = KE = \frac{1}{2} AC$, $MN \parallel KE \parallel AC$.



3) По св-ву диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $ME = MN$, т. е. $MNKE$ – ромб (по определению), ч.т.д.

6) **Дано:** $ABCD$ – равнобедренная трапеция;

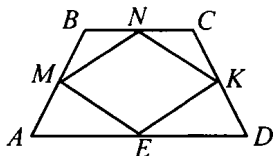
M, N, K, E – середины сторон.

Доказать: $MNKE$ – ромб.

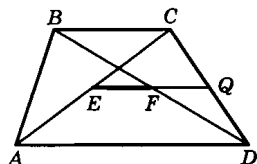
Доказательство:

Аналогично доказанному выше:

$AC = BD$ – диагонали.



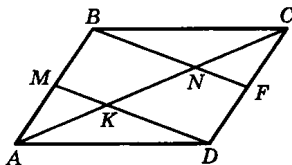
569. $ABCD$ – трапеция: E – середина диагонали AC ; F – середина диагонали BD . Через точку E проведем $EQ \parallel AD$. Так как $AE = EC$, то EQ – средняя линия $\triangle ACD$, значит, точка



Q – середина стороны CD : $EQ = \frac{1}{2}AD$.

$EQ \parallel BC$, отсюда F – середина BD . FQ – средняя линия $\triangle BCD$, значит, $FQ = \frac{1}{2}BC$. $EF = EQ - FQ = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC =$
 $= (AD - BC)$, ч.т.д.

570. Соединим вершину B с серединой стороны CD . Получим точку F . $MB = FD$; $MB \parallel FD$, значит, $MBFD$ – параллелограмм и $MD \parallel BF$. Значит, $BN \parallel MK$.



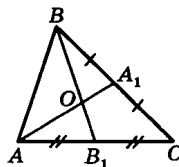
MK – средняя линия $\triangle ABN$ (т. к. $AM = MB$ и $BN \parallel MK$). Отсюда $AK = KN$. Аналогично находим $CN = KN$ (из $\triangle CKD$). Значит,

$$AK = KN = NC. AK = \frac{AC}{3} = 6 \text{ см}; KC = 12 \text{ см}.$$

571. Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle AOB_1$.

$BO : B_1O = 2 : 1$. $\triangle AOB$ и $\triangle AOB_1$ имеют одну общую высоту из вершины A , поэтому $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOB_1} = 2 : 1$. $S_{\triangle AOB_1} = S$;

$$S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOB_1} = S.$$



$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABB_1} + S_{\triangle B_1BC}$, но $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle B_1BC}$ (т. к. BB_1 — медиана), значит, $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABB_1} = 3S$.

572. а) Дано: $b_c = 25$, $a_c = 16$; h , a , $b = ?$

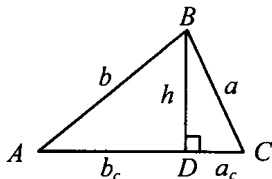
Решение.

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20;$$

$$2) c = b_c + a_c = 25 + 16 = 41;$$

$$3) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25} = 5\sqrt{41};$$

$$4) a = \sqrt{c \cdot a_c} = 4\sqrt{41}.$$



б) Дано: $b_c = 36$, $a_c = 64$; h , a , $b = ?$

Решение.

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{36 \cdot 64} = 48; \quad 2) c = b_c + a_c = 36 + 64 = 100;$$

$$3) a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{64 \cdot 100} = 80; \quad 4) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{36 \cdot 100} = 60.$$

в) Дано: $b = 12$, $b_c = 6$; a , c , $a_c = ?$

Решение.

$$1) b^2 = b_c \cdot c; c = \frac{b^2}{b_c}; \quad 2) c = b_c + a_c; a_c = c - b_c = 24 + 16 = 8;$$

$$3) a = \sqrt{c \cdot a_c} = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}.$$

г) Дано: $a = 8$, $a_c = 4$; b , c , $b_c = ?$

Решение.

$$1) a^2 = a_c \cdot c; c = \frac{a^2}{a_c} = \frac{64}{4} = 16; \quad 2) c = b_c + a_c; b_c = c - a_c = 16 - 4 = 12;$$

$$3) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}.$$

д) Дано: $a = 6$, $c = 9$; h , b , a_c , $b_c = ?$

Решение.

$$1) a^2 = a_c \cdot c; c = \frac{a^2}{a_c} = \frac{36}{9} = 4; \quad 2) c = b_c + a_c; b_c = c - a_c = 9 - 4 = 5;$$

$$3) h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}; \quad 4) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}.$$

$$573. a^2 = a_c \cdot c; \quad a_c = a^2 : c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

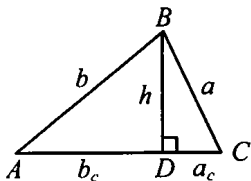
$$b^2 = b_c \cdot c; \quad b_c = b^2 : c = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$574. 1) b_c = \frac{b^2}{c}; a_c = \frac{a^2}{c}, \text{ отсюда}$$

$$h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}} = \frac{ab}{c};$$

$$2) b^2 = b_c \cdot c, \text{ т. е. } c = \frac{b^2}{b_c}; a^2 = a_c \cdot c,$$

$$\text{т. е. } c = \frac{a^2}{a_c}. \text{ Итак, } \frac{b^2}{b_c} = \frac{a^2}{a_c}, \text{ ч.т.д.}$$



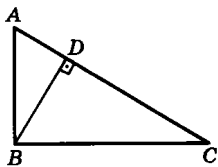
575. $AB : BC = 3 : 4$ (по условию),
 $AC = 50$ мм; $BD \perp AC$.

$$\text{Так как } BC = \sqrt{AB \cdot AC}, \text{ то } DC = \frac{BC^2}{AC}.$$

$$\text{Аналогично, } AD = \frac{AB^2}{AC} \text{ и } \frac{AD}{DC} = \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 = \frac{9}{16}, \text{ тогда}$$

$$AD = \frac{9DC}{16} \text{ и } AC = AD + DC = DC \left(1 + \frac{9}{16} \right) = 50 \text{ мм и}$$

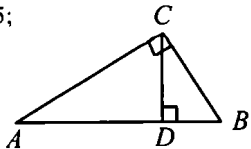
$$DC = 32 \text{ мм, } AD = 18 \text{ мм.}$$



576. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$; $AC : BC = 6 : 5$;
 $CD \perp AB$, $AD > DB$ на 11 см; $AB = ?$

Решение:

$$1) \frac{CB^2}{DB} = \frac{AC^2}{AD}.$$



$$\text{Пусть } BD = x \text{ см, тогда } AD = x + 11 \text{ см; } \frac{36}{x+11} = \frac{25}{x};$$

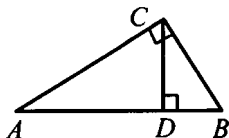
$$36x = 25(x + 11); x = 25, \text{ т.е. } D = 25 \text{ см, } AD = 36 \text{ см;}$$

$$2) AB = AD + DB = 25 + 36 = 61 \text{ см.}$$

577. **Дано:** $\triangle ABC$; $AB = 5$ см, $BC = 12$ см;
 $AC = 13$ мм; $BD \perp AC$; AD , $CD = ?$

Решение.

$\triangle ABC$ – прямоугольный по теореме Пифагора ($25 + 144 = 169$), $\angle B = 90^\circ$.



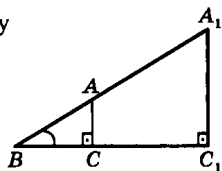
$$CD = \frac{CB^2}{AC} = \frac{144}{13} = 11\frac{1}{13}; AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{25}{13} = 1\frac{12}{13}.$$

578. Решение приведено в учебнике.

579. $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ (по двум углам). Поэтому

$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} \text{ и } A_1C_1 = \frac{BS_1 \cdot AC}{BC};$$

$$A_1C_1 = \frac{6,3 \cdot 1,7}{3,4} = 3,15 \text{ м.}$$



580. **Дано:** $AC_1 = 10,2$ м; $AC = 2,5$ м;
 $BC = 1,7$ м; $B_1C_1 = ?$

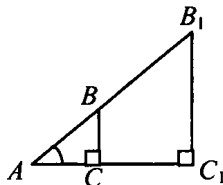
Решение.

В $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$ $\angle A$ – общий,

$\angle C_1 = \angle C = 30^\circ$, значит

$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ по двум углам, тогда

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; B_1C_1 = \frac{1,7 \cdot 10,2}{2,5} = 6,936 \text{ м.}$$



581. В $\triangle ABD$ и $\triangle EFD$: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle E = 90^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, значит

$$\triangle ABD \sim \triangle EFD \text{ (по двум углам) и } \frac{BD}{FD} = \frac{AD}{ED} = \frac{AB}{EF}.$$

$$AB = AC - BC = 165 - 12 = 153 \text{ см; } \frac{153}{EF} = \frac{120}{480}, EF = 153 \cdot 4 = 612 \text{ см.}$$

582. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и выполняется равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; AB = \frac{A_1B_1 \cdot AC}{A_1C_1} = \frac{7,2 \cdot 4,2}{6,3} = 48 \text{ м.}$$

583. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}; \frac{AB}{34} = \frac{100}{32}; AB = \frac{34 \cdot 100}{32} = 106,25;$$

$$BB_1 = AB - AB_1 = 106,25 - 34 = 72,25 \text{ м.}$$

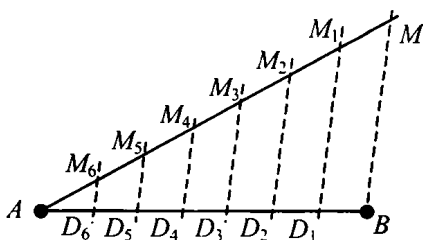
584. Решение приведено в учебнике.

585. а) Проводим произвольный луч AC , откладываем 7 равных отрезков, соединяем B и M . Через точки $M_1 - M_6$ строим прямые, параллельные прямой BM . По теореме

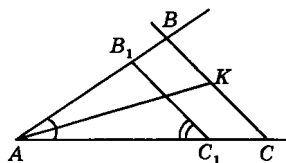
Фалеса точки $D_1 - D_6$ делят отрезок AB на 7 равных частей. Тогда $AD_5 : D_5B = 2 : 5$.

б) Аналогично, но на луче AC откладываем 10 отрезков.

в) Откладываем 7 отрезков.



586. Построим треугольник, подобный искомому. Возьмем произвольный отрезок AC_1 . Построим $\triangle AB_1C_1$, где $\angle A$ равен меньшему данному углу, $\angle C_1$ равен большему данному углу.



Проведем биссектрису $\angle A$. Отложим на ней отрезок AK , равный данному. Через точку K надо провести прямую, параллельную B_1C_1 . Получим точки B и C при пересечении сторон угла A . $\triangle ABC$ – искомый.

Задача имеет единственное решение, если сумма двух данных углов меньше 180° и не имеет решений, если сумма углов больше или равна 180° .

587. Построим $\triangle AB_1C_1$, где $\angle B_1$ и $\angle C_1$ равны данным углам. Проведем высоту AD_1 и отложим на ней отрезок AD , равный данной высоте. Через точку D проведем прямую, параллельную B_1C_1 . Получаем $\triangle ABC$ – искомый. Задача имеет одно решение (аналогично задаче 586).

588. 1) $\angle A = \alpha$.

2) На одной из сторон угла A отложить два одинаковых отрезка, а на другой – 3 таких же отрезка. Соединить FN .

3) Найти середину NF .

4) На луче AO – отрезок $AM = m$.

5) Через M строим прямую $l \parallel NF$.

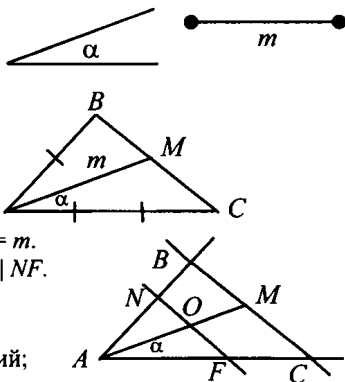
6) $l \cap AF = C$; $l \cap AN = B$.

7) $\triangle ABC$ – искомым:

$\triangle ANF \sim \triangle ABC$, где $\angle A$ – общий;

$\angle B = \angle N$ (соответственные при $NF \parallel BC$ и секущей AB).

$NO = OF$, значит, $BM = MC$, т. е. AM – медиана.



589. См. задачу 586.

590. См. задачу 586.



4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

$$591. \text{ а) } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}; \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{15}{17}; \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{8}{15};$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \sin A = \frac{8}{17}; \sin B = \cos A; \sin B = \frac{15}{17}; \operatorname{tg} B = \frac{15}{8}.$$

$$\text{ б) } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 29; \sin A = \frac{21}{29}; \cos A = \frac{20}{29}; \operatorname{tg} A = \frac{21}{20};$$

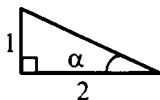
$$\cos B = \frac{21}{29}; \sin B = \frac{20}{29}; \operatorname{tg} B = \frac{20}{21}.$$

$$\text{ в) } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5}; \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} A = \frac{1}{2}.$$

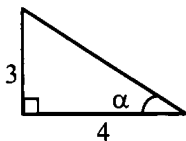
$$\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} B = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \sin B &= \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}; \sin B = \cos A = \frac{24}{25}; \cos B = \sin A = \frac{7}{25}; \\ \text{tg } A &= \frac{7}{24}; \text{tg } B = \frac{24}{7}. \end{aligned}$$

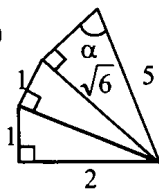
592. а)



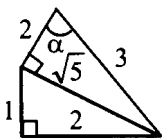
б)



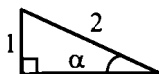
в)



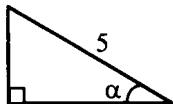
г)



д)



е)



$$593. \text{ а) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tg } \alpha = \sqrt{3}.$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

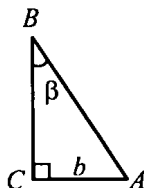
$$\text{в) } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}; \text{tg } \alpha = \sqrt{3}.$$

$$\text{г) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}; \text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

594. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $AC = b$.Выразить: BC , $\angle A$, AB .Решение.

$$\text{а) } \text{tg } \angle B = \frac{AC}{BC}, \text{ т. е.}$$

$$BC = \frac{AC}{\text{tg } \angle B} = \frac{b}{\text{tg } \beta}; AB = \frac{b}{\sin \beta}; \angle A = 90^\circ - \beta.$$



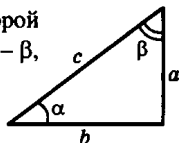
$$6) BC = \frac{10}{\operatorname{tg} 50^\circ} \approx \frac{10}{1,1918} \approx 8,39 \text{ см};$$

$$\angle A = 40^\circ; AB = \frac{10}{\sin 50^\circ} \approx \frac{10}{0,766} \approx 13,05.$$

595. а) Введем дополнительные обозначения. Второй катет обозначим a , прилежащий к нему угол – β , гипотенуза – c .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \alpha + \beta = 90^\circ;$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha; a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha; c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$



$$6) a = 12 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ; a \approx 11 \text{ см}; \beta = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ; c = \frac{12}{\cos 42^\circ};$$

$$c \approx 16 \text{ см}.$$

596. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$; $\angle A = \alpha$, $AB = c$;
 BC , AC и $\angle B = ?$

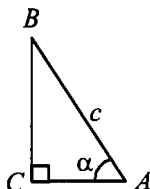
Решение.

$$1) BC = AB \cdot \sin \angle A = c \cdot \sin \alpha;$$

$$AC = AB \cdot \cos \angle A = c \cdot \cos \alpha; \angle B = 90^\circ - \alpha;$$

$$2) c = 24 \text{ см}; \alpha = 35^\circ; BC = 24 \cdot \sin 35^\circ = 24 \cdot 0,5736 \approx 14 \text{ см};$$

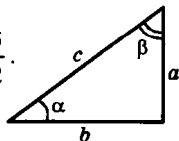
$$AC = 24 \cdot \cos 35^\circ = 24 \cdot 0,8192 \approx 20 \text{ см}; \angle B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$



597. c – гипотенуза, α, β – острые углы.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 19; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{12}{15}; \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{12}.$$

$$\text{Тогда } \alpha \approx 38^\circ 39'; \beta = 51^\circ 21'.$$



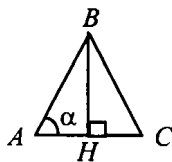
598. а) Дано: $AB = BC$; $\angle A = \alpha$, $AB = b$; $S_{ABC} = ?$

Решение.

$$\text{Из } \triangle ABH: BH = AB \cdot \sin \angle A = b \cdot \sin \alpha,$$

$$AH = AB \cdot \cos \angle A = b \cdot \cos \alpha,$$

$$BH \perp AC; S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BH \cdot 2 \cdot AH$$



(т. к. $\triangle ABC$ – равнобедренный); значит,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha = b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

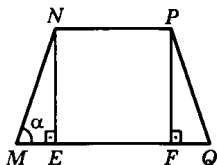
б) Дано: $AB = BC$; $\angle A = \alpha$, $AC = a$; $S_{ABC} = ?$

Решение.

$$\text{Из } \triangle ABH: BH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

- 599.** $NP = 2$ см; $MQ = 6$ см. $\angle M = \alpha$;
 $NE \perp MQ$; $PF \perp MQ$. Рассмотрим
 $\triangle MNE$ и $\triangle FPQ$: $MN = PQ$; $NE = PF$;
 $\angle M = \angle Q$ (т. к. трапеция $MNPQ$ – рав-
 нобедренная). Значит, $\triangle MNE = \triangle FPQ$.
 Поэтому $ME = FQ$. $EF = NP = 2$ см.



$$ME = \frac{1}{2} (MQ - EF) = 2 \text{ см. } NE = ME \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} (MQ + NP) \cdot NE = 8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2.$$

600. Дано:

$BC = 60$ м; $h = 12$ м;
 $\angle A = \angle D = 60^\circ$; $AD = ?$

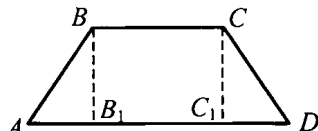
Решение:

1) $\triangle ABB_1$: BB_1 : $\cos \angle A = AB_1$,

отсюда $AB_1 = 12 : \operatorname{tg} 60^\circ = 12 : \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ м;

2) $C_1D = AB_1 = 4\sqrt{3}$ м;

3) $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 4\sqrt{3} + 60 + 4\sqrt{3} = 60 + 13,9 = 73,9$ м.

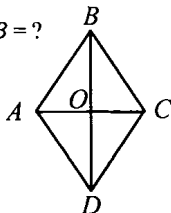


601. Дано: $ABCD$ – ромб; $AC = 3$, $BD = 2\sqrt{3}$; $\angle A$, $\angle B = ?$

Решение.

Из $\triangle AOB$: $AO = 1$, $BO = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} \angle BAO =$

$$= \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{1} \text{ значит } \angle BAO = 60^\circ, \text{ т.е.}$$



$\angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$; AC, BD – биссектрисы углов A и B , значит, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 120^\circ$.

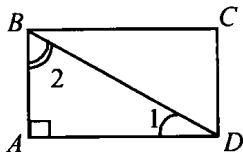
602. **Дано:** $ABCD$ – прямоугольник;

$$AB = \sqrt{3}, BC = 3; \angle 1, \angle 2 = ?$$

Решение.

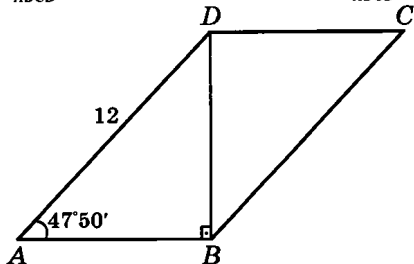
$$\text{Из } \triangle ABD: \operatorname{tg} \angle 1 = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ т. е.}$$

$$\angle 1 = 60^\circ, \text{ значит } \angle 2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



603. $AB = AD \cdot \cos A = 12 \cos 47^\circ 50'$; $BD = AD \cdot \sin A = 12 \sin 47^\circ 50'$.

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD = 12^2 \cdot \cos A \cdot \sin A; S_{ABCD} \approx 72 \text{ см}^2.$$



604. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$; $\frac{6}{A_1B_1} = \frac{10}{7,5} = \frac{9}{B_1C_1}$,

$$\text{отсюда } A_1B_1 = \frac{6 \cdot 7,5}{10} = 4,5; B_1C_1 = \frac{9 \cdot 7,5}{10} = 6,75.$$

605. $AD = a$; $BC = b$.

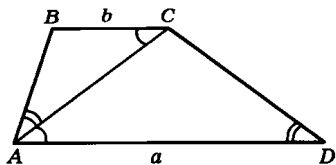
$\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Значит, углы этих треугольников равны:

$\angle BCA = \angle CAD$ (как накрест лежащие при $AD \parallel BC$); AB

не параллельна CD , поэто-

му $\angle BAC \neq \angle ACD$, значит, $\angle BAC = \angle CDA$ и $\angle ABC = \angle DCA$.

$$\text{Имеем равенство: } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AC}; \frac{AC}{a} = \frac{b}{AC}, AC^2 = ab, \text{ ч.т.д.}$$



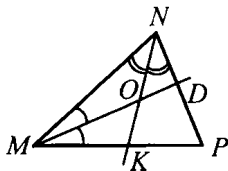
606. Т.к. NK – биссектриса,

$$\frac{MN}{MK} = \frac{NP}{KP}; \frac{5}{MK} = \frac{3}{KP}.$$

Пусть $MK = x$, тогда $KP = 7 - x$. Име-

$$\text{см: } \frac{5}{x} = \frac{3}{7-x}; 35 - 5x = 3x;$$

$$x = MK = 4\frac{3}{8} \text{ см.}$$



MD – биссектриса, значит $\frac{MK}{KO} = \frac{MN}{NO}$; по свойству пропор-

$$\text{ций } \frac{MK}{M} = \frac{KO}{NO} = \frac{4\frac{3}{8}}{5} = \frac{35}{8 \cdot 5} = \frac{7}{8}.$$

607. Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC$; $BD \perp AC$,
 $BD = 30$ см; AO – биссектриса; BO , $OD = ?$

Решение.

В $\triangle ABC$: $AB : AD = 3 : 2$, $AD = 2x$, $AB = 3x$;

$$AB^2 = AD^2 + BD^2; 4x^2 + 900 = 9x^2;$$

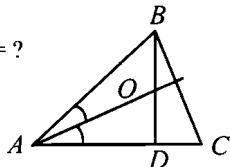
$$x^2 = 180; x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \text{ см,}$$

$$\text{значит, } AB = 18\sqrt{5} \text{ см, } AD = 12\sqrt{5};$$

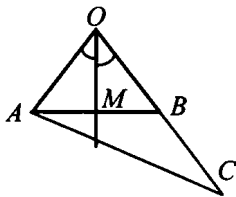
$$AO \text{ – биссектриса, следовательно, } \frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}.$$

$$\text{Пусть } DO = x, \text{ тогда } BO = 30 - x, \text{ значит, } \frac{18\sqrt{5}}{30-x} = \frac{12\sqrt{5}}{x};$$

$$3x = 2(30 - x); x = 12; \text{ т. е. } DO = 12 \text{ см, } BO = 30 - 12 = 18 \text{ см.}$$



608. Т. к. OM – биссектриса, $\frac{OM}{AM} = \frac{OC}{MC} = \frac{OB+BC}{MC}$; $AO < (OB + BC)$;



$$\frac{OM}{AM} = \frac{OB+BC}{MC}, \text{ значит } AM < MC, \text{ ч.т.д.}$$

609. AH – высота $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, т. е. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$ (1).

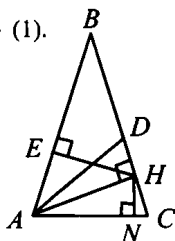
$$\text{Так же } S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BT \cdot AC, \text{ имеем: } \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}.$$

Сравнивая (1) и (2) имеем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}, \text{ т. к. } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} - \text{по условию.}$$

$$1 = \frac{DE}{DN}, \text{ значит, } DE = DN, AD - \text{биссектриса (по свойству).}$$



610. $AM : MC = 2 : 7$, $MN \parallel AB$ (по условию). Тогда: $AM = AC - MC$;

$$AM = 21,6 - MC.$$

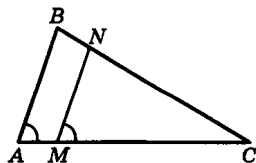
$$\frac{AM}{MC} = \frac{21,6 - MC}{MC} = \frac{2}{7} \text{ откуда}$$

$$MC = 16,8 \text{ см.}$$

$\triangle MNC \sim \triangle ABC$ (по двум углам; $\angle A = \angle M$, т. к. $AB \parallel MN$). Имеем:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}; \frac{MN}{10} = \frac{16,6}{21,6}; MN = 7\frac{7}{9} \text{ см;}$$

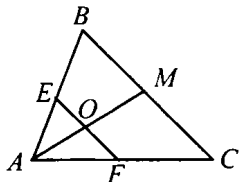
$$\frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}; \frac{NC}{18} = \frac{16,6}{21,6}; NC = 14 \text{ см.}$$



611. В $\triangle AOF$ и $\triangle AMC$ $\angle A$ – общий;
 $\angle C = \angle F$ (соответственные при
 $EF \parallel MC$), значит
 $\triangle AOF \sim \triangle AMC$ по двум углам, т. е.

$$\frac{OF}{MC} = \frac{AO}{AM}. \text{ Отсюда}$$

$$OF = \frac{OA \cdot MC}{AM} \quad (1).$$



- В $\triangle AOE$ и $\triangle AMB$ $\angle A$ – общий, $\angle B = \angle E$ (соответственные при
 $EF \parallel BC$), значит $\triangle AOE \sim \triangle AMB$ по двум углам, т. е.

$$\frac{OE}{BM} = \frac{AO}{AM}, \text{ отсюда } OE = \frac{AO \cdot BM}{AM} \quad (2).$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что $MC = BM$, можно сделать вывод, что $OF = OE$, ч.т.д.

612. 1) В $\triangle ADC$ и $\triangle AOK$ $\angle A$ – общий, $\angle K = \angle C = 90^\circ$, значит $\triangle ADC \sim \triangle AOK$ по двум углам, т. е. $\frac{DC}{OK} = \frac{AC}{AK}$, отсюда $\frac{b}{x} = \frac{d}{m}$, ч.т.д.

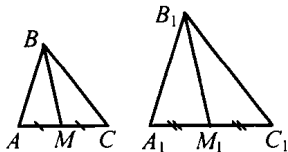
- 2) В $\triangle ABC$ и $\triangle KOC$ $\angle C$ – общий, $\angle A = \angle K = 90^\circ$, значит $\triangle ABC \sim \triangle KOC$ по двум углам, т. е. $\frac{AB}{KO} = \frac{AC}{KC}$, отсюда $\frac{a}{x} = \frac{d}{n}$, ч.т.д..

