



ТОЛЬКО ДЛЯ
РОДИТЕЛЕЙ

Серия
РЕШЕБНИК

Домашняя работа по геометрии

8

«ГЕОМЕТРИЯ
7 — 9 классы»
Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов,
С.Б. Каганцев
и др.



А.Н. Прокопович

Домашняя работа по геометрии за 8 класс

**к учебнику «Геометрия. 7–9 классы:
учеб. для общеобразоват. учреждений /
[Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.].
— 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009»**

***Учебно-методическое
пособие***

*Издание четырнадцатое,
переработанное и исправленное*

***Издательство
«ЭКЗАМЕН»***

**МОСКВА
2010**

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

П78

Имена авторов и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации.).

Условия заданий приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал.

Изображение учебника «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации.).

Прокопович, А.Н.

П78 Домашняя работа по геометрии за 8 класс к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений»: учебно-методическое пособие / А.Н. Прокопович. — 14-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2010. — 191, [1] с. (Серия «Решбник»)

ISBN 978-5-377-03002-7

В пособии решены и в большинстве случаев подробно разобраны задачи и упражнения из учебника «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по геометрии.

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

Формат 84х108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 8,03. Усл. печ. л. 10,08. Тираж 30 000 экз. Заказ № 5477(6)

ISBN 978-5-377-03002-7

© Прокопович А.Н., 2010

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2010

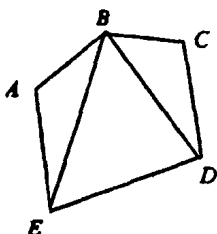
ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Четырехугольники	
§ 1. Многоугольники.....	4
§ 2. Параллелограмм и трапеция.....	6
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат.....	17
Глава VI. Площадь	
§ 1. Площадь многоугольника.....	36
§ 2. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции.....	39
§ 3. Теорема Пифагора.....	47
Глава VII. Подобные треугольники	
§ 1. Определение подобных треугольников.....	70
§ 2. Признаки подобия треугольников.....	77
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач.....	85
§ 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника.....	96
Глава VIII. Окружность	
§ 1. Касательная к окружности.....	115
§ 2. Центральные и вписанные углы.....	122
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника.....	133
§ 4. Вписанная и описанная окружности.....	139
Глава IX. Векторы	
§ 1. Понятие вектора.....	160
§ 2. Сложение и вычитание векторов.....	166
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач.....	174

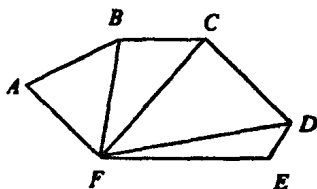
Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники

363.



$\triangle ABE$; $\triangle EBD$; $\triangle BCD$



$\triangle ABF$; $\triangle BFC$; $\triangle CFD$; $\triangle DFE$

364.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

а) $n = 5$; $(n-2) \cdot 180 = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$;

б) $n = 6$; $(n-2) \cdot 180 = (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$;

в) $n = 10$; $(n-2) \cdot 180 = (10-2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$,

где n — число углов.

365.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

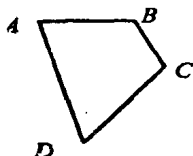
$\alpha n = (n-2) \cdot 180$; $360 = 180n - \alpha n$, откуда следует:

$$n = \frac{360}{180 - \alpha}$$

а) $\alpha_1 = 90^\circ$, то $n = 4$; б) $\alpha_2 = 60^\circ$, то $n = 3$;

в) $\alpha_3 = 120^\circ$, то $n = 6$.

366.



AB, BC, CD, AD = ?

Дано: ABCD — четырехугольник;

$P_{ABCD} = 8 \text{ см} = 80 \text{ мм}$;

$AD > AB$ на 5 мм;

$AD > BC$ на 4 мм;

$AD > CD$ на 3 мм.

Решение:

$AD = x$, тогда $CD = x - 3$, $BC = x - 4$, $AB = x - 5$,

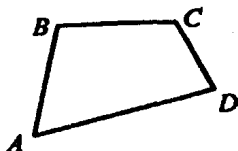
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$,

$80 = x - 5 + x - 4 + x - 3 + x$; $92 = 4x$; $x = 23$, следовательно,

$AD = 23\text{мм}$; $CD = 20\text{мм}$; $BC = 19\text{мм}$; $AB = 18\text{мм}$.

Ответ: 18, 19, 20, 23.

367.



Дано:

$P_{ABCD} = 66\text{см}$, $BC > CD$ на 8см ;

$BC < AB$ на 8см ,

$AD > CD$ в три раза;

$AB, BC, CD, AD = ?$

Решение:

$BC = x$; тогда $AB = x + 8$; $CD = x - 8$; $AD = 3(x - 8)$;

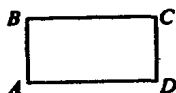
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$;

$x + 8 + x + x - 8 + 3 \cdot (x - 8) = 66$, $6x = 90$; $x = 15$, следовательно,

$BC = 15\text{см}$, $CD = 7\text{см}$, $AB = 23\text{см}$, $AD = 21\text{см}$.

Ответ: 7, 15, 21, 23.

368.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$;

$\angle A = ?$

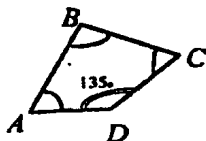
Решение: по формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

$$(n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

По условию $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, следовательно, $\angle A = 360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

369.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

$\angle A = \angle B = \angle C$,

$\angle D = 135^\circ$;

$\angle A, \angle B, \angle C = ?$

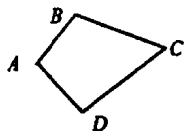
Решение:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ, \angle A + \angle B + \angle C + 135^\circ = 360^\circ.$$

Пусть $\angle A = \angle B = \angle C = x$, тогда $3x = 360^\circ - 135^\circ$; $3x = 225^\circ$;
 $x = 75^\circ$, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$.

Ответ: 75° .

370.



Дано: ABCD – четырехугольник;

$$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 2 : 4 : 5;$$

$$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$$

Решение:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ,$$

пусть $\angle A = x$, тогда $\angle B = 2x$, $\angle C = 4x$, $\angle D = 5x$, следовательно,

$$x + 2x + 4x + 5x = 360^\circ; 12x = 360^\circ; x = 30^\circ, \text{ откуда}$$

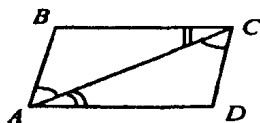
$$\angle A = 30^\circ, \angle B = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ, \angle C = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle D = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ.$$

Ответ: 30° ; 60° ; 120° и 150° .

§ 2. Параллелограмм и трапеция

371.



а) Дано: ABCD – четырехугольник;

$$\angle BAC = \angle ACD,$$

$$\angle BCA = \angle DAC.$$

Доказать: ABCD – параллелограмм

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$:

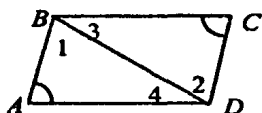
по условию: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle CAD$, AC – общая;

следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам:

$\triangle ABC = \triangle CDA$, откуда, из определения равных треугольников, следует: $BC = AD$.

Т. к. $\angle BAC = \angle ACD$ – накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, следовательно, $BC \parallel AD$.

Т.к. $BC = AD$ и $BC \parallel AD$ (из 2), то по 1-му признаку параллелограмма ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.



б) Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
 $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.
 Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

$AB \parallel CD$ (по условию), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие),

т. к. сумма углов треугольника равна 180° , то $\angle 3 = \angle 4$.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$

BD – общая, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам $\triangle ABD = \triangle CBD$,

по определению равных треугольников $AB = CD$

$AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то по 1-му признаку параллелограмма $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

372.



Дано: $P_{ABCD} = 48 \text{ см}$;
 AB , $BC = ?$

Решение:

а) $AD > AB$ на 3 см.

Если $AB = x$, то $AD = x + 3$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е.

$48 = 2 \cdot (x + (x + 3))$; $2x = 21$; $x = 10,5 \text{ см}$;

$AB = CD = x = 10,5 \text{ см}$; $AD = BC = x + 3 = 13,5 \text{ см}$.

б) $AD > AB$ на 7 см ($AD - AB = 7$).

Если $AB = x$, то $AD = x + 7$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е.

$48 = 2 \cdot (x + (x + 7))$; $2x = 17$; $x = 8,5 \text{ см}$;

$AB = CD = x = 8,5 \text{ см}$; $AD = BC = x + 7 = 15,5 \text{ см}$.

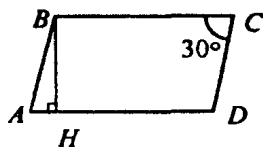
в) $AD > AB$ в 2 раза.

Если $AB = x$, то $AD = 2x$ и $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, т.е.

$48 = 2 \cdot (x + 2x)$; $3x = 24$; $x = 8 \text{ см}$;

$AB = CD = x = 8 \text{ см}$; $AD = BC = 2x = 16 \text{ см}$.

373.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

$P_{ABCD} = 50 \text{ см}$;

$\angle C = 30^\circ$, $BH \perp CD$, $BH = 6,5 \text{ см}$;

AB , $BC = ?$

Решение:

По свойству параллелограмма $\angle C = \angle A = 30^\circ$.

Пусть $\triangle ABH$ – прямоугольный, где $\angle H = 90^\circ$;

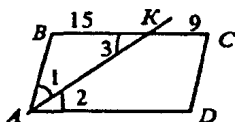
$\angle A = 30^\circ$, следовательно, $BH = \frac{1}{2} AB$, т.е.

$$AB = 2 \cdot BH = 2 \cdot 6,5 = 13 \text{ см.}$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD), 50 = 2 \cdot (13 + AD); 13 + AD = 25; AD = 12.$$

Ответ: 13 см, 12 см.

374.



Дано: P_{ABCD} – параллелограмм.

AK – биссектриса $\angle A$;

BK = 15 см, KC = 9 см;

$P_{ABCD} = ?$

Решение:

т. к. ABCD – параллелограмм, то $BC \parallel AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие);

$\angle 2 = \angle 1$ (по свойству биссектрисы), т.е. $\angle 2 = \angle 1$, то и $\angle 1 = \angle 3$, следовательно $\triangle ABK$ – равнобедренный, т.е.

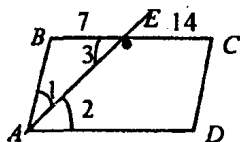
$AB = BK = 15$ см, а т.к. $AB = CD$, то $CD = 15$ см;

$BC = BK + KC = 15 + 9 = 24$ см, $BC = AD = 24$ см.

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD); P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 24) = 2 \cdot 39 = 78 \text{ см.}$$

Ответ: 78 см.

375.



Дано: ABCD – параллелограмм;

AE – биссектриса $\angle A$;

BE = 7 см, EC = 14 см;

$P_{ABCD} = ?$

Решение:

т. к. ABCD параллелограмм, то $BC \parallel AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие);

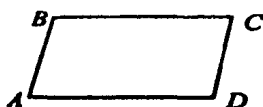
$\angle 2 = \angle 1$ (по свойству биссектрисы), следовательно, $\angle 1 = \angle 3$,

значит, $\triangle ABE$ – равнобедренный, тогда $AB = BE = 7$ см;

$BC = 7 + 14 = 21$ см, $AD = BC = 21$ см;

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (7 + 21) = 2 \cdot 28 = 56 \text{ см.}$$

Ответ: 56 см.



Дано: ABCD – параллелограмм;
 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$

Решение:

а) $\angle A = 84^\circ$;

по свойству углов параллелограмма:

$\angle A = \angle C = 84^\circ$; $\angle B = \angle D$;

т.к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$, следовательно, $\angle D = 96^\circ$

Ответ: $84^\circ, 96^\circ, 84^\circ, 96^\circ$.

б) $\angle A - \angle B = 55^\circ$;

$$\begin{cases} \angle A - \angle B = 55^\circ \\ \angle A + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ (55^\circ + \angle B) + \angle B = 180^\circ \end{cases}; \begin{cases} \angle A = 55^\circ + \angle B \\ 2\angle B = 125^\circ \end{cases};$$

$$\begin{cases} \angle A = 117^\circ 30' \\ \angle B = 62^\circ 30' \end{cases}; \angle A = \angle C = 117^\circ 30'; \angle B = \angle D = 62^\circ 30'.$$

Ответ: $117^\circ 30', 62^\circ 30', 117^\circ 30', 62^\circ 30'$.

в) $\angle A + \angle C = 142^\circ$;

по свойству параллелограмма: $\angle A = \angle C$,

следовательно: $\angle A = \angle C = 142^\circ : 2 = 71^\circ$;

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ (свойство параллелограмма);

$\angle B = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$, $\angle D = \angle B = 109^\circ$.

Ответ: $71^\circ, 109^\circ, 71^\circ, 109^\circ$.

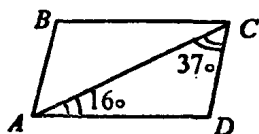
г) $\angle A = 2\angle B$;

по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180^\circ$,

$2\angle B + \angle B = 180^\circ$; $3\angle B = 180^\circ$; $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = \angle B = 60^\circ$,

$\angle A = 2\angle B = 120^\circ$; $\angle C = \angle A = 120^\circ$.

Ответ: $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.



д) если $\angle CAD = 16^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$.

$\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180^\circ$

$16^\circ + 37^\circ + \angle D = 180^\circ$; $\angle D = 127^\circ$;

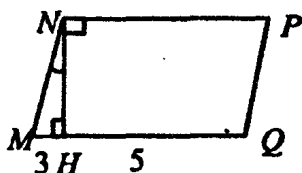
$\angle B = \angle D = 127^\circ$;

по свойству параллелограмма:

$\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle A + 127^\circ = 180^\circ$, $\angle A = 53^\circ$, $\angle C = \angle A = 53^\circ$.

Ответ: $53^\circ, 127^\circ, 53^\circ, 127^\circ$.

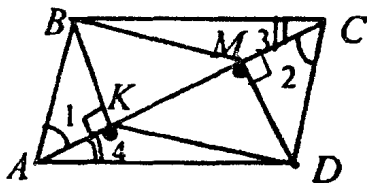
377.



Дано:

 $NH \perp MQ$, $\angle MNH = 30^\circ$; $MH = 3\text{ см}$, $HQ = 5\text{ см}$; MN , $MQ = ?$ $\angle M$, $\angle N = ?$ Решение: $\triangle MNH$ – прямоугольный; $\angle M + \angle N + \angle H = 180^\circ$; $\angle M = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$;т. к. $\angle N = 30^\circ$, то $MN = 2MH$, $MN = 2 \cdot 3 = 6\text{ см}$; $MN = QP = 6\text{ см}$, $\angle MNP = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$, $MQ = 3 + 5 = 8\text{ см}$; $NP = MQ = 8\text{ см}$.Ответ: $MN = QP = 6\text{ см}$; $\angle M = \angle P = 60^\circ$; $MQ = NP = 8\text{ см}$; $\angle N = \angle Q = 120^\circ$.

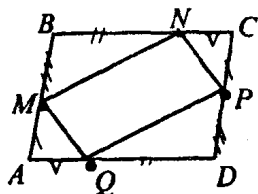
379.



Дано:

 $BK \perp AC$, $DM \perp AC$.Доказать: $BMDK$ –
параллелограмм.Доказательство:Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle CDM$ $AB = CD$; $AB \parallel CD$ (по 1-му признаку параллелограмма); AC – общая, следовательно $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей AC),значит, $\triangle ABK = \triangle CDM$ (по гипотенузе и остр. углу),тогда $BK = MD$ (из определения равных треугольников).Рассмотрим $\triangle CBM$ и $\triangle ADK$: $AD = CB$; $AD \parallel CB$ (по 1-му признаку параллелограмма); AC – общая, следовательно, $\angle 4 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AC), следовательно, $\triangle ADK = \triangle CBM$ (по гипотенузе и острому углу),следовательно, $KD = BM$; $BK = MD$; $KD = BM$, значит, $BMDK$ – параллелограмм, ч.т.д.

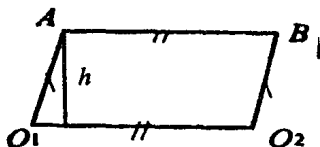
380.

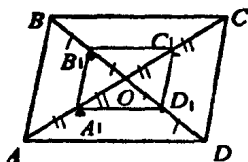


Дано:

 $M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in AD;$ $AM = CP, BN = DQ,$ $BM = DP, NC = QA.$ Доказать: $ABCD, MNPQ$ – параллелограммы.Доказательство: $BC = BN + NC = DQ + QA = AD; BC = AD;$ $AB = AM + MB = PC + DP = DC; AB = DC;$ следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.Т. к. $ABCD$ – параллелограмм, то по свойству параллелограмма $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D.$ Рассмотрим $\triangle AMQ$ и $\triangle CPN;$ $AM = CP, AQ = CN, \angle A = \angle C,$ значит, $\triangle AMQ = \triangle CPN$ (по 2 сторонам и углу между),следовательно, $MQ = NP.$ Рассмотрим $\triangle QPD$ и $\triangle MBN:$ $MB = DP, BN = QD, \angle B = \angle D,$ следовательно, $\triangle MBN = \triangle QPD$ (по 2 сторонам и углу между),следовательно, $MN = QP;$ $MQ = NP, MN = QP,$ тогда $MNPQ$ – параллелограмм, ч.т.д.

381.

Дано: $O_1A = O_2B,$ $AB = O_1O_2.$ Доказать: $AB \parallel O_1O_2.$ Доказательство: по условию $O_1A = O_2B; AB = O_1O_2,$ следовательно, ABO_2O_1 – параллелограмм,значит, $AB \parallel O_1O_2.$ $AN = h$ – высота параллелограмма, $R \leq h \leq 0$, где R – радиус колеса.Если $h = R$, то ABO_1O_2 – прямоугольник,если $h = 0$, то AB и O_1O_2 лежат на одной прямой.



Дано: $A_1 \in OA$, $B_1 \in OB$,
 $C_1 \in OC$, $D_1 \in OD$, $AA_1 = A_1O$, $BB_1 = B_1O$,
 $CC_1 = C_1O$, $DD_1 = D_1O$.

Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм

Доказательство:

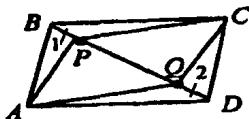
$ABCD$ – параллелограмм, следовательно, по свойству диагоналей параллелограмма: $AO = OC$, $BO = OD$;

$A_1O = \frac{1}{2} AO$ и $C_1O = \frac{1}{2} OC$, следовательно, $A_1O = C_1O$,

$B_1O = \frac{1}{2} OB$ и $D_1O = \frac{1}{2} OD$, следовательно, $B_1O = D_1O$;

$B_1D_1 \cap A_1C_1 = O$, $A_1O = C_1O$, $B_1O = D_1O$,
 следовательно: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм, ч.т.д.

383.



Дано:

$PQ \in BD$, $PB = QD$.

Доказать: $APCQ$ – параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABP$ и $\triangle CDQ$, по признаку параллелограмма
 $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;

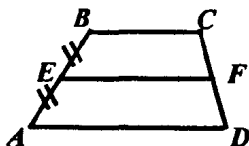
$BP = QD$, $\angle 1 = \angle 2$, (накрест лежащие углы при пересечении
 $AB \parallel CD$ с секущей BD),

т.е. $\triangle ABP = \triangle CDQ$ (по 2 сторонам и углу между),
 следовательно, $AP = CQ$.

Аналогично, через $\triangle BPC$ и $\triangle ADQ$ получим $PC = AQ$;

$AP = CQ$, $PC = AQ$, следовательно, по признаку
 $APCQ$ – параллелограмм, ч.т.д.

386.



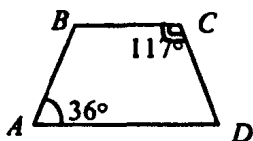
Дано:

 $E \in AB, AE = EB;$ $F \in CD, CF = FD.$ Доказать: $EF \parallel AD.$ Доказательство:

Пусть E – середина AB . Проведем прямую $EF \parallel AD \parallel BC$. Точка F – середина CD по т. Фалеса. Докажем, что EF – единственный.

Через точки E и F можно провести только одну прямую (аксиома), т.е. отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции $ABCD$ параллелен основаниям, ч.т.д.

387.



Дано:

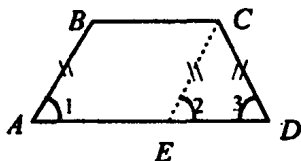
 $\angle A = 36^\circ, \angle C = 117^\circ;$ $\angle B = ?$ $\angle D = ?$ Решение:

$AD \parallel BC, \angle A + \angle B = 180^\circ; 36^\circ + \angle B = 180^\circ; \angle B = 144^\circ;$

$\angle C + \angle D = 180^\circ, 117^\circ + \angle D = 180^\circ; \angle D = 63^\circ.$

Ответ: $144^\circ, 63^\circ.$

388.



Дано:

 $AB = CD.$ Доказать: 1) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle C;$ 2) $AC = BD.$ Доказательство:

Проведем $CE \parallel AB,$

$ABCE$ – параллелограмм, т.е. $AB \parallel CE$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные,

т. к. $\triangle CED$ – равнобедренный, то $\angle 2 = \angle 3$, и, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. $\angle A = \angle D;$

$AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle D + \angle C = 180^\circ$,

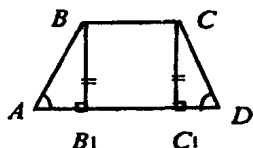
$\angle B = 180^\circ - \angle A$, $\angle C = 180^\circ - \angle D$,

т.к. $\angle A = \angle D$, то $\angle B = \angle C$.

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$: $AB = CD$, AD – общая,

$\angle A = \angle D$, следовательно, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно, $BD = AC$.

389.



Дано:

а) $\angle A = \angle D$,

$\angle B = \angle C$;

б) $AC = BD$.

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство:

а) проведем $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$,

BCC_1B_1 – прямоугольник.

Рассмотрим $\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$;

$BB_1 = CC_1$ (из прямоугольника BCC_1B_1), $\angle A = \angle D$, следовательно,

$\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ (по катету и острому углу), следовательно,

$AB = CD$, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим $\triangle ACC_1$ и $\triangle DBB_1$

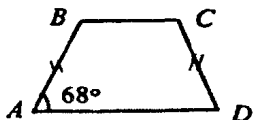
$AC = BD$, $CC_1 = BB_1$, следовательно, $\triangle ACC_1 = \triangle DBB_1$ (по катету и гипотенузе), следовательно, $AC_1 = B_1D$;

$AB_1 = AC_1 - B_1C_1$, $C_1D = B_1D - B_1C_1$, следовательно $AB_1 = C_1D$

Рассмотрим $\triangle ABB_1$ и $\triangle DCC_1$;

$BB_1 = CC_1$, $AB_1 = DC_1$, следовательно, $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ (по двум катетам), следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.

390.



Дано:

$\angle A = 68^\circ$, $AB = CD$;

$\angle B$, $\angle C$, $\angle D = ?$

Решение:

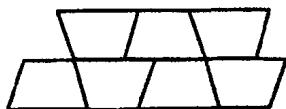
трапеция $ABCD$ равнобедренная, следовательно, $\angle A = \angle D = 68^\circ$,

а $\angle B = \angle C$,

$\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$; $\angle C = \angle B = 112^\circ$.

Ответ: 112° , 112° , 68° .

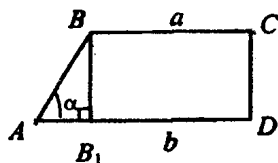
391.



Условие задачи сформулировано некорректно. Доказательство невозможно.

Пример! Пусть S – площадь паркетной плитки в виде равнобедренной трапеции, S_1 – некая площадь, ограниченная стенами. Тогда при $S > S_1$ паркет уложить нельзя.

392.



Дано:

$$\angle D = 90^\circ, AD = b,$$

$$BC = a, \angle A = \alpha;$$

$$\text{а) } AB = ?$$

$$\text{б) } CD = ?$$

Решение:

$$\text{а) } a = 4 \text{ см, } b = 7 \text{ см, } \alpha = 60^\circ$$

проведем: $BB_1 \perp AD$; $AB_1 = AD - DB_1$;

$AB_1 = 7 - 4 = 3 \text{ см}$, в $\triangle ABB_1$ $\angle A = 60^\circ$ (по усл.), то $\angle B = 30^\circ$, следовательно, $AB_1 = \frac{1}{2} AB$ (свойство прямоугольного треугольника), т.е. $AB = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$.

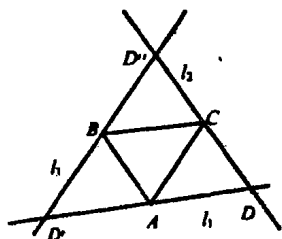
Ответ: 6 см.

$$\text{б) если } a = 10 \text{ см, } b = 15 \text{ см, } \alpha = 45^\circ; AB_1 = AD - DB_1;$$

$AB_1 = 15 - 10 = 5 \text{ см}$, следовательно $CD = 5 \text{ см}$ (свойство прямоугольника).

Ответ: 5 см.

394.



$ABCD$; $AD'BC$; $ABD''C$.

Построение:

1) Соединим точки A, B, C отрезками, получим $\triangle ABC$;

2) проведем прямые $l_1 \parallel BC$; $l_2 \parallel AB$; $l_3 \parallel AC$

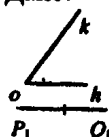
3) $l_1 \cap l_2 = D$, $l_1 \cap l_3 = D'$, $l_2 \cap l_3 = D''$,

$ABCD$, $AD'BC$, $ABD''C$ – искомые параллелограммы.

Следовательно, можно построить 3 параллелограмма, удовлетворяющие данному условию.

395.

Дано:

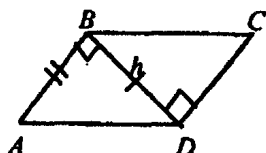


P_2 Q_2

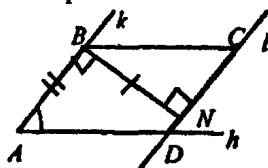
Построить: ABCD – параллелограмм такой, что:

$AB = P_2Q_2$, $h = P_1Q_1$, $\angle A = \angle hk$.

Анализ:



Построение:

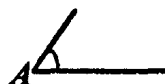


- 1) построили $\angle A = \angle hk$; $AB = P_2Q_2$;
- 2) восстановили перпендикуляр в точке B к лучу AB; $BN \perp AB$, $BN \perp P_1Q_1$;
- 3) через N проведем прямую $l \parallel AB$;
- 4) $l \perp h = D$, от D отложим отрезок, равный P_2Q_2 , $DC = P_2Q_2$;
- 5) соединим BC, получили ABCD – параллелограмм.

397.

а) Дано: A D

A B



Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, такую, что AD – основание, AB – боковая сторона.



Построение:

- 1) отрезок AD; 2) $\angle A$;
- 3) AB, на стороне угла; 4) $\angle D = \angle C$;
- 5) $DC = AB$;

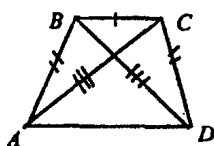
б) ABCD – искомая трапеция.

б) Дано: B C

A B

B R n

Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, где BC – меньшее основание, AB – боковая сторона, BD – диагональ.



Планы построения:

- 1) отрезок BC;
- 2) окружности с центром в B и C и радиусам AB;
- 3) окружность с центром в B и радиусом BD.

сом BD.

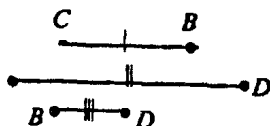
4) Попарное пересечение этих окружностей даст точки A и O.

5) ABCD – равнобедренная трапеция.

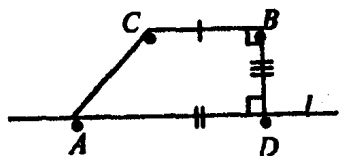
Построение возможно только тогда, когда из отрезков BC, AB и BD можно построить треугольник.

398.

Дано:



Построить: ABCD – прямоугольную трапецию такую, что CB, AD – основания, BD – меньшая боковая сторона.



План построения:

- 1) отрезок BC;
- 2) $BD \perp BC$;
- 3) через D проведем $l \parallel BC$;
- 4) $DA \in l$;
- 5) получаем трапецию ABCD.

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

399.



Дано: ABCD – параллелограмм
 $\angle A = 90^\circ$.

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:

ABCD – параллелограмм, следовательно, $AB = CD$, $BC = AD$,
 $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\angle B = \angle D$.

Т. к. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Т.е. в ABCD стороны попарно равны; все углы прямые, значит, ABCD – прямоугольник.

400.



Дано:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ.$$

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ;$$

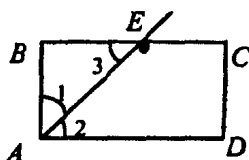
$\angle A, \angle B$ – односторонние при AD и BC и секущей AB, следовательно $AD \parallel BC$;

аналогично, $AB \parallel CD$; $\angle B, \angle C$ – односторонние при CD, AB и секущей BC;

$AD \parallel BC, AB \parallel CD$, следовательно, ABCD – параллелограмм,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, следовательно, ABCD – прямоугольник, ч.т.д.

401.



Дано:

AE – биссектриса $\angle A$;

$P_{ABCD} = ?$

Решение:

а) $E \in BC$, $BE = 45,6 \text{ см}$, $EC = 7,85 \text{ см}$.

из условия $\angle 1 = \angle 3$: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$ (т.к. $AD \parallel BC$), значит,

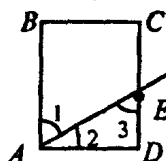
$\triangle ABE$ – равнобедренный и $AB = BE = 45,6 \text{ см}$

$BC = BE + EC$, $BC = 45,6 + 7,85 = 53,45 \text{ см}$, $AD = BC = 53,45 \text{ см}$.

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD);$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (45,6 + 53,45) = 198,1 \text{ см}.$$

Ответ: 198,1 см.



$E \in DC$, $CE = 2,7 \text{ дм}$, $ED = 4,5 \text{ дм}$.

$\triangle AED$ – равнобедренный (т. к. $\angle 2 = \angle 3$), следовательно, $AD = ED = 4,5 \text{ дм}$;

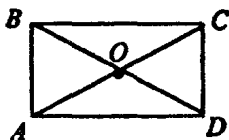
$$CD = CE + ED = 2,7 + 4,5 = 7,2 \text{ дм};$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AD + CD);$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (4,5 + 7,2) = 23,4 \text{ дм}.$$

Ответ: 23,4 дм.

402.

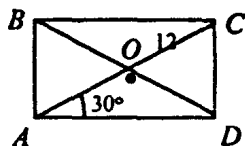


Доказать: $\triangle AOD$ и $\triangle AOB$ –
– равнобедренные.

Доказательство:

$ABCD$ – прямоугольник, следовательно, по св-вам прямоугольника $AC = BD$, $BO = OD$, $AO = OC$, т.е. $AO = OC = OB = OD$, значит $\triangle AOD$ и $\triangle AOB$ – равнобедренные (по определению), т. к. $AO = OD$ и $AO = OB$.

403.



Дано:

$$AC \cap BD = O;$$

$$\angle CAD = 30^\circ;$$

$$AC = 12 \text{ см};$$

$$P_{AOB} = ?$$

Решение:

$\triangle ACD$ – прямоугольный (по усл.);

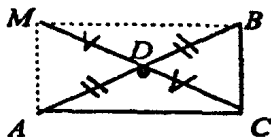
$$\angle A = 30^\circ, \text{ значит, } CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см, } AB = CD = 6 \text{ см};$$

$$AO = \frac{1}{2} AC, AO = OB, \text{ значит, } AO = OB = 6 \text{ см};$$

$$P_{AOB} = AB + BO + AO; P_{AOB} = 6 + 6 + 6 = 18 \text{ см.}$$

Ответ: 18 см.

404.



Дано: $\angle C = 90^\circ$; $BD = AD$;
 CD – медиана.

Доказать: $CD = \frac{1}{2} AB$.

Доказательство:

1) продлим отрезок CD и отметим на луче отрезок $DM = CD$, $AMBC$ – четырехугольник.

2) Надо доказать, что $AMBC$ – прямоугольник.

Рассмотрим $\triangle ADM$ и $\triangle CDB$, по условию

$AD=AB$, $MD=DC$; $\angle ADM=\angle CDB$ (как вертик.), значит, $\triangle ADM=\triangle CDB$ (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно: $AM=BC$.

Так же из $\triangle ADC=\triangle BDM$ следует $AC=MB$.

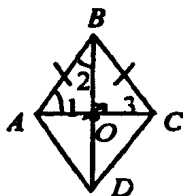
Значит, $AM=BC$, $AC=MB$, $\angle C=90^\circ$, т.е.:

$AMBC$ – прямоугольник.

3) AB и MC – диагонали прямоугольника $AMBC$, т.е.

$AB=MC$, $AD=DB=MD=DC$, значит, $DC=\frac{1}{2}AB$, ч.т.д.

405.



Дано:

$AC=AB$;

а) $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$

б) $\angle 1, \angle 2 = ?$

Решение:

1) $AB=AC$, следовательно, $\triangle ABC$ – равнобедренный, т.е.

$\angle 1 = \angle B = \angle 3 = 60^\circ$;

2) по св-ву углов ромба $\angle A + \angle B = 180^\circ$, т.е.

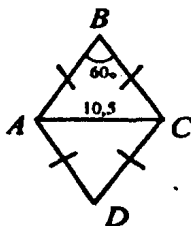
$\angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

3) $\triangle ABO$ – прямоугольный, т.е. из св-ва углов

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 60^\circ + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$.

Ответ: а) $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$; б) $60^\circ, 30^\circ$.

406.



Дано: $AB=BC=CD=AD$,

$\angle B = 60^\circ$,

$AC = 10,5\text{ см}$;

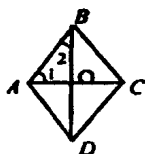
$P_{ABCD} = ?$

Решение:

$\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle C$; $\angle B = 60^\circ$,
значит, и $\angle A = \angle C = 60^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ – равносторонний,
 $AB = BC = AC = 10,5$ см;
 $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10,5 = 42$ см.

Ответ: 42 см.

407.



Дано:

$\angle B = 45^\circ$;

$\angle 1, \angle 2 = ?$

Решение:

1) BD – биссектриса $\angle ABC$, следовательно, $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22^\circ 30'$

2) $\triangle ABO$ – прямоугольный, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 1 = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$.

Ответ: $22^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

408.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $\angle BOC = 90^\circ$.

Доказать: $ABCD$ – ромб.

Доказательство:

а) $AC \perp BD$.

Из $\triangle BCO$ и $\triangle DCO$ по св-ву диагоналей
следует: $BO = OD$,

CO – общая, значит, $\triangle BCO = \triangle DCO$ (по 2 катетам), т.е. $BC = CD$,

т.к. $BC = AD$, $BC = CD$, то $AB = BC = CD = AD$,

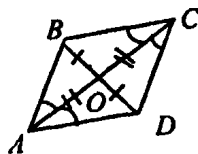
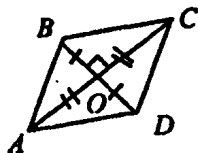
следовательно, $ABCD$ – ромб, что и требовалось доказать.

б) AC – биссектриса углов.

$\triangle ACD$ – равнобедренный по признаку,

т.к. $\angle A = \angle C$, следовательно, $AD = DC$;

$AD = BC$, $AD = DC$, значит, $AD = DC = BC = AB$, т.е. $ABCD$ – ромб, ч.т.д.



409.



Дано: $ABCD$ – ромб,

$$\angle A = 90^\circ.$$

Доказать: $ABCD$ – квадрат.

Доказательство:

$ABCD$ – ромб, следовательно:

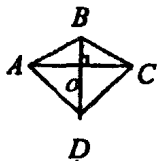
$$AB = BC = CD = AD,$$

$$\angle A = \angle C = 90^\circ,$$

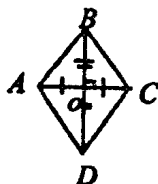
$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ.$$

Т.к. все стороны равны и все углы равны 90° , то $ABCD$ – квадрат.

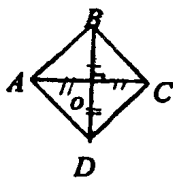
410.



а) нет;

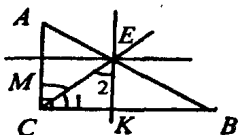


б) нет;



в) да.

411.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$,

CE – биссектриса;

$EK \parallel AC$, $ME \parallel CK$.

Доказать: $СМЕК$ – квадрат.

Доказательство:

По условию $MC \parallel EK$, значит, по определению $СМЕК$ – параллелограмм.

По свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle E$,

т.к. CE – биссектриса $\angle C$, то EC – биссектриса $\angle E$, значит,

$\angle 1 = \angle 2$ и $\triangle СКЕ$ – равнобедр. (по признаку).

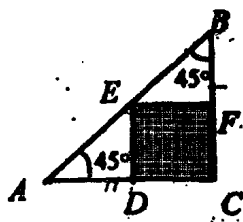
Т.е. $СК = ЕК$.

$СК = МЕ$, т.к. $СМЕК$ – параллелограмм,

следовательно, $СМЕК$ – ромб.

$\angle C = 90^\circ$, значит, $\angle E = 90^\circ$, $\angle M = \angle K = 90^\circ$.

Следовательно, $СМЕК$ – квадрат, что и требовалось доказать.



Дано: $\triangle ABC$,
 $\angle C = 90^\circ$,
 $AC = BC = 12 \text{ см}$;
 $CDEF$ – квадрат, $E \in AB$;
 $P_{ADEF} = ?$

Решение:

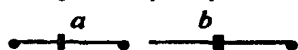
1) $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, т.е. $\triangle ADE$ и $\triangle EFB$ – равнобедренные прямоугольные треугольники, где $AD = DE$ и $EF = BF$; $CDEF$ – квадрат (по усл.), следовательно, $DE = EF$, т.е. $AD = DE = EF = BF$.

2) $P_{CDEF} = CD + DE + EF + CF$, где $DE = AD$; $EF = BF$;
 $P_{CDEF} = CD + AD + BF + CF$, где $CD + AD = AC$; $BF + CF = BC$;
 $P_{CDEF} = AC + BC = 12 + 12 = 24 \text{ см}$.

Ответ: 24 см.

413.

Построить прямоугольник:



а) по 2 смежным сторонам.

Построение:

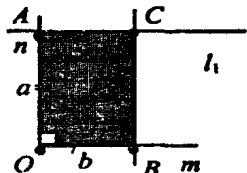
$\angle mn = 90^\circ$,

на луче n отрезок, равный a ,

на луче m отрезок, равный b ,

через A и B провести $l_1 \parallel m$ и $l_2 \parallel n$,

$l_1 \cap l_2 = C$, $OABC$ – прямоугольник.



б) по стороне и диагонали.

Построение:

$\angle mn = 90^\circ$,

на луче n отрезок, равный a ,

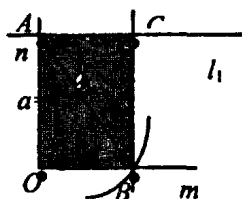
Окр. $(A; d)$, Окр. $(A; d) \cap m = C$,

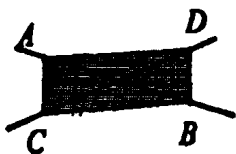
через C провести прямую $l_1 \parallel n$,

через A провести прямую $l_2 \parallel m$,

$l_1 \cap l_2 = B$,

$OABC$ – искомым прямоугольник.





в) по 2 диагоналям и углу между ними.

Построение:

$$\angle O = \alpha.$$

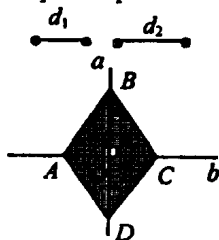
Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно от O в разные стороны отложим

отрезки, равные $\frac{1}{2}d$: $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d$,

$ABDC$ – искомый прямоугольник.

414.

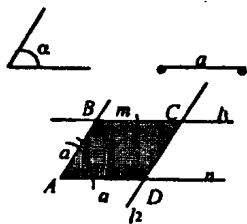
Построить ромб.



а) по 2 диагоналям

Построение:

диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, $a \perp b$, так же диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, значит, на прямой b от O отложим $OA = OB = OC = \frac{1}{2}d_1$, $ABCD$ – искомый ромб.



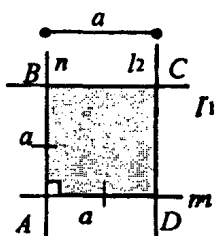
б) по стороне и углу

Построение:

$\angle A = \alpha$, проведем $AB = a$, через b проведем $l_1 \parallel n$, $BC = a$, через C проведем $l_2 \parallel m$, получим $l_2 \cap n = D$, то $ABCD$ – искомый ромб.

415.

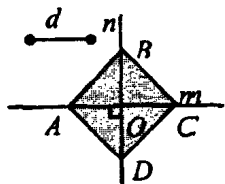
Построить квадрат



а) по стороне.

Построение:

построим $n \perp m$, $n \cap m = A$, от A на n отложим $AB = a$ и $AD = a$ на m , через B и D прямые $l_1 \parallel m$, $l_2 \parallel n$, имеем $l_1 \cap l_2 = C$, тогда $ABCD$ – искомый квадрат.



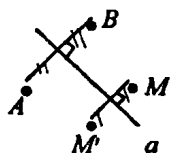
б) по диагонали.

Построим $n \perp m$, $n \cap m = O$,
диагонали взаимно перпендикулярны,
равны и точкой пересечения делятся
пополам, следовательно, отложим на m

$$OA = OC = \frac{1}{2} d,$$

$OB = OD = \frac{1}{2} d$ на n , имеем $ABCD$ – искомый квадрат.

416.



