



Серия  
**РЕШЕБНИК**

# Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии

«ДИДАКТИЧЕСКИЕ  
МАТЕРИАЛЫ  
ПО ГЕОМЕТРИИ  
11 класс» Б.Т. Зуб

11



**А.С. РЫЛОВ**

**Решение контрольных  
и самостоятельных  
работ по геометрии  
за 11 класс**

**к пособию «Дидактические материалы по геометрии  
для 11 класса / Б.Г. Зив. — 8-е изд. —  
М.: Просвещение, 2004»**

*Учебно-методическое пособие*

**Издательство  
«ЭКЗАМЕН»**

**МОСКВА  
2007**

УДК 373:514  
ББК 22.151.0я72  
Р94

*Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 19 п. 2 Закона РФ «Об авторском праве и смежных правах» от 9 июня 1993 г.)*

*Изображение учебного пособия «Дидактические материалы по геометрии для 11 класса / Б.Г. Зив. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2004» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 19 п. 2 Закона РФ «Об авторском праве и смежных правах» от 9 июня 1993 г.).*

**Рылов, А.С.**

- Р94** Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 11 класс: к пособию Б.Г. Зива «Дидактические материалы по геометрии для 11 класса»: учебно-методическое пособие / А.С. Рылов. — М.: Издательство «Экзамен», 2007. — 190, [2] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 5-472-02506-0

Предлагаемое учебное пособие содержит подробное решение всех заданий самостоятельных и контрольных работ из пособия «Дидактические материалы по геометрии для 11 класса / Б.Г. Зив — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2004».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям при подготовке к контрольным и самостоятельным работам по геометрии.

**УДК 373:514  
ББК 22.151.0я72**

---

Подписано в печать с диапозитивов 02.08.2006.

Формат 84х108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага типографская. Уч.-изд. л. 6,83

Усл. печ. л. 10,08. Тираж 11 000 экз. Заказ № 2554(3)

---

ISBN 5-472-02506-0

© Рылов А.С., 2007

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2007

# Содержание

## Самостоятельные работы

Вариант 1	4
Вариант 2	15
Вариант 3	26
Вариант 4	40
Вариант 5	53
Вариант 6	73
Вариант 7	92
Вариант 8	113

## Математические диктанты

МД-1	12
Вариант 1	158
Вариант 2	159
МД-2	161
Вариант 1	161
Вариант 2	163
МД-3	166
Вариант 1	166
Вариант 2	168

## Работы на повторение

П-1	135
Вариант 1	135
Вариант 2	137
Вариант 3	138
Вариант 4	140
П-2	143
Вариант 1	143
Вариант 2	144
Вариант 3	145
Вариант 4	147
П-3	148
Вариант 1	148
Вариант 2	149
Вариант 3	150
Вариант 4	151
П-4	152
Вариант 1	152
Вариант 2	153
Вариант 3	155
Вариант 4	156

## Контрольные работы

К-1	171
Вариант 1	171
Вариант 2	172
Вариант 3	173
Вариант 4	174
К-2	175
Вариант 1	175
Вариант 2	177
Вариант 3	178
Вариант 4	180
К-3	181
Вариант 1	181
Вариант 2	182
Вариант 3	183
Вариант 4	184
К-4	185
Вариант 1	185
Вариант 2	187
Вариант 3	188
Вариант 4	190

# Самостоятельные работы

## Вариант 1

### С—1

1. Дано: куб,  $A(2; -2; 0)$ .  $DC_1 \cap D_1C = M$

Найти: 1) координаты всех остальных вершин. 2) Координаты векторов  $\overrightarrow{OD}$ ;  $\overrightarrow{OC_1}$ ,  $\overrightarrow{OM}$  и разложить их по векторам  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ;  $\vec{k}$ .

Решение: 1) Ребра куба равны 4 (по построению), значит,  $B(-2; -2; 0)$ ;  $C(-2; 2; 0)$ ;  $D(2; 2; 0)$ ;  $A_1(2; -2; 4)$ ;  $B_1(-2; -2; 4)$ ;  $C_1(-2; 2; 4)$ ;  $D_1(2; 2; 4)$ .

2) Координаты:  $\overrightarrow{OD} \{2 - 0; 2 - 0; 0 - 0\}$ ;

$\overrightarrow{OD} \{2; 2; 0\}$ ;  $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ ;

$\overrightarrow{OC_1} \{-2; 2; 4\}$ ;  $\overrightarrow{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$ .

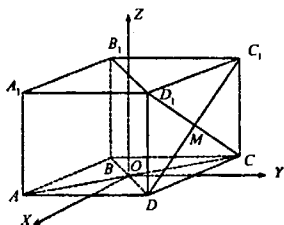
Координаты точки  $M(0; 2; 2)$ :  $\overrightarrow{OM} \{0; 2; 2\}$ ;  $\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .

Ответ: 1)  $B(-2; -2; 0)$ ;  $C(-2; 2; 0)$ ;  $D(2; 2; 0)$ ;  $A_1(2; -2; 4)$ ;

$B_1(-2; -2; 4)$ ;  $C_1(-2; 2; 4)$ ;  $D_1(2; 2; 4)$ ;

2)  $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OD} \{2; 2; 0\}$ ;  $\overrightarrow{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OC_1} \{-2; 2; 4\}$ ;

$\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OM} \{0; 2; 2\}$



2. Дано: векторы  $\vec{a} \{2; -1; 3\}$ ,  $\vec{b} \{-3; 2; 1\}$  и  $\vec{c} \{-10; 6; -4\}$ .

Будут ли коллинеарны векторы  $\vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{c}$ ?

Решение:  $(\vec{a} - \vec{b}) \{2 + 3; -1 - 2; 3 - 1\}$ ;  $(\vec{a} - \vec{b}) \{5; -3; 2\}$ .

Векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$  коллинеарны, если существует такое  $k$ , что:

$$\begin{cases} 5k = -10 \\ -3k = 6 \\ 2k = -4 \end{cases} \text{ . Очевидно, } k = -2. \text{ Значит, векторы коллинеарны.}$$

Ответ: векторы  $\vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{c}$  коллинеарны.

### С—2

1. Дано: 2 вектора  $\vec{a} \{-2; 1; -1\}$  и  $\vec{b} \{1; -3; 2\}$ .

Найти:  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  и  $|\vec{a}| + |2\vec{b}|$ .

Решение: Итак,  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \{-2 + 2 \cdot 1; 1 + (-3) \cdot 2; -1 + 2 \cdot 2\}$ ;

$(\vec{a} + 2\vec{b}) \{0; -5; 3\}$ ;  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 25 + 9} = \sqrt{34}$ ;

$|\vec{a}| + |2\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 1} + \sqrt{(2 \cdot 1)^2 + (-3 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 2)^2} =$

$= \sqrt{6} + \sqrt{4 + 36 + 16} = \sqrt{6} + \sqrt{56} = \sqrt{6} + 2\sqrt{14}$ . Ответ:  $\sqrt{34}$ ;  $\sqrt{6} + \sqrt{14}$ .

2. Дано: В  $\triangle ABC$ ,  $BM$  — медиана;  $A(-1; 2; 2)$ ,  $B(2; -2; -6)$ ,  $M(1; 1; -1)$ .

1) Найти координаты  $C$ .

2) Найти длину  $BC$ .

3) Разложить  $\overrightarrow{BC}$  по векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Решение: Пусть  $x, y, z$  — координаты т.  $C$ . Зная формулу середины от-

резка, составим систему: 
$$\begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 1 \\ \frac{2+y}{2} = 1 \\ \frac{2+z}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$$

Итак,  $C(3; 0; -4)$ . Найдем длину  $BC$ , зная координаты:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3-2)^2 + (0+2)^2 + (-4+6)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

$$\overrightarrow{BC} \{3-2; 0+2; -4+6\}; \overrightarrow{BC} \{1; 2; 2\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Ответ: 1)  $C(3; 0; -4)$ ; 2)  $BC = 3$ ; 3)  $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .

### С—3

1. Дано:  $DABC$  — тетраэдр, ребра равны, а  $K \in BC$   $BK = KC$

Найти: 1)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AK}$ ; 2)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Решение: Поместим  $DABC$  в прямоугольную систему координат, тогда

$$\overrightarrow{AK} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}a; 0; 0 \right\}; \overrightarrow{DA} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}a; 0; -\sqrt{\frac{2}{3}}a \right\};$$

$$\overrightarrow{BC} \{0, -a, 0\}; \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AK} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2 = -\frac{a^2}{2} \quad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Ответ: 1)  $-\frac{a^2}{2}$ ; 2) 0.

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб  $DC_1 \cap D_1 C = M$ . Выяснить какова величина угла  $\widehat{AMB D_1}$

Решение: Поместим куб в прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

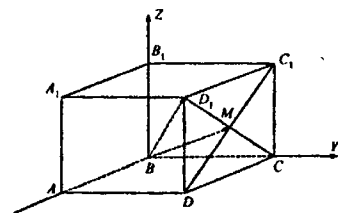
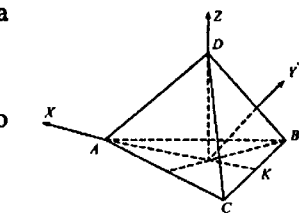
Пусть  $AB = 2$

$$\overrightarrow{AM} \{1-2; 2; 1\}; \overrightarrow{AM} \{-1; 2; 1\};$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6};$$

$$\overrightarrow{BD_1} \{2; 2; 2\}; |\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD_1} = -2 + 4 + 2 = 4;$$



$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cos \alpha, \quad 2\sqrt{18} \cos \alpha = 4;$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha — \text{острый.}$$

Ответ: острый.

#### С—4

1. Дано:  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ;  $|\vec{b}| = 1$ ;  $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 135^\circ$ .

Найти:  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = \alpha$ .

Решение: По т. косинусов

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ} = \sqrt{2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |-2\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||2\vec{b}|\cos 135^\circ} = \sqrt{2 + 4 + 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{10}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2 - 2 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - 2\vec{b}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Ответ:  $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

2. Дано: тетраэдр,  $DABC$ ,  $AB = AC$ ,  
 $\angle DAC = \angle DAB$ .

Доказать:  $AD \perp BC$ .

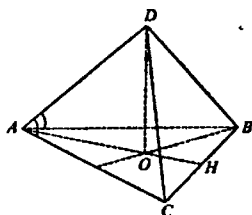
Доказательство:  $H$  — основание высоты  $AH$   
 $\triangle ABC$

$O$  — основание высоты  $DO$  тетраэдра

1)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$ ;  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ ;

2) По теореме о трех перпендикулярах

$$\overrightarrow{HD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow AD \perp BC$$



#### С—5.

1. Т.  $A(100; 200; 1)$  переходит

а) в т.  $A_1(-100; -200; -1)$  при центральной симметрии относительно начала координат.

б) в т.  $A_2(100; 200; -1)$  при зеркальной симметрии относительно плоскости  $Oxy$ .

2. Т.к. при движении отрезок отображается на равный ему отрезок, то треугольники получаются равные по третьему признаку, т.е. по 3-м сторонам.

Ответ: а)  $(-100; -200; -1)$ , б)  $(100; 200; -1)$ .

### С—6

1. При движении углы сохраняются, если прямая была перпендикулярна любой прямой в плоскости, после движения эта прямая будет так же перпендикулярна любой прямой в плоскости, т. е. прямая будет перпендикулярна плоскости.

2. Пусть прямые  $a$  и  $b$  параллельны, и  $a$  — перпендикулярна  $\alpha$ . Поскольку движение сохраняет углы, то мы можем прямую  $a$  перевести в прямую  $b$  параллельным переносом на вектор с началом на прямой  $a$  и концом на прямой  $b$ , исходя из доказанного в задаче 1 получим, что  $b \perp \alpha$ .

### С—7

1. Дано: цилиндр, два сечения  $S$  и  $S_1$ , площадь осевого сечения равна  $S$ , угол между сечениями  $= 30^\circ$ ;

$$\alpha\beta = 30^\circ.$$

Найти:  $S_1$  — площадь второго сечения

Решение: Пусть образующая  $h$ .

$$1) S = AB \cdot h; S_1 = CB \cdot h \Rightarrow S_1 = CB \frac{S}{AB}.$$

2) Рассмотрим  $\triangle ABC$ . Он прямоугольный. Т.к:  $AB$  — диаметр окружности  $\Rightarrow CB = AB \cdot \cos 30^\circ$ . 3)  $S_1 = AB \cdot \cos 30^\circ \frac{S}{AB} = S \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} S$ .

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2} S.$$

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма, в призму вписан цилиндр,  $AA_1 = 3$ ;  $AB = 2\sqrt{3}$ .

Найти:  $S_{\text{пов. цилиндра}}$ .

Решение:

$$1) \text{ Рассмотрим правильный } \triangle ABC: r = \frac{\sqrt{3}AB}{6} = 1.$$

$$2) S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot AA_1 = 2\pi + 2\pi \cdot 3 = 8\pi.$$

$$\text{Ответ: } 8\pi.$$

### С—8

1. Дано:

конус,  $R$  — вершина,  $RIG$  — сечение,  $O$  — центр основания,  $SL$  — диаметр,  $SL \parallel GI$

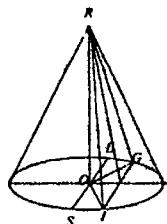
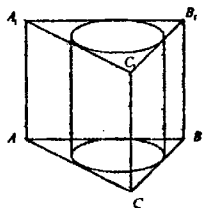
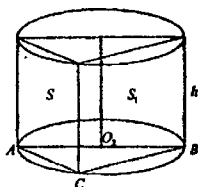
$$\angle GOI = 90^\circ, \angle SRL = 60^\circ, GI = a.$$

Найти:  $S_{\text{бок.}}$  — ?

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle OGI$ : он равнобедренный

$$(OG = OI = R) \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$





2. Рассмотрим  $\triangle LRS$ :  $SL = 2R = \sqrt{2}a$ ;  $SR = RL = l$ , но  $\angle SRL = 60^\circ \Rightarrow SR = RL = SL = l = 2R = \sqrt{2}a$ .

$$3) S_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sqrt{2} a = \pi a^2.$$

Ответ:  $\pi a^2$ .

2. Дано: усеченный конус, длины окружностей оснований  $4\pi$  и  $10\pi$ ,  $h = 4$ .

Найти:  $S_{\text{поверх.}}$ .

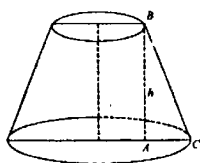
Решение: 1) Рассмотрим верхнее основание:  $d = 2\pi r$ ;  $4\pi = 2\pi r$ ;  $r = 2$ .

2) Рассмотрим нижнее:  $d_1 = 2\pi R \Rightarrow 10\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 5$ .

3) Из  $\triangle ABC$ :  $BC = 5$  ( $BA = h = 4$ ;  $AC = R - r = 3$ ).

$$4) S_{\text{полн.}} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R+r)l = 4\pi + 25\pi + 35\pi = 64\pi.$$

Ответ:  $64\pi$ .



С—9.

Дано:  $\triangle RIG$  вращается вокруг  $RG$ ;  $IR = 3$ ;

$\angle RIG = 90^\circ$ ,  $IG = 4$ .

Найти:  $S_{\text{тела вращ.}}$ .

Решение: Пусть  $O$  — основание высоты  $IO$ .  $\triangle RIG$

1) Рассмотрим  $\triangle RIG$ :  $\angle RIG = 90^\circ$ ,

$$RI = 3; IG = 4 \Rightarrow RG = 5.$$

$$2) RG \cdot IO = RI \cdot IG; 5 \cdot IO = 12; IO = 2,4 = R.$$

$$3) S_{\text{тела вращ.}} = S_{\text{бок. IRS}} + S_{\text{бок. IGS}} = \pi Rl + \pi Rl = \pi \cdot 3 \cdot 2,4 + \pi \cdot 2,4 \cdot 4 = 16,8\pi.$$

Ответ:  $16,8\pi$ .

2. Дано:  $RABC$  — правильная пирамида,  $AC = CB = BA = a$ ,  $RO$  — высота, боковые грани наклонены к основанию под углом  $45^\circ$  в  $RABC$  вписан конус.

Найти:  $S_{\text{впис. конуса бок.}}$ .

$$\text{Решение: 1) Рассмотрим } \triangle ABC: r = \frac{\sqrt{3}a}{6} = OS.$$

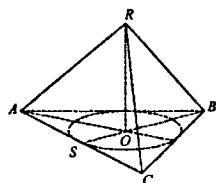
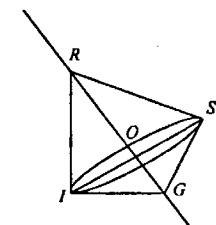
2) Т.к. боковые грани равнонаклонены к оси, то вершина конуса проецируется в центр вписанной окружности.

3) Рассмотрим  $\triangle ROS$ : он равнобедренный ( $\angle ROS = 90^\circ$ ,  $\angle RSO = 45^\circ$ )  $\Rightarrow$

$$RO = R = SO = \frac{a\sqrt{3}}{6}. SR = \frac{a\sqrt{6}}{6} \text{ — образующая конуса.}$$

$$4) S_{\text{бок. конус}} = \pi rl = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{6} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}.$$



С—10

1. Дано: сфера  $(O, R)$ ,  $O(3, 0, 0)$ ,  $A(0, \sqrt{2}, \sqrt{5}) \in$  сфере.

Написать уравнение сферы. Выяснить принадлежит ли сфере точки  $(5, 0, 2\sqrt{3})$ ;  $(4, -1, 0)$ .

Решение: а)  $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16 \left( R = |\overline{OA}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2} = 4 \right),$

б)  $(5-3)^2 + 0 + 12 = 16$

$16 = 16$

точка  $(5; 0; 2\sqrt{3})$  принадлежит

$(4-3)^2 + 1 + 0 \neq 16$

точка  $(4; -1; 0)$  не принадлежит.

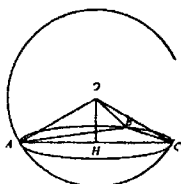
Ответ: а)  $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$ .

б) да, нет.

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $A, B, C \in$  сфере с центром  $O$ ,  $OH$  — расстояние от  $O$  до  $(ABC)$ ,  $AB=15$ ,  $BC=\sqrt{351}$ ,  $OH=5$ ,  $\angle ABC=90^\circ$ .

Найти:  $OA=R$ .

Решение: Т.к.  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $AC$  — диаметр сечения



1) Рассмотрим  $\triangle ABC$ : Т.к.  $\angle B=90^\circ$ ;  $AB=15$   $BC=\sqrt{351} \Rightarrow AC=\sqrt{225+351}=24$ .

2) Т.к.  $\triangle ABC$  — прямоугольный,  $H$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности, то  $AH = \frac{AC}{2} = 12$ , ее радиус

3) Рассмотрим  $\triangle AOH$ :  $OH=5$ ;  $AH=12$ ;

$\angle OHA=90^\circ \Rightarrow OA=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ .

Ответ: 13.

### С—11

1. Дано: Плоскость пересекает сферу по окружности длина дуги  $12\pi$ ; расстояние от плоскости дуги до центра шара  $AB=8$ .

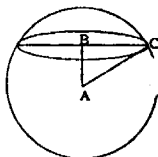
Найти:  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение: 1)  $l=2\pi r$ ;  $12\pi=2\pi r$ ;  $r=6$ .

2) Рассмотрим  $\triangle ABC$ : он прямоугольный ( $\angle B=90^\circ$ .  $BC=r=6$ )  $\Rightarrow AC=R=10$ .

3)  $S_{\text{сферы}}=4\pi R^2=400\pi$ .

Ответ:  $400\pi$ .



2. Дано: Плоскость пересекает шар с центром  $O$ .  $\angle IRG=45^\circ$  — угол между диаметром и секущей плоскостью,  $RG=4\sqrt{3}$  — диаметр.

Найти:  $S_{\text{сечения}}$ .

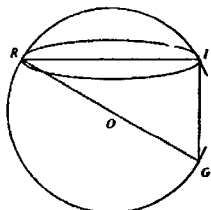
Решение: Рассмотрим  $\triangle RIG$ : он равнобедренный и прямоугольный.

$RI^2 + IG^2 = 48$ , но  $RI=IG$ ;  $2RI^2 = 48$ ;

$RI=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ .

Но  $RI$  — диаметр нужного круга  $\Rightarrow R=\frac{RI}{2}=\sqrt{6}$ .  $S=\pi R^2=6\pi$ .

Ответ:  $6\pi$ .



C—12

1. Дано: пирамида  $DABC$ ,  $AC = CB = BA = 3$ .  
 $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 60^\circ$ . Около  $DABC$  описана сфера.

Найти:  $R$ .

Решение:  $O$  — центр описанный около  $\triangle ABC$  окружности

$$1) OA = \frac{\sqrt{3}AB}{3} = \sqrt{3} \text{ (из } \triangle ABC).$$

2) Рассмотрим  $\triangle ADO$ : он прямоугольный.

$$OA = \sqrt{3}; \angle ADO = 30^\circ. AD = 2\sqrt{3}$$

3) Рассмотрим  $\triangle ADO_1$ , (где  $O_1$  — центр сферы) он равнобедренный.

$$O_1D = O_1A = r; \angle O_1DA = \angle DAO_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle DO_1A = 120^\circ \Rightarrow AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ;$$

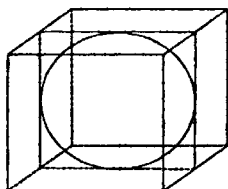
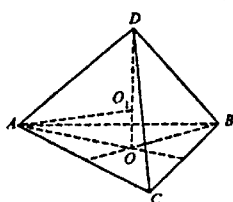
$$AD = \sqrt{3}R; R = \frac{AD}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

2. Дано: в правильную четырехугольную призму вписана сфера.

Найти:  $\frac{S_{\text{полн. пов. призмы}}}{S_{\text{сферы}}}$ .

Решение: Призма является кубом, т.к. в нее вписана сфера. Пусть сторона его равна  $2a$ , тогда

$$S_{\text{куба}} = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2; S_{\text{сферы}} = 4\pi a^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{куба}}}{S_{\text{сферы}}} = \frac{24a^2}{4\pi a^2} = \frac{6}{\pi}. \text{ Ответ: } \frac{6}{\pi}.$$



Ответ: 2.

C—13

1. Дано: измерения прямого параллелепипеда относятся как  $2 : 3 : 4$ ,  $d = \sqrt{29}$  — диагональ.

Найти:  $V$ .

Решение: Пусть стороны параллелепипеда  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$  тогда

$$\sqrt{29} = \sqrt{4x^2 + 9x^2 + 16x^2}; \sqrt{29} = \sqrt{29x^2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

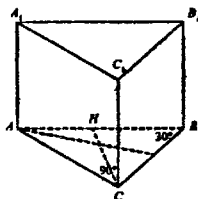
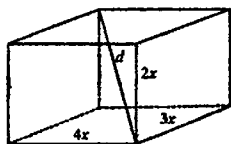
$CH = 6$  — расстояние от  $C$  до  $(AA_1BB_1)$ .  $AA_1 = 6$

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим прямоугольный  $\triangle CHB$ .

$$\angle HBC = 30^\circ, HC = 6 \Rightarrow CB = 12.$$

2) Рассмотрим прямоугольный  $\triangle ABC$ :



$$\angle ABC = 30^\circ, CB = 12 \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3},$$

$$V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S_{ABC} = 6 \cdot 24\sqrt{3} = 144\sqrt{3}.$$

Ответ:  $144\sqrt{3}$

С—14

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $AC = 12$ ,  $AB = CB = 10$ ,  $E \in BB_1$ ,  $EH \perp AC$ ,  $\angle EHB = 60^\circ$ ,  $B_1E = EB$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: Рассмотрим  $\triangle ABC$ .  $AH = \frac{1}{2} AC = 6$ .

$$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8.$$

$$\text{Из } \triangle HBE: EB = HB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 8\sqrt{3} \Rightarrow B_1B = 16\sqrt{3}.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot HB = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 48.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot B_1B = 48 \cdot 16\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot 256 = 768\sqrt{3}. \quad \text{Ответ: } 768\sqrt{3}$$

2. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $ABCD \parallel O_1O_2$ ,  $\angle AO_1B = 120^\circ$ ,  $O_1A = R$ , угол между  $O_1O_2$  и  $BD$  равен  $30^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{цилиндра}}$ .

Решение: Угол между  $O_1O_2$  и  $BD$  равен  $\angle ADB = 30^\circ$ .

$$\text{Из } \triangle AO_1B: AB^2 = 2R^2(1 - \cos 120^\circ); AB^2 = 2R^2 \cdot \frac{3}{2};$$

$AB = R\sqrt{3}$ . Из прямоугольного  $\triangle ADB$ :

$$AD = \frac{AB}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 3R \Rightarrow V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot AD = 3\pi R^3. \quad \text{Ответ: } 3\pi R^3.$$

С—15

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $AB = BC = AC$ ,  $ACC_1A_1$  — ромб,  $A_1C = 6$ ,  $AC_1 = 8$ , угол между  $AA_1$  и  $(ABC) = 60^\circ$ .

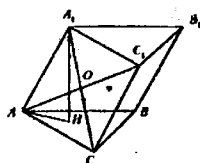
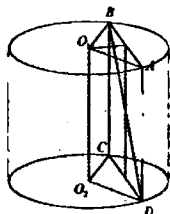
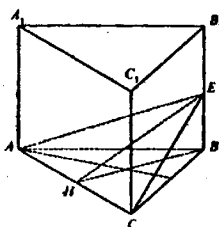
Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: Пусть  $A_1C \cap AC_1 = O \Rightarrow AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 5 = AA_1$ . Опустим высоту  $A_1H$  на  $(ABC)$ .

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AHA_1: A_1H = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$S(ABC) = AC^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot A_1H = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{375}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{375}{8}.$$



2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонный параллелепипед,  $AA_1 = 10$ ,  $AE \perp B_1 B$ ,  $E \in B_1 B$ ,  $AE = 5$ ,  $AF = 12$ ,  $F \in DD_1$ ,  $AF \perp DD_1$ ,  $G \in C_1 C$ ,  $AG \perp C_1 C$ ,  $AG = 13$ .

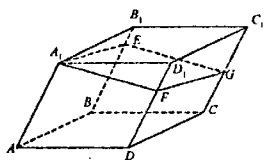
Найти:  $V_{\text{параллелепипеда}}$ .

Решение: Сечение  $A_1 EGF$  — параллелограмм,  $(A_1 EGF) \perp AA_1$ .

$$S(A_1 EG) = S(A_1 FG) = \sqrt{\frac{5+12+13}{2}}(15-5)(15-12)(15-13) =$$

$$= \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$$

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = AA_1 \cdot 2S(A_1 EG) = 10 \cdot 2 \cdot 30 = 600. \quad \text{Ответ: } 600.$$



### С—16

1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AH$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $AH = h$ ,  $DM$  — высота пирамиды,  $\angle DAM = \alpha$ .

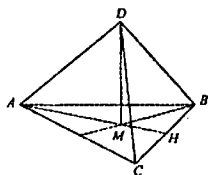
Найти:  $V(DABC)$ .

Решение:  $AM = \frac{2}{3}AH = \frac{2h}{3}$ ;  $MH = \frac{h}{3}$ ;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}AB = AH \Rightarrow AB = \frac{2AH\sqrt{3}}{3} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}. \quad S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$$

Из  $\triangle AMD$ :  $DM = AM \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2htg\alpha}{3}$ .

$$V(DABC) = \frac{1}{3}DM \cdot S(ABC) = \frac{2htg\alpha}{9} \cdot \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{2h^3tg\alpha\sqrt{3}}{27}. \quad \text{Ответ: } \frac{2h^3tg\alpha\sqrt{3}}{27}$$



2. Дано:

$MABCD$  — пирамида,  $ABCD$  — ромб,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $AB = a$ ,  $E \in AD$ ,  $ME \perp AD$ ,  $BM \perp (ABCD)$ ,  $F \in DC$ ,  $MF \perp DC$ ,  $\angle MEB = \angle MFB = \beta$ .

Найти:  $V(MABCD)$ .

Решение:

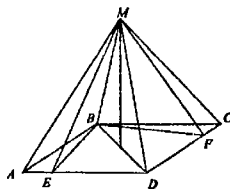
$$S(ABD) = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2}AD \cdot BE = \frac{a}{2}BE \Rightarrow BE = a \sin \alpha.$$

Из  $\triangle MBE$ :  $MB = EB \cdot \operatorname{tg} \beta = a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

$$S(ABCD) = 2S(ABD) = a^2 \sin \alpha \Rightarrow V(MABCD) = \frac{1}{3}MB \cdot S(ABCD) =$$

$$= \frac{a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{3} \cdot a^2 \sin \alpha = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{3}.$$

Ответ:  $\frac{a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{3}.$



C—17

1. Дано: конус,  $OH$  — высота,  $AB \perp EF$ ,  
 $AB$  — диаметр,  $EF$  — хорда,  $OEF$  — сечение,  $AB \cap EF = K$ ,  $\angle OKH = 60^\circ$ ,  $OH = 4\sqrt{3}$ ,  $\angle EHF = 60^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение:  $\triangle HEF$  — равносторонний.

Из  $\triangle OHK$  получим  $HK = \frac{OH}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow$  в  $\triangle HFE$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} EH = HK \Rightarrow EH = \frac{2HK}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot OH \cdot HE^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{64}{3} = \frac{256\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ:  $\frac{256\pi\sqrt{3}}{9}$ .

2. Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида. В  $MABCD$  вписан конус.

Найти:  $\frac{V(MABCD)}{V_{\text{конуса}}}$ .

Решение: Высота конуса и пирамиды  $MH$  — общая, следовательно,

$$\frac{V(MABCD)}{V_{\text{конуса}}} = \frac{S(ABCD)}{S_{\text{круга}}} = \frac{AB^2}{\pi r^2} = \frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}.$$

C—18.

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная усеченная пирамида,

$AB = 4\sqrt{2}$ ,  $A_1 B_1 = 6\sqrt{2}$ ,  $S(A_1 ACC_1) = 90$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение:  $AC = AB\sqrt{2} = 8$ ,  $A_1 C_1 = A_1 B_1\sqrt{2} = 12$ .

$$S(A_1 ACC_1) = \frac{1}{2} (AC + A_1 C_1) OO_1 = 10 \cdot OO_1 = 90 \Rightarrow OO_1 = 9,$$

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = \frac{OO_1}{3} \cdot [AB^2 + A_1 B_1^2 + AB \cdot A_1 B_1] =$$

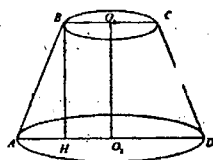
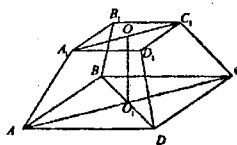
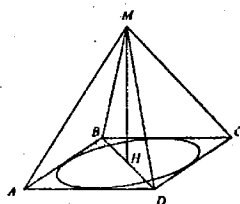
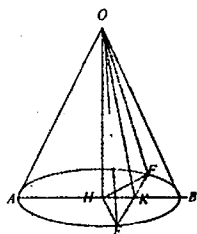
$$= 3 \cdot [16 \cdot 2 + 36 \cdot 2 + 24 \cdot 2] = 3(104 + 48) = 456.$$

Ответ: 456.

2. Дано: усеченный конус.  $\frac{BO_1}{AO_2} = \frac{1}{3}$ ,  $AB = 4$ ,

$\angle BAO_2 = 60^\circ$ ,  $O_1 O_2$  — ось конуса.

Найти:  $V_{\text{конуса}}$



**Решение:** Рассмотрим осевое сечение  $ABCD$ . Опустим высоту  $BH$ .

Из прямоугольного  $\triangle AHB$ :  $AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 2$ ,  $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ .

Т.к.  $AD = 3BC$ , то  $AH = BC = 2 \Rightarrow AD = 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} BH(AO_2^2 + BO_1^2 + AO_2 \cdot BO_1) = \frac{\pi}{3} \cdot 2\sqrt{3} (9 + 1 + 3) = \frac{26\pi\sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}$ .

## С—19

1. Дано: полушар,  $S_{\text{полушара}} = 48\pi$ .

Найти:  $V_{\text{полушара}}$ .

**Решение:**  $S_{\text{полушара}} = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 48\pi \Rightarrow R^2 = 16; R = 4$ .

$$V_{\text{полушара}} = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 4^3 = \frac{128}{3} \pi.$$

**Ответ:**  $\frac{128}{3} \pi$ .

2. Дано: конус,  $\triangle ABC$  — осевое сечение,  $AB = BC = AC$ . В конус вписан шар.

Найти:  $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}}$ .

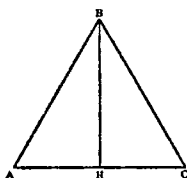
**Решение:** Пусть  $AC = a$ , тогда высота

$$BH = AC \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$S(ABC) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} P \cdot r$ , т.к. в осевое сечение вписан большой круг шара

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 3a} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6a} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} BH \cdot AH^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3 \cdot 8}, \quad \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}}{\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{9 \cdot 6}} = \frac{9 \cdot 6}{3 \cdot 8} = \frac{9}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{9}{4}.$$



## ДС

1. Дано:  $M(2; -1; 3)$ , плоскость  $\alpha$ ,  $M \in \alpha$ , плоскость  $\beta$ :  $2x - 3y + z - 4 = 0$ ,  $\alpha \parallel \beta$ .

Написать уравнение плоскости  $\alpha$ .

**Решение:** Т.к.  $\alpha \parallel \beta$ , то уравнение  $\alpha$  —  $2x + 3y + z + S = 0$ .

$M \in \alpha$ :  $4 + 3 + 3 + S = 0$ ,  $S = -10$ .

Окончательно  $\alpha$ :  $2x - 3y + z - 10 = 0$ .

**Ответ:**  $2x - 3y + z - 10 = 0$ .

2. Дано: плоскость  $\alpha$ :  $2x + y - z + 1 = 0$ ; плоскость  $\beta$ :  $x - 2y + 3z - 2 = 0$ ; угол между  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $\gamma$ .

Найти:  $\gamma$ .

Решение: Угол между  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $\pi - \gamma_1$ , где  $\gamma_1$  — угол между перпендикулярами.  $\vec{n}_\alpha (2, 1, -1) \perp \alpha$  и  $\vec{n}_\beta (1, -2, 3) \perp \beta$  (т.к.  $\gamma_1$  — тупой).

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{6}, |\vec{n}_\beta| = \sqrt{14}.$$

$$(\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta) = 2 - 2 - 3 = -3 = |\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta| \cdot \cos \gamma_1.$$

$$\cos \gamma_1 = -\frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}; \gamma_1 = \arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right).$$

$$\gamma = \pi - \gamma_1 \text{ или } \gamma = \pi - \arccos\left(-\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{21}}{42}\right).$$

Ответ:  $\arccos\left(\frac{3\sqrt{21}}{42}\right)$ .

## Вариант 2

С—1

1. Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,

$C(-2, 4, 0)$ .

1) Найти координаты вершин куба.

2) Найти координаты  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OB_1}$ ,  $\vec{OK}$  и

разложить их по векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Решение: 1)  $B(-2, 0, 0)$ ;  $A(2, 0, 0)$ ;

$D(2, 4, 0)$ ,  $B_1(-2, 0, 4)$ ;  $A_1(2, 0, 4)$ ;  $D_1(2, 4, 4)$ ;  $C_1(-2, 4, 4)$ .

2)  $\vec{OC}(-2, 4, 0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$ ;  $\vec{OB_1}(-2, 0, 4) = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$ ;

$\vec{OK}(-2, 2, 2) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  ( $K$  — середина  $BC_1 \Rightarrow K(-2, 2, 2)$ ).