- 3) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$, значит $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d} + \frac{d}{d} = 1$,

$$\text{т. е. } \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

613. а) По условию в $\triangle ABM$ и $\triangle A_1B_1M_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC}{\frac{1}{2} A_1C_1}, \text{ значит}$$



$$\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1 \text{ по трем сторонам и } \angle A = \angle A_1. \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

$\angle A = \angle A_1$, значит $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

6) В $\triangle ABH$ и $\triangle A_1B_1H_1$

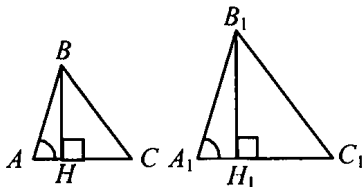
$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\angle H = \angle H_1 = 90^\circ, \text{ значит}$$

$$\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1 \text{ по}$$

двум углам, т. е.

$$\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$



В $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, значит

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

614. $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ см (по теореме Пифагора). $\angle D = 90^\circ$. $\angle \alpha_1 = 90^\circ - \angle \alpha$;

$$\angle \alpha + \angle \alpha_2 = 90^\circ; \angle \alpha_2 = 90^\circ - \angle \alpha,$$

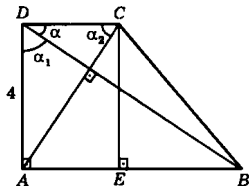
$$\text{значит, } \angle \alpha_1 = \angle \alpha_2. \triangle ADC \sim \triangle BAD$$

(по двум углам). Поэтому

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AD}; DC = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3} \text{ см.}$$

$$CE \perp AB; CE = AD = 4 \text{ см. } BE = AB - AE = AB - DC;$$

$$BE = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (см). } BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$



615. Дано: $ABCD$ – трапеция;

$$AC \cap BD = O; MN \parallel AD;$$

$$AD = a; BC = b; MN = ?$$

Решение.

$$\triangle AOD \sim \triangle COB \text{ по двум уг-$$

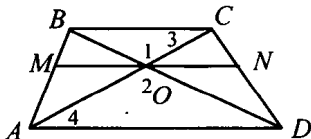
лам ($\angle 2 = \angle 1$ – вертикаль-

ные, $\angle 4 = \angle 3$ – накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC),

$$\text{значит } \frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}.$$

2) $\triangle ABD \sim \triangle MBO$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle M = \angle A$ – соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AC), значит

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AD}{OM}, \text{ откуда } OM = \frac{AD \cdot BO}{BD} = \frac{a \cdot BO}{BD}.$$



3) $\triangle BDC \sim \triangle ODN$ (по двум углам), следовательно

$$\frac{BC}{ON} = \frac{BD}{OD} = \frac{DC}{DN}, \text{ т. е. } OM = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{b \cdot OD}{BD}.$$

$$4) MN = ON + MO = \frac{b \cdot OD}{BD} + \frac{a \cdot BO}{BD} = \frac{a \cdot OD + a \cdot BO}{BD};$$

$$BD = OB + OD = OB + \frac{a}{b} OB = OB \frac{b+a}{b};$$

$$\frac{a \cdot BO + b \cdot \frac{a}{b} OB}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{OB(a+b)}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ ч.т.д.}$$

616. Дано: $\triangle ABC$;

MN – средняя линия;

$AA_1 \perp MN, BB_1 \perp MN, CC_1 \perp MN$.

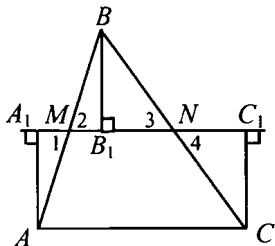
Доказать: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Доказательство.

1) $\triangle AA_1M \sim \triangle BB_1M$ по гипотенузе и острому углу ($AM = MB$, $\angle 1 = \angle 2$ – вертикальные), значит, т. е. $AA_1 = BB_1$ (1).

2) $\triangle BB_1N \sim \triangle CC_1N$ по гипотенузе и острому углу ($BN = NC$; $\angle 3 = \angle 4$ – вертикальные), значит, $BB_1 = CC_1$ (2).

3) Сравним (1) и (2), получим $AA_1 = BB_1 = CC_1$, ч.т.д.



617. Дано: $ABCD$ – ромб;

M, N, K, F – середины сторон.

Доказать: $MNKF$ – прямоугольник.

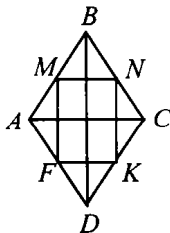
Доказательство.

1) В $\triangle ABD$: FM – средняя линия, следовательно $BD \parallel FM$ и $FM = \frac{1}{2} BD$.

В $\triangle BCD$: $NK \parallel BD$ и $NK = \frac{1}{2} BD$.

По признаку $FMNK$ – параллелограмм.

2) $BD \parallel FM \parallel NK, DB \perp AC$ (по свойству диагоналей ромба),

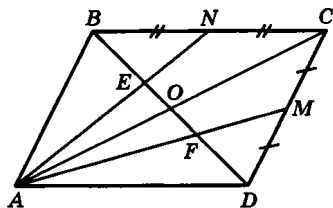


значит $NK \perp AC$ и $FM \perp AC$;

$MN \parallel AC \parallel FK$, $FM \perp AC$, значит, $FM \perp MN$, $NK \perp AC$, $FK \perp FM$ и $NK \perp MN$, $NK \perp FK$, следовательно, $MNFK$ – прямоугольник, ч.т.д.

618. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . $BN = NC$ и $CM = MD$ (по условию). В $\triangle ABC$: AN и BO – медианы, тогда $BE : EO = 2 : 1$,

$$BE = \frac{2}{3} BO, \text{ но } BO = OD,$$



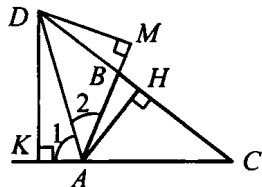
значит, $BE = \frac{1}{3} BD$. Рассматривая $\triangle ACD$, получаем $FD = \frac{1}{3} BD$.

$EF = BD - (BE + FD) = \frac{1}{3} BD$. Таким образом, $BE = EF = FD$, ч.т.д.

619. 1) $AH \perp DC$ (AH – высота для $\triangle ABD$ и для $\triangle AOC$);

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD; S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot$$

$$CD, \text{ имеем: } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad (1).$$



$$2) S_{ABD} = \frac{1}{2} DM \cdot AB, S_{ACD} = \frac{1}{2} DK \cdot AC, DK = DM;$$

$\triangle ADK = \triangle ADM$ по гипотенузе и острому углу (DA – общая, $\angle 1 = \angle 2$), следовательно $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$

3) Сравнивая (1) и (2), имеем по свойству пропорциональности $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}; \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD}$, ч.т.д.

620. DK — прямая, параллельная биссектрисе.

AA_1 — биссектриса, значит $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}$.

$\triangle DBK \sim \triangle ABA_1$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle A = \angle D$), значит

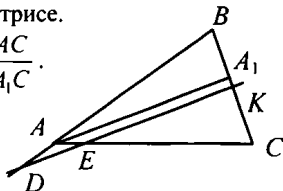
$$\frac{DB}{BA} = \frac{BK}{BA_1}, BD = BK \cdot \frac{BA}{BA_1} \quad (1).$$

$\triangle AA_1C \sim \triangle EKC$ по двум углам ($\angle C$ — общий, $\angle A = \angle C$), значит

$$\frac{AC}{KC} = \frac{A_1C}{EC}; EC = KC \cdot \frac{AC}{A_1C} \quad (2).$$

Сравнивая (1) и (2), получим $BK = EC$; $\frac{BA}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}$, т. е.

$BD = EC$, ч.т.д.



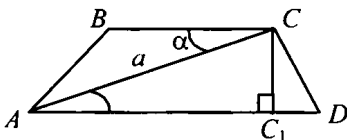
621. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CC_1$;

$\triangle CC_1A$: $\angle C_1 = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$,

$AC = a$, т.е. $CC_1 = a \cdot \sin \alpha$;

$BC + AD = b$, следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \alpha.$$



622. Рассмотрим $\triangle PBC$ и $\triangle APK$.

Они подобны (по двум уг-

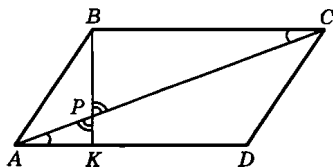
лам): $AK = \frac{1}{4} KD$ (по усло-

вию). $AK = \frac{1}{5} AD = \frac{1}{5} BC$; $\frac{BC}{AK} = 5$.

Рассмотрим $\triangle APB$ и $\triangle APK$. Они имеют общую высоту (из

вершины A). значит, $\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APK}} = \frac{BP}{PK} = 5$ и $S_{\triangle APB} = 5S_{\triangle APK} = 5 \text{ см}^2$.

Коэффициент подобия k $\triangle CPB$ и $\triangle APK$ равен $\frac{BC}{AK} = 5$; тогда:



$$\frac{S_{\Delta CPB}}{S_{\Delta APK}} = 25 \text{ и } S_{\Delta CPB} = 25 \text{ см}^2. \text{ Получаем:}$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta APB} + S_{\Delta CPB} = 30 \text{ см}^2 \text{ и } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = 30 \cdot 2 = 60 \text{ см}^2.$$

623. По свойству высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, $\Delta CC_1D \sim \Delta AC_1C$.

$$\text{Тогда } \frac{C_1D}{CC_1} = \frac{CC_1}{AC_1}.$$

$$C_1D = AD - AC_1 = 16 - 4 = 12 \text{ см.}$$

$$\text{Имеем: } \frac{12}{CC_1} = \frac{CC_1}{4}; CC_1^2 = 48; CC_1 = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \Delta CC_1D \text{ tg } \angle D = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ значит } \angle D = 30^\circ.$$

$\angle C = 180^\circ - \angle D$ (внутренние односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей AC). $\angle C = 150^\circ$.

624. A_1, B_1, C_1 – середины сторон.

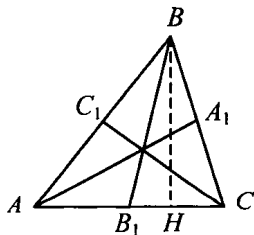
$$S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot BH;$$

$$S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{2} AB_1 \cdot BH. AB_1 = B_1C,$$

$$\text{значит } S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta BB_1C}.$$

$$\text{Аналогично } S_{\Delta ACC_1} = S_{\Delta BC_1C} \text{ и}$$

$$S_{\Delta BAA_1} = S_{\Delta CA_1A}, \text{ ч.т.д.}$$



625. Рассмотрим ΔAMH и ΔBMC . Они подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{MH}{MB} = \frac{AH}{BC}. AD = 5BC \text{ (по условию). Проведем } CF \perp AD.$$

$$BC = HF, \text{ тогда: } AH = \frac{AD - HF}{2} = \frac{5BC - BC}{2} = 2BC; \frac{AH}{BC} = 2.$$

$$\text{Отсюда получаем: } MH = 2MB; BH = \frac{3}{2} MH. S_{\Delta AMH} = 4 \text{ см}^2,$$

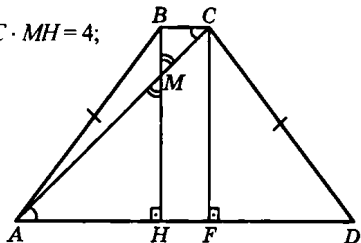
$$S_{\triangle AMH} = \frac{1}{2} AH \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BC \cdot MH = 4;$$

$BC \cdot MH = 4 \text{ см}^2$. Имеем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH =$$

$$= \frac{1}{2} (5BC + BC) \cdot MH =$$

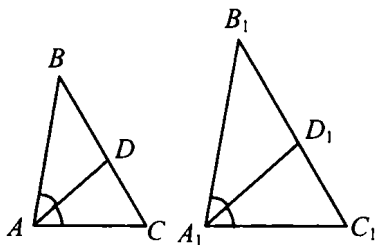
$$= 4BC \cdot MH = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 18 \text{ см}^2.$$



626. Пусть

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = k.$$

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (см. № 535).



Значит $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ и $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{B_1D_1}{D_1C_1}$. Отсюда $DC = \frac{AC \cdot BD}{AB}$ (1)

и $D_1C_1 = \frac{A_1C_1 \cdot B_1D_1}{A_1B_1}$ (2). Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{DC}{D_1C_1} = \frac{AC \cdot BD \cdot A_1B_1}{A_1C_1 \cdot B_1D_1 \cdot AB} = k \cdot k \cdot \frac{1}{k} = k.$$

Итак, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = k$, значит $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$ по

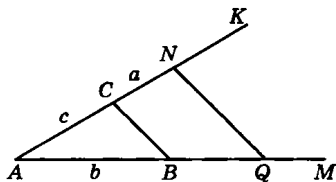
трем сторонам. Следовательно $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, значит $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, ч.т.д.

627. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}$, значит

$$k^2 = \frac{1}{2}; k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Используя свойство параллельных прямых, строим $\Delta A_1 B_1 C_1$, стороны которого в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раз больше сторон ΔABC .

628. Построим угол $A < 180^\circ$. На его сторонах отложим отрезки: на луче AK отрезок $AC = c$, $CN = a$; на луче AM отрезок $AB = b$. Соединим точки C и B . Получаем ΔABC . Через точку N проводим прямую, параллельную CB . Она пересекает луч AM в точке Q . По теореме Фалеса:



са: $\frac{b}{c} = \frac{BQ}{a}$ (см. задачу 556); $BQ = \frac{ab}{c}$. BQ – искомый отрезок.

629. Дано: A, B, C – середины сторон некоторого $\Delta A_1 B_1 C_1$.

Построить: $\Delta A_1 B_1 C_1$.

1) Через точки A, B, C строим прямые $a \parallel BC$; $b \parallel AC$; $c \parallel AB$.

2) a, b, c попарно пересекутся в точках $A_1; B_1; C_1$. $\Delta A_1 B_1 C_1$ – искомый.

630. Дано: $AB = a$, $AA_1 = m_1$, $BB_1 = m_2$.

Построить: ΔABC .

Построение.

1) $AB = a$;

2) $AA_1 = m_1$, $O \in AA_1$ и $O \in BB_1$, медианы пересекаются и делятся этой точкой $AO : OA_1 = 2 : 1$, $BO : OE = 2 : 1$.

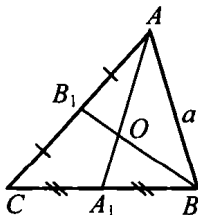
3) Строим окружность $\left(A; R_1 = \frac{2}{3} m_1 \right)$ и

окружность $\left(B; R_2 = \frac{2}{3} m_2 \right)$. Они пересекутся в точке O .

4) Лучи AO и BO продлеваем на длину $AA_1 = m_1$ и $BB_1 = m_2$.

5) BA_1 и AB_1 пересекутся в точке C .

6) ΔABC – искомый.



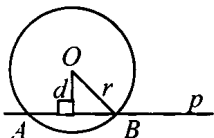
Глава VIII.

Окружность

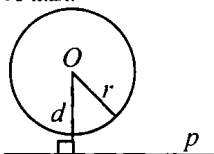


Касательная к окружности

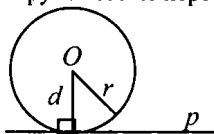
631.



а), б), в) $r > d$, значит, прямая и окружность пересекаются в двух точках.



г) $r = 8$ см; $d = 1,2$ дм, т. е. $d = 12$ см и $r < d$, значит, прямая и окружность не пересекаются.



д) $r = 5$ см; $d = 50$ мм, т. е. $d = 5$ см и $r = d$, значит, прямая и окружность касаются.

632. Дано: окружность $(O; r)$; $OA = d$, $OB = r$,
 $d < r$, $A \in l$.

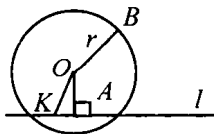
Доказать: l – секущая.

Доказательство.

1) Пусть $l \perp OA$, тогда $d < r$ и l – секущая (по определению).

2) Пусть l не $\perp OA$, тогда $OK \perp OA$ – прямоугольный, т. к. OA – гипотенуза, то $OA > OK$;

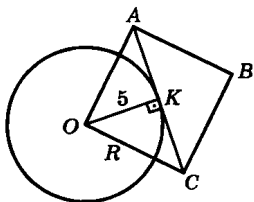
$r > OA$, $r > OK$ (по условию), следовательно, l – секущая по определению, ч.т.д.



633. OA проходит через центр окружности, значит, OA – секущая. $OABC$ – квадрат со стороной 6 см, значит $AB = BC = 6$ см и находятся на расстоянии $OA = OC = 6$ см. Так как R равен 5 см и $6 > 5$, значит, AB и BC не являются секущими.

$$OK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{OA^2 + OC^2} = 3\sqrt{2} \text{ см.}$$

Очевидно, что $OK = 3\sqrt{2} < R$, поэтому AC – секущая.



634. Дано: Окружность $(O; R)$

AB – хорда;

$OM = R, AB \cap OM = E$;

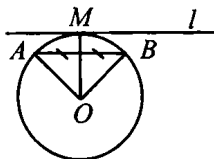
$AE = EB$;

$M \in l$ – касательная. Доказать: $l \parallel AB$.

Доказательство.

1) В $\triangle AOB$: $AO = OB = AB = R$, значит, $\angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$.

2) По свойству касательных $OA \perp l$, значит, $\angle \alpha = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



635. AC – хорда, равная R , т. е. $AC = OC = AO$ (по условию). $\angle AOC = 60^\circ$ (т. к. $\triangle AOC$ – равносторонний). Значит, $\angle \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

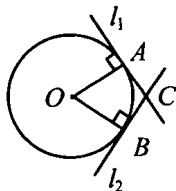
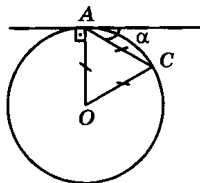
Ответ: 30° .

636. 1) $AB = OA = OB = R, \angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$.

2) Из свойства касательных $OA \perp l_1, OB \perp l_2$, значит, $\angle CAB = \angle CBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

3) $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,
т. е. $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

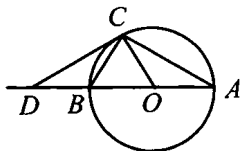
Ответ: 120° .



637. 1) $AO = OC = R$, следовательно, $\triangle AOC$ – равнобедренный, т. е.

$\angle C = \angle A = 30^\circ$;

2) $OC \perp CD$, следовательно,
 $\angle ACD = \angle OCA + \angle DCO$;
 $\angle ACD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$;

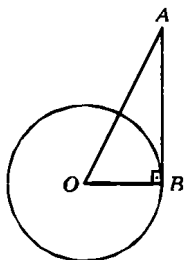


3) $\triangle ACD$: $\angle D + \angle A + \angle C = 180^\circ$,
 $\angle D + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, т. е. $\angle A = \angle D = 30^\circ$, следовательно, $AC = CD$ и $\triangle ACD$ – равнобедренный. Ч.т.д.

638. По условию $\angle B = 90^\circ$, т. е. треугольник OAB – прямоугольный. $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по теореме Пифагора).

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ см.}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см.



639. AB – касательная (по условию), следовательно, $OB \perp AB$;

из $\triangle AOB$: $\operatorname{tg} \angle O = \frac{AB}{OB}$ отсюда:

$$AB = OB \operatorname{tg} \angle O = 12 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ см.}$$

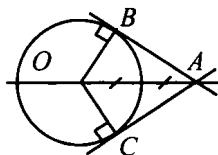
640. 1) В $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$, $OA = 9$, $OB = 4,5$,

$$\text{т. е. } OB = \frac{1}{2} OA.$$

Имеем: $\angle OAB = 30^\circ$.

2) Также, из $\triangle AOC$ $\angle OAC = 30^\circ$.

3) $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

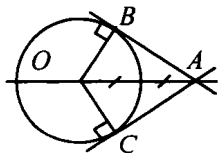


641. $OE = OC = OB = R$ ($OA = 2OE = 2R$);

$\triangle AOB$: $OB = \frac{1}{2} OA$, следовательно,

$\angle BAO = 30^\circ$, а $\angle B = 90^\circ$;

AO – биссектриса $\angle BAC$, значит,
 $\angle BAC = 60^\circ$.



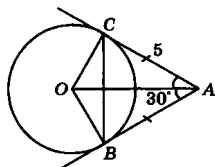
642. 1) В $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$, $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по т. Пифагора);

$$AB^2 = 36 - 9 = 27; AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ см;}$$

2) $\sin \angle 3 = \frac{OB}{AO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, значит, $\angle 3 = 30^\circ$;

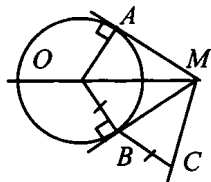
3) $\triangle AOB = \triangle AOC$, т. е. $AC = AB = 3\sqrt{3}$ см; $\angle 4 = \angle 3 = 30^\circ$.

643. $AC = AB$; $\angle OAB = \angle CAO = 30^\circ$. Значит, $\angle CAB = 60^\circ$ и $\triangle ABC$ – равносторонний. Отсюда $BC = CA = AB = 5$ см.



Ответ: 5 см.

644. 1) В $\triangle OMB$ и $\triangle CMB$: MB – общая, $OB = BC$, значит $\triangle CMB = \triangle OMB$ (по двум катетам), т. е. $\angle OMB = \angle CMB$;
 2) $\angle BMO = \angle CMO$ (свойство параллельных отрезков);
 3) $\angle AMC = \angle AMO + \angle BMC + \angle OMB$,
 $\angle AMC = 3 \cdot \angle BMC$, т. к. $\angle OMB = \angle BMC = \angle AMO$, ч.т.д.



645. **Дано:** Окр $(O; R)$; $AB = 2R$;
 $C \in l$ – касательная; $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$.

Доказать: $A_1C = CB_1$.

Доказательство.

- 1) $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, значит, $BB_1 \parallel AA_1$, т. е. $ABCD$ – прямоугольная трапеция.
 2) Т. к. $OC \perp l$, то $OC \parallel AA_1 \parallel BB_1$, $OA = BO$, $O \in AB$, т. е. по т. Фалеса OC – средняя линия трапеции и $A_1C = CB_1$, ч.т.д.

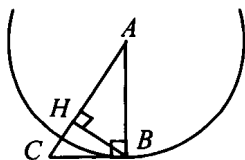
646. Из условия $CB \perp AB$; $AB = R$ Окр $(A; AB)$, значит по признаку CB – касательная к Окр $(A; AB)$.

Из условия $CB \perp AB$,

$CB = r$ Окр $(C; CB)$, значит по признаку AB – касательная к Окр $(C; BC)$.

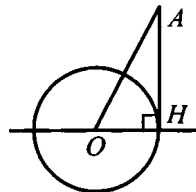
Пусть Окр $(B; BC)$, тогда AC секущая к этой окружности, $(BC > BH)$.

Пусть Окр $(B; AB)$, тогда AC секущая к этой окружности, $(AB > BH)$.



647. а) $OA = 5$ см, $AN = 4$ см.

В $\triangle AHO$: $OA = 5$, $AN = 4$, $OH = 3$, по т. Пифагора $5^2 = 4^2 + 3^2$; $25 = 25$, следовательно, $\triangle AHO$ – прямоугольный, т. е. $\angle OHA = 90^\circ$ и AN является касательной;
 б) $\angle HAO = 45^\circ$, $OA = 4$ см.



В $\triangle AHO$: $OH = 3$, $OA = 4$, $\angle HAO = 45^\circ$.

Допустим: $\angle H = 90^\circ$, тогда $AH = OH = 3$,

т. е. $AO = 3\sqrt{2}$, а это противоречит условию $AO = 4$, следовательно, предположение неверно и AH не является касательной.

в) $\angle HAO = 30^\circ$, $OA = 6$ см.

В $\triangle AHO$: $OA = 6$, $OH = 3$, $\angle A = 30^\circ$;

$OH = \frac{1}{2} OA$, значит, $\angle H = 90^\circ$, т. е. AH является касательной.

648. а) Построить касательную к окружности, параллельную l .

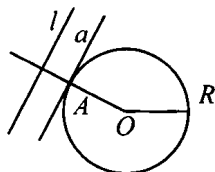
Построение:

1) Строим $OM \perp l$.

2) $OM \cap \text{Окр}(O; R) = A$.

3) Через точку A проведем прямую $a \parallel l$.

4) a – искомая касательная.



б) Построить касательную к окружности, перпендикулярную l .

Построение:

1) Строим $OM \perp l$.

2) Через точку O проводим прямую $b \parallel l$.

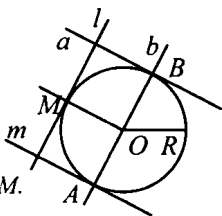
3) $b \cap \text{Окр}(O; R) = \{A; B\}$.

4) Через A или B проводим прямую $a \parallel OM$.

3) $b \cap \text{Окр}(O; R) = \{A; B\}$

4) Через A или B проводим прямую $a \parallel OM$.

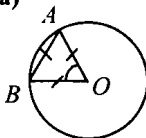
5) a или a_1 – является искомой касательной.



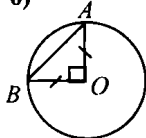
§ 2

Центральные и вписанные углы

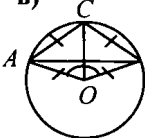
649. а)



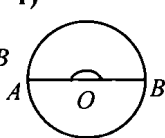
б)



в)



г)



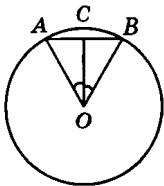
650. $\triangle AOB$ – равнобедренный (если $\angle AOB \neq 180^\circ$).

$$AB = 2OA \cdot \sin \frac{\angle AOB}{2} = 32 \sin \frac{\angle AOB}{2}.$$

а) $AB = 32 \sin \frac{60^\circ}{2} = 16;$

б) $AB = 32 \sin \frac{90^\circ}{2} = 16\sqrt{2};$

в) $AB = 2r = 32.$



651. а) Дано: Окр (O ; R); $AB = CD$.

Доказать: $\cap AB = \cap CD$.

Доказательство.

В $\triangle AOB$ и $\triangle COD$: $OC = OA = R$,
 $OD = OB = R$, из условия: $AB = CD$, т. е.
 $\triangle AOB = \triangle COD$ (по трем сторонам), значит

$$\angle AOB = \angle COD, AB = CD.$$

б) Дано: Окр (O ; R);

$$AB = CD;$$

$$\cap CD \text{ и } \cap CBD = ?$$

Решение:

1) $AB = CD$ (см. а))

$$\angle AOB = 112^\circ, \text{ значит,}$$

$$AB = 112^\circ \text{ и } CD = 112^\circ.$$

2) Т. е. $\angle CBD = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$.