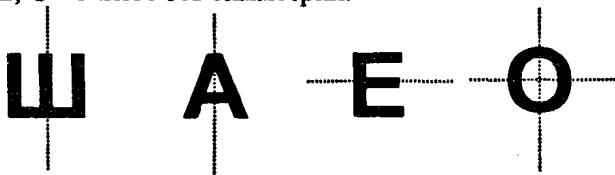
Провести к прямой $a \perp$ через M , про-
вести окружность с центром O и
 $R=OM$. При пересечении окружности
с \perp получим M' – искомая.

417.

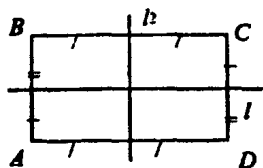
- а) 2 оси симметрии – прямая на которой лежит отрезок и сере-
динный перпендикуляр;
- б) бесконечное множество осей симметрии – \forall перпендикуляр и
сама прямая;
- в) одну ось симметрии – прямая, на которой лежит луч.

418.

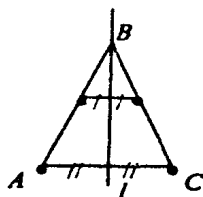
Ш, А, Е, О – имеют ось симметрии.



419.

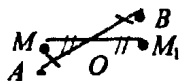


Из определения фигуры, симметричной
относительно прямой, следует, что каж-
дая точка прямоугольника имеет сим-
метричную точку прямоугольника отно-
сительно любой из прямой l и l_2 .



Биссектриса равнобедренного треугольника ABC , опущенная на основание AC , является осью симметрии, т. е. каждая точка AB имеет симметричную точку отрезка BC $\triangle ABC$.

421.



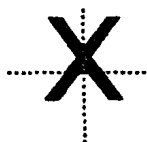
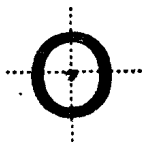
M_1 – симметрична M относительно O , где O – середина AB .

422.

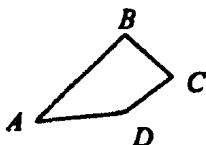
а) да; б) нет; в) да; г) да.

423

О и Х.



424.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник, не все углы равны друг другу.

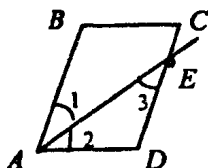
Доказать: хотя бы один угол – тупой.

Доказательство:

Пусть в четырехугольнике все углы острые, а именно $\angle A < 90^\circ$; $\angle B < 90^\circ$; $\angle C < 90^\circ$; $\angle D < 90^\circ$, то

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360^\circ$, а такого не может быть, т.к. сумма углов четырехугольника равна 360° . Т.е. предположение о том, что все углы острые – неверно. Следовательно, хотя бы один угол – тупой, что и требовалось доказать.

425.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

$P_{ABCD} = 46\text{см}$, $AB = 14\text{см}$,

AE – биссектриса.

Найти: какую сторону $\cap AE$?
отрезки пересечения.

Решение:

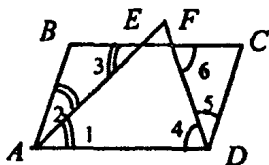
1) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, $46 = 2 \cdot (14 + AD)$, следовательно,
 $AD = 9\text{см}$, $AD < AB$, значит, $E \in DC$;

2) $\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ и секущая AE); по условию $\angle 1 = \angle 2$, значит,
 $\angle 2 = \angle 3$, т.е. $\triangle AED$ – равнобедренный и $AD = ED = 9\text{см}$;

3) $CE = CD - ED = 14 - 9 = 5\text{см}$.

Ответ: 5см , 9см .

426.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

$AB = 3\text{см}$, $AD = 10\text{см}$,

AE – биссектриса $\angle A$,

DF – биссектриса $\angle D$;

BE , EF , $FC = ?$

Решение:

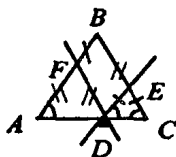
1) $\triangle ABE$ – равнобедренный, т.к. $\angle 2 = \angle 3$, значит,

$AB = BE = 3\text{см}$, так же из $\triangle DCF$ следует, что $CD = FC = 3\text{см}$;

2) $EF = BC - BE - FC$, $EF = 10 - 6 = 4\text{см}$.

Ответ: 3см , 4см , 3см .

427.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$,

$D \in AC$, $DE \parallel AB$, $FE \parallel AC$.

Доказать: $P_{AFED} = AB + BC$.

Доказательство:

1) $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle C$;

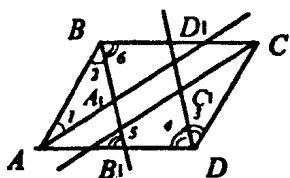
$AB \parallel DE$; следовательно, как соответственные $\angle A = \angle D$, т.е. $\angle D = \angle C$ и $DE = EC$.

2) $FB \parallel DE$; $FD \parallel BE$, следовательно, $BEDF$ – параллелограмм, т.е. $FD = BE$ и $FB = DE$. $FD \parallel BC$, значит, $\angle C = \angle ADF$, $\angle A = \angle C$, т.е. $\angle A = \angle ADF$, следовательно, $AF = FD$.

3) $P_{FBED} = FB + BE + ED + FD$, где $ED = EC$; $FD = AF$

$P_{AFED} = FB + BE + EC + AF = AB + BC$, что и требовалось доказать.

428.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $AB \neq AD$, AA_1 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1 –
 биссектрисы углов.
 Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – прямоуголь-
 ник

Доказательство:

1) по свойству углов параллелограмма $\angle A = \angle B = 180^\circ$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ($\angle 1 = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle B$), следовательно, в $\triangle ABA_1$ $\angle A_1 = 90^\circ$ и $\triangle ABA_1$ – прямоугольный.

Аналогично: $\angle C_1 = 90^\circ$ в $\triangle CC_1D$;

2) по свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D$, BB_1 ; DD_1 – биссектрисы, значит, $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6$; $BC \parallel AD$, следовательно, $\angle 6 = \angle 5$, т.е. $\angle 5 = \angle 4$ как соответственные углы при прямых BB_1 и DD_1 и секущей AD , отсюда $BB_1 \parallel DD_1$. Аналогично $AA_1 \parallel CC_1$.

3) $AA_1 \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel DD_1$, $\angle A_1 = \angle C_1 = 90^\circ$, значит, $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник, что и требовалось доказать.

429.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
 $\angle A + \angle B = 180^\circ$,
 $\angle B + \angle C = 180^\circ$.

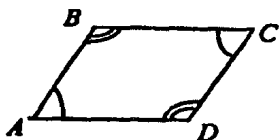
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

1) $\angle A$, $\angle B$ – односторонние при прямых AD и BC и секущей AB . Т.к. по условию $\angle A + \angle B = 180^\circ$, то по признаку $AD \parallel BC$.

- 2) $\angle B, \angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC .
Т.к. по условию $\angle B + \angle C = 180^\circ$, то по признаку $AB \parallel CD$.
3) Т.к. $AD \parallel BC, AB \parallel CD$, то по определению $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

430.

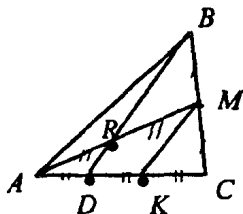


Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

- 1) по свойству суммы углов четырехугольника: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, где $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$, откуда следует $2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 360^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ$;
- 2) $\angle A, \angle B$ – односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB , $\angle A + \angle B = 180^\circ$, значит, $AD \parallel BC$;
- 3) $\angle B, \angle C$ – односторонние углы при прямых AB и CD и секущей BC , $\angle B + \angle C = 180^\circ$, значит, $AB \parallel CD$;
- 4) $AD \parallel BC, AB \parallel CD$, т.е. $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

431.



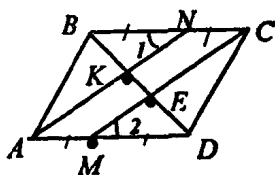
Дано: $\triangle ABC$, AM – медиана;
 $K \in AM, AK = KM$,
 $BK \cap AC = D$.

Доказать: $AD = \frac{1}{3} AC$.

Доказательство:

- 1) проведем $MK \parallel BD, DK = KC$ (по т. Фалеса);
- 2) в $\triangle AMK$ $KD \parallel MR, AK = KM$, следовательно, по т. Фалеса $AD = DK$;
- 3) $AC = AD + DK + KC$, но $AD = DK = KC$, значит, $AC = 3AD$, т.е. $AD = \frac{1}{3} AC$, что и требовалось доказать.

432.

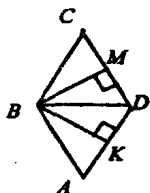


Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $M \in AD$, $AM = MD$,
 $N \in BC$, $BN = NC$;
 $AN \cap BD = K$; $CM \cap BD = E$.
 Доказать: $BK = KE = ED$.

Доказательство:

- 1) Имеем $\triangle ABN$ и $\triangle CDM$; по свойству параллелограмма $AB = CD$, $BN = MD$ (по условию), $\angle B = \angle D$ (по усл.), т.е. по двум сторонам и углу $\triangle ABN = \triangle CDM$, следовательно, $AN = MC$.
- 2) По условию $NC = AM$, и $AN = MC$, значит, $ANCM$ – параллелограмм, и $AN \parallel MC$.
- 3) В $\triangle BCE$: $NK \parallel CE$;
 $BN = NC$, значит $BK = KE$ (т. Фалеса).
- В $\triangle AKD$: $ME \parallel AK$;
 $AM = MD$, следовательно, $KE = ED$ (т. Фалеса), следовательно,
 $BK = KE = ED$, что и требовалось доказать.

433.



Дано: $ABCD$ – ромб,
 $BM \perp DC$, $BK \perp AD$.
 Доказать: BD – биссектриса $\angle KBM$.

Доказательство:

- 1) $\angle B = \angle D$ по св-ву углов ромба, а по св-ву диагонали BD – биссектриса.
- 2) Надо доказать, что $\angle DMB = \angle DBK$.
- а) Имеем $\triangle BCM$ и $\triangle BAK$.
 Т.к. $ABCD$ – ромб, $BC = BA$, $\angle C = \angle A$, значит $\triangle BCM = \triangle BAK$ (по гипотенузе и острому углу), т.е. по определению равных треугольников $\angle CBM = \angle ABK$.
- б) $\angle MBD = \angle DBC - \angle MBC$; $\angle DBK = \angle DBA - \angle ABK$, значит,
 $\angle MBD = \angle DBK$ и BD является биссектрисой $\angle MBK$, что и требовалось доказать.

434.

Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$ Доказать: $ON = OM = OE = OF$ Доказательство:

1) Имеем $\triangle BON$ и $\triangle BOM$, где BO – общая сторона, по св-ву ромба $\angle NBO = \angle MBO$, т.е. по гипотенузе и острому углу $\triangle BON = \triangle BOM$.

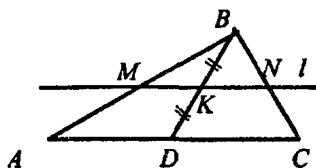
Следовательно, $OM = ON$;

2) так же через $\triangle FOD = \triangle EOD$ имеем $OE = OF$.

3) Имеем $\triangle AOF$ и $\triangle COM$; по св-ву ромба $AO = OC$ и $\angle OAF = \angle OCM$, т.е. $\triangle AOF = \triangle COM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OF = OM$.

4) Имеем $OM = ON$, $OE = OF$, $OF = OM$, следовательно, $ON = OM = OE = OF$. Что и требовалось доказать.

435.

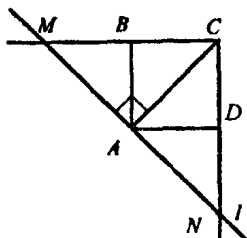
Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$, $K \in BD$, $BK = KD$.Доказать: $AM = MB$, $BN = NC$.Доказательство:

1) Проведем через K прямую $l \parallel AC$.

2) Рассмотрим $\triangle ABD$: $MK \parallel AD$, $BK = KD$, из теоремы Фалеса следует: $BM = MA$, что и требовалось доказать.

3) Рассмотрим $\triangle BDC$: $KN \parallel DC$, $BK = KD$, из теоремы Фалеса следует $BN = NC$, что и требовалось доказать.

436.



Дано: $ABCD$ – квадрат,
 $AC = 18,4$ см;
 $A \in l, l \perp AC$,
 $l \cap BC = M; l \cap CD = N$.
 $MN = ?$

Решение:

1) по св-ву квадрата AC – биссектриса $\angle C$, т.е.

$\angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$;

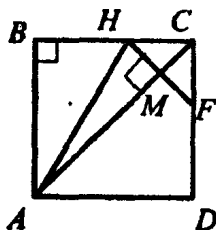
2) $\triangle MAC$ – прямоугольный $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, значит, $\angle M = 45^\circ$
и $AM = AC = 18,4$ см.

Также $\triangle ACN$ – прямоугольный, $AN = AC = 18,4$ см.

3) $MN = MA + AN = 18,4 + 18,4 = 36,8$ см.

Ответ: 36,8 см.

437.



Дано: $ABCD$ – квадрат;
 $M \in AC$; $AB = AM$, $HM \perp AC$.
Доказать: $BH = HM = MC$.

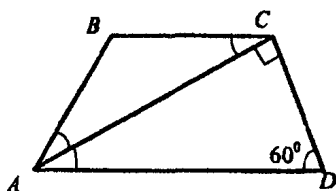
Доказательство:

1) Имеем $\triangle HMC$ и $\triangle FMC$ с общей стороной CM ,
 $\angle HCM = \angle FCM = 45^\circ$, т.е. по катету и острому углу
 $\triangle HMC = \triangle FMC$, следовательно, $HC = CF$, $HM = MF$.

2) Имеем $\triangle ABH$ и $\triangle AMH$ с общей стороной AH ;
 $AB = AM$ (по условию),
 $\triangle ABH = \triangle AMH$, т.е. по катету и гипотенузе, следовательно,
 $BH = HM$.

3) Имеем $CM = HM = BH$, что и требовалось доказать.

438.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$;
 $P_{ABCD} = 20 \text{ см}$, $\angle D = 60^\circ$;
 $AD = ?$

Решение:

1) В $\triangle ACD$

$\angle C = 90^\circ$, $\angle D = 60^\circ$, значит, $\angle A = 30^\circ$, следовательно, $CD = \frac{1}{2} AD$;

2) т.к. $\angle BAC = \angle CAD = 30^\circ$, то $\angle A = 60^\circ$, следовательно, $ABCD$ – равнобедренный, т.е. $CD = AB$;

3) т.к. $\angle CAD = \angle BAC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, значит, $\triangle ABC$ – равнобедренный, т.е. $AB = BC$;

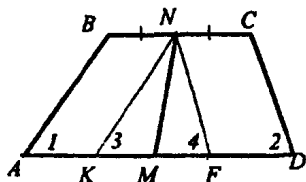
4) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$, где $CD = \frac{1}{2} AD$, $AB = BC = CD$,

$$20 = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} AD + AD = 2,5 AD;$$

$$20 = 2,5 AD, AD = 20 : 2,5 = 8.$$

Ответ: 8 см.

439.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $\angle A + \angle D = 90^\circ$;
 $BN = NC$,
 $AM = MD$.

Доказать: $MN = \frac{1}{2} (AD + BC)$.

Доказательство:

1) Построим $NK \parallel AB$ и $NF \parallel CD$, $ABNK$ и $NCDF$ – параллелограммы.

2) $\angle 1 = \angle 3$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей AK);

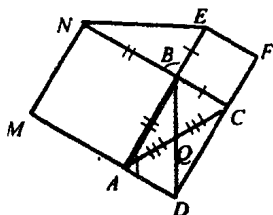
$\angle 2 = \angle 4$ (соответственные при $NC \parallel NF$ и секущей FD).

Значит $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$.

3) В $\triangle KNF$: $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, следовательно, $\angle N = 90^\circ$, и $\triangle KNF$ – прямоугольный, NM – медиана.

Значит, $NM = \frac{1}{2} KF$, где $KF = AD - (AK + FD) =$
 $= AD - BC$, значит $MN = \frac{1}{2} (AD - BC)$, что и требовалось доказать.

440.



Дано: $\triangle ABC$;
 $ABNM, BEFC$ – квадраты.

Доказать: $BQ = \frac{1}{2} NE$.

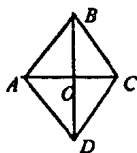
Доказательство:

1) Построим $QD = QB$, имеем по признаку параллелограмма: $ABCD$ – параллелограмм. $AQ = QC$, $BQ = QD$. Следовательно, $AD = BC$.

2) В $\triangle BNE$ и $\triangle ABD$:

$NB = AB$, $BE = AD$, $\angle B = \angle A$, т.е. по двум сторонам и углу между ними $\triangle BNE = \triangle ABD$, по определению равных $\triangle NE = BD$, т.е. $BQ = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} NE$, что и требовалось доказать.

441.



Дано: $ABCD$ – ромб.
 Доказать: BD, AC – оси симметрии.

Доказательство:

1) $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ – равнобедренные треугольники.

2) Биссектриса BD – ось симметрии равнобедренного треугольника (любая точка отрезка AB имеет симметричную точку отрезка BC относительно BD).

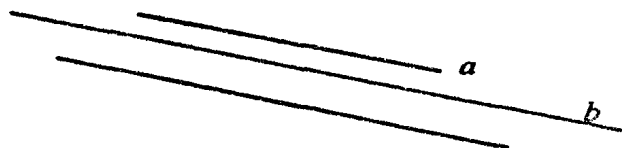
442.

Дано: $ABCD$ – ромб

Доказать: O – ось симметрии.

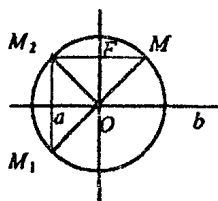
См. 434.

443.



Бесконечное множество.

444.



Дано: $a \perp b$, $a \cap b = O$;

a, b – оси симметрии окр. $(O; R)$.

Доказать: O – центр симметрии.

Доказательство:

$\triangle MFO = \triangle M_1OF$ по катету и гипотенузе ($OM = OM_1 = R$; OF – общая сторона), т.е. $MF = FM_1$, следовательно, M и M_1 – симметричны относительно прямой a .

2) M_1 и M_2 – симметричны относительно прямой b , т.к.

$\triangle M_1OQ = \triangle M_2OQ$, откуда, $M_1Q = QM_2$.

3) $MF \parallel b$, $M_1Q \parallel a$, $\angle O = 90^\circ$, значит, $MFOQ$ – прямоугольник и $\angle M_1 = 90^\circ$.

Следовательно, $\triangle M_2MM_1$ – прямоугольный с $\angle M_1 = 90^\circ$.

Т.е. M_2M_1 – диаметр окружности и $M_2O = OM$,

следовательно, M_2 и M – симметричны относительно O , что и требовалось доказать.

Глава VI. Площадь

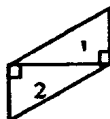
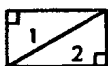
§ 1. Площадь многоугольника

Прямоугольные треугольники



Составить:

- 1) прямоугольник; 2) параллелограмм; 3) равнобедренный треугольник.

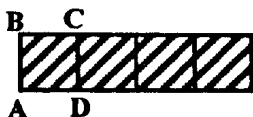
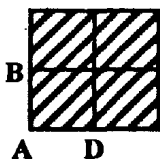


446.

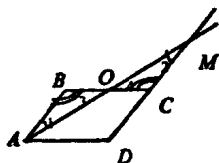


$$S_{ABCD} = 1 \text{ ед}^2.$$

- а) квадрат; б) прямоугольник; в) треугольник.



447.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$$CM = CD.$$

Доказать: $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

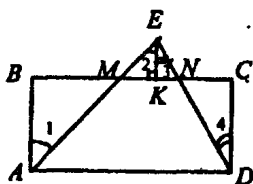
Доказательство:

1) В $\triangle ABO$ и $\triangle MCO$: $AB = CM$, $\angle 1 = \angle 2$ (накрест леж. при $AB \parallel CD$ и секущей AM);

$\angle 3 = \angle 4$ (накрест леж. при $AB \parallel CD$ и секущей BC), значит, $\triangle ABO = \triangle MCO$ (по стороне и 2 прилежащим углам), т.е. по св-ву площадей $S_{ABO} = S_{MCO}$.

2) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{AOC D}$, где $S_{ABC} = S_{MCO}$;
 $S_{AMD} = S_{MCO} + S_{AOC D}$,
 $S_{ABCD} = S_{AMD}$, что и требовалось доказать.

448.



Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
 $\triangle AED$, $AE \cap BC = M$,
 $ED \cap BC = N$, $AM = ME$.
 Доказать: $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

Доказательство:

1) $EK \perp MN$.

В $\triangle ABM$ и $\triangle EKM$:

$AM = ME$, $\angle 1 = \angle 2$ (т.к. накрест леж. при $AB \parallel EK$ при секущей AC), значит, $\triangle ABM = \triangle EKM$ (по гипотенузе и острому углу) и по св-ву площадей $S_{ABM} = S_{EKM}$.

2) В $\triangle KEN$ и $\triangle CDN$

$EK = CD$, $\angle 3 = \angle 4$ (т.к. накрест лежащие при $KE \parallel CD$ и секущей ED), т.е. по св-ву площадей $S_{KEN} = S_{CDN}$.

3) $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{CDN}$, следовательно,

$S_{AED} = S_{MEK} + S_{AMND} + S_{KEN}$, т.е. $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

Что и требовалось доказать.

449.



$$S = a^2;$$

а) $a = 1,2 \text{ см}$, $S = 1,44 \text{ см}^2$;

б) $a = \frac{3}{4} \text{ дм}$, $S = \frac{9}{16} \text{ дм}^2$;

в) $a = 3\sqrt{2} \text{ м}$, $S = 18 \text{ м}^2$.

450.



$$S = a^2, \text{ или } a = \sqrt{S}$$

а) $S = 16 \text{ см}^2$, $a = 4 \text{ см}$;

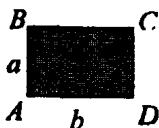
б) $S = 2,25 \text{ дм}^2$, $a = 1,5 \text{ дм}$;

в) $S = 12 \text{ м}^2$, $a = 2\sqrt{3} \text{ м}$.

451.

$$S = 24 \text{ см}^2 = 2400 \text{ мм}^2 = 0,24 \text{ дм}^2$$

452.



$$S = ab;$$

а) $a = 8,5 \text{ см}, b = 3,2 \text{ см}, S = 27,3 \text{ см}^2;$

б) $a = 2\sqrt{2} \text{ см}, b = 3 \text{ см}, S = 6\sqrt{2} \text{ см}^2;$

в) $a = 32 \text{ см}, S = 684,8 \text{ см}^2$, т.к. $b = S : a$,
 $b = 21,4 \text{ см};$

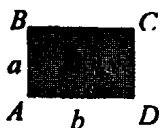
г) $b = 4,5 \text{ см}, S = 12,5 \text{ см}^2$, $12,5 = a \cdot 4,5; a = 2,7 \text{ см} (a = S : b).$

453.

$S = a \cdot b$, следовательно,

а) S увеличится в 2 раза, б) S увелич. в 4 раза, в) S не изменится.

454.



Дано: ABCD – прямоугольник.

а) $AD > AB$ в 2,5 раза; $S_{ABCD} = 250 \text{ см}^2$

б) $S_{ABCD} = 9 \text{ м}^2; P_{ABCD} = 12 \text{ м};$

$AB, AD = ?$

Решение:

а) Пусть $AB = x$, тогда $AD = 2,5x \text{ см}, S = AB \cdot AD;$

$250 = 2,5x^2, x^2 = 100, x = 10$, имеем $AB = 10 \text{ см}, AD = 25 \text{ см};$

б) Пусть $AB = x, AD = y;$

$S_{ABCD} = AB \cdot AD; P_{ABCD} = 2(AB + AD);$

$9 = xy; 12 = 2(x + y), x + y = 6$, т.е. $x = y = 3; AB = AD = 3 \text{ см}.$

455.

1) Найдем площадь каждой плитки: $30 \cdot 5 = 150 \text{ см}^2.$

2) Найдем площадь пола: $5,5 \cdot 6 = 33 \text{ м}^2 = 330000 \text{ см}^2.$

3) $330000 : 150 = 2200,$

т.е. 2200 плиток потребуется для покрытия пола.

Ответ: 2200.

456.

1) Найдем площадь плитки: $15 \cdot 15 = 225 \text{ см}^2.$

2) Найдем площадь стены: $3 \cdot 2,7 = 8,1 \text{ м}^2 = 81000 \text{ см}^2.$

3) $81000 : 225 = 360$, т.е. 360 плиток потребуется на облицовку.

Ответ: 360

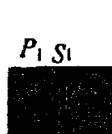
457.

$$1) S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b = 8 \cdot 18 = 144 \text{ м}^2;$$

$$2) S_{\text{прямоуг.}} = S_{\text{кв.}}, \text{ следовательно, сторона квадрата равна } 12 \text{ м.}$$

Ответ: 12м.

458.



$$1) P_1 = 2 \cdot (220 + 160) = 760 \text{ м};$$

$$P_1 = P_2, \text{ следовательно, } P_2 = 4 \cdot a,$$

где a – сторона квадрата,

$$760 = 4a, a = 190 \text{ м};$$

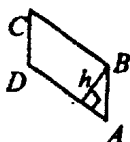
$$2) S_1 = 220 \cdot 160 = 35200 \text{ м}^2;$$

$$S_2 = 190 \cdot 190 = 36100 \text{ м}^2,$$

т.е. $S_2 - S_1 = 900 \text{ м}^2$. Следовательно, площадь квадратного участка больше площади прямоугольного на 900 м^2 .

§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459.



$$S = ah;$$

$$1) a = 15 \text{ см}, h = 12 \text{ см}, S = 180 \text{ см}^2;$$

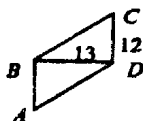
$$2) S = 34 \text{ см}^2, h = 8,5 \text{ см}, a = 4 \text{ см};$$

$$3) S = 162 \text{ см}^2, h = \frac{1}{2} a, 162 = a \cdot \frac{1}{2} a; 324 = a^2;$$

$$a = 18 \text{ см};$$

$$4) h = 3a, S = 27, 27 = a \cdot 3a; 9 = a^2; a = 3, h = 9.$$

460.



Дано: ABCD – параллелограмм

$BD \perp CD$, $BD = 13 \text{ см}$, $CD = 12 \text{ см}$;

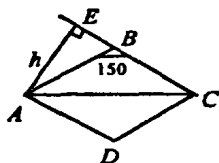
$S = ?$

Решение:

$$S = BD \cdot CD = 13 \cdot 12 = 156 \text{ см}^2.$$

Ответ: 156 см^2 .

462.



Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle B = 150^\circ$,
 $AB = 6$ см;
 $S = ?$

Решение:

1) $AE \perp BC$.

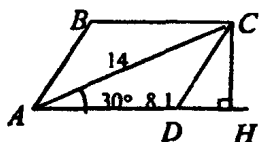
В $\triangle ABE$: $\angle E = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, следовательно,

$$AE = \frac{1}{2} AB = 3 \text{ см.}$$

$$2) S_{ABCD} = AE \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ: 18 см^2 .

463.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $AD = 8,1$ см, $AC = 14$ см,
 $\angle CAD = 30^\circ$;
 $S = ?$

Решение:

$CH \perp AD$, $S_{ABCD} = AD \cdot CH$.

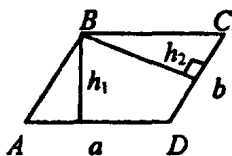
В $\triangle ACH$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, следовательно, $CH = \frac{1}{2} AC$,

$CH = 7$ см, т.е.

$$S_{ABCD} = 8,1 \cdot 7 = 56,7 \text{ см}^2.$$

Ответ: $56,7 \text{ см}^2$.

464.



$S = a \cdot h_1$ или $S = b \cdot h_2$;

а) $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см;

$h_2 > h_1$, $h_2 = ?$, $18 \cdot h_2 = 30 \cdot 6$, $h_2 = 10$.

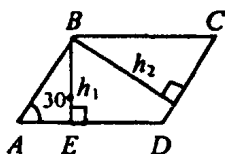
б) $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см;

$h_2 > h_1$, $h_1 = ?$, $10 \cdot 6 = 15 \cdot h_1$, $h_1 = 4$.

в) $S = 54 \text{ см}^2$, $a = 4,5$ см, $b = 30$ см,

$h_2 = ?$, $h_1 = ?$, $54 = 4,5 \cdot h_1$, $h_1 = 12$, $54 = 6 \cdot h_2$, $h_2 = 9$.

465.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $\angle A = 30^\circ$, $h_1 = 2$ см, $h_2 = 3$ см;
 $S = ?$

Решение:

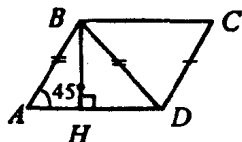
1) В $\triangle ABE$: $\angle E = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, следовательно,

$$BE = \frac{1}{2} AB, 2 = \frac{1}{2} AB, \text{ т.е. } AB = 4 \text{ см};$$

$$2) CD = AB = 4 \text{ см}, S_{ABCD} = CD \cdot h_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12 см^2 .

466.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $\angle A = 45^\circ$, $AD = 15,2$ см,
 $BD = AB$;
 $S = ?$

Решение:

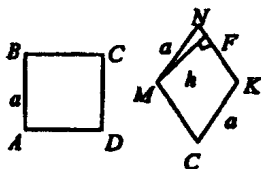
1) По условию $AB = BD$, следовательно $\triangle ABD$ – равнобедренный, т.к. $\angle A = 45^\circ$, то $\angle D = 45^\circ$, а $\angle B = 90^\circ$.

По свойству медианы прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, имеем: $BH = \frac{1}{2} AD = 7,6$ см.

$$2) S_{ABCD} = BH \cdot AD = 7,6 \cdot 15,2 = 115,52 \text{ см}^2.$$

Ответ: $115,52 \text{ см}^2$.

467.



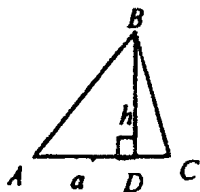
Дано: $ABCD$ – квадрат;
 $MNKE$ – ромб;
 $P_{ABCD} = P_{MNKE}$.
Сравнить S_{ABCD} и S_{MNKE} .

$$S_{ABCD} = a^2, S_{MNKE} = a \cdot h;$$

$\triangle MNF$ – прямоугольный;

$MF < MN$, следовательно, $h < a$, и соответственно $a^2 > ah$, значит, $S_{ABCD} > S_{MNKE}$, что и требовалось доказать.

468.



$$S = \frac{1}{2} ah;$$

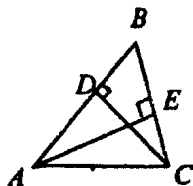
а) $a = 7$ см, $h = 11$ см, следовательно, $S = 38,5 \text{ см}^2$;

б) $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см, следовательно, $S = 5\sqrt{3} \text{ см}^2$;

в) $S = 37,8 \text{ см}^2$, $a = 14$ см, следовательно, $37,8 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h$; $h = 5,4$ см;

г) $S = 12 \text{ см}^2$, $h = 3\sqrt{2}$ см, следовательно, $12 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot a$; $a = 4\sqrt{2}$ см.

469.



Дано: $\triangle ABC$;

$AB = 16$ см, $BC = 11$ см;

$AE \perp BC$;

$AE = ?$

Решение:

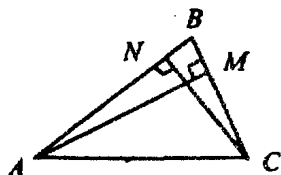
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 11 = 88 \text{ см}^2.$$

$$\text{Также: } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE;$$

$$88 = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot AE, \text{ откуда } AE = 8 \text{ см.}$$

Ответ: 8 см.

470.



Дано: $\triangle ABC$;

$AB = 7,5$ см, $BC = 3,2$ см;

$CN \perp AB$, $CN = 2,4$ см;

$AM \perp BC$;

$AM = ?$

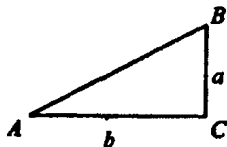
Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 2,4 = 9 \text{ см}^2, \text{ также}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC; 9 = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot 3,2; \text{ откуда } AM = 5,625 \text{ см.}$$

Ответ: 5,625 см.

471.



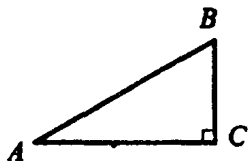
$$S = \frac{1}{2} ab;$$

а) $a = 4 \text{ см}$, $b = 11 \text{ см}$, следовательно $S_{\Delta} = 22 \text{ см}^2$;

б) $a = 1,2 \text{ дм}$, $b = 3 \text{ дм}$, $S_{\Delta} = 1,8 \text{ дм}^2$.

Ответ: 22 см^2 ; $1,8 \text{ дм}^2$.

472.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$AC:BC = 7:12$;

$S_{ABC} = 168 \text{ см}^2$;

$AB, BC = ?$

Решение:

Пусть $x \text{ см}$ – 1 часть, следовательно,

$AC = 7x \text{ см}$, $BC = 12x \text{ см}$;

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \text{ следовательно, } 168 = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x;$$

$$x^2 = 4, x = 2;$$

$$AC = 7 \cdot x = 14 \text{ см}; BC = 12 \cdot x = 24 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см, 24 см.

473.

Дано: $\triangle ABC$, $C \in m$, $m \parallel AB$, $D \in m$.

Доказать: $S_{ABC} = S_{ABD}$.

Доказательство:

$$1) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 \perp AB, \text{ или}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DD_1, (DD_1 \perp AB);$$

2) Надо доказать, что $CC_1 = DD_1$.

3) В четырехугольнике CDD_1C_1 ;

$CD \parallel C_1D_1$ ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$);

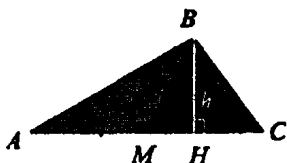
$CC_1 \parallel DD_1$ ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$);

$CC_1 \parallel DD_1$ ($CC_1 \perp AB$, $DD_1 \perp AB$), значит,

CDD_1C_1 – параллелограмм, где $CC_1 = DD_1$ (по св-ву).

Следовательно, $S_{ABC} = S_{ABD}$.

474.



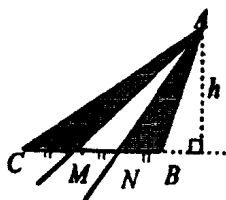
Дано: $\triangle ABC$, где
BM – медиана.

Сравнить: S_{ABC} и S_{MBC} .

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH, \text{ т.к. BM – медиана, } AM = MC,$$

$$S_{ABC} = S_{MBC}.$$

475.



Разделим BC на три равные части,
имеем $\triangle CAM$, $\triangle MAN$, $\triangle NAB$.

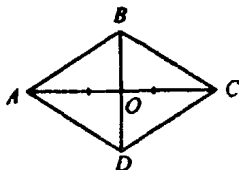
$$S_{\triangle} = a \cdot h, \text{ следовательно,}$$

$$S_{AMC} = CM \cdot h,$$

$$S_{MAN} = MN \cdot h,$$

$$S_{NAB} = NB \cdot h, \text{ где } BM = MN = NB = a.$$

476.



Дано: ABCD – ромб.

$$\text{Доказать: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Доказательство:

1) AC, BD – диагонали; $\triangle AOD = \triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD$ – прямоугольные.

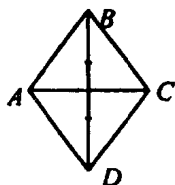
В $\triangle ABO$: $S_{ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot OB$, где $AO = \frac{1}{2} AC$; $BO = \frac{1}{2} BD$.

2) $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABO} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB = 2 \cdot \frac{1}{4} (AC \cdot BD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

а) $d_1 = 3,2$ дм, $d_2 = 14$ см, следовательно, $S = \frac{1}{2} 32 \cdot 14 = 224 \text{ см}^2$;

б) $d_1 = 4,6$ дм, $d_2 = 2$ дм, следовательно, $S = \frac{1}{2} 4,6 \cdot 2 = 4,6 \text{ дм}^2$.

477.



Дано: $ABCD$ – ромб;
 $S_{ABCD} = 27 \text{ см}^2$;
 $AC < BD$ в 1,5 раза;
 $AC, BD = ?$

Решение:

Пусть $AC = x$ см, тогда $BD = 1,5x$ см;

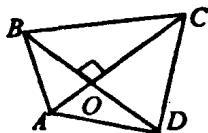
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \Rightarrow 27 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1,5x$, тогда

$x^2 = 36$; $x = 6$;

$AC = 6$ см, $BD = 9$ см.

Ответ: 6 см, 9 см.

478.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
 $BD \perp AC$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

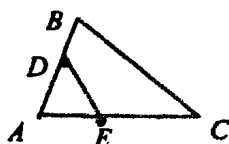
Доказательство:

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{DOA}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA)$;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AO \cdot (OB + OD) + \frac{1}{2} OC \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2} AO \cdot BD + \frac{1}{2} OC \cdot BD = \frac{1}{2} BD \cdot AC.$$

479.



а) $AB = 5\text{ см}$, $AC = 6\text{ см}$,

$AD = 3\text{ см}$, $AE = 2\text{ см}$,

$S_{ABC} = 10\text{ см}^2$

$S_{ADE} = ?$

$\angle A$ — общий, значит:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} \text{ т.е.}$$

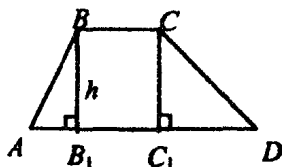
$$\frac{10}{S_{\triangle ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2}, S_{\triangle ADE} = 2\text{ см}^2;$$

б) $AB = 8\text{ см}$, $AC = 3\text{ см}$, $AE = 2\text{ см}$, $S_{ADE} = 10\text{ см}^2$, $AD = ?$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{AD \cdot 2}{8 \cdot 3}, \text{ откуда } AD = 2,4\text{ см}.$$

480.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AD + CB) \cdot h;$$

а) $AD = 21\text{ см}$, $CB = 17\text{ см}$,

$h = 7\text{ см}$, следовательно,

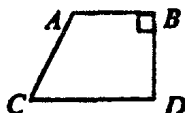
$$S = \frac{1}{2} (21 + 17) \cdot 7 = 133\text{ см}^2;$$

б) $\angle D = 30^\circ$, $BC = 2\text{ см}$, $AD = 10\text{ см}$, $DC = 8\text{ см}$, $S = ?$

Рассмотрим $\triangle DCC_1$: $\angle C_1 = 90^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, следовательно,

$$CC_1 = \frac{1}{2} CD, CC_1 = 4\text{ см}, \text{ т.к. } CC_1 = h, \text{ то } h = 4\text{ см}.$$

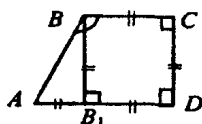
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (2+10) \cdot 4 = 24\text{ см}^2.$$



в) $AB = 5\text{ см}$, $BC = 8\text{ см}$, $CD = 13\text{ см}$,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (5 + 13) \cdot 8 = 72\text{ см}^2.$$

481.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $\angle D = 90^\circ$, $BC = CD = 6$;
 $\angle B = 135^\circ$;
 $S_{ABCD} = ?$

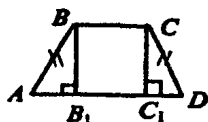
Решение:

1) $BB_1 \perp AD$, в $\triangle ABB_1$: $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, тогда,
 $AB_1 = CD = BB_1 = 6$ см,
отсюда $AD = B_1D + AB_1 = 6 + 6 = 12$ см

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} (12 + 6) \cdot 6 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ: 54 см^2 .

482.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AB = CD$;
 $\angle B = 135^\circ$;
 $S = ?$

Решение:

1) В $\triangle ABB_1$: $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, значит, $AB_1 = BB_1 = 1,4$ см, также из $\triangle CC_1D$: $C_1D = C_1C = 1,4$ см;

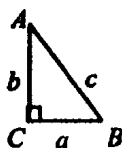
2) $B_1C_1 = B_1D - C_1D = 3,4 - 1,4 = 2$ см. Т.к. $B_1C_1 = BC$, то $BC = 2$ см;
 $AD = AB_1 + B_1D = 1,4 + 3,4$, $AD = 4,8$ см;

$$3) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} (4,8 + 2) \cdot 1,4 = 4,76 \text{ см}^2.$$

Ответ: $4,76 \text{ см}^2$.

§ 3. Теорема Пифагора

483.



$$c^2 = a^2 + b^2;$$

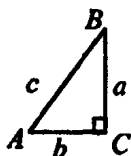
а) $a = 6$, $b = 8$, $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = \sqrt{100} = 10$;

б) $a = 5$, $b = 6$, $c^2 = 25 + 36 = 61$, $c = \sqrt{61}$;

$$в) a = \frac{3}{7}, b = \frac{4}{7}, c^2 = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}, c = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7};$$

$$г) a = 8, b = 8\sqrt{3}, c^2 = 64 + 192 = 256, c = \sqrt{256} = 16.$$

484.