Ответ: 1)  $A(2, 0, 0)$ ;  $B(-2, 0, 0)$ ;  $D(2, 4, 0)$ ;

$A_1(2, 0, 4)$ ;  $B_1(-2, 0, 4)$ ;  $C_1(-2, 4, 4)$ ;  $D_1(2, 4, 4)$

2)  $\vec{OC}(-2, 4, 0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$ ;  $\vec{OB_1}(-2, 0, 4) = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$ ;

$\vec{OK}(-2, 2, 2) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .

2. Дано:

$\vec{a}(-1, 3, -2)$ ,  $\vec{b}(2, -1, 3)$ ,  $\vec{p}(-3, -1, -4)$ .

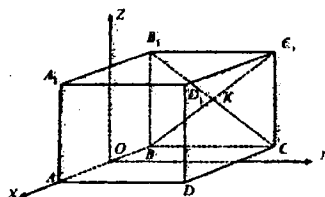
Выяснить, будут ли коллинеарны  $\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{p}$ .

Решение:  $(\vec{a} + 2\vec{b})\{3, 1, 4\}$ ;  $\vec{p}\{-3, -1, -4\}$ .

Условие коллинеарности —  $\vec{a} + 2\vec{b} = k\vec{p}$ :

$$\begin{cases} 3 = -3k \\ 1 = -k \\ 4 = -4k \end{cases} \rightarrow k = -1 \Rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \text{ и } \vec{p} \text{ коллинеарны.}$$

Ответ: да





## С—2

1 Дано:  $\vec{m} \{-2, 1, -1\}$ ,  $\vec{n} \{1, 3, 2\}$ .

Найти:  $|2\vec{m} - \vec{n}|$  и  $|2\vec{m}| - |\vec{n}|$ .

Решение.  $|\vec{m}| = \sqrt{6}$ ,  $|\vec{n}| = \sqrt{14}$ .  $(\vec{m} \cdot \vec{n}) = -2 + 3 - 2 = -1$ ;

$$|2\vec{m} - \vec{n}|^2 = (2\vec{m} - \vec{n}, 2\vec{m} - \vec{n}) = 4|\vec{m}|^2 - 4(\vec{m} \cdot \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 24 + 4 + 14 = 42.$$

$$\Rightarrow |2\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{42}. \quad |2\vec{m}| - |\vec{n}| = 2\sqrt{6} - \sqrt{14}.$$

Ответ:  $\sqrt{42}$ ;  $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$ .

2. Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $AC \cap BD = O$ ,  $A(1, 3, -1)$ ,  $B(-2, 1, 0)$ ,  $O(0; 1, 5; 0)$ .

1) Найти координаты  $C$  и  $D$ .

2) Найти длину стороны  $BC$ .

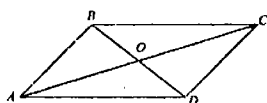
3) Разложить вектор  $\vec{AD}$  по векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

1)  $\vec{AO} \{-1; -1, 5; 1\}$ ,  $\vec{BO} \{2; 0, 5; 0\}$ .

Теперь отложим от точки  $O$  векторы  $\vec{OC} = \vec{AO}$  и  $\vec{OD} = \vec{BO} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow C(-1, 0, 1)$ ,  $D(2, 2, 0)$ .

2)  $\vec{BC} \{1, -1, 1\}$ ;  $|\vec{BC}| = \sqrt{3}$ . 3)  $\vec{AD} \{1, -1, 1\} = \vec{BC}$ ;  $\vec{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

Ответ: 1)  $C(-1, 0, 1)$ ;  $D(2, 2, 0)$ ; 2)  $BC = \sqrt{3}$ ; 3)  $\vec{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .



## С—3

1 Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $AB = AM = a$ .

1) Найти  $\vec{MA} \cdot \vec{AC}$ ; 2) Найти  $\vec{MA} \cdot \vec{DB}$ .

Решение. 1) Введем прямоугольную систему координат  $HXYZ$  как показано на рисунке ( $H$  — основание перпендикуляра).  $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $AM = a$ .

Из прямоугольного  $\triangle AHM$ :

$$HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,  $\vec{MA} \left\{ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2} \right\}$   $\vec{AC} \{a, -a, 0\} \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{AC} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2$ .

2)  $\vec{DB} \{-a, -a, 0\}$ ;  $(\vec{MA} \cdot \vec{DB}) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ .

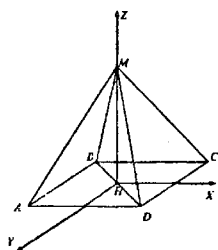
Ответ: 1)  $-a^2$ ; 2) 0.

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $A_1 B \cap AB_1 = K$ .

Какой угол между  $\vec{A_1 C}$  и  $\vec{KD}$ .

Решение. Поместим куб в прямоугольную систему координат  $AXYZ$ .

Пусть ребро куба равно  $a$ . Тогда  $\vec{A_1 C} \{a, a, -a\}$ ,  $\vec{KD} \left\{ a, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right\}$ .



Тогда  $(\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{KD}) = a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 > 0 \Rightarrow$  угол между  $\overrightarrow{A_1C}$  и  $\overrightarrow{KD}$  острый.

Ответ: острый.

С—4

1. Дано:  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 120^\circ$ .

Найти угол между  $\vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{a} + 2\vec{b}$ .

Решение:  $((\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})) = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4 - 2 - 1 = 1$ .

(Т.к.  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ ).

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 1 + 4 + 2 = 7$ .  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$

$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4 + 4 - 4 = 4$ ,

$\Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ .

Окончательно  $\cos \alpha = \frac{((\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}))}{|\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$

Ответ:  $\arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$ .

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $\angle A_1 A D = \angle A_1 A B = \alpha$ .

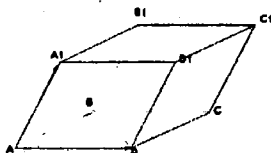
Доказать:  $BD \perp AA_1$ .

Доказательство:  $AB = AD$ .

Но  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AA_1}) = (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}) - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1}) =$

$= |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow BD \perp AA_1$ .



С—5

1. Дано:  $B(0,01; 0,02; -1)$ ,  $B_1$  и  $B$  симметричны относительно а) оси  $OZ$ . Найти координаты  $B_1$  и  $B_2$ .

б)  $B \rightarrow B_2$  при переносе на вектор  $\vec{p} \{0,09; 0,08; 1\}$ .

Решение: а)  $B_1(-0,01; -0,02; -1)$ . б)  $B_2(0,1; 0,1; 0)$ .

Ответ: а)  $(-0,01; -0,02; -1)$ ; б)  $(0,1; 0,1; 0)$ .

2. Доказать, что при движении угол переходит в равный ему угол.

Доказательство: Возьмем две точки  $A$  и  $C$  на лучах  $\angle B$ , пусть при движении  $B \rightarrow E$ ,  $A \rightarrow D$ ,  $C \rightarrow F$ .

Но расстояние сохранится  $\Rightarrow AB = DE$ ,  $AC = DF$ ,  $BC = EF \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$  по трем сторонам. Значит,  $\angle B = \angle E$ .

С—6

1. Дано:  $\alpha \perp a$ , при движении  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $a \rightarrow b$ .

Доказать:  $\beta \perp b$ .

Доказательство: Нужно взять тетраэдр  $DABC$ ;  $D \in \alpha$ ,  $A \in a$ ,  $A, B, C \in \alpha$ ,  $DA \perp (ABC)$ .  $DABC \rightarrow HEFG$  ( $HEFG = DABC$ )  $\Rightarrow$  т.к.  $DA \perp (ABC)$  то и  $HE \perp (EFG)$ ,  $(EFG) = \beta$ .

2. Дано:  $\alpha \perp a$ ,  $\beta \parallel \alpha$ .

Доказать:  $\beta \perp a$ . Доказательство: Возьмем движение: параллельный перенос на вектор, с началом в точке пересечения  $a$  и  $\alpha$  и концом в точке пересечения  $\alpha$  и  $\beta$  оно  $a \rightarrow a$ ,  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Из пункта (1)  $\Rightarrow \beta \perp a$ .

### С—7

1. Дано: цилиндр,  $ABCD$  — осевое сечение,  $EBCF$  — сечение,  $\angle ABE = 60^\circ$ ,  $S(EBCF) = Q$ .

Найти:  $S(ABCD)$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle AEB$ :

$$EB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \frac{S(ABCD)}{S(EBCF)} = \frac{AB}{EB} = 2 \Rightarrow S(ABCD) = 2Q.$$

Ответ:  $2Q$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма,  $AH$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $AH = 6$ ,  $AA_1 = 4$ , вокруг призмы описан цилиндр.

Найти:  $S_{\text{цилиндра}}$ .

Решение: Точка оси  $O_2$  лежит на  $AH \Rightarrow AO_2 = R = \frac{2}{3} \cdot AH = 4$ .

$$S_{\text{цилиндра}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot AA_1 = 32\pi + 32\pi = 64\pi.$$

Ответ:  $64\pi$ .

### С—8

1. Дано: конус,  $ABC$  — осевое сечение,  $BEF$  — сечение,  $\angle EBF = 90^\circ$ ,  $AC \perp EC$ ,  $EF = m$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ .

Найти:  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

Решение: Из  $\triangle EBF$  образующая

$$EB = \frac{m\sqrt{2}}{2} = AB = BC \Rightarrow \text{Из } \triangle ABO:$$

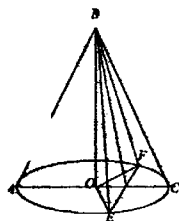
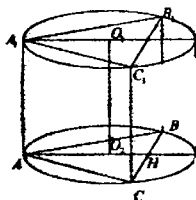
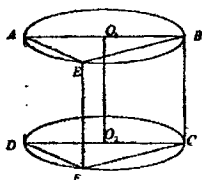
$$BO = \frac{AB}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{4}, AO = \frac{m\sqrt{6}}{4}.$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot AB \cdot AO = \pi \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{m\sqrt{6}}{4} = \frac{\pi m^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{\pi m^2 \sqrt{3}}{4}$ .

2. Дано: конус усеченный,  $S_{\text{бок.}} = 208\pi$ , образующая 13, высота  $h = 5$ .

Найти:  $r_1$  и  $r_2$ .



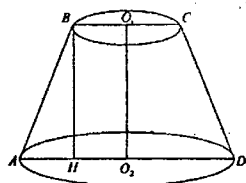
**Решение:** Рассмотрим осевое сечение трапеции  $ABCD$ .  $BH$  — высота.

$$\text{Из } \triangle ABH: AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi AB(r_1 + r_2) = \pi \cdot 13(2r_1 + AH) = 208\pi.$$

$$2r_1 + 12 = 15, r_1 = 2; r_1 + r_2 = 16, r_2 = 14.$$

**Ответ:** 2 и 14.



### С—9

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = BC$ ,

$AC = 4\sqrt{3}$ ,  $AC$  — ось вращения.

Найти:  $S_{\text{тела вр.}}$

**Решение:** Опустим высоту  $BH$ .

В  $\triangle ABH$   $\angle H = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,

$$AH = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4; BH = \frac{AB}{2} = 2;$$

$$\triangle ABH = \triangle CBH \Rightarrow S_{\text{тела вр.}} = \pi[AB \cdot BH + BC \cdot BH] = \pi \cdot 2AB \cdot BH = 16\pi.$$

**Ответ:**  $16\pi$ .

2. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида, вокруг  $DABC$  описан конус,  $AB = a$ ,  $DH$  — высота,  $\angle DAH = 30^\circ$ .

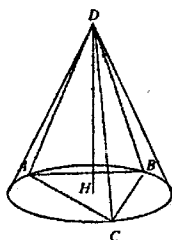
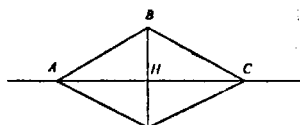
Найти:  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

$$\text{Решение: В } \triangle ABC \text{ } AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AHD \text{ } AD = \frac{AH}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{3\sqrt{3}} = \frac{2a}{3};$$

$$AH = R_{\text{конуса}} \Rightarrow S_{\text{бок. конуса}} = \pi \cdot AD \cdot AH = \pi \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2a^2\pi\sqrt{3}}{9}.$$



### С—10

1. Дано: сфера,  $O(0, 0, 4)$  — центр,  $A(2\sqrt{2}, 0, 5) \in$  сфере.

1) Написать уравнение сферы.

2) Выяснить, принадлежат ли сфере точки  $B(3, 1, 5)$ ,  $C(0, \sqrt{5}, 6)$ .

**Решение:** 1) Уравнение сферы  $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = R^2$ .

$$A \in \text{сфере} \Rightarrow 8 + (5 - 4)^2 = R^2; 8 + 1 = R^2 \Rightarrow R = 3.$$

$$\text{Уравнение сферы: } x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9.$$

2) Подставим координаты точек в уравнение сферы:

$$B: 3^2 + 1^2 + (5 - 4)^2 = 10 + 1 = 11 \neq 9 \Rightarrow B \notin \text{сфере}.$$

$$C: 5 + (6 - 4)^2 = 5 + 4 = 9 = 9 \Rightarrow C \in \text{сфере}.$$

$$\text{Ответ: 1) } x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$$

2) нет; да.

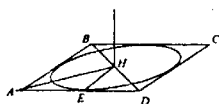
2. Дано:  $ABCD$  — квадрат,  $AB, BC, CD, AD$  касаются сферы,  $AC = 10\sqrt{2}$ ,  $O$  — центр сферы,  $AC \cap BD = H$ ,  $OH = 12$ .

Найти:  $R_{\text{сферы}}$ .

Решение:  $AH = \frac{1}{2} AC = 5\sqrt{2}$ .

Из прямоугольного равнобедренного  $\triangle AEH$ .  $EH = r = 5$ .

Из прямоугольного  $\triangle EHO$ ,  $EO = R = \sqrt{EH^2 + HO^2} = 13$ . Ответ: 13.



### С—11

1. Дано: шар( $O, R$ ), сечение( $O_1, r$ ),  $S((O_1, r)) = 25\pi$ ,  $OO_1 = 12$ .

Найти:  $S_{\text{шара}}$ .

Решение:  $R_{\text{шара}} = \sqrt{OO_1^2 + r^2}$ .

Но  $S((O_1, r)) = \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r^2 = 25$ .

$R_{\text{шара}} = \sqrt{144 + 25} = 13 \Rightarrow S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 169 = 676\pi$ .

Ответ:  $676\pi$ .

2. Дано: шар( $O, R$ ), плоскость  $\alpha \cap \text{шар} = \text{окружность}(O_1, r)$ ,  $AC$  — диаметр шара,  $A \in \text{окружности}$ ,  $AB$  — диаметр окружности,

$\angle OAB = 45^\circ$ ,  $AC = 4\sqrt{2}$ .

Найти:  $l_{\text{линии пересечения}}$ .

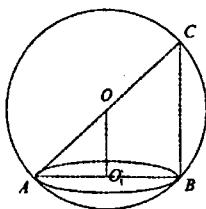
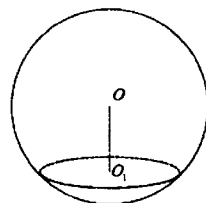
Решение:  $AO = R = AC \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$ ;

$\angle AOB = 2\angle ACB$  (т.к. центральный и вписанный углы опираются на одну хорду  $AB$ ).

Из  $\triangle ACB$   $\angle ABC = 90^\circ$ , т.к. опирается на диаметр  $\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$ .

Из  $\triangle AOB$   $AB = AO\sqrt{2} = 4 \Rightarrow AO_1 = 2 = r \Rightarrow l_{\text{линии пересечения}} = 2\pi r = 2\pi \cdot AO_1 = 4\pi$ .

Ответ:  $4\pi$ .



### С—12

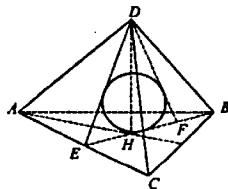
1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AC = 4$ ,  $BE \perp AC$ ,  $\angle DEB = 60^\circ$ . В  $DABC$  вписана сфера.

Найти:  $r_{\text{сферы}}$ .

Решение: Опустим высоту  $DH$ .  $\triangle DEH$  построим до равностороннего  $\triangle DEF$ .

Из  $\triangle ABC$ :  $BE = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ .  $H$  — точка пересече-

ния медиан  $\triangle ABC \Rightarrow HB = EF = \frac{2}{3} EB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .



В  $\triangle DEF$  вписан большой круг сферы.

$$S(EDF) = EF^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} P(EDF) \cdot r.$$

$$P(EDF) = 3EF = 4\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{8\sqrt{3}}{3 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма,  $AB=2$ ,  $AA_1 = 2\sqrt{2}$ . Вокруг призмы описана сфера.

Найти:  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение: Центр сферы — т.  $O$  — точка пересечения  $BD_1$  и  $B_1 D$ .

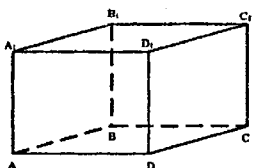
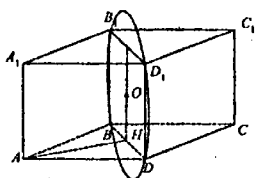
Опустим перпендикуляр  $OH$  на  $ABCD$  ( $H = AC \cap BD$ ).

$$OH = \frac{1}{2} A_1 A = \sqrt{2}; \quad AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}. \quad OA — \text{радиус сферы.}$$

$$\text{Из } \triangle AHO \quad AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot AO^2 = 16\pi.$$

Ответ:  $16\pi$ .



### С—13

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед,  $AB:AD:AC_1=1:2:3$ ,  $AA_1 = 4$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение: Пусть  $AB = a$ , тогда  $AD = 2a$ ,  $AC_1 = 3a$ .

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 16} = 3a.$$

$$a^2 + 4a^2 + 16 = 9a^2; \quad 4a^2 = 16, \quad a = 2.$$

$$AB = 2, \quad AD = 4 \Rightarrow V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 32.

2. Дано:

$ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая призма,  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,

$\angle B_1 CB = 45^\circ$ ,  $CB_1 = 12$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение:

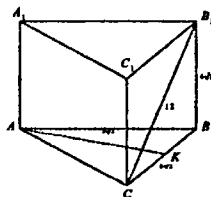
$$\text{Из } \triangle B_1 BC \quad BB_1 = CB = \frac{CB_1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Проведем  $AK \perp CB$ .

$$\text{В } \triangle ABC: AK = CK = KB = \frac{1}{2} CB = 3\sqrt{2} \Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} AK \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 18.$$

$$V_{\text{призмы}} = BB_1 \cdot S(ABC) = 6\sqrt{2} \cdot 18 = 108\sqrt{2}.$$

Ответ:  $108\sqrt{2}$ .



# С—14

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $AB=BC=10$ ,  $\angle ABC=30^\circ$ ,  $EF \parallel AA_1$ ,  $(A_1EFA) \perp (BB_1C_1C)$ ,  $\angle A_1FA=45^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } S(ABC) &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 25 = \frac{1}{2} BC \cdot AF = 5AF \Rightarrow AF = 5. \end{aligned}$$

$$\text{Из } \triangle A_1AF: A_1A = AF = 5 \Rightarrow V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S(ABC) = 5 \cdot 25 = 125.$$

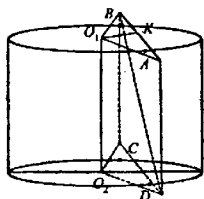
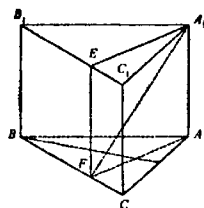
Ответ: 125.

2. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $ABCD$  — сечение,  $(ABCD) \parallel O_1O_2$ ,  $O_1K \perp AB$ ,  $O_1K=15$ ,  $BD=20$ ,  $O_1A=17$ .

Найти:  $V_{\text{цилиндра}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \text{Из } \triangle O_1AK \text{ } AK &= \sqrt{O_1A^2 - O_1K^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8. \\ AB &= 2AK = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle BAD \text{ } AD &= \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12 \\ \Rightarrow V_{\text{цил.}} &= \pi \cdot O_1A^2 \cdot AD = \pi \cdot 289 \cdot 12 = 3468\pi. \end{aligned}$$



Ответ: 3468π.

# С—15

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонный параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $BD=6$ ,  $A_1B \perp (ABCD)$ ,  $A_1B=5\sqrt{3}$ ,  $\angle A_1AB=60^\circ$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle A_1BA$ :

$$AB = A_1B \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 5.$$

$$\text{Из } \triangle AOB \text{ } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \left( BO = \frac{BD}{2} = 3 \right);$$

$$AC = 2AO = 8 \Rightarrow S(ABCD) = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

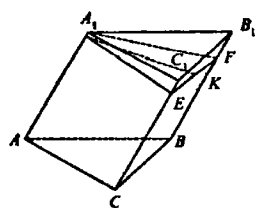
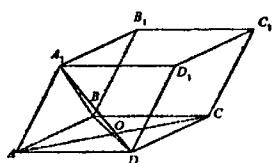
$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = A_1B \cdot S(ABCD) = 5\sqrt{3} \cdot 24 = 120\sqrt{3} \quad (A_1B \text{ — высота параллелепипеда}).$$

Ответ:  $120\sqrt{3}$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — призма,  $E \in CC_1$ ,  $F \in BB_1$ ,  $AE \perp CC_1$ ,  $AF \perp BB_1$ ,  $K \in EF$ ,  $A_1K \perp (BB_1CC_1)$ ,  $A_1E = A_1F = 13$ ,  $A_1K = 5$ ,  $AA_1 = 10$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: Докажем, что  $K \in EF$ . По теореме о трех перпендикулярах  $KF \perp BB_1$  и  $CC_1$  и  $KE \perp CC_1$  и  $BB_1 \Rightarrow EK$  и  $KF$  — одна прямая  $\Rightarrow$



$K \in EF$ . Причем  $\triangle EA_1F$  — равнобедренный.

Из прямоугольного  $\triangle EKA_1$ :  $EK = \sqrt{A_1E^2 - A_1K^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow EF = 2EK = 24. S(A_1EF) = \frac{1}{2} EF \cdot A_1K = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60.$$

$$V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot S(A_1EF) = 10 \cdot 60 = 600.$$

Ответ: 600.

### С—16

1. Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $AC = d$ ,  $MH$  — высота,  $MK \perp AD$ ,  $\angle MKN = \alpha$ .

Найти:  $V(MABCD)$ .

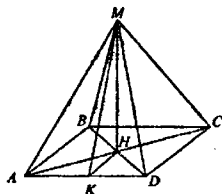
$$\text{Решение: } AH = \frac{1}{2} AC = \frac{d}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AKH \text{ } AK = KH = \frac{d\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Из } \triangle KHM : HM = KH \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} \alpha. S(ABCD) = \frac{1}{2} d^2.$$

$$V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{2} d^2 = \frac{d^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2}}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{d^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{2}}{24}.$$



2. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $AB = BC = a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $BD \perp (ABC)$ ,  $DE \perp AC$ ,  $\angle BED = \beta$ .

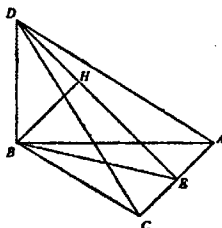
Найти:  $V(DABC)$ .

$$\text{Решение: } S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle BEC : BE = BC \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DBE : DB = BE \cdot \operatorname{tg} \beta = a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} DB \cdot S(ABC) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{a^2 \sin \alpha}{2} = \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{6}. \quad \text{Ответ: } \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{6}$$

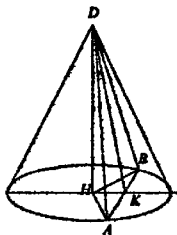


### С—17

1. Дано: Конус,  $D$  — вершина,  $DH$  — высота,  $DAB$  — сечение,  $AB = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle AHB = 120^\circ$ ,  $K \in AB$ ,  $AK = KB$ ,  $\angle HKD = 45^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

$$\text{Решение: } AK = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{3}.$$





$$\text{Из } \triangle AKN: AH = \frac{AK}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6 = R. HK = \frac{1}{2} AH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle HKD \quad HD = HK = 3 \Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot DH \cdot AH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot 36 = 36\pi.$$

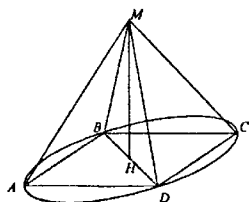
Ответ:  $36\pi$ .

2. Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида. Вокруг  $MABCD$  описан конус.

Найти:  $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{пирамиды}}}$ .

Решение: Пусть  $AB = a \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{пирамиды}}} = \frac{S_{\text{круга}}}{S(ABCD)} = \frac{\pi \frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{\pi}{2}.$$



Ответ:  $\pi/2$ .

### С—18

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная усеченная пирамида,  $A_1B_1 = 4\sqrt{3}$ ,  $AB = 8\sqrt{3}$ ,  $E \in C_1B_1$ ,  $F \in CB$ ,  $S(AA_1EF) = 54$ ,  $C_1E = EB_1$ ,  $CF = FB$ .

Найти:  $V_{\text{пирамиды}}$ .

Решение: Пусть  $O_1$ ,  $O_2$  — центры  $\triangle A_1B_1C_1$  и  $\triangle ABC$ ;  $O_1O_2$  — высота.

$$\text{В } \triangle A_1B_1C_1 \quad A_1E = A_1B_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6. \text{ В } \triangle ABC \quad AF = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

$$S(AA_1EF) = \frac{1}{2} (A_1E + AF) \cdot O_1O_2 = 9 \cdot O_1O_2 = 54 \Rightarrow O_1O_2 = 6.$$

$$S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 64 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}.$$

$$S(A_1B_1C_1) = A_1B_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \Rightarrow V(ABCA_1B_1C_1) =$$

$$= \frac{1}{3} O_2O_1 \cdot (S(ABC) + S(A_1B_1C_1) + \sqrt{S(A_1B_1C_1) \cdot S(ABC)}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (48\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + \sqrt{3 \cdot 48 \cdot 12}) = 2 \cdot (60 + 24)\sqrt{3} = 168\sqrt{3}.$$

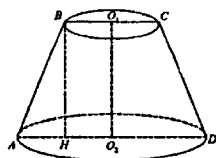
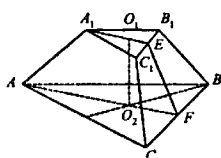
Ответ:  $168\sqrt{3}$ .

2. Дано: Усеченный конус,  $ABCD$  — осевое сечение,  $O_1O_2$  — ось,  $O_1O_2 = 5$ ,  $BD = 13$ ,  $BO_1:AO_2 = 1:2$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение:  $S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD) =$

$$\frac{1}{2} OO_1 \cdot AD + \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot BC = OO_1(BO_1 + AO_2) =$$



$= OO_1 \cdot 3BO_1$ . Опустим высоту  $BH$ . Из прямоугольного  $\triangle BHD$ :

$$HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \quad (BH = O_1O_2).$$

$$\text{Но } HD = BC + AH = BC + \frac{AD - BC}{2} = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = 12 = \frac{3BC}{2} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8 \Rightarrow AD = 2BC = 16; BO_1 = \frac{1}{2} BC = 4, AO_2 = \frac{AD}{2} = 8$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} O_2O_1 \cdot (BO_1^2 + AO_2^2 + BO_1 \cdot AO_2) = \frac{\pi}{3} \cdot 5(16 + 64 + 32) =$$

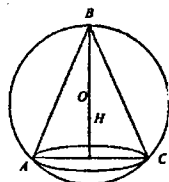
$$= \frac{\pi}{3} \cdot 5 \cdot 112 = \frac{560\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{560\pi}{3}$ .

## С—19

1. Дано: шар,  $V_{\text{шара}} = \frac{32\pi}{3}$ .

Найти:



$S_{\text{полушара}}$

Решение:  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$ .

$$S_{\text{полушара}} = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 12\pi.$$

Ответ:  $8\pi$ .

2. Дано: Конус,  $\triangle ABC$  — осевое сечение,  $AB = BC = AC$ . Вокруг конуса описан шар.

Найти:  $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}}$ .

Решение: Опустим высоту  $BH$ . Пусть  $AB = a \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Если  $O$  — центр  $\triangle ABC$ , то  $BO = \frac{2}{3} BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = R$ .  $AH = \frac{a}{2}$ .

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot BH \cdot AH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24},$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{4\pi}{3} \cdot BO^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27} \Rightarrow \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3} \cdot 27}{24 \cdot 4\pi a^3 \sqrt{3}} = \frac{9}{32}.$$

Ответ:  $\frac{9}{32}$ .

## ДС

1. Дано:  $A(2, m, -1)$ ,  $B(1, 2, m)$ , плоскость  $\alpha: 2x - 3y + z - 1 = 0$ .

Найти:  $m$  такое, что  $\alpha \parallel AB$ .

Решение:  $\overrightarrow{AB} \{-1, 2-m, m+1\}$ ,  $\vec{n} \{2, -3, 1\} \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ , т.е.

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}) = -2 - 6 + 3m + m + 1 = 0; 4m = 7, m = 7/4.$$

Ответ: при  $m = 7/4$ .

2. Дано: плоскость  $\beta: 2x - 2y + z - 3 = 0$ ;  $A(-1, 2, 1)$ ,  $B(2, -1, -2)$ .

Найти: угол  $\alpha$  между  $AB$  и  $\beta$ .

Решение:

Искомый угол  $\alpha$  равен  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между  $AB$  и  $\vec{n}(2, -2, 1) \perp \beta$ .

$$\overline{AB}(3, -3, -3); |\overline{AB}| = 3\sqrt{3}; |\vec{n}| = 3; (\overline{AB} \cdot \vec{n}) = 6 + 6 - 3 = 9 = |\overline{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma \\ \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}, \gamma = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### Вариант 3

#### С—1

1. Дано: тетраэдр  $DABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$   
 $AB = 10$ ,  $DB \perp ABC$ ,  $\angle((ADC), (ABC)) = 60^\circ$ .

1) Найти: вершины — ?

2) Найти:  $\overline{CM}$  — ? ( $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ADB$ )

Решение: 1)  $C(0, 0, 0)$ .

$$BC = AB \cdot \sin \angle BAC = 5 \Rightarrow B = (-5, 0, 0).$$

$$AC = AB \cdot \cos \angle BAC = 5\sqrt{3} \Rightarrow A = (0, -5\sqrt{3}, 0).$$

$\angle DCB = 60^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах)

$$\Rightarrow DB = CB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow D = (-5, 0, 5\sqrt{3}).$$

2) Найдем середину стороны  $AB$  (т.  $M_1$ ).

$$M_1 \left( -\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{DM_1} \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}; -5\sqrt{3} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{3} \overrightarrow{DM_1} \left\{ \frac{5}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; -\frac{10\sqrt{3}}{3} \right\} \Rightarrow M \left( -\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{CM} \left\{ -\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3} \right\} = -\frac{10}{3} \vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{k}.$$

Ответ: 1)  $C(0, 0, 0)$ ;  $B(-5, 0, 0)$ ;  $A(0, -5\sqrt{3}, 0)$ ;  $D(-5, 0, 5\sqrt{3})$ ;

$$2) \overline{CM} \left\{ -\frac{10}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3} \right\} = -\frac{10}{3} \vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \vec{k}.$$

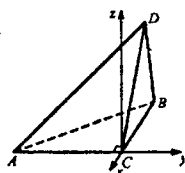
2. Дано:  $\overrightarrow{OA} \{1; -1; 2\}$ ,  $\overrightarrow{OB} \{3; -2; 4\}$ ,  $\overrightarrow{OC} \{5; -3; 6\}$ .

Найти: лежат ли точки  $A, B, C$  на одной прямой.

$$\text{Решение: } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-2; 1; -2) = \overrightarrow{BA}; \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (-2; 1; -2) = \overrightarrow{CB}$$

$\overrightarrow{BA}$  равен  $\overrightarrow{CB} \Rightarrow B, A$  и  $C$  лежат на одной прямой.

Ответ: да.



### С—2

1. Дано:  $\triangle ABC$  — равнобедренный ( $AC = CB$ ),  $A(1, -2, 1)$ ,  $B(3, 2, -3)$ ,  $C$   $\in$  оси ординат.

Найти:  $S_{\triangle ABC}$ .

Решение:

$$\text{Т.к. } C \in Oy \Rightarrow C(0, y, 0) \Rightarrow \sqrt{1 + (y+2)^2 + 1} = \sqrt{9 + (y-2)^2 + 9}, y=2.$$

$C = (0, 2, 0)$ .  $H \in AB$ ,  $CH \perp AB \Rightarrow CH = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$  ( $H$  совпадает с серединой  $AB$ , т.к.  $\triangle ABC$  — равнобедренный).

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

2. Дано:  $\vec{a}$  сонаправлен  $\vec{b} = \{-2, 2, 1\}$ .

Найти:  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 12$ .

Решение:  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ , где  $k$  — действительное число,  $\in R$ .

$$|k| \sqrt{4 + 4 + 1} = 12 \Rightarrow |k| = 4, k = \pm 4, \text{ но т.к. } \vec{a} \text{ сонаправлен } \vec{b}, \text{ то } k = 4 \Rightarrow \vec{a} = \{-8, 8, 4\}.$$

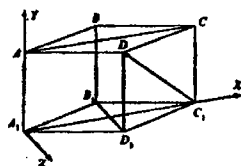
Ответ:  $\vec{a} = \{-8, 8, 4\}$ .

### С—3

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямой параллелепипед, все ребра равны  $a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

Найти: 1)  $\vec{C_1 D} \cdot \vec{AC}$ . 2)  $\vec{B_1 D} \cdot \vec{AC}$ .

$$\text{Решение: 1) } \vec{C_1 D} \left\{ -\frac{a\sqrt{3}}{2}; a; \frac{a}{2} \right\}; \quad \vec{AC} \{ a\sqrt{3}; 0; 0 \}.$$



$$\vec{C_1 D} \cdot \vec{AC} = -\frac{3}{2} a^2. \quad 2) \vec{B_1 D} \{ 0, a, a \}; \quad \vec{AC} \{ a\sqrt{3}; 0; 0 \}. \quad \vec{B_1 D} \cdot \vec{AC} = 0.$$

$$\text{Ответ: 1) } -\frac{3}{2} a^2; \quad 2) 0.$$

2. Дано:

$A(1, 1, 5)$ ,  $B(4, 7, 5)$ ,  $C(8, 5, 5)$ ,  $D(5, -1, 5)$  — вершины прямоугольника.

Найти: больший угол между диагоналями.

$$\text{Решение: } \vec{AC} \{ 7, 4, 0 \}; \quad \vec{BD} \{ 1, -8, 0 \}.$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -25 = |\sqrt{65}| \cdot |\sqrt{65}| \cdot \cos \alpha = 65 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{5}{13} \right) = 180^\circ - \arccos \left( \frac{5}{13} \right).$$

$$\text{Ответ: } 180^\circ - \arccos \left( \frac{5}{13} \right).$$

### С—4

1. Дано:  $BACD$  — тетраэдр,  $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = 90^\circ$ ,  $BC=3$ ,  $AC=4$ .

Найти:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$  — ?

Решение:  $\angle DCA = 90^\circ$ , т.к. имеет место теорема о трех перпендикулярах ( $DC \perp AC$ ,  $BD \perp$  плоскости  $DCA$ )  $\Rightarrow BA = 5$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \\ = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \\ = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AB^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \\ = 25 + 0 = 25 \text{ (т.к. } CA \perp CB). \end{aligned}$$

Ответ: 25.