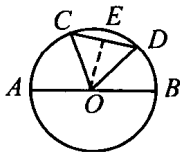
652. 1) $CD = 180^\circ - (AC + DB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$

2) из $\triangle COD$: $\angle O = 120^\circ$, $OD = OC = 15$ см,

т. к. $OE \perp CD$, $\sin \angle EOD = \frac{ED}{OD}$; отсюда

$$ED = OD \cdot \sin \angle EOD = 15 \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см и } CD = 2ED = 15\sqrt{3} \text{ см.}$$



653. Вписанный угол ABC равен половине дуги AC , на которую он опирается.

а) $\angle ABC = 48^\circ : 2 = 24^\circ$; б) $\angle ABC = 57^\circ : 2 = 28^\circ 30'$;

в) $\angle ABC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$; г) $\angle ABC = 124^\circ : 2 = 62^\circ$;

д) $\angle ABC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

654. а) $\angle x = \frac{1}{2} (360^\circ - 80^\circ - 152^\circ) = 64^\circ$; б) $x = 360^\circ - (60^\circ + 125^\circ) = 175^\circ$;

в) $\angle x = (180^\circ - 112^\circ) : 2 = 34^\circ$; г) $x = 360^\circ - (215^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$.

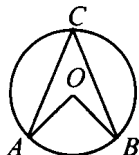
655. Дано: $\angle ABC > \angle ACB$ на 30° ; AOB , $ACB = ?$

Решение:

Пусть $\angle ACB = x$, тогда $\angle AOB = x + 30^\circ$;

$\angle AOB = \angle ACB$, следовательно, $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ACB$;

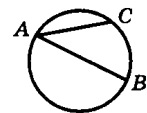
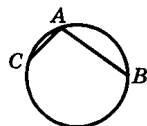
$x = \frac{1}{2} (x + 30^\circ) = 30^\circ$, значит, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$.



656. Возможны два варианта.

1) точка C лежит на дуге AB большей полуокружности. $\angle BAC = \frac{360^\circ - 115^\circ - 43^\circ}{2} = 101^\circ$;

2) точка C лежит на дуге AB меньшей полуокружности. $\angle BAC = \frac{115^\circ - 43^\circ}{2} = 36^\circ$.



Ответ: 101° ; 36° .

657. Дано: $\angle AMB = 140^\circ$; $M \in AB$, $AM : MB = 6 : 5$; $\angle BAM = ?$

Решение.

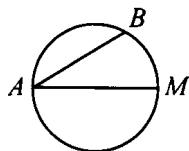
1) $\angle AMB = 140^\circ$; где $\angle BAM = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$;

$AM : MB = 6 : 5$, значит $AM = 6x$, $AM + MB = 20^\circ$;

$MB = 5x$; $6x + 5x = 220^\circ$; $x = 20^\circ$,

т. е. $AM = 20 \cdot 6 = 120^\circ$, $MB = 20 \cdot 5 = 100^\circ$;

2) $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle MBM = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$.



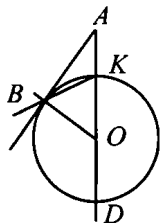
658. Дано: AB – касательная; AD – секущая;

$D \in \text{Окр} (O; R)$; $\angle BDA = 110^\circ 20'$; $\angle BAD$, $\angle ADB = ?$

Решение.

1) Т. к. $\angle BKA$ – вписанный, то

$\angle BKA = \frac{1}{2} \angle BDA = \frac{1}{2} 110^\circ 20' = 55^\circ 10'$.



2) Имеем $\angle DBK = \frac{1}{2} DK = 90^\circ$, следовательно

$$\angle DBA = 90^\circ - \angle BKD; \angle BDA = 89^\circ 60' - 55^\circ 10' = 34^\circ 50';$$

3) $OB = OD = R$, значит $\triangle BOD$ – равнобедренный, т. е.

$$\angle DBO = \angle BDO = 34^\circ 50', \text{ значит,}$$

$$\angle DBA = \angle DBO + \angle OBA = 34^\circ 50' + 90^\circ = 124^\circ 50', \text{ значит,}$$

$$\angle BAD = 180^\circ - (124^\circ 50' + 34^\circ 50') = 179^\circ 60' - 159^\circ 40' = 20^\circ 20'.$$

Ответ: $34^\circ 50', 20^\circ 20'$.

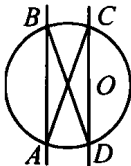
659. **Дано:** $AB \parallel CD$. **Доказать:** $AD = BC$.

Доказательство.

1) $\angle BAC$ и $\angle ACD$ – накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC , т. е. $\angle BAC = \angle ACD$;

2) т. к. $\angle ACD = \frac{1}{2} AD$ и $\angle BAC = \frac{1}{2} CB$, то

$$CB = AD, \text{ ч.т.д.}$$



660. **Дано:** AC, AE – секущие; $\angle ACE = 32^\circ$; $AE = 100^\circ$; $BD = ?$

Решение.

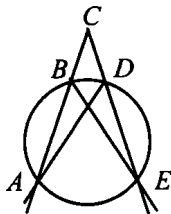
1) $\angle ABE$ – вписанный, следовательно,

$$\angle ABE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} 100^\circ = 50^\circ;$$

2) т. к. $\angle EBC$ и $\angle ABE$ смежные, то

$$\angle BED = 180^\circ (130^\circ + 32^\circ) = 18^\circ, \text{ следовательно, } BD = 2 \cdot \angle BED = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ.$$

Ответ: 36° .



661. **Дано:** AC, FC – секущие; $AF = 140^\circ$, $BD = 52^\circ$; $\angle ACF = ?$

Решение.

1) Т. к. $\angle ABF$ – вписанный, то

$$\angle ABF = \frac{1}{2} AF = 70^\circ.$$

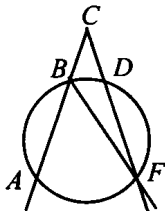
2) Т. к. $\angle BFD$ – вписанный, то

$$\angle BFD = \frac{1}{2} BD = 26^\circ.$$

3) Из $ABCF$: $\angle F = 26^\circ$,

$$\angle B \text{ (смежный с } \angle ABF) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ;$$

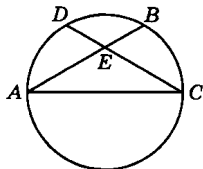
$$\angle C = 180^\circ - (26^\circ + 110^\circ) = 44^\circ.$$



$$662. \angle A = \frac{\overset{\circ}{BC}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ;$$

$$\angle C = \frac{\overset{\circ}{AD}}{2} = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ.$$

$\angle BEC = \angle A + \angle C$ (как внешний $\triangle AEC$),
т. е. $\angle BEC = 35^\circ + 27^\circ = 62^\circ$.



Ответ: 62° .

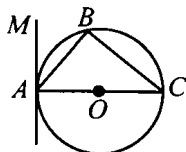
$$663. 1) \angle B = \frac{1}{2} \overset{\circ}{AC} = 90^\circ, \text{ следовательно,}$$

$\triangle ABC$ – прямоугольный,

$\angle C = 90^\circ - \angle BAC$ (1).

2) AM – касательная к окружности, значит, $AM \perp AC$ и $\angle MAB = 90^\circ - \angle BAC$ (2).

3) Сравнивая (1) и (2), имеем: $\angle C = \angle MAB$, ч.т.д.



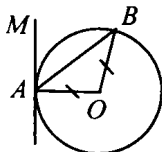
$$664. \text{Т. к. } AO = BO = R, \triangle AOB \text{ – равнобедренный, следовательно, } \angle B = \angle A = \alpha, \text{ т. е.}$$

$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ (1),

$\angle AOB$ – центральный, значит, $\angle AOB = 2\angle C$.

Т. к. AM – касательная, $AM \perp AO$, т. е.

$\angle MAB = 90^\circ - \alpha$.



Сравнивая (1) и (2), имеем: $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \overset{\circ}{AB}$, ч.т.д.

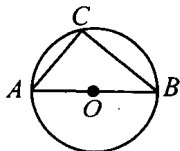
$$665. 1) \text{Т. к. } \angle ACB \text{ – вписанный, то } \angle ACB =$$

$$= \frac{1}{2} \overset{\circ}{AB} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ, \text{ следовательно}$$

$\triangle ABC$ – прямоугольный, т. е. $\angle C > \angle B$,

$\angle C > \angle A$.

$\angle A + \angle B = 90^\circ$ (по свойству углов прямоугольного треугольника), следовательно, каждый из углов меньше $\angle C$.



$$666. AE \cdot BE = CE \cdot ED \text{ (по теореме о пересекающихся хордах) и}$$

$$ED = \frac{AE \cdot BE}{CE}.$$

$$\text{а) } ED = \frac{2 \cdot 5}{2,5} = 4;$$

$$\text{б) } ED = \frac{16 \cdot 9}{ED}; ED^2 = 144; ED = 12;$$

$$\text{в) } ED = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,4} = 0,25.$$

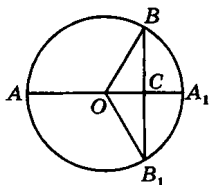
667. В $\triangle OBB_1$: $OB = OB_1 = R$, значит, $\triangle OBB_1$ – равнобедренный. OC – высота и медиана $\triangle OBB_1$.

Значит, $BC = CB_1 = BB_1$. Тогда получаем:

$$AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1 = \frac{BB_1^2}{4} \quad (\text{по теореме}$$

о пересекающихся хордах).

$$BB_1 = 2\sqrt{AC \cdot CA_1} = 2\sqrt{4 \cdot 8} = 8\sqrt{2} \text{ (см).}$$



668. Дано: AB – диаметр, $CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$.

Доказать: $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$.

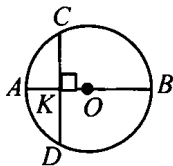
Доказательство:

1) $CD \perp AB$, следовательно, $CK = KD$ (см. 667).

2) По свойству хорд: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$,

т.к. $CK = KD$, то $AK \cdot KB = CK^2$;

$$CK = \sqrt{AK \cdot KB}, \text{ ч.т.д.}$$



669. Построить: $AB : AB = \sqrt{a \cdot b}$.

Построение:

1) проводим прямую l , на ней откладываем два отрезка $KN = a$, $NM = b$;

2) строим окружность с центром на l и диаметром KM ;

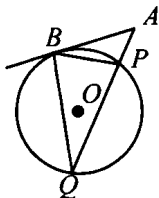
3) проводим прямую, перпендикулярную l , через точку N ;

4) перпендикуляр пересекает окружность в точках A и B , имеем: AB – искомый отрезок.

670. $\triangle ABP \sim \triangle AQB$ по двум углам

$$(\angle A - \text{общий}, \angle Q = \angle B) \text{ значит } \frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}.$$

По свойству пропорции $AB^2 = AQ \cdot AP$, ч.т.д.



671. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ ($\angle A$ – общий;

$$\angle B = \angle D = \frac{1}{2} \cup BC). \text{ Поэтому}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}; AB^2 = AD \cdot AC.$$

а) $CD = AD - AC$;

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ (см)}; CD = 8 - 2 = 6 \text{ (см)}.$$

$$\text{б) } CD = AD - AC; AC = \frac{AB^2}{AD} = \frac{5^2}{10} = 2,5 \text{ (см)};$$

$$CD = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ (см)}.$$

672. В $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle AC_2B_1$ по двум углам ($\angle A$ –

общий, $\angle C_2 = \angle C_1 = \frac{1}{2} \cup B_1B_2$, значит

$$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}. \text{ Из свойства пропорции}$$

$$AC_1 \cdot AB_1 = AB_2 \cdot AC_2, \text{ ч.т.д.}$$

673. Решение приведено в учебнике.

§ 3

Четыре замечательные точки треугольника

674. Рассмотрим $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$: $\angle 1 = \angle 2$, т. к.

OM – биссектриса, OM – гипотенуза – общая сторона. $\triangle OAM = \triangle OBM$. Поэтому $OA = OB$.

Точка K лежит на прямой OM . Это точка пересечения с прямой AB . OK – биссектриса $\triangle OAB$, а т. к. $\triangle OAB$ – равнобедренный, значит, OK – высота $\triangle OAB$. Отсюда $OM \perp AB$, что и требовалось доказать.

675. Дано: $\angle O$; $\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; r) = A$.

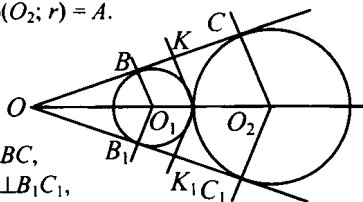
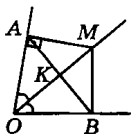
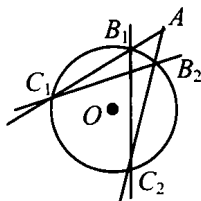
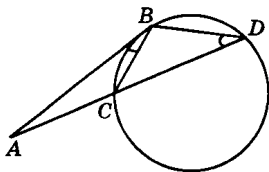
Доказать: $O_1, O_2 \in OA$.

Доказательство.

1) BC и B_1C_1 – касательные к

окружностям, значит, $O_1B \perp BC$,

$O_2C \perp BC$ и $O_2C_1 \perp B_1C_1$, $O_1B_1 \perp B_1C_1$,



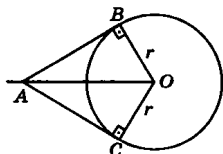
т.е. точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$ (по свойству биссектрисы).

2) Т. к. $AK = AK_1$ (по свойству биссектрисы), то A лежит на биссектрисе.

676. $OB = OC = r$. OA – биссектриса $\angle A$.

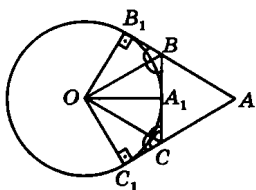
а) $OA = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ см.}$

б) $r = OA \cdot \sin 45^\circ = 7\sqrt{2} \text{ дм.}$



677. Проведем $OB_1 \perp AB$; $OA_1 \perp BC$ и $OC_1 \perp AC$. По условию OB и OC – биссектрисы внешних углов, значит, точка O лежит на прямых OB и OC и равноудалена от прямых AC , BC и AB , т. е. $OA_1 = OC_1 = OB_1$.

Значит, окружность радиуса OA_1 проходит через точки B_1 и C_1 , а т. к. $OB_1 \perp BA$; $OA_1 \perp BC$ и $OC_1 \perp AC$, то точка O является центром окружности, касающейся прямых AB , BC и AC , что и требовалось доказать.

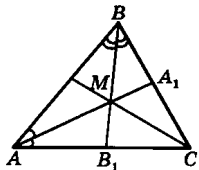


678. Проведем прямую CM , которая будет биссектрисой $\angle C$. $\angle ACM = \angle BCM$. Очевидно, $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.

$$\angle ACM = \frac{\angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A - \angle B}{2} =$$

$$= 90^\circ - (180^\circ - \angle AMB) = \angle AMB - 90^\circ;$$

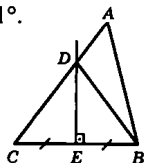
а) $\angle ACM = \angle BCM = 46^\circ$; б) $\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ$.



679. Из условия $BD = CD$.

а) $CD = BD = 5 \text{ см}$; $AD = AC - CD = 3,5 \text{ см}$;

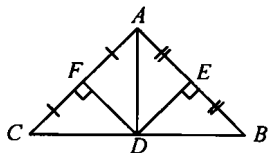
б) $AC = AD + CD = AD + BD = 14,6 \text{ см.}$



680. а) 1) $DE \perp AB$, $AE = EB$, следовательно,

$BD = AD$, по свойству серединного перпендикуляра;

2) $FD \perp AC$, $CF = FA$, следовательно, $CD = DA$, по свойству серединного перпендикуляра.



3) Имеем: $AD = BD$, $CD = DA$, т. е. $CD = DB$, значит D – середина CB , ч.т.д.

6) $\angle A = \angle CAD + \angle DAB$;

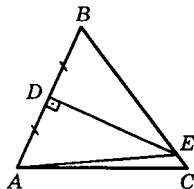
$\triangle ACD$ – равнобедренный, значит, $\angle CAD = \angle C$; $\triangle ADB$ – равнобедренный, значит, $\angle DAC = \angle B$, т. е. $\angle A = \angle B + \angle C$, ч.т.д.

681. По условию, $\triangle ABC$ – равнобедренный, т. е. $AB = BC = 18$ см.

$\triangle ABE$ – равнобедренный (т. к. точка E лежит на серединном перпендикуляре).

Поэтому $AE = BE$.

Из $\triangle AEC$ выразим AC : $AC = P_{\triangle AEC} - (AE + EC) = P_{\triangle AEC} - (BE + EC) = P_{\triangle AEC} - BC = 27 - 18 = 9$ см.

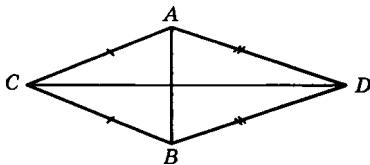


Ответ: 9 см.

682. По условию $\triangle ABC$ – равнобедренный, а значит, точка C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

AB – общее основание для треугольников, значит, точка D тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

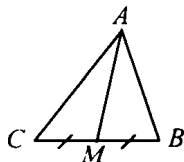
Отсюда CD – серединный перпендикуляр, который проходит через середину отрезка AB , ч.т.д.



683. 1) Допустим, что $AM \perp BC$.

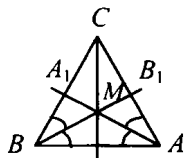
2) $\triangle AMC = \triangle AMB$ по двум катетам (AM – общая, $CM = MB$), значит, $AC = AB$, но это противоречит условию $AB \neq AC$.

3) Следовательно, наше предположение неверно, и AM не перпендикулярна BC , ч.т.д.



684. $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно,

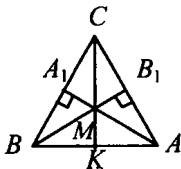
CM – биссектриса $\angle C$, опущенная на основание равнобедренного треугольника, т. е. $CM \perp AB$, ч.т.д.



685. 1) $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно по замечательному свойству треугольника:

$CM \perp AB$.

2) $\triangle BCK = \triangle ACK$ по катету и гипотенузе (CK – общая, $BC = AC$), значит, $KA = BK$, ч.т.д.



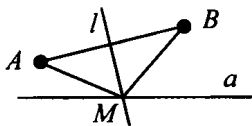
686. Решение приведено в учебнике.

687. 1) Строим отрезок AB .

2) Строим $l \perp AB$, где l – серединный перпендикуляр к отрезку AB .

3) l пересекает a в точке M .

4) M – искомая точка.



688. Дано: $\angle \alpha$, AB .

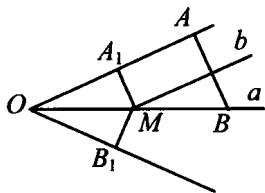
Построить: M , такую, что $MA_1 \perp OA_1$; $MB_1 \perp OB_1$ и $AM = MB$.

Построение:

Строим биссектрису $\angle O$.

Строим серединный перпендикуляр к AB .

$a \cap b = M$. M – искомая точка.



§ 4

Вписанная и описанная окружности

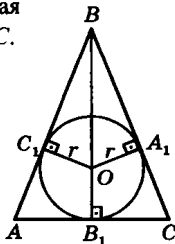
689. Точки A_1 , B_1 и C_1 – точки, в которых вписанная окружность радиусом r касается сторон $\triangle ABC$.

$OC_1 = OA_1$; BO – биссектриса $\angle B$, которая является серединным перпендикуляром равнобедренного $\triangle ABC$. $OB_1 \perp AC$, значит, $AB_1 = B_1C = 5$ см.

$$BB_1 = \sqrt{BC^2 - B_1C^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)} -$$

по теореме Пифагора. Рассмотрим $\triangle BOA_1$ и $\triangle BB_1C$. Они подобны, как прямоугольные треугольники с

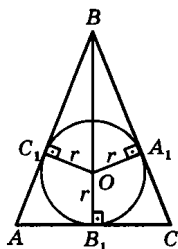
одним общим углом B . Тогда: $\frac{r}{5} = \frac{12-r}{13}$; $r = 3\frac{1}{3}$ см.



690. $BO : OB_1 = 12 : 5$. A_1, C_1, B_1 – точки касания вписанной окружности, $OB_1 = r = 5x$. Имеем:
 $BB_1 = BO + OB_1 = 12x + 5x = 17x$.

$\triangle BOA_1 \sim \triangle BB_1C$ (задача 689):

$$\frac{OB_1}{AC/2} = \frac{OB}{BC}; \frac{AC}{2} = \frac{OB_1 \cdot BC}{OB}; \frac{AC}{2} = \frac{5x \cdot 60}{12x}; \frac{AC}{2} = 25; AC = 50 \text{ см.}$$

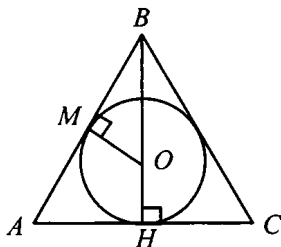


Ответ: 50 см.

691. Дано: $\triangle ABC$;
 $BE = 2$ см, $AE = 3$ см;
 $AB = BC$. Найти: $P_{ABC} = ?$

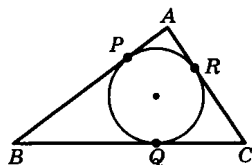
Решение.

- 1) $AE = AK$ (свойство касательных отрезков), значит, $AK = 3$ см и $AC = 6$ см;
- 2) $AB = AE + EB = 3 + 2 = 5$ см;
- 3) $P_{ABC} = 7 + 7 + 6 = 20$ см.



692. $BP = BQ$; $AP = AR$; $CR = CQ$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки). Имеем равенства:

$$\begin{cases} AB = AP + BP = 10 \text{ см} \\ AC = AR + RC = 5 \text{ см} \\ BC = BQ + QC = 12 \text{ см} \end{cases}$$



Получим систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} AP + BP = 10 \text{ см} \\ AR + RC = 5 \text{ см} \\ BQ + QC = 12 \text{ см} \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим: $BP - AP = 7$ см.

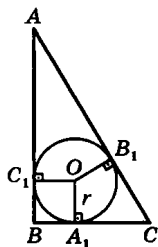
Сложим это с первым равенством: $2BP = 17$ см. $BP = 8,5$ см.

Получили: $BP = BQ = 8,5$ см.

Аналогично находим $AP = AR = 1,5$ см; $QC = CR = 3,5$ см.

Ответ: $AP = AR = 1,5$ см;
 $BP = BQ = 8,5$ см; $QC = CR = 3,5$ см.

693. Точки A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности радиуса r с прямыми BC, AC и AB . O – центр окружности. $OC_1 \perp AB$; $OB_1 \perp AC$ и $OA_1 \perp BC$; $OC_1 = OB_1 = OA_1 = r$. Значит, C_1OA_1B – квадрат, сторона которого равна r .



$$a) P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + AB_1 + B_1C.$$

$$P_{\triangle ABC} = AC_1 + r + r + A_1C + AB_1 + B_1C = 2r + 2AC = 60 \text{ см.}$$

б) $P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 2r + 2AC$. Учтем, что: $A_1C = CB_1 = 5$ см; $BC_1 = r$, $AC_1 = AB_1 = 12$ см. Тогда по теореме Пифагора имеем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ или $(5 + 12)^2 = (r + 12)^2 + (r + 5)^2$. Преобразуем это уравнение к виду: $2r^2 + 34r = 120$ или $r^2 + 17r - 60 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение: $D = 289 + 240 = 23^2$. Находим корни

$$\text{уравнения. } r_1 = \frac{-17 + 23}{2} = 3 \text{ см, } r_2 = \frac{-17 - 23}{2} = -20 \text{ – не под-}$$

ходит по смыслу. $P_{\triangle ABC} = 2r + 2AC = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 17 = 40$ см.

694. **Дано:** $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;
 $AB = c$; $AC + CB = m$; $d = ?$

Решение.

По свойству касательных отрезков:

$$NB = MB, KC = CN, AM = AK.$$

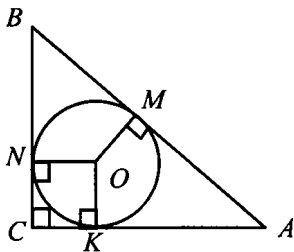
Пусть $AK = AM = x$, тогда

$$BN = MB = c - x \text{ и, т. к.}$$

$$AC + CB = m, \text{ то}$$

$$(x + r) + (c - x) + r = m,$$

$$2r = m - c, d = m - c.$$

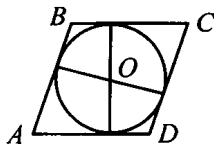


695. В четырехугольнике, описанном около окружности, суммы противоположных сторон равны. Поэтому: $P = 15 \cdot 2 = 30$ см.

696. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм;
Окр (O ; R) – вписана. **Доказать:**
 $ABCD$ – ромб.

Доказательство.

$ABCD$ – описанный около Окр (O ; R), следовательно, $AB + CD = AD + BC$.



Мы знаем, что стороны в параллелограмме попарно равны.

Поэтому запишем: $2AB = 2AD$, т. е. $AB = AD$ (соседние сторо-

ны равны), следовательно, $ABCD$ – ромб, ч.т.д.

697. Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник.

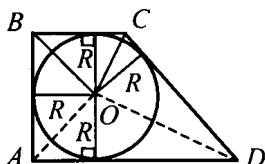
Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$.

Доказательство.

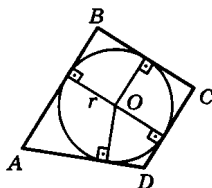
$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{ABO};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R + \frac{1}{2} AD \cdot R +$$

$$+ \frac{1}{2} AB \cdot R = \frac{1}{2} R (AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R, \text{ ч.т.д.}$$



698. $P = 12 \cdot 2 = 24$ см – задача 695. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, полученных в результате соединения вершин четырехугольника с центром O вписанной окружности. Тогда площадь каждого треугольника равна произведению половины основания на высоту, где основание – одна из сторон четырехугольника, высота равна радиусу. Таким образом, $S = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{24}{2} \cdot 5 = 60$ см².



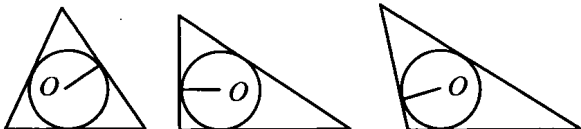
699. $P = 2 \cdot 10 = 20$ см – задача 695.

$$S = P \cdot r \text{ – задача 698, тогда } r = \frac{S}{P/2} = 1,2 \text{ см.}$$

700. Диагонали ромба делят его на 4 равных прямоугольных треугольника (т. к. в точке пересечения диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся пополам). Значит, если провести высоты из прямых углов этих треугольников, то они тоже будут равны.

Проведем окружность с центром в точке пересечения диагоналей ромба и проходящей через основание одной из высот прямого угла. Эта окружность пройдет и через основания трех других высот. Стороны ромба перпендикулярны высотам прямых углов, которые являются радиусами вписанной окружности.