$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$а) a = 12, c = 13, 13^2 = 12^2 + b^2, b^2 = 25, b = \sqrt{25} = 5;$$

$$б) a = 7, c = 9, 81 = 49 + b^2, b^2 = 34, b = \sqrt{34}$$

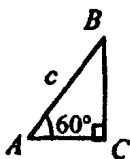
$$в) a = 12, c = 2b, 4b^2 = 144 + b^2, 3b^2 = 144;$$

$$b^2 = 48, b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$г) a = 2\sqrt{3}, c = 2b, 4b^2 = 12 + b^2, 3b^2 = 12; b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2;$$

$$д) a = 3b, c = , 40 = 9b^2 + b^2, 10b^2 = 40; b^2 = 4, b = \sqrt{4} = 2.$$

485.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$\angle A = 60^\circ$, $AB = c$;

$BC = ?$

Решение:

$$1) \angle A = 60^\circ, \angle C = 90^\circ, \text{ следовательно, } \angle B = 30^\circ, \text{ значит, } AC = \frac{1}{2} c;$$

$$2) BC^2 = AB^2 - AC^2 = c^2 - \frac{1}{4} c^2 = \frac{3}{4} c^2, \text{ т.е. } BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ответ. } \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

486.



$$а) AB = 5, AC = 13, AD = ?$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ откуда}$$

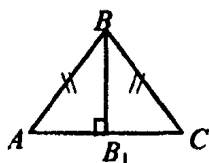
$$AD^2 = AC^2 - CD^2;$$

$$AD^2 = 169 - 25 = 144;$$

$$AD = \sqrt{144} = 12;$$

- б) $CD = 1,5$, $AC = 2,5$, $BC = ?$ $AC^2 = BC^2 + AB^2$, отсюда
 $BC^2 = AC^2 - AB^2$, $BC^2 = 6,25 - 2,25 = 4$, $BC = \sqrt{4} = 2$;
 в) $BD = 17$, $BC = 15$, $CD = ?$ $BD^2 = CD^2 + BC^2$, отсюда
 $CD^2 = BD^2 - BC^2$, $CD^2 = 289 - 225 = 64$, $CD = \sqrt{64} = 8$.

487.



Дано: $\triangle ABC$;

$$AB = BC = 17 \text{ см};$$

$$AC = 16 \text{ см}, BB_1 \perp AC;$$

$$BB_1 = ?$$

Решение:

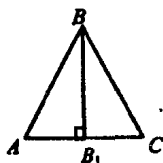
1) известно, что высота равнобедренного треугольника является медианой, следовательно, $AB = BC = 8 \text{ см}$.

2) в $\triangle ABB_1$: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2, BB_1^2 = 289 - 64 = 225; BB_1 = \sqrt{225} = 15$$

Ответ: 15 см.

488.



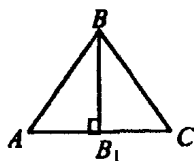
а) $\triangle ABC$ – равнобедренный,

$$AB = 6 \text{ см};$$

$$h = ?$$

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2, BB_1^2 = 36 - 9 = 27, BB_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};$$



б) $\triangle ABC$ – равнобедренный,

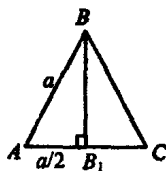
$$h = 4 \text{ см};$$

$$AB = ?$$

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 2x$ и

$$AB_1^2 = BB_1^2 + AB_1^2, 4x^2 = 16 + x^2; 3x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{16}{3}, \text{ т.е. } x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$



Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний;
 $AB = a$.

Доказать: $S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Доказательство:

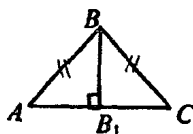
1) В $\triangle ABB_1$: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; \quad BB_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

а) $a = 5$, $S_{ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

б) $a = 1,2$, $S_{ABC} = 0,36 \sqrt{3}$; в) $a = 2\sqrt{2}$, $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$;
 $AB = ?$ и $S_{ABC} = ?$

Решение:

а) $AC = 12$ см, $BB = 8$ см, $BB_1 \perp AC$;

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ (из прямоугольного $\triangle ABB_1$);

$$AB^2 = 64 + 36 = 100; \quad AB = \sqrt{100} = 10;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1; \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2;$$

б) $AC = 8$ см, $\angle B = 120^\circ$;

1) В $\triangle ABB_1$, $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, значит, $\angle A = 30^\circ$;

пусть $BB_1 = x$, тогда $AB = 2x$,

$$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2; \quad 4x^2 = 16 + x^2; \quad 3x^2 = 16; \quad x^2 = \frac{16}{3},$$

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ т.к. } AB = 2x, \text{ то } AB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ см, а } BB_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

$$2) S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2;$$

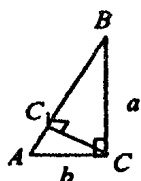
$$\text{в) } \angle B = 90^\circ, BB_1 = 7 \text{ см.}$$

$$\text{В } \triangle ABB_1: \angle B = 90^\circ, \angle A = \angle B = 45^\circ, \text{ следовательно, } AB_1 = BB_1 = 7 \text{ см; } AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2; AB^2 = 49 + 49 = 98;$$

$$AB = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \text{ см;}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BB; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2.$$

491.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$CC_1 \perp AB$;

$CC_1 = ?$

Решение: $c^2 = a^2 + b^2$;

$$\text{а) } a = 5, b = 12, c = 144 + 25 = 169, c = \sqrt{169} = 13;$$

$$1) \text{ в } \triangle ACC_1: CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2;$$

$$\text{в } \triangle BCC_1: CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2, \text{ значит,}$$

$$AC^2 - AC_1^2 = BC^2 - BC_1^2; 144 - x^2 = 25 - (13 - x)^2, \text{ где } AC_1 = x;$$

$$144 - x^2 = 25 - 169 + 26x - x^2;$$

$$26x = 288; x = 11\frac{1}{13}; \text{ т.е. } AC_1 = 11\frac{1}{13}$$

$$\text{из } \triangle ACC_1: AC^2 = CC_1^2 + AC_1^2, \text{ т.е.}$$

$$2) CC_1^2 = AC^2 - AC_1^2;$$

$$CC_1^2 = 144 - \left(11\frac{1}{13}\right)^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2 = \frac{144 \cdot 169 - 144 \cdot 144}{169} = \frac{144 \cdot 25}{169}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = 4\frac{8}{13}$$

Ответ: $4\frac{8}{13}$

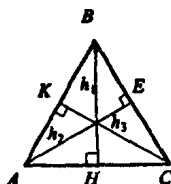
$$\text{б) } a = 12, b = 16, c = 20; 256 - x^2 = 144 - (20 - x)^2 \text{ (см. выше);}$$

$$256 - x^2 = 144 - 400 + 40x - x^2; 40x = 512; x = 12,8, \text{ где } x = AC_1;$$

$$AC_1 = 12,8 \text{ см, следовательно, } CC_1^2 = 16^2 - 12,8^2;$$

$$CC_1^2 = 3,2 \cdot 28,8 = 92,16, CC = \sqrt{92,16} = 9,6 \text{ см.}$$

492.



Дано:

$$AB = BC = 10 \text{ см};$$

$$AC = 12 \text{ см};$$

$$h_1, h_2, h_3 = ?$$

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABH$: $AB^2 = BH^2 + AH^2$, следовательно,

$$BH^2 = AB^2 - AH^2, BH^2 = 100 - 36 = 64, BH = \sqrt{64} = 8 \text{ см}.$$

2) Рассмотрим $\triangle AEC$: $AE^2 = AC^2 - CE^2$;

$\triangle ABE$: $AE^2 = AB^2 - BE^2$, если $CE = x$, то имеем:

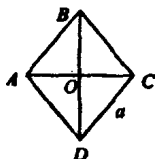
$$12^2 - x^2 = 100 - (10 - x)^2; 144 - x^2 = 100 - 100 + 20x - x^2;$$

$$20x = 44; x = 7,2 \text{ см, т.е. } x = EC = 7,2 \text{ см};$$

$$3) AE^2 = AC^2 - CE^2; AE^2 = 144 - 51,84 = 92,16; AE = \sqrt{92,16} = 9,6$$

Ответ: $h_2 = h_3 = 9,6 \text{ см}, h_1 = 8 \text{ см}.$

493.

Дано: $ABCD$ – ромб;

$$AC = 10 \text{ см}, BD = 24 \text{ см};$$

$$S = ?, AB = ?$$

Решение:

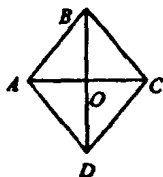
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120 \text{ см}^2.$$

Рассмотрим $\triangle ABO$: $AB^2 = AO^2 + BO^2$, $AB^2 = 5^2 + 12^2$;

$$AB = \sqrt{169} = 13 \text{ см}.$$

Ответ: $13 \text{ см}; 120 \text{ см}^2.$

494.

Дано: $ABCD$ – ромб;

$$AB = 10 \text{ см}, AC = 12 \text{ см};$$

$$S = ?, BD = ?$$

Решение:

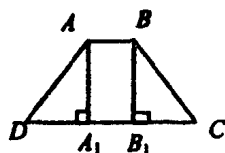
Рассмотрим $\triangle ABO$: $BO^2 = AB^2 - AO^2$; $BO^2 = 100 - 36 = 64$;

$BO = \sqrt{64} = 8$ см, т.к. $BD = 2BO$, то $BD = 16$ см;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD; S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ см}^2.$$

Ответ: 16 см; 96 см².

495.



Дано: ABCD – трапеция;

$AB \parallel CD$;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см,

по усл. $DA = BC$, следовательно, $\triangle ADA_1 = \triangle BCB_1$ по катету и гипотенузе, где $AA_1^2 = AD^2 - DA_1^2$; $AA_1^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$,
 $AA_1 = \sqrt{144} = 12$ см;

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC) \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot (10 + 20) \cdot 12 = 180 \text{ см}^2.$$

Ответ: 180 см².

б) $\angle C = \angle D = 60^\circ$, $AB = BC = 8$ см.

Рассмотрим $\triangle BCB_1$: $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, следовательно,
 $B_1C = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ см;

имеем: $\triangle DAA_1 = \triangle CBB_1$, значит $DA_1 = 4$ см;

$DC = DA_1 + B_1C + A_1B_1$; $DC = 4 + 4 + 8 = 16$ см; из $\triangle BB_1C$ имеем:

$$BB_1^2 = BC^2 - B_1C^2; BB_1^2 = 64 - 16 = 48; BB_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + DC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot (8 + 16) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $48\sqrt{3}$ см².

в) $\angle C = \angle D = 45^\circ$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

по усл. $\angle C = \angle D = 45^\circ$, значит $\triangle DAA_1 = \triangle BCC_1$ (по катету и острому углу) т.к. $DA_1 = A_1A = BB_1 = B_1C_1$, то они равнобедренные из $\triangle AA_1D$ следует: $AD^2 = AA_1^2 + DA_1^2$;

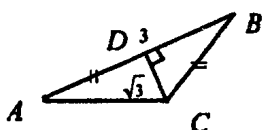
$$162 = x^2 + x^2; x^2 = 81, x = \sqrt{81} = 9; B_1C = BB_1 = 9 \text{ см};$$

$$DC = A_1B_1 + DA_1 + B_1C = 6 + 9 + 9 = 24 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot AA_1 = \frac{1}{2} (6 + 24) \cdot 9 = 135 \text{ см}^2.$$

Ответ: 135 см^2 .

496.



Дано: $\triangle ABC$;
 $CD \perp AB$, $AD = BC$;
 $AB = 3$, $CD = \sqrt{3}$;
 $AC = ?$

Решение:

1) Пусть $BC = AD = x$, тогда в $\triangle DBC$: $BC^2 = DC^2 + DB^2$;

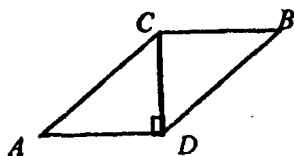
$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2 = 3 + 9 - 6x + x^2; 6x = 12; x = 2; \text{ т.е.}$$

$$BC = AD = 2 \text{ см};$$

$$2) \text{ из } \triangle ADC: AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 3 = 7; AC = \sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$.

497.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $BD \perp AD$;
 $P_{ABCD} = 50 \text{ см}$;
 $AC - AD = 1 \text{ см}$;
 $CD = ?$

Решение:

1) Пусть $AD = x \text{ см}$, тогда $AC = (x + 1) \text{ см}$, поскольку

$$P_{ABCD} = 2(AC + AD), \text{ то } 50 = 2 \cdot (x + x + 1);$$

$$25 = 2x + 1; 2x = 24; x = 12, \text{ т.е. } AD = 12 \text{ см}, AC = 13 \text{ см};$$

2) из $\triangle ACD$: $CD^2 = AC^2 - AD^2$;

$$CD^2 = 13^2 - 12^2; CD^2 = 25, CD = \sqrt{25} = 5 \text{ см}.$$

Ответ: 5 см.

498.

Является ли треугольник прямоугольным? $a^2 + b^2 = c^2$, где ab – катет, c – гипотенуза.

а) 6, 8, 10: $6^2 + 8^2 = 10^2$, следовательно, да;

б) 5, 6, 7: $5^2 + 6^2 \neq 7^2$, следовательно, нет;

в) 9, 12, 15: $9^2 + 12^2 = 15^2$,

$225 = 225$, следовательно, да;

г) 10, 24, 26: $10^2 + 24^2 = 26^2$,

$676 = 676$, следовательно, да;

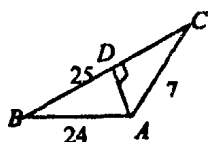
д) 3, 4, 6: $3^2 + 4^2 \neq 6^2$, $25 \neq 36$, следовательно, нет;

е) 11, 9, 13: $11^2 + 9^2 \neq 13^2$, $202 \neq 169$, следовательно, нет;

ж) 15, 20, 25: $15^2 + 20^2 = 25^2$,

$625 = 625$, следовательно, да.

499.



а) Дано: $\triangle ABC$;

$AB = 24\text{ см}$, $BC = 25\text{ см}$, $AC = 7\text{ см}$.

Найти: меньшую высоту.

Решение:

Высота, которая опущена на большую сторону, является меньшей.

из $\triangle ABD$: $AD^2 = AB^2 - BD^2$;

из $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 - CD^2$;

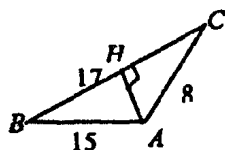
т.е. $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$;

$24^2 - x^2 = 7^2 - (25-x)^2$, где $BD = x$;

$50x = 1152$; $x = 23,04$, $x = BD = 23,04\text{ см}$;

$AD^2 = AB^2 - BD^2$, т.е.

$AD^2 = 24^2 - (23,04)^2 = 45,1584$; $AD = \sqrt{45,1584} = 6,72\text{ см}$.



б) Дано: $\triangle ABC$;

$AB = 17\text{ см}$, $AC = 15\text{ см}$;

$BC = 8\text{ см}$.

$CH = ?$

Решение:

из $\triangle ACH$: $HC^2 = AC^2 - AH^2$;

из $\triangle BCH$: $HC^2 = BC^2 - BH^2$, т.е. $AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$;

$225 - x^2 = 64 - (17-x)^2$; $225 - x^2 = 64 - 289 + 34 - x^2$, где $AH = x$;

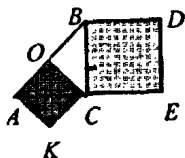
$34x = 540$; $x = 13\frac{4}{17}$, т.к. $AH = x$, то $AH = 13\frac{4}{17}$

$HC^2 = AC^2 - AH^2$;

$$HC^2 = 15^2 - \left(13 \frac{4}{17}\right)^2 = \frac{225 \cdot 64}{289}, HC = \sqrt{\frac{225 \cdot 64}{289}} = 17 \frac{1}{17} \text{ см.}$$

Ответ: $17 \frac{1}{17}$ см.

500.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$;
BDEK, AOCK – квадраты.

Доказать: $S_{BDEK} = 2 \cdot S_{AOCK}$.

Доказательство:

1) Пусть $AC = BC = a$, тогда $S_{BDEC} = a^2$;

в $\triangle AOC$: $OC = \frac{1}{2} AB$, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $AB^2 = 2a^2$, т.е.

$AB = a\sqrt{2}$, значит, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и

$$S_{AOCK} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

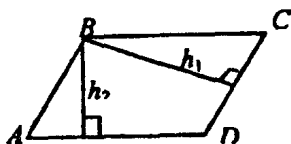
Сравнивая $S_{BDEC} = a^2$ и $S_{AOCK} = \frac{a^2}{2}$, получаем $S_{BDEC} = 2 \cdot S_{AOCK}$

Что и требовалось доказать.

501.

$$27 \text{ га} = 0,27 \text{ км}^2 = 270000 \text{ м}^2.$$

502.



Дано: ABCD – параллелограмм;

$$P_{ABCD} = 42 \text{ см;}$$

$$h_1 = 5 \text{ см, } h_2 = 4 \text{ см;}$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Решение:

1) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$; т.е. $42 = 2 \cdot (AB + AD)$, следовательно,
 $AB = 21 - AD$;

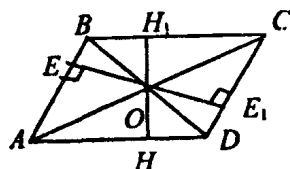
$$2) AD \cdot h_2 = AB \cdot h_1; AD \cdot 4 = (21 - AD) \cdot 5;$$

$$AD = 11 \frac{2}{3}, \text{ значит, } AB = 21 - 11 \frac{2}{3} = 9 \frac{1}{3} \text{ см};$$

$$3) S_{ABCD} = AD \cdot h_2 = 11 \frac{2}{3} \cdot 4 = 46 \frac{2}{3} \text{ см}^2;$$

$$\text{Ответ: } 46 \frac{2}{3} \text{ см}^2.$$

503.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$$S_{ABCD} = 24 \text{ см}^2;$$

$$OH \perp AD, OH = 2 \text{ см};$$

$$OE \perp AB, OE = 3 \text{ см};$$

$$P_{ABCD} = ?$$

Решение:

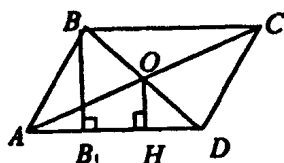
$$S_{ABCD} = HH_1 \cdot AD; 24 = 4 \cdot AD; AD = 6 \text{ см, также}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot EE_1; 24 = AB \cdot 6; AB = 4 \text{ см};$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (6 + 4) = 20 \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } 20 \text{ см.}$$

504.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

$$AB = 29 \text{ см, } OH \perp AD,$$

$$AH = 33 \text{ см, } HD = 12 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Решение:

$$1) BB_1 \perp AD, \text{ в } \triangle BDB_1: \text{ по свойству диагоналей } BO = OD;$$

$$B_1H \perp BB_1 \text{ (т.к. } B_1B \perp AD, OH \perp AD), \text{ по теореме Фалеса имеем:}$$

$$HD = HB_1 = 12 \text{ см.}$$

$$2) \text{ в } \triangle ABB_1: BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 29^2 - (33 - 12)^2 = 400;$$

$$BB_1 = \sqrt{400} = 20 \text{ см; } AD = AH + HD = 45 \text{ см};$$

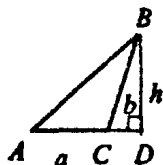
$$3) S_{ABCD} = AD \cdot BB_1; S_{ABCD} = 45 \cdot 20 = 900 \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } 900 \text{ см}^2.$$

505.

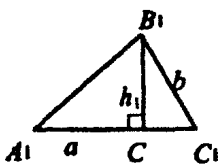
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$$

1)



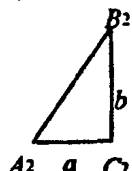
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h;$$

2)



$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} a \cdot h_1;$$

3)



$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

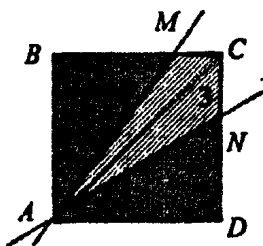
В случаях 1) и 2) h и $h_1 < b$, (в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета).

Сравнивая правые части формул, имеем:

$$\frac{1}{2} a \cdot h < \frac{1}{2} a \cdot b; \quad \frac{1}{2} a \cdot h_1 < \frac{1}{2} a \cdot b, \text{ следовательно,}$$

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} a \cdot b - \text{наибольшая.}$$

506.



Пусть $AB = a$, тогда $S_1 = \frac{1}{2} BM \cdot AB$,

$$S_2 = \frac{1}{2} DN \cdot AD, \quad S_3 = S_{ABCD} - 2 \cdot S_1.$$

Пусть $M \in BC$, тогда $BM = \frac{2}{3} BC$, а

$N \in CD$, тогда $DN = \frac{2}{3} CD$, значит,

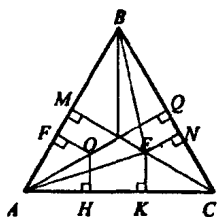
AM, AN – искомые прямые.

Имеем: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} a \cdot BM$, $S_{\Delta ADN} = \frac{1}{2} a \cdot DN$,

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} a \cdot MC, \quad S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2} a \cdot CN, \text{ т.е. } DN = BM = MC + CN,$$

следовательно, $(BC + CD)$ делим на 6 равных частей, именно:

BC и CD на 3 равные части, т.е. $BM = \frac{2}{3} BC$ и $DN = \frac{2}{3} CD$.



Дано: $\triangle ABC$;
 $AB = BC = AC$;
 $EN \perp BC, EK \perp AC, EM \perp AB$;
 $OQ \perp BC, OH \perp AC, OF \perp AB$.

Доказать: $EN + EK + EM =$
 $= OQ + OH + OF$.

Доказательство:

1) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE}$, также $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$,

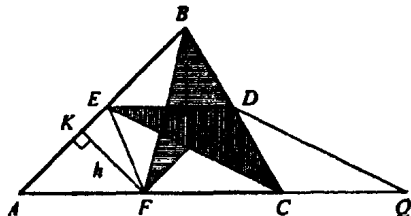
т.е. $S_{\triangle AEC} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOB}$ или

$$\frac{1}{2} AC \cdot EK + \frac{1}{2} BC \cdot EN + \frac{1}{2} AB \cdot EM = \frac{1}{2} AC \cdot OH + \frac{1}{2} BC \cdot OQ +$$

$$+ \frac{1}{2} AB \cdot OF, \text{ имеем:}$$

$$AC \cdot EK + EN \cdot BC + AB \cdot EM = AC \cdot OH + BC \cdot OQ + OF \cdot AB$$

Что и требовалось доказать.



Дано: $\triangle ABC$;
 $D \in BC$;
 $ED \parallel AC, DF \parallel AB$.
 Доказать: $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BDF}$

Доказательство:

1) Проведем $FK \perp BD$, имеем $FKBD$ и $AEDF$ – параллелограммы.

$S_{\triangle AEDF} = AE \cdot h, S_{\triangle FKDB} = KB \cdot h, AE = KB$, следовательно,

$$S_{\triangle AEDF} = S_{\triangle FKDB};$$

$$\triangle FBD = \frac{1}{2} FKDB, \text{ следовательно, } S_{\triangle FBD} = \frac{1}{2} S_{\triangle FKDB} = \frac{1}{2} S_{\triangle AEDF} (1);$$

2) Проведем $CQ \parallel ED, CQ = ED$, имеем $QCED$ – параллелограмм и параллелограмм $AEDF$, у которых стороны равны; т.е.

$$S_{\triangle QCED} = S_{\triangle AEDF};$$

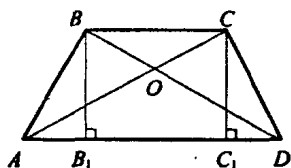
$$\triangle EDC = \frac{1}{2} \text{ параллелограмма } QCED, \text{ следовательно,}$$

$$S_{\Delta EDC} = \frac{1}{2} S_{QCED} = \frac{1}{2} S_{\Delta EDF} (2);$$

3) Сравнивая (1) и (2) имеем: $S_{\Delta EDC} = S_{\Delta FDB}$.

Что и требовалось доказать.

511.



Дано: ABCD – трапеция;

$$AC \cap BD = O.$$

1) Сравнить: $S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta ACD}$.

2) Сравнить: $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO}$.

Доказать: $AO \cdot OB = OC \cdot OD$.

1) Сравнивая ΔABD и ΔACD , имеем:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BB_1; S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CC_1, BB_1 = CC_1, \text{ т.е.}$$

$$S_{ABD} = S_{ACD};$$

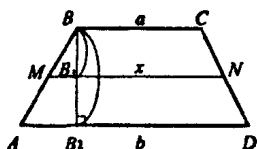
$$2) S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD}; S_{CDO} = S_{ACD} - S_{AOD}; S_{ABO} = S_{CDO};$$

3) в ΔAOB и ΔCOD вертикальные углы $\angle AOB = \angle COD$, следова-

$$\text{тельно, } \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDO}} = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}, \text{ т.е. } 1 = \frac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}, \text{ т.е. } AO \cdot OB = CO \cdot OD,$$

что и требовалось доказать.

512.



Дано: ABCD – трапеция;

$$BC = a, AD = b;$$

$$MN \parallel AD$$

$$S_{AMND} = S_{MBCN};$$

$$MN = ?$$

Решение:

Пусть $MN = x$ см, тогда

$$1) S_{AMND} = \frac{1}{2} (b + x)(h - h_1) = \frac{1}{2} (x + a)h_1, \text{ т.е.}$$

$$(h - h_1)(b + x) = (x + a)h_1; h(b + x) = (a + b + 2x)h_1;$$

$$2) S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{MBCN}, \text{ т.е. } \frac{1}{2} (a + b) \cdot h = (b + x)(h - h_1) + \frac{1}{2} (x + a)h_1,$$

$$\text{или } (a + b) \cdot h = (b + x)h + (a - b)h_1; (a - x)h = (a - b)h_1.$$

3) Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} (\bar{b} + x) \cdot h = (a + b + 2x) \cdot h_1; \\ (a - x) \cdot h = (a - b) \cdot h_1 \end{cases}$$

$$(a-x)(a+b+2x) = (b+x)(a-x);$$

$$a^2 + ab + 2ax - ax - bx - 2x^2 = ab + ax - b^2 - bx, a^2 - 2x^2 + b^2 = 0;$$

$$2x^2 = a^2 + b^2 = 0; \text{ т.е. } x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ а } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$\text{Ответ: } MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

513.

Дано: ABCD – ромб;

$$d_1 = 18\text{м}, d_2 = 24\text{м};$$

$$P_{ABCD} = ?, h = ?$$

Решение:

$$1) S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24 = 216\text{м}.$$

$$2) \text{ Из } \triangle ABO: AB^2 = AO^2 + BO^2, \text{ т.е.}$$

$$AB^2 = 9^2 + 12^2; AB^2 = 225; AB = \sqrt{225} = 15\text{м};$$

$$3) S_{ABCD} = h \cdot AB; 216 = h \cdot 15; h = 14,4\text{м};$$

$$4) P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 15 = 60\text{м}.$$

Ответ: 60м, 14,4 м.

514.

Дано: ABCD – ромб, $S_{ABCD} = 540\text{см}$, $d = 4,5\text{дм}$, $OH \perp AB$;
 $OH = ?$

Решение:

$$1) S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2; \text{ т.е. } 540 = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot d_2; \text{ отсюда } d_2 = 24\text{м};$$

$$AO = \frac{1}{2} d_1 = 22,5\text{см}; OB = \frac{1}{2} d_2 = 12\text{м};$$

$$2) \text{ из } \triangle ABO: AB^2 = AO^2 + OB^2;$$

$$AB^2 = 506,25 + 144 = 650,25; AB = \sqrt{650,25} = 25,5 \text{ м};$$

$$3) S_{ABCD} = HH_1 \cdot AB; 540 = HH_1 \cdot 22,5;$$

$$HH_1 = 21 \frac{3}{17}, HO = \frac{1}{2} HH_1 = 10 \frac{10}{17} \text{ м}.$$

515.

а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 30^\circ$; $S_{ABC} = ?$ Решение:

1) из $\triangle ABM$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, следовательно, $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ см.

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} 20 \sqrt{3} \cdot 10 = 100 \sqrt{3} \text{ см};$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 400 - 100 = 300, AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ см},$$

значит $AC = 20\sqrt{3}$ см.б) Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$; $AN \perp BC$, $AN = 6$ см, $\angle CAN = 45^\circ$ Найти: $S_{ABC} = ?$ Решение:

1) в $\triangle AMC$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, значит, $\angle C = 45^\circ$, следовательно, $AN = NC = 6$ см;

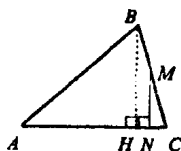
$$AC^2 = AN^2 + NC^2 = 36 + 36 = 72, \text{ следовательно } AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2};$$

2) $\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$, следовательно $\angle BAC = 45^\circ$, значит $\triangle ABC$ – прямоугольный, значит, AN и AB совпадают, следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AN \cdot NC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ: 18 см^2 .

516.

Дано: $\triangle ABC$, $BC = 34$ см; $MN \perp AC$, $BM = MC$; $AN = 25$ см, $NC = 15$ см; $S_{ABC} = ?$ Решение:

1) $BH \perp AC$; из $\triangle BCH$: $BM = MC$, $MN \parallel BH$, значит, $NC = NH = 15$ см;

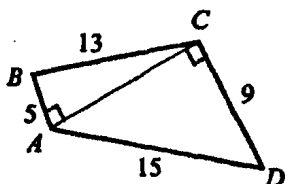
2) из $\triangle BCH$: $BC^2 = BH^2 + HC^2$, т.е. $BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$$BH^2 = 34^2 - 30^2 = 256, BH = \sqrt{256} = 16 \text{ см};$$

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 16 = 320 \text{ см}^2.$$

Ответ: 320 см^2 .

517.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
 $AB = 5$ см, $BC = 13$ см;
 $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см;
 $S_{ABCD} = ?$

Решение: $BC^2 = BA^2 + AC^2$, т.е. $AC^2 = BC^2 - BA^2$.

Т.к. $AB^2 = 25$, $BC^2 = 169$ (по усл.), то $AC^2 = 169 - 25 = 144$.

Т.к. $CD^2 = 81$, $AD^2 = 225$ (по усл.), то $AC^2 = 225 - 81 = 144$,

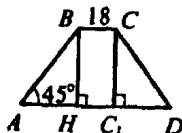
следовательно, $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ – прямоугольные, имеющие общую сторону $AC = 12$ см.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AC + \frac{1}{2} AC \cdot CD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 12 + 9 \cdot 12) = 98 \text{ см}^2.$$

Ответ: 98 см^2 .

518.



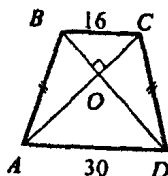
а) Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AB = CD$, $BC = 18$ см;
 $BH = 9$ см, $\angle A = 45^\circ$;
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) из $\triangle ABH$: $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, значит, $\angle B = 45^\circ$, значит, $BH = AH = 9$ см;

$ABCD$ – равнобедр., значит $AH = C_1D = 9$ см и $AD = 36$ см.

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BH = \frac{1}{2} (18 + 36) \cdot 9 = 243 \text{ см}^2.$$

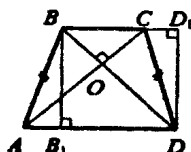


б) Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AB = CD$;
 $AB = 16$ см, $AD = 30$ см;
 $AC \perp BD$;
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) $ABCD$ – равнобедр., значит, $BD = AC$ и $OD = AO$; $BO = OC$;
из $\triangle BOC$: $BO^2 + OC^2 = 16^2$; $2x^2 = 256$; $x = 8\sqrt{2}$, где $x = BO = OC$;
в $\triangle AOD$: $AO^2 + OD^2 = AD^2$; $2y^2 = 900$; $y = 15\sqrt{2}$, где $y = AO = OD$;
 $AC = AO + OC = 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$;

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \text{ т.е. } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 23\sqrt{2} = 529 \text{ см}^2.$$

519.Дано: $ABCD$ – трапеция; $AC \perp BD$; $BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$; $S_{ABCD} = ?$ **Решение:**

1) Проведем: $DD_1 \perp BC$, имеем BB_1DD_1 – прямоугольник;

$$S_{B_1BD_1} = S_{ABCD} \text{ (т.к. } S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CDD_1}, S_{B_1BCD_1} \text{ - общая).}$$

2) Надо доказать, что BB_1DD_1 – квадрат,

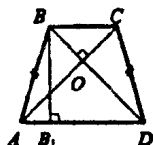
т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $AC = B_1D_1$;

из $BD \perp AC$, $AC \parallel B_1D_1$ следует, что $BD \perp B_1D_1$, $BD = B_1D_1$,

но т.к. четырехугольник, диагонали которого равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам – квадрат, то

$$BB_1 = BD_1 = h; S_{B_1BD_1} = S_{ABCD} = h^2.$$

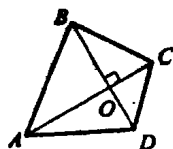
Ответ: h^2

520.Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция; $AC \perp BD$, $AB = CD$; $AD + BC = 2a$; $S_{ABCD} = ?$ **Решение:**

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BB_1, S_{ABCD} = BB_1^2 \text{ (см. 519), следовательно,}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot BB_1 = BB_1^2, \text{ где } a = BB_1, \text{ т.е. } S_{ABCD} = a^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = a^2$.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

$AC \perp BD$.

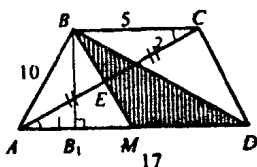
Доказать: $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$.

$$AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) + (BO^2 + OC^2) = (AO^2 + BO^2) + (OD^2 + OC^2) = AB^2 + CD^2 \text{ (по теореме Пифагора).}$$

522.



Дано: $ABCD$ – трапеция;

$AB = CD$;

$AD = 17$ см, $BC = 5$ см;

$AB = 10$ см;

$BM \cap AC = E$, $AE = EC$;

$S_{BDM} = ?$

Решение:

1) из $\triangle ABB_1$: $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 10^2 - ((17-5):2)^2 = 100 - 36 = 64$,

$BB_1 = \sqrt{64} = 8$ см;

2) из $\triangle AEM$ и $\triangle BEC$: $AE = EC$, $\angle AEM = \angle BEC$,

$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и сек. AC), значит.

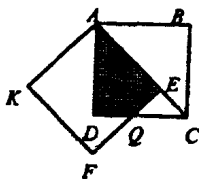
$\triangle BEC = \triangle AEM$ (по стороне и 2 прилежащим углам), и $AM = BC = 5$ см,

$MD = AD - AM = 17 - 5 = 12$ см;

3) $S_{BDM} = \frac{1}{2} MD \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2$.

Ответ: 48 см^2 .

523.



Дано: $ABCD$, $AEFK$ – квадраты;

$AB = AE = a$;

$S_1 = ?$

Решение:

1) из прямоугольного $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$, т.е.

$AC = a\sqrt{2}$;

$$2) EC = AC - AE = a\sqrt{2} - a;$$

$$3) S_{ECQ} = \frac{1}{2} EC \cdot EQ, \text{ но } EC = EQ, \text{ следовательно, } S_{ECQ} = \frac{1}{2} (EC)^2;$$

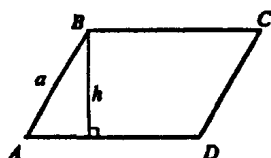
$$S_{ECQ} = \frac{1}{2} a^2 (\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{(3 - 2\sqrt{2}) \cdot a^2}{2}$$

$$S_1 = S_{ABC} - S_{ECQ} = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} (3 - 2\sqrt{2}) a^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 - \frac{3}{2} a^2 + \sqrt{2} a^2 = a^2 (\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $a^2 (\sqrt{2} - 1)$.

524.



Дано: ABCD – параллелограмм;

$$a = 11,735 \text{ м};$$

$$h < a \text{ на } 3,485 \text{ м};$$

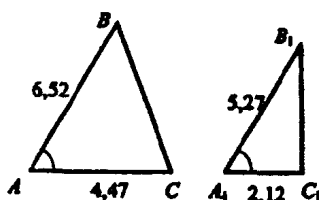
$$S = ?$$

Решение:

$S_{ABCD} = a \cdot h$; h (по условию) $= 11,735 - 3,485 = 8,25 \text{ м}$; следовательно-
но $S = 11,735 \cdot 8,25 = 96,8138 \text{ м}^2$;

а) $S \approx 96,814 \text{ м}^2$, б) $S \approx 96,81 \text{ м}^2$, в) $S \approx 96,8 \text{ м}^2$.

525.



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$;

$$\angle A = \angle A_1;$$

$$AB = 6,52 \text{ см}, AC = 4,47 \text{ см};$$

$$A_1B_1 = 5,27 \text{ см};$$

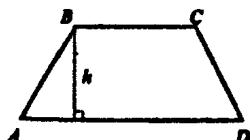
$$A_1C_1 = 2,12 \text{ см}.$$

Найти: $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle A_1B_1C_1} - ?$

Решение:

т.к. $\angle A = \angle A_1$, то $S_{\triangle ABC} / S_{\triangle A_1B_1C_1} = 6,52 \cdot 4,47 / 5,27 \cdot 2,12 \approx 2,61$.

526.



Дано: ABCD – трапеция;

$$BC = 1,17 \text{ дм}, AD = 3,58 \text{ см};$$

$$h = 2,33 \text{ дм}.$$

Найти: $S_{ABCD} - ?$

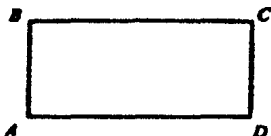
Решение:

$$S = (AD + BC) \cdot h;$$

$$S = \frac{1}{2} (1,17 + 3,58) \cdot 2,33 = 2,375 \cdot 2,33 = 5,53375 \approx 5,53 \text{ дм}^2.$$

Ответ: $5,53 \text{ дм}^2$.

527.



Дано: $S_{ABCD} = 17,635 \text{ см}^2$;

$AB = 5,28 \text{ см}$.

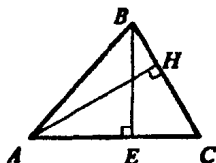
Найти: AD — ?

Решение:

$$AD = 17,635 : 5,28 = 3,3399621... \text{ см};$$

а) $AD \approx 3,34 \text{ см}$; б) $AD \approx 3,3 \text{ см}$.

528.



Дано: $\triangle ABC$;

$BC = 5,62 \text{ м}$, $AC = 4,35 \text{ м}$;

$BE \perp AC$.

Найти: BE — ?

Решение:

$$1) S_{\Delta} = \frac{1}{2} BC \cdot AH; S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 5,62 \cdot 4,35 = 12,2235 \text{ м}^2;$$

$$2) S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BE, \quad 12,2235 = \frac{1}{2} \cdot 7,19 \cdot BE,$$

следовательно, $BE = 3,400139 \approx 3 \text{ м } 40 \text{ см}$.

Ответ: $3 \text{ м } 40 \text{ см}$.

529.

$$\text{а) } a = 2,5 \text{ см}, b = 1,7 \text{ см}; S = 2,5 \cdot 1,7 = 4,25 \text{ см}^2,$$

можно $S = (4 \pm 1) \text{ см}^2$;

$$\text{б) } a = 3,2 \text{ см}, b = 2,5 \text{ см}; S = 3,2 \cdot 2,5 = 8 \text{ см}^2,$$

можно $S = (8 \pm 1) \text{ см}^2$;

в) $a = 5,6 \text{ см}$, $b = 7,2 \text{ см}$; $S = 5,6 \cdot 7,2 = 40,32 \text{ см}^2$, нет, т.к.
 $39,05 \leq S \leq 41,61 \text{ см}^2$.

530.

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

если $a = 7,25$, $b = 3,67$, то

$$c^2 = 7,25^2 + 3,67^2 = 52,5625 + 13,4689;$$

$$c^2 = 66,0314; c \approx 8,13 \text{ см}.$$

531.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

а) если $a < c$ в три раза, найти b — ?

$$a = 11,2 : 3 = 3,7333...; b^2 = c^2 - a^2;$$

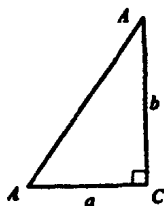
$$b^2 = 11,2^2 - \left(\frac{11,2}{3}\right)^2 = \frac{11,2^2 \cdot 9 - 11,2^2 \cdot 1}{9} = \frac{11,2^2 \cdot 8}{9} = \frac{125,44 \cdot 8}{9} = \frac{1003,52}{9} =$$

$$= 111,5022;$$

$$b = 10,559446...$$

б) $b \approx 10 \text{ дм } 6 \text{ см} = 106 \text{ см}$; в) $105,6 \text{ см}$.

532.



$$a \approx 3,5 \text{ см}, b \approx 4,8 \text{ см};$$

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$c = \sqrt{3,5^2 + 4,8^2} = \sqrt{12,25 + 23,04} =$$

$$= \sqrt{35,29} \approx 5,94053.$$

а) Нельзя, т.к. $5,80 \text{ см} \leq c \leq 6,08 \text{ см}$.

б) Можно, т.к. $c = (5,9 \pm 0,2) \text{ см}$.

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников

533.

Дано: $AB = 15\text{ см}$, $CD = 20\text{ см}$;

$$\frac{AB}{CD} = ?$$

Решение: $\frac{AB}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Если длины отрезков выразить в миллиметрах, то их соотношение не изменится.

534.

а) имеем: $AB = 12$ ед., $CD = 6$ ед., $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $MM_2 = 2$ ед.;

$MM_1 = 2$ ед.; $\frac{MM_1}{M_1M_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{CD}{AD} = \frac{MM_1}{M_1M_2}$ — пропорциональны;

б) $AB = 9$ ед., $BC = 3$ ед., $CD = 6$ ед.

$MM_2 = 3$ ед., $MM_1 = 1$ ед., $M_1M_2 = 2$ ед.

$$\frac{AB}{MM_2} = 3; \frac{BC}{MM_1} = 3; \frac{CD}{M_1M_2} = 3.$$

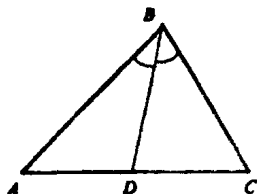
Т.е. $\frac{AB}{MM_2} = \frac{BC}{MM_1} = \frac{CD}{M_1M_2}$ — пропорциональны.