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая треугольная призма,  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $AC = CB = a$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ ,  $AA_1 = a$ ,  $E$  — середина  $CA$ ,  $F$  — середина  $BB_1$ .

Найти: 1)  $EF$ ; 2) угол между  $EF$  и  $AA_1$ .

Решение: 1) Введем систему координат:  $A$  — начало координат,  $AB$  — первый базисный вектор,  $AA_1$  — второй, третий перпендикулярен  $AA_1B$ .

$$\text{Тогда } E\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; 0; \frac{a}{4}\right), F\left(a\sqrt{3}; \frac{a}{2}; 0\right);$$

$$(AB = 2AC \cdot \cos \angle CAB = a\sqrt{3}).$$

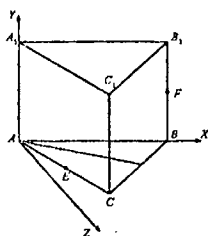
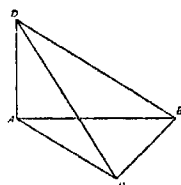
$$\text{Тогда } EF = \sqrt{\left(a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{4}\right)^2} = a\sqrt{2}.$$

$$2) \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1} = |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha \text{ — искомый угол} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \left\{\frac{3\sqrt{3}a}{4}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{4}\right\}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot a}; \overrightarrow{AA_1} = (0, a, 0).$$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ответ: 1) } a\sqrt{2}; 2) \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



## С—5

а) Доказать, что  $A(1, 2, 3)$  и  $B(-1, -2, -3)$  симметричны относительно  $O(0, 0, 0)$ .

б) Доказать, что  $B(3, -4, 5)$  и  $C(3, 4, 5)$  симметричны относительно  $Oxz$ .

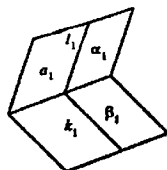
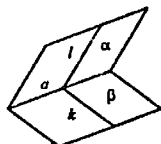
Доказательство:

а) середина отрезка  $AB$  имеет координаты  $(0, 0, 0)$  т.е.  $O \Rightarrow A$  симметрична  $B$  относительно т.  $O(0, 0, 0)$ .

б) середина отрезка  $BC$  имеет координаты  $(3, 0, 5)$  т.к. вторая координата 0, то эта точка  $\in Oxz$ .

Докажем, что  $BC \perp Oxz$ .

$\overrightarrow{BC} = (0, 8, 0)$ , в то же время любой вектор, принадле-



жащий  $Oxz$ , имеет координаты  $\vec{l} \{x, 0, z\} = l$ , где  $x, z \in R \Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{BC} \perp \vec{l}$ , где  $l$  — любой вектор, принадлежащий  $Oxz \Rightarrow \vec{BC} \perp Oxz \Rightarrow B$  симметрична  $C$  относительно  $Oxz$ .

2. Доказать, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

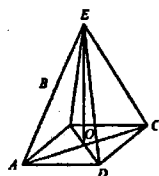
**Доказательство:** Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  с границей  $a$  и линейным углом  $lk$ , где  $l$  и  $k$  — лучи, принадлежащие  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно и перпендикулярные  $a$ .

Пусть при движении  $a \rightarrow a_1$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_1$ ,  $\beta \rightarrow \beta_1$ ,  $k \rightarrow k_1$ ,  $l \rightarrow l_1$ . Очевидно, что  $a_1$  — граница полуплоскостей  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , в которых лежат лучи  $l_1$  и  $k_1$  соответственно. А т.к. при движении углы сохраняются, то  $l_1 \perp a_1$  и  $k_1 \perp a_1$ , и  $\angle lk = \angle l_1 k_1 \Rightarrow$  двугранный угол при движении отображается на равный ему. Ч.т.д.

### С—6

1. Пусть дана правильная четырехугольная пирамида  $EABCD$  с высотой  $EO$ . При симметрии относительно  $EO$   $E \rightarrow E$ ,  $A \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow A$ ,  $B \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow B \Rightarrow ABCD \rightarrow ABCD \Rightarrow EO$  — ось симметрии пирамиды.

2. Пусть  $H$  — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью  $EOH$ . Очевидно, оно треугольное. По доказанному в п. 1)  $H \rightarrow H_1 \in$  пирамиде. Но очевидно, что треугольник, полученный в сечении, отображается на себя при симметрии относительно  $EO$ , проходящей через одну из его вершин  $\Rightarrow$  треугольник — равнобедренный. Ч.т.д.



### С—7

1. Дано: цилиндр,  $\varphi$  — угол между диагональю и образующей развертки,  $\beta$  — угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания

Найти:  $\beta = ?$

**Решение:**  $R$  — радиус основания, тогда рассмотрим сечение и развертку: высота одинакова и равна  $h$ , основание развертки равно  $2\pi R$ , а основание сечения равно  $2R$ . Тогда

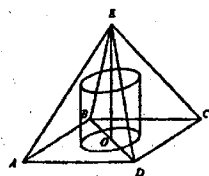
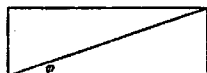
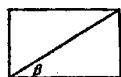
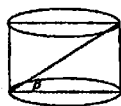
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2\pi R}; \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2R} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \pi \operatorname{tg} \varphi. \beta = \operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi).$$

Ответ:  $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi)$ .

2. Дано:  $EABCD$  — правильная четырехугольная пирамида,  $AB = 10$ , боковые грани наклонены к основанию под углом  $\alpha = 60^\circ$ . В  $EABCD$  вписан цилиндр  $r = 2$ .

Найти:  $S_{\text{бок}}$ .

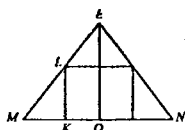
**Решение:** Рассмотрим сечение, проходящее через высоту  $EO$  и перпендикулярное  $AB$ .



$\triangle EMN$  — равнобедренный,  $\angle EMN = \alpha$ . Найдем высоту цилиндра.

$$KL = MK \cdot \operatorname{tg} \alpha; MK = \frac{MN}{2} - r = 3 \Rightarrow KL = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot KL = 12\sqrt{3}\pi.$$



Ответ:  $12\sqrt{3}\pi$ .

### С—8

1. Дано: конус  $S_{\text{бок}} = 12\pi$ ,  $\alpha = 120^\circ$  — центральный угол в развертке.

Найти:  $S_{\text{сеч.}}$ .

Решение: Площадь боковой поверхности конуса  $S = \pi r L = 12\pi$ .

Площадь развертки

$$S = \frac{\alpha}{2} \cdot L^2 = \pi r L = 12\pi(1) \Rightarrow \frac{2\pi}{3 \cdot 2} L^2 = 12\pi \Rightarrow L^2 = 36$$

Площадь осевого сечения  $S = L^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi$ .  $\varphi$  — угол при вершине в осевом сечении.

$$\text{Из (1)} \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{L} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{о.с.}} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 8\sqrt{2}.$$

Ответ:  $8\sqrt{2}$ .

2. Дано:  $L$  — образующая,  $\beta$  — плоскость осевого сечения,  $\alpha$  — угол, который составляет  $L$  и плоскость основания,  $d$  — диагональ осевого сечения,  $d \perp L$ .

Найти:  $S_{\text{бок.}}$ .

Решение:  $d = L \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Рассмотрим осевое сечение  $\beta$ . Обозначим длину оси как  $h$ .

$$S_{\text{бок.}} = S_{\text{пов. вр.}}$$

Площадь боковой поверхности конуса есть площадь боковой поверхности фигуры, образованной вращением сечения  $\beta$  относительно  $h$ .

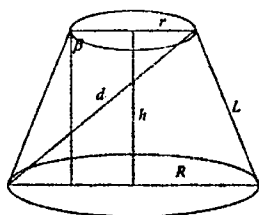
$$S_{\text{бок.}} = \pi L(R + r).$$

$$R = \frac{L}{2 \cos \alpha}; r = R - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha = L \cdot \frac{L}{2 \cos \alpha} - L \cos \alpha.$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi L \left( \frac{L}{\cos \alpha} - L \cdot \cos \alpha \right) = \pi L^2 \cos \alpha \left( -1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = \pi L^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha =$$

$$= \pi L^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ:  $\pi L^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ .



### С—9

1. Дано:  $ABCD$  — прямоугольная трапеция,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $BC = AB = a$ ,  $AD = 2a$ .

Найти:  $S_{\text{пов.}}$ .

Решение:  $S_{\text{пов.}} = S_1 + S_2$ .

$S_1$  — от вращения  $ABCM$ .  $S_2$  — от вращения  $CMD$ .

$$S_1 = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3 \cdot \pi a^2; S_2 = \pi a \cdot CD;$$

$$CD = a\sqrt{2} \Rightarrow S_2 = \pi a^2 \sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 3\pi a^2 + \pi a^2 \sqrt{2} = \pi a^2 (3 + \sqrt{2}).$$

Ответ:  $\pi a^2 (3 + \sqrt{2})$ .

2. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AC = AB = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle DAC = \beta$ .

Найти:  $S_{\text{конуса}}$ .

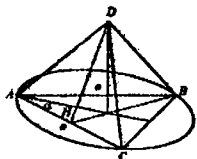
Решение: Найдем радиус  $r$  основания. Основание описано вокруг  $\triangle ABC$ .

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}; \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2r \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь будем искать образующую конуса. Т.к. вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды, ребра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  будут образующими, а значит, будут равны, т.е.  $DA = DB = DC \Rightarrow$  боковые грани есть равнобедренные треугольники  $\Rightarrow \angle DCA = \beta$ . Опустим высоту  $DH$  на сторону  $AC$ . Она также и медиана, и биссектриса (т.к.  $\triangle ADC$  — равнобедренный)  $\Rightarrow$

$$DA = \frac{a}{2 \cos \beta}, \text{ а т.к. } S_{\text{конуса}} = \pi r \cdot DA \Rightarrow S_{\text{конуса}} = \frac{\pi a^2}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta}.$$

Ответ:  $\frac{\pi a^2}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta}$ .



## С—10

1. Дано:

$r = 2$ ,  $O_1 \in Oxz$  ( $O_1$  — центр сферы),  $O \in$  сфере,  $A(1, 1, 0) \in$  сфере. Составить уравнение сферы.

Решение:

Уравнение сферы имеет вид:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ , где  $(a, b, c)$  — координаты центра,  $r$  — радиус. Но т.к.  $O_1 \in Oxz$ , то  $b = 0 \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 = 4$ .

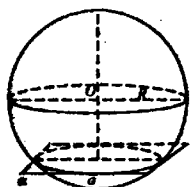
Т.к.  $O(0, 0, 0)$  и  $A(1, 1, 0) \in$  сфере, имеем:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + 1 + c^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + c^2 = 3 \end{cases}$$

$4 - a^2 = 3 - a^2 - 1 + 2a$ ,  $2a = 2$ ,  $a = 1 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$  имеем 2 варианта уравнения сферы:

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4, (x - 1)^2 + y^2 + (z + \sqrt{3})^2 = 4.$$

Ответ:  $(x - 1)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$  или  $(x - 1)^2 + y^2 + (z + \sqrt{3})^2 = 4$ .







$O \perp \alpha \cap \beta$  (прямая  $l$ ).  $S = 32\pi = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

$CO$  делит  $\varphi$  пополам  $\Rightarrow CO = \frac{R}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 4\sqrt{2}$

Ответ:  $4\sqrt{2}$

### С—12

1. Дано:  $ABCD$  — пирамида,  $AB = 4$ ,  $\triangle ABC$  — основание,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $DA = DB = DC = 5$ .

Найти:  $p$  — расстояние от центра описанного около пирамиды шара до плоскости основания.

Решение: Рассмотрим сечение по плоскости основания.

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2r \Rightarrow r = 4.$$

Пусть  $OH$  — перпендикуляр из центра шара на плоскость основания. Заметим, что т.  $H$  совпадает с

т.  $O_1$ .  $DO_1$  будет высотой пирамиды.  $R_{\text{ш}} = \frac{L^2}{2h}$ , где

$L$  — длина бокового ребра, а  $h$  — высота пирамиды.

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = 3 \Rightarrow R_{\text{ш}} = \frac{25}{6}.$$

Но  $h = 3 \Rightarrow p = R_{\text{ш}} - h = 7/6$ .

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямой параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $\angle DAB = \alpha$ .

Найти: угол между большей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

Решение: Пусть сторона ромба равна  $a$ , высота равна

$$h, AC = 2a \cos \frac{\alpha}{2}, BD = 2a \sin \frac{\alpha}{2}. \text{ Рассмотрим сечение,}$$

проходящее через  $AC$  перпендикулярно  $ABCD$ .

$A_1 C$  — большая диагональ. Тогда искомый угол —

$$\beta. \operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{AC}, A_1 A = 2r.$$

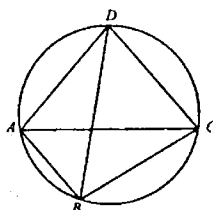
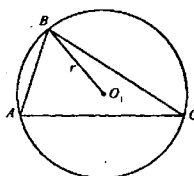
Найдем  $r$ . Возьмем сечение, параллельное  $ABCD$

и проходящее через т.  $O$  (центр шара). В сечении получится ромб, равный  $ABCD$ . Обозначим его как  $A_2 B_2 C_2 D_2$ .

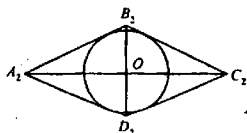
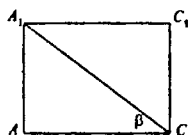
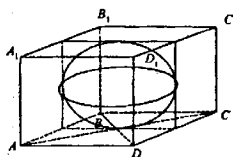
Рассмотрим  $\triangle A_2 O D_2$ .  $\angle A_2 O D_2 = 90^\circ$ .

$$S_{A_2 O D_2} = \frac{1}{2} r \cdot A_2 D_2 = \frac{1}{2} O A_2 \cdot D_2 O.$$

$$\text{Тогда } r = \frac{O A_2 \cdot D_2 O}{A_2 D_2} = \frac{a^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a} = a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$



Ответ:  $7/6$ .



$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \beta = \frac{AA_1}{AC} = \frac{2r}{AC} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2a \cos \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad \beta = \operatorname{arctg} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

### С—13

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $ABCD$  — квадрат,  $A_1 C = d$ ,  $\angle A_1 C B_1 = 30^\circ$ .

Найти:  $V$ .

Решение:  $\triangle A_1 C B_1$  — прямоугольный. Тогда  $A_1 B_1$

$$= A_1 C \cdot \sin 30^\circ = \frac{d}{2}. \quad C B_1 = A_1 C \cdot \cos 30^\circ = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Но } C C_1 = \sqrt{C B_1^2 - B_1 C_1^2} = \sqrt{\frac{3d^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Но } V = A_1 B_1^2 \cdot C C_1 = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = d^3 \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } d^3 \frac{\sqrt{2}}{8}$$

2. Дано:  $ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая призма,  $\triangle ABC$  — прямоугольный (основание),  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle A_1 B_1 C = 30^\circ$ .

Найти:  $V$ .

Решение:  $B_1 C \perp AC \Rightarrow B_1 C = AC \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \Rightarrow B_1 B$

$$= 6 \Rightarrow V = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot B_1 B = 24\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } 24\sqrt{3}.$$

### С—14

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямой параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ ,  $\angle \beta = 60^\circ = \angle C_1 H C$ ,  $C_1 H$  и  $CH$  — высоты.

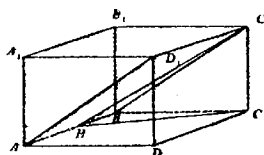
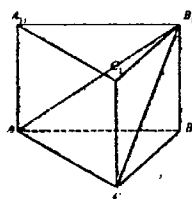
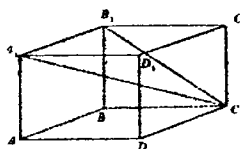
Найти:  $V$ .

Решение: Т.к.  $AC = 8$ ,  $DB = 6 \Rightarrow AD = 5$ . Найдём высоту  $CH$ .

$$S_{ABCD} = CH \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot DB = 24 \Rightarrow CH = \frac{24}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C C_1 = CH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{24\sqrt{3}}{5}. \quad V = C C_1 \cdot S_{ABCD} = \frac{576\sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{576\sqrt{3}}{5}.$$



2. Дано:  $R = 4$ ,  $H = 10$ , осевое сечение цилиндра — квадрат.

Найти:  $V$ .

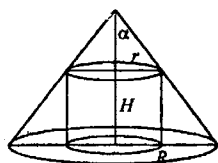
Решение: Рассмотрим осевое сечение.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H} = \frac{2}{5}$ . Пусть  $r$  — радиус основания цилиндра.

Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H - 2r} = \frac{2}{5}$ .

$$5r = 20 - 4r, 9r = 20 \Rightarrow r = \frac{20}{9}. V = \pi r^2 \cdot 2r = \frac{400}{81} \cdot \frac{40}{9} \cdot \pi = \frac{16000\pi}{729}.$$

Ответ:  $\frac{16000\pi}{729}$ .



### С—15

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма, основание  $ABC$  — правильный треугольник,  $\angle AA_1C = \angle A_1AB = 60^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $AA_1 = b$ .

Найти:  $V$ .

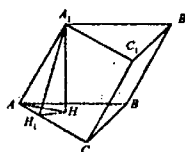
Решение:  $S_{\text{осн.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \right)$ .

$A_1H$  — высота призмы.  $A_1H_1 = A_1A \cdot \sin 60^\circ = b \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$AH_1 = A_1A \cdot \cos 60^\circ = \frac{b}{2}$ .  $H_1H = AH_1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{2\sqrt{3}}$  (т.к.  $\triangle ABC$  — правильный).

$$A_1H = \sqrt{A_1H_1^2 - H_1H^2} = b \sqrt{\frac{2}{3}}. V = S_{\text{осн.}} \cdot A_1H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot b \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}$ .



2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонный параллелепипед,  $A_1H$  — высота,  $\angle A_1AH = 60^\circ$ ,  $A_1H = 5\sqrt{3}$ ,  $E \in AA_1$ ,  $F \in D_1D$ ,  $K \in B_1B$ ,  $EF \perp AA_1$ ,  $KE \perp AA_1$ ,  $\angle FEK = 45^\circ$ ,  $S(AA_1D_1D) = 60$ ,  $S(AA_1B_1B) = 40$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

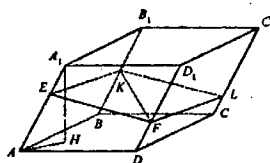
Решение:  $S(AA_1B_1B) = AA_1 \cdot EK = 40 = 10 \cdot EK \Rightarrow EK = 4$ .

$$\left( \text{Из } \triangle AHA_1 : AA_1 = \frac{A_1H}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 10 \right)$$

Аналогично  $S(AA_1D_1D) = AA_1 \cdot EF = 10 \cdot EF = 60 \Rightarrow EF = 6$ .

Достроим  $\triangle FEK$  до перпендикулярного сечения  $EFLK$ .

$$S(EFLK) = EF \cdot EK \cdot \sin 45^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$



$$V = AA_1 \cdot S(EFLK) = 10 \cdot 12\sqrt{2} = 120\sqrt{2}.$$

Ответ:  $120\sqrt{2}$ .

### С—16

1. Дано:  $ABCDE$  — правильная четырехугольная пирамида,  $EH$  — высота, равная  $h$ ,  $\angle BEC = \alpha$ .

Найти:  $V$ .

Решение: Пусть  $AB = a$ .  $\triangle AEB$  — равнобедренный.

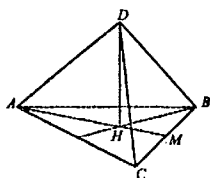
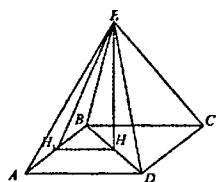
$EH_1 \perp AB$ .

$EH_1 = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . Найдем  $HH_1$ . Т.к.  $ABCD$  — квадрат,

$$\text{то } HH_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} + h^2 = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow$$

$$a^2 = 4h^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \Rightarrow V = \frac{4}{3} h^3 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{4}{3} h^3 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$



2. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $AB = AC = \sqrt{5}$ ,  $CB = 4$ ,  $DH$  — высота,  $\angle DAH = \angle DBH = \angle DCH = 45^\circ$ .

Найти:  $V(DABC)$ .

Решение:  $P = AB + BC + AC = 2\sqrt{5} + 4$ ;  $p = \frac{P}{2} = \sqrt{5} + 2$ .

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-AB)(p-CB)} = \sqrt{(\sqrt{5}+2) \cdot 4 \cdot (\sqrt{5}-2)} = \sqrt{(5-4) \cdot 4} = 2.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AM \cdot CB \text{ (AM — высота)} \Rightarrow AM = \frac{2S}{CB} = 1.$$

$\triangle AHD = \triangle CHD = \triangle BHD$  по катету и противоположному углу  $\Rightarrow AH = HB = HC = R \Rightarrow H$  — центр описанной окружности.

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 2} = \frac{5}{2} = AH.$$

$$\text{Из } \triangle AHD: AH = HD = \frac{5}{2}, V(DABC) = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{5}{3}.$$

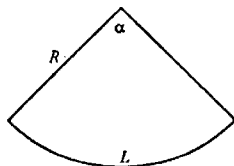
Ответ:  $\frac{5}{3}.$

### С—17

1. Дано:  $\alpha = 120^\circ$ ,  $S_{\text{бок}} = 3\pi$ .

Найти:  $V$ .

Решение:  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ;  $S_{\text{бок}} = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$ ;



$R^2 = 9, R = 3$ , где  $R$  — образующая конуса.  $L = \alpha \cdot R$ , где  $L$  — длина дуги.  
 $L = 2\pi \cdot 2\pi = 2\pi r$ , где  $r$  — радиус основания конуса  $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ,  
 где  $h$  — высота конуса.

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{2}. V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ .

2. Дано:  $ABCD$  — правильная треугольная пирамида,  $AB = 10\sqrt{3}$ ,  $p = \frac{30}{13} = OM$ . В  $DABC$  вписан конус.

$DH$  — высота  $DO = OH$ ,  $OM \perp ADC$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: Найдем  $r$  — радиус основания.

Рассмотрим плоскость  $ABC$ .

$$BH_2 = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 3 = 15; HH_2 = r = \frac{1}{3} BH_2 = 5.$$

Рассмотрим сечение, перпендикулярное  $ADC$ , проходящее через высоту  $ABCD$  ( $DH$ ) (заметим, что  $DH$  совпадает с осью симметрии конуса) и проходящее через  $DB$  (т.  $O$  — середина  $DH$ ).

Пусть  $DO = x$ .  $\frac{x}{p} = \frac{DH_2}{H_2H}$  (т.к.  $\triangle DOM \sim \triangle DH_2H$ , т.к.  $\angle H_2DH$  — общий,

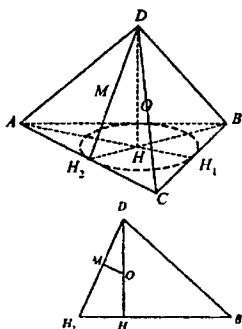
$$\angle DMO = \angle DH_2H = 90^\circ).$$

$$5x = p \cdot DH_2, \text{ но } DH_2 = \sqrt{25 + 4x^2}. 25x^2 = p^2 \cdot (25 + 4x^2); x^2(25 - 4p^2) = 25p^2;$$

$$x^2 \left( 25 - 4 \cdot \frac{900}{169} \right) = 25 \cdot \frac{900}{169}; \frac{x^2 \cdot 625}{169} = \frac{5^2 \cdot 30^2}{13^2}; x = \frac{5 \cdot 30}{25} = 6.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot DH = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 6 = 100\pi.$$

Ответ:  $100\pi$ .



### С—18

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная усеченная пирамида,  $AC = a$ ,  $A_1C_1 = b$ ,  $AA_1 = a - b$  ( $a > b$ ).

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

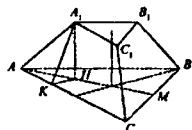
Решение: Опустим высоту  $A_1H$ .

$$\text{Проведем } HK \perp AC. AK = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

$\triangle AKN \sim \triangle AMC$  ( $M$  — середина  $CB$ ) (по двум углам).

$$CM = \frac{a}{2}; AC = a; AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{AK}{AN} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AN = \frac{AK \cdot AC}{AM} = \frac{(a - b) \cdot a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{(a - b)\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{Из } \triangle AHA_1: A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{(a-b)^2}{3}} = (a-b)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S(A_1B_1C_1) = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{A_1H}{3} (S(ABC) + S(A_1B_1C_1) + \sqrt{S(ABC) \cdot S(A_1B_1C_1)}) =$$

$$= \frac{(a-b)\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left( \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{3 \cdot 4} (a^2 + b^2 + ab) =$$

$$= (a^2 + b^2 + ab) \frac{(a-b)\sqrt{2}}{12} = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}. \quad \text{Ответ: } \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}.$$

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = 10$ ,  $AC = 12$ ,  $CM \perp AC$ ,  $CM$  — ось вращения.

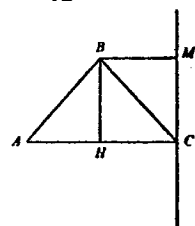
Найти:  $V_{\text{т. вр.}}$

Решение: Опустим высоты  $BH$ .  $AH = HC = 6$ . Если  $BM \perp MC$ , то  $BM = HC = 6$ .

$$\text{Из } \triangle ABH: BH = MC = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$$

$$\Rightarrow V_{\text{т. вр.}} = \frac{\pi}{3} \cdot BH(AC^2 + BM \cdot AC) = \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (144 + 6 \cdot 12) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (144 + 72) = \frac{8 \cdot 216 \cdot \pi}{3} = 8 \cdot 72\pi = 576\pi.$$



Ответ:  $576\pi$ .

### С—19

1. Дано: шар  $(O, R)$ ,  $R = 5$ , плоскость  $\alpha$  касается шара в точке  $H$ ,  $H \in$  плоскости  $\beta$ , угол между  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $\arccos \frac{3}{5}$ ,  $\beta \cap$  шар.

Найти:  $V_{\text{меньшего сегмента}}$ .

Решение: Рассмотрим сечение фигуры плоскостью, проходящей через т.  $H$ , перпендикулярной  $\alpha$  и  $\beta$ .

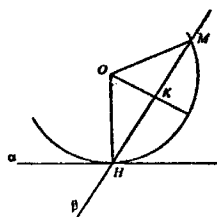
$$\text{В равнобедренном } \triangle HOM: \angle OHM = \angle OMH = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{3}{5}.$$

Опустим перпендикуляр  $OK$  в  $\triangle OHM$ .

$$OK = OH \cdot \sin \angle OHM = 5 \cos \left( \arccos \frac{3}{5} \right) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3 \Rightarrow \text{высота сегмента } h = R - OK = 2.$$

$$\text{Значит, } V_{\text{сегмента}} = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right) = \pi \cdot 4 \left( 5 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi \cdot 13}{3} = \frac{52\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{52\pi}{3}.$$



2. Дано: конус,  $L$  — образующая,  $L = 10$ ,  $S_{\text{бок}} = 60\pi$ . В конус вписан шар.

Найти:  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: Рассмотрим  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса  $AB = L$ ,  $AH = R$ .

$$S_{\text{бок}} = \pi RL = 10R = 60 \Rightarrow R = 6.$$

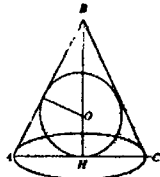
В  $\triangle ABC$  вписан большой круг шара. В  $\triangle ABC$ :  $BH = 8$ .

$$S(\triangle ABC) = AC \cdot BH \cdot \frac{1}{2} = 48 = \frac{1}{2} P \cdot r.$$

$$P = AB + BC + AC = 20 + 12 = 32 \Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{48 \cdot 2}{32} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi.$$

Ответ:  $36\pi$ .



ДС

1. Дано: шар:  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 1$ , плоскость  $\alpha$ :  $2x - y + 2z - 1 = 0$ .

Пересекает ли  $\alpha$  шар; найти площадь сечения.

Решение: Центр шара  $O(-1, 3, 2)$ ,  $\vec{n} \{2, -1, 2\}$ . Опустим  $OH$  — перпендикуляр на  $\alpha$ .  $\vec{OH} = k\vec{n} \{2k, -k, 2k\}$ .

$$\text{Пусть } H(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow \vec{OH} \{x_0 + 1, y_0 - 3, z_0 - 2\} = k\vec{n}.$$

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 2k \\ y_0 - 3 = -k \\ z_0 - 2 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2k - 1 \\ y_0 = 3 - k \\ z_0 = 2k + 2 \end{cases}.$$

$$H \in \alpha \Rightarrow 2(2k - 1) - (3 - k) + 2(2k + 2) - 1 = 0; 8k + k - 2 = 0; k = 2/9.$$

$$\vec{OH} \left( \frac{4}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{4}{9} \right); |\vec{OH}| = \sqrt{\frac{16 + 4 + 16}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

$OH < R \Rightarrow$  плоскость  $\alpha$  пересекает сферу.

$$\text{Радиус сечения } r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}. S_{\text{сечения}} = \pi r^2 = \frac{5\pi}{9}. \text{ Ответ: } \frac{5\pi}{9}$$

2. Дано:  $A(1, 0, -2)$ ,  $B(0, 3, 1)$ ,  $A, B \in \alpha$ ,  $\alpha \parallel Oz$ .

Найти: уравнение  $\alpha$ .

Решение: Выберем точку  $C$  так, что  $\vec{AC} = \vec{k} \{0, 0, 1\} \Rightarrow C(1, 0, -1)$ .

Уравнение  $\alpha$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ ;  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ ,  $C \in \alpha$ .

$$\begin{cases} P - 2R + S = 0 \\ 3Q + R + S = 0 \\ P - R + S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 0 \\ Q = -\frac{S}{3} \\ P = -S \end{cases}.$$

$$\text{Уравнение } \alpha: x + \frac{y}{3} - 1 = 0 \text{ или } 3x + y - 3 = 0.$$

Ответ:  $3x + y - 3 = 0$ .



## Вариант 4

**С—1**

1. Дано:  $DABC$  — тетраэдр,  $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle DCB = 60^\circ$ ,  $AB = 8$ ,  $DB \perp ABC$ .

1) Найти координаты вершин.

2) Найти  $\overrightarrow{AK}$ ,  $K$  — точка пересечения медиан  $\triangle DBC$ .

Решение: 1)  $A(0, 0, 0)$ ,  $C(0, 4, 0)$ , т.к.  $AC = \frac{1}{2} AB$

( $AC$  лежит против угла  $= 30^\circ$ );

$$CB = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ из } \triangle ABC \Rightarrow B(-4\sqrt{3}, 4, 0).$$

$$\text{Из } \triangle DBC: DB = CB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12 \Rightarrow D \{-4\sqrt{3}, 4, 12\}.$$

$$\text{Возьмем медиану } CE \triangle DBC: E(-4\sqrt{3}, 4, 6); \overrightarrow{CE}(-4\sqrt{3}, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CE} \left\{ -\frac{8\sqrt{3}}{3}, 0, 4 \right\} \Rightarrow K \left( -\frac{8\sqrt{3}}{3}, 4, 4 \right) \Rightarrow \overrightarrow{AK} \left\{ -\frac{8\sqrt{3}}{3}, 4, 4 \right\}$$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\text{Ответ: 1) } A(0, 0, 0); B(-4\sqrt{3}, 4, 0); C(0, 4, 0); D(-4\sqrt{3}, 4, 12)$$

$$2) \overrightarrow{AK} \left\{ -\frac{8\sqrt{3}}{3}, 4, 4 \right\} = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

2. Дано:  $A, B, C$ ,  $\overrightarrow{AB} \{2, 3, -1\}$ ,  $\overrightarrow{AC} \{-4, m, n\}$ .

Найти, при каких  $m, n$

$A, B, C$  лежат на одной прямой.

$$\text{Решение: Если } A, B, C \in a, \text{ то } \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \begin{cases} 2 = -k \cdot 4 \\ 3 = km \\ -1 = kn \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = -6 \\ n = 2 \end{cases}.$$

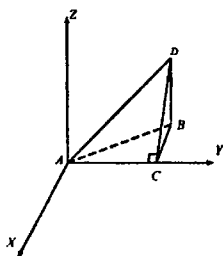
$$\text{Ответ: при } m = -6, n = 2.$$

**С—2**

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC = AC\sqrt{3}$ ,  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(-1, -1, 3)$ ,  $C(0, 0, -z_0) \in Oz$ ,  $z_0 > 0$ .  
Найти  $CM$  ( $CM$  — медиана).

$$\text{Решение: } \overrightarrow{BC} \{1, 1, -z_0 - 3\}, \overrightarrow{AC} \{-1, 1, -z_0 - 1\}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 1 + (z_0 + 3)^2}; |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 1 + (z_0 + 1)^2}$$



$$\Rightarrow 2 + (z_0 + 3)^2 = 3(2 + (z_0 + 1)^2)$$

$$2 + z_0^2 + 6z_0 + 9 = 6 + 3z_0^2 + 6z_0 + 3; z_0^2 = 1; z_0 = 1, \text{ т.к. } z_0 > 0$$

$$M(0, -1, 2); C(0, 0, -1); \overrightarrow{CM} \{0, -1, 3\}; |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Ответ:  $\sqrt{10}$ .

$$2. \text{ Дано: } \vec{p} \{-1, 2, 1\}, m \updownarrow \vec{p}, |\vec{m}| = 3\sqrt{6}.$$

Найти координаты  $\vec{m}$ .

Решение:

$$\vec{m} = k \vec{p}; |\vec{p}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \Rightarrow k = -3; \vec{m} \{3, -6, -3\}.$$

Ответ:  $\vec{m} \{3, -6, -3\}$ .

### С—3

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма,  $AB = AA_1$ ,  $P \in A_1B_1$ ,  $A_1P = PB_1$ .

1) Найти:  $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}$ . 2) Найти  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ .

Решение: 1) Поместим призму в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ . В ней

$$C_1 \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, a\right), P \left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right), B_1 \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}, a\right),$$

$$C \left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0\right), \overrightarrow{C_1P} \left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{B_1C} \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a\right), (\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}) = \frac{-3a^2}{4}$$

$$2) \overrightarrow{AP} \left\{\frac{a}{2}, 0, a\right\}, \overrightarrow{PC_1} \left\{0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right\}; (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}) = 0. \quad \text{Ответ: 1) } \frac{-3a^2}{4}; 2) 0.$$

2. Дано:  $A(14, -8, -1), B(7, 3, -1), C(-6, 4, -1), D(1, -7, -1), ABCD$  — ромб. Найти: острый угол ромба.

$$\text{Решение: } \overrightarrow{AB} \{-7, 11, 0\}, \overrightarrow{AD} \{-13, 1, 0\}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+121} = \sqrt{170} = |\overrightarrow{AD}|,$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = 91 + 11 = 102 = 170 \cos \angle BAD$$

$$\cos \angle BAD = \frac{102}{170} = \frac{51}{85} = \frac{3}{5}, \angle BAD = \arccos \frac{3}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{3}{5}$$

### С—4

1. Дано:  $PMHK$  — пирамида,  $\angle PKN = 90^\circ$ ,  $PM \perp MNK$ ,  $MK = 6$ ,  $KH = 8$ .