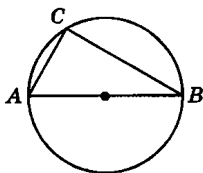
701.



702. $\angle C$ опирается на диаметр, значит,
 $\angle C = 90^\circ$.

а) $\angle A = \frac{\angle BOC}{2} = 67^\circ$; $\angle B = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$.

б) $\angle B = \frac{\angle AOC}{2} = 35^\circ$; $\angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

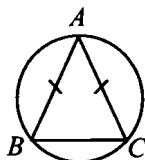


703. Дано: $\triangle ABC$ – вписанный; $AB = AC$,
 $BC = 102^\circ$; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C = ?$

Решение.

$\angle A = \frac{1}{2} BC = 51^\circ$; $AB = AC$, следовательно,

$\angle B = \angle C = (180^\circ - 51^\circ) : 2 = 64^\circ 30'$.



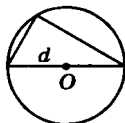
704. а) Вписанный прямой угол опирается на полу-
 окружность.

Значит, в треугольнике гипотенуза будет и
 диаметром окружности.

А точка O – середина диаметра, а значит и ги-
 потенузы, что и требовалось доказать.

б) d – гипотенуза треугольника (из условия).

Его катеты равны $d \cdot \sin \alpha$ и $d \cdot \cos \alpha$.



705. R – гипотенузы (задача 704). $R = AB$.

а) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ см; $R = 5$ см.

б) $AB = 2AC = 36$ см; $R = 18$ см.

706. Дано: $\triangle ABC$ – вписанный:

$AB = BC = AC$; $OB = 10$ см; $AB = ?$

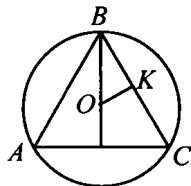
Решение.

1) $\triangle ABC$ – равносторонний, значит

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$;

2) В $\triangle BKO$: $\angle K = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $OB = 10^\circ$,

значит, $BK = OB \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$;



$$3) BC = 2BK = 10\sqrt{3}.$$

707. **Дано:** $\triangle ABC$ – вписанный;
 $AB = BC = 8$, $\angle B = 120^\circ$; $d = ?$

Решение.

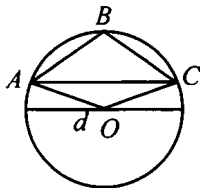
1) $\triangle ABC$ – равнобедренный, значит,
 $\angle C = \angle A = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$;

2) $\angle C = \frac{1}{2} \widehat{AB}$, т. е. $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{BC}$,

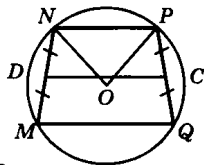
т. е. $\widehat{BC} = 60^\circ$, значит, $\angle ABC = 120^\circ$ и $\angle AOC = 120^\circ$;

3) $ABCO$ – параллелограмм (т. к. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle O$), т. е. $AB = OC$,
 $BC = AO$ (по свойству); $AB = BC = 8$, $OC = OA = 8$ см;

4) $d = 2r = 2 \cdot 8 = 16$ см.



708. а) В прямоугольнике диагонали равны. В точке пересечения они делятся пополам. Поэтому окружность с центром в точке пересечения диагоналей, проходя через одну из вершин прямоугольника, будет проходить и через остальные три вершины. А такая окружность и есть описанная около прямоугольника.



б) $MNPQ$ – трапеция: $MQ \parallel NP$, $MN = PQ$; $\angle M = \angle Q$ (по условию). OD и OC – серединные перпендикуляры к сторонам MN и PQ , точка O – точка их пересечения. $ND = DM$; $PC = CQ$. Значит, $MQ \parallel CD$. $\angle MDC = \angle DCQ$, отсюда $\angle ODC = \angle DCO$, т. е. $\triangle ODC$ – равнобедренный: $DO = OC$.

Рассмотрим $\triangle ODN$ и $\triangle OCP$: $\angle D = \angle C = 90^\circ$, $DO = OC$;
 $DN = PC$, значит, $\triangle ODN = \triangle OCP$ и $NO = OP$.

Поэтому окружность с центром в точке O , проходящая через одну из вершин трапеции, проходит и через его другие вершины. Такая окружность является описанной около трапеции.

709. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм вписанный.

Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство.

$ABCD$ – вписанный, значит, $\angle C + \angle A = 180^\circ$; $\angle D + \angle B = 180^\circ$, но по свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle A$ и $\angle B = \angle D$, т. е. $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$, значит $ABCD$ – прямоугольник (по определению), ч.т.д.

710. **Дано:** $ABCD$ – трапеция вписанная.

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство.

1) $ABCD$ – вписанная трапеция, следовательно,

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle C + \angle A = 180^\circ (1);$$

$$\text{Также: } \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ (2);$$

по свойству углов при $AD \parallel BC$.

2) Сравнивая (1) и (2), получим

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т. е. } \angle B = \angle C;$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т. е. } \angle A = \angle D.$$

Имеем: углы при верхнем и нижнем основаниях попарно равны, следовательно, $ABCD$ – равнобедренная.

711. В данных треугольниках построим серединные перпендикуляры к двум сторонам. Точка их пересечения и будет центром описанной окружности (проходя через одну вершину треугольника, окружность проходит и через две другие). Такая окружность и есть искомая.

Исходя из задачи 704, в прямоугольном треугольнике r равен половине гипотенузы. Таким образом, центр описанной окружности прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы.

712. MN – данная хорда: $\angle M = \frac{\cup MN}{2}$;

$$\angle N = \frac{\cup MN}{2} \quad \angle M + \angle N = \cup MN.$$



По условию $\cup MN \neq 180^\circ$. Значит, касательные пересекаются (углы M и N – односторонние при касательных).

Что и требовалось доказать.

713. 1) $P_{ANM} = AM + AN + MN$.

$BM = MX$ и $XN = NC$ (свойство касательных отрезков),

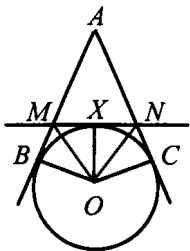
$$\text{т. е. } P_{ANM} = NA + (MX + XN) + AM = \\ = NA + MB + NC + AM = AB + AC, \text{ ч.т.д.}$$

2) $\angle MON = \angle XON + \angle MOX$;

$\triangle BMO = \triangle MXO$ (по катету $BM = MX$ и гипотенузе MO), значит $\angle MOX = \angle BOM$.

Также из $\triangle CON = \triangle XON$: $\angle CON = \angle XON$, т. е.

$\angle MON = \angle BOM + \angle CON$, а именно, не зависит от X , ч.т.д.



719. **Дано:** $\text{Окр}(O; R)$; AC, AE – секущие.

Доказать: $\angle CAE = \frac{1}{2}(CE - BD)$.

Доказательство.

1) В $\triangle ACD$: $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle D)$ (*);

2) $\angle D = 180^\circ - \angle CDE$, $\angle CDE$ – вписанный,

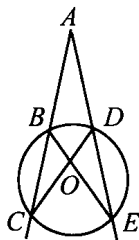
следовательно, $\angle CDE = \frac{1}{2}CE$, т. е.

$$\angle D = 180^\circ - \frac{1}{2}CE \quad (1);$$

$\angle C$ – вписанный, следовательно, $\angle C = \frac{1}{2}BD$ (2).

Подставим в формулу (*) значения (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned} \angle A &= 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2}CE + \frac{1}{2}BD) = 180^\circ - 180^\circ - \frac{1}{2}CE - \\ &- \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(CE - BD), \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$



720. Вершина разностороннего треугольника не может лежать в серединном перпендикуляре к какой-либо стороне, т. к. каждая точка серединного перпендикуляра должна быть равноудалена от концов отрезка, к которому проведен этот перпендикуляр (по свойству). А это условие не выполняется, т. к. $AB \neq AC \neq BC$.

721. Пусть x и y – смежные стороны прямоугольника. Тогда окружность можно вписать в него при условии $2x = 2y$, т. е. $x = y$. Значит, этот прямоугольник – квадрат, ч.т.д.

722. 1) $ABCD$ – описанный, следовательно,

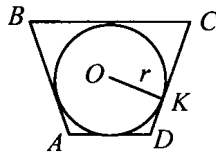
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot OK, \text{ т. е.}$$

$$P_{ABCD} = \frac{2S_{ABCD}}{OK} = \frac{2S}{R}.$$

2) Также, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.

$ABCD$ – описанный, следовательно,

$$CD + AB = AD + BC = \frac{1}{2} P_{ABCD}, \text{ т. е.}$$



$$\begin{cases} CD + AB = \frac{S}{r}; \\ AD + BC = \frac{S}{r}; \end{cases} \begin{cases} 3x + 2x = \frac{S}{r}; \\ y + 2y = \frac{S}{r}; \end{cases}$$

x см – длина 1 части, y см – длина 1 части.

$$\begin{cases} 5x = \frac{S}{r}; \\ 3y = \frac{S}{r}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{S}{5r}; \\ y = \frac{S}{3r}. \end{cases}$$

Имеем:

$$AB = 2 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{2S}{5r}, BC = 2 \cdot \frac{S}{3r} = \frac{2S}{3r}; CD = 3 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{3S}{5r}; AD = \frac{S}{3r}.$$

723. Дано: $ABCD$ – трапеция;

BC, AD – касательные к

окр($O; R$);

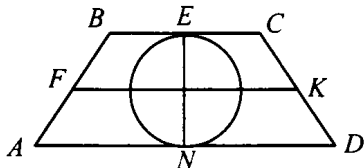
FK – средняя линия.

Доказать: $O \in FK$.

Доказательство.

1) BC – касательная, следовательно, $OE \perp BC$, AD – касательная, следовательно, $ON \perp AD$; $BC \parallel AD$ (из определения трапеции), значит, FN – единственный перпендикуляр к BC и AD , проходящий через точку O .

2) FK – средняя линия трапеции, следовательно, $FK \parallel BC \parallel AD$ и $FK \cap EN = O$ и $EO = ON$ (т. Фалеса).



724. Решение приведено в учебнике.

725. Дано: $ABCD$ – трапеция; $\angle D = 90^\circ$;

$BC = a$; $AD = b$; $CD = ?$

Решение.

В $\triangle ABH$: $\angle H = 90^\circ$, $AH = b - a$;

$ABCD$ – описанный, следовательно,

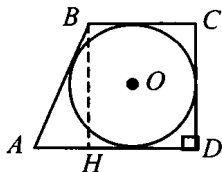
$AB + CD = AD + BC = a + b$,

т. е. $AB + BH = a + b$.

Пусть $BH = x$, тогда $AB = (a + b) - x$.

$BH^2 = AB^2 - AH^2$ (по т. Пифагора), т. е.

$$x^2 = (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 - (b - a)^2;$$



$$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a+b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2.$$

$$2x(a+b) = 2ab, \quad x = \frac{2ab}{2(a+b)} = \frac{ab}{(a+b)}.$$

726. Из условия следует, что центр описанной окружности является общей точкой серединного перпендикуляра и медианы. Рассмотрим два варианта.

а) Серединный перпендикуляр и медиана совпадают, т. е. вершина, из которой проведена медиана, равноудалена от концов противоположной стороны. Таким образом, данный треугольник равнобедренный.

б) Серединный перпендикуляр и медиана не совпадают. Значит, у них только одна общая точка – середина стороны, к которой проведена медиана. Таким образом, центр описанной окружности лежит на стороне данного треугольника, т. е. треугольник прямоугольный.

727. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$;

O_1 – центр вписанной окружности;

O_2 – центр описанной окружности;

$BH \perp AC$, $AH = HC$.

Доказать: $O_1, O_2 \in BH$.

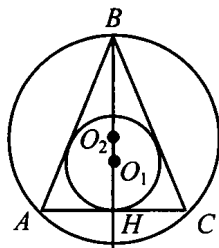
Доказательство.

1) O_2 – центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, значит, $O_2 \in HB$, т. к.

$HB \perp AC$.

2) O_1 – центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, значит, $O_1 \in HB$, Hb – биссектриса (свойство высоты равнобедренного треугольника).

3) Имеем: $C_2 \in HB$ и $O_1 \in HB$.



728. У ромба противоположные углы равны. Предположим, что около ромба можно описать окружность, тогда противоположные углы в сумме должны составлять 180° . Так как они равны, то каждый из них прямой, а значит, ромб является квадратом, что и требовалось доказать.

729. Решение приведено в учебнике.

730. **Дано:** $\triangle AOB$; $a \perp b$, $b \perp OA$;

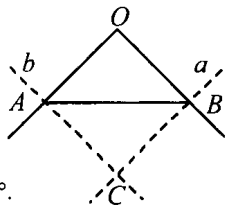
$$a \cap b = C.$$

Доказать: около $ACBO$ можно описать окружность.

Доказательство.

1) $a \perp b$, $b \perp OA$, следовательно, $\angle AOC = \angle OBC = 90^\circ$, т. е. $\angle OBC + \angle OAC = 180^\circ$.

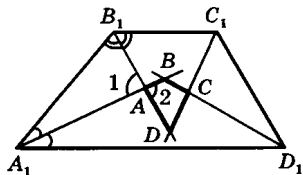
2) В четырехугольнике $\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360^\circ$; $\angle C = \angle O = 180^\circ$, а именно: суммы противоположных углов равны по 180° , и около $AOBC$ можно описать окружность.



731. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $A_1B_1C_1D_1$ – данная трапеция. $\angle 1 = \angle 2$;

$$\angle 1 = 180^\circ - \frac{\angle A_1}{2} - \frac{\angle B_1}{2}, \text{ но}$$

$\angle A_1 + \angle B_1 = 180^\circ$ (как углы трапеции). Отсюда $\angle 2 = 90^\circ$. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle A + \angle C = 180^\circ$, значит, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, ч.т.д.



732. В четырехугольнике $HBCM$

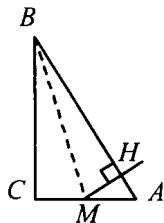
$\angle C = \angle H = 90^\circ$, т. е. $\angle C + \angle H = 180^\circ$, тогда

$\angle M + \angle B = 180^\circ$, значит около $HBCM$ можно описать окружность.

$\angle MHC$ – вписанный, следовательно,

$$\angle MBC = \frac{1}{2} HC, \text{ значит, } \angle MHC = \angle MBC,$$

что и требовалось доказать.



733. **Дано:** $\triangle ABC$;

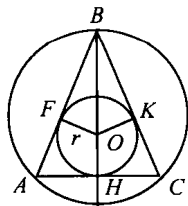
$$AB = BC = AC; R = 10 \text{ см}; r = ?$$

Решение.

1) $\triangle ABC$ – равносторонний, следовательно, центры окружностей совпадают.

2) $HV \perp AC$, следовательно, BH – биссектриса (свойство равностороннего треугольника).

Т. е. в $\triangle BVO$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BO = 10 \text{ см}$, значит,



OF лежит против $\angle R = 30^\circ$, т. е., $FO = \frac{1}{2} BO = 5$ см.

734. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм, вписанный и описанный.

Доказать: $ABCD$ – квадрат.

Доказательство.

1) $ABCD$ – вписанный, следовательно, $\angle C + \angle A = 180^\circ$, $\angle D + \angle B = 90^\circ$, т. е. $ABCD$ – квадрат.

2) $ABCD$ – описанный, следовательно, $CD + AB = AD + BC$.

В параллелограмме $BC = AD$, $AB = CD$, значит,

$AB = BC = CB = AO$, т. е., $ABCO$ – ромб, но $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$, значит этот ромб – квадрат.

Четырехугольник вписанный и описанный одновременно – квадрат, ч.т.д.

735. $MNPQ$ – данная трапеция. $MQ = a$; $NP = b$, причем $a > b$.

По условию, около $MNPQ$ можно описать окружность, значит, трапеция равнобедренная, т. е. $MN = PQ$.

Поэтому получаем:

$MN + PQ = 2MN = (a + b)$ (т. к. в трапецию можно вписать окруж-

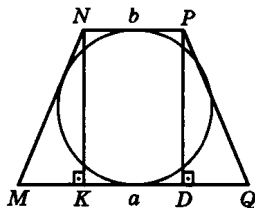
ность) и $MN = \frac{a+b}{2}$.

Проведем $NK \perp MQ$ и $PD \perp MQ$. Тогда MK и PD равны диаметру вписанной окружности. $\triangle MNK = \triangle PDQ$ (по гипотенузе

и катету). Значит, $MK = DQ$, $KD = NP = b$ и $MK = \frac{a-b}{2}$. По

теореме Пифагора для $\triangle MNK$ получаем: $MN^2 = NK^2 + MK^2$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, откуда $16r^2 = 4ab$; $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

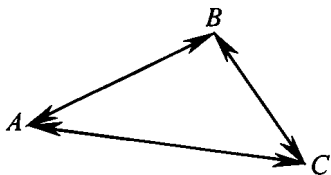


Глава IX.

Векторы

§ 1 Понятие вектора

738. \overrightarrow{AB} ; A – начало, B – конец.
 \overrightarrow{BC} ; B – начало, C – конец.
 \overrightarrow{CA} ; C – начало, A – конец.
 \overrightarrow{BA} ; B – начало, A – конец.
 \overrightarrow{CB} ; C – начало, B – конец.
 \overrightarrow{AC} ; A – начало, C – конец.

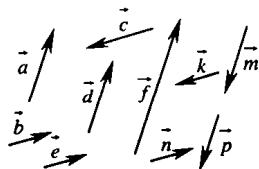


- 739.

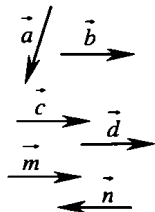
Масштаб: в 1 см 200 км, т. е. 1 : 20 000 000.

740. а) б)

741. а) $\vec{a} \uparrow \vec{d}, \vec{a} \uparrow \vec{f}$;
 б) $\vec{b} \uparrow \vec{e}, \vec{b} \uparrow \vec{n}$;
 в) $\vec{b} \uparrow \vec{k}, \vec{b} \uparrow \vec{c}$;
 г) $\vec{a} \uparrow \vec{g}, \vec{a} \uparrow \vec{m}$.



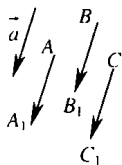
742. а) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ см; \vec{a} и \vec{b} – неколлинеарны.
 б) $\vec{c} \uparrow \vec{d}, |\vec{c}| = |\vec{d}| = 3,5$ см. $\vec{c} = \vec{d}$. Векторы равны, т. к. их длины равны и они сопоставимы.
 в) $\vec{m} \uparrow \vec{n}, |\vec{m}| = |\vec{n}| = 3$ см.



743. $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, т. к. $|\overrightarrow{AA_1}| = |\vec{a}|$ и $\overrightarrow{AA_1} \uparrow \vec{a}$.

$\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, т. к. $|\overrightarrow{BB_1}| = |\vec{a}|$ и $\overrightarrow{BB_1} \uparrow \vec{a}$.

$\overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$, т. к. $|\overrightarrow{CC_1}| = |\vec{a}|$ и $\overrightarrow{CC_1} \uparrow \vec{a}$.



744. Векторные величины – скорость и сила, т. к. для них необходимо знать не только числовое значение, но и направление.

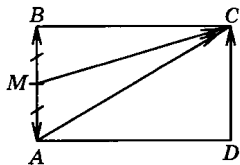
745. По условию $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 3$ см, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4$ см.

$|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{18,25}$ см.

$|\overrightarrow{MA}| = \frac{1}{2} AB = 1,5$ см;

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ см.



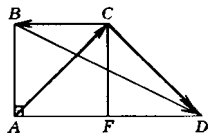
746. $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CF^2 + FD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ см;

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ см.

По теореме Пифагора в $\triangle ABC$:

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Учтем, что

$BC = AD - FD = 12 - 5 = 7$ см и $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ см.



747. а) $MNPQ$ – параллелограмм.

Коллинеарные векторы:

$\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{QM}$, где $\overrightarrow{NP} \uparrow \overrightarrow{MQ}$ и

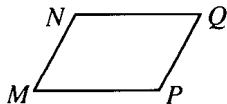
$\overrightarrow{NP} \uparrow \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{NP} \uparrow \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{PN} \uparrow \overrightarrow{QM}$

и $\overrightarrow{PN} \uparrow \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PN} \uparrow \overrightarrow{MQ}$.

Коллинеарные векторы: $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QP}$, где $\overrightarrow{MN} \uparrow \overrightarrow{PQ}$ и

$\overrightarrow{MN} \uparrow \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MN} \uparrow \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \uparrow \overrightarrow{NM}$ и

$\overrightarrow{PQ} \uparrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ} \uparrow \overrightarrow{QP}$.



б) $ABCD$ – трапеция.

Коллинеарные векторы:

$\overline{BC}, \overline{AD}, \overline{CB}, \overline{DA}$, причем $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{AD}$ и

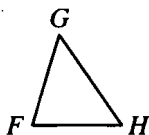
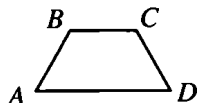
$\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{DA}, \overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{CB}, \overline{DA} \uparrow\uparrow \overline{CB}$ и

$\overline{DA} \uparrow\downarrow \overline{BC}, \overline{DA} \uparrow\downarrow \overline{AD}$.

в) FGH – треугольник.

Коллинеарные векторы:

$\overline{FG} \uparrow\downarrow \overline{GF}, \overline{GH} \uparrow\downarrow \overline{HG}, \overline{FH} \uparrow\downarrow \overline{HF}$.



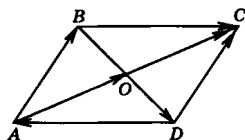
748. а) \overline{AB} и \overline{DC} равны: $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$ и

$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{DC}$;

б) \overline{BC} и \overline{DA} не равны: $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{DA}$;

в) \overline{AO} и \overline{OC} равны: $\overline{AO} \uparrow\uparrow \overline{OC}$;

г) \overline{AC} и \overline{BD} не равны (они не коллинеарны).



749. По условию, $MNLK$ – равнобедренная трапеция. $MS = SN$; $LT = TK$.

а) Векторы \overline{NL} и \overline{KL} не коллинеарны, значит, $\overline{NL} \neq \overline{KL}$.

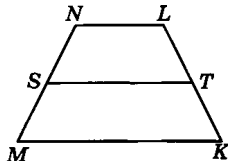
б) Векторы

$\overline{MS} = \overline{SN} : |\overline{MS}| = |\overline{SN}|; \overline{MS} \uparrow\uparrow \overline{SN}$.

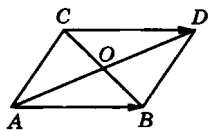
в) Векторы \overline{MN} и \overline{KL} не коллинеарны, $\overline{MN} \neq \overline{KL}$.

г) Векторы \overline{TS} и \overline{KM} не равны: $\overline{TS} \neq \overline{KM}$.

д) $|\overline{TL}| = |\overline{KT}|; \overline{TL} \uparrow\uparrow \overline{KT}$ векторы \overline{TL} и \overline{KT} равны.



750. $\overline{AB} = \overline{CD}$. Тогда $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, т. е. точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC . $AB \parallel CD$, значит, точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD , а точки C и D – по одну сторону от прямой AB . Значит, $ACDB$ – четырехугольник. Но $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, значит, $ACDB$ – параллелограмм. Диагонали AD и CB параллелограмма в точке пересечения O делят-



ся пополам, т. е. середины отрезков AD и BC совпадают, ч.т.д. Докажем обратное утверждение. Середины отрезков BC и AD совпадают в точке O . Точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB , точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и по ту же сторону, что и точка O . Значит, $ABDC$ – четырехугольник. Но т. к. $OC = OB$ и $AO = OD$, то $ABDC$ – параллелограмм, т. е. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Данные утверждения верны, когда векторы \overline{AB} и \overline{CD} ненулевые, когда \overline{AB} и \overline{CD} нулевые, если векторы лежат на одной прямой.

751. а) 1) $\overline{DC} = \overline{AB}$, т. е. $\overline{DC} \uparrow\uparrow \overline{AB}$, значит $AB \parallel DC$ $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, т. е. $DC = AB$.

В $ABCD$ противолежащие стороны параллельны и равны, т. е. $ABCD$ – параллелограмм (по I признаку).

2) $\overline{AB} = \overline{BC}$, т. е. $BC = AB$, значит смежные стороны равны и все стороны параллелограмма $ABCD$ равны, значит, $ABCD$ – ромб.

б) $\overline{DC} \uparrow\uparrow \overline{AB}$, т. е. $AB \parallel DC$. \overline{AD} и \overline{BC} не коллинеарны, значит AD не параллельна BC .

Т. е. в четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны, а две другие не параллельны, следовательно, $ABCD$ – трапеция.

752. а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – верно;

б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то \vec{a} и \vec{b} коллинеарны – верно;

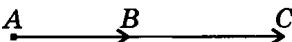
в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – не верно;

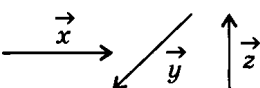
г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$ – не верно;

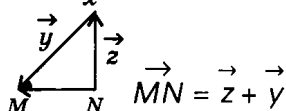
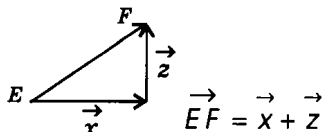
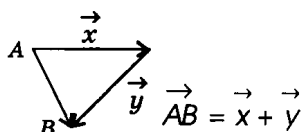
д) если $\vec{a} = 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – верно.

§ 2

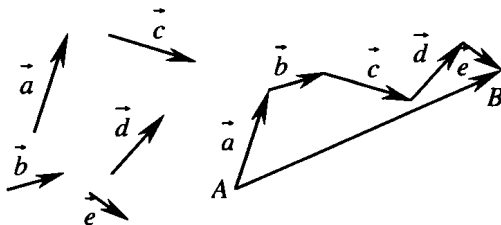
Сложение и вычитание векторов

753. 

754. 

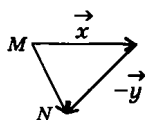
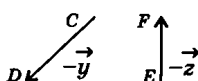
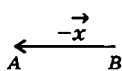
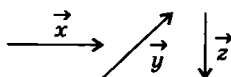


755.