в) $AB = 9$ ед., $BD = 9$ ед.; $MM_1 = 1$ ед.; $M_1M_2 = 2$ ед.;

$$\frac{AB}{MM_1} = 9; \frac{BD}{M_1M_2} = 4,5.$$

Т.е. $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$, следовательно, отрезки непропорциональны.

536.



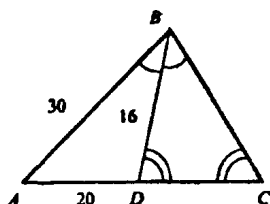
а) Дано: $\triangle ABC$;
 BD — биссектриса,
 $BC = 9\text{ см}$,
 $DC = 4,5\text{ см}$;
 $AD = 7,5\text{ см}$;
 $AB = ?$

Решение:

BD – биссектриса, следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}; \frac{7,5}{AB} = \frac{4,5}{9}; \frac{5}{AB} = \frac{3}{9}; AB = 15.$$

Ответ: 15 см.



б) Дано: $\triangle ABC$;
BD – биссектриса;
 $AB = 30$, $AD = 20$,
 $BD = 16$;
 $\angle BDC = \angle C$;
 $DC = ?$

Решение:

1) BD – биссектриса, следовательно, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{30}{20}$, т.е.

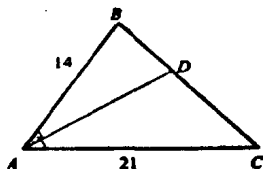
$$\frac{BC}{DC} = \frac{3}{2}, BC = 3x, DC = 2x;$$

2) $\angle BDC = \angle C$, $BD = BC$, значит, $16 = 3x$, $x = 5\frac{1}{3}$, $BC = 3 \cdot x = 5$;

$$3) DC = 2 \cdot x = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$

537.



Дано: $\triangle ABC$

AD – биссектриса;
 $AB = 14$ см, $BC = 20$ см;
 $AC = 21$ см;
BD и DC = ?

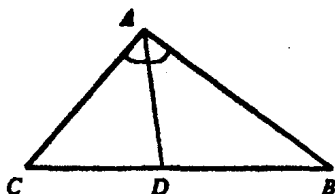
Решение:

AD – биссектриса, следовательно, $\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB}$

Пусть $DC = x$ см, тогда $BD = 20 - x$ см, $\frac{x}{21} = \frac{20 - x}{14}$;

$$2x = 60 - 3x; x = 12; x = DC = 12 \text{ см}; BD = 20 - x = 20 - 12 = 8 \text{ см}.$$

Ответ: $BD = 8$ см, $DC = 12$ см.



Дано: $\triangle ABC$;

AD – биссектриса;

$CD = 4,5 \text{ см}$, $BD = 13,5 \text{ см}$;

$P_{ABC} = 42 \text{ см}$;

AB и $AC = ?$

Решение:

$CB = CD + DB = 4,5 + 13,5 = 18 \text{ см}$;

$P_{ABC} = AB + BC + CA = AC + AB + 18 = 42$, т.е

$AC + AB = 24$ (1);

3) AD – биссектриса, следовательно, $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{DB}$,

$$\frac{AC}{4,5} = \frac{AB}{13,5}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{4,5}{13,5} = \frac{1}{3} \quad (2).$$

Т.е. $AC = x$, $AB = 3x$.

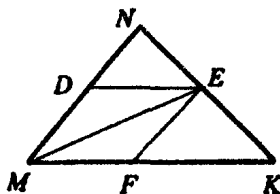
4) Подставляя (2) в (1), имеем:

$x + 3x = 24$, $4x = 24$, $x = 6$; т.к. $AC = x$, $AB = 3x$, то

$AC = 6 \text{ см}$, $AB = 18 \text{ см}$.

Ответ: 6; 18.

539.



Дано: $\triangle MNK$;

$MDEF$ – ромб;

$D \in MN$, $E \in NK$, $F \in MK$;

$MN = 7 \text{ см}$, $NK = 6 \text{ см}$,

$MK = 5 \text{ см}$;

NE , $EK = ?$

Решение:

1) ME – диагональ ромба $MDEF$, следовательно, ME –

биссектриса (по свойству диагоналей ромба), т.е. $\frac{MN}{NE} = \frac{MK}{EK}$ (1).

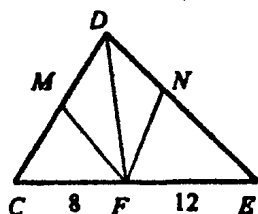
Пусть $NE = x$, тогда $EK = 6 - x$, из (1) следует: $\frac{7}{x} = \frac{5}{6 - x}$

$7(6 - x) = 5x$, $12x = 42$, $x = 3,5$;

$NE = 3,5 \text{ см}$, $EK = 2,5 \text{ см}$.

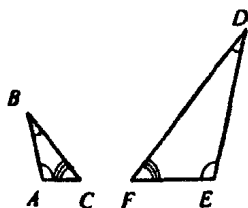
Ответ: 3,5; 2,5.

540.

Дано: $\triangle CDE$; $P_{CDE} = 55\text{ см}$; $DMFN$ – ромб; $M \in CD, F \in CE, N \in DE$; $CF = 8\text{ см}, EF = 12\text{ см}$; CD и $DE = ?$ Решение:1) DF – диагональ ромба $DNFM$, DF – биссектриса (св-во ромба),следовательно: $\frac{DC}{CF} = \frac{DE}{FE}, \frac{DC}{8} = \frac{DE}{12}$, т.е. $\frac{DC}{DE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, значит, $DE = 3x$.2) $P_{CDE} = CD + DE + CE$, т.е. $55 = 2x + 3x + 8 + 12, x = 7$; $DC = 2 \cdot 7 = 14\text{ см}; DE = 3 \cdot 7 = 21\text{ см}$.

Ответ: 14; 21.

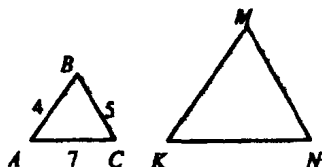
541.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$; $\angle A = 106^\circ, \angle E = 106^\circ$; $\angle B = 34^\circ, \angle = 34^\circ$; $AC = 4,4\text{ см}, DE = 15,6\text{ см}$; $AB = 5,2\text{ см}, FD = 22,8\text{ см}$; $BC = 7,6\text{ см}, EF = 13,2\text{ см}$.Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.Доказательство:1) $\angle A = \angle E = 106^\circ, \angle B = \angle D = 34^\circ, \angle C = \angle F = 40^\circ$.

Все углы соответственно равны.

2) $\frac{AC}{FE} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}, \frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3}, \frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}$, $\frac{AC}{FE} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$; $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Т.к. стороны соответственно пропорциональны с $k = \frac{1}{3}$, углы соответственно равны.

542.

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KMN$;

AB и KM, BC и MN – сходные;

AB = 4 см, BC = 5 см, CA = 7 см;

$$\frac{KM}{AB} = 2,1;$$

KM, MN, KN = ?

Решение:1) $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, следовательно, $\frac{AM}{KM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{KN}$;

$$\frac{4}{KM} = \frac{5}{MN} = \frac{7}{KN}$$

2) $\frac{KM}{AB} = 2,1$, следовательно, $KM = 2,1 \cdot 4 = 8,4$; $5 \cdot 2,1 = MN = 10,5$; $7 \cdot 2,1 = KN$; $KN = 14,7$.

Ответ: 8,4; 10,5; 14,7.

543.

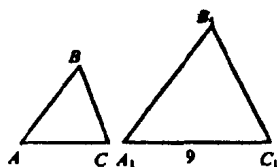
Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.Доказать: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$ Доказательство:1) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит, $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$,т.к. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1$, то:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1},$$

по условию $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$, а из $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ следует:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \text{ т.е. } \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \text{ что и требовалось доказать}$$

544.



Дано: $S_{ABC} = 75 \text{ м}^2$;
 $S_{A_1B_1C_1} = 300 \text{ м}^2$;
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;
 $A_1C_1 = 9 \text{ м}$;
 $AC = ?$

Решение:

а) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, следовательно $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{75}{300} = k^2, k^2 = \frac{1}{4}$,

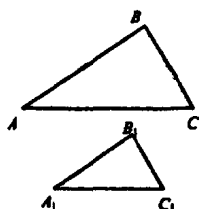
$$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

б) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, следовательно, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$, где $A_1C_1 = 9 \text{ см}$, т.е.

$AC = 4,5 \text{ м}$.

Ответ: 4,5 м.

545.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{5}$$

$S_{ABC} > S_{A_1B_1C_1}$ на 77 см^2 ;

$S_{ABC}, S_{A_1B_1C_1} = ?$

Решение:

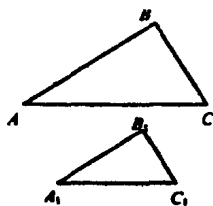
Пусть $S_{A_1B_1C_1} = x \text{ см}^2$, тогда $S_{ABC} = (x+77) \text{ см}^2$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с $k = \frac{6}{5}$, имеем: $\frac{x+77}{x} = \left(\frac{6}{5}\right)^2$

$25(x+77) = 36x, x = 175; S_{ABC} = 252 \text{ см}^2, S_{A_1B_1C_1} = 175 \text{ см}^2$.

Ответ: 252; 175.

546.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;

$$S_{A_1B_1C_1} = 87,5 \text{ см}^2$$

$$k = 1:1000000;$$

$S_{ABC} = ?$

Решение:

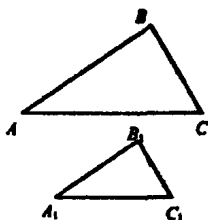
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, следовательно $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 100000^2$;

$$S_{ABC} = 87,5 \cdot 10^{10} = 87,5 \cdot 10^{11} \text{ см}^2;$$

$$87,5 \cdot 10^{11} \text{ см}^2 = 87,5 \text{ км}^2.$$

Ответ: $87,5 \text{ км}^2$.

547.



Дано: $\triangle ABC$ пропорционален $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k .

Доказать: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$.

Доказательство:

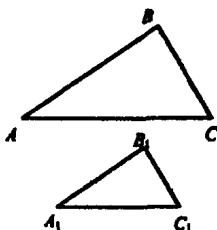
1) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k , следовательно

$$A_1B_1 = k \cdot AB, B_1C_1 = k \cdot BC, A_1C_1 = k \cdot AC$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} &= \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \\ &= \frac{k(AB + BC + AC)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

548.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;

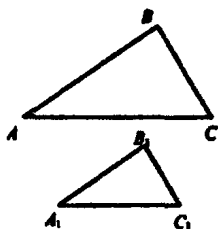
$$BC = 1,4 \text{ м}, B_1C_1 = 56 \text{ см};$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = ?$$

Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ следовательно, } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{140}{56} = 2,5; \quad \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 2,5.$$

Ответ: $2,5$.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;

$$AB = 15 \text{ см},$$

$$AC = 30 \text{ см};$$

$$BC = 20 \text{ см};$$

$$P_{A_1B_1C_1} = 26 \text{ см};$$

$$A_1B_1; B_1C_1; A_1C_1 = ?$$

Решение:

$$1) P_{ABC} = AB + BC + AC; P_{ABC} = 15 + 20 + 30 = 65 \text{ см};$$

$$2) \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ следовательно, } \frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{65}{26} = 2,5,$$

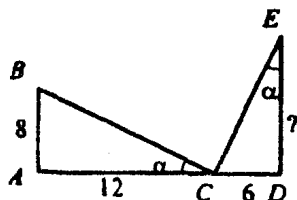
значит, $k = 2,5$, т.к. треугольники пропорциональны, то

$$3) \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2,5; A_1B_1 = \frac{AB}{2,5} = \frac{20}{2,5} = 6 \text{ см};$$

$$B_1C_1 = \frac{20}{2,5} = 8 \text{ см}; A_1C_1 = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ см}.$$

Ответ: 6; 8; 12.

§ 2. Признаки подобия треугольников



а) Из условия следует:

$$\angle C = \angle E = \alpha,$$

$$\angle A = \angle D = 90^\circ,$$

значит, $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ (по двум углам), значит

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{EC}; \frac{8}{6} = \frac{12}{ED}, ED = 9.$$

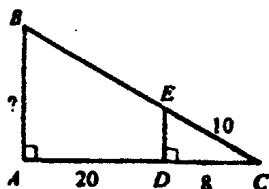
б)

1) Из условия следует:

$$\angle A = \angle D = 90^\circ$$

$\angle C$ — общий, то

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (по двум углам),



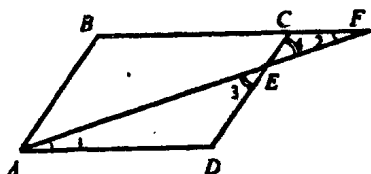
значит, по теореме Пифагора:

$$DZ = \sqrt{100 - 64}, DE = 6;$$

$$2) \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}; \frac{AB}{6} = \frac{28}{8}; AB = 21.$$

Ответ: 9; 21

551.



а) Дано: ABCD – параллелограмм;
 $E \in CD$, $AE \cap BC = F$;
 $DE = 8$ см, $EC = 4$ см,
 $BC = 7$ см, $AE = 10$ см;
 EF , $FC = ?$

Решение:

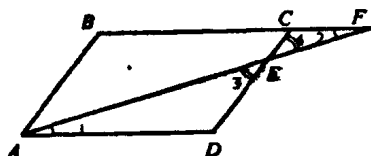
1) $\triangle AED$ и $\triangle FCE$;

$\angle 2 = \angle 1$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AF),

$\angle 4 = \angle 3$ (вертикальные), значит,

$$\frac{AE}{FE} = \frac{AD}{FC} = \frac{DE}{CE}; \frac{10}{FE} = \frac{7}{4};$$

2) $\frac{7}{FC} = \frac{8}{4}$ и $\frac{10}{FE} = \frac{8}{4}$; следовательно $FC = 3,5$ см; $FE = 5$ см.



б) Дано: ABCD – параллелограмм
 $AB = 8$ см, $AD = 5$ см,
 $CF = 2$ см;
 DE , $EC = ?$

Решение:

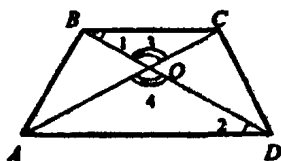
$\triangle AED$ подобен $\triangle FED$, значит $\frac{DE}{EC} = \frac{AD}{FC} = \frac{AE}{FE}; \frac{DE}{EC} = \frac{5}{2}$

$DE + EC = CD = 8$ см, значит $\frac{DE}{8 - DE} = \frac{5}{2}$;

Решая это уравнение с неизвестным DE , получим

$$7DE = 40, \text{ значит } EC = 8 - 5\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7} \text{ см.}$$

552.



Дано: ABCD – трапеция;
 $AC \cap BD = O$;
 $OB = 4$ см, $OD = 10$ см;
 $DC = 25$ см;
 $AB = ?$

Решение:

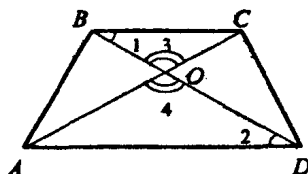
1) $\triangle AOB$ и $\triangle COD$;

$\angle 2 = \angle 1$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AF);

$\angle 4 = \angle 3$ (вертикальные), значит,

$\triangle AOB$ и $\triangle COD$ пропорциональны (по 2 углам);

$$\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}; \quad \frac{AO}{CO} = \frac{4}{10} = \frac{AB}{25}, \text{ откуда } AB = 10 \text{ см.}$$



б) Дано: $ABCD$ – трапеция;

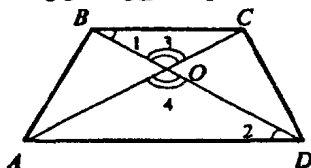
$AC \cap BD = O$;

$AB = a$, $DC = b$;

$$\frac{AC}{OC} \text{ и } \frac{BO}{OD} = ?$$

Решение: 1) $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (см. выше), значит $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$

Ответ: $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{a}{b}$



в) Дано: $ABCD$ – трапеция

$AC \cap BD = O$

$AB = 9,6$ дм, $DC = 24$ см,

$BC = 15$ см

$AO = ?$

Решение:

$\triangle AOB \sim \triangle COD$, следовательно

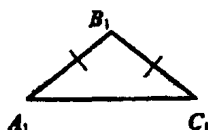
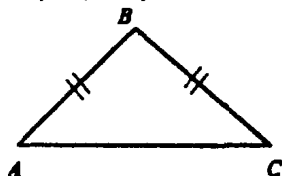
$$\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}; \quad \frac{AO}{OC} = \frac{96}{24}$$

$$AO + OC = AC = 15; \quad OC = 15 - AO$$

$$\text{т.е. } \frac{96}{24} = \frac{AO}{15 - AO}; \quad 4(15 - AO) = AO; \quad AO = 12 \text{ см.}$$

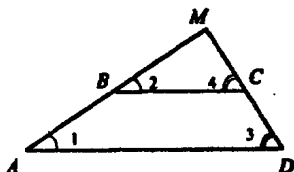
553.

а) да; б) да; в) да.



Треугольники равнобедренные, имеют по одному равному углу, следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника и теореме о сумме углов треугольника, находим другие углы, т.е. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по двум углам).

554.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $BC = 5$ см, $AD = 8$ см;
 $CD = 3,6$ см, $AB = 3,9$ см;
 $AB \cap CD = M$;
 $MC, MB = ?$

Решение:

1) $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$;

$\angle 2 = \angle 1$ (соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AB),

$\angle 4 = \angle 3$ (соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей DC),

значит $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ (по двум углам), следовательно,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}. \text{ Пусть } BM = x, \text{ а } MC = y, \text{ тогда } AM = 3,9 + x,$$

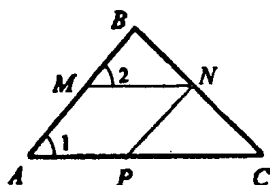
$$DM = 3,6 + y; \quad \frac{3,9 + x}{x} = \frac{3,6 + y}{y} = \frac{8}{5};$$

$$2) \frac{3,9 + x}{x} = \frac{8}{5}; 19,5 = 3x; x = 6,5;$$

$$\frac{3,6 + y}{y} = \frac{8}{5}; y = 6, \text{ т.е. } BM = 6,5 \text{ см, } MC = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6,5; 6.

555.



Дано: $\triangle ABC$;

$M \in AB, N \in BC; P \in AC$;

$MN \parallel AC, NP \parallel AB$;

$AB = 10$ см, $AC = 15$ см;

$PN:MN = 2:3$;

$AM, MN, NP, AP = ?$

Решение:

$\triangle ABC$ и $\triangle MBN$;

$\angle B$ – общий, $\angle 2 = \angle 1$ (соответственные при $AC \parallel MN$ и секущей AB), значит, $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по двум углам).

$$\text{Т.е.: } \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \quad (1);$$

$$2) PN:MN = 2:3, \text{ т.е. } PN = 2x, MN = 3x;$$

AMNP – параллелограмм, следовательно, $PN = AM = 2x$,
 $MN = AD = 3x$.

3) Подставляем в (1):

$$\frac{10}{10-2x} = \frac{15x}{3x}; 10x = 5(10-2x); 20x = 50; x = 2,5;$$

$$AM = PN = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ см } AP = MN = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ см.}$$

Ответ: 5; 5; 7,5; 7,5.

б) AM, MN, NP и AP = ?, AM = AP, AB = a, AC = b.

Решение:

1) AM = AP, следовательно, AMNP – ромб.

Пусть AM = x, тогда из $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ следует, что

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}; \frac{b}{x} = \frac{a}{a-x};$$

$$ax = ab - bx; x = \frac{ab}{a+b}; AM = MN = NP = AP = \frac{ab}{a+b}$$

557.

Дано: $\angle A$, $BC \parallel DE$, $CE = 10 \text{ см}$, $AD = 22 \text{ см}$, $BD = 8 \text{ см}$.

Найти: AC = ?

Решение:

$$\text{Т.к. } BC \parallel DE, \text{ значит, } \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}, \text{ т.е. } AB = AD - BD = 22 - 8 = 14 \text{ см};$$

$$\frac{14}{AC} = \frac{8}{10}, AC = 17,5 \text{ см};$$

б) AB = 10, AC = 8 см, BC = 4 см, CE = 4 см;

BD, DE = ?

$$1) BC \parallel DC, \text{ следовательно, } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}; \frac{BD}{4} = \frac{10}{8}; BD = 40:8 = 5 \text{ см};$$

2) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ($\angle A$ – общий, $\angle B = \angle D$
 как соответственные при $BC \parallel DC$ и секущей AD), значит:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}; \frac{10}{15} = \frac{4}{DE}; DE = 6 \text{ см};$$

в) AB:BD = 2:1, DE = 12 см; BC = ?

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE, \text{ значит, } \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AO};$$

$$AD = AB + BD = 3,$$

$$\frac{BC}{12} = \frac{2}{3},$$

$$3BC = 24, BC = 8 \text{ см.}$$

558.

Дано: a, b – прямые;

$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

Доказать: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Доказательство:

1) Проведем $c \parallel b$ так, что $A \in C, B_2, C_2 \in c$.

2) В $\triangle ABB_2$ и $\triangle ACC_2$: $\angle A$ – общий

$\angle C = \angle B$ (соответственные при $BB_1 \parallel CC_1$ и секущей AC), $\triangle ABB_2$ пропорционален $\triangle ACC_2$ по двум углам,

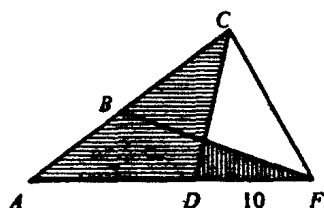
значит, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$

По свойству параллелограмма имеем: $AB_2 = A_1B_1, B_2C_2 = B_1C_1$, следовательно,

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}; \text{ по свойству пропорции } \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}, \text{ что и}$$

требовалось доказать.

559.



Дано: $\angle A$

$$AB = 5 \text{ см, } AC = 16 \text{ см;}$$

$$AD = 8 \text{ см, } AF = 10 \text{ см;}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle AFB = ?$$

Доказательство:

В $\triangle ACD$ и $\triangle AFB$:

$\angle A$ – общий,

по усл.: $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{8}; \frac{AF}{AC} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$, значит,

$\triangle ACD \sim \triangle AFB$ (по двум сторонам и углу между ними), что и требовалось доказать.

560.

 $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$;а) $AB = 3\text{ см}$, $BC = 3\text{ см}$, $AC = 7\text{ см}$; $B_1A_1 = 4,5\text{ см}$; $B_1C_1 = 7,5\text{ см}$;
 $C_1A_1 = 10,5\text{ см}$; $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 = ?$

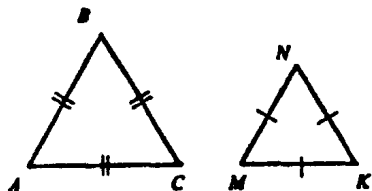
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{4,5}{3} = \frac{3}{2}; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{7,5}{3} = \frac{5}{2}; \quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{10,5}{7} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).б) $AB = 1,7\text{ см}$, $BC = 3\text{ см}$, $AC = 4,2\text{ см}$; $A_1B_1 = 340\text{ см}$, $B_1C_1 = 600\text{ см}$, $A_1C_1 = 840\text{ см}$; $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 = ?$

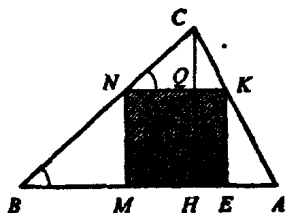
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{340}{1,7} = \frac{200}{1}; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{600}{3} = \frac{200}{1}; \quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{840}{4,2} = \frac{200}{1}.$$

Вывод: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

561.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$; $AB = BC = AC$; $MN = NK = MK$; $\triangle ABC \sim \triangle MNK - ?$ Доказательство:1) Т.к. $\triangle ABC$ – равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$;т.к. $\triangle MNK$ – равносторонний, то $\angle M = \angle N = \angle K = 60^\circ$;2) $\angle M = \angle N = \angle K = \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ по двум углам.

562.

Дано: $\triangle ABC$ $AB = a$, $CH \perp AB$, $CH = h$; $MNKE$ – квадрат; $MN = ?$

Решение:

В $\triangle ABC$ и $\triangle KNC$, где $\angle C$ – общий,
 $\angle N = \angle B$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей BC),
значит $\triangle ABC \sim \triangle KNC$ по двум углам,

$$\text{т.е. } \frac{CN}{CQ} = \frac{AB}{NK} \quad (1).$$

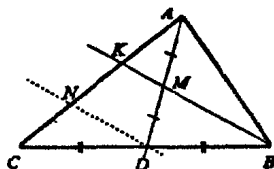
Пусть $MN = NK = KE = ME = x$, тогда $CQ = h - x$.

Подставляя в (1), имеем: $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}$

$$a(h-x) = hx; ah = hx + ax; x = \frac{ah}{a+h} = MN.$$

Ответ: $MN = \frac{ah}{a+h}$

563.



Дано: $\triangle ABC$,
 AD – медиана;
 $M \in AD$;
 $BM \cap AC = K$;
 $\frac{AK}{KC} = ?$

Решение:

а) Проводим $ND \parallel KB$, M – середина AD .

1) В $\triangle AKM$ и $\triangle AND$: $\angle A$ – общий;

$\angle N = \angle K$ (соответственные при $KB \parallel AD$ и секущей AN), значит,

$$\triangle AKM \sim \triangle AND \text{ (по двум углам), т.е. } \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2}$$

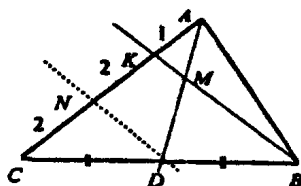
2) В $\triangle CND$ и $\triangle CKB$: $\angle C$ – общий;

$\angle B = \angle D$ (соответственные при $ND \parallel KB$ и секущей DB), значит,

$$\triangle CND \sim \triangle CKB \text{ (по двум углам), т.е. } \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}$$

$$3) \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}, \text{ откуда:}$$

$$AK = NK = CN, \text{ т.е. и } \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}, \text{ что и требовалось доказать}$$



$$6) \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$$

$$1) \text{ в } \triangle AKM \sim \triangle AND \quad \frac{AK}{AN} = \frac{1}{3}$$

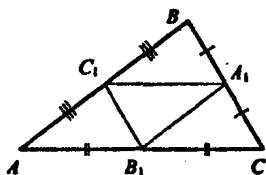
$$2) \text{ в } \triangle NCD \sim \triangle KCB \text{ (по двум углам)} \quad \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}$$

$$3) \frac{AK}{AN} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2}; \frac{CN}{CK} = \frac{1}{2}, \text{ значит, } CN = NK = 2; \text{ т.е.}$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{1}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

564.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = 8 \text{ см}$,

$BC = 5 \text{ см}$, $AC = 7 \text{ см}$

$A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$

A_1, B_1, C_1 — середины сторон

$P_{A_1B_1C_1} = ?$

Решение:

Т.к. A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 — средние линии $\triangle ABC$, то

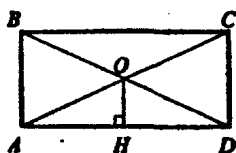
$$A_1C_1 = \frac{1}{2} AC; B_1C_1 = \frac{1}{2} BC; A_1B_1 = \frac{1}{2} AB;$$

$$A_1C_1 = 3,5 \text{ см}; B_1C_1 = 2,5 \text{ см}; A_1B_1 = 4 \text{ см};$$

$$P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = 3,5 + 2,5 + 4 = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10 см.

565.



Дано: $ABCD$ — прямоугольник;

$AC \cap BD = O$;

$OH \perp AD$, $OH = 2,5 \text{ см}$;

$AB = ?$

Решение:

1) В $\triangle AOH$ и $\triangle ACD$: $\angle A$ – общий,

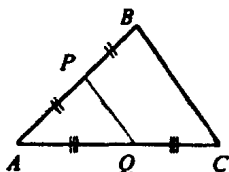
$\angle D = \angle H = 90^\circ$, значит, $\triangle AOH \sim \triangle ACD$, т.е. $\frac{AO}{OC} = \frac{OH}{CD}$;

O – середина AC , следовательно, $AO = \frac{1}{2} AC$, и $\frac{OH}{CD} = \frac{1}{2}$, т.е.

$2OH = CD$; $CD = 2 \cdot 2,5 = 5$ см, т.к. $CD = AB$, то $AB = 5$ см.

Ответ: 5 см.

566.



Дано: $\triangle ABC$

$P \in AB$, $AP = PB$;

$Q \in AC$, $AQ = QC$;

$P_{APQ} = 21$ см;

$P_{ABC} = ?$

Решение:

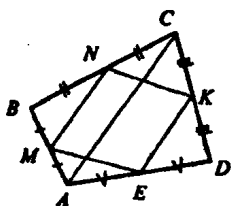
1) P и Q – середины сторон AB и AC , следовательно, PQ – средняя линия $\triangle ABC$,

$$PQ = \frac{1}{2} BC;$$

2) $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2AP + 2PQ + 2AQ = 2P_{APQ} = 2 \cdot 21 = 42$ см.

Ответ: 42 см.

567.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

M, N, K, E – середины сторон.

Доказать: $MNKE$ – параллелограмм.

Доказательство:

1) В $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle B$ – общий из условия,

$$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ значит,}$$

$\triangle ABC \sim \triangle MBN$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е.

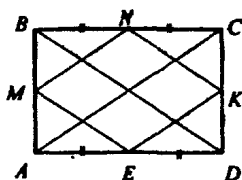
$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC.$$

2) В $\triangle ABC$: KE – средняя линия $\triangle ADC$, т.е. $KE = \frac{1}{2} AC$ и $KE \parallel AC$.

3) Имеем: $MN = KE = \frac{1}{2} AC$, $AC \parallel KE \parallel MN$, следовательно,

$MNKE$ – параллелограмм по признаку, что и требовалось доказать.

568.



а) Дано: $ABCD$ – прямоугольник;
 M, N, K, E – середины сторон.
 Доказать: $MNKE$ – ромб.

Доказательство:

1) ME – средняя линия $\triangle ABD$ (по определению). Значит,

$ME = \frac{1}{2} BD$ (средняя линия $\triangle ABD$) и $ME \parallel BD$; NK – средняя

линия $\triangle BCD$, т.е. $NK = \frac{1}{2} BD$ и $BD \parallel ME \parallel NK$.

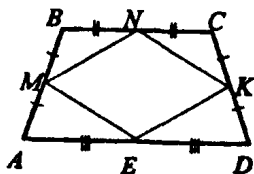
Имеем: $NK = ME = \frac{1}{2} BD$, $ME \parallel BD \parallel NK$, значит,

$MNKE$ – параллелограмм.

2) Аналогично:

$MN = EK = \frac{1}{2} AC$, $MN \parallel KE \parallel AC$.

3) По св-ву диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $ME = MN$, т.е. $MNKE$ – ромб (по определению), что и требовалось доказать.



б) $ABCD$ – равнобедренная трапеция;

M, N, K, E – середины сторон.

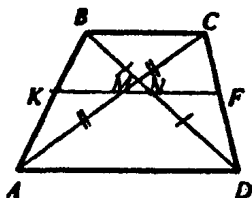
Доказать: $MNKE$ – ромб.

Доказательство:

Аналогично доказанному выше:

$AC = BD$ – диагонали.

569.

Дано: $ABCD$ – трапеция; $M \in AC, AM = MC$; $N \in BD, BM = ND$.Доказать: 1) $MN \parallel AD$;2) $MN = \frac{1}{2} (AD - BC)$.Доказательство:

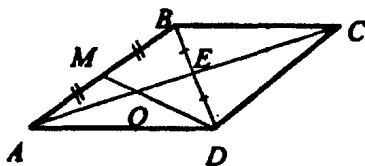
1) По теореме Фалеса: средняя линия KF трапеции $ABCD$ проходит через середины AC и BD , следовательно, $MN \in KF$ и $MN \parallel AD$.

2) Используя свойство средней линии трапеции:

$$\triangle ACD:MF = \frac{1}{2} AD; \triangle BCD:NF = \frac{1}{2} BC;$$

$$MN = MF - NF = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (AD - BC).$$

570.

Дано: $ABCD$ –

параллелограмм;

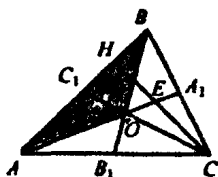
 $AC = 18$ см; $M \in AB, AM = MB$; $MD \cap AC = O$; $AO, OC = ?$ Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABD$, где DM, AE – медианы и $AE \cap DM = O$, из св-ва медианы получаем: $AO:OE = 2:1$.

2) По свойству диагонали параллелограмма $AE = 9$ см тогда, $AO = 6$ см, $OE = 3$ см, отсюда, $OC = OE + EC = 3 + 9 = 12$ см.

Ответ: 6 см, 12 см.

571.

Дано: $\triangle ABC, AA_1, BB_1$ – медианы; $AA_1 \cap BB_1 = O$; $S_{ABO} = S$; $S_{ABC} = ?$

Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH, S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot HE, \text{ имеем } \frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{CH}{HE}$$

$\triangle HCC_1$ и $\triangle ECO$: $\angle C$ – общий,

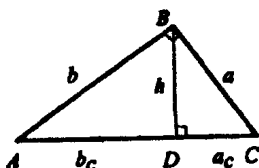
$\angle E = \angle H = 90^\circ$ (соответственные при $AB \parallel OC$ и секущей CH), т.е.

$\triangle HCC_1 \sim \triangle ECO$ (по двум углам), значит,

$$\frac{CC_1}{CO} = \frac{CH}{HE} = \frac{3}{2}, CH = \frac{3}{2} EC = 3HE, \text{ т.е.}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{3EH}{HE} = 3, \text{ значит, } S_{ABC} = 3S, \text{ что и требовалось доказать.}$$

572.



а) Дано: $b_c = 25$, $a_c = 16$;
 h , a , $b = ?$

Решение:

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20; \quad 2) c = b_c + a_c = 25 + 16 = 41;$$

$$3) b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25}; b = 5\sqrt{41}; \quad 4) a = \sqrt{c \cdot a_c} = 4\sqrt{41}.$$

Ответ: 20; $5\sqrt{41}$; $4\sqrt{41}$.

б) Дано: $b_c = 36$, $a_c = 64$;

h , a , $b = ?$

Решение:

$$1) h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = 6 \cdot 8 = 48;$$

$$2) c = b_c + a_c = 100;$$

$$3) a = \sqrt{a_c \cdot c} = 8 \cdot 10 = 80;$$

$$4) b = \sqrt{b_c \cdot c} = 6 \cdot 10 = 60.$$

Ответ: 80; 48; 60.

в) Дано: $b = 12$, $b_c = 6$;

a , c , $a_c = ?$

Решение:

$$1) b^2 = b_c \cdot c; c = \frac{b^2}{b_c}; \quad 2) c = b_c + a_c; a_c = c - b_c = 24 - 16 = 8;$$

$$3) a = \sqrt{a_c \cdot c} = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: 24; 18; $12\sqrt{3}$.

г) Дано: $a = 8$, $a_c = 4$;

b , c , $b_c = ?$

Решение:

1) $a = \sqrt{a_c \cdot c}$; $c = a^2/a_c = 64:4 = 16$;

2) $c = b_c + a_c$; $b_c = c - a_c = 16 - 4 = 12$;

3) $b = \sqrt{b_c \cdot c} = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: 16; 12; $8\sqrt{3}$.

д) Дано: $a = 6$, $c = 9$;

h , b , a_c , $b_c = ?$

Решение:

1) $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = 6 \cdot 8 = 48$;

3) $a = \sqrt{a_c \cdot c} = 8 \cdot 10 = 80$;

2) $c = b_c + a_c = 100$;

4) $b = \sqrt{b_c \cdot c} = 4 \cdot 10 = 60$.

Ответ: $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; 4; 5.

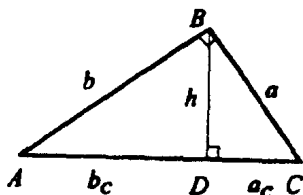
573.

Выразить a_c и b_c через a , b , c ; $a^2 = b^2 + c^2$ (*)

$a^2 = a_c \cdot c$; $a_c = a^2:c = a^2:\sqrt{a^2+b^2}$ (из (*));

$b^2 = b_c \cdot c$; $b_c = b^2:c = b^2:\sqrt{a^2+b^2}$ (из(*)).

574.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный
Доказать:

1) $h = \frac{ab}{c}$

2) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$

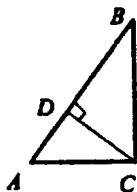
Доказательство:

1) $b_c = \frac{b^2}{c}$; $a_c = \frac{a^2}{c}$, откуда, $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}} = \frac{ab}{c}$

2) $b^2 = b_c \cdot c$, т.е. $c = \frac{b^2}{b_c}$; $a^2 = a_c \cdot c$, т.е. $c = \frac{a^2}{a_c}$,

имеем: $\frac{b^2}{b_c} = \frac{a^2}{a_c}$, что и требовалось доказать.

575.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;
 $AC:BC = 3:4$;
 $AB = 50\text{ мм}$;
 $CD \perp AB$;
 $AD, BD = ?$

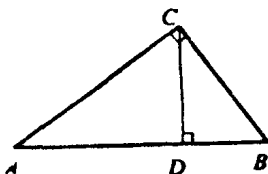
Решение:

1) $AC = 3x$; $BC = 4x$; $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $(3x)^2 + (4x)^2 = 2500$;
 $25x^2 = 2500$; $x = 10$, т.е. $AC = 30\text{ мм}$, $BC = 40\text{ мм}$;

$$2) AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{900}{50} = 18; \quad BD = \frac{BC^2}{AB} = \frac{1600}{50} = 32.$$

Ответ: 18 мм; 32 мм.

576.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;
 $AC:BC = 6:5$;
 $CD \perp AB$;
 $AD > DB$ на 11 см;
 $AB = ?$

Решение:

$$1) \frac{CB^2}{DB} = \frac{AC^2}{AD}$$

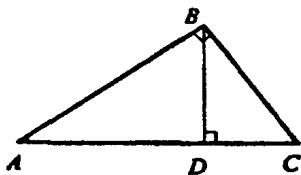
Пусть $BD = x$ см, тогда $AD = x + 11$ см; $\frac{36}{x+11} = \frac{25}{x}$

$36x = 25(x+11)$; $x = 25$, т.е. $BD = 25\text{ см}$, $AD = 36\text{ см}$;

2) $AB = AD + DB = 25 + 36 = 61\text{ см}$.

Ответ: 61 см.

577.



Дано: $\triangle ABC$;
 $AB = 5\text{ см}$, $BC = 12\text{ см}$;
 $AC = 13\text{ мм}$;
 $BD \perp AC$;
 $AD, CD = ?$

Решение:

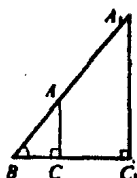
$\triangle ABC$ – прямоугольный по теореме Пифагора ($25 + 144 = 169$),
 $\angle B = 90^\circ$.

$$2) CD = \frac{CB^2}{AC} = \frac{144}{13} = 11 \frac{1}{13}$$

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{25}{13} = 1 \frac{12}{13}$$

Ответ: $11 \frac{1}{13}$; $1 \frac{12}{13}$

579.



Дано: $BC_1 = 6,3$ м;

$BC = 3,4$ м;

$AC = 1,7$ м;

$A_1C_1 = ?$

Решение:

В $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC_1$: $\angle B$ – общий,

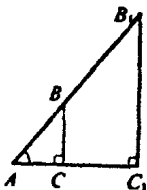
$\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$, значит, $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ (по двум углам), т.е.

$$\frac{AB}{A_1C_1} = \frac{BC}{BC_1}, \quad \frac{1,7}{A_1C_1} = \frac{3,4}{6,3}, \text{ отсюда}$$

$$B_1C_1 = \frac{12}{13} = 6,936.$$

Ответ: 6,936 м.

580.



Дано: $AC_1 = 10,2$ м;

$AC = 2,5$ м;

$BC = 1,7$ м;

$B_1C_1 = ?$

Решение:

В $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$: $\angle A$ – общий,

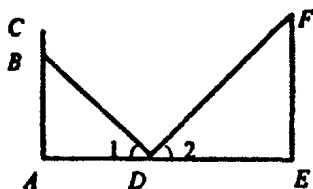
$\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$, значит, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ (по двум углам),

$$\text{т.е. } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1},$$

$$\text{т.е. } B_1C_1 = \frac{17 \cdot 10,2}{2,5} = 6,936.$$

Ответ: 6,936.

581.



Дано: $AC = 165\text{см};$

$BC = 12\text{см};$

$AD = 120\text{см};$

$DE = 4,8\text{м};$

$\angle 1 = \angle 2;$

$FE = ?$

Решение:

1) В $\triangle ABD$ и $\triangle FED$: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle E = 90^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, значит, $\triangle ABD \sim \triangle FED$ (по двум углам) и

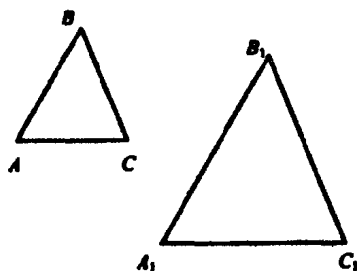
$$\frac{BD}{FD} = \frac{AD}{ED} = \frac{AB}{EF};$$

2) $AB = AC - BC = 165 - 12 = 153\text{см};$ имеем:

$$\frac{153}{EF} = \frac{120}{480}, \text{ отсюда } EF = 153 \cdot 4 = 612 \text{ см.}$$

Ответ: 612см.

582.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1;$

$AC = 42\text{м},$

$A_1C_1 = 6,3\text{см};$

$A_1B_1 = 7,2\text{см};$

$AB = ?$

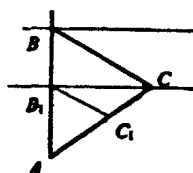
Решение:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ следовательно, } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \frac{AB}{7,2} = \frac{4200}{6,3},$$

$$\text{отсюда: } AB = \frac{7,2 \cdot 4200}{6,3} = \frac{72 \cdot 4200}{63} = 8 \cdot 600 = 4800.$$

Ответ: 48м.