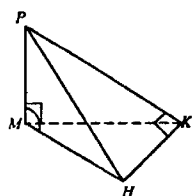
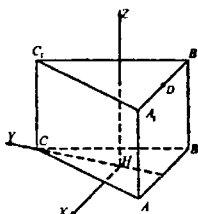
Найти:  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}$ .

$$\text{Решение: } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} =$$

$$= \overrightarrow{MH}(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{HK}) + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} =$$

$$= (\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH} = |\overrightarrow{MH}|^2 + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}$$

$\triangle PMK$  — прямоугольный по теореме о трех перпендикулярах  $\Rightarrow$



$$MH = \sqrt{MK^2 + HK^2} = 10 \text{ и } KM \perp KH, (\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}) = 0$$

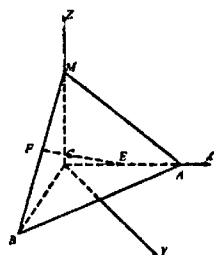
$\Rightarrow$  искомое выражение равно  $|\overrightarrow{MH}|^2 = 100$ .

Ответ: 100.

2. Дано:  $MACB$  — пирамида,  $MC \perp ACB$ ,  $\angle ACB = 135^\circ$ ,  $AC = a\sqrt{2}$ ,  $BC = MC = a$ ,  $E \in CA$ ,  $CE = EA$ ,  $F \in BM$ ,  $BF = FM$ .

1) Найти  $EF$ . 2) Найти угол  $\alpha$  между  $EF$  и  $CM$ .

Решение: 1) Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $CXYZ$ .



$$\text{В } \triangle ABC: AB^2 = 3a^2 + 2a^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; AB = a\sqrt{5}.$$

$$A(a\sqrt{2}, 0, 0), B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right), C(0, 0, 0), M(0, 0, a), E\left\{\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right\},$$

$$F\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2}\right); \overrightarrow{EF}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}a, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{2}\right); |\overrightarrow{EF}| = a\sqrt{\frac{9}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\overrightarrow{CM}(0, 0, a), |\overrightarrow{CM}| = a; |\overrightarrow{EF}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CM}) = \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ответ: 1) } \frac{a\sqrt{6}}{2}; 2) \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

C—5

1. Дано:  $\vec{p}$ ,  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(4, 5, 6)$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ .

а) Найти  $\vec{p}$ .

б) Доказать:

$A(5, 6, 7)$  и  $B(-5, 6, -7)$  симметричны относительно  $Oy$ .

Решение:

а)  $\vec{p} \{3, 3, 3\}$ .

б)  $O_1(0, 6, 0)$  — середина  $AB$ , лежит на  $Oy$  и  $\overrightarrow{AB} \{-10, 0, -14\} \perp Oy \Rightarrow A$  и  $B$  симметричны относительно  $Oy$ .

Ответ:  $\vec{p} \{3, 3, 3\}$ .

2. Доказать, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол  $\varphi$ , отобразятся на прямую и плоскость, составляющие угол  $\varphi$ .

Доказательство:

Опустим из точки прямой перпендикуляр на плоскость. При движении перпендикуляр, наклонная и ее проекция сохраняют свои длины, а следовательно, сохранится и угол  $\varphi$  в этом прямоугольном треугольнике.

# С—6

1. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AD_1 \cap A_1 D = O_1$ ,  $B_1 C \cap BC_1 = O_2$ .

Доказать:  $O_1 O_2$  — ось симметрии.

Доказательство:

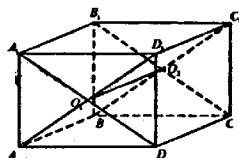
При отображении относительно  $O_1 O_2$  вершины переходят в вершины, ребра в ребра, грани в грани  $\Rightarrow O_1 O_2$  — ось симметрии.

2. Доказать, что любое сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ , содержащей  $O_1 O_2$  является прямоугольником.

Любая плоскость  $\alpha$  ( $O_1 O_2 \in \alpha$ ) является прямоугольником.

Доказательство:

Сечения линии в гранях  $AA_1 B_1 B$ ,  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $DD_1 C_1 C$ ,  $ABCD$  параллельны  $O_1 O_2$ , а следовательно, перпендикулярны любым прямым в плоскостях  $AA_1 D_1 D$  и  $B_1 B C C_1 \Rightarrow$  любое сечение плоскостью  $\alpha$  — прямоугольник.



# С—7

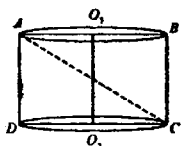
1. Дано: цилиндр,  $O_1 O_2$  — ось,  $ABCD$  — осевое сечение,  $\angle ACD = \alpha$ .

Найти: угол  $\varphi$  между диагональю и основанием развертки боковой поверхности.

Решение: Из  $\triangle ACD$  заключаем:  $AD = DC \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,

$H = 2R \cdot \operatorname{tg} \alpha$  — I сторона;  $L = 2\pi R$  — II сторона развертки  $\Rightarrow$

Значит,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{L} = \frac{2R \operatorname{tg} \alpha}{2\pi R} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi}$ ;  $\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi} \right)$ . Ответ:  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi} \right)$ .



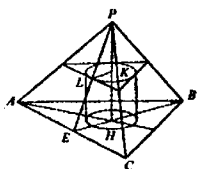
2. Дано:  $PABC$  — правильная пирамида,  $PH$  — высота,  $AB = 8\sqrt{3}$ ,  $E \in AC$ ,  $AE = EC$ ,  $\angle PEH = 45^\circ$ ,  $KH$  — высота цилиндра,  $KH = 2$ .

Найти  $S_{\text{бок. цил.}}$ .

Решение:  $EH = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{24}{6} = 4 = PH = 2KH$

$\Rightarrow$  Из  $\triangle LKP \sim \triangle EHP$ :  $R = LK = \frac{1}{2} EH = 2 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2\pi R \cdot KH = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$ .

Ответ:  $8\pi$ .

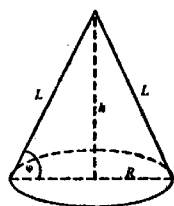


# С—8

1. Дано: конус, центральный угол в развертке  $\alpha = 240^\circ$ , высота конуса  $h = 5\sqrt{5}$ .

Найти:  $S_{\text{бок.}}$ .

Решение:  $S_{\text{бок.}} = \frac{\alpha}{2} \cdot L^2$ . Если угол наклона образующей  $\varphi$ , то  $L = \frac{h}{\sin \varphi}$ ,  $R = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi}$ .



$$\text{Длина окружности основания } l = 2\pi R = \frac{2\pi h}{\operatorname{tg} \varphi} = \alpha \cdot L = \alpha \frac{h}{\sin \varphi} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi \cdot 2\pi = \alpha \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi}{3 \cdot 2\pi} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{\alpha}{2} L^2 = \frac{\alpha h^2}{2 \sin^2 \varphi} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot (5\sqrt{5})^2 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{5})^2} = 150\pi.$$

Ответ  $150\pi$ .

2. Дано:

усеченный конус,  $ABCD$  — осевое сечение,

$\angle BAO_2 = \varphi$ ,  $AB \perp BD$ ,

$2\pi BO_1 + 2\pi AO_2 = 2\pi m$ .

Найти  $S_{\text{бок.}}$ .

Решение:  $BO_1 + AO_2 = m$ . Пусть  $AB = a$ , тогда  $BH = a \sin \varphi$ ,  $AH = a \cos \varphi$ .

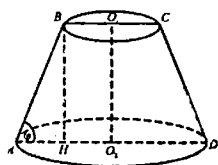
$$\triangle AHB \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{a^2}{a \cos \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

$$BC = AD - 2AH = \frac{a}{\cos \varphi} - 2a \cos \varphi = \frac{a(1 - 2\cos^2 \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{-a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

$$BC + AD = \frac{a}{\cos \varphi} - \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi} = \frac{a(1 - \cos 2\varphi)}{\cos \varphi} = 2m \Rightarrow a = AB =$$

$$= \frac{2m \cos \varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{m \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \Rightarrow S_{\text{бок.}} = \pi \cdot AB \cdot \frac{1}{2} (BC + AD) = \frac{2\pi m^2 \cos \varphi}{(1 - \cos 2\varphi)} = \frac{\pi m^2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Ответ:  $\frac{\pi m^2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$



С—9

1. Дано:

$ABCD$  — ромб,  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ ,  $DC$  — ось вращения.

Найти  $V_{\text{т. вр.}}$ .

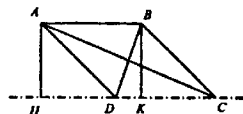
Решение: Опустим перпендикуляры  $BK = AH$  на  $DC$ . Сторона ромба равна:

$$AB = \sqrt{\frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}} = 5.$$

$$S(BCD) = \frac{1}{4} BD \cdot AC = 12 = \frac{1}{2} DC \cdot BK = \frac{5}{2} BK \Rightarrow BK = \frac{24}{5} = AH.$$

$$S_{\text{т. вр.}} = \pi[BK \cdot BC + 2AB \cdot BK + AD \cdot AH] = \pi[2BK \cdot BC + 2AB \cdot BK] = \\ = 2\pi \cdot BK[BC + AB] = 2\pi \cdot \frac{24}{5} \cdot 10 = 96\pi.$$

Ответ:  $96\pi$ .



2. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $AC = AB = a$ ,  $\angle ACB = \alpha$ ,  $DO$  — высота,  $AH$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $\angle DHO = \varphi$ ,  $(CDB)$   $(ADC)$  и  $(ADB)$  наклонены к  $(ABC)$  под углом  $\varphi$ , в  $DABC$  вписан конус.

Найти  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

Решение:

Из  $\triangle AHC$ :  $AH = AC \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$ ,  $CH = a \cos \alpha$ .

$$S(ABC) = \frac{1}{2} CB \cdot AH = \frac{1}{2} (2a \cos \alpha) \cdot a \sin \alpha = a^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (CB = 2a \cos \alpha).$$

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2a + 2a \cos \alpha} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad DH = \frac{OH}{\cos \varphi} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cos \varphi}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r \cdot l = \pi DH \cdot OH = \pi \cdot \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cos \varphi} = \frac{\pi a^2 \sin^2 2\alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2 \cos \varphi}.$$

Ответ:  $\frac{\pi a^2 \sin^2 2\alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2 \cos \varphi}.$

## C—10

1. Дано:  $R = 3$ ,  $O \in Oz$ ,  $K(-2, -2, 1) \in$  сфере.

Найти уравнение сферы.

Решение: Уравнение сферы:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 9$ ,

т.к.  $O \in Oz$ , то  $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = 9$ .

$K \in$  сфере:  $4 + 4 + (1 - z_0)^2 = 9$ ;  $z_0 = 0$  или  $z_0 = 2$ .

Уравнение сферы:  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  или  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$ .

Ответ:  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  или  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$ .

2. Дано:  $A, B, C \in$  сфере,  $AB = BC = a$ ,  $\triangle ABC = \alpha$ ,  $S_{\text{больш. круга}} = \frac{\pi a^2}{2}$ .

На каком расстоянии от центра находится  $(ABC)$ ?

Решение:

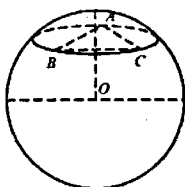
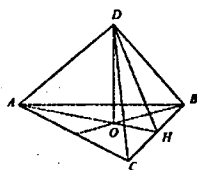
Т.к.  $S_{\text{больш. круга}} = \frac{\pi a^2}{2}$ , то  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $S(ABC) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$ ;

$$AC = 2a \cos\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = 2a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$r$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

$$r = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{2a^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{2a^2 \sin \alpha} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$OH$  — высота пирамиды  $OABC$ , искомое расстояние



$$OH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Ответ:  $\frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

### С—11

1. Дано: сфера,  $\alpha \parallel \beta$  — секущие плоскости,  $l_\alpha = 10\pi$ ,  $l_\beta = 24\pi$ ,  $O_1O_2 = 7$ .

Найти  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение: Проведем плоскость через центры окружностей, получим сечение  $ABCD$  ( $O$ ,  $O_1$ ,  $O_2 \in (ABCD)$ ). Поместим сферу в прямоугольной системе координат  $O_2XYZ$ .

В ней  $A(-12, 0, 0)$ ,  $D(12, 0, 0)$ ,  $B(-5, 0, 7)$ ,  $C(5, 0, 7)$ .

Уравнение сферы:  $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

$$A: 144 + z_0^2 = R^2$$

$$B: 25 + (7 - z_0)^2 = R^2; 119 - 49 + 14z_0 = 0; 70 = -14z_0 \Rightarrow z_0 = -5; R = 13$$

$$\Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 169 \cdot \pi = 676\pi.$$

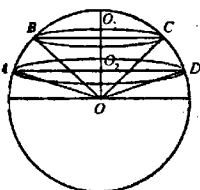
2. Дано: шар,  $\alpha, \beta$  — секущие плоскости,  $B \in \alpha, \beta$ , сфера,  $O_1, O_2$  — центры сечений,  $O$  — центр шара,  $O_1O = OO_2 = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .

Найти:  $S_{\text{сечений}}$ .

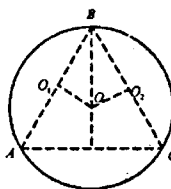
Решение:  $\triangle ABC$  — равносторонний,

$$O_1O = AB \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow AO_1 = CO_2 = 6 \Rightarrow$$

$$S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot AO_1^2 = 36\pi.$$



Ответ:  $676\pi$ .



Ответ:  $36\pi$ .

### С—12

1. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $DH$  — высота, вершина  $D$  удалена от  $AB, AC, BC$  на расстояние 3. В  $DABC$  вписан шар.

Найти  $r_{\text{шара}}$ .

Решение:  $H$  — центр вписанной окружности  $\triangle ABC$ .

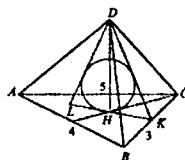
$AC = 5$ . Проведем перпендикуляр  $DK$  к  $BC$ .  $HK$  также

перпендикулярно  $BC$  (по теореме о трех перпендикулярах);  $DK = 3$

$HK$  — радиус вписанной окружности  $\triangle ABC$ .

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 6; P(ABC) = AB + BC + AC = 12.$$

$$HK = \frac{2S}{P} = \frac{12}{12} = 1 \Rightarrow \text{из } \triangle DHK: DH = \sqrt{DK^2 - HK^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$



Достроим  $\triangle DKH$  до равнобедренного  $\triangle DKL$  ( $PK = DL$ ), в него вписан большой круг шара.

$$LK = 2, DH = 2\sqrt{2}, S(DKL) = \frac{1}{2} DH \cdot LK = 2\sqrt{2},$$

$$P = DK + DL + LK = 6 + 2 = 8. \Rightarrow r = \frac{2S(DKL)}{P} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $A_1C_1 = 5$ ,  $\angle A_1B_1C_1 = 150^\circ$ ,  $AA_1 = 24$ . Около призмы описана сфера.

Найти  $S_{\text{сферы}}$ .

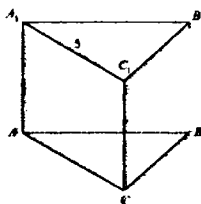
Решение:  $r$  — радиус окружности, описанной около

$$\triangle A_1B_1C_1, r = \frac{A_1C_1}{2\sin 150^\circ} = \frac{5}{2\sin 150^\circ}$$

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{AA_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4\sin^2 150^\circ} + 144}; \sin^2 150^\circ = \sin^2(180^\circ - 30^\circ) = \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$R = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13; S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 169 \cdot \pi = 676\pi.$$

Ответ:  $676\pi$ .



### С—13

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $ABCD$  — квадрат,  $AB = a$ ,  $\angle C_1AB_1 = 30^\circ$ .

Найти  $V_{\text{параллелепипеда}}$ .

Решение: Из  $\triangle AB_1C_1$ :  $AC_1 = 2B_1C_1 = 2a$ . Но  $AC_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} \Rightarrow h = a\sqrt{2}$ .

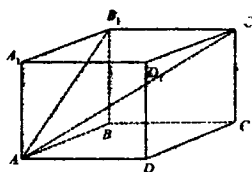
$$\Rightarrow V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$$

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 5$ ,  $B_1H \perp AC$ ,  $\angle B_1CB = 45^\circ$ ,  $BK \perp CB_1$ ,  $BK = 2\sqrt{2}$ .

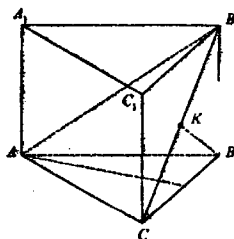
Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: В  $\triangle CBB_1$ :  $CK = BK = B_1K = 2\sqrt{2} \Rightarrow CB_1 = 4\sqrt{2}$ ,  $CB = BB_1 = 4$ ;  $S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 10$ .

$$V(ABCA_1B_1C_1) = S(ABC) \cdot BB_1 = 10 \cdot 4 = 40.$$



Ответ:  $a^3\sqrt{2}$ .



Ответ: 40.

### С—14

Дано:  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — прямой параллелепипед,  $ABCD$  — параллелограмм,  $BD = 6$ ,  $\angle ABD = 90^\circ$ ,  $\angle BDA = 30^\circ$ ,  $B_1H \perp AD$ ,  $\angle B_1HB = 30^\circ$ .

Найти:  $V$ .



Решение В  $\triangle ABD$ :  $AB = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$$AD = 4\sqrt{3}$$

$$S(ABD) = \frac{1}{2} AB \cdot BD = 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} AD \cdot BH =$$

$$= 2\sqrt{3} BH \Rightarrow BH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle BB_1H: BB_1 = BH \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}. S(ABCD) = 2S(ABD) = 12\sqrt{3}.$$

$$V = BB_1 \cdot S(ABCD) = \sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} = 36.$$

2. Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $AB = 8$ .  
 $MH$  — высота,  $MH = 16$ . В  $MABCD$  вписан цилиндр.  
 осевое сечение цилиндра — квадрат.

Найти  $V_{\text{цилиндра}}$ .

Решение

$E, F$  — середины  $AD$  и  $BC$ . Рассмотрим сечение  $EMF$ ,  
 внутри которого лежит квадрат  $KLTN$ :  $EH = 4$ ,  $MH = 16$ ,  $LK = 2LP$ .

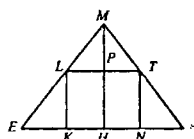
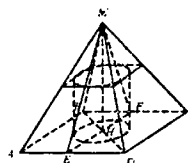
Из подобия  $\triangle EKL$ ,  $\triangle LPM$  и  $\triangle EHM$

$$\frac{EK}{KL} = \frac{EH}{HM} = \frac{1}{4} = \frac{LP}{PM}; \quad \frac{EK}{2LP} = \frac{LP}{PM} = \frac{1}{4}; \quad EK = \frac{LP}{2};$$

$$EK + LP = EH \Rightarrow \frac{3LP}{2} = EH = 4; \quad LP = \frac{8}{3}; \quad LK = \frac{16}{3}.$$

$$V = LK \cdot \pi \cdot LP^2 = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \frac{64}{9} = \frac{1024\pi}{27}.$$

Ответ: 36.



Ответ:  $\frac{1024\pi}{27}$ .

## C—15

1 Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонный параллелепипед,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA_1 = c$ ,  $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = 60^\circ$ .

Найти  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение Опустим высоту  $A_1H$ . Проведем  $EH \parallel AD$ ,  $E \in AB$ ,  $FH \parallel AB$ ,  $F \in AD$ ,  $A_1EHF$  — квадрат,

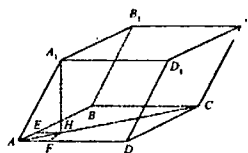
$$AF = \frac{c}{2} = AE = FH; \quad A_1F = A_1E = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle A_1FH \quad A_1H = \sqrt{A_1F^2 - FH^2} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V = A_1H \cdot AB \cdot AD = \frac{c\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot b.$$

Ответ:  $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$

2 Дано  $ABCA_1 B_1 C_1$  — наклонная призма,  $A_1H$  — высота,  $\angle A_1 AH = 45^\circ$   
 $A_1H = 10\sqrt{2}$ ,  $S(A_1 C_1 CA) = 200$ ,  $S(A_1 B_1 BA) = 100$ ,  $KL \perp AA_1$ ,  $KM \perp AA_1$ ,  $L$   
 $C \in M \in B_1 B$ ,  $\angle LKM = 120^\circ$ .



Найти  $V_{\text{призмы}}$ .

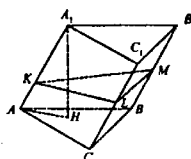
Решение: Из прямоугольного  $\triangle A_1HA$ :  $AA_1 = A_1H\sqrt{2} = 20$ .

$$S(A_1ACC_1) = AA_1 \cdot KL = 20KL = 200 \Rightarrow KL = 10.$$

$$S(A_1B_1BA) = AA_1 \cdot KM = 20KM = 100 \Rightarrow KM = 5$$

$$\Rightarrow S(KLM) = \frac{1}{2} KL \cdot KM \cdot \sin 120^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(KLM) \cdot AA_1 = 20 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3}.$$



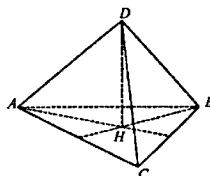
Ответ:  $250\sqrt{3}$

### С—16

1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $DH$  — высота,  $DH = h$ ,  $\angle ADB = \alpha$ .

Найти  $V(DABC)$ .

Решение: Пусть  $AB = a$ , тогда  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .



$$\text{Из } \triangle AHD: AD^2 = AH^2 + DH^2; AD^2 = h^2 + \frac{a^2}{3};$$

$$AD = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}. \text{ В } \triangle ADB \text{ по теореме косинусов } AB^2 = 2AD^2(1 - \cos \alpha).$$

$$a^2 = 2\left(h^2 + \frac{a^2}{3}\right)(1 - \cos \alpha); a^2 - \frac{2}{3}a^2(1 - \cos \alpha) = 2h^2(1 - \cos \alpha);$$

$$a^2 = \frac{2h^2(1 - \cos \alpha)}{1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos \alpha} = \frac{6h^2(1 - \cos \alpha)}{1 + 2\cos \alpha} \Rightarrow a = h\sqrt{\frac{6(1 - \cos \alpha)}{1 + 2\cos \alpha}}$$

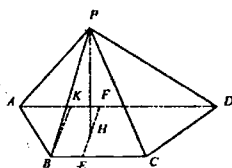
$$S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6h^2\sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{4(1 + 2\cos \alpha)}.$$

$$V(DABC) = \frac{1}{3}h \cdot S = \frac{2h^3\sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{4(1 + 2\cos \alpha)} = \frac{h^3\sqrt{3}(1 - \cos \alpha)}{2(1 + 2\cos \alpha)} = \frac{h^3\sqrt{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos \alpha + 1}$$

$$\text{Ответ: } \frac{h^3\sqrt{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos \alpha + 1}.$$

2. Дано:  $PABCD$  — пирамида,  $AD \parallel BC$ ,  $PH$  — высота,  $PH = 3\sqrt{3}$ ,  $AB = CD$ ,  $\angle BAD = 30^\circ$ , боковые грани наклонены к основанию под углом  $60^\circ$ .  
Найти  $V(PABCD)$ .

Решение: В трапецию можно вписать окружность  $\Rightarrow AD + BC = AB + CD$ ,  $EF \perp AD$ ,  $E \in BC$ ,  $F \in AD$ ,



$$H \in EF. \text{ Из } \triangle EHP: EH = r = \frac{PH}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

Начертим перпендикуляр  $BK \perp EF$ .

$$BK = EF = 2EH = 6 \Rightarrow AB = 2BK = 12 \text{ (из } \triangle BKA), AB = CD \\ \Rightarrow P(ABCD) = 4AB = 48.$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BK = AB \cdot BK = 12 \cdot 6 = 72.$$

$$V(PABCD) = \frac{1}{3} PH \cdot S(ABCD) = \sqrt{3} \cdot 72 = 72\sqrt{3}.$$

Ответ:  $72\sqrt{3}$

### С—17

1. Дано: развертка конуса,  $AB = 6 = AC$ ,  $BC = 6\sqrt{3}$ .

Найти  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: В  $\triangle ABC$  по теореме косинусов  $BC^2 =$   
 $= 2AB^2(1 - \cos \alpha)$

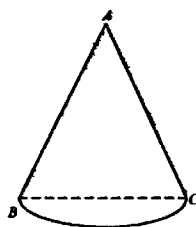
$$3 \cdot 36 = 2 \cdot 36(1 - \cos \alpha); 1 - \cos \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ \text{ — угол в развертке.}$$

$$S_{\text{бок.}} = L^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \pi RL; R = \frac{\alpha}{2\pi} L = \frac{1}{3} AB = 2 \Rightarrow h = \sqrt{AB^2 - R^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h R^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$



2. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AB = 6\sqrt{3}$ ,  
 $DH$  — высота,  $DK$  — высота  $\triangle DCB$ ,  $AM \perp DK$ ,  
 $AM = \sqrt{56}$ . В  $DABC$  вписан конус.

Найти  $V_{\text{конуса}}$ .

$$\text{Решение: } AK = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 9; HK = r = \frac{AK}{3} = 3.$$

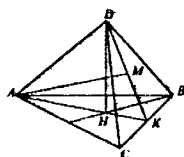
$$\text{Из } \triangle AMK: MK = \sqrt{AK^2 - AM^2} = \sqrt{81 - 56} = 5$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle AKM = \frac{AM}{MK} = \frac{\sqrt{56}}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle HDK: DH = HK \cdot \operatorname{tg} \angle AKM = 3 \cdot \frac{\sqrt{56}}{5}$$

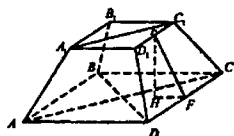
$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} h \cdot r^2 = \frac{\pi}{3} DH \cdot KH^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3\sqrt{56}}{5} \cdot 9 = \frac{9\sqrt{56}}{5} \pi = \frac{18\sqrt{14}}{5} \pi$$

Ответ:  $\frac{18\sqrt{14}}{5} \pi$ .



### С—18

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная усеченная пирамида,  $A_1 B_1 = m$ ,  $AB = 2m$ ,  $E \in D_1 C_1$ ,  $F \in DC$ ,  $D_1 E = EC_1$ ,  $DF = FC$ ,  $EF = \frac{m\sqrt{3}}{2}$ .



Найти  $V_{\text{пирамиды}}$ .

Решение: Опустим высоту  $EH$ .  $HF = \frac{AB - A_1 B_1}{2} = \frac{m}{2}$ .

Из прямоугольного  $\triangle EHF$ :  $EH = \sqrt{EF^2 - HF^2} = \frac{m\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} EH \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}); V = \frac{m\sqrt{2}}{6} (m^2 + 4m^2 + m^2 \cdot 2) = \frac{7m^3 \sqrt{2}}{6}.$$

Ответ:  $\frac{7m^3 \sqrt{2}}{6}$ .

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AC = CB = 25$ ,  $AB = 48$ ,  $l \perp AB$ ,  $B \in l$ ,  $l$  — ось вращения.

Найти  $V_{\text{т. вр.}}$ .

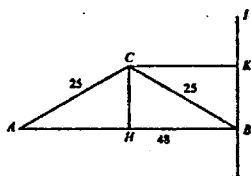
Решение:  $p(ABC) = \frac{AB + BC + AC}{2} = 49$ .

$$S(ABC) = \sqrt{49(49 - 25)^2(49 - 48)} = 7 \cdot 24 = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

$$\Rightarrow CH = \frac{2S}{AB} = \frac{7 \cdot 48}{48} = 7. V_{\text{т. вр.}} = \pi \frac{CH}{3} [AB^2 + CK^2 - CK^2 + AB \cdot CK] =$$

$$= \frac{\pi \cdot 7}{3} [48^2 + 24^2 - 24^2 + 48 \cdot 24] = \frac{7\pi}{3} [48(24 + 48)] = 7\pi \cdot 16 \cdot 72 = 8064\pi.$$

Ответ:  $8064\pi$ .



### С—19

1. Дано: шаровой сегмент и конус, высота сегмента  $H = 1$ ,  $V_{\text{конуса}} = 12\pi$ .

Найти  $V_{\text{сектора}}$ .

Решение:  $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{кон.}}; h_{\text{кон.}} + H = R$ ; но  $r^2 + h^2 = R^2$ ,

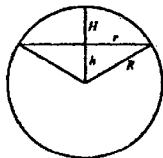
$$H + h = R, r^2 = R^2 - (R - H)^2, h = R - H; V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} (R^2 - (R - H)^2)(R - H) = 12\pi;$$

$$(R^2 - R^2 + 2RH - H^2)(R - H) = 36; (2R - 1)(R - 1) = 36; 2R^2 - 3R + 1 = 36;$$

$$2R^2 - 3R - 35 = 0; D = 9 + 8 \cdot 35 = 289;$$

$$R = \frac{3 \pm 17}{4}; R_1 = 5, R_2 = -\frac{7}{2} \text{ — невозможно} \Rightarrow R = 5.$$



$$\Rightarrow V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 1 = \frac{50\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{50\pi}{3}$ .

2. Дано:  $V_{\text{конуса}} = 128\pi$ ,  $H = 6$ . Около конуса описан шар.

Найти  $V_{\text{шара}}$ .

Решение:  $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi \cdot H \cdot r^2 = 2\pi r^2 = 128\pi \Rightarrow r^2 = 64, r = 8$ .

Вокруг осевого сечения конуса описан большой круг шара.

$S_{\text{ос. сеч.}} = rH = 48$ , образующая  $L = \sqrt{H^2 + r^2} = 10$ .

$$R = \frac{L^2 \cdot 2r}{4S} = \frac{100 \cdot 16}{4 \cdot 48} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}. V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4 \cdot 25\pi \cdot 625}{81} = \frac{62500\pi}{81}.$$

Ответ:  $\frac{62500\pi}{81}$ .

ДС

1. Дано: плоскость  $\alpha: x - 2y + 2z - 9 = 0$ ,

сфера:  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$ .

Доказать, что  $\alpha$  касается сферы.

Доказательство:  $\vec{n} \{1, -2, 2\} \perp \alpha; |\vec{n}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ .

Опустим из центра  $O(3, 2, -4)$  перпендикуляр  $ON$  на  $\alpha$ .  $\overrightarrow{ON} = k \vec{n}$ .

$$\begin{cases} x_0 - 3 = k \\ y_0 - 2 = -2k \\ z_0 + 4 = 2k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = k + 3 \\ y_0 = 2 - 2k \\ z_0 = 2k - 4 \end{cases}.$$

$$N \{x_0, y_0, z_0\} \in \alpha: (k + 3) - 2(2 - 2k) + 2(2k - 4) - 9 = 0.$$

$$9k - 9 - 9 = 0, k = 2.$$

$\overrightarrow{ON} (2, -4, 4), |\overrightarrow{ON}| = 6 \Rightarrow \overrightarrow{ON}$  — радиус, проведенный в точку касания  $\Rightarrow \alpha$  касается сферы.

2. Дано:  $E(-1, 2, 0), F(1, 0, -2), E, F \in \alpha, \alpha \parallel Ox$ .

Найти уравнение  $\alpha$ .

Решение: Возьмем точку  $G(x_0, y_0, z_0)$  такую, что  $\overrightarrow{EG} = \vec{i} \{1, 0, 0\}$

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 1 \\ y_0 - 2 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 0 \end{cases}; G(0, 2, 0).$$

Уравнение  $\alpha: Px + Qy + Rz + S = 0$

$$\begin{cases} E \in \alpha: -P + 2Q + S = 0 \\ F \in \alpha: P - 2R + S = 0 \\ G \in \alpha: 2Q + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = 0 \\ R = \frac{S}{2} \\ Q = -\frac{S}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  уравнение плоскости  $\alpha: \frac{y}{2} - \frac{z}{2} - 1 = 0$  или  $y - z - 2 = 0$ . Ответ:  $y - z - 2 = 0$ .

# Вариант 5

С—1

1. Дано: тетраэдр  $DABC$ ,  $AB = AC = 25$ ,  $BO = OC$ ,  $BC = 30$ ,  $OR \in (ABC)$ ,  $OR \perp AC$ ,  $\angle ORD = 45^\circ$ ,  $OK$  — перпендикуляр к  $ACD$ .

Найти: 1) координаты вершин  $DABC$ , координаты  $\overrightarrow{OK}$ , 2) разложить  $\overrightarrow{OK}$  по  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Решение: 1)  $CO = BO = 15$ .  $\triangle ORC$ ,  $\triangle AOC$  — прямоугольные и подобные (по двум углам).

$$AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = \sqrt{625 - 225} = 20.$$

$$\text{Из подобия } \frac{AO}{OR} = \frac{AC}{CO}; OR = \frac{AO \cdot CO}{AC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

$\triangle ROD$  — прямоугольный, равнобедренный ( $\angle R = \angle D = 45^\circ$ )  $\Rightarrow DO = 12$ .

Значит, координаты вершин  $C(15, 0, 0)$ ,  $B(-15, 0, 0)$ ,  $A(0, -20, 0)$ ,  $D(0, 0, 12)$ .

2) Перпендикуляр  $OK$  лежит в плоскости  $ROD$ . Т.к.

$\triangle ROD$  — равнобедренный, то  $OK$  — высота, биссектриса и медиана.

$$OK = \sin 45^\circ \cdot RO = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Проекция } KO \text{ на } (yOx) K_1O \text{ равна } KO \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6.$$

$\triangle K_1Ox_1$  — прямоугольный, подобен  $\triangle CRO$ .

$$\sin \angle K_1Ox_1 = \frac{3}{5}; \cos \angle K_1Ox_1 = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Проекция } K_1O \text{ на } Ox: Ox_1 = K_1O \cdot \cos \angle K_1Ox_1 = 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}.$$

$$\text{Проекция } K_1O \text{ на } Oy: y_1O = K_1O \cdot \sin \angle K_1Ox_1 = 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$\text{Проекция } OK \text{ на } Oz: Oz_1 = OK \cdot \sin 45^\circ = 6.$$

$$\text{Координаты } \overrightarrow{OK} \left\{ \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, 6 \right\}.$$

$$\overrightarrow{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

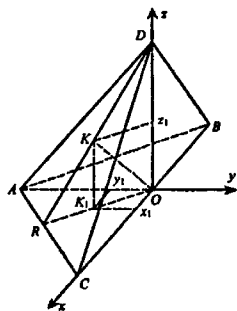
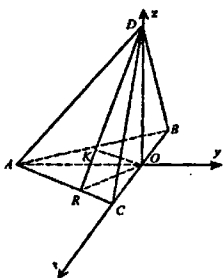
Ответ: 1)  $A(0, -2, 0)$ ;  $B(-15, 0, 0)$ ;  $C(15, 0, 0)$ ;  $D(0, 0, 12)$ ;

$$2) \overrightarrow{OK} \left\{ \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, 6 \right\}, \overrightarrow{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

2. Дано:

$$\vec{a} \{2, -1, 3\}, \vec{b} \{1, 3, -2\}, \vec{c} \{m, 2, 1\}.$$

При каком значении  $m$  векторы компланарны.



Проекция  $OK$  на  $Oz$ :  $Oz_1 = OK \cdot \sin 45^\circ = 6$ .

Координаты  $\overrightarrow{OK} \left\{ \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, 6 \right\}$ .

$$\overrightarrow{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Ответ: 1)  $A(0, -2, 0)$ ;  $B(-15, 0, 0)$ ;  $C(15, 0, 0)$ ;  $D(0, 0, 12)$ ;

2)  $\overrightarrow{OK} \left\{ \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, 6 \right\}$ ,  $\overrightarrow{OK} = 4,8\vec{i} - 3,6\vec{j} + 6\vec{k}$ .

2. Дано:  $\vec{a} \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} \{1, 3, -2\}$ ,  $\vec{c} \{m, 2, 1\}$ .

При каком значении  $m$  векторы компланарны.

Решение:

Условие компланарности запишем в следующем виде:  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

$$\begin{cases} m = 2x + y \\ 2 = -x + 3y \\ 1 = 3x - 2y \end{cases}; \begin{cases} x = 3y - 2 \\ 1 = 9y - 6 - 2y \\ m = 2x + y \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Ответ: при  $m = 3$ .