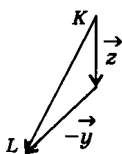


$$\vec{AB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{e} + \vec{d}.$$

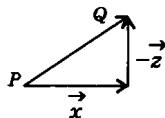
756.



$$\vec{MN} = \vec{x} - \vec{y}$$



$$\vec{KL} = \vec{z} - \vec{y}$$



$$\vec{PQ} = \vec{x} - \vec{z}$$

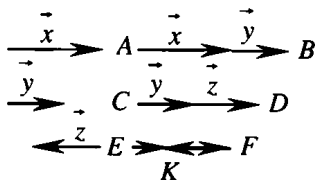
$$757. \vec{CD} = \vec{y} - \vec{z};$$

$$\vec{AB} = \vec{x} + \vec{y};$$

$$\vec{EF} = \vec{x}, \vec{FK} = \vec{z};$$

$$\vec{EF} + \vec{FK} = \vec{x} + \vec{z};$$

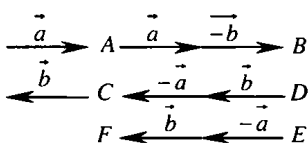
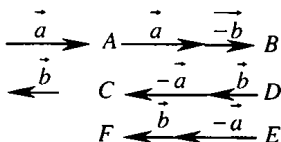
$$\vec{EK} = \vec{x} + \vec{z}.$$



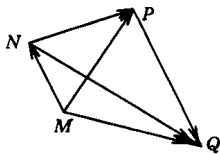
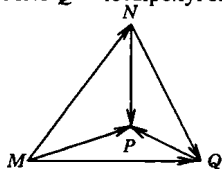
758. а) $AB = \vec{a} - \vec{b}$; б) $CD = \vec{b} - \vec{a}$; в) $EF = -\vec{a} + \vec{b}$.

І случай: $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$.

ІІ случай: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



759. $MNPQ$ – четырехугольник.



а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$ (по правилу треугольника),

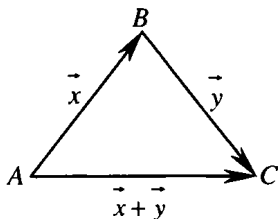
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$, т. е. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$.

б) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (по правилу треугольника),

$\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP}$, т. е. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$.

760. 1) Если A, B, C не лежат на одной прямой, то векторы \vec{x}, \vec{y} и $\vec{x} + \vec{y}$ образуют $\triangle ABC$. По неравенству треугольника $AC < AB + BC$, т. е. $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

2) Если A, B, C лежат на одной прямой, то векторы \vec{x} и \vec{y} коллинеарны, а это не так по условию.



761. По правилу многоугольника имеем:

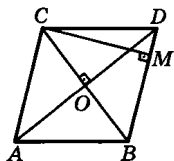
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA}$, но $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ из определения.

762. $\triangle ABC$ – равнобедренный, т. е.

$AB = BC = CA = a$.

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ и $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a$.

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ ($CO = OB$), тогда



$$|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2\overline{AO} = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Построим $\triangle ABC$ до ромба $ABDC$, CM – его высота. Тогда получаем: $\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{CD} + \overline{CB} = 2\overline{CM}$ и

$$|\overline{AB} + \overline{CB}| = 2|\overline{CM}| = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

г) $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CA}$ и $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}| = a$.

д) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ и $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}| = a$.

763. а) $|\overline{BA}| - |\overline{BC}| = BA - BC = 6 - 8 = -2$. $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}| = CA$.

По т. Пифагора $AC^2 = BA^2 + BC^2$, значит

$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 48} = \sqrt{100} = 10, \text{ значит } |\overline{BA} - \overline{BC}| = 10.$$

б) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$. $|\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC = 10$.

в) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$. Построим $AK \parallel BC$ и

$AK = BC$. $ACKB$ – параллелограмм и $\angle CBA = \angle BAK = 90^\circ$, значит $ACKB$ – прямоугольник.

$$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BK}, |\overline{BA} + \overline{BC}| = |\overline{BK}| = BK.$$

($\angle A = 90^\circ$) по т. Пифагора:

$AK^2 + AB^2 = BK^2$, откуда

$$BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

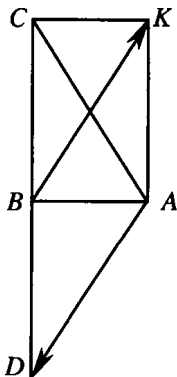
г) $|\overline{AB}| - |\overline{BC}| = 6 - 8 = -2$.

Построим $BD = BC$ и C, B, D лежат на одной прямой, тогда $\overline{CB} = \overline{BD}$ и

$$\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

По т. Пифагора $AD^2 = AB^2 + BD^2$, откуда

$$AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10, \text{ значит } |\overline{AB} - \overline{BC}| = 10.$$



764. а) Учитывая, что $\overline{AB} = -\overline{BA}$, имеем:

$$(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{MC}) + (\overline{MD} - \overline{KD}) =$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CM}) + (\overline{MD} + \overline{DK}) = \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}.$$

$$\begin{aligned} 6) (\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{BD}) - (\overline{MK} + \overline{KD}) = \\ = (\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}) - (\overline{MD}) = \overline{AD} - \overline{MD} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}. \end{aligned}$$

765. По правилу треугольника: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$$\vec{p} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0},$$

$$\vec{q} = (\overline{XY} - \overline{ZX}) + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0},$$

$$\vec{r} = (\overline{ZY} - \overline{XY}) - \overline{ZX} = \overline{ZY} + \overline{YX} + \overline{XZ} = \overline{ZX} + \overline{XZ} = \overline{ZZ} = \vec{0}.$$

$$766. \overline{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}.$$

767. Решение приведено в учебнике.

768. $\overline{BM} = -\vec{a}$, т. к. $|\overline{BM}| = |-\vec{a}|$, (M — се-

редина AB) и $\overline{BM} \updownarrow \vec{a}$.

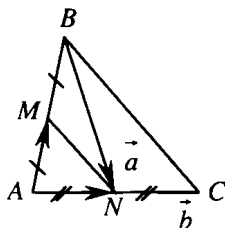
$\overline{NC} = -\vec{b}$, т. к. $|\overline{NC}| = |\vec{b}|$, (N — се-

редина AC) и $\overline{NC} \upuparrows \vec{b}$.

$$\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}, \text{ тогда}$$

$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \vec{b} - \vec{a};$$

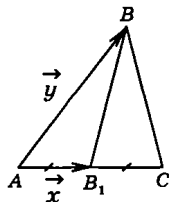
$$\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{AN} = -\vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}.$$



769. По условию BB_1 — медиана.

$$\overline{B_1C} = \overline{AB_1} = \vec{x}; \overline{BB_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB} = \vec{x} - \vec{y};$$

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{y}; \overline{BC} = \overline{BB_1} - \overline{B_1C} = (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{x}.$$



770. Выразим \overline{AC} через \vec{a} и \vec{b} .

$$a) \vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{BC}; \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

$$b) \vec{a} = \overline{CB}, \vec{b} = \overline{CD}, CB \parallel AD \text{ и } CB = AD, \overline{CB} \updownarrow \overline{AD}, \text{ тогда}$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = -\overline{CB} + (-\overline{CD}) = -\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}.$$

в) $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{DA}$, $DA \parallel BC$ и $DA = BC$, $\overline{DA} \uparrow \downarrow \overline{BC}$, тогда

$$\overline{BC} = -\overline{DA}, \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + (-\overline{DA}) = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

771. $\overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \vec{a} - \vec{b}.$

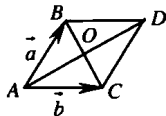
$|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ и $\overline{BC} \uparrow \uparrow \overline{AD}$, значит

$$\overline{BO} - \overline{OC} = \overline{BC} = \vec{b}.$$

$\overline{CO} = \overline{OA}$, тогда $\overline{CO} \uparrow \uparrow \overline{OA}$ и $|\overline{CO}| = |\overline{OA}|$, поэтому

$$\overline{BO} - \overline{OC} = \overline{BO} + \overline{OC} = \overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{a}.$$

$$\overline{BA} - \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}.$$



772. По правилу треугольника: $\overline{XB} = \overline{XA} + \overline{AB}$; $\overline{XC} = \overline{XD} + \overline{DC}$.

Имеем: $\overline{XA} + \overline{XC} = \overline{XB} + \overline{XD}$;

$$\overline{XA} + \overline{XD} + \overline{DC} = \overline{XA} + \overline{AB} + \overline{XD}.$$

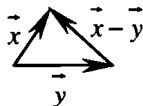
Сравним левую и правую части уравнения, имеем:

$$\overline{DC} = \overline{AB}, \text{ и это верно.}$$

Из $\overline{DC} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ и $|\overline{DC}| = |\overline{AB}|$ (т. к. $ABCD$ – параллелограмм), ч.т.д.

773. 1) Если \vec{x} и \vec{y} неколлинеарны, то по неравенству треугольника имеем:

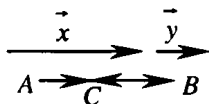
$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, т. к. $|\vec{x} - \vec{y}|, |\vec{x}|, |\vec{y}|$ – стороны треугольника.



2) Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и $\vec{x} \uparrow \uparrow \vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и $AC = AB - BC$.

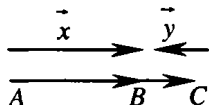
$$\overline{AB} = \vec{x}, \overline{BC} = \vec{y}, \overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}, \text{ поэтому}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$



3) Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и

$\vec{x} \uparrow \downarrow \vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и



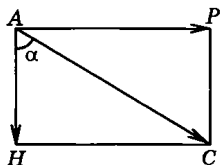
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$; $\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{BC} = -\vec{y}$, $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, т. е.

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

774. Вектор скорости парашютиста без ветра равен \overline{AH} . $|\overline{AH}| = 3$ м/с, \overline{AP} – вектор скорости ветра.

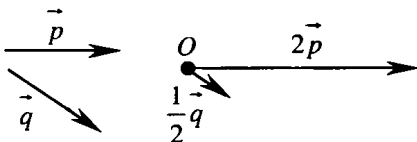
$|\overline{AP}| = 3\sqrt{3}$ м/с, \overline{AC} – вектор скорости парашютиста при ветре.

$\triangle AHC$ – прямоугольный: $\angle HAP = 90^\circ$; $APCH$ – прямоугольник: $AP = HC = 3$. По теореме Пифагора найдем: $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 6$; т. е. $\angle ACH = 30^\circ$; $\angle \alpha = 60^\circ$.

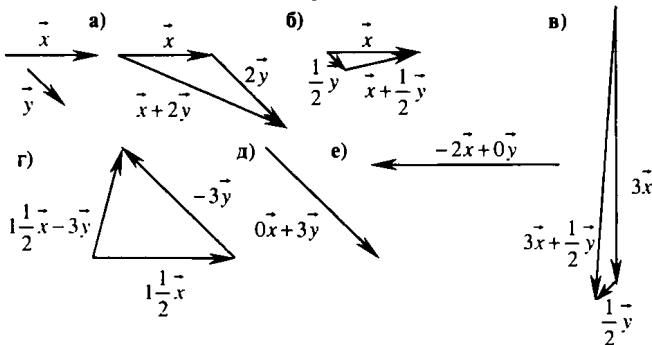


Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

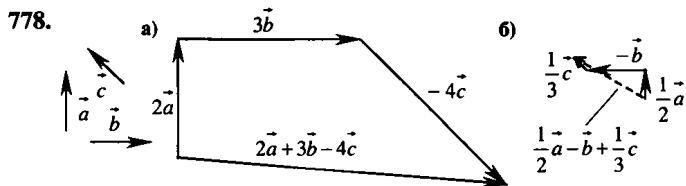
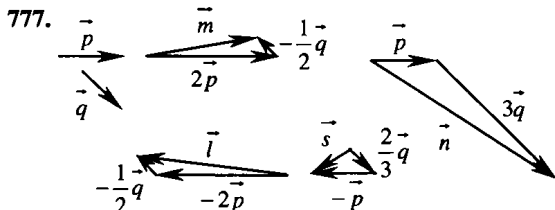
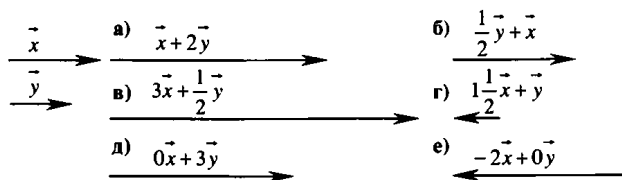
775.



776. I случай. \vec{y} и \vec{x} неколлинеарны.



II случай. \vec{y} и \vec{x} коллинеарны.



779. $\vec{p} = 3\vec{a}$, значит, $\vec{p} \uparrow \vec{a}; |\vec{p}| = 3|\vec{a}|; |\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$.

$-\vec{a} \uparrow \vec{p}, |-\vec{a}| = |\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|; \frac{1}{2}\vec{a} \uparrow \vec{p}, \left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|;$

$-2\vec{a} \uparrow \vec{p}, |-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|; 6\vec{a} \uparrow \vec{p}, |6\vec{a}| = 6|\vec{a}| = 2|\vec{p}|.$

780. а) $|\vec{1} \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|, 1 > 0$, значит $\vec{1} \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$, т. е. $\vec{1} \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

б) $|\vec{-1} \cdot \vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|, -1 < 0$, значит $\vec{-1} \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$, т. е. $\vec{-1} \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

781. а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2(\vec{m} + \vec{n}) - 2(\vec{m} - \vec{n}) = 2(2\vec{n}) = 4\vec{n}.$

б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2(\vec{m} + \vec{n}) + \frac{1}{2}(\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} = \frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}.$

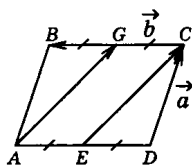
$$\text{в) } -\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = -\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}.$$

782. $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. G – середина BC ;
 E – середина AD .

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b};$$

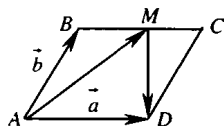
$$\overrightarrow{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{ED} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$



783. $BM : MC = 3 : 1$, значит $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

$ABCD$ – параллелограмм, значит
 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, значит $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD}, \text{ значит}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$

784. а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}$,

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y},$$

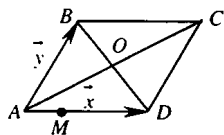
$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y},$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{y} - \vec{x}, \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x},$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} = \vec{x},$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y},$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}.$$



$$6) \ AM = \frac{1}{2}MD, \text{ значит } \frac{1}{3}\overline{AD} \text{ и } \overline{MD} = \frac{2}{3}\overline{AD};$$

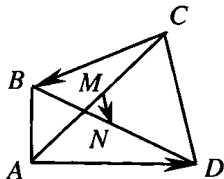
$$\overline{MC} = \overline{MD} + \overline{DC} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{x} + \overline{y},$$

$$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = -\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD} = -\overline{y} + \frac{1}{3}\overline{x} = \frac{1}{3}\overline{x} - \overline{y},$$

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{AO} + \overline{AM} = -\overline{AO} + \overline{AM} = -\left(\frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{y}\right) + \frac{1}{3}\overline{x} = -\frac{1}{2}\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{y} + \frac{1}{3}\overline{x} = \\ &= -\frac{1}{6}\overline{x} - \frac{1}{2}\overline{y}.\end{aligned}$$

785. $AM = MC$, $BN = ND$, значит

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DN} = \\ &= \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}) + \overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{CD} + \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{DC} + \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{DC} - \overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}).\end{aligned}$$



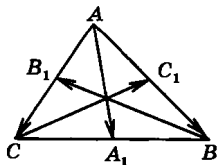
$$\text{Значит } \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$$

786. $\vec{a} = \overline{AC}$ и $\vec{b} = \overline{AB}$ (по условию). A_1 — середина отрезка BC .

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b});$$

$$\overline{BB_1} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{BA}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b};$$

$$\overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$



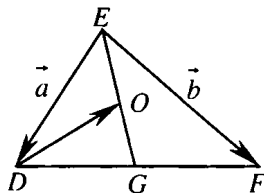
$$\text{Ответ: } \overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}); \overline{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}; \overline{CC_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

787. $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$, значит

$$\vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b}, \text{ или } \overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$DG = GF$, значит

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO}. OE = OG, \text{ поэтому } \overrightarrow{ED} = \vec{a} \text{ и } \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

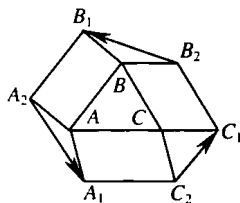
788. Решение приведено в учебнике.

789. $\overline{AA_1} = \overline{C_2C}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{CC_1} = \overline{BB_2}$,

т. к. это стороны параллелограммов.

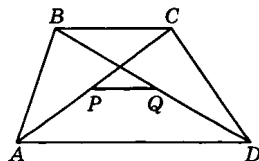
$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= \overline{A_1A} + \overline{AA_2} = \overline{C_2C} + \overline{BB_1} = \\ &= \overline{C_2C_1} + \overline{C_1C} + \overline{BB_2} + \\ &+ \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1} + \overline{BB_2} - \overline{CC_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}.\end{aligned}$$

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$, значит можно построить треугольник со сторонами, параллельными и равными соответственно сторонам A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , ч.т.д.



790. $ABCD$ – данная трапеция. AD и BC – ее основания, причем $AD > BC$. P и Q – середины диагоналей AC и BD .

Имеем: $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$ (см. за-

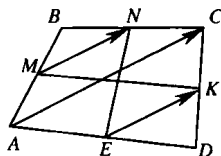


дача 785). \overline{AD} и \overline{CB} – коллинеарные векторы, значит, коллинеарен этим векторам. Отсюда $PQ \parallel AD$ и $PQ \parallel CB$.

$$\overline{AD} \uparrow \downarrow \overline{CB} \quad AD > BC, \text{ отсюда } |\overline{AD} + \overline{CB}| = |\overline{AD}| - |\overline{CB}|.$$

$$|\overline{PQ}| = \frac{1}{2}|\overline{AD} + \overline{CB}| = \frac{1}{2}(|\overline{AD}| - |\overline{CB}|). PQ = (AD - BC). \text{ Ч.т.д.}$$

791. Дано: M, N, K, E – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA .
Доказать: MK и NE пересекаются и
точкой пересечения делятся пополам.



Построим векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC};$$

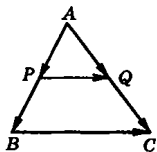
$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EK}$, т. е. $MN \parallel EK$ и $MN = EK$, значит $MNKE$ – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, ч.т.д.

792. $\triangle ABC$ – данный, PQ – средняя линия $\triangle ABC$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$$

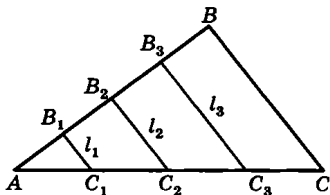
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$



Отсюда $PQ \parallel BC$, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ т. е. $PQ = \frac{1}{2}BC$, ч.т.д.

793. $ABCD$ – данная трапеция, AD и BC – ее основания, $AB = 13$ см, $CD = 15$ см, MN – средняя линия.
 $AD + BC = P_{ABCD} - (AB + CD) = 48 - (13 + 15) = 20$ см,
 $MN = (AD + BC) = 20 : 2 = 10$ см.

794. Точки B_1, B_2 и B_3 делят сторону AB на 4 равных отрезка: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$,
 $B_1C_1 \parallel BC$; $B_2C_2 \parallel BC$;
 $B_3C_3 \parallel BC$.
 $B_1C_1 = l_1 = 3,4$ (по условию).
 B_1C_1 – средняя линия
 $\triangle AB_2C_2$: $l_2 = 2 \cdot l_1 = 6,8$;

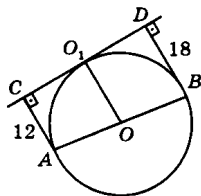


$l_2 = B_2C_2$ – средняя линия $\triangle ABC$:

$BC = 2 \cdot l_2 = 13,6$; $l_3 = B_3C_3$ – средняя линия трапеции BCC_2B_2 :

$$l_3 = \frac{1}{2}(BC + l_2) = \frac{1}{2}(13,6 + 6,8) = 10,2.$$

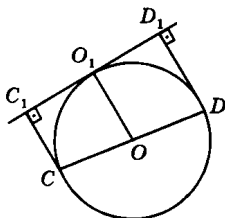
795. AB – диаметр данной окружности. Из точек A и B проведем перпендикуляры к касательной. Получим точки пересечения C и D . $OO_1 \perp CD$. $ABDC$ – трапеция, где DB и AC – ее основания, а OO_1 – ее средняя линия ($AO = OB = r$, $AC \parallel OO_1$; $OO_1 \parallel DB$. Значит, $CO_1 = O_1D$). По условию $DB = 18$ см, $AC = 12$ см.



$$OO_1 = \frac{1}{2}(DB + AC) = 15 \text{ см. } OO_1 = r = 15 \text{ см. } AB \text{ – диаметр и}$$

$$AB = 2r = 30 \text{ см.}$$

796. $CC_1 \perp C_1D_1$; $DD_1 \perp C_1D_1$; $C_1C \parallel D_1D$. Значит, CDD_1C_1 – трапеция. OO_1 – отрезок, соединяющий центр окружности с точкой касания. OO_1 – средняя линия трапеции CDD_1C_1 (задача 795).



$$OO_1 = r; OO_1 = \frac{1}{2}CD = 13,5 \text{ см;}$$

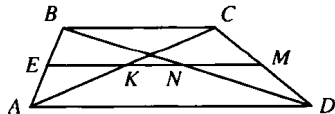
$$OO_1 = \frac{1}{2}(DD_1 + CC_1); DD_1 = 2 \cdot OO_1 - CC_1 = 16 \text{ см.}$$

797. Дано: $ABCD$ – трапеция; EM – средняя линия; $AK = CK$; $BN = DB$.

Доказать: $N, K \in EM$.

Доказательство.

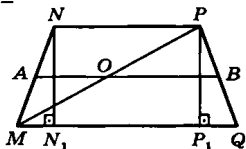
$EM \parallel BC \parallel AD$ (т. к. средняя линия параллельна основаниям).



$CM = MD$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса EM проходит через середину отрезка BD , т. е. через N .

$AE = EB$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса EM проходит через середину отрезка AC , т. е. через K , ч.т.д.

798. $MNPQ$ – равнобедренная трапеция. AB – средняя линия трапеции, MP – диагональ. $AO = 11$ см; $OB = 35$ см (по условию). $AO \parallel NP$, но $MA = AN$, значит, $MO = OP$; AO – средняя



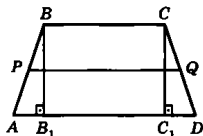
линия $\triangle MNP$: $AO = NP$; $OB = \frac{1}{2} MQ$;

$NP = 2 \cdot AO = 22$ см; $MQ = 2 \cdot OB = 70$ см. Проведем высоты

трапеции. $MN_1 = \frac{1}{2} (MQ - NP) = 24$ см; $MN = 48$ см (по усло-

вию). Значит, $\angle MNN_1 = 30^\circ$, а $\angle NMQ = 60^\circ$, $\angle PQM = 60^\circ$ (т. к. трапеция $MNPQ$ равнобедренная), $\angle MNP = \angle NPQ = 120^\circ$.

799. PQ – средняя линия трапеции. $BB_1 \perp AD$, $B_1D = 7$ см (по условию).



$$PQ = \frac{1}{2} (AD + BC),$$

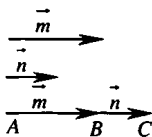
$$AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 2C_1D + B_1C_1;$$

$$PQ = \frac{1}{2} (2 \cdot C_1D + 2 \cdot B_1C_1) = C_1D + B_1C_1 = B_1D = 7 \text{ см.}$$

800. I случай. Векторы сонаправлены.

Дано: $\vec{m} \uparrow \vec{n}$. Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.

Выполним сложение векторов \vec{m} и \vec{n} так:



поместим начало вектора \vec{n} в конец вектора

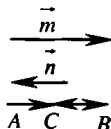
\vec{m} и соединим начало вектора \vec{m} и конец вектора \vec{n} . Из $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C , тогда $AB + BC = AC$, и $AC = |\vec{m} + \vec{n}|$,

$AB = |\vec{m}|$ и $BC = |\vec{n}|$, значит, $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, ч.т.д.

II случай. Векторы противоположно направлены.

Дано: $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$.

Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.



Выполним сложение векторов \vec{m} и \vec{n} так:

поместим начало вектора \vec{n} в конец вектора \vec{m} и соединим

затем начало вектора \vec{m} и конец вектора \vec{n} . Из $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}$, следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и C лежит между A и B , тогда $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$, и $|\vec{AC}| = |\vec{m} + \vec{n}|$, $|\vec{AB}| = |\vec{m}|$ и $|\vec{BC}| = |\vec{n}|$. $\vec{AC} = \vec{AB} - \vec{BC}$, значит $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$, ч.т.д.

801. Доказать: $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

I случай. \vec{x} и \vec{y} неколлинеарны. Неравенство верно, т. к. $|\vec{x}|, |\vec{y}|, |\vec{x} - \vec{y}|$ — стороны треугольника.



и по известному неравенству имеем:

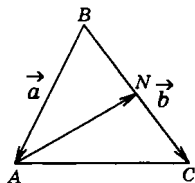
$$|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|, \text{ т.е. } |\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}|.$$

II случай. \vec{x} и \vec{y} коллинеарны, то по предыдущей задаче

$$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|, \text{ если } \vec{m} \uparrow \uparrow \vec{n}, \text{ и } |\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|, \text{ если}$$

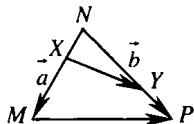
$$\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{n}, \text{ значит } |\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| - \text{ верно, ч.т.д.}$$

$$802. \vec{AN} = \vec{BN} - \vec{BA} = \frac{2}{3} \vec{BC} - \vec{BA} = \frac{2}{3} \vec{b} - \vec{a}.$$



$$803. \frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}, \text{ значит } \vec{NX} = \frac{2}{5} \vec{NM}; \frac{NY}{YP} = \frac{3}{2},$$

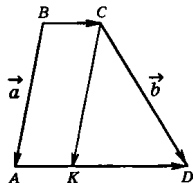
$$\text{значит } \vec{NY} = \frac{2}{5} \vec{NP}.$$



$$\vec{NX} + \vec{XY} = \vec{NY}. \text{ значит } \vec{XY} = \frac{3}{5} \vec{NP} - \frac{2}{5} \vec{NM} = \frac{3}{5} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}.$$

$$804. BC = \frac{1}{3} AD \text{ (по условию). } AK = \frac{1}{3} AD,$$

значит, $AK = BC$ и $ABCK$ — параллелограмм.



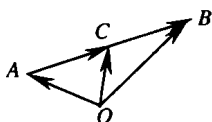
$$\overline{CK} = \overline{BA} = \vec{a}; \overline{KD} = \overline{CD} - \overline{CK} = \vec{b} - \vec{a}; \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{KD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

805. $\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, значит

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}, \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \text{ значит}$$

$$\overline{AB} = \frac{2}{3} \overline{AC} = \frac{2}{3}(\overline{OC} - \overline{OA}) = \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA}, \text{ тогда}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA} = \frac{1}{3} \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC}.$$



806. $AC : CD = m : n$; $\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB}$. $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$

$$\text{значит, } \overline{OC} - \overline{OA} = \frac{m}{n}(\overline{OB} - \overline{OC}). \quad \overline{OC} - \overline{OA} = \frac{m}{n} \overline{OB} - \frac{m}{n} \overline{OC};$$

$$\overline{OC} + \frac{m}{n} \overline{OC} = \overline{OA} + \frac{m}{n} \overline{OB}. \quad \frac{m+n}{n} \overline{OC} = \frac{n \cdot \overline{OA} + m \cdot \overline{OB}}{n};$$

$$\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}.$$

807. $\overline{OA} + \overline{AA_1} = \overline{OA_1}$; $\overline{OB} + \overline{BB_1} = \overline{OB_1}$; $\overline{OC} + \overline{CC_1} = \overline{OC_1}$.