583.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$;

$$AC = 100\text{м},$$

$$AC_1 = 32\text{м},$$

$$AB_1 = 34\text{м},$$

$$BB_1 = ?$$

Решение:

1) $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, следовательно,

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}, \quad \frac{AB}{34} = \frac{100}{32}, \quad AB = \frac{34 \cdot 100}{32} = 106,25;$$

$$2) BB_1 = AB - AB_1 = 106,25 - 34 = 72,25 \text{ м.}$$

Ответ: 72,25 м.

585.

Дано:

А В

Разделить на отрезки: а) 2:5; б) 3:7; в) 4:3.

Построение:

а) АВ делим на 7 равных частей.

Проводим произвольный луч АС, откладываем 7 равных отрезков.

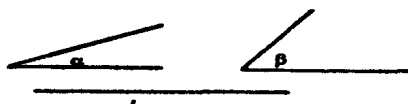
Соединяем ВМ. Через точки M_1, M_2, M_6 строим прямые,

параллельные прямой ВМ. По теореме Фалеса имеем:

$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5D_6 = D_6B; \quad AD_2:D_2B = 2:7.$$

586.

Дано:

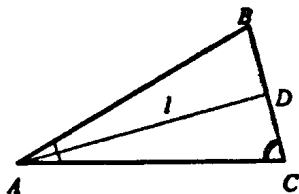


Построить: $\triangle ABC$: $\angle A = \alpha$,

$$\angle C = \beta,$$

$$AD = l.$$

Построение:



1) $\angle A = \alpha$.

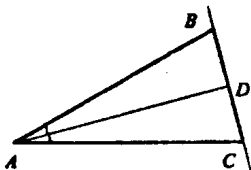
2) Провести биссектрису $\angle A$, $AD = l$.

3) Строим $\angle D = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

Сторона $\angle D$ пересечет сторону угла A в точке C .

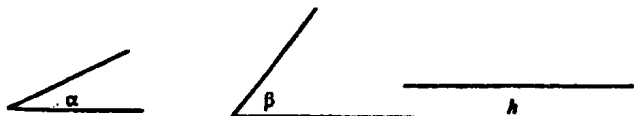
4) Строим угол, смежный с $\angle ADC$. Сторона этого угла пересечет другую сторону $\angle A$ в точке B .

5) $\triangle ABC$ – искомый



587.

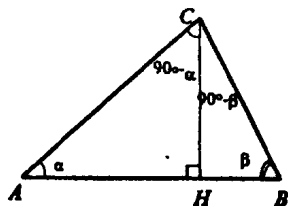
Дано:



Построить: $\triangle ABC$: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $CH \perp AB$, $CH = h$.

Анализ:

Построение:



1) Строим прямую l ;

2) $CH \perp l$, $CH = h$, $H \in l$;

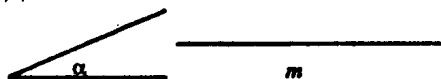
3) $\angle C = 90^\circ - \beta$, одна из сторон пересекает прямую в точке B ;

4) $\angle C = 90^\circ - \alpha$ в другой полуплоскости, одна из сторон пересекает прямую в точке A ;

5) $\triangle ABC$ – искомый.

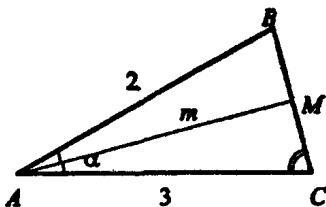
588.

Дано:



Построить $\triangle ABC$: $\angle A = \alpha$,
 $AM = m$.

Анализ:



Построение:

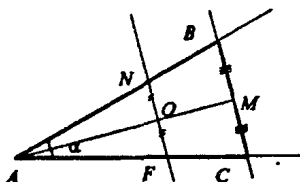
- 1) $\angle A = \alpha$.
- 2) На одной из сторон угла А отложить 2 одинаковых отрезка, а на другой – 3 таких же отрезка.
Соединить FN.
- 3) Найти середину NF.

4) На луче АО – отрезок $AM = m$.

5) Через М строим прямую $l \parallel NF$.

6) $\angle A F = C$; $\angle A N = B$.

7) $\triangle ABC$ – искомый: $\triangle ANF \sim \triangle ABC$, где $\angle A$ – общий;
 $\angle B = \angle N$ (соответственные при $NF \parallel BC$ и секущей AB).
 $NO = OF$, значит, $BM = MC$, т.е. AM – медиана.



§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

\sin , \cos , $\operatorname{tg} \angle A$ и $\angle B = ?$

Решение: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

а) $BC = 8$, $AB = 17$, т.к. $AC^2 = AB^2 - BC^2$, то

$$AC = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15;$$

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$$

$$\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{8}$$

б) $BC = 21, AC = 20$, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то

$$AB = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29;$$

$$\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$$

$$\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{21}$$

в) $BC = 1, AC = 2$, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $AB = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$$\cos \angle B = \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \angle A = \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = 2$$

г) $AC = 24, AB = 25$, т.к. $BC^2 = AB^2 - AC^2$, то

$$BC = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sin \angle A = \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{24}{25}$$

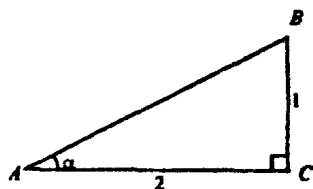
$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{24}{7}$$

592.

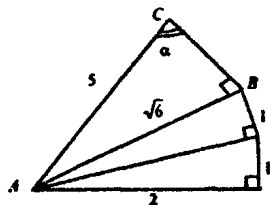
Построить $\angle \alpha$, если:

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

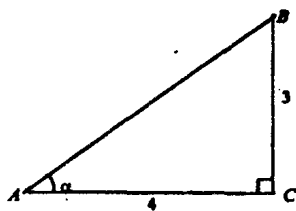


в) $\cos \alpha = 0,2$;

$\angle C$ – искомый угол;

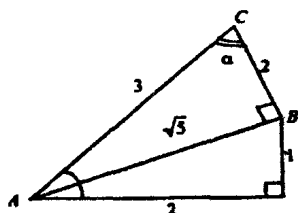


б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$



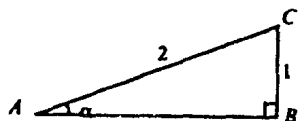
г) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$

$\angle C$ – искомый угол;



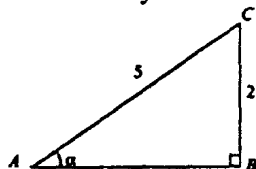
$$д) \sin \alpha = \frac{1}{2}; \sin \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$\angle A$ – искомый угол;



$$е) \sin \alpha = 0,4 \quad \sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$$

$\angle A$ – искомый угол.



593.

$$а) \cos \alpha = \frac{1}{2}; \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, следовательно

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3};$$

$$б) \cos \alpha = \frac{2}{3}; \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

аналогично а):

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

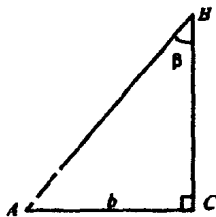
$$в) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3};$$

$$г) \sin \alpha = \frac{1}{4}; \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

594.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$\angle B = \beta$, $AC = b$.

Выразить: BC и $\angle A$, AB .

Решение:

1) Из определения: $\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{BC}$, т.е.

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg} \angle \beta} = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}, AB = \frac{b}{\sin \beta}$$

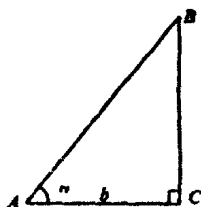
$$\angle A = 90^\circ - \beta;$$

$$2), b = 10 \text{ см}, \beta = 50^\circ; BC = \frac{10}{\operatorname{tg} 50^\circ} \approx \frac{10}{1,1918} \approx 8,39 \text{ см};$$

$$\angle A = 40^\circ; AB = \frac{10}{\sin 50^\circ} \approx \frac{10}{0,766} \approx 13,05.$$

Ответ: $\frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$; $90^\circ - \beta$; $\frac{b}{\sin \beta}$; $\approx 8,39$; 40° ; $\approx 13,05$.

595.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$

$\angle A = \alpha$, $AC = b$.

Выразить: BC и $\angle B$, AB .

Решение:

1) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$, отсюда $AB = b : \cos \alpha$; $BC = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

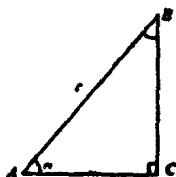
$$\angle B = 90^\circ - \alpha$$

$$2) b = 12 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ = 12 \cdot 0,9004 \approx 10,8 \text{ см}$$

$$AB = \frac{12}{\cos 42^\circ} = \frac{12}{0,7431} \approx 16,15 \text{ см}; \angle B = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

Ответ: $b \cdot \operatorname{tg} \alpha$; $\frac{b}{\cos \alpha}$; $90^\circ - \alpha \approx 48^\circ$; $\approx 16 \text{ см}$; 48° .

596.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$\angle A = \alpha$, $AB = c$;

BC , AC и $\angle B = ?$

Решение:

1) $BC = AB \cdot \sin \angle A = c \cdot \sin \alpha$; $AC = AB \cdot \cos \angle A = c \cdot \cos \alpha$;

$\angle B = 90^\circ - \alpha$;

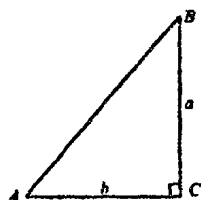
2) $c = 24 \text{ см}$, $\alpha = 35^\circ$: $BC = 24 \cdot \sin 35^\circ = 24 \cdot 0,5736 \approx 14 \text{ см}$;

$AC = 24 \cdot \cos 35^\circ = 24 \cdot 0,8192 \approx 20 \text{ см}$;

$\angle B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Ответ: $c \cdot \sin \alpha$; $c \cdot \cos \alpha$; $90^\circ - \alpha$; $\approx 14 \text{ см}$; $\approx 20 \text{ см}$; 55° .

597.



Дано: $\angle C = 90^\circ$;

$BC = a$, $AC = b$;

AC , $\angle A$ и $\angle B = ?$

Решение:

1) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (по т. Пифагора);

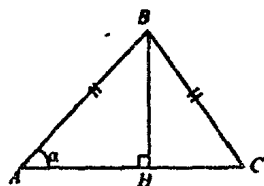
а) $\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; б) $\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}$

2) $a = 12 \text{ см}$, $b = 15$, $AB = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{396} \approx 19 \text{ см}$;

$\operatorname{tg} \angle A = \frac{12}{15} \approx 0,8$, т.е. $\angle A \approx 38^\circ 39'$;

$\operatorname{tg} \angle B = \frac{15}{12} = 1,25$, т.е. $\angle B \approx 51^\circ 21'$.

598.



а) Дано: $AB = BC$;

$\angle A = \alpha$, $AB = b$;

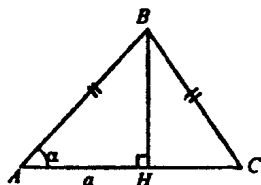
$S_{ABC} = ?$

Решение: $BH \perp AC$;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH,$$

из $\triangle ABH$: $BH = AB \cdot \sin \angle A = b \cdot \sin \alpha$, $AH = AB \cdot \cos \angle A = b \cdot \cos \alpha$, следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$



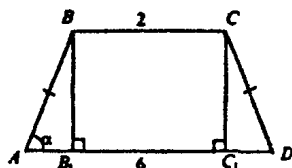
б) Дано: $AB = BC$;
 $\angle A = \alpha$, $AC = a$;
 $S_{ABC} = ?$

Решение:

$$\triangle ABH: BH = AH \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

599.



Дано:
 $AB = CD$;
 $BC = 2 \text{ см}$, $AD = 6 \text{ см}$;
 $\angle A = \alpha$;
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

$ABCD$ – равнобедренная трапеция, следовательно,

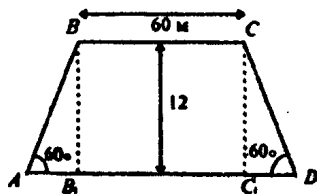
$\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$, где $AB_1 = C_1D = (6 - 2):2 = 2 \text{ см}$.

В $\triangle ABB_1$: $BB_1 = AB_1 \cdot \operatorname{tg} \angle A$; $BB_1 = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$, значит,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BB_1; S_{ABCD} = \frac{1}{2} (6 + 2) \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 8 \operatorname{tg} \alpha \text{ см}^2.$$

Ответ: $8 \operatorname{tg} \alpha$.

600.



Дано:
 $BC = 60 \text{ м}$;
 $h = 12 \text{ м}$;
 $\angle A = \angle D = 60^\circ$;
 $AD = ?$

Решение:

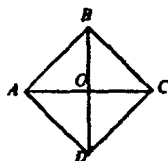
1) $\triangle ABB_1$: $BB_1 \cdot \cos \angle A = AB_1$, отсюда $AB_1 = 12: \operatorname{tg} 60^\circ = 12: \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ м;

2) $C_1D = AB_1 = 4\sqrt{3}$ м;

3) $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 4\sqrt{3} + 60 + 4\sqrt{3} \approx 60 + 13,9 = 73,9$ м.

Ответ: 73,9 м.

601.



Дано: ABCD – ромб;

$AC = 3, BD = 2\sqrt{3}$;

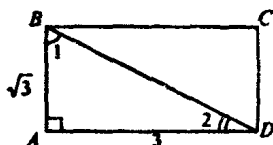
$\angle A, \angle B = ?$

Решение:

$\triangle AOB$: $AO = 1, BO = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} \angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, значит, $\angle BAO = 60^\circ$, т.е. $\angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$;

AC, BD – биссектрисы углов A и B, значит, $\angle B = 60^\circ, \angle A = 120^\circ$.

602.



Дано: ABCD – прямоугольник;

$AB = \sqrt{3}, BC = 3$;

$\angle 1, \angle 2 = ?$

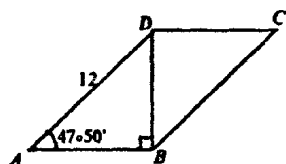
Решение:

$\triangle ABD$: $\operatorname{tg} \angle 1 = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, т.е. $\angle 1 = 60^\circ$, значит,

$\angle 2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 60° и 30° .

603.



Дано: ABCD – параллелограмм;

$BD \perp AB, AD = 12$ см;

$\angle BAD = 47^\circ 50'$;

$S_{ABCD} = ?$

Решение:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BD;$$

$$1) AB = AD \cdot \cos \angle A;$$

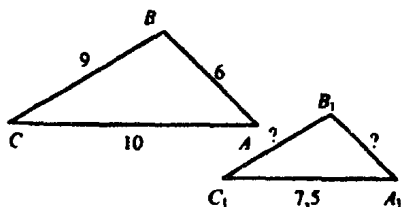
$$AB = 12 \cdot \cos 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,6712 \approx 8,06 \text{ см};$$

$$BD = AD \cdot \sin \angle A; BD = 12 \cdot \sin 47^\circ 50' \approx 12 \cdot 0,7412 \approx 8,89 \text{ см};$$

$$2) S_{ABCD} = 8,06 \cdot 8,89 \approx 71,76 \text{ см}^2$$

Ответ: $\approx 72 \text{ см}^2$.

604.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;
 $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 9 \text{ см}$,
 $AC = 10 \text{ см}$, $A_1C_1 = 7,5 \text{ см}$;
 A_1B_1 ; $B_1C_1 = ?$

Решение:

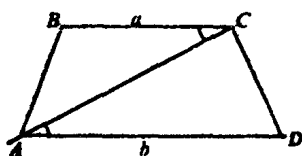
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ следовательно; } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

$$\frac{6}{A_1B_1} = \frac{10}{7,5} = \frac{9}{B_1C_1}, \text{ отсюда:}$$

$$A_1B_1 = \frac{6 \cdot 7,5}{10} = 4,5, \text{ а } B_1C_1 = \frac{9 \cdot 7,5}{10} = 6,75.$$

Ответ: 4,5 см, 6,75 см.

605.



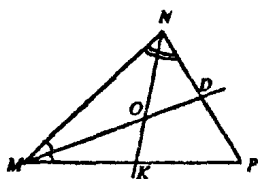
Дано: ABCD – трапеция;
 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, $AD = b$,
 $BC = a$.
Доказать: $AC^2 = ab$.

Доказательство:

$$\triangle ABC \sim \triangle DCA, \text{ значит, } \frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{DA}$$

$$AC^2 = BC \cdot DA \text{ (свойство пропорции),}$$

т.е. $AC^2 = ab$, что и требовалось доказать.



Дано: $\triangle MNP$;
 MD, NK – биссектрисы;
 $MD \cap NK = O$;
 $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см;
 $OK:ON = ?$

Решение:

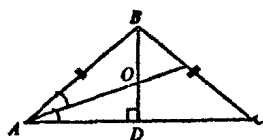
1) NK – биссектриса, следовательно, $\frac{MN}{MK} = \frac{NP}{KP}$, $\frac{5}{MK} = \frac{3}{KP}$, пусть $MK = x$, тогда $KP = 7 - x$, значит, $\frac{5}{x} = \frac{3}{7-x}$; $35 - 5x = 3x$, $x = MK = 4\frac{3}{8}$ см;

2) MD – биссектриса, следовательно, $\frac{MK}{KO} = \frac{MN}{NO}$

$$\frac{MK}{MN} = \frac{KO}{NO} = \frac{4\frac{3}{8}}{5} = \frac{35}{8,5} = \frac{7}{8} \quad (\text{свойство пропорций}).$$

Ответ: $OK:ON = 7:8$.

607.



Дано: $\triangle ABC$;
 $AB = BC$;
 $BD \perp AC$, $BD = 30$ см;
 AO – биссектриса;
 $BO, OD = ?$

Решение:

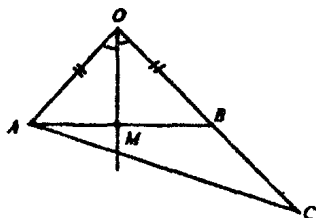
1) В $\triangle ABC$: $AB:AD = 3:2$, $AD = 2x$, $AB = 3x$;
 $AB^2 = AD^2 + BD^2$; $4x^2 + 900 = 9x^2$; $x^2 = 180$; $x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ см,
 значит, $AB = 18\sqrt{5}$ см, $AD = 12\sqrt{5}$;

2) AO – биссектриса, следовательно, $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$
 пусть $DO = x$, тогда $BO = 30 - x$, значит, $\frac{18\sqrt{5}}{30-x} = \frac{12\sqrt{5}}{x}$

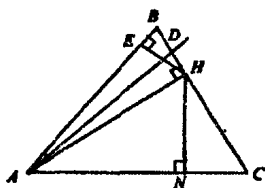
$3x = 2(30-x)$; $x = 12$; т.е. $DO = 12$ см, $BO = 30 - 12 = 18$ см.

Ответ: 12; 18.

608.

Дано: $\triangle AOB$, $AO = OB$, $C \in OB$;OM – биссектриса $\angle AOB$.Доказать: $MA < MC$.Доказательство:OM – биссектриса, следовательно, $\frac{AO}{AM} = \frac{OC}{MC} = \frac{OB + BC}{MC}$; $AO < (OB + BC)$, $\frac{AO}{AM} = \frac{OB + BC}{MC}$, следовательно, $AM < MC$, что и требовалось доказать.

609.



Дано:

 $\triangle ABC$, $D \in BC$;

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}.$$

Доказать: AD – биссектриса.

Доказательство:АН – высота $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, т.е. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$ (1).Так же $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE$, $S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DN$, имеем:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DN} \quad (2).$$

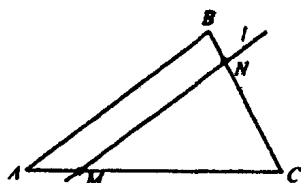
Сравнивая (1) и (2) имеем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot DE}{AC \cdot DN}, \left(\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ по условию} \right),$$

$$1 = \frac{DE}{DN}, \text{ значит,}$$

 $DE = DN$, AD – биссектриса (по свойству).

610.

Дано: $\triangle AOC$; $l \cap AC = M, l \cap BC = N$, $AM:MC = 2:7$; $AB = 10 \text{ см}, BC = 18 \text{ см}$. $CA = 21,6 \text{ см}$; $MC, NC, MN = ?$ Решение:1) В $\triangle ABC$ и $\triangle MNC$: $\angle C$ – общий, $\angle M = \angle A$ (соответственные при $AB \parallel l$ и секущей AC),значит $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{BC}{NC} = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MC} = \frac{9}{7};$$

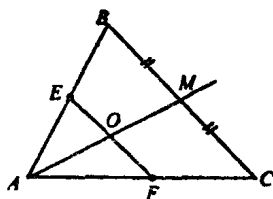
$$2) \frac{AB}{MN} = \frac{9}{7}; \quad \frac{BC}{NC} = \frac{9}{7};$$

$$\frac{AC}{MC} = \frac{9}{7};$$

$$MN = \frac{7}{9} AB = \frac{7}{9} \cdot 10 = 7\frac{7}{9} \text{ см};$$

$$NC = \frac{7}{9} \cdot 18 = 14 \text{ см}; \quad MC = \frac{7}{9} \cdot AC = \frac{7}{9} \cdot 21,6 = 16,8 \text{ см}.$$

611.

Дано: $\triangle ABC$; AM – медиана, $EF \parallel BC$; $AM \cap EF = O$.Доказать: $EO = OF$.Доказательство:В $\triangle AOF$ и $\triangle AOM$: $\angle A$ – общий, $\angle C = \angle F$ (соответственные при $EF \parallel MC$), значит $\triangle AOF \sim \triangle AOM$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{OF}{MC} = \frac{AO}{AM}, \text{ откуда } OF = \frac{OA \cdot MC}{AM} \quad (1)$$

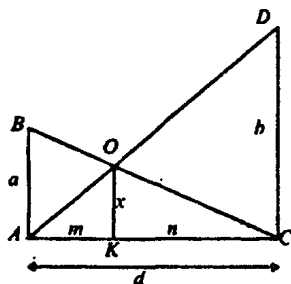
В $\triangle AOE$ и $\triangle AOB$: $\angle A$ – общий, $\angle B = \angle E$ (соответственные при $EF \parallel BC$), значит, $\triangle AOE \sim \triangle AOB$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{OE}{BM} = \frac{AO}{AM}, \text{ откуда } OE = \frac{AO \cdot BM}{AM} \quad (2).$$

Сравним (1) и (2):

$$OF = \frac{OA \cdot MC}{AM}; \quad OE = \frac{AO \cdot BM}{AM}, \text{ т.к. } MC = BM, \text{ то можно сделать вывод, что } OF = OE.$$

612.



Дано: $AB = a$, $DC = b$;

$AK = m$, $KC = n$;

$AC = d$, $OK = x$.

Доказать:

$$a) \frac{m}{d} = \frac{x}{b} \text{ и } \frac{n}{d} = \frac{x}{a}$$

$$б) \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1;$$

$$x = ?$$

Решение:

1) В $\triangle ADC$ и $\triangle AOK$: $\angle A$ — общий,
 $\angle K = \angle C = 90^\circ$, значит, $\triangle ADC \sim \triangle AOK$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{DC}{OK} = \frac{AC}{AK}, \text{ откуда } \frac{b}{x} = \frac{d}{m}$$

2) В $\triangle ABC$ и $\triangle KOC$:

$\angle C$ — общий, $\angle A = \angle K = 90^\circ$, значит,
 $\triangle ABC \sim \triangle KOC$ (по 2 углам)

$$\frac{AB}{KO} = \frac{AC}{KC}, \text{ откуда } \frac{a}{x} = \frac{d}{n}$$

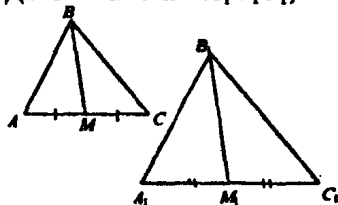
$$3) \frac{n}{d} = \frac{x}{a} \text{ и } \frac{m}{d} = \frac{x}{b},$$

значит $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d} + \frac{d}{d} = 1$ ($\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$), что и требовалось доказать.

$$4) \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1; \quad \frac{xb + ax}{ab} = 1; \quad \frac{x(a+b)}{ab} = 1,$$

$$\text{т.е. } x = \frac{ab}{a+b}.$$

а) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$;



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1};$$

BM, B_1M_1 — медианы.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

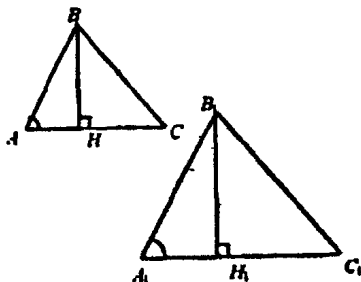
В $\triangle ABM$ и $\triangle A_1B_1M_1$ по условию

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1}, \text{ следовательно,}$$

$\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ (по трем сторонам), значит, $\angle A = \angle A_1$.

2) Из условия $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\angle A = \angle A_1$ (см. выше);

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по 2 сторонам и углу между ними).



б) Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$;

$\angle A_1 = \angle A$;

$$\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

$BH \perp AC, B_1H_1 \perp A_1C_1$.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1) В $\triangle ABH$ и $\triangle A_1B_1H_1$: $\angle A = \angle A_1$,

$\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$, значит, $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (по 2 углам),

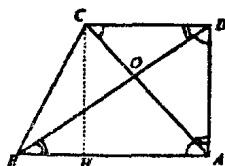
$$\text{т.е. } \frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

2) В $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, значит,

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по 2 сторонам и углу между ними).

Что и требовалось доказать.

614.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $\angle A = 90^\circ$;
 $AC \perp BD$, $BD \cap CA = O$;
 $AB = 6$ см, $AD = 4$ см;
 DC , DB , $CB = ?$

Решение:

1)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ (т. Пифагора); } BD^2 = 36 + 16 = 52; BD = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ см;}$$

2) $\triangle ADC$ и $\triangle BAD$; $\angle D = \angle A = 90^\circ$; $\angle C = \angle D$, значит,
 $\triangle ADC \sim \triangle BAD$ (по двум углам), т.е.

$$\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BD}; \frac{DC}{4} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{BD}; DC = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$$

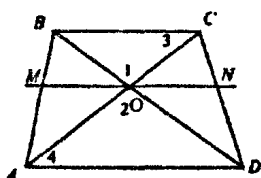
$$3) BH = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{из прямоугольного } \triangle BCH: BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + \left(3\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= 16 + \frac{100}{9} = \frac{244}{9}, \text{ т.е. } BC = \sqrt{\frac{244}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{13} \text{ см; } 2\frac{2}{3} \text{ см; } \frac{2}{3}\sqrt{61} \text{ см.}$$

615.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AC \cap BD = O$;
 $MN \parallel AD$;
 $AD = a$, $BC = b$;
 $MN = ?$

Решение:

1) В $\triangle AOD$ и $\triangle COB$: $\angle 2 = \angle 1$ (вертикальные),
 $\angle 4 = \angle 3$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC),
 значит $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (по двум углам), т.е.

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}.$$

2) В $\triangle ABD$ и $\triangle MBO$: $\angle B$ – общий,
 $\angle M = \angle A$ (соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AC),
 значит $\triangle ABD \sim \triangle MBO$ (по двум углам), т.е.

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AD}{OM}, \text{ откуда } OM = \frac{AD \cdot BO}{BD} = \frac{a \cdot BO}{BD}$$

3) $\triangle BDC \sim \triangle ODN$ (по двум углам), следовательно

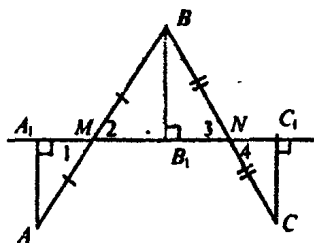
$$\frac{BC}{ON} = \frac{BD}{OD} = \frac{DC}{DN}, \text{ т.е. } ON = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{b \cdot OD}{BD}$$

$$4) MN = ON + MO = \frac{b \cdot OD}{BD} + \frac{a \cdot BO}{BD} = \frac{b \cdot OD + a \cdot BO}{BD};$$

$$BD = OB + OD = OB + \frac{a}{b} OB = OB \cdot \frac{b+a}{b}$$

$$\frac{a \cdot BO + b \cdot \frac{a}{b} OB}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{OB(a+a)}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

616.



Дано: $\triangle ABC$;

MN – средняя линия;

$AA_1 \perp MN$, $BB_1 \perp MN$,

$CC_1 \perp MN$.

Доказать: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Доказательство:

1) В $\triangle AA_1M$ и $\triangle BB_1M$: $AM = MB$,

$\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные), значит,

$\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$ (по гипотенузе и острому углу),

т.е. $AA_1 = BB_1$ (1).

2) В $\triangle BB_1N$ и $\triangle CC_1N$: $BN = NC$,

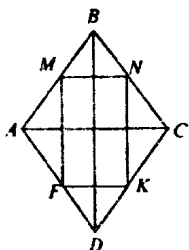
$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные), т.е.

$\triangle BB_1N = \triangle CC_1N$ (по гипотенузе и острому углу), значит,

$BB_1 = CC_1$ (2).

3) Сравним (1) и (2), получим $AA_1 = BB_1 = CC_1$, что и требовалось доказать.

617.



Дано: $ABCD$ – ромб;
 M, N, K, F – середины
 сторон.
 Доказать: $MNKF$ –
 прямоугольник.

Доказательство:

1) В $\triangle ABD$: FM – средняя линия, следовательно,

$$BD \parallel FM \text{ и } FM = \frac{1}{2} BD.$$

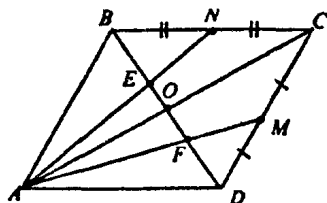
$$\text{В } \triangle BCD: NK \parallel BD \text{ и } NK = \frac{1}{2} BD.$$

По признаку $FMNK$ – параллелограмм.

2) $BD \parallel FM \parallel NK$, $DB \perp AC$ (по свойству диагонального ромба),
 значит $NK \perp AC$ и $FM \perp AC$;

$MN \parallel AC \parallel FK$, $FM \perp AC$, значит, $FM \perp MN$, $NK \perp AC$,
 $FK \perp FM$ и $NK \perp MN$, $NK \perp FK$, следовательно, $MNFK$ –
 прямоугольник, что и требовалось доказать.

618.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;
 $M \in CD$, $CM = MD$;
 $N \in BC$, $BN = NC$;
 $AN \cap BD = E$, $AM \cap BD = F$.
 Доказать: $BE = EF = FD$.

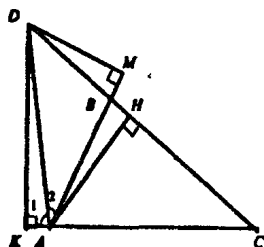
Доказательство:

1) В $\triangle ABC$: AN, BO – медианы,
 $BE:EO = 2:1$ (свойство медиан).

2) В $\triangle ACD$: $DF:FO = 2:1$.

3) В параллелограмме $ABCD$ диагонали точкой
 пересечения делятся пополам, следовательно, $BO = OD$;
 $BE + EO = OF + FD$, значит, $BE = EF = FD$;
 $2x = 1x + 1x = 2x$, что и требовалось доказать.

619.



Дано: $\triangle ABC$;
 AD – биссектриса;
 $AD \cap BC = D$.

Доказать: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

Доказательство:

1) $AH \perp DC$ (AH – высота для $\triangle ABD$ и для $\triangle ADC$);

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AH \cdot BD$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD$, имеем:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad (1);$$

2) $S_{ABD} = \frac{1}{2} DM \cdot AB$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} DK \cdot AC$, $DK = DM$;

в $\triangle ADK$ и $\triangle ADM$: DA – общая, $\angle 1 = \angle 2$, т.е.

$\triangle ADK = \triangle ADM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно

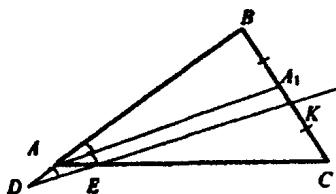
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$$

3) Сравнивая (1) и (2), имеем по свойству пропорциональности:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD},$$

что и требовалось доказать.

620.



Дано: $\triangle ABC$;
 AD – биссектриса;
 $K \in BC$, $BK = KC$;
 $KD \parallel AA_1$.

Доказать: $BD = EC$.

Доказательство:

1) AA_1 – биссектриса, следовательно: $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}$

2) $\triangle DBK \sim \triangle ECA_1$ (по двум углам: $\angle B$ – общий, $\angle A = \angle D$),

$$\text{т.е. } \frac{DB}{BA} = \frac{BK}{BA_1}, \quad BD = BK \cdot \frac{BA}{BA_1} \quad (1);$$

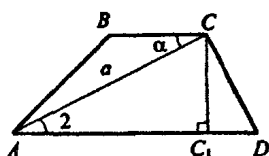
$$3) \triangle AA_1C \sim \triangle EKC \quad (\angle C - \text{общий}, \angle A = \angle C), \text{ т.е. } \frac{AC}{KC} = \frac{AC}{EC},$$

$$EC = KC \cdot \frac{AC}{A_1C} \quad (2).$$

4) Сравнивая (1) и (2), имеем: $BK = KC$,

$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}, \text{ т.е. } BD = EC, \text{ что и требовалось доказать.}$$

621.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 $AD + BC = b$, $AC = a$;
 $\angle ACB = \alpha$;
 $S_{ABCD} = ?$

Решение:

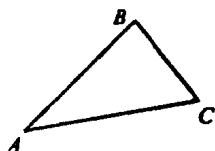
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CC_1;$$

$$\triangle CC_1A: \angle C_1 = 90, \angle A = \alpha, AC = a, \text{ т.е. } CC_1 = a \sin \alpha;$$

$$2) BC + AD = b, \text{ следовательно, } S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

622.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$;

$$2S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}.$$

Построить: $\triangle A_1B_1C_1$.

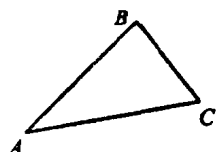
Построение:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ значит, } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2;$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}, \text{ значит, } k^2 = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Используя свойство параллельных прямых строим $\Delta A_1B_1C_1$, стороны которого в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ больше ΔABC .

623.



Дано: A, B, C – середины сторон;
некоторого $\Delta A_1B_1C_1$.

Построить: $\Delta A_1B_1C_1$.

Построение:

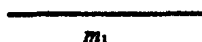
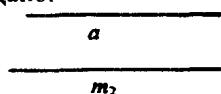
1) Через точки A, B, C строим прямые $a \parallel BC$;

$b \parallel AC$; $c \parallel AB$.

2) a, b, c попарно пересекутся в точках A_1, B_1, C_1 . $\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

624.

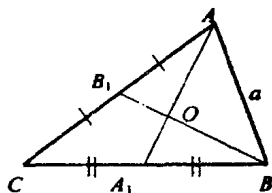
Дано:



Построить: ΔABC : $AB = a$, $AA_1 = m_1$, $BB_1 = m_2$

Анализ:

Построение:



1) $AB = a$;
2) $AA_1 = m_1$, $O \in AA_1$ и $O \in BB_1$,
медианы пересекаются и делятся
этой точкой AO : $OA_1 = 2:1$ BO : $OB_1 =$
 $= 2:1$.

3) Строим Окр. $\left(A; R_1 = \frac{2}{3}m_1 \right)$ и

Окр. $\left(B; R_2 = \frac{2}{3}m_2 \right)$. Они пересекутся в точке O .

4) Лучи AO и BO продлеваем на длину $AA_1 = m_1$ и $BB_1 = m_2$.

5) BA_1 и AB_1 пересекутся в точке C .

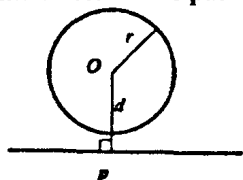
6) ΔABC – искомый.

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности

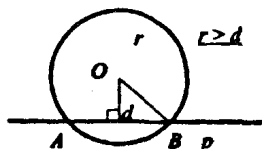
631.

Определить взаимное расположение прямой p и окружности;



а) $r = 16\text{см}$; $d = 12\text{см}$;

$r > d$, следовательно, прямая и окружность пересекаются в двух точках.



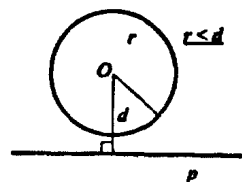
б) $r = 5\text{см}$; $d = 4,2\text{см}$;

$r > d$, следовательно $l \cap \text{Окружность}$

$(O; r) = \{A; B\}$;

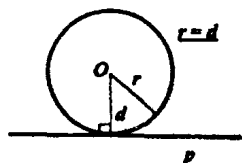
в) $r = 7,2\text{дм}$; $d = 3,7\text{дм}$;

$(a; O)$ пересекаются в двух точках.



г) $r = 8\text{дм}$; $d = 1,2\text{дм}$;

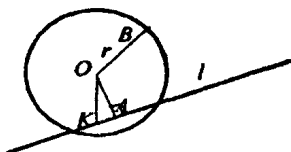
$r < d$, следовательно, прямая и окружность не пересекаются.



д) $r = 5\text{дм}$; $d = 50\text{дм}$, следовательно,

$r = d$, значит, прямая и окружность касаются.

632.



Дано: окружность $(O; r)$;

$OA = d$, $OB = r$;

$d < r$, $A \in l$.

Доказать: l – секущая.

Доказательство:

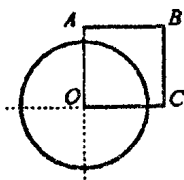
1) Пусть $\perp OA$, тогда $d < r$ и l – секущая (по опр.).

2) Пусть l не $\perp OA$, тогда $OK \perp l$ $\triangle OAK$ – прямоугольный т.к. OA – гипотенуза, то $OA > OK$;

$r > OA$, $r > OK$ (по условию), следовательно, l – секущая по определению.

Что и требовалось доказать.

633.



Дано: $ABCO$ – квадрат;

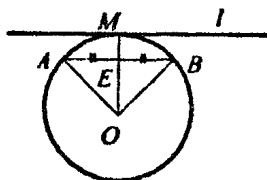
$AB = 6$ см.

Окружность $(O; 5$ см).

Определить: какие из прямых OA , AB , BC и AC секущие по отношению к окружности $(O; 5$ см).

$r < AB$, значит, прямые OA и OC – секущие.

634.



Дано: Окружность $(O; R)$

AB – хорда;

$OM = R$, $AB \cap OM = E$;

$AE = EB$;

$M \in l$ – касательная.

Доказать: $l \parallel AB$.

Доказательство:

1) В $\triangle AOB$: $AO = OB = AB = R$, следовательно,

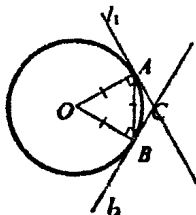
$\angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$.

2) По свойству касательных $OA \perp l$, значит,

$\angle \alpha = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

636.



Дано: Окр $(O; R)$;

$AB = R$;

$l_1 \cap l_2 = C$;

$\angle ACB = ?$

Решение:

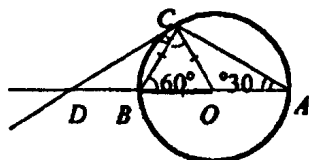
1) $AB = OA = OB = R$, $\angle A = \angle B = \angle O = 60^\circ$.

2) Из свойства касательных $OA \perp l_1$, $OB \perp l_2$, значит,
 $\angle CAB = \angle CBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

3) $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, т.е. $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

637.



Дано: Окр $(O; R)$;

$AB = 2R$;

$\angle CAB = 30^\circ$;

$CD \cap AB = D$.

Доказать: $\triangle ACD$ – равнобедренный.

Доказательство:

1) $AO = OC = R$, следовательно, $\triangle AOC$ – равнобедренный, т.е.
 $\angle C = \angle A = 30^\circ$;

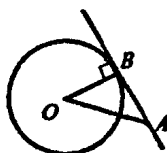
2) $OC \perp CD$, следовательно, $\angle ACD = \angle OCA + \angle DCO$;
 $\angle ACD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$;

3) $\triangle ACD$: $\angle D + \angle A + \angle C = 180^\circ$,
 $\angle D + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, т.е.

$\angle A = \angle D = 30^\circ$, следовательно,
 $AC = CD$ и $\triangle ACD$ – равнобедренный.

Что и требовалось доказать

638.



Дано: Окр $(O; 1,5\text{см})$;

AB – касательная;

$OB = 1,5\text{см}$, $OA = 2\text{см}$;

$AB = ?$

Решение:

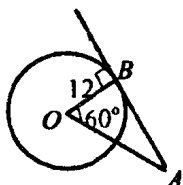
1) AB – касательная (по усл.), следовательно $OB \perp AB$ и $\triangle AOB$ – прямоугольный;

$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 4 - 2,25 = 1,74$ (по т. Пифагора), т.е.

$AB = \frac{1}{2}\sqrt{7}\text{ см.}$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{7}\text{ см.}$

639.



Дано: Окр (O; 12 см);
 АВ – касательная;
 $\angle AOB = 60^\circ$;
 АВ = ?

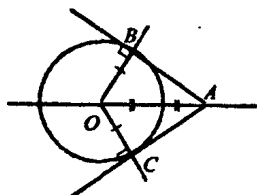
Решение:

1) АВ – касательная (по усл.), следовательно, $OB \perp AB$;

из $\triangle AOB$: $\operatorname{tg} \angle O = \frac{AB}{OB}$, откуда:

$$AB = OB \cdot \operatorname{tg} \angle O = 12 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ (см).}$$

640.