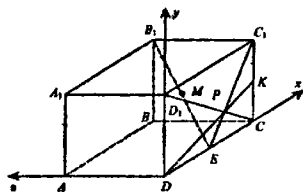
## С—2

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма,  $AB = 2$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $E \in DC$ ,  $DE = EC$ ,  $K \in CC_1$ ,  $CK = C_1K$ ,  $DK \cap D_1C = P$ ,  $M$  — середина  $B_1E$ .

Найти: расстояние  $|MP|$ .

Решение: Докажем, что  $P \in C_1E$ .

В плоскости  $DD_1C_1C$  введем систему координат  $Dxyz$  так, что  $DC \in Dx$ ,  $DA \in Dz$ ,  $DD_1 \in Dy$ . Тогда уравнение прямых  $DK$  и  $D_1C$  запишется в виде  $y = x$ ,  $z = 0$  и  $y = -2x + 4$ ,  $z = 0$ , их общая точка  $P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$  удовлетворяет уравнению  $y = 4x - 4$ ,  $z = 0$  прямой  $C_1E$ .



Даны координаты точек  $E(1, 0, 0)$ ,  $P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$ ,  $B_1(2, 4, 2)$ , т.к.  $M$  — середина  $B_1E$ , то координаты точки  $M\left(\frac{3}{2}, 2, 1\right)$ .

$$\text{Длина } |PM| = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{53}}{6}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{53}}{6}$ .

2. Дано:  $A(-1, 2, 1)$ ,  $B(2, 1, -1)$ ,  $M \in AB$ ,  $AM = 3\sqrt{14}$ .

Найти: координаты точки  $M$ .

**Решение:** Направляющий вектор прямой  $\overline{AB} \{3, -1, -2\}$ . Единичный направляющий вектор  $\vec{e} \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right\}$ . А ответ неоднозначен:

отрезок длины  $3\sqrt{14}$  можно отложить в обе стороны от  $A$ :

1)  $M(-1+9, 2-3, 1-6) = M(8, -1, -5)$

2)  $M(-1-9, 2+3, 1+6) = M(-10, 5, 7)$

**Ответ:**  $M(8, -1, -5)$  или  $M(-10, 5, 7)$ .

### С—3

1. Дано: вектор  $\vec{a}$  образует с  $\vec{i}$  угол  $120^\circ$ , и с  $\vec{k}$  угол  $135^\circ$ .

Найти: угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{j}$ .

**Решение:**

Пусть  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , то 1)  $(\vec{a}, \vec{i}) = x = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{i})$ ;

2)  $(\vec{a}, \vec{j}) = y = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{j})$ ; 3)  $(\vec{a}, \vec{k}) = z = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{k})$ .

Но  $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , а сложив 1)–3), возведенные в квадраты, получим:  $x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2 [\cos^2(\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{k})]$ .

$$\text{Имеем } \cos^2(\vec{a}, \vec{j}) = 1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{i}) - \cos^2(\vec{a}, \vec{k}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$(\vec{a}, \vec{j}) = 60^\circ, 120^\circ.$$

**Ответ:**  $60^\circ, 120^\circ$ .

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $M$  — середина грани  $AA_1 B_1 B$ ,  $K \in AD$ ,  $AK = KD$ ,  $AB = 1$ .

Найти:  $S(MC_1 K)$ .

**Решение:**

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда  $K\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ ,

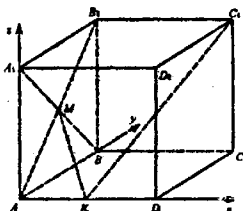
$$M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), C_1(1, 1, 1).$$

$$KM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; KC_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}; MC_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$\triangle MC_1 K$  — прямоугольный т.к.:  $KC_1^2 = MC_1^2 + KM^2$ .

$$\text{Значит, } S(MC_1 K) = \frac{1}{2} KM \cdot MC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$





### С—4

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $AB = AC$ ,  $BD \perp AC$ ,  $BD = AC = 4$ ,  $BB_1 = 2$ ,  $M \in B_1C$ ,  $B_1M = MC$ . Плоскость  $\alpha \perp B_1C$ ,  $M \in \alpha$ .

Найти: угол между  $\alpha$  и  $B_1A$ .

Решение:

Введем систему координат  $Dxyz$ , как показано на рисунке.

Координаты точек  $A(0, -2, 0)$ ,  $B_1(-4, 0, 2)$ ,  $B(-4, 0, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $C_1(0, 2, 2)$ , векторов  $\overrightarrow{AB_1} \{-4, 2, 2\}$ ,  $\overrightarrow{CB} \{-4, -2, 0\}$ ,  $\overrightarrow{CC_1} \{0, 0, 2\}$ ,  $\overrightarrow{CB_1} \{-4, -2, 2\}$ ,  $\overrightarrow{MB_1} \{-2, -1, 1\}$ .

Т.к. угол  $\varphi$  между плоскостью  $\alpha$  и прямой  $AB_1$  равен  $90^\circ$  вычсть угол между перпендикуляром  $\overrightarrow{MB_1}$  и прямой  $AB_1$ .

$$(\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{MB_1}) = |\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{MB_1}| \cdot \cos(\widehat{AB_1MB_1})$$

$$(-4) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cos(\widehat{AB_1MB_1})$$

$$\cos(\widehat{AB_1MB_1}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Значит, } \sin \varphi = \frac{2}{3}; \varphi = \arcsin \frac{2}{3} \approx 41^\circ 49'.$$

2. Дано:

$ABCD$  — тетраэдр,  $BD = BC = BA$ .  $\angle ABD = \angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle CBD = 90^\circ$ .

Доказать:  $(DAC) \perp (DBC)$ .

Доказательство:

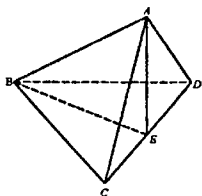
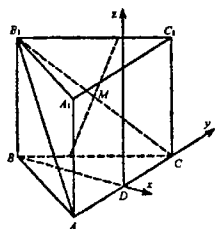
Пусть  $E$  — середина  $DC$ .

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 0 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$AE \perp BC$ ,  $BD$ ,  $AE \in CAD \Rightarrow (CAD) \perp (BCD)$ .



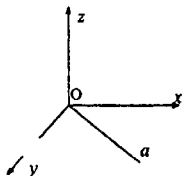
### С—5

1. Дано:

Прямая  $a$  содержит биссектрису угла  $xOy$ ,  $A(10, 20, 0)$ ,  $AA_1 \cap a = M$ ,  $AM = AM_1$ ,  $AA_1 \perp a$ .

Найти:

координаты  $A_1$ .



**Решение:** Пусть направляющий вектор прямой  $AA_1$  есть вектор  $\vec{n}(x, y)$ , он перпендикулярен направляющему вектору  $\tau(1, 1)$  прямой  $a$ . Значит,  $\vec{n}(1, -1)$ . Уравнение прямой  $AA_1$  есть  $(x - 10) + (y - 20) = 0, z = 0$   
 $y = -x + 30$

Прямая  $AA_1$  пересекает прямую  $a$  в точке

$$\begin{cases} x = y \\ y = -x + 30 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = y \\ x = -x + 30 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 15 \\ x = 15 \\ z = 0 \end{cases} \quad M(15, 15, 0).$$

$$\overrightarrow{AM} \{5, -5, 0\} = \overrightarrow{MA_1} \Rightarrow A_1(20, 10, 0). \quad \text{Ответ: } A_1(20; 10; 0).$$

2. Дано:  $(x, y, z)$  переходит в  $(2x, 2y, 2z)$ .

Определить, является ли это отображение движением.

**Решение:** При данном отображении произвольные точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  переходят в точки  $A_1(2x_1, 2y_1, 2z_1)$  и  $B_1(2x_2, 2y_2, 2z_2)$ , но  $AB \neq A_1B_1 \Rightarrow$  это отображение не является движением. Ответ: нет.

### С—6

1. Дано:  $DABC$  — правильный тетраэдр,  $N \in AD, AN = ND, M \in CB, CM = MB$ .

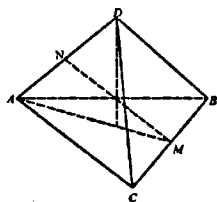
**Доказать:**  $MN$  — ось симметрии  $DABC$ .

**Доказательство:** При симметрии относительно  $MN$   $C \rightarrow B, B \rightarrow C$  и  $A \rightarrow D, D \rightarrow A$  (т.к.  $\triangle AMD$  — равнобедренный,  $MN$  — высота, биссектриса и медиана)  $\Rightarrow MN$  — ось симметрии.

2. Дано: через  $MN$  проведена плоскость  $\alpha$ .

**Доказать,** что  $\alpha$  делит  $DABC$  на две равные части.

**Доказательство:** Проведем плоскость  $\alpha$  через  $MN$  (см. обозначения из предыдущей задачи). Плоскость делит тетраэдр на 2 части, достаточно показать, что эти части переходят друг в друга при симметрии относительно  $MN$ , тогда утверждение задачи следует из предыдущей задачи. Точка, принадлежащая сечению, перейдет также в точку, принадлежащую сечению. Возьмем произвольную  $P$ , принадлежащую одной части тетраэдра, пусть она перейдет в точку  $P_1$ , по определению симметрии,  $PP_1 \cap MN$ , т.е.  $PP_1 \cap \alpha \Rightarrow P_1$  — лежит в другой части тетраэдра, т.е. при симметрии относительно  $MN$  эти части тетраэдра переходят друг в друга.



### С-7

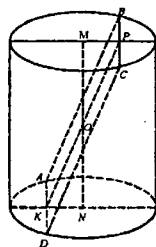
1. Дано: цилиндр, высота  $MN$  равна  $a$ ,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AD = a$ , угол между  $AB$  и основанием равен  $60^\circ$ .

**Найти:** площадь осевого сечения.

**Решение:** Проведем среднюю линию  $KP \cap MN = O$ .

$\triangle ONK$  — прямоугольный,  $ON = \frac{a}{2}, \angle OKN = 60^\circ \Rightarrow KN =$

$$ON \cdot \operatorname{ctg} \angle OKN = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}.$$



В равнобедренном  $\triangle AND$   $AD = a$ ,  $NK = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = R.$$

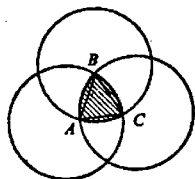
Площадь осевого сечения  $2R \cdot MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ .

Ответ:  $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ .

2. Дано:  $DABC$  — правильная призма, все ребра равны  $a$ ,  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  — оси цилиндрических поверхностей радиуса  $a$ .

Найти: площадь поверхности тела, ограниченно цилиндрическими поверхностями и плоскостями оснований призмы.

Решение: Боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой  $a$  и радиусом основания  $a$ .



$$S = \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot a \cdot a) = \pi a^2.$$

Ответ:  $\pi a^2$ .

### С—8

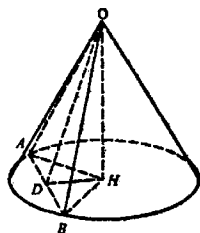
1. Дано: конус, центральный угол в развертке боковой поверхности равен  $270^\circ$ . Через вершину проведено сечение наибольшей площади.

Найти: угол между сечением и основанием.

Решение: Т.к.  $\alpha$  — центральный угол развертки,

$$\text{то } \alpha = \frac{R}{L} \cdot 2\pi = \frac{2\pi \cdot 3}{4}, \frac{R}{L} = \frac{3}{4}.$$

Наибольшее сечение — треугольник с углом между образующими, синус которого наибольший, т.е. равен  $90^\circ$ . Значит, угол  $AOB$  равен  $90^\circ$ . Гипотенуза  $AB = \sqrt{2}L$ . Высота  $\triangle AOB$   $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}L$



А из прямоугольного  $\triangle OHB$ :

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{L^2 - \frac{9}{16}L^2} = L \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Окончательно имеем из  $\triangle OHD$  (синус искомого угла)

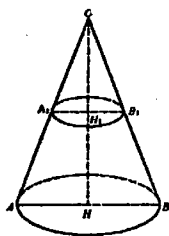
$$\sin(\angle ODH) = \frac{OH}{OD} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}; \angle ODH = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4}$$

Ответ:  $\arcsin \sqrt{14}/4$ .

2. Дано: конус,  $OH$  — высота,  $H_1 \in OH$ ,  $OH_1 = H_1H$ ,  $\alpha \parallel$  основанию,  $H_1 \in \alpha$ . Отношение полных поверхностей образовавшихся фигур равно 3 : 1.

Найти:  $\angle OAH$ .

Решение: Обозначим усеченный конус цифрой II, а верхний конус цифрой I.



$$S_{\text{бок. конуса}} = \pi L \cdot R; S_{\text{бок. I}} = \pi \frac{L}{2} \cdot \frac{R}{2}$$

$$S_{\text{конуса}} = \pi LR + \pi R^2; S_I = \frac{\pi}{4} RL + \frac{\pi}{4} R^2, \text{ где } R, L \text{ — образующая и высота}$$

цилиндра.

$$S_{II} = S_{\text{конуса}} - S_{\text{бок. I}} + \frac{\pi}{4} R^2 = \pi LR + \pi R^2 - \frac{\pi LR}{4} + \frac{\pi}{4} R^2 = \frac{3\pi LR}{4} + \frac{5}{4} \pi R^2.$$

$$\text{Причем } \cos \angle OAH = \frac{R}{L}.$$

$$\text{Тогда } S_I = \frac{\pi}{4} R^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} R^2, S_{II} = \frac{3}{4} \pi R^2 \cos \alpha + \frac{5}{4} \pi R^2.$$

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{\frac{\pi}{4} R^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} R^2}{\frac{3}{4} \pi R^2 \cos \alpha + \frac{5}{4} \pi R^2} = \frac{3}{11}; \frac{\cos \alpha + 1}{3 + 5 \cos \alpha} = \frac{3}{11}$$

$$11 \cos \alpha + 11 = 9 + 15 \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{1}{2}; \angle OAH = \alpha = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

## C—9

1. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = a$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ,  $AD$  — биссектриса,  $MN \parallel AD$ ,  $B \in MN$ ,  $\triangle ABC$  вращается вокруг  $MN$ .

Найти: площадь поверхности тела вращения.

Решение:

Поверхность тела вращения состоит из поверхностей усеченного конуса и двух конусов. Обозначим поверхность усеченного конуса I, ее площадь равна (см. рисунок)

$$S_I = \pi \cdot AC \cdot (AK + CP).$$

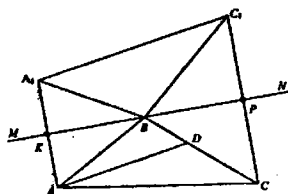
$$\text{Площади двух конусов: } S_{II} = \pi \cdot KA \cdot AB; S_{III} = \pi \cdot BC \cdot PC.$$

Из равнобедренного  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 2a^2 + a^2 = 3a^2; AC = \sqrt{3} \cdot a.$$

$$\text{В } \triangle ABC: \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle KBA = 15^\circ$$

$$\angle PBC = 180^\circ - \angle KBA - \angle ABC = 180^\circ - 15^\circ - 120^\circ = 45^\circ$$



Из прямоугольного  $\triangle BPC$ :  $BP = PC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Из прямоугольного  $\triangle BKA$ :  $KA = a \sin 15^\circ$ .

$$S = S_I + S_{II} + S_{III} = \pi \cdot a\sqrt{3} \left( a \sin 15^\circ + \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \pi a \sin 15^\circ \cdot a + \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= \pi a^2 (\sqrt{3} + 1) \left( \sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Ответ:  $\pi a^2 (\sqrt{3} + 1) \left( \sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

2. Дано:  $OABCDE$  — правильная пятиугольная пирамида,  $HF \perp CD$ ,  $OF \perp CD$ ,  $\angle HCO = \varphi$ . В  $OABCDE$  вписан конус, образующая  $OF = m$ .

Найти: площадь осевого сечения конуса.

Решение:  $\angle CHF = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = \beta$ . Пусть  $\angle HOF = \alpha$ ,

тогда из  $\triangle OHF$ :  $OH = m \cos \alpha$ ,  $HF = m \sin \alpha$ .

Из  $\triangle HFC$ :  $HC = \frac{HF}{\cos \beta} = \frac{m \sin \alpha}{\cos \beta}$ ;

$$FC = HF \cdot \operatorname{tg} \beta = m \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Из прямоугольного  $\triangle OHC$

$$OC = \frac{OH}{\sin \varphi} = \frac{m \cos \alpha}{\sin \varphi} \quad (1)$$

Из прямоугольного  $\triangle OCF$

$$OC = \sqrt{OF^2 + FC^2} = \sqrt{m^2 + m^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2) имеем  $\frac{m^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} = m^2 (1 + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta)$ ;

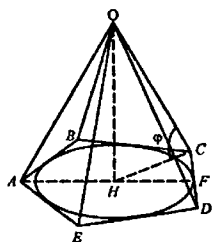
$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} = 1 + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta; \quad \sin^2 \alpha \left( \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1};$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{m^2}{2} \cdot \sin(2\angle HOF) = \frac{m^2}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= m^2 \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{m^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \sqrt{(\operatorname{tg}^2 \beta + 1)}}{(\operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 1)} = \frac{m^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\left( \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi + 1 \right) \cos \frac{\pi}{5}}$$

Ответ:  $\frac{m^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\left( \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi + 1 \right) \cos \frac{\pi}{5}}$ .



1. Дано: сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $A \in$  сфере,  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, z)$ ,  
 $B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $AB \cap$  сфера =  $A, C$ .

Найти: координаты точек  $A, C$ .

Решение: Условие того, что  $A \in$  сфере, равносильно условию  
 $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + z^2 = 4$  или  $z = 0$ .  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

$C$  лежит на прямой  $AB \Rightarrow \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ . Пусть  $C(x, y, z)$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = -2k\sqrt{2} \\ y - \sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} - 2k\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} + k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2} \end{cases}.$$

$C$  также лежит на сфере  $\Rightarrow (\sqrt{2} - 2k\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + k\sqrt{2})^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4$ ;  
 $2 - 8k + 8k^2 + 2 + 4k + 2k^2 + 2k^2 = 4$ ;  $12k^2 - 4k = 0$ ;  $3k^2 - k = 0$ ;

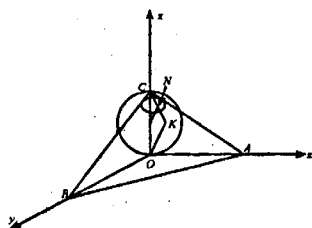
$$k = 0, k = \frac{1}{3}. \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}; C\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right); A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

Ответ:  $C\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$  и  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ .

2. Дано:  $A, B, C \in \alpha$ ,  $A(3, 0, 0)$ ,  
 $B(0, 4, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,

$$\text{сфера } x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{169}.$$

Определить, пересекает ли  $\alpha$  сферу, или да, то найти длину линии пересечения.



Решение:  $\overrightarrow{AB} \{-3, 4, 0\}$ ,  $\overrightarrow{AC} \{-3, 0, 1\}$ .

Найдем координаты вектора  $\vec{n} \perp \alpha$ ,  $\vec{n} \{x, y, z\}$ .

$$(\vec{n}, \overrightarrow{AB}) = -3x + 4y = 0; (\vec{n}, \overrightarrow{AC}) = -3x + z = 0.$$

$$\vec{n} \left\{1, \frac{3}{4}, 3\right\}; |\vec{n}| = \frac{13}{4}. \vec{n}_1 \left\{\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right\}; |\vec{n}_1| = 1. \vec{n} \text{ и } \vec{n}_1 \text{ сонаправлены.}$$

Радиус сферы  $\overline{O_1N}$  имеет длину  $\frac{7}{13}$ .

Опустим перпендикуляр  $OK$  из начала координат на плоскость  $\alpha$ .

$$\overrightarrow{OK} = k \vec{n}_1 \left\{k \frac{4}{13}, k \frac{3}{13}, k \frac{12}{13}\right\}.$$

Уравнение плоскости имеет вид  $4x + 3y + 12z + d = 0$ .

Т.к.  $A \in \alpha$ , то  $4 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = -12$ .

Значит, уравнение плоскости:  $4x + 3y + 12z = 12$ .

Точка  $K$  принадлежит  $\alpha$ :  $4k \cdot \frac{4}{13} + k \frac{9}{13} + k \frac{144}{13} = 12$ .

$13k = 12$ ;  $k = \frac{12}{13}$  — длина  $\overline{OK}$ .

Следовательно, средняя линия  $O_1K_1 \Delta OKC$ :  $O_1K_1 = \frac{6}{13} < \frac{7}{13} = O_1N \Rightarrow$

плоскость  $\alpha$  пересекает окружность.

Получившееся сечение — круг с радиусом  $r = \sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2 - \left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ .

$\Rightarrow$  линия пересечения — окружность, длина ее равна  $l = 2\pi \frac{\sqrt{13}}{13}$ .

Ответ:  $2\pi \frac{\sqrt{13}}{13}$ .

## С—11

1. Дано: шар  $(O, R)$ , два его сечения  $(O_1, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$ ,  $(O_1, R_1) \perp (O_2, R_2)$ ,  $S((O_1, R_1)) = 100\pi$ ,  $S((O_2, R_2)) = 64\pi$ , сечения имеют общую хорду  $MN = 12$ .

Найти:  $R$ .

Решение:  $R_1 = \sqrt{100} = 10$ ;  $R_2 = \sqrt{64} = 8$ .

Из прямоугольного  $\Delta O_1PM$  находим катет  $O_1P$ :

$$O_1P = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 = OO_2 \text{ (т.к.}$$

$OO_2PO_1$  — прямоугольник)  $\Rightarrow$  в прямоугольном  $\Delta AOO_2$  катеты  $OO_2 = 8$ ,  $AO_2 = 8 \Rightarrow R = AO = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$ .

Ответ:  $8\sqrt{2}$ .

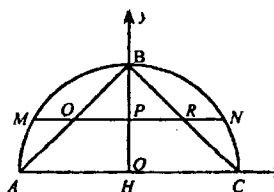
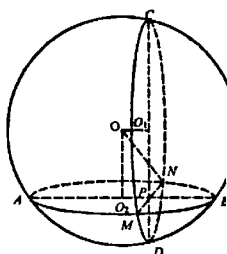
2. Дано: конус и полушар с общим основанием, плоскость  $\alpha \parallel$  основанию,  $OA = R$ , площадь сечения (кольца) наибольшая,  $\angle ABC = 90^\circ$

Найти:  $h$  — расстояние от  $\alpha$  до основания.

Решение. Высота конуса  $BH = R = HC$ .

Введем прямоугольную систему координат и рассмотрим осевое сечение фигуры плоскостью  $xOy$ .

Найдем площади  $S_1$  и  $S_2$  кругов с радиусами  $PR$  и  $PN$ .  $PR = PB = R - h$



Точка  $N$  лежит на круге радиуса  $R$ , тогда  $PN^2 + h^2 = R^2$ ,  $PN^2 = R^2 - h^2$

Площадь кольца равна:

$$S = S_2 - S_1 = \pi(R^2 - h^2) - \pi(R - h)^2 = \pi R^2 - \pi h^2 - \pi R^2 + 2\pi R h - \pi h^2 = 2\pi R h - 2\pi h^2; 0 < h < R.$$

$S = 2\pi h(R - h)$  — найдем максимум этой величины:

$$S'(h) = 2\pi(R - h) - 2\pi h = 2\pi R - 4\pi h.$$

$$S'(h) = 0; h = 2R \text{ — точка максимума} \Rightarrow h = \frac{R}{2}.$$

Ответ:  $\frac{R}{2}$ .

## С—12

1. Дано: шар  $(O, R)$ . В шар вписана пирамида  $EABCD$ ,  $ABCD$  — квадрат,  $EA \perp (ABCD)$ ,  $\angle ECA = 30^\circ$ .

Найти:  $S$  боковой поверхности  $EABCD$ .

Решение:  $\triangle EAC$  — прямоугольный  $\Rightarrow \angle EAC = 90^\circ$ ,  $\angle ECA = 30^\circ \Rightarrow EC = 2R$ ,  $\angle ECA = 30^\circ \Rightarrow AE = R$ ;

$$AC = 2R \cos 30^\circ = 2R \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R.$$

$$AB = AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}R.$$

Из равных прямоугольных  $\triangle EAD = \triangle EAB$ :

$$ED = EB = \sqrt{R^2 + \frac{6}{4}R^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}R \Rightarrow S(EDC) = S(EB'C) = \frac{1}{2} DC \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}R \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}R = \frac{2\sqrt{15}}{8}R^2 = \frac{\sqrt{15}}{4}R^2.$$

$$S_{\text{бок.}} = 2S(EDC) + 2S(EAD) = \frac{\sqrt{15}}{2}R^2 + \frac{2}{2}EA \cdot AD = \frac{\sqrt{15}}{2}R^2 + R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}R = R^2 \left( \frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{2} \right) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

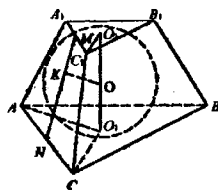
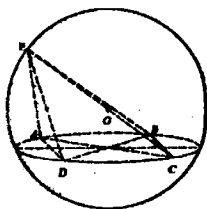
Ответ:  $\frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2})$ .

2. Дано: около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $AB = a$ ,  $A_1B_1 = b$ .

Найти:  $S_{\text{бок.}}(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение:

Рассмотрим сечение  $MNB$ , образованное двумя высотами  $B_1M$  и  $BN$  равносторонних  $\triangle A_1C_1B_1$  и  $\triangle ACB$ . Т.к.  $B_1M$  и  $BN$  — медианы, высоты и биссектрисы, то точки  $O_2$  и





$O_1$  делят их в отношении 2 : 1  $\Rightarrow$  т.к.  $B_1M = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ ,  $BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , то

$$MO_2 = \frac{b\sqrt{3}}{6}, O_1N = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Проведем перпендикуляр  $OK$  к стороне  $MN$  трапеции  $O_2MNO_1$ .

$MO_2 = MK$ ,  $KN = NO_1$  (как отрезки касательных)  $\Rightarrow$

$$MN = MO_2 + NO_1 = (a + b) \frac{\sqrt{3}}{6}, MN \text{ — высота трапеции } AA_1C_1C \Rightarrow$$

$$S_{\text{бок.}}(ABCA_1B_1C_1) = \frac{3}{2}(a + b) \cdot MN = \frac{3}{2}(a + b)(a + b) \frac{\sqrt{3}}{6} = (a + b)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ:  $(a + b)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

### С—13

1 Дано:  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $E, F \in BB_1$ ,  $(AFC) \parallel B_1D$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ .  $FH \perp AC$ ,  $\angle FHB = 45^\circ$ .

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1D_1)$ .

Решение:  $AC \cap BD = E$ . Из  $\triangle ABC$ :

$$BH = \frac{2S(\triangle ABC)}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{48}{10} = 4,8$$

Из  $\triangle FBH$ :  $FB = BH = 4,8$

Но в  $\triangle B_1BD$ :  $FE$  — средняя линия  $\Rightarrow B_1B = 2BF = 9,6$ :

$$V(ABCA_1B_1C_1D_1) = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 6 \cdot 8 \cdot 9,6 = 48 \cdot 48 \cdot 0,2 = 460,8$$

Ответ: 460,8.

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = a = CB$ ,  $CD \perp AB$ ,  $\angle CB_1D = \alpha$ .

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение:  $\alpha$  — угол между  $CB_1$  и  $AA_1B_1B$ , т.к.  $CD$  — перпендикуляр к  $ABB_1A_1$  ( $CD \perp$  линии  $AB$  пересечения перпендикулярных плоскостей  $CAB$  и  $AA_1B_1B$ ).

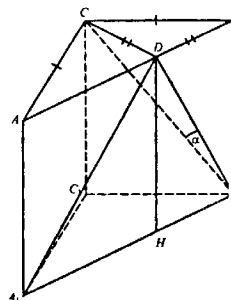
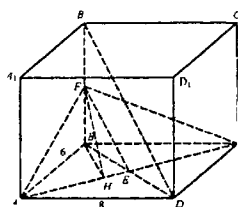
$$CD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + CB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = BD = B_1H,$$

где  $DH$  — высота  $\triangle A_1DB_1$ .

$$\text{Из прямоугольного } \triangle CDB_1: DB_1 = \frac{CD}{\text{tg}\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\text{tg}\alpha}.$$

Из прямоугольного  $\triangle DHB_1$ :

$$DH = \sqrt{DB_1^2 - HB_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2\text{tg}^2\alpha} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{-\text{tg}^2\alpha + 1}}{\text{tg}\alpha} = BB_1$$



$$V(ABCA_1B_1C_1) = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot BB_1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha} \frac{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ответ:  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$

**С -14**

1. Дано:  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильная Шестиугольная призма,  $B_1F = 24$ ,  $B_1E = 25$ .

Найти:  $V(ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1)$ .

Решение: Пусть высота призмы  $h$ , а стороны основания  $a$ , тогда в осевом сечении  $E_1EB_1B$  имеем

$$25 = B_1E = \sqrt{h^2 + 4a^2} \quad (1)$$

Из равнобедренного  $\triangle BOF$ :

$$BF^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 2a^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3a^2.$$

Из сечения  $B_1BFF_1$ :

$$24^2 = B_1F^2 = BF^2 + h^2 = 3a^2 + h^2 \quad (2)$$

Составим систему из (1) и (2):  $\begin{cases} 25^2 = h^2 + 4a^2 \\ 24^2 = h^2 + 3a^2 \end{cases}; \begin{cases} a^2 = 25^2 - 24^2 \\ h^2 = 24^2 - 3a^2 \end{cases};$

$$\begin{cases} a = 7 \\ h = \sqrt{429} = \sqrt{143 \cdot 3} \end{cases}$$

$$V = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot h = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot h = \frac{9}{2} \cdot 49 \cdot \sqrt{143} = \frac{441\sqrt{143}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{441\sqrt{143}}{2}.$

2. Дано: цилиндр, сечение  $AA_1BB_1 \parallel$  оси  $O_1O_2$ ,  $\angle BO_1A = 120^\circ$ .

Найти: отношение объемов частей цилиндра.

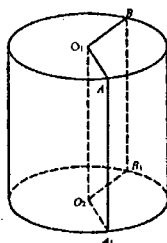
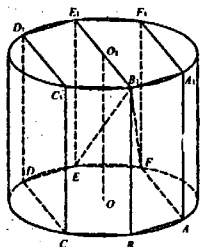
Решение: Найдем площадь большего сегмента.

$$S_1 = \frac{2\pi - \frac{3}{2}\pi}{2\pi} \cdot R^2\pi + \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

$$S_2 = \frac{\frac{3}{2}\pi}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}.$



# С—15

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $\triangle ABC$  — равносторонний,  $AA_1 = AB$ ,  $\angle AA_1C_1 = 45^\circ$ ,  $\angle AA_1B_1 = 45^\circ$ ,  $S_{\text{бок.}}(ABCA_1B_1C_1) = 4(1 + \sqrt{2})$ .

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение: Пусть сторона призмы равна  $a$ , тогда  $S_{\text{бок.}} = S(A_1ACC_1) + S(A_1ABB_1) + S(BB_1C_1C) = a^2 \sin 45^\circ + a^2 \sin 45^\circ + a^2$ .

$$S_{\text{бок.}} = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} + a^2 = a^2 (\sqrt{2} + 1) \quad (BB_1C_1C \text{ — квадрат}).$$

Значит,  $a^2 (\sqrt{2} + 1) = 4(1 + \sqrt{2})$ ;  $a^2 = 4$ ,  $a = 2$ .

Проведем  $C_1E$  и  $B_1E \perp A_1A$ . Сечение  $C_1EB_1 \perp A_1A$ .

Из прямоугольного  $\triangle A_1EC_1$ :  $C_1E = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = B_1E = \sqrt{2}$ .

Вычислим по формуле Герона  $S(B_1EC_1) p = \sqrt{2} + 1$ ;

$$S(B_1EC_1) = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) \cdot 1} = 1. \quad V = A_1A \cdot S(B_1EC_1) = 2.$$

Ответ: 2.

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная треугольная призма. Расстояние от  $B_1B$  до  $A_1C$  равно 5,  $S(AA_1C_1C) = 40$ .

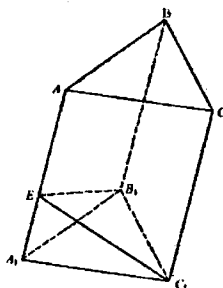
Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение: Расстояние от  $B_1B$  до  $A_1C$  есть расстояние от  $B_1B$  до  $(AA_1C_1C)$ , т.к.  $A_1C \in (AA_1C_1C)$  и  $AA_1C_1C \parallel B_1B$ .

Пусть  $d$  — расстояние от  $B_1B$  до  $AA_1C_1C$ ,  $BB_1 = l$ . Построим сечение призмы, перпендикулярное  $B_1B$ . Пусть сторона сечения, противолежащая  $B_1B$ , равна  $m$ , тогда

$$V = S_{\text{перп. сеч.}} \cdot l = \frac{1}{2} d \cdot m \cdot l = \frac{1}{2} d S(AA_1C_1C) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 100.$$

Ответ: 100.



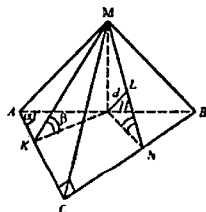
# С—16

1. Дано:  $MABC$  — пирамида,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $(MAB) \perp (ABC)$ ,  $MH \perp (ABC)$ ,  $H \in AB$ ,  $MK \perp AC$ ,  $MN \perp CB$ ,  $K \in AC$ ,  $N \in CB$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle MKH = \angle MNH = \beta$ ,  $HL \perp MCB$ ,  $L \in (MCB)$ ,  $LH = d$ .

Найти:  $V(MABC)$ .

Решение:  $L \in MN$ , т.к.  $HL$  — перпендикуляр к  $(MCB)$  и  $(MHN) \perp (MCB)$  (т.к.  $\angle MNH$  — угол между плоскостями)  $\Rightarrow$  из  $\triangle LHN$  (прямоугольного)

$$HN = \frac{HL}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \beta} = KH. \quad \text{Т.к. } \triangle KHM = \triangle NHM.$$



$$\text{Из прямоугольного } \triangle MHN: MH = HN \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{\cos \beta}$$

$\triangle AKH \sim \triangle ACB \sim \triangle HNB$  по двум углам, поскольку ( $HK \perp AC$ ,  $HN \perp CB$ ,  $AC \perp CB \Rightarrow KH \parallel CB$ ,  $HN \parallel AC$ ), а также  $KC = CN = NH = HK$ .

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AKH: AK = KH \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{d}{\sin \beta} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\Rightarrow AC = AK + KC = \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1).$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle ACB: CB = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{\sin \beta} (1 + \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\Rightarrow V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot \frac{1}{2} AC \cdot CB =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{d}{\cos \beta} \cdot \frac{d}{\sin \beta} (\operatorname{ctg} \alpha + 1) \cdot \frac{d}{\sin \beta} (1 + \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \frac{d^3 (1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + 1)}{6 \cos \beta \sin^2 \beta} = \frac{d^3 \left( 2 + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)}{6 \cos \beta \sin^2 \beta} = \frac{d^3 (\sin 2\alpha + 1)}{3 \cos \beta \sin^2 \beta \sin 2\alpha}$$

$$\text{Ответ: } \frac{d^3 (\sin 2\alpha + 1)}{3 \cos \beta \sin^2 \beta \sin 2\alpha}.$$

2. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AB = a$ ,  $H \in AD$ ,  $BH \perp AD$ ,  $CH \perp AD$ ,  $\angle BHC = \alpha$ .