Складываем почленно правые и левые части равенств:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}. (1)$$

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}); \overline{BB_1} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}); \overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}).$$

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}) + \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) =$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BA} + \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{CA} + \frac{1}{2} \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{CB} =$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AB} - \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{BC} - \frac{1}{2} \overline{BC} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

т. е. $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}$ — нулевой вектор. (2)

Из (1) и (2) следует, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$, ч.т.д.

808. Построим диагональ B_1D_1 .

B – середина B_1C_1 , C – середина C_1D_1

$$\text{и } BC = \frac{1}{2} B_1D_1.$$

A – середина A_1B_1 , D – середина A_1D_1 , следовательно, AD – средняя линия $\Delta A_1B_1D_1$, значит, $AD \parallel B_1D_1$ и $AD =$

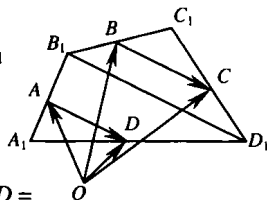
$$= \frac{1}{2} B_1D_1. BC \parallel B_1D_1, BC = \frac{1}{2} B_1D_1 \text{ и } AD = \frac{1}{2} B_1D_1, \text{ тогда } BC = AD.$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}, \text{ следовательно, } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}, \text{ значит } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC} \text{ и } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Итак, } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC} \text{ и } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC},$$

$$\text{тогда } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \text{ или } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}, \text{ ч.т.д.}$$

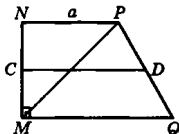


809. $MNPQ$ – данная трапеция. $\angle M = \angle N = 90^\circ$; $\angle P = 120^\circ$ (по условию). CD – средняя линия трапеции.

$$MP = PQ = a \text{ (по условию); } \angle Q = 60^\circ;$$

$\angle PMQ = \angle MPQ = 60^\circ$. ΔMPQ – равнобедренный. $MP = PQ = MQ = a$. $\angle NMP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Значит,

$$NP = \frac{1}{2} MP = \frac{1}{2} a. CD = \frac{1}{2} (MQ + NP) = \frac{1}{2} (a + \frac{1}{2} a) = \frac{3}{4} a.$$



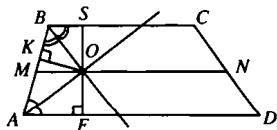
810. Дано: MN – средняя линия,

O – вершина $\angle AOB$, AO – биссектриса $\angle A$, BO – биссектриса $\angle B$.

Доказать: $O \in MN$.

Доказательство.

Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. $OS \perp BC$, $OK \perp AB$, $OF \perp AD$.



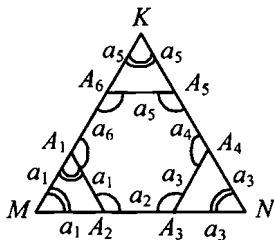
Точка O лежит на биссектрисе $\angle ABC$, значит O равноудалена от сторон BA и BC , тогда $OS = OK$.

Точка O лежит на биссектрисе $\angle BAD$, значит O равноудалена от сторон AB и AD , тогда $OK = OF$. $OS = OK$ и $OK = OF$, значит, $OS = OF$, следовательно, $O \in MN$, где MN средняя линия, ч.т.д.

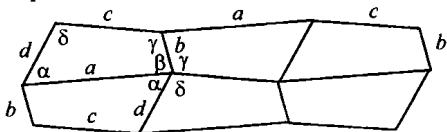
Задачи повышенной трудности

Задачи к главе V

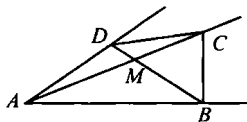
- 811.** Обозначим стороны шестиугольника через a_1, a_2, \dots, a_6 . Продолжив стороны A_1A_6, A_5A_4, A_2A_3 , получим $\triangle MNK$. Если α – угол шестиугольника, то $6 \times \alpha = 180^\circ \cdot (6 - 2)$, $\alpha = 120^\circ$. Все углы в $\triangle MA_1A_2, \triangle NA_3A_4, \triangle KA_5A_6$ равны 60° , все эти треугольники, а также $\triangle MNK$ – равносторонние. Приравнивая выражения $MN = a_1 + a_2 + a_3, NK = a_3 + a_4 + a_5, MK = a_1 + a_6 + a_5$, получим после несложных преобразований: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.



- 812.** Из $a_1 - a_4 = a_5 - a_2$ следует $a_1 + a_2 = a_4 + a_5, a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5$. Аналогично получаем $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_6 + a_5$. Строим равносторонний $\triangle MNK$ со сторонами этой длины, откладываем на них отрезки $MA_1 = MA_2 = a_1, NA_3 = NA_4 = a_3, KA_5 = KA_6 = a_5$. Проведя отрезки A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 , получим искомый шестиугольник.
- 813.** Плитки можно приложить так, чтобы в общих вершинах оказались углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, сумма которых равна 360° , а равные стороны совпадали.



- 814.** По определению выпуклого многоугольника вершины C и D лежат в одной полуплоскости α , имеющей границу AB , а C и B – в одной полуплоскости β имеющей границу AD . Внутренняя область γ угла A является пересечением α и β . В ней лежит точка C , а значит, и луч AC . Поэтому луч AC пересекает отрезок BD в некоторой точке M . Аналогично луч BD пересекает отрезок AC в точке M . Следовательно, M – точка пересечения отрезков AC и BD .

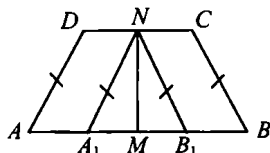


$p_1 > p_2, q_1 \geq q_2$. Если C' и C, D' и D симметричны относительно O , то C' лежит между A и O, D' лежит между B и O или совпадает с B . Тогда $p_1 + a + q_1 = (p_2 + AC) + a + (BD' + q_2) > p_2 + BC + BD' + q_2 \geq p_2 + c + q_2$. Это противоречит (1) и, следовательно, $p_1 = p_2$. Аналогично, $q_1 = q_2$.

Вследствие (1) $a = b = c = d$, и $ABCD$ – ромб.

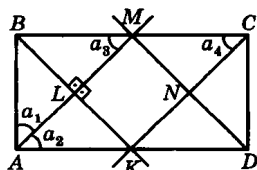
819. Пусть A – данная точка, a – данная прямая, M_0 – ее фиксированная, а M – ее произвольная точка, N_0 – середина AM_0 и $p \parallel a$ – прямая, проходящая через N_0 . Если N – середина AM , то N_0N – средняя линия в $\triangle M_0AM$, $N_0N \parallel a$, по аксиоме параллельных N_0N совпадает с p и N лежит на p . Если N – точка пересечения AM и p , то по теореме Фалеса N – середина AM .

820. Пусть M и N – середины оснований трапеции $ABCD$. Проведем $A_1N \parallel AD$ и $B_1N \parallel BC$, тогда $AA_1 = DN = NC = B_1B$. Предположим сначала, что $AD = BC$.



Так как $A_1N = AD = BC = B_1N$, то $A_1M = AM - AA_1 = MB - BB_1 = MB_1$, в равнобедренном $\triangle A_1NB_1$ медиана NM является и высотой: $NM \perp AB$. Предположим теперь, что $NM \perp AB$. Тогда четырехугольники $AMND$ и $BMNC$ совмещаются с помощью наложения, следовательно, $AD = BC$.

821. $AM; BK; CK$ и DM – биссектрисы углов A, B, C и D . При их пересечении образовался четырехугольник $KLMN$: $\angle a_1 = \angle a_2$ (т. к. AM – биссектриса $\angle A$), $\angle a_2 = \angle a_3$ (как накрест лежащие при пересечении $AD \parallel BC$ секущей AM), $\angle a_2 = \angle a_4$



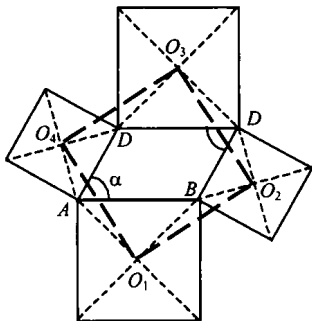
(т. к. CK – биссектриса $\angle C$ прямоугольника $ABCD$). Поэтому $\angle a_1 = \angle a_2 = \angle a_3 = \angle a_4$. Так как $\angle a_3 = \angle a_4$, то $AM \parallel KC$. Аналогично можно доказать, что $BK \parallel MD$. Значит, $KLMN$ – параллелограмм.

Так как $\angle a_1 = \angle a_3$, то $\triangle ABM$ – равнобедренный. Отрезок BL – биссектриса, а также и высота $\triangle ABM$, т. е. $BL \perp AM$. Отсюда $KLMN$ – прямоугольник (т. к. $\angle MLK = 90^\circ$).

Рассмотрим $\triangle AMD$: $\angle MAD = \angle MDA = 45^\circ$ (т. к. AM и MD – биссектрисы $\angle A$ и $\angle D$). Поэтому $\triangle AMD$ – равнобедренный и

$AM = MD$. Имеем: $\triangle ABL = \triangle CDN$ (по стороне и двум углам, прилежащим к ней). Значит, $AL = DN$ и $LM = AM - AL = DM - DN = MN$. Так как в прямоугольнике $KLMN$ сторона $LM = MN$, то $KLMN$ – квадрат.

822. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, в $\triangle AO_1O_4$ $\angle A = \alpha + 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$, в $\triangle BO_1O_2$ $\angle B = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ + \alpha$, $\triangle AO_1O_4 = \triangle BO_1O_2$ по углу и прилежащим к нему сторонам, аналогично $\triangle BO_1O_2 = \triangle CO_3O_2 = \triangle DO_3O_4$, откуда $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_1O_4$, значит, $O_1O_2O_3O_4$ – ромб. По той же причине $\angle AO_1O_4 = \angle BO_1O_2$, следовательно, $\angle O_4O_1O_2 = \angle AO_1B - \angle AO_1O_4 + \angle BO_1O_2 = \angle AO_1B = 90^\circ$ и $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат.



823. Произведем дополнительные построения.

На луче AB отложим отрезок $AO = AM$. Соединим точки O и M . Проведем высоту OH в $\triangle AOM$. Имеем: $\angle OAK = \angle KAM = \angle \alpha$ (по условию), $\triangle AHO = \triangle MDA$ по гипотенузе $AO = AM$ (по построению).

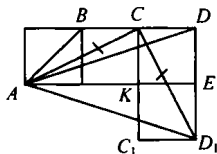
$\angle OAH = 2\alpha$, $\angle OAH = \angle DMA$ (как накрест лежащие). Отсюда $AH = MD$ и $AD = OH$.

Прямоугольный $\triangle ABK = \triangle AKM$ (по катету и острому углу). $OH = AD = AB$. $\angle BKA = 90^\circ - \alpha$;

$$\angle AMO = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha; \text{ поэтому } \angle BKA = \angle AMO. \text{ Отсю-}$$

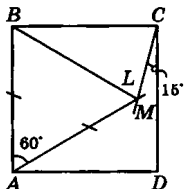
да $BK = HM$. Итак: $AM = AH + HM = BK + DM$.

824. Если C_1 и D_1 симметричны C и D относительно AE , то $\triangle AKC = \triangle CC_1D_1$, откуда $AC = CD_1$. Пусть $\angle BAE = \alpha$, $\angle CAE = \beta$, $\angle DAE = \gamma$. Тогда $\angle ACD_1 = \angle ACK + \angle C_1CD_1 = (90^\circ - \beta) + \beta = 90^\circ$.



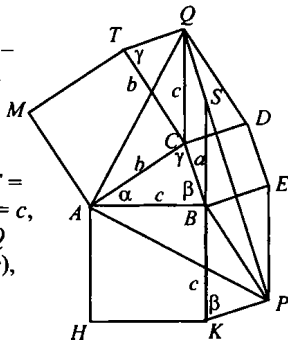
Так как $\angle CAD_1 = \beta + \gamma$ и $\angle CAD_1 = \angle CD_1A = 45^\circ$, то $\beta + \gamma = 45^\circ$,
 $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

825. Проведем дополнительное построение. На луче AM отложим отрезок $AL = AB$. Надо доказать, что точки L и M совпадают. Рассмотрим $\triangle ABL$ $AB = AL$ (по построению); $\angle BAM = 60^\circ$, значит $\triangle ABL$ – равносторонний, т. е. $AB = AL = BL$. Так как $AB = BC$, то $\triangle BLC$ – равнобедренный, т. е. $BL = BC$, $\angle LBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

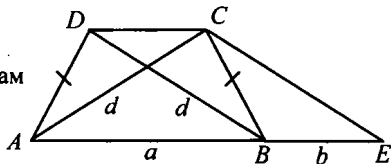


$\angle BCL = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. Отсюда $\angle MCD = 15^\circ$ (что дано и в условии). Значит, $\angle MCD = \angle LCD = 15^\circ$. Отсюда следует, что точки L и M совпадают, а следовательно, $\angle MBC = \angle LBC = 30^\circ$.

826. Пусть в $\triangle ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, S – точка пересечения KB и PQ . Тогда $\angle BKP = \angle SBE = \angle CBE - \angle CBS = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$; $\triangle BKP = \triangle ABC$ (по углу β и сторонам a и c), аналогично $\triangle CQT = \triangle ABC$, откуда $BP = CT = b$, $CQ = c$, $\angle KBP = \angle TCQ = \alpha$. $\triangle ABP = \triangle ACQ$ (по углу $(90^\circ + \alpha)$ и сторонам b и c), следовательно, $AP = AQ$.
 $\angle PAQ = \alpha + \angle PAB + \angle CAQ = \alpha + \angle PAB + \angle APB = \alpha + (180^\circ - \angle ABP) = \alpha + (180^\circ - (90^\circ + \alpha)) = 90^\circ$.



827. Пусть a, b – основания трапеции, d – диагональ. Строим $\triangle ACE$ по сторонам $AE = a + b$, $AC = EC = d$, затем на луче AE откладываем отрезок



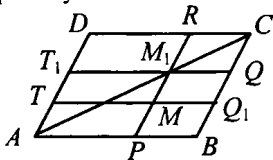
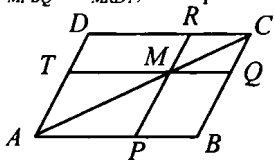
$AB = a$ и строим $\triangle ACD$ по сторонам $AC = d$, $DC = b$, $AD = CB$. Трапеция $ABCD$ – искомая.

828. Если бы ось симметрии треугольника не пересекала ни одну из сторон, то ему был бы симметричен треугольник, лежащий

по другую сторону от оси, то есть другой треугольник. Пусть ось пересекает сторону AB данного $\triangle ABC$ в некоторой точке M ; вершины A и B должны быть симметричны, следовательно, ось перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину. Другие две стороны симметричны относительно этой оси, и поэтому их общая вершина C лежит на ней. Тогда $AC = BC$ (треугольник – равнобедренный). Если есть другая ось симметрии, то она пересекает другую сторону, например, AC (иначе она совпадает с первой осью), но тогда $AB = CB$ и, значит, $AC = BC = AB$ (треугольник – равносторонний).

Задачи к главе VI

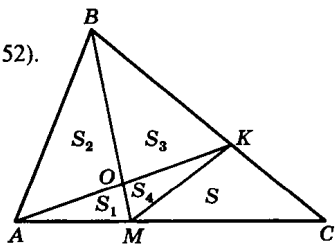
829. Если $M \in AC$, то $S_{MPBQ} = S_{ABC} - S_{APM} - S_{MQC} = S_{ADC} - S_{ATM} - S_{MRC} = S_{MPDT}$. Пусть $S_{MPBQ} = S_{MRDT}$, но $M \notin AC$, $M_1 = AC \cap PR$, $T_1Q_1 \parallel AB$, $M_1 \in T_1Q_1$. Тогда $S_{M_1Q_1BP} = S_{M_1RDT_1}$, но $S_{MQBP} < S_{M_1Q_1BP}$ и $S_{MRDT} > S_{M_1RDT_1}$, следовательно, $S_{MPBQ} \neq S_{MRDT}$, что противоречит условию.



830. $BK : KC = S_{\triangle BMK} : S_{\triangle CMK} = S_{\triangle BAK} : S_{\triangle CAK}$ (следствие 2, п. 52).

Пусть $S_{\triangle MKC} = S$, $S_{\triangle MOK} = S_4$, тогда: $(S_3 + S_4) : S = (S_2 + S_3) : (S_1 + S_4 + S)$. (2)

S_4 можно выразить, применив еще раз следствие 2, п. 52.



$$MO : OB = S_1 : S_2 = S_4 : S_3, \text{ откуда } S_4 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}. \quad (1)$$

Подставляя выражение (1) в выражение (2) и проводя преоб-

разования, получим:
$$S = \frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{(S_2^2 - S_1 S_3) S_2}.$$

831. По условию $AM/MC = CK/KB = MP/PK = k$,

так как $S_1/S_{CMP} = AM/MC$,

$S_{CPK}/S_2 = CK/KB$ и $S_{CMP}/S_{CPK} = MP/PK$, то

$$S_{CMP} = \sqrt[3]{S_1^2 S_2}, \quad S_{CPK} = \sqrt[3]{S_1 S_2^2},$$

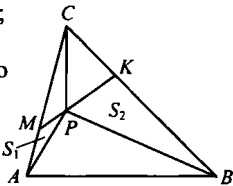
следовательно $S_{MKC} = S_{CMP} + S_{CPK} =$

$$= \sqrt[3]{S_1 S_2} (\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}), \quad k = \sqrt[3]{S_1 / S_2} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MKC}} = \frac{AC \cdot BC}{MC \cdot CK} = \frac{(AM + MC)(CK + KB)}{MC \cdot CK} =$$

$$= \left(\frac{AM}{MC} + 1 \right) \left(1 + \frac{KB}{CK} \right) = (k + 1) \left(1 + \frac{1}{k} \right), \quad \text{отсюда } S_{ABC} = \frac{(k + 1)^2}{k^2} S_{MKC}.$$

Подставляя сюда значения (1), получим $S = (\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2})^3$.



832. Так как $DR = BP$ и $DR \parallel BP$, то

$PBRD$ – параллелограмм, $DP \parallel RB$;

аналогично $TC \parallel AQ$ и $MNKL$ –

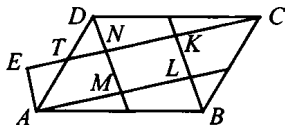
параллелограмм; положим

$S_{MNKL} = S$. Пусть $AE \parallel NP$, тогда

равны параллелограммы $AENM$ и $MNKL$, а также $\triangle AET$ и

$\triangle DNT$ следовательно, $S_{ADM} = S$, аналогично

$S_{DNC} = S_{BKC} = S_{ABL} = S$, откуда $S_{ABCD} = 5S$, $S = S_{ABCD}/5$.



833. По условию: $CE = ED$; $EF \perp AB$. $S_{ABCD} =$

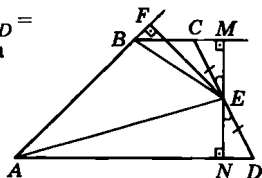
$$= S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle AED}. \quad MN - \text{высота}$$

$$\text{трапеции. } S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AD \cdot EN;$$

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot EM. \quad \text{Кроме того}$$

учтем, что $EN = EM$ (т. к. $\triangle CME = \triangle NED$ по гипотенузе и ост-

рому углу). $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EF$. Теперь находим:

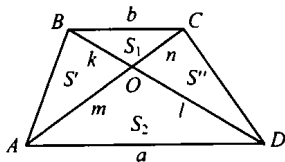


$$S_{\triangle AED} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} AD \cdot EN + \frac{1}{2} BC \cdot EN = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot$$

$$EN - \frac{1}{2} S_{ABCD}; S_{ABCD} = S_{\triangle ABE} + \frac{1}{2} S_{ABCD}; S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EF.$$

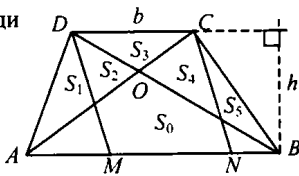
Тогда $S_{ABCD} = AB \cdot EF$, что и требовалось доказать.

834. Введем обозначения: $AD = a$, $BC = b$, $AO = m$, $OC = n$, $OB = k$, $OD = l$, $S_{\triangle AOB} = S'$, $S_{\triangle DOC} = S''$. Тогда $S_1/S_2 = bn/am = bk/cd$, откуда $n/m = k/l$ (1); $S'/S_1 = m/n$, $S'/S_2 = k/l$, откуда $(S')^2/(S_1 S_2) = mk/nl = 1$ согласно (1). Следовательно, $S' = \sqrt{S_1 S_2}$, аналогично $S'' = \sqrt{S_1 S_2}$.



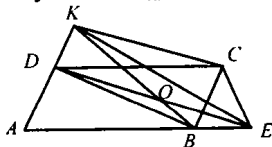
$$\text{Тогда } S = S_1 + S' + S'' + S_2 = S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

835. Пусть $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ – площади частей трапеции, h – ее высота, $MD \parallel NC$. $S_{MDCN} = DC \cdot h$, $S_{ADC} = DC \cdot h/2$, $S_{BDC} = DC \cdot h/2$, следовательно, $S_{MDCN} = S_{ADC} + S_{BDC}$, откуда $S_0 + S_2 + S_3 + S_4 = (S_1 + S_2 + S_3) + (S_3 + S_4 + S_5)$, $S_0 = S_1 + S_3 + S_5$.

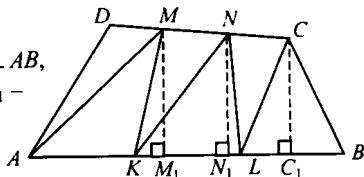


836. Если P и Q – середины диагоналей, то $S_{\triangle AQP} = S_{\triangle QPC}$ и $S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle QKC}$, откуда $S_{\triangle AQP} = S_{\triangle MPQ}$, а значит, $S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CKM}$ (1), аналогично $S_{\triangle BKM} = S_{\triangle DKM}$. Складывая равенства (1) и (2), получим, что $S_{\triangle AKB} = S_{\triangle DCM}$.

837. $S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BDK} - S_{\triangle ODK} = S_{\triangle EDC} + S_{\triangle CDK} - S_{\triangle ODK}$; но $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle EDC}$ ($AB = DC$, $AB \parallel DC$) и $S_{\triangle BDK} = S_{\triangle CDK}$, значит $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle EOK}$.



838. По условию $AK = KL = LB$, $DM = MN = NC$. Если $MM_1 \perp AB$, $NN_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$, то NN_1 – средняя линия трапеции M_1MCC_1 и, следова-



тельно, $NN_1 = (MM_1 + CC_1)/2$. Отсюда $S_{KLN} = (S_{AKM} + S_{LBC})/2$, аналогично $S_{MKN} = (S_{DMA} + S_{NCL})/2$. Тогда $S_{KLN} + S_{MKN} = (S_{AKM} + S_{LBC} + S_{DMA} + S_{NCL})/2$, или $S_{KLN} + S_{MKN} = (S_{ABCD} - S_{KLMN})/2$, откуда $S_{KLMN} = S_{ABCD}/3$.

839. Если $MM_1 \parallel AB$, $DD_1 \perp AB$,

$CC_1 \perp AB$, то MM_1 — средняя линия трапеции

D_1DCC_1 и, следовательно,

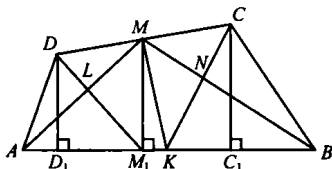
$MM_1 = (DD_1 + CC_1)/2$, от-

сюда $S_{ADK} + S_{BCK} =$

$= AK \cdot DD_1/2 + KB \cdot CC_1/2 =$

$= AK(DD_1 + CC_1)/2 = AK \cdot MM_1 = AB \cdot MM_1/2 = S_{ABM}$, значит,

$S_{ADL} + S_{BCN} = (S_{ADK} - S_{ALK}) + (S_{BCK} - S_{KBN}) = S_{ABM} - S_{ALK} - S_{KBN} = S_{LMNK}$.



840. Сделаем дополнительные построения:

$\angle O = 60^\circ$; $AN \perp OB$ и $AC \perp OC$ (по усло-

вию); $AN = b$; $AC = a$.

Рассмотрим $\triangle OBC$. $\angle O = 60^\circ$, значит,

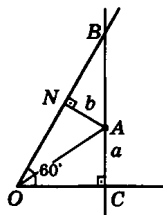
$\angle B = 30^\circ$. $OB = 2OC$. Рассмотрим прямо-

угольный $\triangle ANB$. $\angle B = 30^\circ$, значит,

$AB = 2AN$; $AB = 2b$; $BC = a + 2b$. Тогда

$OC^2 = OB^2 - BC^2$ или $OC^2 = 4OC^2 -$

$-(a + 2b)^2$, откуда $OC^2 = \frac{(a + 2b)^2}{3}$ (по теореме Пифагора). Из



$\triangle OAC$ получаем: $OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.

841. Положим $AB = a$, $AD = b$, $BK = x$, $DM = y$,

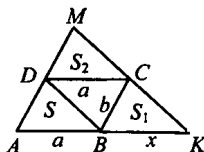
$S_{ABD} = S$. Тогда $S_{AMK}/S = (a + x)(b + y)/(ab)$ (1),

$S_1/S = (bx)/(ab)$, $S_2/S = (ay)/(ab)$, откуда

$x = aS_1/S$, $y = bS_2/S$; $S_{AMK} = 2S + S_1 + S_2$.

Подставляя эти значения в (1), получим

$S = \sqrt{S_1 S_2}$, $S_{ABCD} = 2\sqrt{S_1 S_2}$.



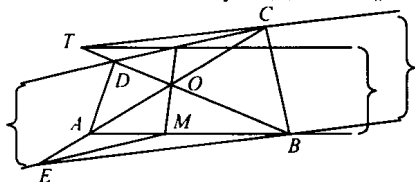
842. Так как $TK \parallel AB$, то $S_{TMB} = S_{KMB}$, откуда $S_{TMO} = S_{KBO}$ и, значит,

$OT/OB = OK/OM$, и обратно, то есть $TK \parallel AB \Leftrightarrow OT/OB =$

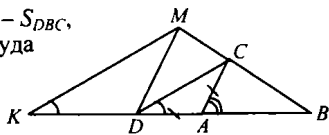
$= OK/OM$ (1). Аналогично, $ME \parallel CD \Leftrightarrow OK/OM = OC/OE$ (2).