Дано: Окр (O; 4,5 см);
 OA = 9 см;
 АВ, АС – касательные;
 $\angle BAC = ?$

Решение:

1) В $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$, $OA = 9$, $OB = 4,5$, т.е. $OB = \frac{1}{2} OA$.

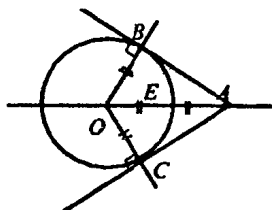
Имеем: $\angle OAB = 30^\circ$.

2) Также, из $\triangle AOC$ $\angle OAC = 30^\circ$.

3) $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

641.



Дано: Окр (O; R);
 АВ, АС – касательные;
 $OA \cap \text{Окр (O; R)} = E$;
 $OE = EA$;
 $\angle BAC = ?$

Решение:

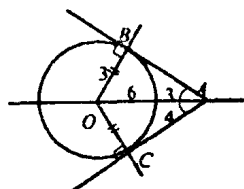
1) $OE = OC = OB = R$ ($OA = 2OE = 2R$);

2) $\triangle AOB: OB = \frac{1}{2} OA$, следовательно, $\angle BAO = 30^\circ$, а $\angle B = 90^\circ$;

3) AO – биссектриса $\angle BAC$, значит, $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: 60°

642.



Дано: $OB = 3\text{ см}$, $OA = 6\text{ см}$;

AB , AC , $\angle 3$, $\angle 4 = ?$

Решение:

1) В $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$, $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по т. Пифагора);

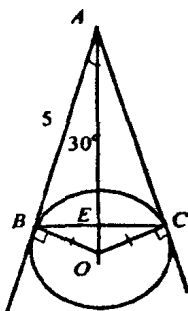
$AB^2 = 36 - 9 = 27$; $AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\text{ см}$;

2) $\sin \angle 3 = \frac{OB}{AO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, значит, $\angle 3 = 30^\circ$;

3) $\triangle AOB = \triangle AOC$, т.е. $AC = AB = 3\sqrt{3}\text{ см}$; $\angle 4 = \angle 3 = 30^\circ$.

Ответ: $3\sqrt{3}\text{ см}$; $3\sqrt{3}\text{ см}$; 30° , 30° .

643.



Дано: Окр (O ; R);

AB , AC – касательные;

$AB = 5\text{ см}$, $\angle OA = 30^\circ$;

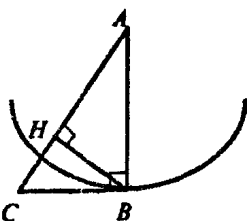
$BC = ?$

Решение:

1) В $\triangle AOB$: $\angle B = 90^\circ$;

$\angle A = 30^\circ$, следовательно, $BO = \frac{1}{2} AO$.

646.

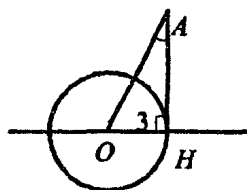


Из условия $CB \perp AB$;
 $AB = R$ Окр (A; AB),
 значит по признаку
 CB – касательная к Окр (A; AB).
 2) Из условия $CB \perp AB$,
 $CB = r$ Окр (C; CB), значит по признаку
 AB – касательная к Окр (C; BC).

3) Пусть Окр (B; BC), тогда AC секущая к этой окружности,
 $(BC > BH)$.

Пусть Окр (B; AB), тогда AC секущая к этой окружности,
 $(AB > BH)$.

647.



Дано: Окр (O; 3 см).
 Найти: является ли АН касательной?

а) $OA = 5$ см, $АН = 4$ см.

В $\triangle AHO$: $OA = 5$, $АН = 4$, $ОН = 3$, по т. Пифагора

$5^2 = 4^2 + 3^2$; $25 = 25$, следовательно, $\triangle AHO$ – прямоугольный, т.е.

$\angle OHA = 90^\circ$ и АН является касательной;

б) $\angle HAO = 45^\circ$, $OA = 4$ см.

В $\triangle AHO$:

$ОН = 3$, $OA = 4$, $\angle HAO = 45^\circ$.

Допустим: $\angle H = 90^\circ$, тогда $АН = ОН = 3$, т.е. $АО = 3\sqrt{2}$, а это противоречит условию $АО = 4$, следовательно, предположение неверно и АН не является касательной.

в) $\angle HAO = 30^\circ$, $OA = 6$ см.

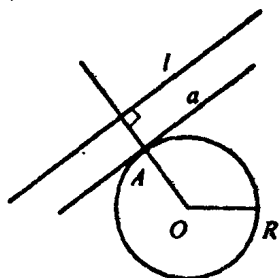
В $\triangle AHO$: $OA = 6$, $ОН = 3$, $\angle A = 30^\circ$;

$ОН = \frac{1}{2} OA$, значит, $\angle H = 90^\circ$, т.е.

АН является касательной.

648.

Дано:



а) Построить касательную к окружности, параллельную l .

Построение:

1) Строим $OM \perp l$.

2) $OM \cap \text{Окр} (O; R) = A$.

3) Через точку A проведем прямую $a \parallel l$.

4) a – искомая касательная.

Дано:

б) Построить касательную к окружности, перпендикулярную l .

Построение:

1) Строим $OM \perp l$

2) Через точку O проводим прямую $b \parallel l$.

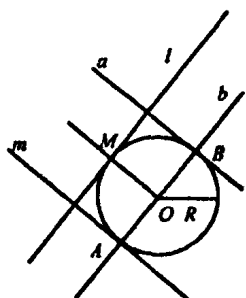
3) $b \cap \text{Окр} (O; R) = \{A; B\}$.

4) Через A или B проводим прямую $a \parallel l$.

3) $b \cap \text{Окр} (O; R) = \{A; B\}$.

4) Через A или B проводим прямую $a \parallel OM$.

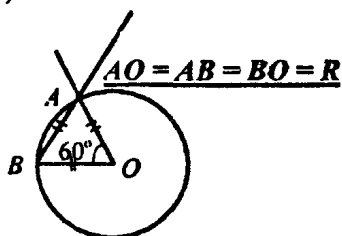
5) a или a_1 – является искомым касательными.



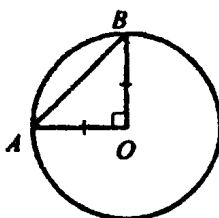
§ 2. Центральные и вписанные углы

649.

а)

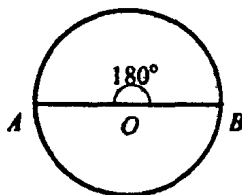
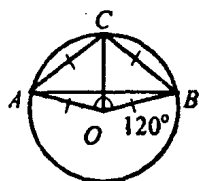


б)

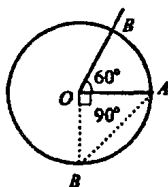


в) $\triangle ABO$ и $\triangle BOC$ – равносторонние.

г)



650.



Дано: Окр: (O; 16)

AB = ?

Решение:

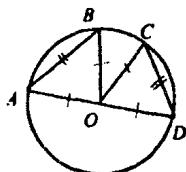
а) $\angle AOB = 60^\circ$, значит $\triangle AOB$ –

равносторонний и $AB = 16$

б) $\angle AOB = 90^\circ$, значит, $\triangle AOB$ – прямоугольный и $AB = 16\sqrt{2}$

в) $\angle AOB = 180^\circ$, значит, $AB = AO + OB = 2 \cdot 16 = 32$.

651.



а) Дано: Окр (O; R);

$AB = CD$.

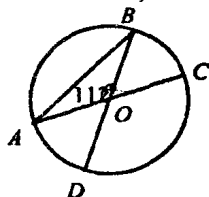
Доказать: $AB = CD$.

Доказательство:

В $\triangle AOB$ и $\triangle COD$: $OC = OA = R$, $OD = OB = R$,
из усл.: $AB = CD$, т.е.

$\triangle AOB = \triangle COD$ (по трем сторонам), т.е.

$\angle AOB = \angle COD$, $AB = CD$.



б) Дано: Окр (O; R);

$AB = CD$;

CD и CBD = ?

Решение:

1) $AB = CD$ (см. выше),

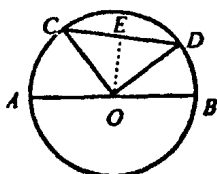
$\angle AOB = 112^\circ$, значит,

$AB = 112$ и $CD = 112^\circ$.

2) Т.е. $\angle CBD = 360^\circ - 112^\circ = 248^\circ$.

Ответ: 112° и 248° .

652.



Дано: $AC = 37^\circ$;

$BD = 23^\circ$;

$R = 15\text{ см}$;

$CD = ?$

Решение:

1) $CD = 180^\circ - (AC + DB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$;

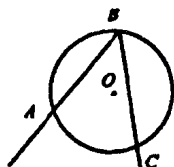
2) из $\triangle COD$: $\angle O = 120^\circ$, $OD = OC = 15\text{ см}$,

т.к. $OE \perp CD$, $\sin \angle EOD = \frac{ED}{OD}$; т.е. $ED = OD \cdot \sin \angle EOD =$

$$= 15 \cdot \sin 60^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см и } CD = 2 \cdot ED = 15\sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ: $15\sqrt{3} \text{ см}$.

653.



Дано: $\angle ABC$ – вписанный;
 $\angle ABC = ?$

Решение:

$\angle ABC = \overline{AC} : 2$.

а) $\overline{AC} = 48^\circ$, следовательно, $\angle ABC = 24^\circ$;

б) $\overline{AC} = 57^\circ$, следовательно, $\angle ABC = 28^\circ 34'$;

в) $\overline{AC} = 90^\circ$, следовательно, $\angle ABC = 45^\circ$;

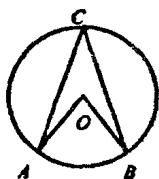
г) $\overline{AC} = 124^\circ$, следовательно, $\angle ABC = 62^\circ$;

д) $\overline{AC} = 180^\circ$, следовательно, $\angle ABC = 90^\circ$.

654.

- а) $\angle x = \frac{1}{2}(360^\circ - 80^\circ - 152^\circ) = 64^\circ$; в) $\angle x = (180^\circ - 112^\circ):2 = 34^\circ$;
 б) $x = 360^\circ - (60^\circ + 125^\circ) = 175^\circ$; г) $x = 360^\circ - (215^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$.

655.



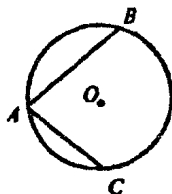
Дано: $\angle ABC > \angle ACB$ на 30° ;
 $\angle AOB, \angle ACB = ?$

Решение:

Пусть $\angle ACB = x$, тогда $\angle AOB = x + 30^\circ$;

$\angle AOB = 2\angle ACB$, следовательно, $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB$; $x = \frac{1}{2}(x + 30^\circ) = 30^\circ$,
 значит, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$.

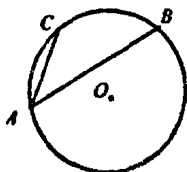
656.



а) Дано: $\angle AOB = 115^\circ$;
 $\angle AOC = 43^\circ$.
 Найти: $\angle BAC = ?$

Решение:

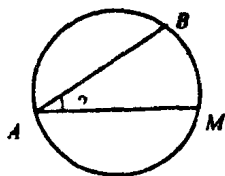
$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$; отсюда $\angle BOC = 360^\circ - (115^\circ + 43^\circ) = 202^\circ$,
 следовательно, $\angle BAC = 101^\circ$;



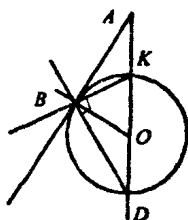
б) $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$, где
 $\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 115^\circ - 43^\circ = 72^\circ$,
 т.е. $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 36^\circ$.

Ответ: 101° или 36° .

657.

Дано: $\widehat{AB} = 140^\circ$ $M \in \widehat{AB}$, $\widehat{AM} : \widehat{MB} = 6:5$; $\angle BAM = ?$ Решение:1) $\widehat{AMB} = 360^\circ$; где $\widehat{BA} = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$; $\widehat{AM} : \widehat{MB} = 6:5$, следовательно, $\widehat{AM} = 6x$, $\widehat{AM} + \widehat{MB} = 220^\circ$; $\widehat{MB} = 5x$; $6x + 5x = 220$; $x = 20$,т.е. $\widehat{AM} = 20 \cdot 6 = 120^\circ$, $\widehat{MB} = 20 \cdot 5 = 100^\circ$;2) $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BM} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$.Ответ: 50°

658.



Дано: AB – касательная;

AD – секущая;

 $D \in \text{Окр}(O; R)$; $\widehat{BD} = 110^\circ 20'$; $\angle BAD, \angle ADB = ?$ Решение:1) т.к. $\angle BKD$ – вписанный, то

$$\angle BKD = \frac{1}{2} \widehat{BD} = \frac{1}{2} 110^\circ 20' = 55^\circ 10'.$$

2) Имеем $\angle DBK = \frac{1}{2} \widehat{DK} = 90^\circ$, следовательно,

$$\angle DBA = 90^\circ - \angle BKD; \angle BDA = 89^\circ 60' - 55^\circ 10' = 34^\circ 50';$$

3) $OB = OD = R$, значит, $\triangle BOD$ – равнобедренный, т.е.

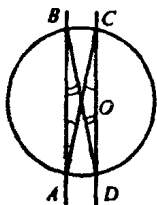
$$\angle DBO = \angle BDO = 34^\circ 50', \text{ следовательно,}$$

$$\angle DBA = \angle DBO + \angle OBA = 34^\circ 50' + 90^\circ = 124^\circ 50', \text{ значит,}$$

$$\angle BAD = 180^\circ - (124^\circ 50' + 34^\circ 50') = 179^\circ 60' - 159^\circ 40' = 20^\circ 20'.$$

Ответ: $20^\circ 20'$ и $34^\circ 50'$.

659.



Дано: $AB \parallel CD$.

Доказать: $AD = BC$.

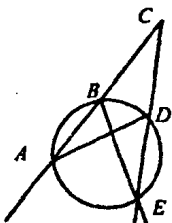
Доказательство:

1) $\angle BAC$ и $\angle ACD$ – накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC , т.е. $\angle BAC = \angle ACD$;

2) т.к. $\angle ACD = \frac{1}{2} AD$ и $\angle BAC = \frac{1}{2} CB$, то

$CB = AD$, что и требовалось доказать.

660.



Дано: AC, AE – секущие;

$\angle ACE = 32^\circ$;

$\angle A = 100^\circ$;

$BD = ?$

Решение:

1) $\angle ABE$ – вписанный, следовательно, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} 100^\circ = 50^\circ$;

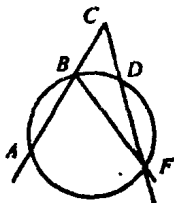
2) т.к. $\angle EBC$ и $\angle ABE$ смежные, то

$\angle BED = 180^\circ - (50^\circ + 32^\circ) = 98^\circ$, следовательно,

$BD = 2 \cdot \angle BED = 2 \cdot 98^\circ = 196^\circ$.

Ответ: 196° .

661.



Дано: AC, FC – секущие;

$\angle ACF = 140^\circ$, $BD = 52^\circ$;

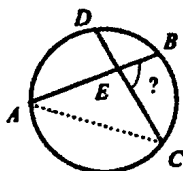
$\angle ACF = ?$

Решение:

- 1) Т.к. $\angle ABF$ – вписанный, то $\angle ABF = \frac{1}{2} AF = 70^\circ$.
2) Т.к. $\angle BFD$ – вписанный, то $\angle BFD = \frac{1}{2} BD = 26^\circ$.
3) Из $\triangle BCF$: $\angle F = 26^\circ$, $\angle B$ (смежный с $\angle ABF$) $= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$;
 $\angle C = 180^\circ - (26^\circ + 110^\circ) = 44^\circ$.

Ответ: 44° .

662.



Дано:

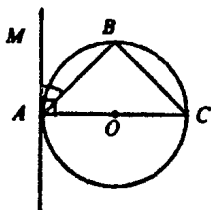
$AB \cap CD = E$;
 $AD = 54^\circ$, $BC = 70^\circ$;
 $\angle BEC = ?$

Решение:

- 1) Т.к. $\angle ACD = \frac{1}{2} AD$, то $\angle ACD = 27^\circ$;
 $\angle BAC = \frac{1}{2} BC$, т.е. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$;
2) $\triangle AEC$: $\angle E = 180^\circ - (\angle C + \angle A)$;
 $\angle E = 180^\circ - (35^\circ + 27^\circ) = 118^\circ$.
3) Т.к. $\angle BEC$ и $\angle AEC$ – смежные, то $\angle BEC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$.

Ответ: 62° .

663.



Дано:

AC – диаметр;
Окр(О; R);
AB – хорда, AM – касательная;
 $\angle MAB < 90^\circ$.

Доказать: $\angle MAB = \angle ACB$.

Доказательство:

- 1) $\angle B = \frac{1}{2} AC = 90^\circ$, следовательно, $\triangle ABC$ – прямоугольный,

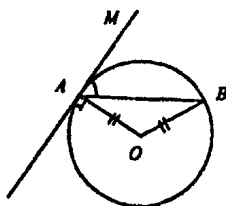
$$\angle C = 90^\circ - \angle BAC \quad (1).$$

2) AM – касательная к окружности, значит, $AM \perp AC$ и $\angle MAB = 90^\circ - \angle BAC \quad (2).$

3) Сравнивая (1) и (2), имеем:

$\angle C = \angle MAB$, что и требовалось доказать.

664.



Дано: AM – касательная;
 AB – хорда.

Доказать: $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB$.

Доказательство:

Т.к. $AO = BO = R$, $\triangle AOB$ – равнобедренный, следовательно,
 $\angle B = \angle A = \alpha$, т.е. $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha \quad (1),$

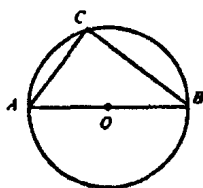
$\angle AOB$ – центральный, значит, $\angle AOB = 2\angle C$.

Т.к. AM – касательная, $AM \perp AO$, т.е. $\angle MAB = 90^\circ - \alpha$.

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB$, что и требовалось доказать.

665.



Дано: $A, B, C \in \text{Окр}$, AB – диаметр.

Доказать: $\angle C > \angle A$, $\angle C > \angle B$.

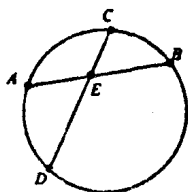
Доказательство:

1) Т.к. $\angle ACB$ – вписанный, то $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$,

следовательно $\triangle ABC$ – прямоугольный, т.е. $\angle C > \angle B$, $\angle C > \angle A$.

$\angle A + \angle B = 90^\circ$ (по свойству углов прямоугольного

треугольника), следовательно, каждый из углов меньше $\angle C$



Дано: $AB \cap CD = E$.
 $ED = ?$

Решение:

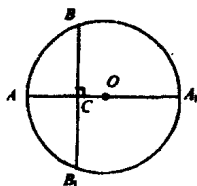
а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2,5$, по свойству хорд имеем:
 $AE \cdot EB = CE \cdot ED$; $5 \cdot 2 = 2,5 \cdot ED$, отсюда

$$ED = \frac{10}{2,5} = \frac{100}{25} = 4;$$

б) $AE = 16$, $EB = 9$, $CE = ED$, значит, $AE \cdot EB = CE \cdot ED$;
 $16 \cdot 9 = x \cdot x$; $x^2 = 16 \cdot 9$; $x = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$;

в) $AE = 0,2$; $BE = 0,5$; $CE = 0,4$, значит, $AE \cdot EB = CE \cdot ED$, т.е.
 $0,2 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot ED$; $ED = 0,1 \cdot 0,4 = 0,25$.

667.



Дано: AA_1 – диаметр;
 $AA_1 \perp BB_1$, $AA_1 \cap BB_1 = C$;
 $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см;
 $BB_1 = ?$

Решение:

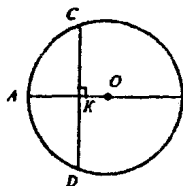
1) $AA_1 \perp BB_1$, следовательно, OC – высота равнобедренного $\triangle BOB_1$, следовательно, OC – медиана, значит, $BC = CB_1$;

2) $AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1$ (св-во хорд), т.е.

$$4 \cdot 8 = x \cdot x$$
; $x^2 = 32$, $x = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $BB_1 = 2BC = 8\sqrt{2}$ см.

Отсюда, $BB_1 = 8\sqrt{2}$ см

668.



Дано: AB – диаметр,
 $CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$.
 Доказать: $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$.

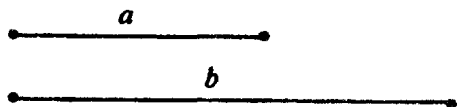
Доказательство:

1) $CD \perp AB$, следовательно, $CK = KD$ (см. 667).

2) По свойству хорд: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, т.к. $CK = KD$, то $AK \cdot KB = CK^2$; $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$, что и требовалось доказать.

669.

Дано:



Построить: AB : $AB = \sqrt{a \cdot b}$,

Построение:

проводим прямую l , на ней откладываем два отрезка $KN = a$, $NM = b$;

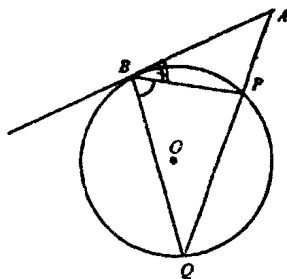
строим окружность с центром на l и диаметром KM ;

проводим прямую, перпендикулярную l , через точку N ;

перпендикуляр пересекает окружность в точках A и B , имеем:

AB – искомый отрезок.

670.



Дано: AB – касательная;

AQ – секущая.

Доказать: $AB^2 = AP \cdot AQ$.

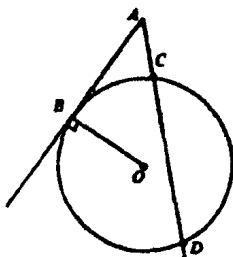
Доказательство:

В $\triangle ABP$ и $\triangle AQB$:

$\angle A$ – общий, $\angle Q = \angle B$, следовательно,

$\triangle ABP \sim \triangle AQB$, т.е. $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$

$AB^2 = AQ \cdot AP$ (по свойству пропорции), что и требовалось доказать.



Дано: AB – касательная;
 AD – секущая;
 $CD = ?$

Решение:

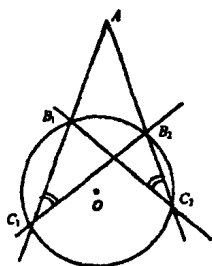
а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см, тогда $AB^2 = AC \cdot AD$;
 пусть $CD = x$, тогда $4^2 = 2(x + 2)$; $16 = 2x + 4$,
 $x = 6$, т.е. $CD = 6$ см.

Ответ: 6 см.

б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см, тогда $AB^2 = AC \cdot AD$;
 $25 = AC \cdot 10$, отсюда $AC = 2,5$ см;
 $CD = AD - AC = 10 - 2,5 = 7,5$ см.

Ответ: 7,5 см.

672.



Дано: AC_1 и AC_2 – секущие.
 Доказать: $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

Доказательство:

1) В $\triangle AC_1B_2$ и $\triangle AC_2B_1$:

$\angle A$ – общий, $\angle C_2 = \angle C_1 = \frac{1}{2} \angle B_1B_2$, т.е.

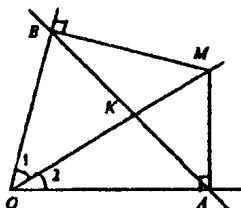
$\triangle AC_1B_2 \sim \triangle AC_2B_1$ (по двум углам), значит,

$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$ (из свойства пропорции), т.е.

$AC_1 \cdot AB_1 = AB_2 \cdot AC_2$, что и требовалось доказать.

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника.

674.



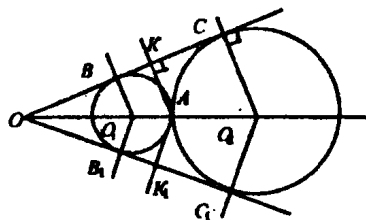
Дано: $\angle O$;
 OM – биссектриса,
 $MA \perp OA$,
 $MB \perp OB$.
Доказать: $AB \perp OM$.

Доказательство:

1) В $\triangle MOB$ и $\triangle MOA$: OM – общая, т.к. OM – биссектриса, то $\angle 1 = \angle 2$, значит,
 $\triangle MOB = \triangle MOA$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно,
 $OB = OA$ и $\triangle AOB$ – равнобедренный.

2) В $\triangle OBK$ и $\triangle OAK$: $OB = OA$,
 $\angle 1 = \angle 2$, OK – общая, значит,
 $\triangle OBK = \triangle OAK$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е.
 $BK = KA$, следовательно, OK – медиана, тогда по св-ву медианы
 равнобедренного $\triangle OK \perp BA$, что и требовалось доказать.

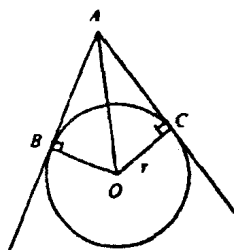
675.



Дано: $\angle O$;
 $\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; r) = A$
 Доказать: $O_1; O_2 \in OA$.

Доказательство:

1) BC и B_1C_1 — касательные к окружностям, значит, $O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$ и, $O_2C_1 \perp B_1C_1$, $O_1B_1 \perp B_1C_1$, т.е. точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$ (по свойству биссектрисы),
2) т.к. $AK = AK_1$ (по свойству биссектрисы), то A лежит на биссектрисе.



Дано: AB, AC – касательные к Окр (О:г).
Найти: а) OA ; б) r

Решение:

а) $r = 5 \text{ см}$, $\angle A = 60^\circ$ (усл.);

1) $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, следовательно, AO является биссектрисой

2) В $\triangle ACO$:

$\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AO = 2 \cdot 5$, $OC = 5 \text{ см}$, т.е.

$AO = 2OC$ (из прямоугол. треугольника AOC),

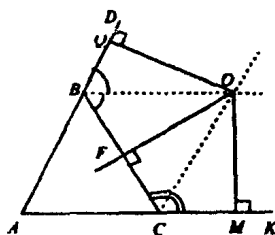
$AO = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}$;

б) AO – биссектриса, тогда в $\triangle AOC$: $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

$\angle O = 45^\circ$, т.е. $AC = OC = r$;

$14^2 = 2r^2$; $r^2 = 98$ (т. Пифагора), $r = 7\sqrt{2}$.

677.



Дано: $\triangle ABC$;

BO, CO – биссектрисы.

Доказать: O – центр окружности,
 AB, AC и BC – ее касательные.

Доказательство:

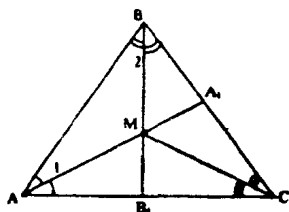
1) BO – биссектриса $\angle CBD$, следовательно,
 $OQ \perp BD$ и $OF \perp BC$ равны (свойство биссектрисы);

2) CO – биссектриса $\angle BCK$, следовательно, $OF \perp BC$ и $OM \perp CK$,
равны (свойство биссектрисы).

3) Имеем: $OQ = OF$, $OF = OM$, т.е.

$OQ = OM = OF$ – радиусы окружности с центром в точке O ,
а AC, BC, AB – касательные.

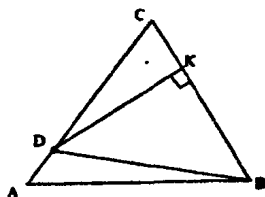
678.



Дано.

 $\triangle ABC$; AA_1, BB_1 – биссектрисы; $AA_1 \cap BB_1 = M$.Найти: $\angle ACM$ и $\angle BCM$.Решение:а) $\angle AMB = 136^\circ$ 1) М – точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 , следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$ и $\angle ACM = \angle BCM$;2) $\triangle ABM$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, т.е. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$;3) $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$; $\angle C = 180^\circ - (\angle B + \angle A)$, $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$; $\angle C = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$, т.е. $\angle BCM = \angle ACM = 46^\circ$;б) $\angle AMB = 111^\circ$.Имеем: $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 111^\circ) = 42^\circ$, т.е. $\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ$.Ответ: а) $46^\circ; 46^\circ$; б) $21^\circ; 21^\circ$.

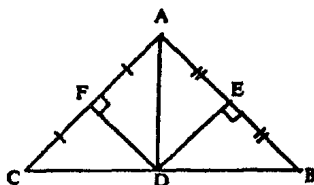
679.

Дано: $\triangle ABC$; $DK \perp BC$, $CK = KB$;а) AD и $CD = ?$ б) $AC = ?$ Решение:а) $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см, DK – серединный перпендикуляр к BC , следовательно, $BD = DC$ (по св-ву), т.е. $DC = 5$ см, тогда $AD = AC - DC = 8,5 - 5 = 3,5$ см;б) $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см,

DK – срединный перпендикуляр к BC, следовательно,
 $DC = BD = 11,4\text{см};$
 $AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 + 14,6\text{см}.$

Ответ: а) 5см; 3,5см; б) 11,4см и 14,6см.

680.



Дано: $\triangle ABC;$
 $FD \perp AC, ED \perp AB;$
 $CF \perp FA, AE = EB.$

Доказать:

- а) D – середина BC;
- б) $\angle A = \angle B + \angle C.$

Доказательство:

- а) 1) $DE \perp AB, AE = EB$, следовательно, $BD = AD$, по свойству срединного перпендикуляра;
- 2) $FD \perp AC, CF = FA$, следовательно, $CD = DA$, по свойству срединного перпендикуляра.
- 3) Имеем: $AD = BD, CD = DA$, т.е.
 $CD = DB$, значит D – середина CB;
- б) $\angle A = \angle CAD + \angle DAB;$
 $\triangle ACD$ – равнобедренный, значит, $\angle CAD = \angle C;$
 $\triangle ADB$ – равнобедренный, значит, $\angle DAC = \angle B$, т.е.
 $\angle A = \angle B + \angle C$, что и требовалось доказать

681.

Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный;

$EE_1 \perp AB, AE_1 = E_1B;$

$P_{ABC} = 27\text{см}, AB = 18\text{см};$

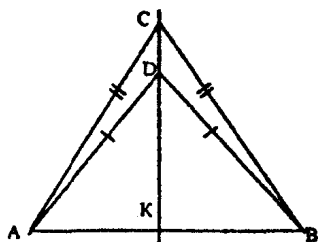
AC = ?

Решение:

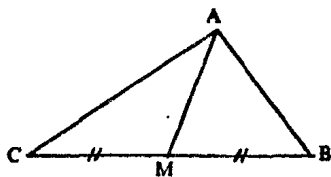
В $\triangle AEC$: $P_{AEC} = AE + EC + AC$, по свойству срединного перпендикуляра $AE = BE$, значит,
 $P_{ABC} = BE + EC + AC,$
 $P_{AEC} = BC + AC$, где $BC = AB$ по условию, т.е.
 $P_{AEC} = AB + AC, 27 = 18 + AC,$
 $AC = 9\text{см}.$

Ответ: 9 см.

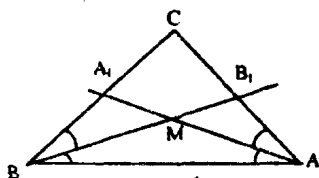
682.

Дано: $\triangle ABC$, $AC = CB$; $\triangle ADB$, $AD = DB$.Доказать: $CD \perp AB$ и $AK = KB$.Доказательство:1) Из условия $AC = CB$, $C \in l_1$, $l_1 \perp AB$, где l_1 – серединный перпендикуляр $AD = DB$, следовательно, $D \in l_1$, где $l_1 \perp AB$ Имеем: C и D лежат на одном серединном перпендикуляре к AB ,
и l и l совпадают, т.к. $AK = KB$; $AK = KB$, а именно:через K проведены два перпендикуляра к одному отрезку, но это
невозможно по теореме, l и l совпали, значит, $CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$, $AK = KB$.

683.

Дано: $\triangle ABC$; $AB \neq AC$; AM – медиана.Доказать: $AM \not\perp BC$.Доказательство:1) Пусть $AM \perp BC$.2) В $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$: AM – общая, $CM = MB$, т.е. $\triangle AMC = \triangle AMB$ (по двум катетам), значит, $AC = AB$, но это противоречит условию $AB \neq AC$.3) Следовательно, наше предположение неверно, и $AM \not\perp BC$,
что и требовалось доказать.

684.

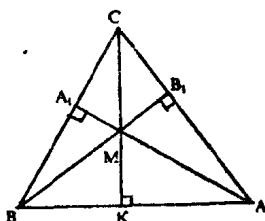


Дано: $\triangle ABC$;
 $AC = BC$;
 AA_1, BB_1 – биссектрисы;
 $AA_1 \cap BB_1 = M$.
 Доказать: $CM \perp AB$.

Доказательство:

$AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно, CM – биссектриса $\angle C$, опущенная на основание равнобедренного треугольника, т.е. $CM \perp AB$, что и требовалось доказать.

685.



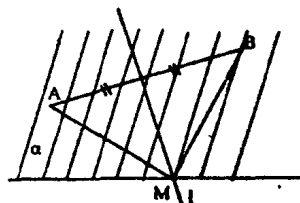
Дано: $\triangle ABC$;
 $AA_1 \cap BB_1 = M$;
 $AC = BC$;
 $BB_1 \perp AC, AA_1 \perp BC$.
 Доказать: $CM \perp BA$,
 $BK = KA$.

Доказательство:

1) $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно по замечательному свойству треугольника: $CM \perp AB$.

2) В $\triangle BCK$ и $\triangle ACK$: CK – общая, $BC = AC$, т.е. $\triangle ACK = \triangle BCK$ (по катету и гипотенузе), значит, $KA = BK$, что и требовалось доказать.

687.



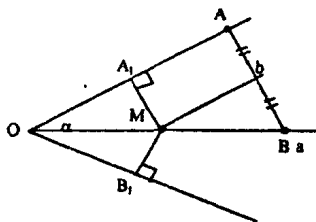
Дано: a ;
 $A, B \in a$;
 Построить: $M \in a, AM = MB$.

Построение:

1) Строим отрезок AB .

- 2) Строим $\perp AB$, где l – серединный перпендикуляр к отрезку AB
- 3) l пересекает в точке M .
- 4) M – искомая точка.

688.



Дано: $\angle \alpha$, AB .

Построить: M , такую, чтобы

$MA_1 \perp OA_1$;

$MB_1 \perp OB_1$ и

$AM = MB$.

Построение:

Строим биссектрису $\angle O$.

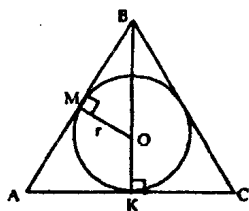
Строим серединный перпендикуляр к AB .

$\alpha \cap b = M$.

M – искомая точка.

§ 4. Вписанная и описанная окружности

689.



Дано: $\triangle ABC$;

$AC = 10\text{см}$, $AB = BC = 13\text{см}$;

Окр. $(O; r)$ – вписана в $\triangle ABC$;

$r = ?$

Решение:

В $\triangle BKM$ и $\triangle BOM$:

$\angle B$ – общий, $\angle M = \angle K = 90^\circ$, т.е.

$\triangle BKM \sim \triangle BOM$ (по двум углам), значит,

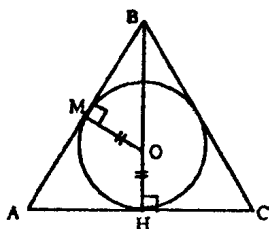
$$\frac{BK}{BM} = \frac{AK}{OM} = \frac{AB}{OB};$$

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 \text{ (т. Пифагора); } 13^2 = 5^2 + BK^2; BK = 12;$$

$$\frac{13}{12-r} = \frac{12}{BM}, 5(12-r) = 13r, r = 3\frac{6}{8} = 3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ см.

690.



Дано: $\triangle ABC$:

$$AB = BC = 60 \text{ см};$$

$$BO:OH = 12:5;$$

$BH \perp AC$ – центр вписанной окружности;

$AC = ?$

Решение:

В $\triangle ABH$ и $\triangle OBM$: $\angle B$ – общий, $\angle M = \angle H = 90^\circ$, т.е.

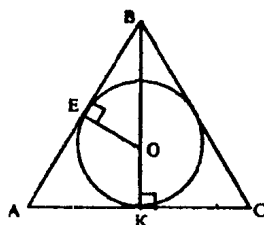
$\triangle ABH \sim \triangle OBM$ (по двум углам), значит, $\frac{BH}{BM} = \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{OB}$;

$BM = 12x$, $OM = 5x$, следовательно,

$$\frac{60}{12x} = \frac{AH}{5x}; AH = \frac{60 \cdot 5x}{12x}; AH = 25 \text{ см.}$$

Отсюда, $AC = 2 \cdot AH = 50 \text{ см.}$

691.



Дано: $\triangle ABC$;

$$BE = 2 \text{ см}, AE = 3 \text{ см};$$

$$AB = BC.$$

Найти: $P_{ABC} = ?$

Решение:

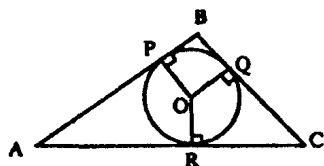
1) $AE = AK$ (свойство касательных отрезков), значит, $AK = 3 \text{ см}$ и $AC = 6 \text{ см};$

2) $AB = AE + EB = 3 + 4 = 7 \text{ см};$

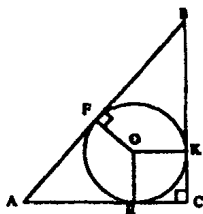
3) $P_{ABC} = 7 + 7 + 6 = 20 \text{ см.}$

Ответ: 20 см.

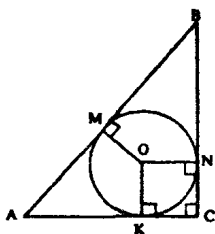
692.

Дано: $\triangle ABC$;Окр $(O; R)$ – вписана; $AB = 10\text{ см}$, $BC = 12\text{ см}$, $CA = 5\text{ см}$; $AP, PB, BQ, QC, CR, RA = ?$ Решение: $PB = BQ$, $QC = CR$, $AR = AP$ (по св-ву касательных отрезков).Пусть $PB = x$, тогда $QC = 12 - x$ и $AP = 10 - x$, $AR + RC = 5$, $12 - x + 10 - x = 5 \Rightarrow x = 8,5$, $PB = BQ = 8,5\text{ см}$, $AP = AR = 1,5\text{ см}$, $RC = QC = 3,5\text{ см}$.

693.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$; $P_{ABC} = ?$ Решение:а) $AB = 26\text{ см}$, $r = 4\text{ см}$; $P_{ABC} = AB + BC + AC = 26$, $P_{ABC} = BK + KC + CE + AE$; $P_{ABC} = 26 + 8 + BK + AE$, $FB + FA = 26$, $P_{ABC} = 26 + 8 + 26 = 60\text{ см}$.б) $AF = 5\text{ см}$, $FB = 12\text{ см}$;1) $AF = AE = 5\text{ см}$, $FB = BK = 12\text{ см}$ (св-во касательных отрезков).Пусть $EC = CK = r$,тогда $AC = 5 + r$; $BC = 12 + r$; $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (т. Пифагора для $\triangle ABC$) $17^2 = (5 + r)^2 + (12 + r)^2$; $2r^2 + 34r - 120 = 0$, $r^2 + 17r - 60 = 0$, ищем корни уравнения
$$\begin{cases} r_1 = -20 - \text{не подходит по смыслу} \\ r_2 = 3 \end{cases}, \text{ следовательно, } EC = r_2 = 3\text{ см};$$
2) $P_{ABC} = AB + BC + AC = (5 + 12) + (5 + 3) + (12 + 3) = 40\text{ см}$.

Ответ: 40 см.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$;

$AB = c$;

$AC + CB = m$;

$d = ?$

Решение:

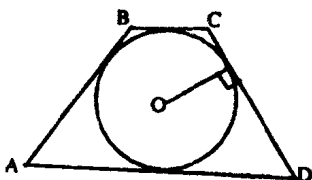
По свойству касательных отрезков. $NB = MB$, $KC = CN$, $AM = AK$.

Пусть $AK = AM = x$, тогда $BN = MB = c - x$ и, т.к.

$AC + CB = m$, то

$(x + r) + (c - x) + r = m$, $2r = m - c$, $d = m - c$.

695.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;

Окр $(O; R)$ – вписана;

$AB + CD = 15\text{см}$;

$P_{ABCD} = ?$

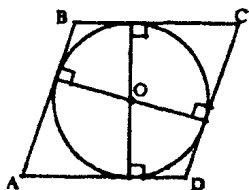
Решение:

1) $ABCD$ – описанный четырехугольник, следовательно,

$AB + CD = AD + BC$, т.е. $AD + DC = 15\text{см}$;

2) $P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD = 30\text{см}$.

696.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм;

Окр $(O; R)$ – вписана.

Доказать: $ABCD$ – ромб.

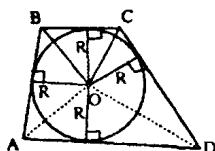
Доказательство:

$ABCD$ – описанный около Окр $(O; R)$, следовательно,

$AB + CD = AD + BC$.

Мы знаем, что стороны в параллелограмме попарно равны, следовательно, запишем: $2AB = 2AD$, т.е.
 $AB = AD$ (соседние стороны равны), следовательно, $ABCD$ – ромб. Что и требовалось доказать.

697.



Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$.

Доказательство:

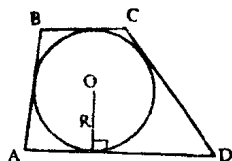
$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{ABO};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R + \frac{1}{2} AD \cdot R + \frac{1}{2} AB \cdot R =$$

$$= \frac{1}{2} R (AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R.$$

Что и требовалось доказать.

698.



Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник ;

$$AB + CD = 12 \text{ см}, R = 5 \text{ см};$$

$$S_{ABCD} = ?$$

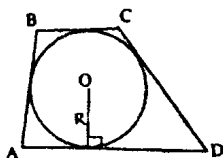
Решение:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}, \text{ следовательно,}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ см}^2.$$

Ответ: 60 см^2 .

699.



Дано: $ABCD$ – описанный четырехугольник;

$$AB + CD = 10 \text{ см}, S_{ABCD} = 12 \text{ см}^2;$$

$$R = ?$$

Решение:

1) $ABCD$ – описанный, следовательно, $P_{ABCD} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}$;

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} R \cdot P_{ABCD}$, т.е. $R = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 12}{20} = 1,2 \text{ см}$.

Ответ: 1,2 см.

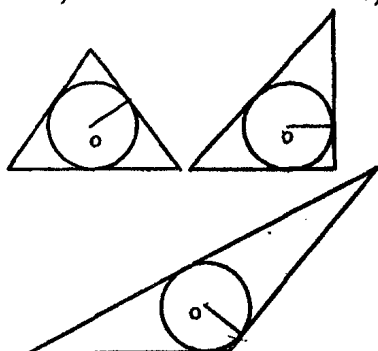
700.

Суммы противоположных сторон ромба равны, следовательно, в любой ромб можно вписать окружность.

701.

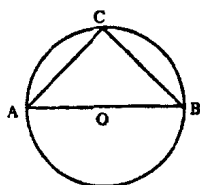
а) остроугольный;

б) прямоугольный;



в) тупоугольный.

702.



Дано: $\triangle ABC$ – вписан в Окр $(O; R)$;

AB – диаметр;

$\angle A, \angle B, \angle C = ?$

Решение:

а) $\angle C = 134^\circ$;

$\angle A = \frac{1}{2} \angle C = 67^\circ$, $\angle B = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$, $\angle C = \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ$.

Ответ: $90^\circ, 67^\circ, 23^\circ$.

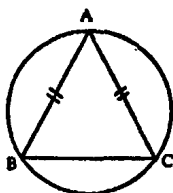
б) $AC = 70^\circ$;

$\angle C = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle B = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$;

$\angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Ответ: $90^\circ, 35^\circ, 55^\circ$.

703.



Дано: $\triangle ABC$ – вписанный;

$AB = AC, BC = 102^\circ$;

$\angle A, \angle B, \angle C = ?$

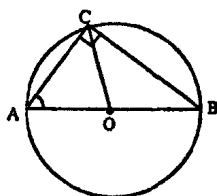
Решение:

$\angle A = \frac{1}{2} BC = 51^\circ$;

$AB = AC$, следовательно, $\angle B = \angle C = (180^\circ - 51^\circ):2 = 64^\circ 30'$.

Ответ: $51^\circ; 64^\circ 30'; 64^\circ 30'$.

704.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ – вписанный в
Окр $(O; R)$.

Доказать: 1) $O \in AB$;

2) $OA = OB$.

Доказательство:

1) $\angle C = 90^\circ$, следовательно, $AB = 180^\circ$, значит,
 AB – диаметр Окр $(O; R) \Rightarrow O \in AB$ и $AO = OB$.

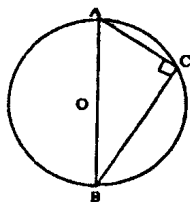
2) AC, BC и $AB = ?$ Если $AB = d$ и $\angle A = \alpha$;

$\triangle ABC$ – прямоугольный, следовательно,

$BC = AB \cdot \sin \angle A$, т.е. $BC = d \cdot \sin \alpha$;

$AC = AB \cdot \cos \angle A$, т.е. $AC = d \cdot \cos \alpha$.

705.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ – вписанный;
 $OA = ?$

Решение:

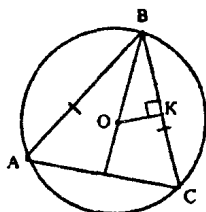
а) $AC = 8$, $BC = 6$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$AB^2 = 64 + 36 = 100$, $AB = \sqrt{100} = 10$, следовательно, $AO = 5$ см;

б) $AC = 18$, $\angle B = 30^\circ$, тогда $AC = \frac{1}{2} AB$,

т.е. $AB = 2AC = 36$ см, тогда $AO = 18$ см.

706.



Дано: $\triangle ABC$ – вписанный;

$AB = BC = AC$;

$OB = 10$ см;

$AB = ?$

Решение:

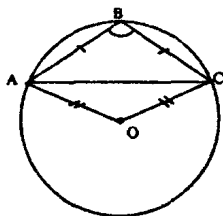
1) $\triangle ABC$ – равносторонний, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$;

2) в $\triangle BKO$: $\angle K = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $OB = 10$, значит,

$$BK = OB \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3};$$

$$3) BC = 2BK = 10\sqrt{3}.$$

707.



Дано: $\triangle ABC$ – вписанный;

$AB = BC = 8$, $\angle B = 120^\circ$;

$d = ?$

Решение:

1) $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно,

$$\angle C = \angle A = (180^\circ - 120^\circ):2 = 30^\circ;$$

2) $\angle C = \frac{1}{2} \angle AOC$, т.е. $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$, т.е. $\angle BOC = 60^\circ$, значит,

$$\angle ABC = 120^\circ \text{ и } \angle AOC = 120^\circ;$$

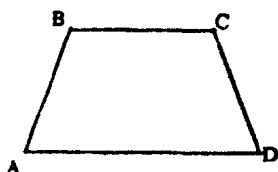
3) $ABCO$ – параллелограмм (т.к. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle O$), т.е.

$AB = OC$, $BC = AO$ (по свойству);

$$AB = BC = 8, OC = OA = 8 \text{ см};$$

$$4) d = 2r = 2 \cdot 8 = 16 \text{ см}.$$

708.



а) В прямоугольнике все углы прямые, следовательно, суммы противоположных углов равны по 180° , что является необходимым условием для того, чтобы описать окружность около 4-угольника.

б)

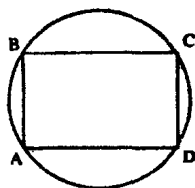
1) $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$ (по свойству равнобедренной трапеции);

2) $\angle B + \angle A = 180^\circ$, $\angle C + \angle D = 180^\circ$ (по свойству равнобедренной трапеции)

Имеем: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ необходимое условие для того, чтобы можно было описать окружность.

Т.е. около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

709.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм вписанный.

Доказать: $ABCD$ – прямоугольник

Доказательство:

$ABCD$ – вписанный, следовательно, $\angle C + \angle A = 180^\circ$; $\angle D + \angle B = 180^\circ$,

но по свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle A$ и $\angle B = \angle D$,
т.е. $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$, значит
 $ABCD$ – прямоугольник (по определению).

710.

Дано: $ABCD$ – трапеция вписанная

Доказать: $AB = CD$

Доказательство:

1) $ABCD$ – вписанная трапеция, следовательно

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle C + \angle A = 180^\circ \quad (1);$$

$$\text{Так же: } \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ (2);$$

по свойству углов при $AD \parallel BC$.

2) Сравниваем (1) и (2):

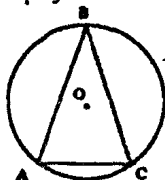
$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle B = \angle C;$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle A = \angle D.$$

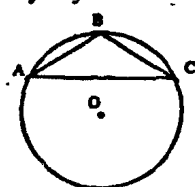
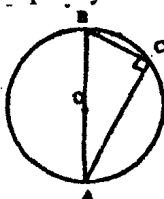
Имеем: углы при верхнем и нижнем основаниях попарно равны,
следовательно, $ABCD$ – равнобедренная.

711.

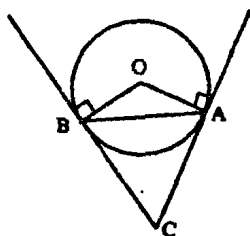
1) Остроугольный:



2) Прямоугольный: 3) Тупоугольный:



712.



Дано: Окр(O ; R);

AB – хорда;

AC , BC – касательные.

Доказать: $AC \cap BC = C$.

Доказательство:

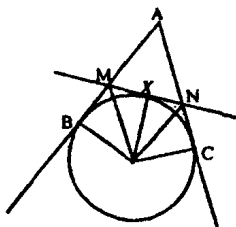
1) $\angle BAC = \frac{1}{2} \overline{AB}$ и $\angle ABC = \frac{1}{2} \overline{AB}$ (см. 644), тогда, $\angle BAC =$

$= \angle ABC < 90^\circ$, т.к. $AB < 180^\circ$, значит,
хорда АВ не является диаметром.

2) $\angle ABC = \angle BAC \neq 90^\circ$, следовательно,
 $AC \not\perp AB$, $BC \not\perp AB$, значит, $AC \cap BC$.

Что и требовалось доказать.

713.



Дано: $\text{Окр}(O; R)$;

AB, AC – касательные;

$X \in BC$, $X \in l$;

l – касательная;

$AB \cap l = M$, $AC \cap l = N$.

Доказать: P_{ABCD} и $\angle MON$ не зависят от
выбора точки X.

Доказательство:

1) $P_{ANM} = AM + AN + MN$;

$BM = MX$ и $XN = NC$ (свойство касательных отрезков), т.е.

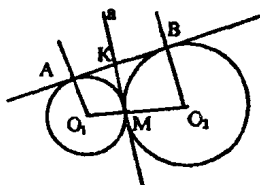
$P_{ANM} = NA + (MX + XN) + AM = NA + MB + NC + AM = AB + AC$,
что и требовалось доказать.

2) $\angle MON = \angle XON + \angle MOX$;

$\triangle BMO = \triangle MXO$ (по катету $BM = MX$ и гипотенузе MO), значит
 $\angle MOX = \angle BOM$.

Также из $\triangle CON = \triangle XON$: $\angle CON = \angle XON$, т.е. $\angle MON = \angle BOM +$
 $+\angle CON$, а именно, не зависит от X, что и требовалось доказать.

714.



Дано: $\text{Окр}(O_1; R)$ и $\text{Окр}(O_2; r)$;

$\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; r) = M$;

a – общая касательная;

AB – касательная.

Доказать: $M \in \text{Окр}(K; \frac{1}{2} AB)$.

Доказательство:

1) M – точка касания окружностей, a – их касательная;

$a \perp O_1O_2$;

2) по свойству касательных к окружности $O_1A_1 \perp AB$, $O_2B \perp AB$, т.е. $O_1A_1 \parallel O_2B$ (по свойству параллельных прямых).

3) В $MKB O_2$:

$BO_2 = MO_2 = R$, $\angle M = \angle B = 90^\circ$, т.е. $MKB O_2$ – квадрат.

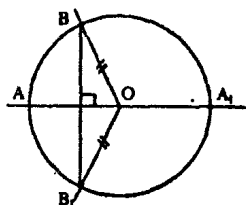
4) Также, $AKMO_1$ – квадрат, т.е. $MK = KB = AK$, значит, K равноудалена от A , M , B , т.е. K – центр окружности радиуса

AK , где $AK = \frac{1}{2} AB$.

Имеем: $M \in \text{Окр}(K; \frac{1}{2} AB)$. т.к. $MK = AK = \frac{1}{2} AB$,

прямые AO_1 , BO_2 , O_1O_2 – касательные к этой окружности.

715.



Дано: $\text{Окр}(O; R)$;

AA_1 – диаметр, BB_1 – хорда;

$AA_1 \perp BB_1$.

Доказать: $AB = AV_1 < 180^\circ$.

Доказательство:

1) $BO = OB_1 = R$, следовательно, $\triangle BB_1O$ – равнобедренный из усл. $OA \perp BB_1$, значит $AB = AB_1$;

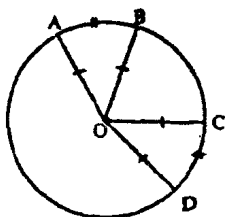
2) $AB + AB_1 = BB_1$ (или $2AB = BB_1$);

$BB_1 = 180^\circ$ – наибольшее значение,

допустим, BB_1 – диаметр окружности, но это противоречит условию, значит, $BB_1 < 180^\circ$,

т.е. $AB = BB_1 < 90^\circ < 180^\circ$.

716.



Дано: $A, B, C, D \in \text{Окр}(O; R)$;

$AB = CB$.

Доказать: $AB = CB$

Доказательство:

1) По св-ву $AB = DC$, следовательно, $\angle AOB = \angle DOC$.

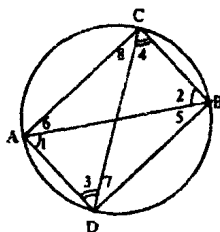
2) В $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$: $OC = AO = R$, $OD = OB = R$,

$\angle AOB = \angle DOC$, значит,

$\triangle AOB = \triangle DOC$ (по двум сторонам и углу между ними),

значит, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

717.



Дано: AB – диаметр;

Окр(O ; R);

$AD \parallel CB$.

Доказать: CD – диаметр.

Доказательство:

1) $AD \parallel CB$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$ (накрест лежащие);

2) $\triangle ACB$, $\triangle ABD$ – прямоугольные треугольники,

$\angle D = \angle C = 90^\circ$, AB – общая, $\angle 1 = \angle 2$, т.е.

$\triangle ABC = \triangle ABD$ (по гипотенузе и углу), значит,

$\angle 8 = \angle 7 = 90^\circ - \angle 4$, $\angle 6 = \angle 5$.

3) В $\triangle ACD$:

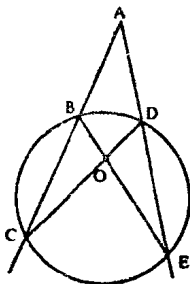
$\angle A + \angle D + \angle C = 180^\circ$;

$\angle A + \angle 3 + 90^\circ - \angle 3 = 180^\circ$, т.е. $\angle A = 90^\circ$

Имеем: $CD = 2\angle A = 180^\circ$, значит,

CD – диаметр окружности, что и требовалось доказать.

719.



Дано: Окр(O ; R);

AC , AE – секущие.

Доказать: $\angle CAE = \frac{1}{2} (CE - BD)$.

Доказательство:

1) В $\triangle ACD$: $\angle A = 180^\circ - (\angle C + \angle D)$ (1);

2) $\angle D = 180^\circ - \angle CDE$, $\angle CDE$ – вписанный, следовательно,
 $\angle CDE = \frac{1}{2} CE$, т.е. $\angle D = 180^\circ - \frac{1}{2} CE$ (1);

$\angle C$ – вписанный, следовательно, $\angle C = \frac{1}{2} BD$ (2).

Подставим в I формулу значения (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2} CE + \frac{1}{2} BD) = 180^\circ - 180^\circ - \frac{1}{2} CE + \frac{1}{2} BD = \\ &= \frac{1}{2} (CE - BD), \text{ что и требовалось доказать.}\end{aligned}$$

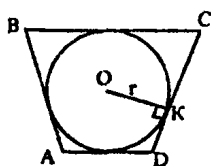
720.

Вершина разностороннего треугольника не может лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне, т.к. каждая точка серединного перпендикуляра должна быть равноудалена от концов отрезка, к которому проведен этот перпендикуляр (по св-ву). А это условие не выполняется, т.к. $AB \neq AC \neq BC$.

721.

Необходимым условием вписать окружность в четырехугольник является равенство сумм длин противоположных сторон, значит квадрат – единственный прямоугольник, который удовлетворяет этому условию. Следовательно, прямоугольник, описанный около окружности – квадрат.

722.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник,
описанный около $\text{Окр}(O; r)$;
 $AB:CD = 2:3$; $AD:BC = 2:1$;
 $S_{ABCD} = S$.

Найти: AB, BC, CD, AD – ?

Решение:

1) $ABCD$ – описанный, следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot OK$, т.е.

$$P_{ABCD} = \frac{2S_{ABCD}}{OK} = \frac{2S}{R}$$

2) Также, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$
 $ABCD$ – описанный, следовательно,

$$CD + AB = AD + BC = \frac{1}{2} P_{ABCD}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} CD + AB = \frac{S}{r} \\ AD + BC = \frac{S}{r} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x + 2x = \frac{S}{r} \\ y + 2y = \frac{S}{r} \end{cases};$$

x см – длина 1 части, y см – длина 1 части

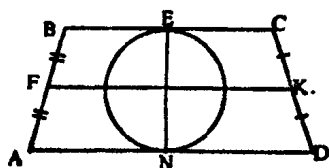
$$\begin{cases} 5x = \frac{S}{r} \\ 3y = \frac{S}{r} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{S}{5r} \\ y = \frac{S}{3r} \end{cases}.$$

Имеем:

$$AB = 2 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{2S}{5r}, BC = 2 \cdot \frac{S}{3r} = \frac{2S}{3r}, CD = 3 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{3S}{5r}, AD = \frac{S}{3r}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2S}{5r}; \frac{3S}{5r}; \frac{2S}{3r}; \frac{S}{3r}.$$

723.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 BC, AD – касательные к
 $\text{Окр}(O; R)$;
 FK – средняя линия.

Доказать: $O \in FK$.

Доказательство:

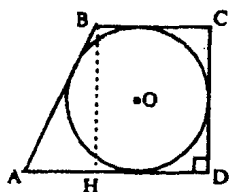
1) BC – касательная, следовательно, $OE \perp BC$,

AD – касательная, следовательно, $ON \perp AD$;

$BC \parallel AD$ (из определения трапеции), значит,

FN – единственный перпендикуляр к BC и AD ,
 проходящий через точку O .

2) FK – средняя линия трапеции, следовательно, $FK \parallel BC \parallel AD$ и
 $FK \cap EN = O$ и $EO = ON$ (т. Фалеса).



Дано: $ABCD$ – трапеция.

$$\angle D = 90^\circ;$$

$$BC = a; AD = b;$$

$$CD = ?$$

Решение:

В $\triangle ABH$: $\angle H = 90^\circ$, $AH = b - a$;

$ABCD$ – описанный, следовательно, $AB + CD = AD + BC = a + b$,
т.е. $AB + BH = a + b$.

Пусть $BH = x$, тогда $AB = (a + b) - x$

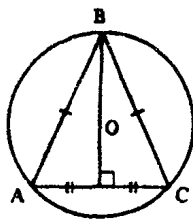
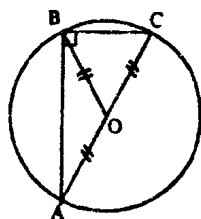
$BH^2 = AB^2 - AH^2$ (по т. Пифагора), т.е.

$$x^2 = (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 - (b - a)^2$$

$$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a + b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2$$

$$2x(a + b) = 2ab, x = \frac{2ab}{2(a + b)} = \frac{ab}{(a + b)}$$

726.



Дано: $\triangle ABC$ –

вписанный в $\text{Окр}(O; R)$

$O \in$ медиане

Доказать: $\triangle ABC$ –

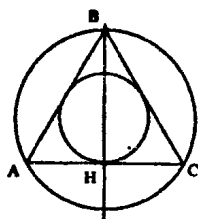
равнобедренный или
прямоугольный

Доказательство:

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам $\triangle ABC$. Т.к. $O \in$ медиане, значит медиана и серединный перпендикуляр совпадают, т.е. треугольник равносторонний или равнобедренный (одна из медиан является серединным перпендикуляром к основанию).

O – лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника
 $BO = AO = OC$.

727.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$;

O_1 – центр вписанной окружности;

O_2 – центр описанной окружности;

$BH \perp AC$, $AH = HC$.

Доказать: $O_1, O_2 \in BH$.

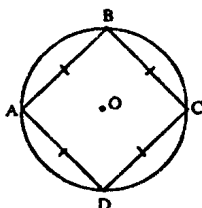
Доказательство:

1) O_2 – центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, значит, $O_2 \in HB$, т.к. $HB \perp AC$.

2) O_1 – центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, значит, $O_1 \in HB$, HB – биссектриса (свойство высоты равнобедренного треугольника).

3) Имеем: $O_2 \in HB$ и $O_1 \in HB$.

728.



Дано: $ABCD$ – ромб вписанный.

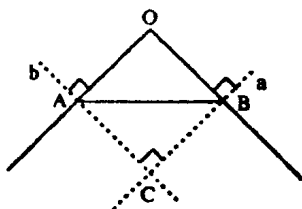
Доказать: $ABCD$ – квадрат.

Доказательство:

$ABCD$ – вписанный, следовательно, $\angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180^\circ$.

В ромбе $\angle D = \angle B$, $\angle C = \angle A$, то $\angle C = \angle B = \angle A = \angle D = 90^\circ$, следовательно, $ABCD$ – квадрат.

730.



Дано: $\triangle AOB$;

$a \perp b$, $b \perp OA$;

$a \cap b = C$.

Доказать: около $ACBO$ можно описать окружность.

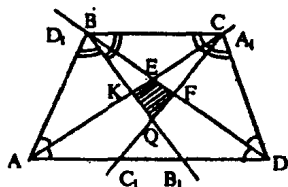
Доказательство:

1) $a \perp b$, $b \perp OA$, следовательно, $\angle AOC = \angle OBC = 90^\circ$, т.е.
 $\angle OBC + \angle OAC = 180^\circ$.

2) В четырехугольнике $\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360^\circ$;
 $\angle C = \angle O = 180^\circ$, а именно:

суммы противоположных углов равны по 180° , и около $AOBC$ можно описать окружность.

731.



Дано: $ABCD$ – трапеция;
 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 –
биссектрисы.

Доказать: около $KEFQ$ можно
описать окружность.

Доказательство:

1) $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (как односторонние при $BC \parallel AD$ и секущей AB), следовательно, $\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B = 90^\circ$.

Из $\triangle ABK$: $\angle 1 + \angle 2 (=90^\circ) + \angle K = 180^\circ$, где $\angle 2 = 90^\circ$,
т.е. $\angle K = 90^\circ$.

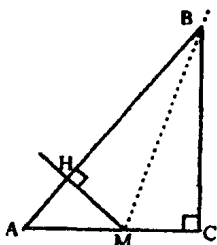
2) Также, из $\triangle CFD \Rightarrow \angle F = 90^\circ$.

3) Имеем: в четырехугольнике $KEFQ$

$\angle F + \angle K = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, т.е.

$\angle E + \angle Q = 180^\circ$, значит, около $KEFQ$ можно описать окружность.

732.



Дано: $\triangle ABC$, $M \in AC$;

$MN \perp AB$.

Доказать: $\angle MNC = \angle MBC$.

Доказательство:

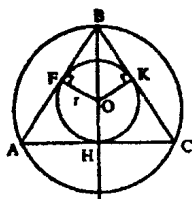
В четырехугольнике $HBCM$

$\angle C = \angle H = 90^\circ$, т.е. $\angle C + \angle H = 180^\circ$, тогда

$\angle M + \angle B = 180^\circ$, значит около НВСМ можно описать окружность.

$\angle MHC$ – вписанный, следовательно, $\angle MBC = \frac{1}{2} \angle C$, значит, $\angle MHC = \angle MBC$, что и требовалось доказать.

733.



Дано: $\triangle ABC$;
 $AB = BC = AC$;
 $R = 10 \text{ см}$;
 $r = ?$

Решение:

1) $\triangle ABC$ – равносторонний, следовательно, центры окружностей совпадают.

2) $BH \perp AC$, следовательно,

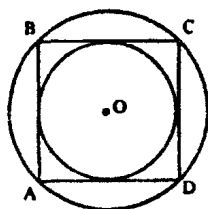
BH – биссектриса (свойство равностороннего треугольника).

Т.е. в $\triangle FBO$: $\angle F = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BO = 10 \text{ см}$, значит,

OF лежит против $\angle R = 30^\circ$, т.е., $FO = \frac{1}{2} BO = 5 \text{ см}$.

Ответ: 5 см.

734.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
 вписанный и описанный.
 Доказать: $ABCD$ – квадрат.

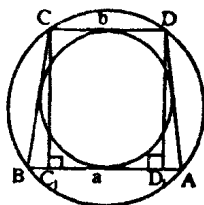
Доказательство:

1) $ABCD$ – вписанный, следовательно, $\angle C + \angle A = 180^\circ$, $\angle D + \angle B = 180^\circ$, т.е. $ABCD$ – квадрат.

2) $ABCD$ – описанный, следовательно, $CD + AB = AD + BC$.
 В параллелограмме $BC = AD$, $AB = CD$, значит,

$AB = BC = CB = AD$, т.е., $ABCD$ – ромб, но
 $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$, значит этот ромб – квадрат.
 Четырехугольник вписанный и описанный одновременно – квадрат.

735.



Дано: $ABCD$ – трапеция вписанная и описанная;
 $AB = a$, $CD = b$;
 $r = ?$

Решение:

1) $ABCD$ – трапеция вписанная в окружность, следовательно, $ABCD$ – равнобедренная трапеция и $BC = AD$;

2) $ABCD$ – трапеция, описанная около окружности, значит,
 $AD + BC = CD + AB = b + a$, $BC = DA = \frac{a+b}{2}$, $BC_1 = \frac{a-b}{2}$

3) $\triangle BCC_1$: $\angle C_1 = 90^\circ$; по т. Пифагора \Rightarrow

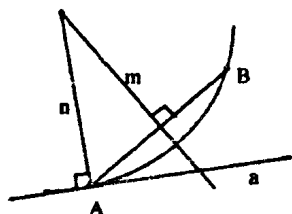
$$CC_1^2 = BC^2 - BC_1^2, \text{ т.е. } CC_1^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab,$$

имеем: $CC_1 = \sqrt{ab}$.

Но $r = \frac{1}{2} CC_1$, значит, $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

736.



Дано: $A \in a$, $B \notin a$.
 Построить окружность такую, чтобы
 $B \in \text{Окр}$,
 a – касалась окружности в точке A .

Построение:

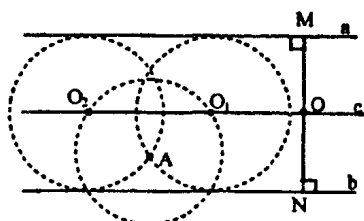
AB.

Строим серединный перпендикуляр m к AB.

Из точки A строим перпендикуляр n к прямой a

$n \cap m = O$ – центр искомой окружности.

737.



Дано: $a \parallel b$, $A \notin a$, $A \notin b$.

Построить окружность, такую, чтобы

$A \in \text{Окр.}$

a, b – касательные к Окр.

Построение:

1) a и b — касательные к одной окружности, $a \parallel b$, значит, они проходят через концы диаметра.

$r = ?$

а) восстановим перпендикуляр из $M \in a$ к прямой b ;

б) построим серединный перпендикуляр к MN ;

с) $\cap MN = O$, $ON = MO = R$;

г) проведем окружность с центром в точке A и радиусом R ;

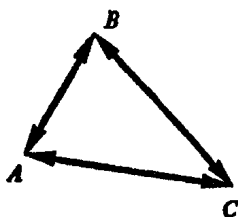
д) окружность пересекает прямую в двух точках O_2 и O_1 ,

O_2 и O_1 — есть центры искомых окружностей.

Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора

738.



\overrightarrow{BA} , начало – т. В, конец – т. А.

\overrightarrow{CA} , начало – т. С, конец – т. А.

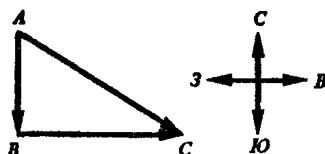
\overrightarrow{AB} , начало – т. А, конец – т. В.

\overrightarrow{BC} , начало – т. В, конец – т. С.

\overrightarrow{AC} , начало – т. А, конец – т. С.

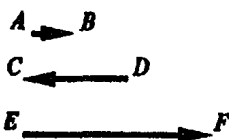
\overrightarrow{CB} , начало – т. С, конец – т. В.

739.



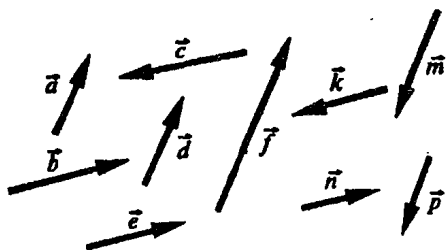
Масштаб: в 1 см 100 км, т.е. 1: 10000000.

740.



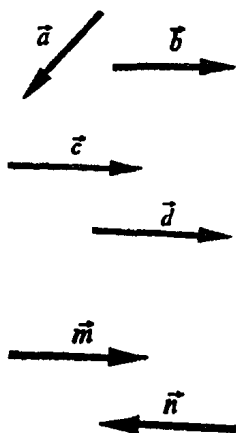
- а) $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{DC}| = 2,5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 4,5$ см;
 б) $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 1,5$ см.

741.



- а) $\vec{a} \uparrow \vec{d}$, $\vec{a} \uparrow \vec{f}$;
 б) $\vec{b} \uparrow \vec{e}$, $\vec{b} \uparrow \vec{n}$;
 в) $\vec{b} \downarrow \vec{k}$, $\vec{b} \downarrow \vec{c}$;
 г) $\vec{a} \downarrow \vec{g}$, $\vec{a} \downarrow \vec{m}$.

742.

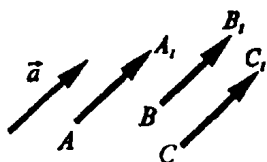


а) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ см;
 \vec{a} и \vec{b} – неколлинеарны.

б) $\vec{c} \uparrow \vec{d}$, $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 3,5$ см. $\vec{c} = \vec{d}$.
 Векторы равны, т.к. их длины равны и они сопоставимы

в) $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 3$ см.

743.

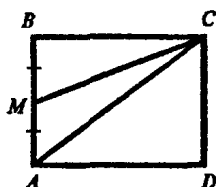


$\overline{AA_1} = \vec{a}$, т.к. $|\overline{AA_1}| = |\vec{a}|$ и $\overline{AA_1} \uparrow \vec{a}$.
 $\overline{BB_1} = \vec{a}$, т.к. $|\overline{BB_1}| = |\vec{a}|$ и $\overline{BB_1} \uparrow \vec{a}$.
 $\overline{CC_1} = \vec{a}$, т.к. $|\overline{CC_1}| = |\vec{a}|$ и $\overline{CC_1} \uparrow \vec{a}$.

744.

Векторные величины – скорость и сила, т.к. для них необходимо знать не только числовое значение, но и направление.

745.



Дано: ABCD – прямоугольник,
 $AB = 3$ см, $BC = 4$ см,
 M – середина AB.

Найти: $|\overline{AB}|$, $|\overline{BC}|$, $|\overline{DC}|$,
 $|\overline{MC}|$, $|\overline{MA}|$, $|\overline{CB}|$, $|\overline{AC}|$ – ?

Решение:

1) в прямоугольнике противоположные стороны равны, значит, $CD = 3$ см, $AD = 4$ см. Из $\triangle ACD$:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}^2 \text{ (т. Пифагора),}$$

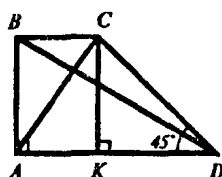
$$M - \text{середина } AB, \text{ следовательно, } MB = MA = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (см).}$$

В $\triangle BCM \angle B = 90^\circ$ по т. Пифагора:

$$MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 1,5^2} = \sqrt{18,25} \text{ (см).}$$

2) Длиной вектора называется длина отрезка, соединяющая начало вектора и конец, имеем: $|\overline{AB}| = 3 \text{ см}, |\overline{BC}| = 4 \text{ см}, |\overline{DC}| = 3 \text{ см}, |\overline{CB}| = 4 \text{ см}, |\overline{MA}| = 1,5 \text{ см}, |\overline{MC}| = \sqrt{18,25} \text{ см}, |\overline{AC}| = 5 \text{ см}.$

746.



Дано:

$$\angle D = 45^\circ, \angle A = 90^\circ,$$

$$D = 12 \text{ см}, AB = 5 \text{ см}.$$

$$|\overline{BD}|, |\overline{CD}|, |\overline{AC}| = ?$$

Решение:

1) В $\triangle ABD (\angle A = 90^\circ)$;

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ (т. Пифагора);}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)} \Rightarrow \overline{BD} = 13 \text{ см}.$$

2) Построим $CK \perp AD$. $ABCK$ – прямоугольник, значит, $AK = BC$, $AB = CK = 5 \text{ см}.$

3) В $\triangle CKD: \angle K = 90^\circ, \angle D = 45^\circ$, значит, $\angle KCD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$\triangle CKD$ – равнобедренный, т.е. $CK = KD = 5 \text{ см}.$

В $\triangle CKD: (\angle K = 90^\circ)$ по т. Пифагора:

$$CD^2 = CK^2 + KD^2, \text{ значит,}$$

$$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \text{ (см)} \Rightarrow \overline{CD} = 5\sqrt{2} \text{ см}.$$

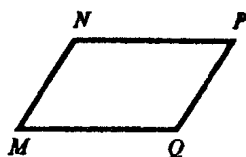
4) $CK = AB = 5 \text{ см}$ и $BC = AK, KD = 5 \text{ см}$, т.е.

$$AK = \overline{AD} - KD = 12 - 5 = 7 \text{ (см)}; BC = 7 \text{ см}.$$

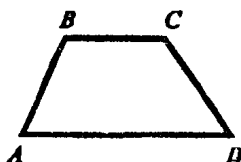
В $\triangle ABC$ по т. Пифагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ значит,}$$

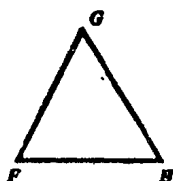
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \text{ (см)} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{74} \text{ см}.$$



а) MNPQ – параллелограмм.

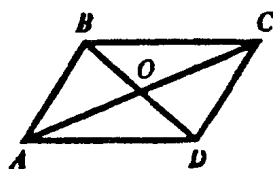
Коллинеарные векторы: \overline{NP} , \overline{MQ} , \overline{PN} , \overline{QM} ;где: $\overline{NP} \uparrow\uparrow \overline{MQ}$ и $\overline{NP} \uparrow\downarrow \overline{PN}$, $\overline{NP} \uparrow\downarrow \overline{QM}$, $\overline{PN} \uparrow\uparrow \overline{QM}$ и $\overline{PN} \uparrow\downarrow \overline{NP}$, $\overline{PN} \uparrow\downarrow \overline{MQ}$.Коллинеарные векторы: \overline{MN} , \overline{NM} , \overline{PQ} и \overline{QP} ,причем: $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{QP}$ и $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{NM}$, $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{PQ}$ $\overline{PQ} \uparrow\uparrow \overline{NM}$ и $\overline{PQ} \uparrow\downarrow \overline{MN}$, $\overline{PQ} \uparrow\downarrow \overline{QP}$.

б) ABCD – трапеция.

Коллинеарные векторы: \overline{BC} , \overline{AD} , \overline{CB} , \overline{DA} ,причем: $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{DA}$ и $\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{DA}$, $\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{CB}$ $\overline{DA} \uparrow\uparrow \overline{CB}$ и $\overline{DA} \uparrow\downarrow \overline{BC}$, $\overline{DA} \uparrow\downarrow \overline{AD}$.

в)

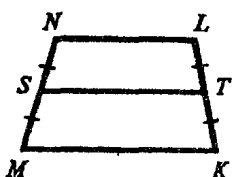
Коллинеарные векторы:

 $\overline{FG} \uparrow\downarrow \overline{GF}$, $\overline{GH} \uparrow\downarrow \overline{HG}$, $\overline{FH} \uparrow\downarrow \overline{HF}$ а) т.к. $|\overline{DC}| = |\overline{AB}|$, $\overline{AB} = \overline{DC}$,(AB = DC – противоположные стороны параллелограмма); $AB \parallel DC$ т.е. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{DC}$ б) $\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{DA} \Rightarrow \overline{BC} \neq \overline{DA}$,в) $\overline{AO} = \overline{OC}$, ($|\overline{AO}| = |\overline{OC}|$).

Т.к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $\overline{AO} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ и $\overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, т.е. $\overline{OC} \uparrow \uparrow \overline{AO}$.

г) $\overline{AC} \neq \overline{BD}$, т.к. эти векторы не являются сонаправленными.

749.



Дано:

$MN = LK$, S – середина MN ,

T – середина LK .

$\overline{NL} \neq \overline{KL}$, (эти векторы не сонаправленные).

$\overline{MS} = \overline{SN}$, ($|\overline{MS}| = |\overline{SN}|$) и $\overline{MS} \uparrow \uparrow \overline{SN}$,

$MN \neq KL$, (эти векторы не являются сонаправленными).

$|\overline{MK}| \neq |\overline{TS}|$, следовательно, $|\overline{TS}| \neq \overline{KM}$. В $MNLK$ TS – средняя линия, значит,

$TS = \frac{NL + MK}{2}$, т.к. $NL \neq MK$, то и $TS \neq MK$

$\overline{TL} = \overline{KT}$, т.к. $\overline{KT} \uparrow \uparrow \overline{TL}$ и $|\overline{TL}| = |\overline{KT}|$ (т.к. T – середина LK , т.е. $TL = KT$).

750.

1) Дано: $\overline{AB} = \overline{CD}$

Доказать: середины AD и BC совпадают.

Доказательство:

$\overline{AB} = \overline{CD}$, поэтому и $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$,

т.е. $AB \parallel CD$ и $AB = CD$.

$ABCD$: $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм (по I признаку), диагонали в параллелограмме пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е. середины AD и BC совпадают.

2) Дано: середины отрезков AD и DB совпадают.

Доказать: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Доказательство:

Четырехугольник $ABCD$: диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е.

ABCD – параллелограмм (по III признаку). В параллелограмме противолежащие стороны параллельны и равны, т.е. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ и $\overline{CD} = \overline{AB}$ и $\overline{CD} \uparrow \uparrow \overline{AB}$, $|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$, следовательно, $\overline{AB} = \overline{CD}$

751.

а) $\overline{AB} = \overline{DC}$ и $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ (по усл.).

Определить: вид четырехугольника ABCD.

1) $\overline{DC} = \overline{AB}$, т.е. $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{DC}$, значит, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, то $\overline{DC} = \overline{AB}$.

В ABCD противолежащие стороны параллельны и равны, т.е. ABCD – параллелограмм (по I признаку).

2) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, т.е. $\overline{BC} = \overline{AB}$, значит смежные стороны равны и все стороны параллелограмма ABCD равны, значит, ABCD – ромб.

б) Дано: $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{DC}$, \overline{AD} и \overline{BC} не коллинеарны.

Определить: вид четырехугольника ABCD.

$\overline{DC} \uparrow \uparrow \overline{AB}$ т.е. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ и \overline{AD} и \overline{BC} не коллинеарны \Rightarrow AD не параллельна BC.

Т.е. в четырехугольнике ABCD две стороны параллельны, а две другие не параллельны, следовательно, ABCD – трапеция.

752.

а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

Верно.

б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, т.е. \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Верно.

в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, т.е. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ – не может быть.

Не верно.

г) если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то не обязательно $\vec{a} = \vec{b}$ (может быть и $\vec{a} \neq \vec{b}$)

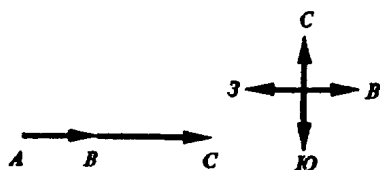
Не верно.

д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ ($\vec{0}$ сонаправлен с любым вектором).

Верно.

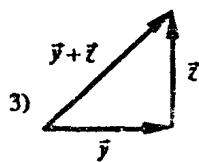
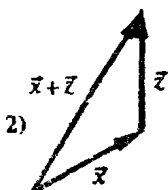
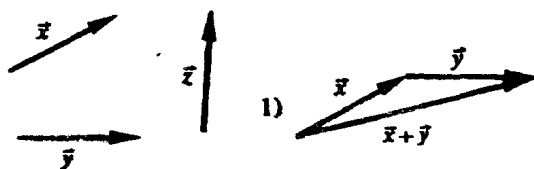
§ 2. Сложение и вычитание векторов

752

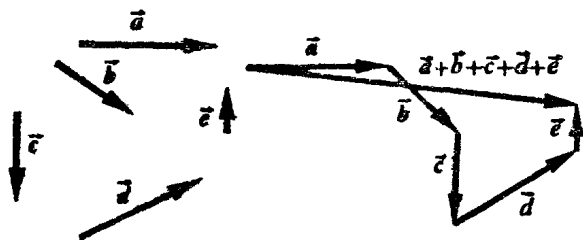


Масштаб: т.е. 1:1 000 000. (в 1 см 10 км); $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

754.

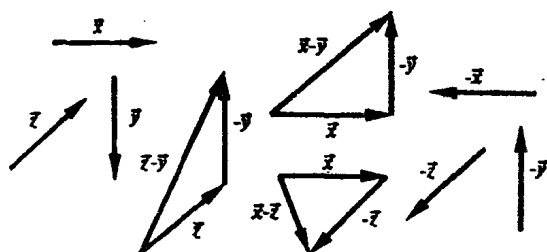


755

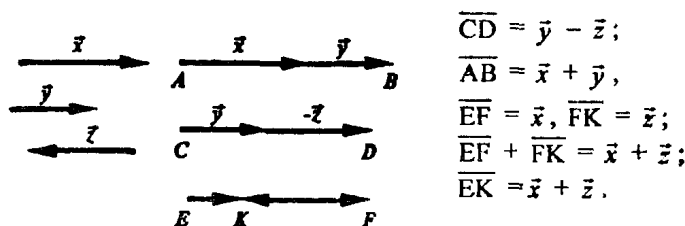


$$\overline{AB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{e} + \vec{d}.$$

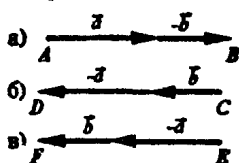
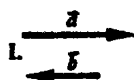
756.



757.