Найти:  $V(DABC)$ .

Решение: Пусть  $DN$  — высота пирамиды, строим  $AM \perp BC$ ,  $AM \cap DN = N$ , тогда  $MH \perp AD$ .

Итак,  $\triangle DNA \sim \triangle MHA$

$$\Rightarrow \frac{DN}{NA} = \frac{MN}{HA} \Rightarrow DN = \frac{NA \cdot MN}{HA}.$$

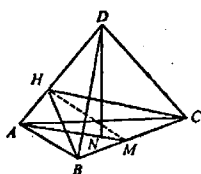
Из прямоугольного  $\triangle ANM$ :  $AN = \sqrt{AM^2 - NM^2}$ , из прямоугольного

$$\triangle BNM: NM = BM \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$AM = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда } AN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$NA = \frac{2}{3} AM = a \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ имеем}$$

$$DN = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot 2}{2a\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$



Итак,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Ответ:  $\frac{a^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$ .

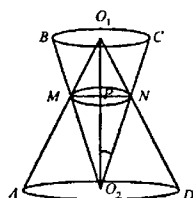
### С—17

1. Дано: два конуса, основания параллельны, вершины каждого лежат в центре основания другого, образующая первого равна  $a = O_2C$ ,  $\angle O_1O_2C = \beta$ .  $\angle AO_1D = \alpha$ .

Найти: объем общей части конусов.

Решение:

Искомый объем равен сумме объемов, получившихся при пересечении поверхностей конусов



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_1P + \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_2P = \frac{1}{3} S_{\text{круга}} (O_1P + O_2P) = \frac{1}{3} S_{\text{круга}} \cdot O_1O_2,$$

где под кругом понимается круг, полученный при пересечении конических поверхностей.

Радиус основания первого конуса  $O_1C = O_2C \cdot \sin \beta = a \sin \beta$ , а высота  $O_1O_2 = a \cos \beta$ .

Наибольший угол между образующими второго конуса — угол между образующими в осевом его сечении.

Рассмотрим осевое сечение нашей фигуры: в нем первая образующая  $O_1D \cap O_2D$ , вторую образующую — в т. N.

$$\text{В } \triangle O_1O_2N: \angle O_1O_2N = \beta, \angle O_2O_1N = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle O_1NO_2 = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

$$O_1O_2 = a \cos \beta.$$

По теореме синусов имеем:

$$\frac{O_1N}{\sin \beta} = \frac{O_1O_2}{\sin \left( 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2} \right)} \Rightarrow O_1N = \frac{O_1O_2 \cdot \sin \beta}{\sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a \cos \beta \sin \beta}{\sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Из прямоугольного  $\triangle O_1PN$ :

$$PN = O_1N \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \beta \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = R.$$

Окончательно получим:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot O_1 O_2 = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \cos \beta =$$

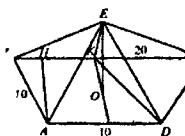
$$= \frac{\pi a^3 \sin^2 \beta \cos^3 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2 \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\pi a^3 \sin^2 2\beta \cdot \cos \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin^2 \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Ответ: 
$$\frac{\pi a^3 \sin^2 2\beta \cdot \cos \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin^2 \left( \beta + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

2. Дано:

$EABCD$  — пирамида,  $ABCD$  — трапеция,  
 $AD \parallel BC$ ,  $AD = 10$ ,  $BC = 20$ ,  $AB = DC = 10$ .

Около  $EABCD$  описан конус,  $V_{\text{конуса}} = \frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$



$EO$  — высота.

Найти  $\alpha = \angle EAO = \angle EBO$

Решение:

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi h}{3} \cdot R^2 = \frac{1000\pi\sqrt{3}}{3},$$

$$hR^2 = 1000\sqrt{3} \quad (h \text{ — высота, } R \text{ — радиус основания}).$$

$$\text{Опустим на } BC \text{ высоту } AH, \quad BH = \frac{BC - AD}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\text{В прямоугольном } \triangle AHB \quad \angle BAH = 30^\circ$$

$$\Rightarrow AH = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \Rightarrow \angle HBA = 60^\circ$$

$$\text{В } \triangle HAC \quad HC = BC - BH = 15 \Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \\ = \sqrt{75 + 225} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3},$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 50\sqrt{3},$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S(ABC)} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 10\sqrt{3}}{4 \cdot 50\sqrt{3}} = 10.$$

$$\text{Далее: } hR^2 = 1000\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{1000\sqrt{3}}{10^2} = 10\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{R} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

С—18

1. Дано.  $ABCA_1B_1C_1$  — усеченная пирамида,  $AB = BC = CA = 12$ ,  $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = 4$ ,  $(AA_1B_1B) \perp (ABC)$ ,  $\angle((BB_1C_1C), (ABC)) = \angle((AA_1C_1C), (ABC)) = 60^\circ$

Найти:  $V_{\text{пирамиды}}$ .

Решение:

Проведем высоту  $FG$  через середины  $F$  и  $G$  сторон  $A_1B_1$  и  $AB$ . Проведем также  $FI \perp B_1C_1$ ,  $GJ \perp BC$ .  $\angle IJG$  — угол между  $(B_1C_1CB)$  и  $(ABC)$ , равный  $60^\circ$ .  $FB_1 = 2$ ,  $GB = 6$ .

Из прямоугольных  $\triangle FIB_1$  и  $\triangle GJB$ :

$$FI = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad GJ = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

В прямоугольной трапеции  $FGJI$  опустим высоту  $IL$ , тогда  $LJ = 2\sqrt{3}$ .  
Высота  $IL = LJ \cdot \sqrt{3} = 6$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} L I (S(A_1B_1C_1) + S(ABC) + \sqrt{S(A_1B_1C_1) \cdot S(ABC)}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 (2\sqrt{3} \cdot 2 + 6\sqrt{3} \cdot 6 + \sqrt{6^2 \cdot 2^2 \cdot 3}) = 2(4 + 36 + 12)\sqrt{3} = 104\sqrt{3}.$$

Ответ:  $104\sqrt{3}$ .

2. Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $AK \parallel BD$  — ось вращения,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $BD \perp BC$ .

Найти:  $V_{\text{тела вращения}}$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle ABD$ :

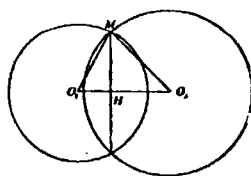
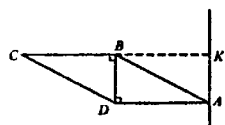
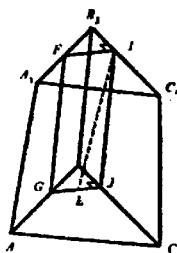
$$\angle ABD = 30^\circ, \quad AD = 3, \quad BD = 3\sqrt{3}, \quad AD = BK = BC = 3.$$

Искомый объем равен разности объемов усеченного конуса с радиусами оснований  $AD = 3$  и  $KC = 6$  и конуса с вершиной  $A$  и радиусом основания  $KD$ .

$$V_{\text{т. вр.}} = \frac{1}{3} BD (\pi \cdot AD^2 + \pi \cdot KC^2 + \pi \cdot AD \cdot KC - \pi \cdot KB^2) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \pi (9 + 36 + 18 - 9) = 54\sqrt{3}\pi.$$

Ответ:  $54\sqrt{3}\pi$ .



С—19

1. Дано: шар  $(O_1, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$ ,  $R_1 = 13$ ,  $R_2 = 20$ ,  $O_1O_2 = 21$ .

Найти: объем общей части шаров.

Решение:

Пусть точка  $M$  принадлежит обоим сферам.

В  $\triangle O_1MO_2$ :  $O_1M = 13$ ,  $O_2M = 20$ ,  $O_1O_2 = 21$ .

$$P = \frac{20+13+21}{2} = 27.$$

$$S(O_1MO_2) = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7} = 7 \cdot 9 \cdot 2 = 126 = \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot MH \Rightarrow \frac{21}{2} MH \Rightarrow$$

$$MH = \frac{126}{21} \cdot 2 = 12.$$

$$\text{В прямоугольном } \triangle O_1HM: \sin \angle HO_1M = \frac{MH}{O_1M} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \cos \angle HO_1M = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow O_1H = O_1M \cdot \cos \angle HO_1M = 13 \cdot \frac{5}{13} = 5$$

$$\Rightarrow HO_2 = O_1O_2 - O_1H = 21 - 5 = 16.$$

Найдем теперь объемы шаровых сегментов и сложим их.

$$V_1 = \pi(13-5)^2 \left(13 - \frac{8}{3}\right) = 64\pi \frac{31}{3}.$$

$$V_2 = \pi(5-1)^2 \left(20 - \frac{4}{3}\right) = 16\pi \frac{56}{3}.$$

$$V = \frac{\pi}{3} (64 \cdot 31 + 16 \cdot 56) = 16\pi \cdot 60 = 960\pi.$$

Ответ:  $960\pi$ .

2. Дано: в конус вписан шар,  $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = 2\frac{1}{4}$ .

Найти: угол наклона образующей.

Решение:

Рассмотрим  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса.

$\triangle ANB \sim \triangle DOB$ . Пусть  $AN = r$ ,  $OD = OH = R$ ,  $BH = h$ .

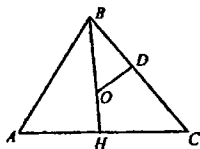
Пусть  $\varphi$  — величина угла между образующей конуса и основанием,

$$\text{тогда } h = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi, r = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Тогда } V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ т.к. } \frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{9}{4}, \text{ то } \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = x > 0, \text{ тогда } 9x^2 - 9x + 2 = 0; x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}.$$





$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ значит, } \varphi = 60^\circ \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ:  $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3}$  или  $60^\circ$ .

ДС

1. Дано: плоскость  $\alpha: x + y - z - 2 = 0$ , точка  $A(1, 1, 1)$ ,  $A_1$  симметрична  $A$  относительно  $\alpha$ .

Найти: координаты  $A_1$ .

Решение: Вектор нормали к плоскости  $\vec{n} \{1, 1, -1\}$ .

$$\overrightarrow{AA_1} \parallel \vec{n}, \quad \overrightarrow{AA_1} = k \cdot \vec{n},$$

пусть  $A_1(x_0, y_0, z_0)$ , тогда  $\overrightarrow{AA_1} \{x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1\}$

$$\begin{cases} x_0 - 1 = k \cdot 1 \\ y_0 - 1 = k \cdot 1 \\ z_0 - 1 = k \cdot (-1) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = k + 1 \\ y_0 = k + 1 \\ z_0 = 1 - k \end{cases}.$$

Точка  $O(x_1, y_1, z_1)$  — середина отрезка  $AA_1$ ,  $O \in$  плоскости  $\alpha$ .

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} k \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} k \cdot \overrightarrow{AA_1}; \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} k + 1 \\ y_1 = \frac{1}{2} k + 1 \\ z_1 = 1 - \frac{1}{2} k \end{cases}.$$

Координаты  $O$  удовлетворяют уравнению плоскости  $\alpha$

$$\left(\frac{1}{2}k + 1\right) + \left(\frac{1}{2}k + 1\right) - \left(1 - \frac{1}{2}k\right) - 2 = 0; \quad \frac{3}{2}k - 1 = 0, \quad k = \frac{2}{3}. \text{ Значит,}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{3} + 1 \\ y_0 = \frac{2}{3} + 1 \\ z_0 = 1 - \frac{2}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 1\frac{2}{3} \\ y_0 = 1\frac{2}{3} \\ z_0 = \frac{1}{3} \end{cases}, \quad A_1\left(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Ответ:  $A_1\left(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

2. Дано: плоскость  $\alpha$ ,  $M \in \alpha$ ,  $M(1, 1, -2)$ ,  $\alpha \cap xOy =$  прямая  $\begin{cases} y - x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ .

Написать уравнение плоскости  $\alpha$ .

Решение:

Пусть уравнение плоскости имеет вид  $Ax + By + Cz + D = 0$ . т.к. при  $z = 0$  получаем  $y - x = 1$  то  $A = -1, B = 1, D = -1$ , получаем  $-x + y + Cz - 1 = 0$ ,

т.к.  $M \in \alpha$ , то  $-1 + 1 - 2C - 1 = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$ , т.е. уравнение плоскости  $\alpha$ :

$$-x + y - \frac{1}{2}z - 1 = 0 \text{ или } 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Ответ:  $2x - 2y + z + 2 = 0$ .

## Вариант 6

### С—1

1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AB = 2$ ,  $\angle DEO = 60^\circ = \beta$ .

Найти: 1) координаты точек  $D, A, B, C$ ;  
2) координаты вектора  $\overrightarrow{OK}$  и разложить его по  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Решение: 1) Точки  $A, B, C \in XOY \Rightarrow z = 0$ .

$$BE = AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Точка } O \text{ делит } BE \text{ в отношении } 2 : 1 \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}, EO = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Значит, } A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right), B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right).$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle EOD: OD = EO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1 \Rightarrow D(0, 0, 1).$$

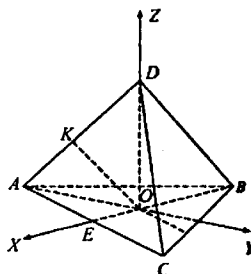
$$2) \text{ Точка } O(0, 0, 0), \overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 1 \right\}, AD = \sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{7}{3}},$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}}, \triangle AKO \sim \triangle AOD \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AO}{AD} \Rightarrow$$

$$AK = \frac{AO \cdot AO}{AD} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}.$$

$$\text{Но } \overrightarrow{AK} \text{ и } \overrightarrow{AD} \text{ коллинеарны} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{4}{7} \overrightarrow{AD}$$

$$\left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{21}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7} \right\} \Rightarrow K\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{21}, -1 + \frac{4}{7}, \frac{4}{7}\right), K\left(\frac{\sqrt{3}}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right).$$



$$\overrightarrow{OK} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{7} \vec{i} - \frac{3}{7} \vec{j} + \frac{4}{7} \vec{k}.$$

Ответ: 1)  $A \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -1, 0 \right)$ ;  $B \left( -\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right)$ ;  $C \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0 \right)$ ;  $D(0, 0, 1)$

2)  $\overrightarrow{OK} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{7} \vec{i} - \frac{3}{7} \vec{j} + \frac{4}{7} \vec{k}.$

2. Дано:  $\vec{m} \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{n} \{3, 4, -2\}$ ,  $\vec{p} \{10, y, 2\}$ .

Найти  $y$ , при котором  $m, n, p$  — компланарны

Решение: Векторы  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$  — компланарны, если  $\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$ , т.е.:

$$\begin{cases} 10 = 2a + 3b \\ y = -a + 4b \\ 2 = 3a - 2b \end{cases}; \begin{cases} b = \frac{3}{2}a - 1 \\ 10 = 2a + \frac{9}{2}a - 3 \\ y = -a + 4b \end{cases}; \begin{cases} b = \frac{3}{2}a - 1 \\ 13a = 26 \\ y = -a + 4b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Ответ:  $y = 6$ .

## С—2

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $BB_1 = 8$ ,  $P \in BB_1$ ,  $BP = PB_1$ ,  $Q \in CC_1$ ,  $(APQ) \parallel BC$ ,  $K$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle APQ$ .

Найти:  $KM$ .

Решение: Во-первых,  $PQ \parallel BC$ ,  $Q \in CC_1$ ,  $CQ = QC_1$  (т.к.  $(APQ) \parallel BC$ ). Введем прямоугольную систему координат  $Bxyz$ , как показано на рисунке.

$K$  — середина  $AC$  — гипотенузы  $\Rightarrow$  т.к.  $A(0, 6, 0)$ ,  $C(8, 0, 0)$ ,  $K(4, 3, 0)$ ,  $BP = CQ = \frac{1}{2} BB_1 = 4 \Rightarrow P(0, 0, 4)$ ,  $Q(8, 0, 4)$ .

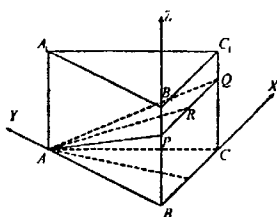
$R$  — середина  $PQ$ ;  $R(4, 0, 4)$ ,  $\overrightarrow{AR} \{4, -6, 4\}$ .

$M$  — точка пересечения медиан  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AR} \left\{ \frac{8}{3}, -4, \frac{8}{3} \right\}$ .

Значит, точка  $M$  имеет координаты:  $M \left( \frac{8}{3}, 2, \frac{8}{3} \right)$ . Отсюда

$$\overrightarrow{KM} \left\{ 4 - \frac{8}{3}, 3 - 2, -\frac{8}{3} \right\}, \overrightarrow{KM} \left\{ \frac{4}{3}, 1, -\frac{8}{3} \right\}; |\overrightarrow{KM}| = \sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{89}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{89}}{3}$ .



Найдем  $S(EB_1F)$  по формуле Герона

$$p = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{21}}{8}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{21}}{8}$ .

**С—4**

1. Дано:

$DABC$  — пирамида,  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $BC = AC = 1$ ,  $BD = 2$ ,  
 $BD \perp (ABC)$ ,  $E \in DC$ ,  $DE = EC$ ,  $GEF$  — сечение,  
 $GEF \perp DC$ .

Найти:

угол между  $AD$  и  $GEF$ .

Решение:

$DC \perp CA$  по теореме о трех перпендикулярах,  $DC \perp EF$  по построению  
 $\Rightarrow EF \parallel CA$ ,  $EF$  — средняя линия прямоугольного  $\triangle DCA$ .

$$EF = \frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} \text{ и } DE = EC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \sqrt{BD^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (из пря-}$$

моугольного  $\triangle DBC$  по теореме Пифагора).

Угол между  $DA$  и плоскостью  $(GEF)$  равен  $\angle DFE$ .

Из прямоугольного  $\triangle DEF$

$$\operatorname{tg} \angle DFE = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{5}; \angle DFE = \operatorname{arctg} \sqrt{5}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$ .

2. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AB = 2$ ,  $BC = AA_1 = 1$ .

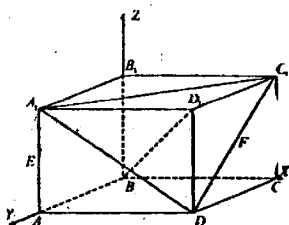
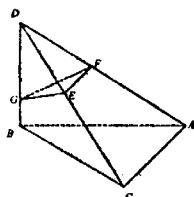
Доказать, что  $BD_1$  и  $(A_1 C_1 D)$  не перпендикулярны.

Доказательство: Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

В ней координаты точек:  $B(0, 0, 0)$ ,  $C_1(1, 0, 1)$ ,

$D(1, 2, 0)$ ,  $D_1(1, 2, 1)$ ; векторов:  $\overrightarrow{BD_1} \{1, 2, 1\}$ ,  $\overrightarrow{C_1 D} \{0, 2, -1\}$ .

Убедимся, что  $\overrightarrow{BD_1}$  не перпендикулярен хотя бы одному из плоскости



$$(A_1C_1D): (\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{C_1D}) = 0 + 4 - 1 = 3 \neq 0,$$

значит,  $BD_1$  и  $(A_1C_1D)$  не перпендикулярны.

### С—5

1. Дано:

плоскость  $\alpha$ ,  $Ox \in \alpha$ , прямая  $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \in \alpha$ ,  $B_1$  и  $B(0$ ,

$20, 10)$  зеркально симметричны относительно  $\alpha$ .

Найти: координаты  $B_1$ .

Решение:

Плоскости  $\alpha$  перпендикулярен вектор  $\vec{n} \{0, 1, -1\}$ .

Пусть  $K$  — основание перпендикуляра  $KB$  к  $\alpha$ , тогда

$$\overrightarrow{BK} = \{x_0, y_0 - 20, z_0 - 10\} = k \cdot \vec{n} \{0, k, -k\} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 20 = k \\ z_0 - 10 = -k \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = k + 20 \\ z_0 = 10 - k \end{cases} \Rightarrow$$

$K \in$  плоскости  $O_{yz}$ , значит, и прямой  $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ , поэтому  $k+20=10-k$ ,  $k=-5$ ,

$K(0, 15, 15)$ ,  $\overrightarrow{BK} \{0, -5, 5\}$ . Но  $BB_1 = 2\overrightarrow{BK} \Rightarrow \overrightarrow{BB_1} \{0, -10, 10\}$  и  $B_1(0, 20-10, 10+10)$ ,  $B_1(0, 10, 20)$ .

Ответ:  $(0, 10, 20)$ .

2. Дано:

отображение:  $\forall$  точка  $(x, y, z) \rightarrow (x-5, y+3, z-7)$ .

Решение:

Возьмем две точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $B(x_1, y_1, z_1)$ .

$A \rightarrow A_1(x_0-5, y_0+3, z_0-7)$ ;  $B \rightarrow B_1(x_1-5, y_1+3, z_1-7)$ ;

$$\overrightarrow{AB} \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} = \overrightarrow{A_1B_1}$$

и значит,  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$ , т.е. данное отображение сохраняет расстояние между точками  $\Rightarrow$  оно — движение.

Ответ: да, является.

### С—6

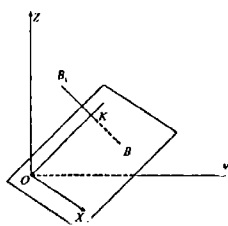
1. Дано:

параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AC_1 \cap BD_1 = O$ .

Доказать:  $O$  — центр симметрии  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Доказательство:

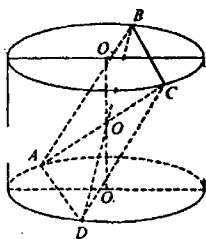
Все вершины параллелепипеда переходят в вершины при симметрии относительно точки  $O$  — пересечения диагоналей, аналогично все ребра переходят в противоположные и грани переходят в противоположные грани. Следовательно,  $O$  — центр симметрии.



2. Дано: параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AC_1 \cap BD_1 = O$ .

Доказать:  $\forall$  плоскость  $\alpha$  такая, что  $O \in \alpha$ , делит  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на две равные части.

Доказательство: Т.к.  $O$  — центр симметрии, а центральная симметрия переводит все точки, лежащие по одну сторону от плоскости, данной в условии, в точки, лежащие по другую сторону, сохраняя расстояния, имеем, что  $\forall$  плоскость делит параллелепипед на равные части.



### С—7

1. Дано: цилиндр,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AB = 2 \cdot AD$ ,  $AD, BC \in$  основаниям цилиндра,  $O_1 O_2$  — высота и ось цилиндра,  $O_1 O_2 = 5$ ,  $O_1 A = 2\sqrt{5}$ ,  $(ABCD) \cap O_1 O_2$ .

Найти:  $S(ABCD)$ .

Решение:

$(ABCD) \cap O_1 O_2 = O$  — середина  $O_1 O_2$  (других случаев нет) и  $O = AC \cap BD$ .

В прямоугольном  $\triangle AO_1 O$   $AO_1 = 2\sqrt{5}$ ,  $O_1 O = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 \cdot 5} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = \sqrt{105}.$$

Пусть  $AD = x$ , тогда  $AB = 2x$ ,

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2} = x\sqrt{5} = \sqrt{105}.$$

Отсюда получим, что  $x = \sqrt{21}$ , т.е.  $AD = \sqrt{21}$ ,  $CD = 2\sqrt{21}$

$$S = AD \cdot CD = 2\sqrt{21} \cdot \sqrt{21} = 42.$$

Ответ: 42.

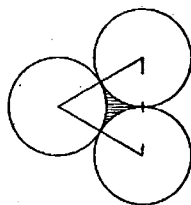
2. Дано: правильная треугольная призма, все ребра равны  $a$ , боковые ребра — оси цилиндров радиуса  $\frac{a}{2}$ .

Найти:  $S_{\text{бок}}$  тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями внутри призмы.

Решение: Площадь искомой поверхности равна половине площади боковой поверхности одного из цилиндров

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} a \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

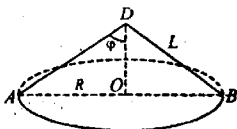
Ответ:  $\frac{\pi a^2}{2}$



### С—8

1. Дано: конус, угол при центральной развертке  $200^\circ = \alpha$ . Через вершину  $D$  проведено сечение наибольшей площади.

Найти: угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.



Решение:  $S_{\text{бок. конуса}} = \frac{\alpha}{2\pi} L^2 \pi$  через центральный угол развертки.

$S_{\text{бок. конуса}} = \pi R \cdot L = \pi L^2 \sin \varphi$  (через угол между образующей и высотой  $\angle \varphi = \angle ODB$ )

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} L^2 \pi = \pi L^2 \sin \varphi; \quad \frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot L^2 = \pi L^2 \sin \varphi;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{5}{9} = \sin \varphi \Rightarrow \angle \varphi < 45^\circ.$$

Значит,  $\angle ADB = 2\varphi < 90^\circ$  — угол при осевом сечении.

Т.к.  $S_{\text{сечения}} = \frac{1}{2} L^2 \cdot \sin \beta$  — наибольшая, то сечение — осевое, т.к. угол при осевом сечении наибольший.

Таким образом угол между плоскостью сечения и основанием равен  $\pi/2$ .

Ответ:  $\pi/2$ .

2. Дано: усеченный конус,  $O_1O_2$  — ось,  $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$   $O$

$\in O_1O_2$ ,  $O_1O = OO_2$ , через  $O$  проведено сечение, параллельное основаниям. Полные поверхности частей относятся как 23 : 29.

Найти:  $\angle BAO_1 = \alpha$  (угол наклона образующей).

Решение: В трапеции  $AO_1O_2B$  (прямоугольной)  $CO$  — средняя линия.

Пусть  $BO_2 = r$ ,  $AO_1 = R \Rightarrow CO = \frac{r+R}{2}$ ,

Достроим конус до полного с вершиной  $D$ . Т.к.  $\frac{BO_2}{AO_1} = \frac{1}{2}$ , то  $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$

$$2BD = AD = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad BD = AB = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Т.к.  $CO$  — средняя линия трапеции  $AO_1O_2B$ , то

$$AC = BC = \frac{AB}{2} = \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Тогда получаем следующие формулы:

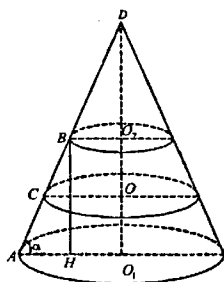
$$S_{\text{полн1}} = \pi BC \cdot (BO_2 + CO) + \pi BO_2^2 + \pi CO^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left( r + \frac{R+r}{2} \right) + \pi r^2 + \pi \left( \frac{R+r}{2} \right)^2.$$

$$S_{\text{полн2}} = \pi \cdot AC(CO + AO_1) + \pi CO^2 + \pi AO_1^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{R+r}{2} + R \right) + \pi \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 + \pi R^2.$$

Учитывая, что  $R = 2r$  получим:



$$\frac{S_{\text{полн1}}}{S_{\text{полн2}}} = \frac{\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left( r + \frac{3r}{2} \right) + \pi r^2 + \frac{9\pi r^2}{4}}{\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \left( 2r + \frac{3r}{2} \right) + \frac{9\pi r^2}{4} + 4\pi r^2} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{5}{4} + \frac{13}{4}}{\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{7}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\frac{5}{\cos \alpha} + 13}{\frac{7}{\cos \alpha} + 25} = \frac{23}{39}$$

$$\frac{195}{\cos \alpha} + 507 = \frac{161}{\cos \alpha} + 575, \quad \frac{34}{\cos \alpha} = 68, \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 2, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}; \alpha = 60^\circ$$

Ответ:  $60^\circ$ .

### С—9

1. Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $P(ABCD) = P$ ,  $BD = d$ ,  $l \perp BD$ ,  $D \in l$ ,  $l$  — ось вращения.

Найти:  $S_{\text{пов. тела вращения}}$ .

Решение:  $S_{\text{т. вр.}} = \pi AD \cdot AK + \pi DC \cdot CL + \pi AB(AK + BD) + \pi BC(BD + CL)$ .

Но  $AB + BC = \frac{P}{2} = AD + DC$  и  $AK = MD$ ,  $CL = ND$ ,  $AK + CL = d$ .

$$\begin{aligned} S_{\text{т. вр.}} &= \pi \cdot \left[ \left( \frac{P}{2} - AB \right) \cdot AK + AB \cdot (d - AK) + AB(AK + d) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{P}{2} - AB \right) (d + d - AK) \right] = \pi \cdot \left[ \frac{P}{2} AK - AB \cdot AK + AB \cdot d - AB \cdot AK + \right. \\ &+ \left. AB \cdot AK + AB \cdot d + P \cdot d - \frac{P}{2} AK - 2d \cdot AB + AB \cdot AK \right] = \pi \cdot P \cdot d. \end{aligned}$$

Ответ:  $\pi P d$ .

2. Дано:  $PABCDE$  — правильная пирамида,  $F \in ED$ ,  $EF = FD$ ,  $\angle OFP = \varphi$ , конус описан вокруг  $PABCDE$ ,  $PA = L$ .

Найти:  $S$  осевого сечения конуса.

Решение: В равнобедренном  $\triangle EOD$   $\angle EOD = 72^\circ \Rightarrow \angle EOF = 36^\circ$ .

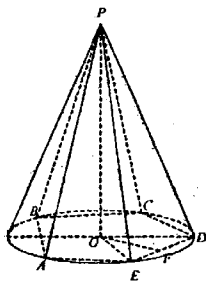
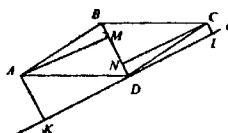
Пусть  $OE = R \Rightarrow$  из прямоугольного  $\triangle OFE$ :

$$OF = R \cos \frac{\pi}{5}, \quad EF = R \sin \frac{\pi}{5}.$$

Из прямоугольного  $\triangle OFP$ :  $PF = \frac{OF}{\cos \varphi} = \frac{R \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \varphi}$ ;  $OP = OF \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \varphi$ .

Из прямоугольного  $\triangle PFE$ :  $PE^2 = PF^2 + EF^2$ ;

$$L^2 = \frac{R^2 \cos^2 \frac{\pi}{5}}{\cos^2 \varphi} + R^2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = R^2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{5} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) = R^2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 \right)$$





$$\Rightarrow R^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \frac{\pi}{5} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1} = \frac{L^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg}^2 \varphi};$$

$$S_{\text{ос.сеч}} R \cdot OP = R^2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} \varphi = \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{ctg} \varphi}{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg}^2 \varphi}$$

$$\text{Ответ: } \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{ctg} \varphi}{\cos^2 \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg}^2 \varphi}.$$

### С—10

1. Дано:  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(3, 0, 2)$ , прямая  $AB \cap$  сферу  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{17}{4}$  в точках  $C, D$ .

Найти: координаты  $C, D$ .

Решение: Как видно из уравнения сферы, точка  $A$  — центр сферы радиуса  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ .  $\overrightarrow{AB} \{2, -2, 3\}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ,

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \left\{ 1, -1, \frac{1}{2} \right\}, \overrightarrow{AD} \left\{ -1, 1, -\frac{3}{2} \right\}. C \left( 2, 1, \frac{1}{2} \right), D \left( 0, 3, -2\frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } \left( 2, 1, \frac{1}{2} \right) \text{ и } \left( 0, 3, -2\frac{1}{2} \right).$$

2. Дано:  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 3)$ ,  $C(0, 1, 0)$ , сфера  $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + z^2 = R^2$ .

Выяснить взаимное расположение плоскости  $(ABC)$  и сферы в зависимости от  $R$ .

Решение:

$\overrightarrow{AB} \{-2, 0, 3\}$ ,  $\overrightarrow{AC} \{-2, 1, 0\}$ , вектор  $\vec{n} \perp (ABC)$ ,  $\vec{n} \{x, y, z\}$

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}) = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0 \end{cases} \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = 2x \end{cases}. \vec{n} \{3, 6, 2\}, |\vec{n}| = \sqrt{9+36+4} = 7.$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$3x + 6y + 2z + d = 0$$

т.к.  $A \in$  плоскости, то  $6 + d = 0 \Rightarrow d = -6$ .

Значит, уравнение плоскости  $ABC$ :  $3x + 6y + 2z - 6 = 0$ .

Точка  $D \left( 0, \frac{2}{3}, 0 \right)$  — центр сферы.

Пусть  $N$  — основание перпендикуляра  $DN$ , опущенного на  $(ABC)$ .

$$\overrightarrow{DN} = k \cdot \vec{n}, N(x_0, y_0, z_0)$$

$$\overrightarrow{DN} \left\{ x_0, y_0 - \frac{2}{3}, z_0 \right\} = \{3k, 6k, 2k\} \cdot \begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 6k + \frac{2}{3} \\ z_0 = 2k \end{cases}$$

$$\text{Но } N \text{ лежит в } (ABC) \Rightarrow 3(3k) + 6\left(6k + \frac{2}{3}\right) + 4z - 6 = 0,$$

$$(9 + 36 + 4) \cdot k = 2, k = \frac{2}{49}. \text{ Значит, } |\overrightarrow{DN}| = k \cdot 7 = \frac{2}{7}.$$

Поэтому при  $R < \frac{2}{7}$  сфера не пересекает плоскость;

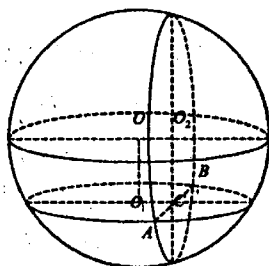
при  $R = \frac{2}{7}$  сфера и плоскость касаются;

при  $R > \frac{2}{7}$  сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Ответ:  $R < \frac{2}{7}$  — сфера не пересекает плоскость;

$R = \frac{2}{7}$  — сфера касается плоскости;

$R > \frac{2}{7}$  — сфера пересекает плоскость.



### С—11

1. Дано: сфера  $(O, R)$ ,  $S_{\text{большого круга}} = 50\pi$ , два сечения  $(O_1, R_1) \perp (O_2, R_2)$ ,  $(O_1, R_1) \cap (O_2, R_2) = AB$ ,  $AB = 6$ ,  $S((O_1, R_1)) = 25\pi$ .

Найти:  $OO_1, OO_2$ .

Решение:  $C \in AB$ ,  $AC = CB = 3$ ,  $OO_1CO_2$  — прямоугольник.

$$S(O, R) = R^2\pi = 50\pi \Rightarrow R^2 = 50; R = 5\sqrt{2} = OA.$$

$$S(O_1R_1) = 25\pi; R_1 = 5 = O_1A. \Rightarrow \text{Из прямоугольного } \triangle OO_1A:$$

$$O_1O = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{50 - 25} = 5.$$

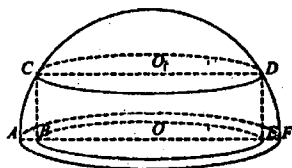
$$O_1C = OO_2 \text{ находим из прямоугольного } \triangle O_1CA$$

$$O_1C = \sqrt{O_1A^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Ответ: 4 и 5.

2. Дано: полушар,  $\alpha$  параллельна основанию, пересекает полушар сечение — верхнее основание цилиндра, нижнее лежит на основании полушара,  $S_{\text{бок. цилиндра}}$  наибольшая.

Найти:  $O_1O$ .



Решение: Пусть радиус шара равен  $R$ ,  $O_1O = h$ ,  $0 < h < R$ ,  $CO_1 = \sqrt{R^2 - h^2}$ .