Отсюда следует $OT/OB = OC/OE$ (3). Аналогично соотноше-

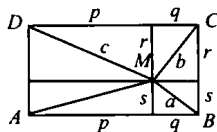
ниями (1) и (2) справедливо соотношение $BE \parallel CT \Leftrightarrow OT/OB = OC/OE$. Так как верно (3), то $BE \parallel CT$.



843. $S_{CDK} = S_{BCK} - S_{DBC}$, $S_{DCM} = S_{BDM} - S_{DBC}$, следовательно $S_{DCK} = S_{DCM}$, откуда $KM \parallel DC$. Так как $AD = AC$, то $\angle ACD = \angle ADC = \alpha/2$, а так как $KM \parallel DC$, то $\angle BKM = \alpha/2$.

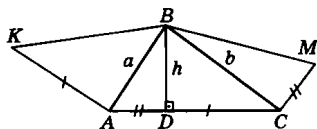


844. Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам, и обозначим отрезки сторон через p, q, r, s . Тогда $a^2 = s^2 + q^2$, $c^2 = p^2 + r^2$, $b^2 = r^2 + q^2$, откуда $a^2 + c^2 - b^2 - s^2 + p^2 = AM^2$,



$$AM = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}.$$

845. Для упрощения задачи введем дополнительные обозначения: $AB = a$; $DC = b$; $BD = h$.



По теореме Пифагора из

прямоугольного $\triangle KVB$ получаем: $KB^2 = AK^2 + AB^2 = DC^2 + a^2$.

Из $\triangle BDC$ получаем: $DC^2 = b^2 - h^2$, откуда $KB^2 = b^2 - h^2 + a^2$.

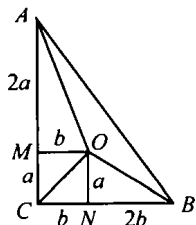
Аналогично находим $BM^2 = BC^2 + CM^2 = b^2 + a^2 - h^2$.

Отсюда следует, что $BM^2 = KB^2$ или $BM = KB$, ч.т.д.

846. Проведем $OM \perp AC$, $ON \perp BC$ и положим $CM = a$, $CN = b$. По условию $S_{OCB} = S_{ABC}/3$, $CB \cdot a/2 = CB \cdot AC/6$, $a = AC/3$, $AM = 2a$. Аналогично $NB = 2b$.

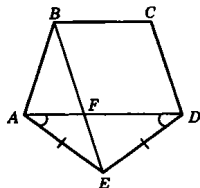
Из $\triangle AMO$, $\triangle BNO$ и $\triangle CON$

$$OA^2 + OB^2 = (b^2 + 4a^2) + (a^2 + 4b^2) = 5(a^2 + b^2) = 5OC^2.$$



Задачи к главе VII

847. а) Рассмотрим $\triangle ABE$ и $\triangle AED$: $AB = ED$; $\angle E = \angle A$ (по условию), AE – общая сторона. $\triangle ABE = \triangle AED$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $\angle DAE = \angle ADE$. Рассмотрим $\triangle AFE$ и $\triangle AED$. Они подобны (по двум углам).



б) $\triangle AFE \sim \triangle AED$: $\frac{DA}{AE} = \frac{AE}{AF}$.

$$\angle AED = \angle AFE = \frac{180 \cdot (5 - 2)}{5} = 108^\circ, \angle DFE = 180^\circ -$$

$$- 108^\circ = 72^\circ, \angle ADE = \frac{180^\circ - \angle AED}{2} = 36^\circ, \angle FED =$$

$$= 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ. \text{ Отсюда следует, что } DF = DE = AE.$$

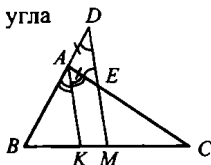
Тогда получаем: $\frac{DA}{AE} = \frac{AE}{AF}$ или $\frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF}$, ч.т.д.

848. Пусть $AC > AB$. По теореме о биссектрисе угла (№ 535) $KC > BK$ и M лежит между K и C .

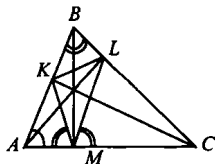
По теореме об угле, пересеченном параллельными прямыми (№ 556), $BD/BM = AD/KM$, $CE/MC = AE/KM$ (1).

Но по условию $BM = MC$, а в $\triangle AED$

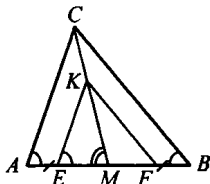
$\angle E = \angle D$ и, следовательно, $AD = AE$; тогда из (1) $BD = CE$, ч.т.д.



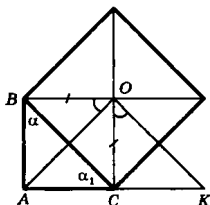
849. Если AL , BM , CK – высоты в $\triangle ABC$, то $\triangle ABM$ подобен $\triangle AKC$, откуда $AB/AC = AM/AK$, но тогда $\triangle AKM$ подобен $\triangle ABC$ и, значит, $\angle AMK = \angle ABC$, $\angle KMB = 90^\circ - \angle ABC$. Аналогично, $\angle BML = 90^\circ - \angle ABC$. Следовательно, MB – биссектриса угла $\angle KML$.



850. Пусть M – точка пересечения AB и CK . $\triangle EKM$ подобен $\triangle ACM$, $EM/AM = KM/CM$, $(AM - AE)/AM = KM/CM$, $\triangle FKM$ подобен $\triangle BCM$, $MF/BM = KM/CM$, $(BM - BF)/BM = KM/CM$, откуда $1 - AE/AM = 1 - BF/BM$, а так как $AE = BF$, то $AM = BM$.



851. $\triangle ABC$ – данный, BC – гипотенуза, равная стороне квадрата, $AB + AC = a$. Надо найти AO . Сделаем дополнительное построение: $\angle BOA = \angle COK$. Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle COK$. $BO = OC$ (как половины диагоналей квадрата).



$$\angle ABO = \angle \alpha + 45^\circ; \angle OCK = 180^\circ -$$

$$-(\angle \alpha_1 + 45^\circ); \angle \alpha_1 = 90^\circ - \angle \alpha, \text{ тогда}$$

$$\angle OCK = 180^\circ - (90^\circ - \angle \alpha + 45^\circ) = \angle \alpha + 45^\circ. \text{ Значит,}$$

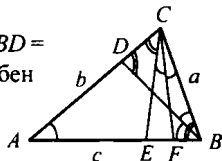
$\angle ABO = \angle OCK$. Получаем, что $\triangle ABO = \triangle COK$ (по стороне и двум углам, прилежащим к ней). Таким образом, $AO = OK$; $AB = CK$. $AK = AC + CK$ или $AK = AC + AB = a$.

Рассмотрим $\triangle AOK$: $AO = OK$, значит, он равнобедренный.

$\angle AOK = \angle COK + \angle AOC = \angle BOA + \angle AOC = 90^\circ$. $\triangle AOK$ – пря-

моугольный. Тогда: $AO = \frac{AK}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

852. Если $\angle ACE = \angle BCE = 360^\circ/7$, $\angle ABD = \angle CBD = \angle ECF = \angle BCF = 180^\circ/7$, то $\triangle ABC$ подобен $\triangle ACE$, подобен $\triangle BDC$, подобен $\triangle CBF$, откуда при $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ получим:



$$\begin{cases} \frac{a}{CE} = \frac{b}{AE} = \frac{c}{a}, & AE = \frac{b^2}{c}, BE = CE = \frac{ab}{c}, \\ \frac{a}{DC} = \frac{b}{a} \frac{c}{BD}, & AD = BD = \frac{ac}{b}, DC = \frac{a^2}{b}, \\ \frac{FB}{a} = \frac{a}{c}, & FB = \frac{a^2}{c}, AF = AC = b, \end{cases} \begin{cases} AE + BE = c \\ AD + DC = b, \\ c = AF + FB \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b^2}{c} + \frac{ab}{c} = c, & \begin{cases} b^2 + ab = c^2 \\ ac + a^2 = b^2 + \\ c^2 = bc + a^2 \end{cases} \\ \frac{ac}{b} + \frac{a^2}{b} = b, & \frac{1}{ab + ac} = \frac{1}{bc}; \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}. \\ c = b + \frac{a^2}{c} \end{cases}$$

Решение с помощью теоремы Птолея. (№ 893) В четырехугольнике $ABCD$ $BC = a$ – сторона правильного семиугольника, $AC = b$ и $AB = c$ – его диагонали. $AB \times CD = AD \times BC +$

$$AC \times BD; cb = ca + ba; \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

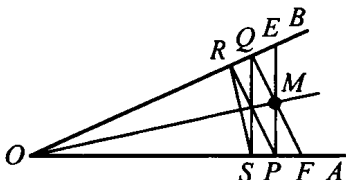
853. В $\triangle OEF$ OM проходит через точку пересечения высот EP и FQ , следовательно, $OM \perp EF$ (1).

$\triangle OPR$ подобен $\triangle OFQ$,

$$OP/OR = OF/OQ,$$

$$OR \cdot OF = OP \cdot OQ, \triangle OQS$$

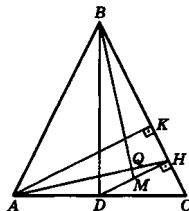
подобен $\triangle OEP$, $OQ/OS = OE/OP$, $OS \cdot OE = OP \cdot OQ$. Следовательно, $OR \times OF = OS \cdot OE$, $OF/OE = OS/OR$ и $\triangle OEF$ подобен $\triangle ORS$, $\angle OFE = \angle OSK$, $EF \parallel RS$. Тогда из (1) следует $RS \perp OM$.



854. Из вершины A $\triangle ABC$ проведем высоту AK . Так как $DH \perp BC$ (по условию), то $AK \parallel DH$. $AD = DC$ (по условию), значит, $KH = HC$.

$\triangle BDC \sim \triangle BHD$ ($\angle B$ – общий, треугольники прямоугольные). $\triangle AKC \sim \triangle BDC$ ($\angle C$ – общий, $\angle K = \angle D = 90^\circ$). BM и AN являются медианами. Отсюда $\triangle AKH \sim \triangle BMH$.

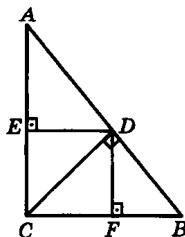
$\angle KAH = \angle HBM$. AN и BM пересекаются в точке Q . $\angle BHQ = \angle KHA = 90^\circ - \angle KAH = 90^\circ - \angle HBM = 90^\circ - \angle HBQ$. Значит, $\angle BHQ + \angle HBQ = 90^\circ$, т. е. $BM \perp AN$, ч.т.д.



855. а) $AD^2 = AC \cdot AF$; $CD^2 = AD \cdot BD$;
 $BD^2 = BC \cdot BF$; $AC \cdot BC = AB \cdot CD$.

Тогда $AD^2 \cdot BD^2 = AC \cdot AE \cdot BC \cdot BF$ или $CD^4 = AC \cdot BC \cdot AE \cdot BF$, но $AC \cdot BC = AB \cdot CD$, поэтому $CD^4 = AB \cdot CD \cdot AE \cdot BF$ или $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$, ч.т.д.

$$\left. \begin{aligned} 6) AB^2 &= (AD + BD)^2 = AD^2 + BD^2 + 2DC^2; \\ AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\ BD^2 &= BF^2 + DF^2 \end{aligned} \right\} \text{ по теореме Пифагора.}$$



Тогда: $AD^2 + BD^2 = AE^2 + ED^2 + BF^2 + DF^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.
 $AD^2 = AE^2 + BF^2 + 3CD^2$, что и требовалось доказать.

в) $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (т. к. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$); $AC = \frac{AD^2}{AE}$, то

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB \cdot AE}{AD^2}; AD = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2}. \text{ Тогда}$$

$$AD + BD = AB = \sqrt[3]{AB \cdot AE^2} + \sqrt[3]{AB \cdot BF^2} \text{ или}$$

$$\sqrt[3]{AB^2} = \sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

856. а) Пусть $\angle ADB = \alpha$, $\angle BDC = \beta$; $\angle DAC =$

$= \gamma$; так как $AD = CD$, то $\angle ACD = \gamma$.

По условию $\alpha = 1/2 \cdot \beta = 2/3 \cdot \gamma$,

откуда $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3/2 \cdot \alpha$.

В $\triangle ACD$ $\alpha + 2\alpha + 3/2 \cdot \alpha = 180^\circ$,

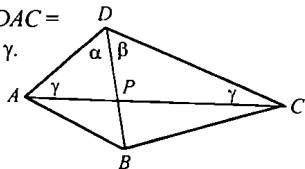
следовательно, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$,

$\gamma = 45^\circ$. Тогда $\angle ADC = \alpha + \beta = 90^\circ$; так как $AB = BD = CD$, то

$\angle BAD = \angle ABD = (180^\circ - \alpha)/2 = 75^\circ$; $\angle BCD = \angle CBD =$

$= (180^\circ - \beta)/2 = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$.

б) Так как $\angle BAP = \angle ADB = 50^\circ$, то $\triangle ABD \sim \triangle PBA$ по двум углам, откуда $AB/BD = BP/AB$ и $AB^2 = BP \cdot BD$.



857. Если точки N и Q симметричны

M относительно A и D соот-

ветственно, точка P

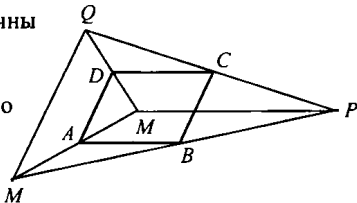
симметрична N относительно

B , то по теореме о средней

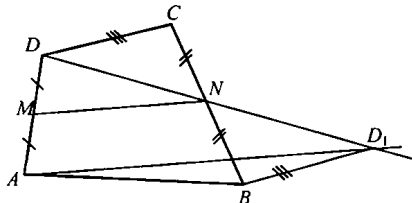
линии треугольника

$MP \parallel AB \parallel CD$. Тогда по

теореме Фалеса (№ 385) C – середина QP .



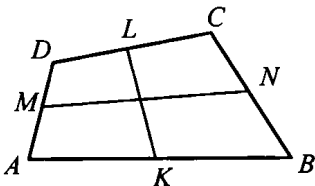
858. Пусть в четырех-
 угольнике AB не па-
 раллельно CD , M и
 N – середины соот-
 ветственно сторон
 AD и BC , точка D_1
 симметрична D от-



носителю N . Так как AB не параллельно CD , то $D \notin AB$; из $\triangle ABD_1$ $AD_1 < AB + BD_1$ (1). В $\triangle ADD_1$ $AD_1 = 2MN$; так как $\triangle DCN = \triangle D_1BN$, то $BD_1 = DC$. Тогда из (1) $2MN < AB + DC$, $MN < (AB + DC)/2$.

859. Предположим противное, что четырехугольник $ABCD$ не параллелограмм, то есть AB не параллельно CD , $AD \neq BC$.

По № 858 $(AB + DC)/2 > MN$, $(AD + BC)/2 > KL$, тогда $(AB + DC + AD + BC)/2 > MN + KL$, что противоречит условию.

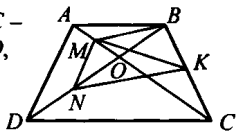


860. $MNPQ$ – выпуклый четырехугольник. MN и PQ – его противоположные стороны. DK – прямая, соединяющая середины

сторон MN и PQ . По условию $DK = \frac{1}{2}(MQ + NP)$. Значит,

$MQ \parallel NP$. В противном случае данное равенство невыполнимо. Отсюда следует, что $MNPQ$ – трапеция или параллелограмм, что и требовалось доказать.

861. Пусть $\triangle MNK$ – искомый. $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$ – равносторонние, следовательно, $MB \perp AO$, $NC \perp DO$. $\triangle AOD = \triangle BOC$, откуда $AD = BC$, $MN = AD/2 = BC/2 = BK = KC$. По № 404 в $\triangle BCM$ $MK = BK = MN$ и в $\triangle BCN$ $KN = KC = MN$.



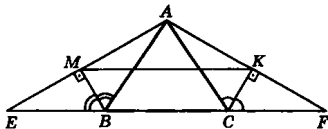
862. Продолжим прямые AM и AK до пересечения с BC .

Получим точки E и F . Рассмотрим $\triangle ACF$. $CK \perp AF$ (по

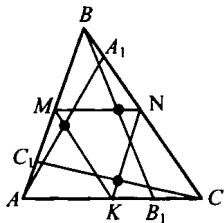
условию) и $\angle ACK = \angle KCF$. Значит, $\triangle ACF$ – равнобедренный. $AC = CF$. Аналогично в $\triangle AEB$ $AB = EB$. KC и MB – медианы $\triangle ACF$ и $\triangle AEB$, значит, точки K и M являются серединами сторон AF и AE . Отсюда MK – средняя линия $\triangle AEF$. Тогда

$$MK = \frac{1}{2}EF = (EB + BC + CF) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$

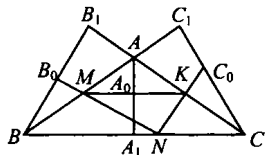
$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$. Значит, $MK = P_{\triangle ABC}/2$, ч.т.д.



- 863.** Если MN , MK , KN – средние линии в $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$, $MK \parallel BC$, $KN \parallel AB$ и по № 819 середины данных отрезков лежат на сторонах $\triangle MNK$. Если бы эти середины лежали на одной прямой, то эта прямая пересекла бы все три стороны $\triangle MNK$, что невозможно (по аксиоме Паша).



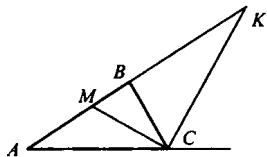
- 864.** Если данный треугольник ABC – остроугольный, то основания его высот лежат внутри сторон, получаем противоречие с № 863. Если в $\triangle ABC$ $\angle A$ – тупой, то середина A_0 высоты AA_1 лежит на стороне треугольника MNK , образованного средними линиями. Если бы середины A_0 , B_0 , C_0 высот лежали на одной прямой, то эта прямая, пересекающая сторону MK $\triangle MNK$, пересекала бы его стороны KN или NM в точках B_0 и C_0 , но эти точки лежат на их продолжениях. Следовательно, $\triangle ABC$ – прямоугольный.



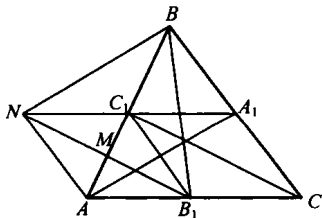
- 865.** Так как $BC = 2AC$, то по теоремам о биссектрисах (№ 535, 619)

$$AM = 2MB, AK = 2BK, \text{ откуда } BK = AB = 3MB, MB = AM/2 = AB/3 = MK/4.$$

Следовательно, $S_{BCM} = S_{ACM}/2 = S_{ABC}/3 = S_{CMK}/4$.



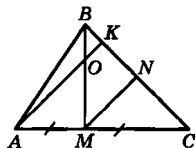
- 866.** Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон $\triangle ABC$, C_1 – середина NA_1 , M – середина AC_1 , тогда AA_1BN и B_1NC_1C – параллелограммы, $NB = AA_1$, $B_1N = CC_1$, $\triangle NBB_1 = \triangle EFG$ по трем сторонам. $S_{ABB_1} = S_{ABC}/2$,



$$S_{AMB_1} = S_{AC_1C}/4 = S_{ABC}/8; S_{MBB_1} = S_{ABB_1} - S_{AMB_1} = 3S_{ABC}/8,$$

$$S_{NBB_1} = 2S_{MBB_1} = 3S_{ABC}/4, \text{ значит } S_{EFG}/S_{ABC} = 3/4.$$

867. Проведем $MN \parallel AK$. $BO : OM = 1 : 2$ (по условию). Значит, $BK : KN = 1 : 2$ или $KN = 2BK$. Рассмотрим $\triangle AKC$: $MN \parallel AK$ (по построению). Значит, MN – средняя линия $\triangle AKC$. $NC = KN = 2BK$.

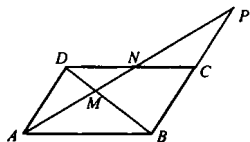


$$BC = BK + KN + NC = 5BK \text{ и } \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

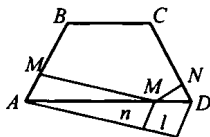
У $\triangle ABC$ и $\triangle ABK$ общая высота (из вершины A), поэтому

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{5}.$$

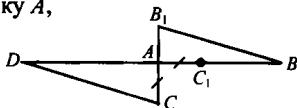
868. $\triangle MND$ подобен $\triangle MAB$, откуда $AM/MN = MB/DM$, $\triangle MAD$ подобен $\triangle MBP$, откуда $MB/DM = MP/AM$, следовательно, $AM/MN = MP/AM$, $AM^2 = MN \cdot NP$.



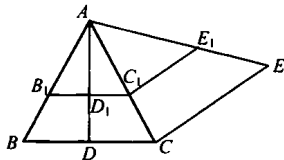
869. Если X – искомая точка, $XM \perp AB$, $XN \perp DC$, то $\triangle AXM$ подобен $\triangle DXN$, $AX/XD = XM/XN = n/l$. Точка X делит отрезок AD в данном отношении (№ 584).



870. На прямой, проходящей через точку A , откладываем отрезки $AC_1 = AC$ и $C_1B_1 = CB$, после чего проводим $C_1D \parallel BB_1$. Тогда $AABB_1$ подобен $AADC_1$, откуда $AB/AD = AB_1/AC_1$, $AB/AD + 1 = AB_1/AC_1 + 1$, $(AB + AD)/AD = (AB_1 + AC_1)/AC_1$, $DB/AD = C_1B_1/AC$, D – искомая точка. Если C – середина AB , то $DB = AD$, хотя A и B – различные точки; задача решения не имеет.



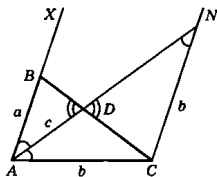
871. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = AC$, $AD \perp BC$, $\angle A = \alpha$, $BC + AD = s$. Строим равнобедренный $\triangle AB_1C_1$ с углом $A = \alpha$ и высотой AD_1 . На луче с вершиной A откладываем отрезки $AE_1 = B_1C_1 + AD_1$ и $AE = s$, проводим $EC \parallel E_1C_1$, $CB \parallel C_1B_1$.



872. **Анализ.** Даны отрезки a, b и c , равные AB, AC и AD соответственно, где AD – биссектриса $\angle A$. $CN \parallel AB$. $\triangle ANC$ – равнобедренный, где $AC = CN = b$.

$\triangle ABD \sim \triangle NCD$:

$$\frac{DN}{AD} = \frac{CN}{AB}; DN = \frac{AD \cdot CN}{AB}, \text{ т. е. } DN = \frac{c \cdot b}{a}.$$



Построение. Строим $\triangle ANC$ по трем сторонам ($AC = CN = b$,

$AN = \frac{c \cdot b}{a} + c$). Откладываем луч AX так, что $\angle XAN = \angle NAC$,

отмечаем на луче AX точку B , чтобы $AB = a$. $\triangle ABC$ – искомый.

Доказательство. Из подобия треугольников ABD и NCD :

$$\frac{AB}{CN} = \frac{AD}{ND}; AD = \frac{AB \cdot ND}{CN} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c \cdot b}{a} = c. AD \text{ – биссектриса}$$

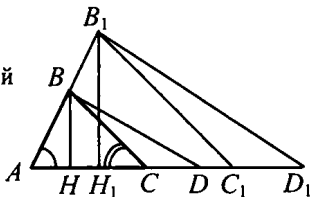
$\triangle ABC$. $AB = a, AC = b$ (по построению).

Исследование. Если можно построить $\triangle ANC$, то можно построить искомый треугольник. Тогда построение возможно в

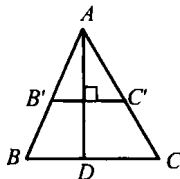
случае: $AN < AC + CN$. $c + \frac{c \cdot b}{a} < 2b$ или $c < \frac{2ba}{a+b}$.

Если $c \geq \frac{2ba}{a+b}$, то решений нет; если $c < \frac{2ba}{a+b}$, то решение одно.

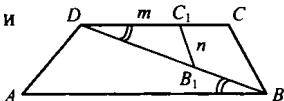
873. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$,
 $BH + AC = s$. Строим $\triangle AB_1C_1$
 углами $\angle A = \alpha$, $\angle C_1 = \gamma$ и высотой
 B_1H_1 . На луче AC откладываем
 отрезки $AD_1 = B_1H_1 + AC_1$
 $AD = s$, проводим
 $DB \parallel D_1B_1, CB \parallel C_1B_1$.



874. Пусть a, b, c – стороны треугольника,
 h_a, h_b, h_c – проведенные к ним высоты.
 S – площадь; тогда $a = 2S/h_a, b = 2S/h_b$,
 $c = 2S/h_c, a : b : c = a : 1/h_a : 1/h_b : 1/h_c$.
 Строим отрезок $c' = h_a h_b / h_c$, пользуясь тем,
 что $h/h_a = h_b/c'$, строим $\triangle AB'C'$ по сторонам
 $B'C' = h_b, AC' = h_a, AB' = c'$ и строим $\triangle ABC$:
 $AD \perp B'C', AD = h_a, CB \parallel C'B', D \notin BC$.



875. Строим $\triangle ABD$ по сторонам AB , AD и углу A . Строим $\triangle DB_1C_1$ по углу $\angle B_1DC_1 = \angle ABD$ и сторонам $DC_1 = m$; $B_1C_1 = n$ (может быть одно, два или ни одного решения). Проводим $CB \parallel C_1B_1$.

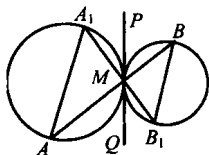


876. Пусть a – сторона квадрата, p и q – диагонали ромба. По условию и согласно № 476 $pq/2 = a^2$, $p/q = m/n$, отсюда $p = qm/n$, $q = \sqrt{2a^2n/m}$. Сначала строим отрезок $k = 2a^2/m$, пользуясь тем, что $m/a = 2a/k$ (№ 556), затем строим отрезок $q = \sqrt{nk}$, используя №№ 668, 669 и отрезок p , пользуясь тем, что $n/q = m/p$ (№ 556). Наконец, строим ромб по его диагоналям p и q , пользуясь теоремой из параграфа 46.

Задачи к главе VIII

877. Пусть PQ – общая касательная.

Тогда по №664 $\angle A = \angle A_1M/2 = \angle A_1MP = \angle B_1MQ = \angle MB_1/2 = \angle B$, но из $\angle A = \angle B$ следует, что $AA_1 \parallel BB_1$.