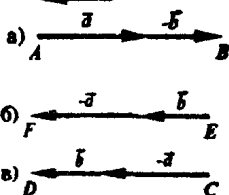
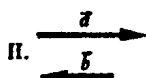
758.



a) $AB = \vec{a} - \vec{b};$

b) $CD = \vec{b} - \vec{a};$

c) $EF = -\vec{a} + \vec{b}.$



a) $AB = \vec{a} - \vec{b};$

b) $EF = \vec{b} - \vec{a};$

c) $CD = -\vec{a} + \vec{b}$

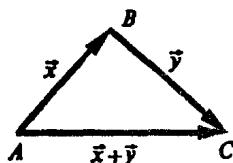
759.

По правилу треугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$;

а) $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MQ}$ и $\overline{MP} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$, тогда, $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$;

б) $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$ и $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{MP}$, тогда, $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MQ} + \overline{QP}$.

760.



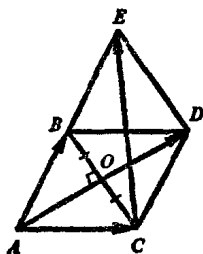
1) Если A, B, C не лежат на одной прямой, то векторы \vec{x} , \vec{y} и $\vec{x} + \vec{y}$ образуют $\triangle ABC$. По неравенству треугольника $AC < AC + BC$, т.е. $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

2) Если A, B, C лежат на одной прямой, то векторы \vec{x} и \vec{y} коллинеарны, но это не так по условию.

761.

По правилу многоугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA}$, но $\overline{AA} = \vec{0}$ из определения.

762.



Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний со стороной a.

а) $|\overline{AB} + \overline{BC}| = ?$

б) $|\overline{AB} + \overline{AC}| = ?$

в) $|\overline{AB} + \overline{CB}| = ?$

г) $|\overline{BA} - \overline{BC}| = ?$

д) $|\overline{AB} - \overline{AC}| = ?$

Решение:

а) $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC} = a$.

б) Построим $CD \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Тогда ABCD – параллелограмм (по определению) и смежные стороны $AB = AC = a$, следовательно, ABCD – ромб.

По правилу параллелограмма имеем: $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$, значит, $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = AD$, AD – диагональ ромба, следовательно,

$AD = 2AO$, $AO \perp BC$ и O – середина BC . Рассмотрим $\triangle AOC$:
 ($\angle O = 90^\circ$) по т. Пифагора:

$$AO^2 = AC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ следовательно,}$$

$$AO = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AD = 2 \cdot AO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Построим $DE \parallel BC$ и $DE = BC$. Тогда $\overline{DE} = \overline{CB}$ и $\overline{CD} = \overline{AB}$ (как противолежащие стороны параллелограмма). Значит,

$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{CE}$, $CDEB$ – ромб по построению со стороной a и $CDEB = ABDC$, тогда, диагональ $CE = AD = a\sqrt{3}$.

г) по правилу треугольника имеем: $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$, т.е.

$\overline{BA} - \overline{BC} = -\overline{AC}$, тогда $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CA}$, $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}| = CA = a$.

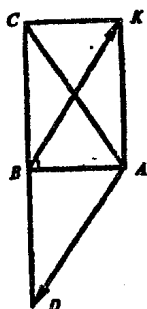
д) по правилу треугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$,

следовательно,

$\overline{AB} - \overline{AC} = -\overline{BC}$, тогда $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$, $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}| = CB = a$.

Ответ: a , $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{3}$, a , a .

763.



Дано: $\angle B = 90^\circ$,

$AB = 6$, $BC = 8$.

а) $|\overline{BA}| - |\overline{BC}|$ и $|\overline{BA} - \overline{BC}| = ?$

б) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ и $|\overline{AB} + \overline{BC}| = ?$

в) $|\overline{BA}| + |\overline{BC}|$ и $|\overline{BA} + \overline{BC}| = ?$

г) $|\overline{AB}| - |\overline{BC}|$ и $|\overline{AB} - \overline{BC}| = ?$

Решение:

а) $|\overline{BA}| - |\overline{BC}| = BA - BC = 6 - 8 = -2$. $|\overline{BA} - \overline{BC}| = \overline{CA} = CA$.

По т. Пифагора: $AC^2 = BA^2 + BC^2$, значит,

$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, значит, $|\overline{BA} - \overline{BC}| = 10$.

б) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$, $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC} = AC = 10$.

в) $|\overline{BA}| + |\overline{BC}| = 6 + 8 = 14$.

Построим $AK \parallel BC$ и $AK = BC$. Значит, $ACKB$ – параллелограмм

и $\angle CBA = \angle BAK = 90^\circ$, следовательно, $ACKB$ – прямоугольник.

$$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BK}, |\overline{BA} + \overline{BC}| = \overline{BK} = BK.$$

($\angle A = 90^\circ$) по т. Пифагора: $AK^2 + AB^2 = BK^2$, значит,

$$BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10, \text{ тогда } |\overline{BA} + \overline{BC}| = 10.$$

$$г) |\overline{AB}| - |\overline{BC}| = 6 - 8 = -2.$$

Построим $BD = BC$ и C, B, D лежат на одной прямой, следовательно,

$$\overline{CB} = \overline{BD} \text{ и } \overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

По т. Пифагора:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ значит,}$$

$$AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10, \text{ значит, } |\overline{AB} - \overline{BC}| = 10.$$

764.

Учитывая, что $\overline{AB} = -\overline{BA}$, имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) } (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{MC}) + (\overline{MD} - \overline{KD}) &= \\ = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CM}) + (\overline{MD} + \overline{DK}) &= \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BD}) - (\overline{MK} + \overline{KD}) &= \\ = (\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}) - (\overline{MD}) &= \overline{AD} - \overline{MD} = \overline{AD} + \overline{DM} = \overline{AM}. \end{aligned}$$

765.

По правилу треугольника: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, имеем:

$$\vec{p} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0};$$

$$\vec{q} = (\overline{XY} - \overline{XZ}) + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0}.$$

$$\vec{r} = (\overline{ZY} - \overline{XY}) - \overline{ZX} = \overline{ZY} + \overline{YX} + \overline{XZ} = \overline{ZX} + \overline{XZ} = \overline{ZZ} = \vec{0}.$$

766.

$$\overline{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}.$$

767.

Решение задачи приведено в учебнике.

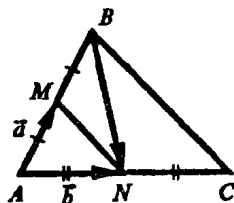
768.

Дано: М – середина АВ,

N – середина AC,

$$\overline{AM} = \vec{a}, \overline{AN} = \vec{b};$$

$$\overline{BM}, \overline{NC}, \overline{MN}, \overline{BN} = ?$$

Решение:

$$\overline{BM} = -\vec{a}, \text{ т.к. } |\overline{BM}| = |\vec{a}|, (M - \text{середина } AB) \text{ и } \overline{BM} \uparrow \downarrow \vec{a}.$$

$$\overline{NC} = \vec{b}, \text{ т.к. } |\overline{NC}| = |\vec{b}|, (N - \text{середина } AC) \text{ и } \overline{NC} \uparrow \uparrow \vec{b}.$$

$$\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}, \text{ тогда}$$

$$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \vec{b} - \vec{a};$$

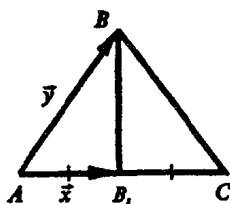
$$\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{AN} = -\vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}.$$

769.

Дано: BB_1 – медиана,

$$\overline{AB_1} = \vec{x}, \overline{AB} = \vec{y};$$

$$\overline{B_1C}, \overline{BB_1}, \overline{BA}, \overline{BC} = ?$$

Решение:

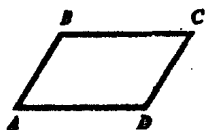
$$\overline{B_1C} = \vec{x}, \text{ т.к. } |\overline{B_1C}| = |\vec{x}|, (B_1 - \text{середина } AC) \text{ и } \overline{B_1C} \uparrow \uparrow \vec{x};$$

$$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{AB_1} = -\overline{AB} + \overline{AB_1} = -\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y};$$

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{y}, |\overline{BA}| = |\vec{y}| \text{ и } \overline{BA} \uparrow \downarrow \vec{y};$$

$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1C} = -\vec{y} + \vec{x} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{x}.$$

770.

Выразить: \overline{AC} через \vec{a} и \vec{b} .

$$\text{а) } \vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{BC}, \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

б) $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $CB \parallel AD$ и $CB = AD$, $\overrightarrow{CB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AD}$,

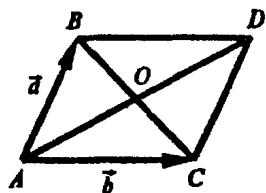
следовательно, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$, значит:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{CD}) = -\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}.$$

в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$, $DA \parallel BC$ и $DA = BC$, $\overrightarrow{DA} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BC}$, тогда

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{DA}) = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

771.



Дано:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}.$$

Выразить: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ через \vec{a} и \vec{b} .

Решение:

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \text{ (из } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| \text{ и } \overrightarrow{BC} \uparrow \overrightarrow{AD} \text{)}.$$

$$\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$$

$$(\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \text{ и тогда } \overrightarrow{CO} \uparrow \overrightarrow{OA} \text{ и } |\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{OA}|).$$

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}.$$

772.

Дано: ABCD – параллелограмм,

X – произвольная точка плоскости.

Доказать: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.

Доказательство.

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} \text{ – правило треугольника.}$$

$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} \text{ – правило треугольника.}$$

Имеем:

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD},$$

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{XD}.$$

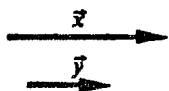
Сравнивая левую и правую части уравнения, имеем:

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}, \text{ и это верно.}$$

Из $\overrightarrow{DC} \uparrow \overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}|$ (т.к. ABCD – параллелограмм), ч.т.д.



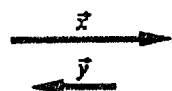
Если \vec{x} и \vec{y} неколлинеарны, то по неравенству треугольника имеем: $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, т.к. $|\vec{x} - \vec{y}|$, $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ — стороны треугольника.



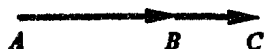
Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и $\vec{x} \uparrow \vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BC}$.



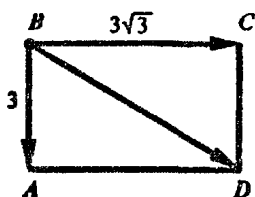
$\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{BC} = \vec{y}$, $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, то $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны и $\vec{x} \downarrow \vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{BC} = -\vec{y}$, $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, т.е. $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



Пусть парашютист находится в точке B. Равнодействующая силы тяжести (\overline{AB}) и силы ветра (\overline{BC}) есть \overline{BD} , и ABCD — прямоугольник, AB — вертикаль, следовательно, $\angle ABD = ?$



$\overline{BC} = \overline{AD}$ и $DC = AD$ (ABCD — прямоугольник).

($\angle A = 90^\circ$) по теореме Пифагора: $BD^2 = AD^2 + AB^2$, значит

$$BD = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6.$$

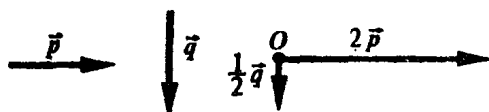
Т.к. $AB = \frac{1}{2} BD$, то по свойству

прямоугольного треугольника имеем: $\angle ADB = 30^\circ$. А значит, ABC катет AB = 3 в 2 раза меньше гипотенузы $BD = 6$, значит, $\angle ABD = 90^\circ - \angle ADB = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

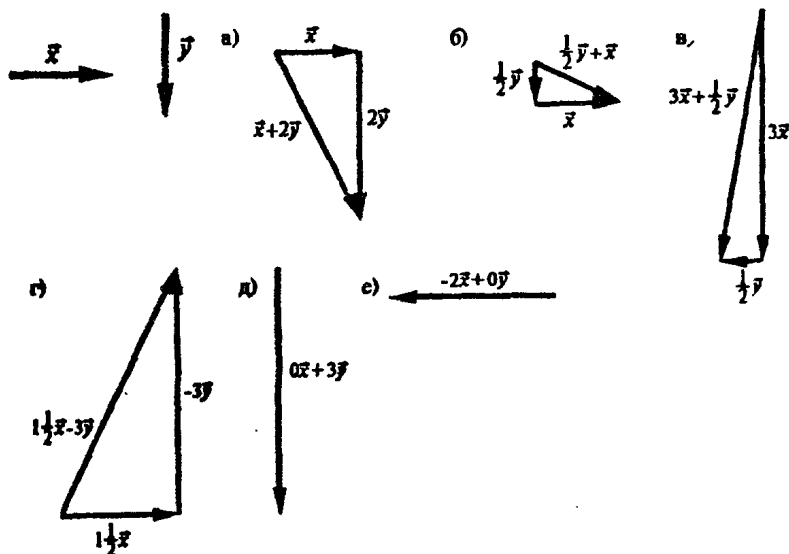
§ 3. Умножение вектора на число.
Применение векторов к решению задач

775.

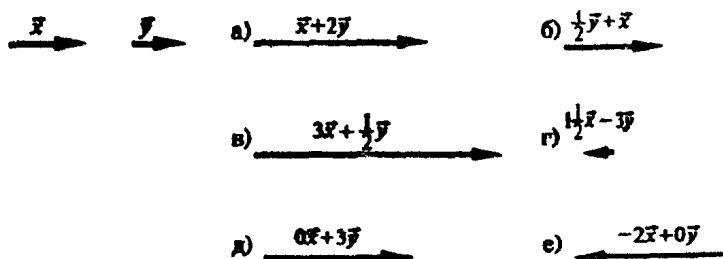


776.

I. \vec{y} и \vec{x} неколлинеарны.



II. \vec{y} и \vec{x} коллинеарны.

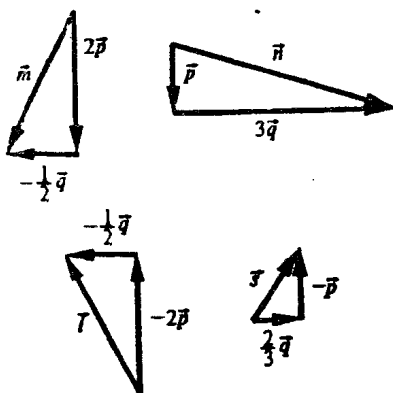


777.



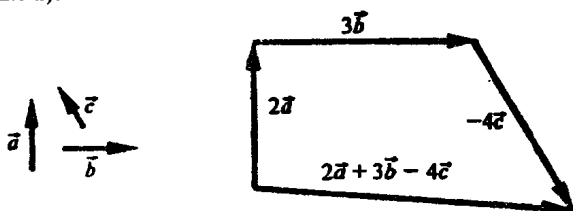
Построить: $\vec{m} = 2\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}$,

$$\vec{r} = \vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{l} = -2\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}, \quad \vec{s} = \frac{2}{3}\vec{q} - \vec{p}.$$

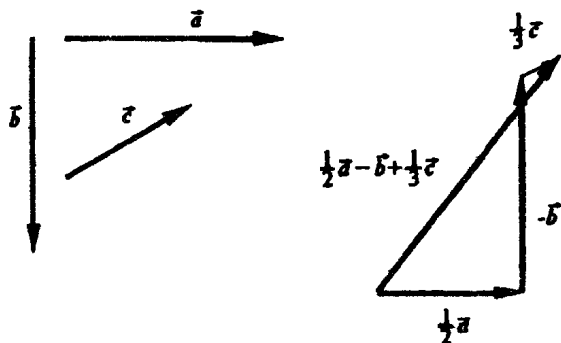


778.

Случай а).



Случай б).



779.

Дано: $\vec{p} = 3\vec{a}$.Решение:

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{p}, -\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{p}, \frac{1}{2}\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{p}, -2\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{p}, 6\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{p}.$$

$$|\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|, |-\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|, |\frac{1}{2}\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|, |-2\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|, |6\vec{a}| = 2|\vec{p}|.$$

780.

Решение:

а) $|\overline{1 \cdot \vec{a}}| = |1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|, 1 > 0$, значит, $\overline{1 \cdot \vec{a}} \uparrow \uparrow \vec{a}$, т.е. $\overline{1 \cdot \vec{a}} = \vec{a}$.

б) $|\overline{-1 \cdot \vec{a}}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|, -1 < 0$, значит, $\overline{-1 \cdot \vec{a}} \uparrow \downarrow \vec{a}$, т.е. $\overline{-1 \cdot \vec{a}} = -\vec{a}$.

781.

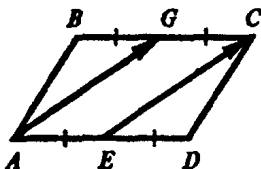
Дано: $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}, \vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$.

а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2 \cdot (\vec{m} + \vec{n}) - 2 \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} - 2\vec{m} + 2\vec{n} = 4\vec{n}$.

б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2 \cdot (\vec{m} + \vec{n}) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} = 2,5\vec{m} + 1,5\vec{n}$.

в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{3}(\vec{m} - \vec{n}) = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} = -1\frac{1}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

782.



Дано:

$$BG = GC, AE = ED,$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$$

Выразить: \overrightarrow{EC} и \overrightarrow{AG} через \vec{a} и \vec{b} .Решение:

BC = AD (т.к. ABCD – параллелограмм).

$$\text{Тогда } AE = ED = BG = GC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD.$$

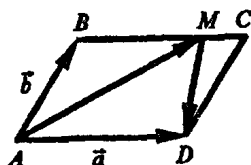
$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} = \frac{1}{2} \overline{BC} + \overline{DC} = -\frac{1}{2} \overline{CB} + \overline{DC} = -\frac{1}{2} \vec{b} + \vec{a} =$$

$$= \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}$$

$AB \parallel CD$ и $AB = CD$, следовательно, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

$$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = \overline{DC} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{DC} - \frac{1}{2} \overline{CB} = \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}.$$

783.



Дано:

$$BM:MC = 3:1,$$

$$\vec{a} = \overline{AD}, \vec{b} = \overline{AB}.$$

Выразить: \overline{AM} и \overline{MD} через \vec{a} и \vec{b} .

Решение:

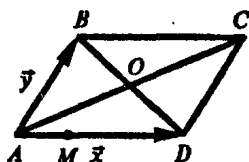
1) $BM:MC = 3:1$, следовательно, $\overline{BM} = \frac{3}{4} \overline{BC}$.

$ABCD$ – параллелограмм, значит, $AB \parallel BC$, $AD = BC$, значит, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{BC} = \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{AD} = \vec{b} + \frac{3}{4} \vec{a} = \frac{3}{4} \vec{a} + \vec{b}.$$

$$\overline{AM} + \overline{MD} = \overline{AD}, \text{ следовательно, } \overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \vec{a} - \left(\frac{3}{4} \vec{a} + \vec{b} \right) = \vec{a} - \frac{3}{4} \vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{4} \vec{a} - \vec{b}.$$

784.



Дано:

$$AM = \frac{1}{2} MD, \vec{x} = \overline{AD}, \vec{y} = \overline{AB}.$$

$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $BO = OD$,
 $AO = OC$ – так как $ABCD$ –

параллелограмм

$$a) \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \vec{x} + \vec{y},$$

$$\overline{AO} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y},$$

$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{y}) = -\frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y},$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{y} - \vec{x}, \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{y} - \frac{1}{2} \vec{x},$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} = \vec{x},$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y} = \frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y},$$

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y};$$

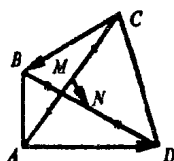
$$6) \text{ AM} = \frac{1}{2} \text{MD, значит, } \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \text{ и } \overrightarrow{MD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \vec{x} + \vec{y},$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = -\vec{y} + \frac{1}{3} \vec{x} = \frac{1}{3} \vec{x} - \vec{y},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} = -\left(\frac{1}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y}\right) + \frac{1}{3} \vec{x} = \\ &= -\frac{1}{2} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y} + \frac{1}{3} \vec{x} = -\frac{1}{6} \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{y}. \end{aligned}$$

785.



Дано:

$$\text{AM} = \text{MC}, \text{BN} = \text{ND}.$$

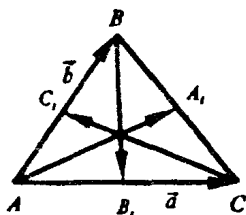
$$\text{Доказать: } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

Доказательство:

AM = MC, BN = ND, значит,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + \\ &+ \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \\ &+ \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$



Дано: AA_1

BB_1, CC_1 — медианы,

$\vec{a} = \overrightarrow{AC}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

Выразить: $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$
через \vec{a} и \vec{b} .

Решение:

Из AA_1, BB_1, CC_1 — медианы, следует $BA_1 = A_1C, B_1C = AB_1, AC_1 = C_1B$.

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}.$$

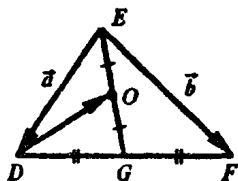
$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$, значит,

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

787.



Дано: $DG = GF, OE = OG$,

$\vec{a} = \overrightarrow{ED}, \vec{b} = \overrightarrow{EF}$.

Выразить: \overrightarrow{DO} через \vec{a} и \vec{b} .

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$, значит, $\vec{a} + \overrightarrow{DF} = \vec{b}$, или $\overrightarrow{DF} = \vec{b} - \vec{a}$.

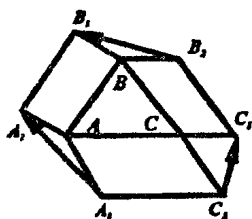
$DG = GF$, то

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DF} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO}$. Т.к. $OE = OG$, то

$$\overrightarrow{ED} = \vec{a} \text{ и } \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}, \text{ имеем: } \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EG} -$$

$$- \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) - \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{3}{4} \vec{a}.$$



Дано: ABB_1A_2 , BCC_1B_2 ,

ACC_2A_1 – параллелограммы.

Доказать: существует

треугольник, стороны которого

параллельны и равны соответственно

A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 .

Доказательство:

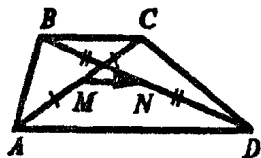
$\overline{AA_1} = \overline{C_2C}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{CC_1} = \overline{BB_2}$, т.к. это стороны параллелограммов.

Докажем, что $\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$;

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= \overline{A_1A} + \overline{AA_2} = \overline{C_2C} + \overline{BB_1} = \overline{C_2C_1} + \overline{C_1C} + \overline{BB_2} + \\ &+ \overline{B_2B_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1} + \overline{BB_2} - \overline{CC_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}.\end{aligned}$$

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$, значит, можно построить треугольник со сторонами, параллельными и равными соответственно сторонам A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , ч.т.д.

790.



Дано: $AM = CM$; $BN = DN$.

Доказать: $MN \parallel AD$,

$$MN \parallel BC, MN = \frac{AD - BC}{2}.$$

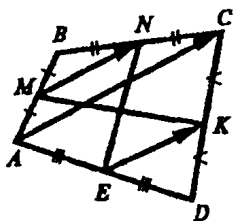
Доказательство:

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = \frac{1}{2} \overline{CA} + \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DB} = \overline{AD} + \\ &+ \frac{1}{2} (\overline{CB} + \overline{BA}) + \frac{1}{2} (\overline{DA} + \overline{AB}) = \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \frac{1}{2} \overline{BA} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{DA} + \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} + \frac{1}{2} \overline{BA} - \frac{1}{2} \overline{AD} - \frac{1}{2} \overline{BA} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{CB}) = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{BC}).\end{aligned}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{BC}), \text{ значит, } MN \parallel AD, MN \parallel BC \text{ (}\overline{BC} \text{ и } \overline{AD} -$$

коллинеарны, следовательно, им коллинеарен и вектор $\frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$ и $MN = \frac{AD - BC}{2}$.

791.



Дано:

M, N, K, E – середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA.

Доказать: MK и NE

пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Построим векторы, \overline{AC} , \overline{EK} и \overline{MN} :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC};$$

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

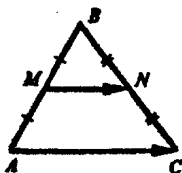
$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC};$$

$$\overline{EK} = \overline{ED} + \overline{DK} = \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{DC} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ и } \overline{EK} = \frac{1}{2} \overline{AC}, \text{ следовательно, } \overline{MN} = \overline{EK}.$$

$\overline{MN} = \overline{EK}$, т.е., $MN \parallel EK$ и $MN = EK$, значит MNKE – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, ч.т.д.

792.



Дано: $AM = MB$,

$CN = NB$.

Доказать: $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.

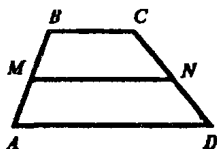
Доказательство:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \text{ и } \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} =$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC};$$

т.е. $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$, следовательно, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$. ч.т.д.

793.



Дано:

$$AB = 13 \text{ см}, CB = 15 \text{ см},$$

$$P_{ABCD} = 48 \text{ см}, MN - \text{средняя линия}$$

$$MN = ?$$

Решение:

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$, следовательно,

$$BC + AD + 13 + 15 = 48, \text{ значит,}$$

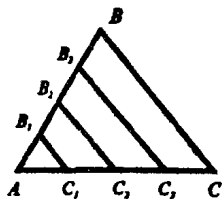
$$BC + AD = 20;$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (см)} - \text{по св-ву средней линии}$$

трапеции.

Ответ: 10 см.

794.



Дано: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$,

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C, B_1C_1 = 3,4;$$

$$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \parallel BC;$$

$$B_2C_2, B_3C_3 = ?$$

Решение:

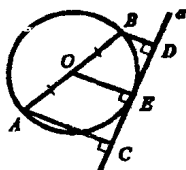
1) $AB_1 = B_1B_2$ и $AC_1 = AC_2$, значит, B_1C_1 — средняя линия $\triangle AB_2C_2$, тогда $B_2C_2 = 2 \cdot B_1C_1 = 2 \cdot 3,4 = 6,8$.

$B_2C_2 \parallel BC$ и $B_2B_3 = B_3B$, $C_2C_3 = C_3C$, значит, B_3C_3 — средняя линия трапеции B_2BCC_2 , следовательно, по свойству

$$B_3C_3 = \frac{B_2C_2 + BC}{2} = \frac{6,8 + 13,6}{2} = 10,2.$$

Ответ: 6,8; 10,2.

795.

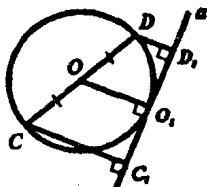


Дано:

 a – касательная к окружности; $BD \perp a$, $AC \perp a$, $AC = 18$ см, $BD = 12$ см. $AB = ?$ Решение: $AO = BO = \frac{1}{2} AB$ – радиусы.Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит $OE \perp a$. $AC \perp a$ и $BD \perp a$, тогда $AC \parallel BD$, значит, $ABCD$ – трапеция. $OE \perp a$, $AC \perp a$, $BD \perp a$, тогда $OE \parallel AC \parallel BD$, тогда по т. Фалеса $CE = ED$, т.е. OE – средняя линия трапеции $ABCD$. $OE = \frac{AC + BD}{2} = \frac{18 + 12}{2} = \frac{30}{2} = 15$ (см) – по свойству средней линии трапеции. OE – радиус, следовательно, $AB = 2 \cdot OE = 2 \cdot 15 = 30$ (см).

Ответ: 30 см.

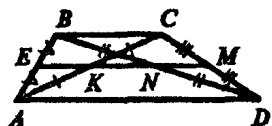
796.



Дано:

 a – касательная $CC_1 \perp a$, $DD_1 \perp a$, $CC_1 = 11$ см, $CB = 27$ см. $DD_1 = ?$ Решение: $OO_1 \perp a$, следовательно, $OO_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $CO = OD$, тогда OO_1 – средняя линия трапеции CDD_1C_1 , значит, $OO_1 = \frac{CC_1 + DD_1}{2}$, тогда $13,5 = \frac{11 + DD_1}{2}$, или $DD_1 + 11 = 27$ $DD_1 = 16$ см, т.к. OO_1 – радиус

Ответ: 16 см.



Дано: $AK = CK$; $BN = DN$;
 EM – средняя линия.

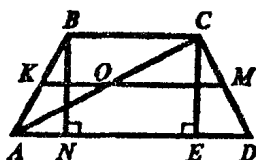
Доказать: что EM проходит
 через N и K .

Доказательство:

$EM \parallel BC \parallel AD$ (т.к. средняя линия параллельна основаниям).
 $CM = MD$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса EM проходит через
 середину отрезка BD , т.е. через N .

$AE = EB$ и $EM \parallel BC$, тогда по т. Фалеса

EM проходит через середину AC , т.е. через K . ч.т.д.



Дано: $AB = CD = 48$ см,

KM – средняя линия,

$KO = 11$ см, $MO = 35$ см.

Найти: углы трапеции.

KM – средняя линия трапеции, значит, KO – средняя линия $\triangle ABC$,
 т.е. $KO = \frac{1}{2} BC$, или $BC = 2 \cdot KO = 2 \cdot 11 = 22$ (см).

KM – средняя линия трапеции, значит, MO – средняя линия
 $\triangle ACD$, т.е. $MO = \frac{1}{2} AD$, или $AD = 2 \cdot MO = 2 \cdot 35 = 70$ (см).

3) $BN \perp AD$, $CE \perp AD$ – высоты трапеции.

$BN = CE$, $AB = CD$, т.к. трапеция равнобедренная, тогда
 $\triangle ABN = \triangle CED$ (по гипотенузе и катету), следовательно,
 $AN = ED$. $NBCE$ – прямоугольник, тогда $NE = BC = 22$ см и

$$ED = AN = \frac{1}{2} (AD - NE) = \frac{1}{2} (70 - 22) = 24 \text{ (см)}.$$

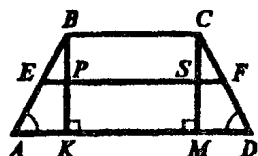
Из $\triangle CDE$: $\angle CED = 90^\circ$, $CD = 48$ см, $ED = 24$ см. Если в
 прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше
 гипотенузы, то он противолежит углу в 30° , следовательно,
 $\angle ECD = 30^\circ$, $\angle D = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (по свойству прямоуг. \triangle).
 $\angle A = \angle D = 60^\circ$, т.к. $ABCD$ – равнобедренная,

$\angle BCD + \angle D = 180^\circ$ (как односторонние при параллельных AD , BC и секущей CD), значит $\angle BCD = 120^\circ$.

$\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$, т.к. $ABCD$ – равнобедренная.

Ответ: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

799.



Дано: $BK, CM \perp AD$;
 $AB = CD, KD = 7$;
 EF – средняя линия;
 $EF = ?$

Пусть $KM = a$, значит $BC = a$ ($KBCM$ – прямоугольник). Пусть $AK = b$, значит $MD = b$ ($\triangle ABK = \triangle DCM$ по гипотенузе $AB = CD$ и острому углу $\angle A = \angle D$), т.к. $ABCD$ – равнобедренная.

$\triangle ABK$ EP – средняя линия, тогда $EP = \frac{1}{2}b$,

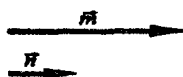
$\triangle DCM$ FS – средняя линия, тогда $FS = \frac{1}{2}b$.

$EF \parallel BC$, следовательно, $PS \parallel BC$, $PS \perp BK$, $PBCS$ – прямоугол. и $PS = BC = a$.

5) $EF = EP + PS + SF = \frac{1}{2}b + a + \frac{1}{2}b = a + b = KM + MD = KD = 7 \text{ см}$

Ответ: 7 см.

800.

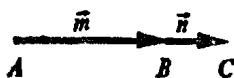


I. Дано: $\vec{m} \uparrow \vec{n}$.

Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.

Выполним сложение векторов \vec{m} и \vec{n} так:

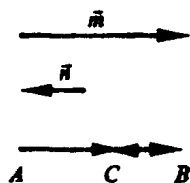
поместим начало вектора \vec{n} в конец вектора \vec{m} и соединим начало вектора \vec{m} и конец вектора \vec{n} . Из $\vec{m} \uparrow \vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C , тогда $AB + BC = AC$, и $AC = |\vec{m} + \vec{n}|$, $AB = |\vec{m}|$ и $BC = |\vec{n}|$, значит, $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.



II. Дано: $\vec{m} \uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$.

Доказать:

$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.



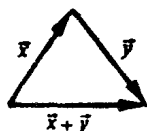
Выполним сложение векторов \vec{m} и \vec{n} так: поместим начало вектора \vec{n} в конец вектора \vec{m} и соединим затем начало вектора \vec{m} и конец вектора \vec{n} . Из $\vec{m} \updownarrow \vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и C лежит между A и B, тогда

$$AB = AC + BC, \text{ и } |\overline{AC}| = |\vec{m} + \vec{n}|, |\overline{AB}| = |\vec{m}| \text{ и } |\overline{BC}| = |\vec{n}|.$$

$$AC = AB - BC, \text{ значит } |\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|.$$

801.

Доказать: $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



I. \vec{x} и \vec{y} неколлинеарны.

Неравенство верно, т.к. $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} + \vec{y}|$ — стороны треугольника, и по известному неравенству имеем:

$$|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}| \text{ и } |\vec{x}| < |\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{y}|, \text{ т.е.}$$

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}|.$$

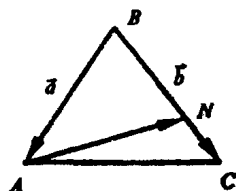
II. Если \vec{x} и \vec{y} коллинеарны, то по предыдущей задаче

$$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|, \text{ если } \vec{m} \uparrow \vec{n}, \text{ и } |\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|,$$

если $\vec{m} \downarrow \vec{n}$, значит, верно.

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

802.



Дано:

$$BN = 2NC,$$

$$\vec{a} = \overline{BA} \text{ и } \vec{b} = \overline{BC}.$$

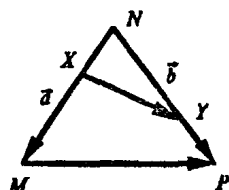
Выразить: \overline{AN} через \vec{a} и \vec{b} .

Решение:

$$\text{Из } \overline{BN} = 2 \overline{NC} \text{ следует: } \overline{BN} = \frac{2}{3} \overline{BC} = \frac{2}{3} \vec{b}.$$

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = -\overline{BA} + \overline{BN} = -\vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} = -\frac{2}{3} \vec{b} - \vec{a}$$

803.



Дано:

$$\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}, \quad \frac{NY}{YP} = \frac{3}{2},$$

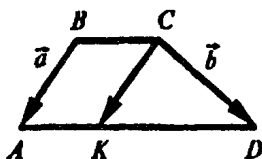
$$\vec{a} = \overrightarrow{MX}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{NY}.$$

Выразить: \overrightarrow{XY} , \overrightarrow{MP} через \vec{a} и \vec{b} .

Из $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$ следует: $\overrightarrow{NX} = \frac{2}{5} \overrightarrow{NM}$, из $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$ следует $\overrightarrow{NY} = \frac{3}{5} \overrightarrow{NP}$.

$$\overrightarrow{NX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{NY}, \text{ значит, } \overrightarrow{XY} = \frac{3}{5} \overrightarrow{NP} - \frac{2}{5} \overrightarrow{NM} = \frac{3}{5} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}.$$

804.



Дано: $BC = \frac{1}{3} AD$,

$$AK = \frac{1}{3} AD, \quad \vec{a} = \overrightarrow{BA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CD}.$$

Выразить: \overrightarrow{CK} , \overrightarrow{KD} , \overrightarrow{BC} через \vec{a} и \vec{b} .Решение:

$$BC = \frac{1}{3} AD \text{ и } AK = \frac{1}{3} AD, \text{ следовательно,}$$

BC = AK и BC || AK, тогда ABCK – параллелограмм.

В параллелограмме противоположные стороны параллельны и равны по свойству, BA = CK и BA || CK, тогда, $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

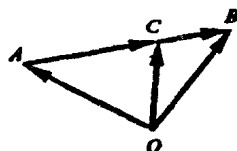
$$\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD}, \text{ значит, } \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}, \text{ тогда } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{KD} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}). \text{ Тогда}$$

ABCK – параллелограмм, следовательно,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}.$$

805.

Дано: $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, O – произвольная точка.

Доказать: $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OC}.$

Доказательство:

$\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, следовательно, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$. $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$,

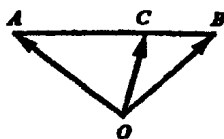
следовательно,

$$\overline{AB} = \frac{2}{3} \overline{AC} = \frac{2}{3} (\overline{OC} - \overline{OA}) = \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA}, \text{ тогда}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC} - \frac{2}{3} \overline{OA} = \frac{1}{3} \overline{OA} + \frac{2}{3} \overline{OC}.$$

Ч.т.д.

806.



Дано:

AC:CB = m:n, O – произвольная точка.

$$\text{Доказать: } \overline{OC} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}$$

Доказательство:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}, \text{ тогда } \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

$$\text{Т.к. } AC:CB = m:n, \text{ следует } \overline{AC} = \frac{m}{m+n} \overline{AB} = \frac{m}{m+n} (\overline{OB} - \overline{OA}) = \\ = \frac{m}{m+n} \overline{OB} - \frac{n}{m+n} \overline{OA}, \text{ тогда}$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB} - \frac{m}{m+n} \overline{OA} = \\ = \overline{OA} \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) + \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \overline{OA} \left(\frac{m+n}{m+n} - \frac{m}{m+n}\right) + \\ + \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \frac{m+n-m}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB} = \frac{n}{m+n} \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \overline{OB}.$$

Ч.т.д.

807.

Дано: AA₁, BB₁ и CC₁ – медианы $\triangle ABC$, O – произвольная точка.

Доказать: $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$.

Доказательство:

Имеем:

$$\overline{OA} + \overline{AA_1} = \overline{OA_1}, \overline{OB} + \overline{BB_1} = \overline{OB_1} \text{ и } \overline{OC} + \overline{CC_1} = \overline{OC_1}, \text{ тогда}$$

складывая почленно правые и левые части равенств, будем иметь:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1},$$

Докажем, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ — нулевой вектор.

По задаче 786 получаем:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

$$\text{Значит: } \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} +$$

$$+ \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} =$$

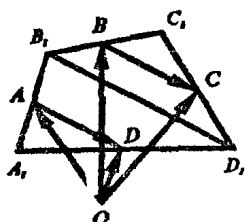
$$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \text{ — доказали.}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}, \text{ но}$$

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}, \text{ следовательно,}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}. \text{ ч.т.д.}$$

808.



Дано:

A, B, C, D — середины сторон соответственно;

A₁B₁, B₁C₁, C₁D₁, D₁A₁;

O — произвольная точка.

Доказать: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Доказательство:

1) Построим диагональ B₁D₁.

B — середина B₁C₁, C — середина C₁D₁ и $BC = \frac{1}{2} B_1D_1$.

A — середина A₁B₁, D — середина A₁D₁, следовательно,

AD — средняя линия ΔA₁B₁D₁, значит, AD || B₁D₁ и $AD = \frac{1}{2} B_1D_1$.

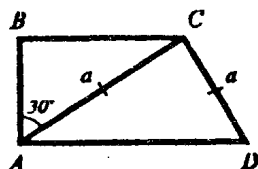
BC || B₁D₁, $BC = \frac{1}{2} B_1D_1$ и $AD = \frac{1}{2} B_1D_1$, тогда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, следовательно,

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}.$$

$\overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OD}$, следовательно,
 $\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{AD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$, тогда
 $\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}$ и $\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{BC}$, значит,
 $\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{OD} - \overline{OA}$, или $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$. Ч.т.д.

809.



Дано: $\angle A = 90^\circ$,
 $\angle C = 120^\circ$, $AC = a$, $CD = a$.
 средняя линия = ?

Решение:

$\angle C = 120^\circ$, тогда, $\angle D = 60^\circ$, из $\angle C + \angle D = 180^\circ$
 (односторонние при параллельных BC , AD и секущей CD);
 $\triangle ACD$ – равнобедренный треугольник, из $AC = CD$, тогда
 $\angle DAC = \angle D = 60^\circ$, значит, $\triangle ACD$ – равносторонний треугольник
 (все углы равны), $AD = a$, $\triangle ACD = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, значит,
 $\angle ACB = 60^\circ$.

Из $\triangle ABC$:

$\angle B = 90^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, следовательно,

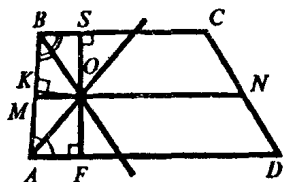
$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $BC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} a$ (по св-ву – в
 прямоугольном треугольнике против угла в 30° лежит катет,
 равный половине гипотенузы)

$BC = \frac{1}{2} a$, $AD = a$.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т.е.

$$\frac{BC + AD}{2} = \frac{\frac{1}{2}a + a}{2} = \frac{\frac{3}{2}a}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Ответ: $\frac{3}{4}a$.



Дано:

MN – средняя линия,
 O – вершина $\angle AOB$,
 AO – биссектриса $\angle A$,
 BO – биссектриса $\angle B$.

Доказать: $O \in MN$.

Доказательство:

Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. $OS \perp BC$, $OK \perp AB$, $OF \perp AD$.

Из точки O лежит на биссектрисе $\angle ABC$, следует O равноудалена от сторон BA и BC , тогда $OS = OK$.

Точка O лежит на биссектрисе $\angle BAD$, следовательно O равноудалена от сторон AB и AD , тогда $OK = OF$.

$OS = OK$ и $OK = OF$, значит, $OS = OF$, следовательно, $O \in MN$, где MN средняя линия. Ч.т.д.

Учебно-методическое издание
Прокопович Александр Николаевич

Домашняя работа по геометрии за 8 класс

Издательство «ЭКЗАМЕН»

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.000454.01.09 от 27.01.2009 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *К.М. Игнатова, Д.А. Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz

Е-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**