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot O_1O \cdot CO_1 = \pi h \sqrt{R^2 - h^2}.$$

$$S(h) = \pi \sqrt{R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{R^2 - h^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - h^2}} (R^2 - h^2 - h^2),$$

$$S'(h) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - h^2}} (R^2 - 2h^2) = 0. \quad h^2 = \frac{R^2}{2}, \quad h = R \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $R \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## С—12

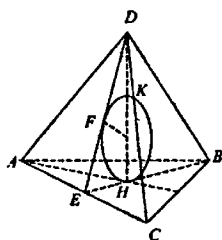
1. Дано:

$DABC$  — правильная пирамида,  $AB = a$ . В  $DABC$  вписан шар,  $DH$  — высота  $DABC$ ,  $K \in$  шару,  $K \in DH$ ,  $DK = KH$ .

Найти:  $DA$ .

Решение:

Рассмотрим сечение  $DBE$  пирамиды, проходящее через высоту  $DH$ .



$$BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad H \text{ — точка пересечения медиан } \triangle ABC \Rightarrow EH = \frac{1}{3} BE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Построим  $\triangle EDG$  так, что окружность из сечения будет вписана в  $\triangle EGD$ .

$$\text{В } \triangle EGD \quad DH = 4r, \quad EG = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad ED = \sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

$$S(\triangle EGD) = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} EG \cdot DH.$$

$$\left( \sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}} + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \cdot r = 2r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

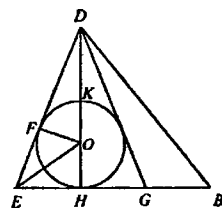
$$\sqrt{16r^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad 16r^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{a^2}{12}; \quad 16r^2 = \frac{2a^2}{3}; \quad r^2 = \frac{a^2}{24}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$DH = \frac{2a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{В прямоугольном } \triangle DHA \quad AH = HB = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$DH = \frac{2a}{\sqrt{6}} \Rightarrow AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{4a^2}{6}} = a.$$

Ответ:  $a$ .



2. Дано: шар  $(O, R)$ ,  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — вписанная в шар правильная призма,  $\angle OFA_1 = 45^\circ$ .

Найти:  $S_{\text{бок. призмы}}$

Решение: В равнобедренном  $\triangle A_1 OF$   $\angle A_1 OF = 90^\circ$ ,  $A_1 F = R\sqrt{2}$ . Сечение  $FA_1 C_1 D$  призмы — квадрат (диагонали равны  $2R$  и перпендикулярны)  $\Rightarrow A_1 C_1 = A_1 F = R\sqrt{2}$ ,  $K$  — центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

В  $\triangle A_1 K C_1$   $\angle A_1 K C_1 = 120^\circ \Rightarrow$  по теореме косинусов

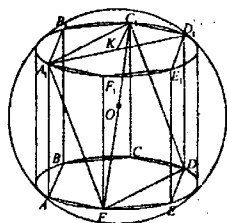
$$A_1 C_1^2 = 2A_1 K^2 \cdot (1 - \cos 120^\circ), 3A_1 K^2 = 2R \Rightarrow A_1 K = \sqrt{\frac{2}{3}} R = A_1 B_1.$$

Из прямоугольного  $\triangle A_1 KO$

$$KO = \sqrt{A_1 O^2 - A_1 K^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2}{3} R^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} R \Rightarrow AA_1 = 2KO = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

$$S_{\text{бок. призмы}} = 6 \cdot A_1 A \cdot A_1 B_1 = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} R = 4\sqrt{2} R^2.$$

Ответ:  $4\sqrt{2} R^2$ .



### С—13

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AB = 6$ ,  $BC = \frac{12}{\sqrt{5}}$ , расстояние от  $B$  до  $(AB_1 C)$  равно 2,4.

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

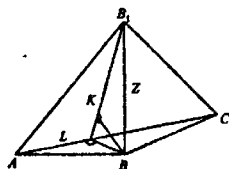
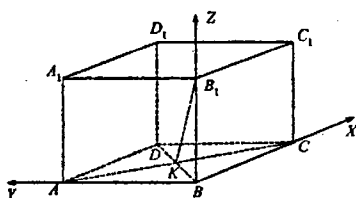
Решение: Построим сечение  $B_1 AC$  и опустим перпендикуляр  $BK$  на  $(B_1 AC)$ .  $BK = 2,4$ .  $B_1 K \cap AC = L$ .  $B_1 L$  — линия пересечения перпендикулярных плоскостей  $(B_1 LB)$  и  $(AB_1 C)$ .

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{18}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ALB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AL}{BC} \Rightarrow LB = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \cdot \frac{12}{\sqrt{5}}}{\frac{18}{\sqrt{5}}} = 4$$

$$\text{Далее, } \triangle LBK \sim \triangle LB_1 B \Rightarrow \frac{BB_1}{LB} = \frac{KB}{LK} \Rightarrow BB_1 = \frac{KB \cdot LB}{LK}$$

$$\text{но } LK = \sqrt{LB^2 - KB^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{4^2 \left(1 - \frac{9}{25}\right)} = \frac{16}{5},$$



тогда  $BB_1 = \frac{\frac{12}{5} \cdot 4}{\frac{16}{5}} = 3$ . Итак,  $V = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 6 \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} \cdot 3 = \frac{216\sqrt{5}}{5}$ .

Ответ:  $\frac{216\sqrt{5}}{5}$ .

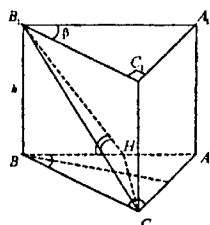
2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $B_1CH \perp (AA_1B_1B)$ ,  $\angle B_1HB = \alpha$ ,  $B_1B = h$ .  
Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle B_1BH$ :  $BH = h \operatorname{ctg} \alpha$ .  
Из прямоугольного  $\triangle BHC$ :

$$BC = \frac{BH}{\cos \beta} = \frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \beta}, \quad AC = BC \operatorname{tg} \beta = \frac{h \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \beta}$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot B_1B = \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \beta} \cdot h = \frac{h^3}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Ответ:  $\frac{h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cos^2 \beta}$ .



# С—14

1. Дано:  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма,  $C_1E = 3$ ,  $\angle FC_1E = \arctg \frac{1}{3}$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение:  $\angle FEC = 90^\circ$  опирается на диаметр описанной около основания окружности. По теореме о трех перпендикулярах  $\angle C_1EF = 90^\circ$

$$\frac{FE}{C_1E} = \operatorname{tg}(\angle FC_1E) = \frac{1}{3} \Rightarrow FE = \frac{C_1E}{3} = 1.$$

$$C_1F = \sqrt{FE^2 + C_1E^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}. \quad FC = 2FE = 2.$$

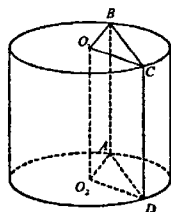
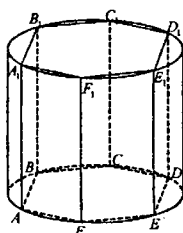
$$\text{Из прямоугольного } \triangle C_1CF: C_1C = \sqrt{C_1F^2 - CF^2} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}$$

$$S(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot FE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad V_{\text{призмы}} = S \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ .

2. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $ABCD \parallel O_1O_2$ ,  $ABCD \cap$  цилиндр,  $\angle BO_1C = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ .

Найти:  $\frac{V_1}{V_2}$ .



Решение: Площадь сегментов в верхнем основании

$$S_1 = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), S_2 = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отношение объемов равно отношению площадей сегментов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{2} r^2 \left( \frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$

### С—15

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $(AA_1C_1C) \perp (ABC)$ ,  $\angle C_1CA = 60^\circ$ ,  $C_1C = CB = CA$ ,  $S_{\text{бок.}} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение:  $CBB_1C_1$  — квадрат, пусть  $CB = a$ ,

$$S(CBB_1C_1) = a^2, S(CC_1A_1A) = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

В грани  $CC_1A_1A$  проведем перпендикуляр  $AO$  к  $C_1A_1$ , из точки  $O$  опустим перпендикуляр  $OK$  к  $A_1B_1 \Rightarrow AK \perp A_1B_1$ .

Из прямоугольного  $\triangle AOA_1$ :  $OA_1 = \frac{a}{2}$ ,  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Из прямоугольного  $\triangle OKA_1$ :  $OK = OA_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

А из прямоугольного  $\triangle AOK$   $AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ .

В грани  $BB_1A_1A$ :  $AB = a\sqrt{2}$ .  $S(BB_1A_1A) = AB \cdot KA = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{a^2 \sqrt{7}}{2}$ .

$$S_{\text{бок.}} = a^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{7}}{2} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2) \cdot a^2 = 4, a = 2.$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} CB \cdot CA \cdot OA = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

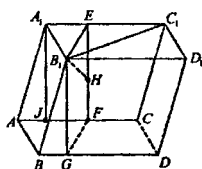
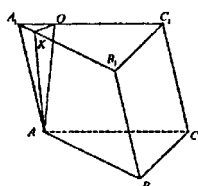
Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — призма,  $\angle A_1AC = 45^\circ$ ,  $AA_1 = 5$ ,  $AC = 6$ ,  $B_1H \perp (AA_1C_1C)$ ,  $H \in (AA_1C_1C)$ ,  $B_1H = 4$ .

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение:

Достроим призму до четырехугольной  $ACDBA_1C_1D_1B_1$ .



Через перпендикуляр  $BH$  проведем секущую плоскость  $B_1EFG$  так, что  $A_1C_1 \perp (B_1EFG)$ .

Опустим в грани  $AA_1C_1C$  высоту  $AJ = AA_1 \cdot \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2} = EF$

$$\Rightarrow S(B_1EFG) = EF \cdot B_1H = 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$V(ACDBA_1C_1D_1B_1) = S(B_1EFG) \cdot AC = 10\sqrt{2} \cdot 6 = 60\sqrt{2}.$$

$$V(ABCA_1B_1C_1) = \frac{1}{2} V(ACDBA_1C_1D_1B_1) = 30\sqrt{2}.$$

Ответ:  $30\sqrt{2}$ .

### С—16

1. Дано:

$DABC$  — пирамида,  $AB=BC$ ,  $\angle ABC=\alpha$ ,  
 $(ADC) \perp (ABC)$ ,  $DH \perp (ABC)$ ,  $H \in (ABC)$ ,  $DE \perp AB$ ,  
 $DF \perp CB$ ,  $\angle DEH = \angle DFH = \beta$ ,  $DF \perp HK$ ,  $K \in DF$ ,  
 $HK = d$ .

Найти:  $V(DABC)$ .

Решение:

Из  $\triangle HKF$ :  $HF = \frac{d}{\sin \beta}$ ,  $KF = d \operatorname{ctg} \beta$ .

$$\triangle DHF \sim \triangle HKF \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{DH}{HF} = \frac{HK}{KF},$$

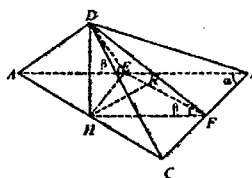
$$DH = \frac{HF \cdot HK}{KF} = \frac{d^2}{\sin \beta \cdot d \cdot \operatorname{ctg} \beta} = \frac{d}{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Из прямоугольного  $\triangle HFB$ :  $HB = \frac{HF}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

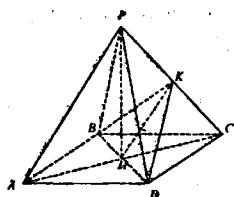
Из  $\triangle BHC$ :  $HC = HB \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

$$\begin{aligned} V(DABC) &= \frac{1}{6} \cdot AC \cdot HB \cdot DH = \frac{HC \cdot HB \cdot DH}{3} = \\ &= \frac{d}{3 \cdot \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d}{\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d}{\sin \beta \operatorname{tg} \beta} = \frac{2d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \sin \alpha}$ .



2. Дано:  $PABCD$  — правильная пирамида,  $AB = a$ ,  
 $BK \perp PC$ ,  $K \in PC$ ,  $\angle BKD = \alpha$ .  
 Найти:  $V(PABCD)$ .



Решение:  $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Из  $\triangle BKH$ :  $HK = BH \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Из  $\triangle HKC$ :  $KC = \sqrt{HC^2 - HK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

$\triangle PHC \sim \triangle HKC$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{PH}{HC} = \frac{HK}{KC}$ ,  $PH = \frac{HK \cdot HC}{KC} =$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$V(PABCD) = a^2 \cdot \frac{PH}{3} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{6 \sqrt{-\cos \alpha}} = \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \sqrt{-\cos \alpha}}$$

Ответ:  $a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} / 6 \sqrt{-\cos \alpha}$ .

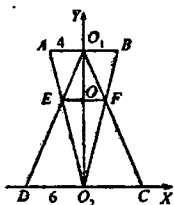
### С—17

1. Дано: два конуса, основания параллельны, вершины каждого лежат в центре основания другого, радиусы оснований равны 4 и 6, общая высота равна 15.

Найти: объем общей части конусов.

Решение: Рассмотрим осевое сечение фигуры  $AO_1=4$ ,  $DO_2=6$ ,  $O_1O_2=15$ .

Введем прямоугольную с.к.  $O_2XY$  как показано на рисунке.



Уравнение  $CO_1$ :  $y = -\frac{15}{6}x + 15$ ;  $O_2B$ :  $y = \frac{15}{4}x$ ;

$CO_1 \cap O_2B = F$ :  $-\frac{15}{6}x + 15 = \frac{15}{4}x$ ;  $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x = 1$ ;  $x = \frac{12}{5}$ .

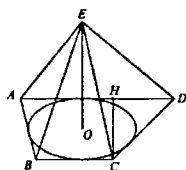
Значит  $OF = \frac{12}{5}$

$V = \frac{\pi}{3} OF^2 \cdot OO_1 + \frac{\pi}{3} OF^2 \cdot OO_2 = \frac{\pi}{3} \cdot OF^2 \cdot O_1O_2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{144}{25} \cdot 15 = \frac{144\pi}{5}$

Ответ:  $\frac{144\pi}{5}$ .



2. Дано: в пирамиду  $EABCD$  вписан конус,  $ABCD$  — трапеция,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AD = 2$ ,  $BC = 4$ ,  $V_{\text{конуса}} = \frac{64\pi}{81}$ .



Найти: угол наклона боковых граней пирамиды.

Решение: Т.к. основание конуса вписано в трапецию, то  $AB + DC = AD + BC$ .  $AB$  — высота трапеции, равна диаметру круга, т.е.  $AB = 2r$ .

Площадь трапеции

$$S = \frac{1}{2} AB(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 2r(2+4) = 6r = S(AOB) + S(BOC) + S(COD) + S(DOA).$$

Но высоты треугольников все равны  $r$ , а суммы противоположных сторон равны  $\Rightarrow DC = AD + BC - AB = 6 - 2r$ ,  $HC = BC - AD = 2$ ,  $DH = 2r$ .

По теореме Пифагора  $DH^2 + HC^2 = DC^2$ , ( $CH$  — высота на  $AD$ )

$$4r^2 + 4 = 36 - 24r + 4r^2; 32 = 24r, r = \frac{4}{3}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi \cdot EO}{3} \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot EO \cdot 16}{27} = \frac{64\pi}{81}, EO = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$  углы наклона боковых граней равны  $45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

### С—18

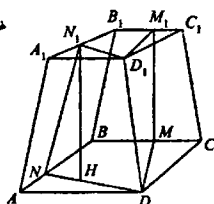
1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — усеченная пирамида,  $ABCD$ ,  $A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромбы,  $AC = 16$ ,  $BD = 12$ ,

$A_1 C_1 = 8$ ,  $B_1 D_1 = 6$ ,  $(AA_1 D_1 D) \perp (ABCD)$ ,  $(DD_1 C_1 C) \perp (ABCD)$ ,  $DM \perp BC$ ,  $M \in BC$ ,  $D_1 M_1 \perp B_1 C_1$ ,

$M_1 \in B_1 C_1$ ,  $D_1 N_1 \perp A_1 B_1$ ,  $N \in A_1 B_1$ ,

$\angle M_1 M D = \angle N_1 N D = 45^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{пирамиды}}$ .



Решение: Сторона нижнего основания  $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ,

верхнего  $A_1 B_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

$$S(ABD) = \sqrt{\left(\frac{10+10+12}{2}\right)(16-10) \cdot 6(16-12)} = 48 = \frac{1}{2} AB \cdot DN = 5 \cdot DN \Rightarrow$$

$$DN = \frac{48}{5}. \text{ Аналогично } D_1 N_1 = \frac{24}{5}.$$

В сечении  $DNN_1 D_1$  (проекция) опустим высоту  $N_1 H$ ,  $\angle HNN_1 = 45^\circ$ , а  $NH = ND - N_1 D_1 = \frac{24}{5}$ . Тогда из прямоугольного равнобедренного  $\triangle HNN_1$

$$\text{получим } N_1 H = \frac{24}{5}.$$

$S_2(ABCD) = 96$ ;  $S_1(A_1 B_1 C_1 D_1) = 24$ ,  $N_1 H$  — высота усеченной пирамиды.

$$V = \frac{N_1 H}{3} (S_2 + S_1 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{24}{15} \cdot (96 + 24 + \sqrt{96 \cdot 24}) =$$

$$= \frac{24}{15} (96 + 24 + 48) = \frac{24}{15} \cdot 168 = \frac{8}{5} \cdot 168 = 268,8.$$

Ответ: 268,8.

2. Дано:  $ABCD$  — ромб,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $BE$ ,  $BF$  — высоты,  $EF = 20$ ,  $MC \perp AC$ ,  $MC$  — ось вращения.

Найти: объем тела вращения.

Решение: В равностороннем  $\triangle ABD$   $BE$  — высота, биссектриса и медиана  $\Rightarrow \angle EBD = 30^\circ$ , значит,  $\angle EBF = 60^\circ = 2\angle EBD$ .

$\triangle EBF$  — равнобедренный и  $\angle EBF = 60^\circ \Rightarrow \triangle EBF$  — равносторонний и  $EB = EF = 20$ .

Значит, сторона ромба из  $\triangle ABD$ :  $AB = \frac{EB}{\sin 60^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} = BD$ .

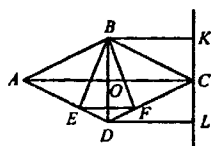
$$BO = \frac{20\sqrt{3}}{3}; AO = OC = BK = DL = EF = 20.$$

$$V_{\text{т. вр.}} = \frac{BO \cdot \pi}{3} [AC^2 + BK^2 + AC \cdot BK - BK^2] +$$

$$+ \frac{OD \cdot \pi}{3} [AC^2 + DL^2 - DL^2 + AC \cdot DL] = \frac{2BO \cdot \pi}{3} [AC^2 + AC \cdot BK] =$$

$$= \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} [40^2 + 40 \cdot 20] = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} [1600 + 800] = \frac{32000\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{32000\sqrt{3}\pi}{3}$ .



### С—19

1. Дано: шар ( $O_1$ , 25), шар ( $O_2$ , 29),  $O_1O_2 = 6$ .

Найти: объем линзы.

Решение:

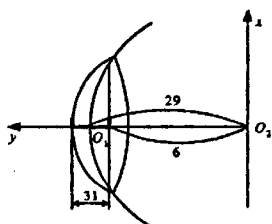
Введем систему координат  $O_2xyz$ , как показано на рисунке.

Тогда уравнение первой сферы  $x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25^2$ ; второй  $x^2 + y^2 + z^2 = 29^2$ .

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$-(y-6)^2 + y^2 = 29^2 - 25^2$  или  $-36 + 12y = 841 - 625 = 216$ ;  $12y = 252$ ,  $y = 21$ .  
 $\Rightarrow$  высота первого сегмента  $h_1 = 31 - 21 = 10$ , высота второго  $h_2 = 29 - 21 = 8$

$$V_1 = \pi h_1^2 \left( R_1 - \frac{h_1}{3} \right) = \pi \cdot 100 \left( 25 - \frac{10}{3} \right) = 100 \cdot \frac{65}{3} \pi = \frac{6500\pi}{3}.$$



$$V_2 = \pi h_2^2 \left( R - \frac{h_2}{3} \right) = \pi \cdot 64 \cdot \left( 29 - \frac{8}{3} \right) = \pi \cdot 64 \cdot \frac{79}{3} = \frac{5056\pi}{3}.$$

$$V_{\text{лизы}} = V_2 - V_1 = \pi(6500 - 5056) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1444\pi}{3}.$$

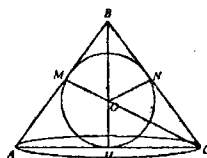
Ответ:  $\frac{1444\pi}{3}$ .

2. Дано: в конус вписан шар,  $\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{8}{3}$ .

Найти:  $\angle ABC$ .

Решение: Построим осевое сечение конуса  $ABC$ .

Пусть  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ ,  $OH = r$ .



Из прямоугольного  $\triangle OHC$ :  $HC = OH \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Из прямоугольного  $\triangle BHC$ :  $BH = HC \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

$$V_{\text{конуса}} = \pi \cdot \frac{BH}{3} \cdot HC^2 = \frac{\pi}{3} \cdot r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\frac{V_{\text{конуса}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{\frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha}{4} = \frac{8}{3} \cdot \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{32}{3},$$

$$\frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2(\cos \alpha + 1)^2 \cdot 2}{4(1 - \cos \alpha) \cos \alpha} = \frac{(\cos \alpha + 1)^2}{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} = \frac{32}{3}.$$

$$3 \cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha + 3 = 32 \cos \alpha - 32 \cos^2 \alpha; 35 \cos^2 \alpha - 26 \cos \alpha + 3 = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5}; \\ \cos \alpha = \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arccos \frac{3}{5} \\ \alpha = \arccos \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \angle ABC = \begin{cases} \pi - 2 \arccos \frac{3}{5} \\ \pi - 2 \arccos \frac{1}{7} \end{cases}.$$

Ответ:  $\pi - 2 \arccos \frac{3}{5}$  или  $\pi - 2 \arccos \frac{1}{7}$ .

ДС

1. Дано:  $E(1, -2, 1)$ ,  $F(2, -1, 3)$ ,  $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$ ,  $EF \cap \alpha = M$ .

Найти: координаты  $M$ .

Решение:  $\overrightarrow{EF} \{1, 1, 2\}$ .

Пусть  $M(x_0, y_0, z_0)$ , тогда  $\overrightarrow{EM} \{x_0 - 1, y_0 + 2, z_0 - 1\} = k \cdot \overrightarrow{EF}$

$$\begin{cases} x_0 - 1 = k \\ y_0 + 2 = k \\ z_0 - 1 = 2k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = k + 1 \\ y_0 = k - 2 \\ z_0 = 2k + 1 \end{cases}$$

А также эти координаты удовлетворяют уравнению плоскости  $\alpha$   
 $(k + 1) - 2(k - 2) + (2k + 1) - 3 = 0; k + 3 = 0, k = -3;$

$M(-3 + 1, -3 - 2, -6 + 1);$

$M(-2, -5, -5).$

Ответ:  $(-2, -5, -5).$

2. Дано:

$A(1, -1, 1), B(2, 1, -1), \alpha: x - 2y + z - 1 = 0, \beta \perp \alpha, A, B \in \beta.$

Написать уравнение  $\beta$ .

Решение:

$\vec{n} \{1, -2, 1\} \perp \alpha$  и пусть  $\overrightarrow{BN} \perp \alpha, N \in \alpha,$

$N(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{BN} (x_0 - 2, y_0 - 1, z_0 + 1), \overrightarrow{BN} = k \cdot \vec{n}.$

$$\begin{cases} x_0 - 2 = k \\ y_0 - 1 = -2k \\ z_0 + 1 = k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = k + 2 \\ y_0 = 1 - 2k \\ z_0 = k - 1 \end{cases}$$

Координаты  $N$  удовлетворяют уравнению плоскости  $\alpha$   
 $(k + 2) - 2(1 - 2k) + (k - 1) - 1 = 0.$

$$6k - 2 = 0, k = \frac{1}{3}; N\left(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

$\beta$  содержит точки  $A, B, N \Rightarrow$  уравнение  $\beta: Px + Qy + Rz + S = 0.$

$$\begin{matrix} A: \\ B: \\ N: \end{matrix} \begin{cases} P - Q + R + S = 0 \\ 2P + Q - R + S = 0 \\ \frac{7}{3}P + \frac{Q}{3} - \frac{2R}{3} + S = 0 \end{cases}; \begin{cases} P - Q + R + S = 0 \\ 2P + Q - R + S = 0 \\ 7P + Q - 2R + 3S = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3P + 2S = 0 \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 4P + S + Q - 2R = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 2,5P + Q - 2R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ 0,5P + Q - R = 0 \\ 2P - R = 0 \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ Q = 1,5P \\ R = 2P \end{cases}; \begin{cases} P = -\frac{2}{3}S \\ Q = -S \\ R = -\frac{4}{3}S \end{cases}$$

Уравнение  $\beta: -\frac{2}{3}x - y - \frac{4}{3}z + 1 = 0; 2x + 3y + 4z - 3 = 0.$

Ответ:  $2x + 3y + 4z - 3 = 0.$

С—1

1. Дано:  $AF = A_1F$ ,  $BK = KC$ ,  $A_1M = MB_1$ ,  $B_1E = \frac{EC_1}{5}$ ,

$\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AA_1 = AB = BC$ .

Найти:  $F, M, E, K$  — лежат ли в одной плоскости? (метод координат).

Решение: Возьмем т.  $B$  за начало координат координатные оси:

$BA \sim x$ ,  $BC \sim y$ ,  $BB_1 \sim z$ , длина катета —  $a$ .

Тогда  $F\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{a}{2}, 0, a\right)$ ,  $K\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $E\left(0, \frac{a}{6}, a\right)$ .

Уравнение плоскости:  $R_1x + R_2y + R_3z + R_4 = 0$ .

Если все точки лежат в одной плоскости, то при подстановке их координат в уравнение должно получиться верное равенство:

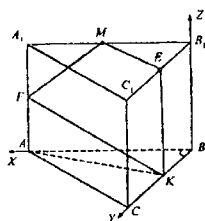
$$\begin{cases} R_1a + R_3\frac{a}{2} + R_4 = 0 \\ R_1\frac{a}{2} + R_3 \cdot a + R_4 = 0 \\ R_2\frac{a}{2} + R_4 = 0 \\ R_2 \cdot \frac{a}{6} + R_3 \cdot a + R_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 + \frac{a}{2}R_3 + R_4 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + R_3a + R_4 = 0 \\ \frac{a}{2}R_2 = -R_4 \\ \frac{a}{6}R_2 + aR_3 = -R_4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} aR_1 + \frac{a}{2}R_3 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + aR_3 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \\ \frac{a}{6}R_2 + aR_3 = \frac{a}{2}R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 + \frac{a}{6}R_2 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ \frac{aR_1}{2} + \frac{a}{3}R_2 - \frac{a}{2}R_2 = 0 \\ aR_3 = \frac{a}{3}R_2 \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aR_1 = \frac{a}{3}R_2 \\ aR_1 = \frac{a}{2}R_2 \\ R_3 = \frac{R_2}{3} \\ R_4 = -\frac{a}{2}R_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$(4)$$

Нетрудно видеть, система имеет решение и уравнение плоскости будет выглядеть так:



$x + 3y + z - \frac{3}{2}a = 0$  (где  $a$  — длина бокового ребра). Значит данные точки

в одной плоскости.

Ответ: лежат.

2. Дано:  $\vec{p} \{1, -2, 1\}$ ,  $\vec{q} \{2, 0, -1\}$ ,  $\vec{m} \{-1, 1, 2\}$ ,  $\vec{a} = x \cdot \vec{p} + y \cdot \vec{q} + z \cdot \vec{m}$ ,  $\vec{a} \{1, 2, -2\}$ .

Найти:  $x, y, z$ .

Решение:  $\begin{cases} 1 = x + 2y - z \\ 2 = -2x + z \\ -2 = x - y + 2z \end{cases}; \begin{cases} 1 = x + 2y - 2 - 2x \\ z = 2 + 2x \\ -2 = x - y + 4 + 4x \end{cases}; \begin{cases} 3 = 2y - x \\ z = 2 + 2x \\ y = 6 + 5x \end{cases}$

$\begin{cases} 3 = 12 + 10x - x \\ z = 2 + 2x \\ y = 6 + 5x \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}.$

Ответ:  $\vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}$ .

## С—2

1. Дано:  $DB \perp ABC$ ,  $DB = 4$ ,  $AB = BC$ ,  $BE \perp AC$ ,  $BE = AC = 4$ . Т.  $P$  равноудалена от вершин.

Найти расстояние:  $AP = BP = CP = DP$ .

Решение:

$AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$  равнобедренный  $\Rightarrow BE$  — и высота ( $BE \perp AC$ ), и медиана  $\Rightarrow AE = EC = 2$ .

Тогда центр описанной окружности (около  $ABC$ )  $O$  лежит на  $BE$ .

Пусть  $OB = x$ . Тогда

$$(4 - x)^2 + 2^2 = x^2; 16 + x^2 - 8x + 4 = x^2; 8x = 20, x = \frac{5}{2}.$$

Точки, равноудаленные от вершин  $A, B$  и  $C$  лежат на перпендикулярной к  $ABC$  прямой, проходящей через т.  $O$ .  $DB$  тоже перпендикулярно  $ABC \Rightarrow OP \parallel DB$ .

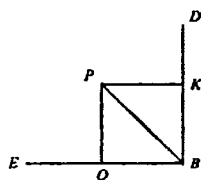
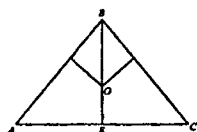
Рассмотрим плоскость, проходящую через  $DB$  и  $OP$ .

По условию  $PD = PB$ . Тогда высота  $PK$  в равнобедренном  $\triangle PDB$  — медиана, по длине равна  $OB$ . Таким образом,

$$PD^2 = OB^2 + 2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{4},$$

$$PD = PB = PA = PC = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{41}}{2}$ .



2. Решить уравнение  $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = 1$ .

Решением является множество точек, сумма расстояний от которых до точек  $A(1, 0, 0)$  и  $B(0, 1, 0)$  равна единице. Но расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ . Значит, сумма расстояний от любой точки до них не может быть меньше этого значения. Стало быть, множество решений пусто.

Ответ: решений нет.

### С—3

1. Дано:  $MABCD$  — пирамида,  $ABCD$  — ромб,  $A(-3, 10, -5)$ ,  $C(3, 4, 1)$ ,  $M(5, 8, -3)$ ,  $\angle MAD = \angle MAB$ ,  $MH$  — высота.

Найти:  $MH$ .

Решение:

Условие  $\angle MAD = \angle MAB$  дает, что  $H \in AC$ ,  
 $\overrightarrow{AC} \{6, -6, 6\}$ .

Пусть  $H(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\overrightarrow{MH} \{x_0 - 5, y_0 - 8, z_0 + 3\}$ ,

$\overrightarrow{AH} \{x_0 + 3, y_0 - 10, z_0 + 5\}$ ,  $\overrightarrow{AH} = k \cdot \overrightarrow{AC} = \{6k, -6k, 6k\}$

$$\begin{cases} x_0 + 3 = 6k \\ y_0 - 10 = -6k \\ z_0 + 5 = 6k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 6k - 3 \\ y_0 = 10 - 6k \\ z_0 = 6k - 5 \end{cases}$$

$\overrightarrow{MH} \{6k - 3 - 5, 10 - 6k - 8, 6k - 5 + 3\}$ ,

$\overrightarrow{MH} \{6k - 8, 2 - 6k, 6k - 2\}$ .

$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AC}) = 6(6k - 8) - 6(2 - 6k) + 6(6k - 2) = 0$ ,

$$6k + 6k + 6k - 8 - 2 - 2 = 0, 18k = 12, k = \frac{2}{3}$$

$\overrightarrow{MH} \{4 - 8, -2, 2 - 2\}$ ,  $\overrightarrow{MH} \{-4, -2, 2\}$ ;  $|\overrightarrow{MH}| = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Ответ:  $2\sqrt{6}$ .

2. Дано:  $S = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$ .

Найти:  $S_{\text{наибольшее}}$ ,  $x_{\text{макс}}$ .

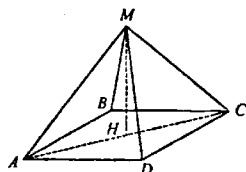
Решение: Рассмотрим векторы  $\vec{a} \{\sqrt{\sin^2 x + 0,5}, \sqrt{\cos^2 x - 0,5}, \sqrt{0,5}\}$  и

$\vec{b} \{1, 1, 1\}$ .

Тогда  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5} = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi = \angle \vec{a}, \vec{b}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 0,5 + \cos^2 x - 0,5 + 0,5} = \sqrt{\frac{3}{2}}; |\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

$$S = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3} \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \varphi.$$



Наибольшее значение  $S$  достигается при  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ .

$S_{\text{наиб}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , оно достигается при  $\cos x = \pm 1$ , т.е. при  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  при  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### С—4

1. Дано:

$MAVC$  — пирамида,  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,

$BC = 5$ ,  $AM \perp AC$ ,  $AM = 4$ ,  $MB = \sqrt{30}$ .

Найти:  $MH$  — высоту.

Решение:

В  $\triangle ABC$   $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{34}$ .

Соединим точки  $A$  и  $C$  с точкой  $H$ .

Из прямоугольного  $\triangle MAC$ :  $MC = \sqrt{AM^2 + AC^2} = 5$ .

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $CXYZ$ . В ней  $C(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 3, 0)$ ,  $B(5, 0, 0)$ .

Пусть  $M(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\overrightarrow{CM} \{x_0, y_0, z_0\}$ ,  $|\overrightarrow{CM}| = 5$ ,  $\overrightarrow{AM} \{x_0, y_0 - 3, z_0\}$ ,  $\overrightarrow{BM} \{x_0 - 5, y_0, z_0\}$ .

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CM}| = 5 & \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 25 & \text{I} \\ x_0^2 + (y_0 - 3)^2 + z_0^2 = 16 & \text{II} \\ (x_0 - 5)^2 + y_0^2 + z_0^2 = 30 & \text{III} \end{cases} \\ |\overrightarrow{AM}| = 4 & \\ |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{30} & \end{aligned}$$

$$\text{I} - \text{II}: y_0^2 - (y_0 - 3)^2 = 9; 6y_0 - 9 = 9, y_0 = 3$$

$$\text{III} - \text{I}: (x_0 - 5)^2 - x_0^2 = 5; 10x_0 + 25 = 5, x_0 = -2.$$

$$\text{из (I)} \Rightarrow 9 + 4 + z_0^2 = 25, z_0^2 = 12$$

$$\Rightarrow \text{Высота } MH = |z_0| = 2\sqrt{3}.$$

Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

2. Дано:

$DABC$  — тетраэдр,  $\angle ADC$ ,  $\angle ADB$ ,  $\angle CDB$  — тупые,  $AD = DB = DC$ .

Доказать:  $\triangle ABC$  — остроугольный.

Доказательство:

Опустим высоту  $DH$ ;  $\triangle ADH = \triangle BDH = \triangle CDH$  по гипотенузе и катету  $\Rightarrow H$  — центр описанной окружности  $\triangle ABC$ .