878. а) $\angle ADB = \frac{\angle AB}{2}$; $\angle BAC = \frac{\angle AB}{2}$

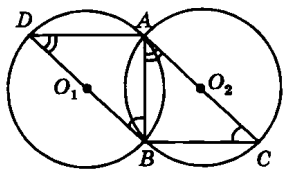
(как угол между хордой AB и касательной AC). Поэтому $\angle ADB = \angle BAC$. Аналогично $\angle DBA = \angle ACB$. $\triangle ADB \sim \triangle ABC$.

Значит, $\angle DAB = \angle ABC$. Эти углы – накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AB . Значит, $AD \parallel BC$, ч.т.д.

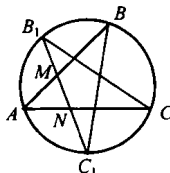
б) $\triangle ABC \sim \triangle ABD$, тогда справедливо равенство:

$$AB : BC = AD : AB; AB^2 = AD \cdot BC, \text{ ч.т.д.}$$

в) $\triangle ABC \sim \triangle ABD$. Получаем два равенства: $BD : AC = AB : BC$; $BD : AC = AD : AB$. Умножим их: $BD^2 : AC^2 = (AB : BC) (AD : AB) = AD : BC$, т. е. $BD^2 : AC^2 = AD : BC$, ч.т.д.



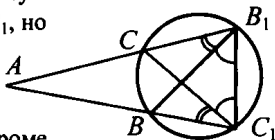
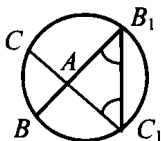
879. В $\triangle NB_1C$ внешний $\angle ANB_1 = \angle B_1 + \angle C_1$, аналогично $\angle AMC_1 = \angle B + \angle C_1$, $\angle B_1 = \angle B = \angle CC_1/2 = (\angle AC/2)/2 = \angle AC/4$, $\angle C = \angle C_1 = \angle AB/4$. Поэтому в $\triangle AMN$ $\angle ANB_1 = \angle AMC_1$, следовательно, $AM = AN$.



- 880.** Пусть точка A пересечения прямых BB_1 и CC_1 лежит внутри круга. Так как $BB_1 = CC_1$, то $\cup BC_1B_1 = \cup CB_1C_1$, но $\cup BC_1 = \cup BC_1B_1 - \cup C_1B_1$ и $\cup B_1C = \cup C_1B_1C - \cup C_1B_1$, следовательно, $\cup BC_1 = \cup B_1C$. Поэтому в $\triangle AB_1C_1$ $\angle B_1 = \angle C_1$, откуда $AC_1 = AB_1$, но тогда также и $AC = AB$.

Пусть A лежит вне круга.

Так как $BB_1 = CC_1$, то $\cup BB_1 = \cup CC_1$, следовательно, $\angle BC_1B_1 = \angle C_1B_1C$, кроме того, $\angle CC_1B = \angle BB_1C$, значит, в $\triangle AB_1C_1$ $\angle AC_1B_1 = \angle AB_1C_1$, откуда $AC_1 = AB_1$, но тогда также и $AC = AB$.

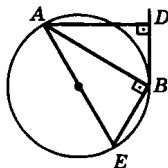


- 881.** Проведем диаметр AE окружности. Рассмотрим $\triangle ABE$ и $\triangle ABD$; $\angle B = \angle D = 90^\circ$.

$$\angle AEB = \angle ABD = \frac{\cup AB}{2} \quad (\text{задача 878}).$$

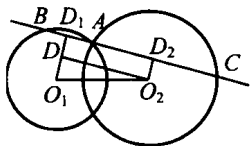
$\triangle ABE \sim \triangle ABD$ и справедливо равенство:

$$AE : AB = AB : AD; \quad \frac{AB^2}{AD} = AE. \quad \text{Поэтому для}$$



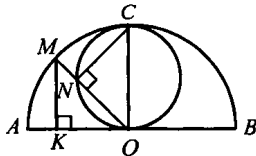
всех хорд AB величина $\frac{AB^2}{AD}$ имеет одно значение, равное диаметру окружности, ч.т.д.

- 882.** Если $O_1D_1 \perp BC$, $O_2D_2 \perp BC$, $O_2D \perp O_1D_1$, то $D_1D_2 = D_1A + AD_2 = AB/2 + AC/2 = BC/2$. Следовательно, $BC = 2D_1D_2 = 2O_2D$, но $O_2D \leq O_1O_2$. Поэтому BC будет наименьшим, если O_2D совпадет с O_1O_2 , но тогда $BC \parallel O_1O_2$.



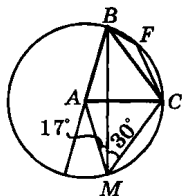
- 883.** Пусть радиус $OC \perp AB$, N – точка пересечения OM и окружности с диаметром OC , $MK \perp AB$. Тогда $OM = OC$, $\angle K = \angle N = 90^\circ$, $\angle KMO = 90^\circ - \angle KOM = \angle COM$; поэтому $\triangle KMO \sim \triangle NOC$ и $ON = MK$.

Обратно, если на OM отложить от O отрезок $ON_1 = MK$, то $\triangle KMO \sim \triangle N_1OC$ по 1-му признаку, $\angle OCN_1 = \angle KOM = \angle OCN$ и N совпадает с N_1 .



884. Сделаем дополнительное построение.

Проведем окружность радиусом AB и центром в точке A . $\angle ABC = 60^\circ$ (т. к. $\triangle ABC$ равносторонний), $\angle BMC = 30^\circ$ – по условию. Значит, $\cup BC = 60^\circ$. На $\cup BC$ возьмем произвольную точку F . $\angle BFC$ опирается на дугу BC . $\cup BC = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ и $\angle BFC = 150^\circ$.



Сумма противоположных углов четырехугольника $MBFC$ равна 180° . Значит, $\angle MBC + \angle BCM = 180^\circ$. Через точки B и F проходит только одна окружность с центром в точке A и радиусом AB . Значит, точка M лежит на окружности.

Рассмотрим $\triangle ABM$: $AB = AM = r$. $\triangle AMB$ – равнобедренный: $\angle AMB = \angle ABM = 17^\circ$. $\angle BAM = 180^\circ - (17^\circ + 17^\circ) = 146^\circ$.

Сумма углов четырехугольника $ABCM$ равна 360° .

$\angle BCM = 360^\circ - 146^\circ - 30^\circ - 17^\circ - 60^\circ = 107^\circ$.

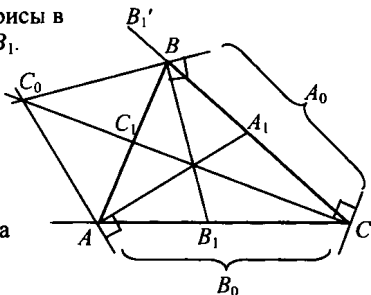
885. Пусть AA_1 и BB_1 – биссектрисы в $\triangle ABC$, $AC_0 \perp AA_1$, $BC_0 \perp BB_1$.

Тогда $\angle BAC_0 = 90^\circ - (\angle A)/2$, $\angle A_1'AC_0 = 180^\circ - \angle A - (90^\circ - (\angle A)/2) = 90^\circ - (\angle A)/2$.

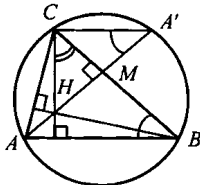
Значит, AC_0 – биссектриса внешнего угла в $\triangle ABC$ и точка C_0 одинаково удалена от его сторон AA_1' и AB .

Аналогично C_0 одинаково удалена от BB_1' и AB .

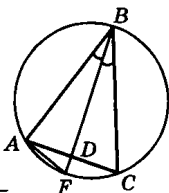
Следовательно, C_0 одинаково удалена от AA_1' и BB_1' , то есть от CA и CB , поэтому C_0 лежит на биссектрисе угла C . Для остальных биссектрис доказательство аналогично.



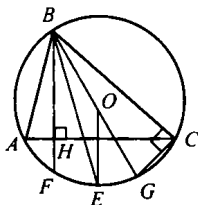
886. Если M – точка пересечения BC и HA' , то $\triangle A'MC = \triangle HMC$, откуда $\angle A' = \angle CHA'$, но $\angle CHA' = 90^\circ - \angle HCB = \angle ABC$. Следовательно, $\angle A' = \angle ABC$, значит, A' лежит на описанной около $\triangle ABC$ окружности (сравните с № 884). Для B' и C' доказательство аналогично.



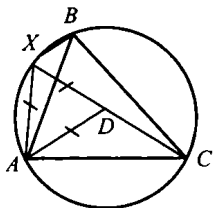
887. Около $\triangle ABC$ опишем окружность. BD пересекает эту окружность в точке F . $\angle BFA$ и $\angle BCA$ опираются на одну и ту же дугу AB , значит, они равны. $\angle ABF = \angle DBC$ (по условию). $\triangle ABF \sim \triangle DBC$. Имеем: $AB : BD = (BD + DF) : BC$, откуда получаем:
 $BD^2 + BD \cdot DF = AB \cdot BC$. Учтем, что $BD \cdot DF = AD \cdot DC$ (по теореме о пересекающихся хордах).
 Тогда: $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$, ч.т.д.



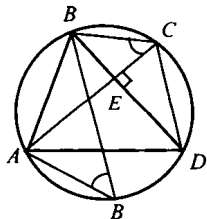
888. Биссектриса BE и перпендикуляр к стороне AC , проходящий через ее середину, пересекают дугу AC в одной точке – ее середине E , следовательно, $\sphericalangle AEF = \sphericalangle CEF$ (1). Если G – пересечение BO с окружностью, то $\angle ABF = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \sphericalangle BOC/2$, $\angle CBG = 90^\circ - \angle BGC = 90^\circ - \sphericalangle BOC/2$, откуда $\angle ABF = \angle CBG$, и $\sphericalangle AEF = \sphericalangle CEF$ (2). Вычитая (2) и (1), имеем: $\sphericalangle FEB = \sphericalangle GEB$.



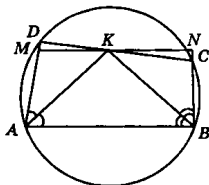
889. Пусть, например, $XC > XA$, $XC > XB$. Отложим $XD = XA$ на XC . Поскольку $\angle AXC = \angle ABC = 60^\circ$ как опирающиеся на $\sphericalangle AC$, то $\triangle AXD$ – равносторонний: $XD = XA = AD$. Так как еще и $\angle XAB = 60^\circ - \angle BAD = \angle CAD$, $\angle ABX = \angle ACX$ как опирающиеся на $\sphericalangle AX$, то $\triangle XAB \cong \triangle DAC$ и $DC = XB$.
 Тогда $XC = XD + DC = XA + XB$.



890. По условию $AC \perp BD$. Если BB_1 – диаметр, то $\angle AB_1B = \angle ACB$ как опирающиеся на $\sphericalangle AB$. Пусть E – точка пересечения AC и BD . Так как $\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle AB_1B$ и $\angle DBC = 90^\circ - \angle ACB$ из прямоугольных $\triangle ABB_1$ и $\triangle ECB$, то $\angle ABB_1 = \angle DBC$ и, следовательно, $\sphericalangle AB_1 = \sphericalangle DC$, $AB_1 = DC$. Из $\triangle ABB_1$ $DC^2 + AB^2 = AB_1^2 + AB^2 = BB_1^2$.



891. AK – биссектриса $\angle A$, BK – биссектриса $\angle B$. Точка K – точка пересечения биссектрис. Проведем $MN \parallel AB$ через точку K . Рассмотрим $\triangle DKM$ и $\triangle NKS$. Углы при вершине K в этих треугольниках равны как вертикальные.



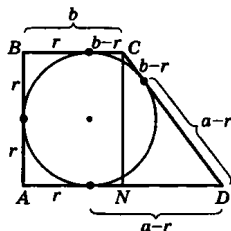
$\angle A + \angle C = 180^\circ$ (т. к. $ABCD$ – вписанный четырехугольник). $\angle A + \angle M = 180^\circ$

($AB \parallel MN$). Значит, $\angle C = \angle M$ и $\triangle DKM \sim \triangle NKS$.

Точка K равноудалена от прямых AB и CB , а также от AB и AD . Значит, равноудалена от AD и BC . Отсюда высоты в этих треугольниках, проведенные из вершины K , равны. $\triangle DKM = \triangle NKS$.

$\angle ABK = \angle BKN$ (как накрест лежащие). Значит, в $\triangle BKN$ $KN = NB$ (треугольник равнобедренный). Аналогично, $AM = MK$. Отсюда $CD = DK + KC = MK + KN = AM + BN = AD + BC$. Получим: $CD = AD + BC$, ч.т.д.

892. a и b – основания трапеции, CN – высота трапеции $ABCD$, $CN = 2r$. $DN = a - b$; $CD = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r$. По теореме Пифагора в $\triangle CDN$:



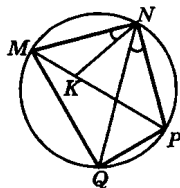
$(a - b)^2 + 4r^2 = (a + b - 2r)^2$, откуда

$$r = \frac{ab}{a+b}. \text{ Значит, радиус вписанной}$$

окружности равен r . Тогда:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{(a+b)}{2} = ab, \text{ ч.т.д.}$$

893. $MNPQ$ – данный четырехугольник. MP и NQ – диагонали. Построим $\angle MNK = \angle PNQ$. $\angle NMP = \angle NQP$ (опираются на NP).



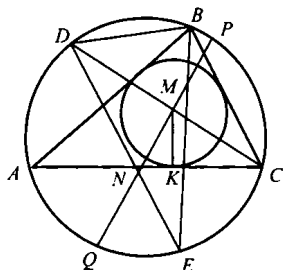
$\triangle MNK \sim \triangle QNP$ (по двум углам). Имеем равенство: $MN : NQ = MK : PQ$ или $MN \cdot PQ = NQ \cdot MK$ (1).

$\triangle NPK \sim \triangle MNQ$ (по двум углам). Получаем отношение:

$$NP : NQ = KP : MQ \text{ или } MQ \cdot NP = KP \cdot NQ \text{ (2).}$$

Сложим (1) и (2). Имеем: $MN \cdot PQ + MQ \cdot NP = NQ \cdot MK + KP \cdot NQ$; $MN \cdot PQ + MQ \cdot NP = NQ \cdot MP$, ч.т.д.

894. Пусть M – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$ (пересечение его биссектрис), N – центр описанной около него окружности. Продолжим MN до пересечения с описанной окружностью в точках P и Q , проведем через M хорду CD , а затем – диаметр DE описанной окружности.



Тогда $MQ \cdot MP = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2$, а так как по теореме о хордах $MQ \cdot MP = MC \cdot MD$, то $MC \cdot MD = R^2 - d^2$ (1). Поскольку $\angle DAB = \angle DCB = \angle C/2$ и $\angle MAB = \angle A/2$, то $\angle MAD = \angle MAB + \angle DAB = \angle A/2 + \angle C/2$. С другой стороны, для $\triangle AMC$ $\angle AMD = \angle MAC + \angle MCA = \angle A/2 + \angle C/2$. Поэтому $\angle MAD = \angle AMD$ и в $\triangle AMD$ $AD = MD$.

Но CD – биссектриса угла C , следовательно, $\sphericalangle AD = \sphericalangle DB$, откуда $AD = DB$. Таким образом, $MD = DB$ (2). Проведем $MK \perp AC$. Так как $\angle CKM = \angle EBD = 90^\circ$, $\angle DEB = \angle DCB = \angle MCK$, то $\triangle CMK$ подобен $\triangle EDB$, откуда $MC/MK = DE/DB$, $MC \cdot DB = MK \cdot DE$ (3). Из (1), (2) и (3)

$$R^2 - d^2 = MK \cdot DE = r \cdot 2R, \text{ откуда } d^2 = R^2 - 2Rr.$$

895. По свойству средней линии треугольника

$$A_2B_3 \parallel CH, A_2B_3 = CH/2, A_3B_2 \parallel CH, A_3B_2 = CH/2, A_2B_2 \parallel AB.$$

Следовательно,

$$A_2B_3 \parallel A_3B_2 \text{ и } A_2B_3 = A_3B_2 \text{ и } A_2B_3A_3B_2 -$$

параллелограмм, а так как $CH \perp AB$, то

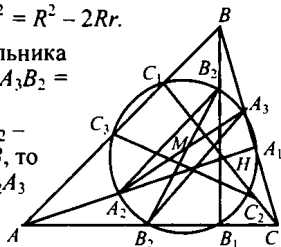
и прямоугольник. Его диагонали A_2A_3

и B_2B_3 равны и делятся в точке M

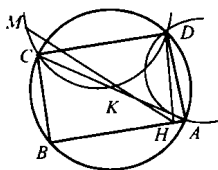
их пересечения пополам. Это

относится аналогично и к

отрезкам A_2A_3 и C_2C_3 . Поэтому окружность с центром M и радиусом MA_2 пройдет через точки $A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$. На ней лежат также и точки A_1, B_1, C_1 , например, поскольку A_1A_3 – ее диаметр и $\angle A_2A_1A_3 = 90^\circ$, то (ср. № 884) точка A_1 лежит на этой окружности.



896. Пусть H, K, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые, содержащие стороны $\triangle ABC$. Так как $\angle K = \angle H = 90^\circ$, то K и H ле-



жат на окружности с диаметром AD , следовательно, $\angle ADH = \angle AKH$ (1). Аналогично K и M лежат на окружности с диаметром DC , следовательно, $\angle MDC = \angle MKC$ (2).

Во вписанном четырехугольнике $\triangle BCD$ $\angle ADC = 180^\circ - \angle B$ (3), а в четырехугольнике $HBMD$

$\angle HDM = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle B$ (4). Из (3) и (4)

$\angle ADC = \angle HDM$, значит, $\angle ADH = \angle MDC$. Тогда из (1) и (2)

$\angle AKN = \angle MKC$, следовательно, точки H, K, M лежат на одной прямой.

897. Возьмем две окружности. Пусть O и

O_1 — их центры; R и R_1 — их радиусы. Окружности не пересекаются. Предположим, что $R = R_1$.

Пусть $R > R_1$. Проведем

окружность с центром в точке O и радиуса $R - R_1$. O_1K — касательная к этой окружности. $OK \perp O_1K$.

Через точки O и O_1 проведем

радиус OD (через точку K) и $O_1C \perp KO_1$. DC — касательная к двум данным окружностям.

KD и CO_1 равны по построению

и $KD \parallel CO_1$, т. к. $KD \perp KO_1$,

$CO_1 \perp KO_1$. Четырехугольник

$KDCO_1$ — параллелограмм,

$\angle O_1 = 90^\circ$. Значит, $KDCO_1$ —

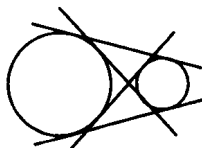
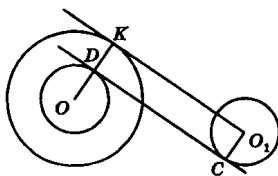
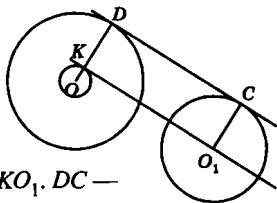
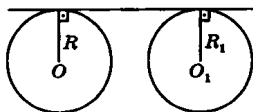
прямоугольник. DC — касатель-

ная к обеим окружностям (внешняя).

Построим внутреннюю касательную (центры окружностей лежат по разные стороны от касательной).

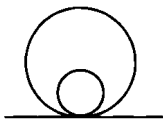
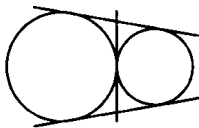
Сначала проводим окружность с центром в точке O радиусом $R + R_1$, затем

аналогично построению внешней касательной.



У окружностей четыре общих касательных.

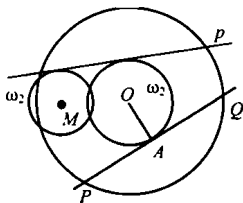
Если окружности имеют одну точку касания, то общих касательных у окружностей три или одна.



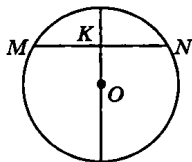
Если одна окружность целиком лежит в другой, то общих касательных у них нет.

Если окружности пересекаются (2 общие точки), то и касательных две.

898. Строим хорду $PQ = P_1Q_1$, проводим $OA \perp PQ$ и окружность ω_1 с центром O и радиусом OA . Строим окружность ω_2 с центром M и радиусом P_2Q_2 . Общая касательная к ω_1 и ω_2 (№ 897) – искомая прямая p .



899. K – данная точка. MN – хорда, проходящая через точку K . $MK = a$; $KN = b$. Тогда $a \cdot b = c$ (из теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд). От-



сюда получаем: $b = \frac{a}{c}$ и

$$MN = a + b = a + \frac{c}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \right)^2 + 2\sqrt{c}.$$

Если $\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \right)^2 = 0$, то MN принимает минимальное значение, т. е. $a = \frac{c}{a} = b$.

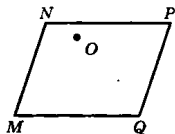
Таким образом, чтобы построить через данную точку наименьшую хорду, надо провести через эту точку диаметр окружности, а затем линию перпендикулярную диаметру. Эта линия и будет наименьшей хордой.

Задачи к главе IX

903. Решение приведено в учебнике.

904. $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Значит, стороны $MN \parallel PQ$ и данный четырехугольник – параллелограмм.



905. E_1 – середина стороны AB ,

$$\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}); \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \text{ Отсюда}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}. \text{ Значит,}$$

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}. \text{ Получаем:}$$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Таким образом, $EF \parallel GH$, значит $EFGH$ – параллелограмм.

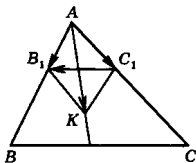
906. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\overrightarrow{AC_1} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$.

AC_1KB_1 – параллелограмм. $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ – единичные векторы, т. е. AC_1KB_1 – ромб.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$, поэтому \overrightarrow{AK} направлен вдоль диагонали ромба. Поэтому вектор направлен вдоль биссектрисы $\angle BAC$.

$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль другой диагонали ромба.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC_1}$ направлен вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A треугольника ABC , что и требовалось доказать.



907. а) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Докажем, что существуют такие числа k, l и m , что $k + l + m = 0$ (1),

$$k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (2). \text{ Так как } \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{AC} \text{ коллинеарны,}$$

то существует такое число n , что $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$. Тогда (1) и (2) выполняются при $k = n - 1, l = 1, m = -n$: $(n - 1) + 1 + (-n) = 0$,

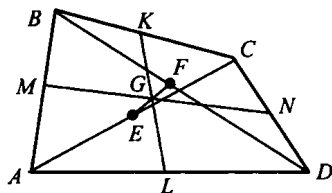
$$(n - 1)\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC} = n(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$= n \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

б) Пусть выполнены (1) и (2) и, например, $k \neq 0$. Тогда $m = -k - l$, $k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} - (k+l)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$,

$k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{l}{k}\overrightarrow{CB}$ точки A, B и C лежат на одной прямой.

908. Пусть E и F – середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, G – точка пересечения средних линий MN и KL . Если G_1 – середина MN , G_2 – середина KL , O – произвольная точка, то



по задаче № 1 из параграфа 84 $\overrightarrow{OG_1} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})/2 =$

$$= [(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})]/2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/4, \text{ ана-}$$

логично $\overrightarrow{OG_2} = (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL})/2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/4$. Сле-

довательно $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2}$. Так как $\overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})/2$ и

$\overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})/2$, то $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - 2\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, и согласно № 907 точки E и F и G лежат на одной прямой.

908. Пусть $BC = a$, $AC = b$,

$$AB = c, a > b > c, \overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{BA} = \vec{c},$$

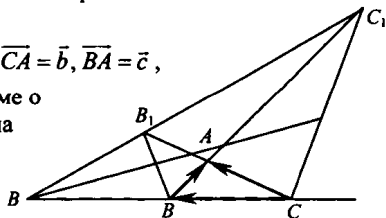
$CB = a$, $CA_1 = x$. По теореме о

биссектрисе внешнего угла

(№619) $CA_1/A_1B = AC/AB$,

$$x/(x-a) = b/c,$$

$$x = ab/(b-c). \text{ Так как}$$



\vec{a}/a – единичный вектор, то $\overrightarrow{CA_1} = \vec{a}(x/a) = \vec{a}[b/(b-c)]$ (1).

Аналогично $\overrightarrow{CB_1} = \vec{b}[a/(a-c)]$ (2), $\overrightarrow{BC_1} = \vec{c}[a/(a-b)]$. То-

гда $\overrightarrow{CC_1} = \vec{a} + \overrightarrow{BC_1} = \vec{a} + [a/(a-b)](\vec{b} - \vec{a}) = -[b/(a-b)]\vec{a} +$

$$= [a/(a-b)]\vec{b} \quad (3).$$

Из (1), (2) и (3): $(b-c)\vec{CA_1} + (c-a)\vec{CB_1} + (a-b)\vec{CC_1} = \vec{0}$, причем $(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$. Согласно № 907 точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

910. Если AA_1 – медиана, то $\vec{GA} = 2\vec{GA_1}$,

откуда $\vec{OA} - \vec{OG} = -2(\vec{OA_1} - \vec{OG})$;

согласно задаче 1 из параграфа 84

$\vec{OA_1} = (\vec{OB} + \vec{OC})/2$ (1), поэтому

$$\vec{OA} - \vec{OG} = -(\vec{OB} + \vec{OC}) + 2\vec{OG},$$

следовательно, $\vec{OG} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3$ (2). Согласно (1) век-

тор $\vec{OB} + \vec{OC}$ коллинеарен OA_1 , а векторы $\vec{OH} - \vec{OA} = \vec{HA}$ и

OA_1 коллинеарны как перпендикуляры к BC , поэтому эти векторы коллинеарны друг другу и отличаются лишь скаляр-

ным множителем: $\vec{OB} + \vec{OC} = k(\vec{OH} - \vec{OA})$ (3), аналогично

$\vec{OA} + \vec{OB} = l(\vec{OH} - \vec{OC})$ (4). Вычитая (4) из (3), имеем:

$$\vec{OC} - \vec{OA} = k\vec{OH} - k\vec{OA} - l\vec{OH} + l\vec{OC},$$

$$(k-l)\vec{OA} + (1-l)\vec{OC} + (l-k)\vec{OH} = \vec{0} \text{ при этом } (k-1) + (1-l) +$$

$+(l-k) = 0$, однако точки A , C и H не лежат на одной прямой, поэтому согласно № 907 $k-1 = 1-l = l-k = 0$, откуда $k = l = 1$ и

(3) принимает вид $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} - \vec{OA}$ или

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad (5). \text{ Из (2) и (5):}$$

$$\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG} = 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3 = 2\vec{GO} \text{ и, следовательно,}$$

$$HG/GO = 2.$$