Катеты  $AH = HC < AD = DC$  гипотенуз  $\Rightarrow$

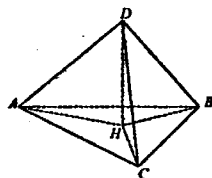
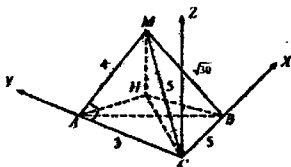
$$\text{из } \triangle ADC: AC^2 = 2AD^2(1 - \cos \angle ADC),$$

$$\text{из } \triangle AHC: AC^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC),$$

$$2AD^2(1 - \cos \angle ADC) = 2AH^2(1 - \cos \angle AHC)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \angle ADC < 1 - \cos \angle AHC \Rightarrow \cos \angle ADC > \cos \angle AHC \text{ т.к. } \cos \angle ADC < 0.$$

$$\Rightarrow \angle AHC > \angle ADC \text{ и тупой.}$$





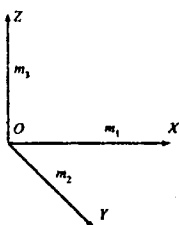
Аналогично,  $\angle ANB$  и  $\angle CNB$  — тупые  $\Rightarrow H$  лежит внутри  $\triangle ABC$ . А центр описанной окружности лежит внутри остроугольного треугольника. Итак,  $\triangle ABC$  — остроугольный.

### С—5

1. Дано:  $m_1 \perp m_2$ ,  $m_1 \cap m_2 = O$ ,  $m_3 \perp m_1$ ,  $m_3 \perp m_2$ ,  $O \in m_3$ ,  $A$  и  $A_1$  — симметричны относительно  $m_1$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — симметричны относительно  $m_2$ .

Доказать, что  $A$  и  $A_2$  — симметричны относительно  $m_3$ .

**Доказательство:** Введем прямоугольную систему координат  $OXYZ$  так, что  $OX \parallel m_1$ ,  $OY \parallel m_2$ ,  $OZ \parallel m_3$ . Пусть  $A(x_0, y_0, z_0)$ , тогда  $A_1(x_0, -y_0, -z_0)$ ,  $A_2(-x_0, -y_0, z_0)$ . Видно, что  $A$  и  $A_2$  — симметричны относительно  $Oz$  или  $m_3$ .



2. Дано:

отображение  $A(x, y, z) \rightarrow A_1(-x+2, -y-3, -z+1)$ .

Является ли отображение движением?

**Решение:**

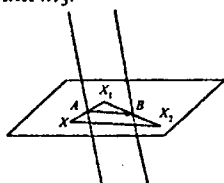
Возьмем произвольные точки  $B(x_1, y_1, z_1)$  и  $C(x_2, y_2, z_2)$ .

$B \rightarrow B_1(-x_1+2, -y_1-3, -z_1+1)$ ;  $C \rightarrow C_1(-x_2+2, -y_2-3, -z_2+1)$ ;

$$|BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |B_1C_1|$$

$\Rightarrow$  это движение. Оно может быть получено симметрией относительно начала координат и переносом на вектор  $\vec{p} \{2, -3, 1\}$ .

**Ответ:** это движение, которое получается симметрией относительно начала координат и переносом на вектор  $\vec{p} \{2, -3, 1\}$ .



### С—6

1. Дано:  $S_p$  и  $S_q$  — симметрии  $p, q$ -оси симметрии,  $p \neq q$ ,  $S_p \circ S_q$  и  $S_q \circ S_p$  — совпадают.

Доказать:  $p \cap q = O$  (точка).

**Доказательство:** Допустим,  $p, q$  не пересекаются.

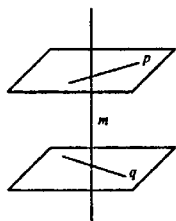
Пусть  $p \parallel q$ .  $S_p \circ S_q$  дает параллельный перенос на вектор  $2\vec{AB}$ , который отображает т.  $X$  на т.  $X_2$ .

$S_q \circ S_p$  дает параллельный перенос на вектор  $2\vec{BA}$ ,

который отображает точку  $X_2$  на т.  $X \Rightarrow 2\vec{AB} = 2\vec{BA} \Rightarrow \vec{AB} = 0$  (противоречие условию).

Если  $p$  и  $q$  — скрещивающиеся,  $S_q \circ S_p$  отображает общий перпендикуляр прямых  $p$  и  $q$  на себя, причем это отображение — перенос на вектор  $\vec{e} \neq \vec{0}$ , но тогда  $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$  (противоречие условию).

Значит,  $p$  и  $q$  — пересекаются.



2. Дано: прямая  $l$ , точка  $A$ , точка  $A_1$ , плоскость  $\alpha$ ,  $A_1 \in l$ ,  $\alpha \cap l = M$ ,  $A$  и  $A_1$  симметричны относительно  $O$ ,  $O \in \alpha$ .

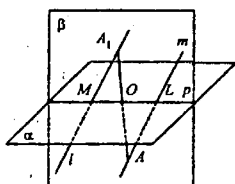
Найти: т.  $A_1$ .

Решение: Через т.  $A$  и прямую  $l$  проводим плоскость  $\beta$ .  $\alpha \cap \beta = p$  (прямая).

В плоскости  $\beta$  строим прямую  $m \parallel l$ ,  $m \cap p = L$ .

Через середину  $O$  отрезка  $ML$  и точку  $A$  проводим прямую  $AO$ .

$AO \cap l = A_1$ ,  $A_1$  — искомая.



### С—7

1. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $ABCD$ ,  $EFLK$  — осевые сечения,  $M \in AB$ ,  $AM = MB$ ,  $ML \perp AC$ ,  $S(ABCD) = 4$ .

Найти:  $S_{\text{цилиндра}}$ .

Решение: Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат  $O_2XYZ$ .

Пусть  $BC = 2r$ ,  $AB = 2h$ , тогда  $M(-r, 0, h)$ ,  $L(0, -r, 2h)$ ,  $A(-r, 0, 2h)$ ,  $C(r, 0, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} \{2r, 0, -2h\}$ ,  $\overrightarrow{ML} \{r, -r, h\}$ .

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ML}) = 2r^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow r = h.$$

$$\text{Но } S(ABCD) = AB \cdot BC = 4hr = 4 \Rightarrow h = r = 1.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{цилиндра}} = 2\pi(r \cdot 2h) + 2\pi r^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi.$$

Ответ:  $6\pi$ .

2. Дано:

$MABCD$  — правильная пирамида,  $AB = a$ ,  $E \in AB$ ,  $AE = EB$ ,  $MH$  — высота,  $\angle MEH = \varphi = \arctg 2$ . В  $MABCD$  вписан цилиндр  $PRST$  — осевое сечение,  $PRST$  — квадрат.

Найти:  $S_{\text{бок. цилиндра}}$ .

Решение:

$$AE = EH = AB \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

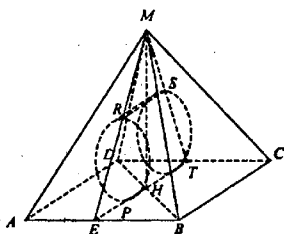
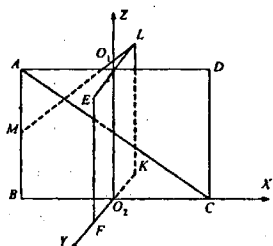
$$\text{Из прямоугольного } \triangle EHM: \frac{MH}{EH} = \tg \varphi = 2 \Rightarrow MH = 2EH = a.$$

В осевом сечении  $PRST$   $PH = 2RP = EP$  (т.к.  $\triangle EPR \sim \triangle EHM$ )

$$\Rightarrow PH = EP = \frac{EH}{2} = \frac{a}{4}; RP = 2r = PH = \frac{a}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{4}; PT = 2PH = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot r \cdot PT = 2\pi \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2}{4}.$$



**С—8**

1. Дано: конус,  $A(1, 2, -2)$ ,  $B(4, 2, -2)$ ,  $C(3, 4, -2)$ ,  $A, B, C \in$  окружности основания, высота конуса равна 3, конус  $\cap$  плоскость  $z = 0$ .

Найти:  $S_{\text{сечения}}$ , координаты вершины конуса,  $S_{\text{бок}}$

конуса

Решение: Из координат точек видно, что основание конуса задается уравнениями

$$\begin{cases} z = -2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \quad C, B, A \text{ принадлежат основанию}$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2 \\ (4 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = R^2 \\ (3 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = R^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} z = -2 \\ (1 - x_0)^2 - (4 - x_0)^2 = 0 \\ \frac{9}{4} + (2 - y_0)^2 = R^2 \\ \frac{1}{4} + (4 - y_0)^2 = R^2 \end{cases};$$

$$(1 - x_0)^2 = (4 - x_0)^2; \quad \begin{cases} 1 - x_0 = 4 - x_0 \\ 1 - x_0 = x_0 - 4 \end{cases}; \quad x_0 = \frac{5}{2};$$

$$2 + 4 - 4y_0 + y_0^2 - 16 + 8y_0 - y_0^2 = 0, \quad y_0 = \frac{5}{2}, \quad \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = R^2, \quad R = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ x_0 = \frac{5}{2} \\ y_0 = \frac{5}{2} \\ R = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Значит, координаты  $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ .

Рассмотрим осевое сечение и  $\triangle AHM \sim \triangle PDM$ .  $DM = HM - HD = 1 \Rightarrow$

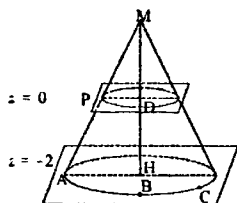
$$\frac{DM}{PD} = \frac{HM}{AH} \Rightarrow PD = \frac{AH \cdot DM}{HM} = \frac{1}{3} AH = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

$$S_{\text{сечения}} = \pi PD^2 = \pi \cdot \frac{10}{36} = \frac{5\pi}{18}.$$

$$\text{Образующая } L = AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{10}{4} + 9} = \sqrt{\frac{46}{4}} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

$$S_{\text{бок конуса}} = \pi AH \cdot AM = \pi \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \frac{\pi\sqrt{115}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{5\pi}{18}; M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right); \frac{\pi\sqrt{115}}{2}.$



2. Дано: усеченный конус,  $ABCD$  — осевое сечение,  $AC \perp BD$ ,  $CH$  — высота, второй конус с образующей  $AC$  и радиусом  $CH$ ,

$$\frac{S_{\text{бок. ус. кон.}}}{S_{\text{бок. кон. II}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Найти:  $\angle BAD$ .

Решение: Пусть  $\angle BAD = \varphi = \angle CDH$ . Пусть также  $BO_1 = r$ ,  $AO_2 = R$ , тогда  $HD = R - r$ . Из  $\triangle CHD$ :  $CH = HD \cdot \operatorname{tg} \varphi = (R - r) \operatorname{tg} \varphi$ .

Но с другой стороны из  $\triangle CO_1K$  и  $\triangle DO_2K$ :  $O_1O_2 = r + R = CH$ .

Значит,  $(R - r) \operatorname{tg} \varphi = r + R$ .

$AH = R + r$ . Из  $\triangle ACH$ :  $AC = (R + r) \sqrt{2}$ .

Из  $\triangle CHD$ :  $CD = \frac{HD}{\cos \varphi} = \frac{R - r}{\cos \varphi}$ .

$$S_{\text{бок. ус. кон.}} = \pi \cdot CD \cdot (R + r) = \frac{\pi(R - r)(R + r)}{\cos \varphi}$$

$$S_{\text{бок. кон. II}} = \pi \cdot AC \cdot CH = \pi(R + r)^2 \sqrt{2}.$$

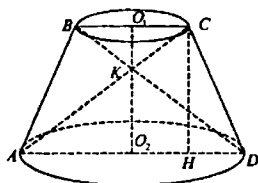
$$\frac{S_{\text{бок. ус. кон.}}}{S_{\text{бок. кон. II}}} = \frac{\pi(R - r)(R + r)}{\cos \varphi \cdot \pi(R + r)^2 \sqrt{2}} = \frac{(R - r)}{(R + r) \cos \varphi \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$3(R - r) = 2 \cos \varphi (R + r) \sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} (R - r) \operatorname{tg} \varphi = R + r \\ 3(R - r) = 2 \cos \varphi (R + r) \sqrt{3} \end{cases}, \quad \frac{3(R + r)}{\operatorname{tg} \varphi} = 2 \cos \varphi (R + r) \sqrt{3},$$

$$3 = 2 \sin \varphi \sqrt{3} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{3}$ .

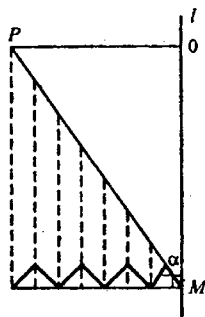


### С—9

1. Дано: ломаная линия из 8 звеньев, все звенья равны  $a$ , угол между звеньями  $\alpha$ ,  $l$  — ось.

Найти:  $S$  поверхности, которая образуется при вращении этой ломаной вокруг оси  $l$ .

Решение: Продлим отрезок, составляющий первое звено. Проведем через концы остальных звеньев прямые, параллельные прямой  $l$ . Мы видим, что соответствующие сегменты фигуры вращения, площадь которой нужно найти, равны кускам конуса (нечетные просто равны, а четные симметричны относительно некоторой плоскости). Поэтому искомая площадь равна площади конуса с образующей  $8a$  и углом между образующей и осью вращения  $\alpha/2$ .



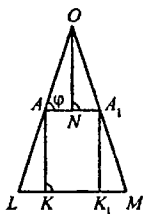
$$S_{\text{нов}} = \pi r L = \pi \cdot \left( 8a \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot 8a = 64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ:  $64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}$ .

2. Дано: правильная треугольная призма, все ребра равны  $a$ . Четыре вершины призмы лежат в плоскости основания конуса, а две другие — на его боковой поверхности. Образуемая конуса составляет с плоскостью основания угол  $\varphi$ .

Найти:  $S_{\text{ос. сеч. кон.}}$  и ее наименьшее значение; при каком значении  $\varphi$  это достигается.

Решение: Проведем сечение через вершину конуса и вершины призмы, которые лежат на боковой поверхности конуса. Это осевое сечение. Здесь  $A_1K_1 = AK$  — есть высота в грани призмы, которая представляет собой равносторонний треугольник.



$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AA_1 = a, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$K_1M = A_1K_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \varphi; ON = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Площадь сечения есть

$$\begin{aligned} S_{\triangle LOM} &= \frac{1}{2} LM \cdot (ON + AK) = \frac{1}{2} (a + 2K_1M)(ON + AK) = \\ &= \frac{1}{2} (a + a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi) \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) = \frac{a^2}{4} (1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi) = \\ &= \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + 3 \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi) = f(\varphi). \end{aligned}$$

Наименьшее значение достигается в нуле производной по  $\varphi$

$$f'(\varphi) = \frac{a^2}{4} \left( -\frac{3}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right); \frac{3}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{3}; \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}; \varphi = 60^\circ. S_{\min} = \frac{a^2}{4} (2\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}) = a^2 \sqrt{3}.$$

Ответ:  $a^2 \sqrt{3}$ .

### С—10

1. Дано: сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 3 = 0$  и  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$  пересекаются.

Найти: длину линии пересечения этих сфер.

Решение: Преобразуем уравнения сфер:

$$a) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$

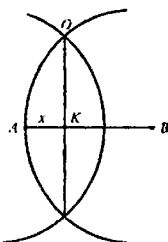
$$b) x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 9 = 0$$

Сфера а) имеет центр в т.  $A\{1, 0, -1\}$  и радиус 2.

Сфера в) имеет центр в т.  $B\{-1, 1, 1\}$  и радиус 3.

Если мы проведем сечение через прямую  $AB$ , то получим такую картинку:

Здесь:  $OB = R_b = 3$ ,  $OA = R_a = 2$ , а высота  $\Delta OAB_1$ , опущенная на  $AB$ , равна радиусу окружности пересечения сфер.



$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + 1 + (1-1)^2} = 3.$$

Пусть  $OK = h$  — высота,  $KA = x$ . Тогда:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = OA^2 = 4 \\ h^2 + (AB - x)^2 = OB^2 = 9 \end{cases}; \begin{cases} h^2 + x^2 = 4 \\ h^2 + (3 - x)^2 = 9 \end{cases}$$

$$9 - 6x + x^2 - x^2 = 5, x = \frac{2}{3}, h = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, искомая длина окружности пресечения  $2\pi h = 8\pi \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Ответ:  $8\pi \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

2. Дано: точки  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(-4; 0; 0)$ .

Найти: множество точек, расположенных вдвое ближе к точке  $A$ , чем к точке  $B$ .

Решение: Запишем условие аналитически. Координаты искомых точек должны удовлетворять равенству

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = (x+4)^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 + 3y^2 + 3z^2 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x + y^2 + z^2 = (x-4)^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0.$$

Значит, искомое множество точек — сфера с центром в т.  $(4, 0, 0)$  и радиусом 4.

Ответ: сфера с центром в точке  $(4, 0, 0)$  и радиусом 4.

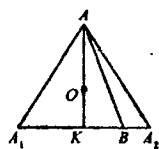
## С—11

1. Дано: из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом  $\alpha$  одна к другой, радиус шара равен  $R$ .

Найти: длину хорд.

Решение:

Соединим попарно концы хорд. Получим вписанную в шар треугольную пирамиду. Поскольку боковые грани — равные треугольники (по 2 сторонам и углу между ними), то в основании пирамиды — равносторонний треугольник. Высота пирамиды падает в



центр (т. пересечения высот, медиан, биссектрис) этого треугольника, т.к. вся фигура при повороте вокруг высоты на  $120^\circ$  переходит в себя же. Проведем сечение сферы и пирамиды плоскостью, проходящей через одну из хорд и высоту. Она пройдет также через центр сферы (см. замечание о сдвиге на  $120^\circ$ ). Получим такой рисунок:

Здесь  $AA_1$  — хорда,  $O$  — центр шара,  $A_1B$  — пересечение с основанием пирамиды (совпадает с высотой, медианой, биссектрисой этой грани)  $AK$  — высота пирамиды и  $\Delta A_1AB$ .

Пусть  $AA_1 = x$ . Тогда сторона основания пирамиды будет  $2x \sin \frac{\alpha}{2}$  — из равнобедренного треугольника каждой грани, где боковые стороны  $x$ , а угол при вершине —  $\alpha$ .

$$AB \text{ — (высота и медиана основания)} = 2x \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку  $K$  — точка пересечения медиан, то по свойству медианы

$$A_1K = \frac{2}{3} AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} x \sin \frac{\alpha}{2}. \quad AK = \sqrt{x^2 - A_1K^2} = x \sqrt{1 - \frac{12}{9} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около  $\Delta A_1AA_2$ , сечение проходит через центр сферы ( $A_2$  — точка, симметричная относительно  $AK$ ).

$$\text{Значит, } R = \frac{A_1A \cdot AA_2 \cdot A_1A_2}{4S_{\Delta A_1AA_2}} = \frac{x \cdot x \cdot 2 \cdot AK}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A_1K \cdot AK} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot x \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x^2 \sqrt{1 - \frac{12}{9} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{x}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Отсюда } x = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: длина хорды } \frac{2\sqrt{3}}{3} R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}.$$

2. Дано:

из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды длиной  $a$ ,  $b$ , и  $c$ .

Найти:  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение:

Построим точки, симметричные данным в условии (исходной к концам хорд), относительно центра сферы. Получим вершины вписанного в сферу параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Центр сферы окажется на середине «длинной» диагонали параллелепипеда. Отсюда радиус сферы

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Площадь сферы

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2) = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

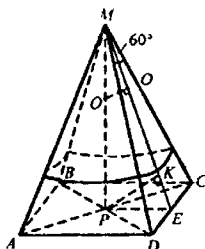
Ответ:  $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$ .

## С—12

1. Дано: все ребра четырехугольной пирамиды равны по  $a$ . Высота пирамиды является диаметром шара.

Найти: длину линии пересечения поверхностей этих тел.

Решение: Пирамида является правильной. Линия пересечения состоит из 4 дуг окружностей, полученных пересечением боковыми гранями поверхности сферы.



На рисунке  $PK \perp (MDC)$   $OO_1 \perp (MDC)$   $OO_1 = \frac{1}{2} PK$

$$PK = \frac{MP \cdot PE}{ME}, ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}, PE = \frac{a}{2}, MP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$PK = \frac{a\sqrt{2}a \cdot 2}{2 \cdot 2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}},$$

$$R = MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Градусная мера каждой из дуг равна  $120^\circ$ . Тогда  $l = \frac{\pi a \cdot 120}{2\sqrt{3} \cdot 180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}$

А вся линия пересечения имеет длину  $l = \frac{4\pi a}{3\sqrt{3}}$ .

Ответ:  $\frac{4\pi a}{3\sqrt{3}}$ .

2. Дано: в куб с ребром, равным  $a$ , вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба, вписан второй шар, касающийся первого шара.

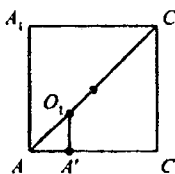
Найти: радиус второго шара.

Решение: Рассмотрим сечение, проходящее через диагональ одной из принадлежащих ко второму шару граней. Центры обоих шаров лежат на этом сечении — на диагонали куба  $AC_1$ .

Из  $\triangle AO_1A'$  имеем:

$$AO_1^2 = r^2 + AA'^2,$$

$$AO_1 = \frac{AC_1}{2} - \frac{a}{2} - r = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2} - r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a - r$$



(1)



$\triangle AOA_1'$  подобен  $\triangle AC_1C$  — оба прямоугольные с одинаковым углом при  $A$ . Значит,

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{r}{CC_1} \Leftrightarrow \frac{AA'}{\sqrt{2}a} = \frac{r}{a} \Leftrightarrow AA' = \sqrt{2}r.$$

Подставим в равенство (1)

$$\left( \frac{\sqrt{3}-1}{2}a - r \right)^2 = r^2 + (\sqrt{2}r)^2; \quad r^2 - (\sqrt{3}-1)ar + \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)^2 \cdot a^2 = 3r^2;$$

$$2r^2 - (\sqrt{3}-1)ar - \frac{2-\sqrt{3}}{2}a^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + (\sqrt{3}-1)\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Решив квадратное относительно  $\frac{r}{a}$  уравнение, получим

$$\frac{r}{a} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}a \quad (\text{второй корень — отрицательный}).$$

Ответ:  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$ .

### С—13

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ ,  $E \in AD$ ,  $AE = ED$ ,  $F \in CD$ ,  $CF = FD$ ,  $B_1 K \perp EF$ ,  $\angle BKB_1 = 45^\circ$ .  
Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение:  $EF$  — средняя линия  $\triangle ACD$ .

$$BD = AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 10 \Rightarrow EF = 5.$$

$$\text{Высота } BP \triangle ABC \text{ равна } BP = \frac{2S}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{AC} = 4,8.$$

$$BK = \frac{3}{2}BP = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{5} = \frac{36}{5} = 7,2.$$

Из прямоугольного  $\triangle B_1BK$ :  $B_1B = BK = 7,2$

$$\Rightarrow V_{\text{параллелепипеда}} = BB_1 \cdot AB \cdot AD = 7,2 \cdot 6 \cdot 8 = 48 \cdot 7,2 = 345,6.$$

Ответ: 345,6.

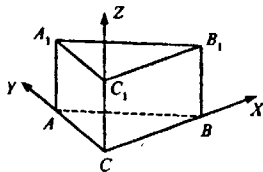
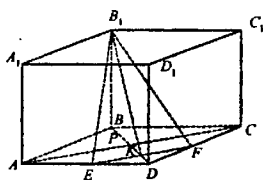
2. Дано:  $ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая призма,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 4$ ,  $BB_1 = 3$ . Угол между  $AC_1$  и  $CB_1$  равен  $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$ .

Найти:  $V(ABCA_1 B_1 C_1)$ .

Решение: Поместим призму в прямоугольную систему координат  $Sxyz$ .

Пусть  $AC = y_0$ , тогда  $\overrightarrow{AC_1} \{0, -y_0, 3\}$ ,  $\overrightarrow{CB_1} \{4, 0, 3\}$ .

$$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{9 + y_0^2}, \quad |\overrightarrow{CB_1}| = 5.$$



$$(\overline{AC_1} \cdot \overline{CB_1}) = 9 = \sqrt{9 + y_0^2} \cdot 5 \cdot \cos\left(\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}\right);$$

$$\sqrt{9 + y_0^2} = \frac{9 \cdot 10}{5 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{18}{3\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 3.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot BB_1 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

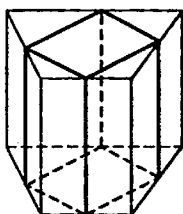
Ответ: 18.

### С—14

1. Дано: около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция, основания которой равны  $a$  и  $b$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: Высотой призмы является сторона куба. Найдем ее. Для этого рассмотрим расположение грани куба на основании призмы.



По условию две вершины куба попадают на боковые стороны трапеции основания призмы. Значит, диагональ грани куба совпадает со средней линией трапеции. Но средняя линия трапеции параллельна основаниям. Вторая диагональ квадрата (грани куба) перпендикулярна первой и, стало быть, является высотой трапеции.

Пусть сторона куба —  $x$ , тогда диагональ грани  $x\sqrt{2} = \frac{a+b}{2}$  (длина

средней линии) = высоте трапеции.  $S_{\text{трап.}} = \frac{(a+b)}{2} x\sqrt{2} = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} = 2x^2$ .

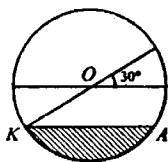
$$\text{Отсюда } x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b). \quad V_{\text{призмы}} = S_{\text{трап.}} \cdot x = 2x^3 = \frac{(a+b)^3 \sqrt{2}}{16}$$

$$\text{Ответ: } \frac{(a+b)^3 \sqrt{2}}{16}.$$

2. Дано: корыто полуцилиндрической формы наполнено до краев жидкостью.

Сколько процентов жидкости выльется, если корыто наклонить на  $30^\circ$  так, чтобы образующие цилиндра оставались горизонтальными?

Решение: Объем жидкости в корыте пропорционален площади смачивания его боковой грани.



Площадь смачивания до поворота —  $\frac{\pi r^2}{2}$ .

Площадь смачивания после поворота есть площадь сектора  $KOA$  минус площадь  $\Delta KOA$ . Поскольку  $KO$  и  $OA$  образуют с горизонталью угол  $30^\circ$ ,  $\angle KOA = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ . Отсюда

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2, S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \cos 30^\circ \cdot r \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2.$$

Процент вылитой жидкости есть

$$\frac{\frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{3} \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2}{\frac{\pi r^2}{2}} \cdot 100 = \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) \cdot 100 \approx 60\%.$$

Ответ:  $\approx 60\%$ .

### C—15

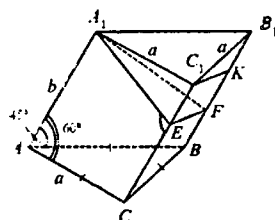
1. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $AB=BC = AC=a$ ,  $A_1A=b$ ,  $\angle A_1AC = 60^\circ$ ,  $\angle A_1AB = 45^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение:

Опустим из т.  $A$  перпендикуляры  $A_1E$  и  $A_1F$  на  $CC_1$  и  $BB_1$ .



$$\text{Из } \triangle A_1EC_1: A_1E = A_1C_1 \cdot \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$C_1E = \frac{a}{2}. \text{ Из } \triangle A_1B_1F: A_1F = B_1F = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

В прямоугольной трапеции  $EC_1B_1F$  проведем высоту  $C_1K$ .

$$\text{В } \triangle C_1KB_1: B_1K = B_1F - EC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}; C_1B_1 = a$$

$$\Rightarrow C_1K = \sqrt{C_1B_1^2 - B_1K^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}(2+1-2\sqrt{2})} = a\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}. EF = C_1K = \frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}.$$

По т. косинусов  $EF^2 = A_1E^2 + A_1F^2 - 2A_1E \cdot A_1F \cos \angle EA_1F$

$$\frac{a^2}{4}(1+2\sqrt{2}) = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{2} - 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \angle EA_1F$$

$$1+2\sqrt{2} = 3+2-2\sqrt{6} \cos \angle EA_1F, 2\sqrt{6} \cdot \cos \angle EA_1F = 4-2\sqrt{2},$$

$$\cos \angle EA_1F = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \sin \angle EA_1F = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EA_1F} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{6}} = \sqrt{\frac{6-4-2+4\sqrt{2}}{6}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot \frac{1}{2} A_1 E \cdot A_1 F \cdot \sin \angle EA_1 F =$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^2 b}{4} \sqrt{2}$$

Ответ:  $\frac{a^2 b}{4} \sqrt{2}$ .

2. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонная призма,  $AC \perp BD$ ,  
 $AC = 5$ ,  $BD = 4$ ,  $BB_1 D_1 D$  — прямоугольник,  
 $S(AA_1 C_1 C) = 30$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

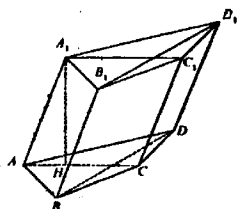
Решение:

$B_1 B \perp BD \Rightarrow AA_1 \perp BD$ , а  $BD \perp AC$  по условию  $\Rightarrow$   
 $(ABCD) \perp (AA_1 C_1 C)$ . Значит, высота  $A_1 H$  призмы  
 лежит в плоскости  $(A_1 C_1 CA)$ .

$$A_1 H = \frac{S(AA_1 C_1 C)}{AC} = \frac{30}{5} = 6. S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 10.$$

$$V_{\text{призмы}} = S(ABCD) \cdot A_1 H = 60.$$

Ответ: 60.



### С—16

1. Дано:

$MABC$  — треугольная пирамида,  $AB=BC=AC =$   
 $= \sqrt{2}$ ,  $MA = \sqrt{2}$ ,  $S(MAC) = S(MBC) = S(MAB)$ .

Найти:  $V(MABC)$ .

Решение:

Т.к. боковые грани имеют равные площади, то апофемы равны:

$ME = MK = ML \Rightarrow \Delta LHM = \Delta EHM = \Delta KHM$  ( $H$  — основание перпендикуляра  $MH$ )  $\Rightarrow H$  — центр вписанной окружности

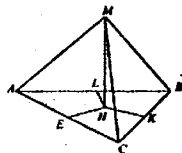
$$HE = AC \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Из } \Delta AME, \text{ где } AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} : AM = \sqrt{2}, EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Из } \Delta MHE: MH = \sqrt{ME^2 - EH^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}$ .



2. Дано:  $DABC$  — тетраэдр,  $M \in AB$ ,  $AM = \frac{1}{3}AB$ ,  $P \in AF$ ,  $AF$  — медиана  $\triangle ABC$ ,  $AP = PF$ ,  $K \in AI$ ,  $AI$  — медиана  $\triangle ADB$ ,  $AK = KI$ . Плоскость  $(MKP)$  — секущая.

В каком отношении  $(MKP)$  делит объем пирамиды?

Решение: Покажем, что т.  $M, P, C$  лежат на одной прямой.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\quad (2)$$

Значит,  $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{MP} \Rightarrow M, P$  и  $C$  лежат на одной прямой.

Объемы получившихся пирамид относятся как площади оснований (имеют общую высоту). В свою очередь площади относятся как отрезки  $AM$  и  $MB$ , т.е. как  $1 : 2$ .

Ответ:  $1 : 2$ .

### C—17

1. Дано: конус,  $DH$  — высота,  $ADB$  — сечение,  $S(ADB)$  — площадь наибольшего сечения, проходящего через вершину,  $HE \perp AB$ ,  $\angle HED = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $AD = L$ .

Найти: объем меньшей получившейся части.

Решение: Т.к.  $S(ADB)$  — наибольшая, то  $\angle ADB =$

$$90^\circ \Rightarrow AB = AD\sqrt{2} = L\sqrt{2}, AE = \frac{AB}{2} = L\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

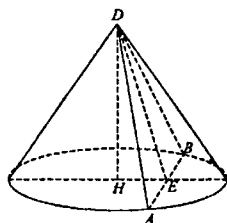
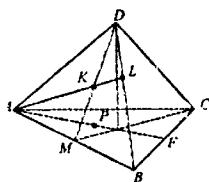
$$\text{Из } \triangle DEA: DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = L\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = L\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DHE: HE = DE \cdot \cos \angle HED = L\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{6}}{6};$$

$$DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = L\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}L.$$

$$\text{Из } \triangle DHA: HA = R = \sqrt{AD^2 - DH^2} = L\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = L\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle AHB: AB^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHB); 2L^2 = 2 \cdot \frac{2}{3}L^2(1 - \cos \angle AHB);$$



$$\frac{3}{2} = 1 - \cos \angle AHB; \cos \angle AHB = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AHB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$S_{\text{сегмента}} = \frac{\angle AHB}{2} \cdot AH^2 - \frac{1}{2} AH^2 \sin \angle AHB = \frac{\pi}{3} \cdot L^2 \cdot \frac{2}{3} - L^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

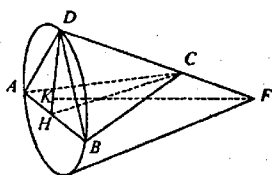
$$= L^2 \left( \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$

$$V = \frac{1}{3} DH \cdot S_{\text{сегмента}} = \frac{1}{3} \cdot L \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L^2 \left( \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} L^3 \left( \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{18} \right) = \frac{L^3 (4\pi\sqrt{3} - 9)}{162}.$$

Ответ:  $\frac{L^3(4\pi\sqrt{3} - 9)}{162}$ .

**2. Дано:**

•  $DABC$  — правильная пирамида,  $AB = 12$ ,  $DA = 10$ . Вокруг  $\triangle ADB$  описана окружность — основание конуса,  $DC \in$  образующей конуса  $DF$ . Найдите:  $V_{\text{конуса}}$ .



Решение:  $S(ADB) = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = 8 \cdot 6 = 48$ .

$$DK = R_{\text{конуса}} = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4S} = \frac{12 \cdot 100}{192} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Высота } DH = \frac{2S}{AB} = \frac{96}{12} = 8. \text{ В } \triangle ABC: CH = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$I_3 \Delta DHC: CH^2 = HD^2 + DC^2 - 2HD \cdot DC \cdot \cos \angle HDC$$

$$36 \cdot 3 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle HDC$$

$$2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \angle HDC = 164 - 108 = 56$$

$$\cos \angle HDC = \frac{7}{20} \Rightarrow \sin \angle HDC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle HDC} = \sqrt{\frac{400}{400} - \frac{49}{400}} = \frac{3\sqrt{39}}{20}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \angle HDC = \frac{3\sqrt{39}}{7}.$$

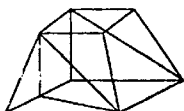
Из  $\triangle DKF$ , где  $DK$  — радиус конуса,  $DF$  — образующая,  $KF$  — высота:

$$KF = DK \cdot \operatorname{tg} \angle HDC = \frac{25}{4} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{7} = \frac{75\sqrt{39}}{28}.$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi \cdot KF \cdot KD^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}.$$

Ответ:  $\frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}$ .

1. Дано: стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость.



В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение: Пусть высота усеченной пирамиды равна  $h$ . Найдем объем нижней части, полученной после сечения. Для этого построим эту часть до прямой призмы, продлив верхнее ребро до пересечения с плоскостями, проведенными через ребра основания перпендикулярно плоскости основания.

См. рисунок а) — сечение построенной призмы через верхнее ребро перпендикулярно основанию.

$V_{\text{ниж.}} = V_{\text{призмы}} - 2V_{\text{пир.}}$  (при достраивании призма оказывается составленной из двух треугольных пирамид и нашей нижней части).

$$V_{\text{ниж.}} = S_{\Delta_1} \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta_1} \cdot \frac{a-b}{2} = S_{\Delta_1} \left( \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \right) = \frac{1}{6} h \cdot a(2a+b).$$

Аналогично для верхней части проведем две плоскости через ребра верхней грани фигуры:

$$V_{\text{верх.}} = S_{\Delta_2} \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta_2} \cdot \frac{a-b}{2} = S_{\Delta_2} \left( \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \right) = \frac{1}{6} h \cdot b(2b+a).$$

$$\frac{V_{\text{ниж.}}}{V_{\text{верх.}}} = \frac{\frac{1}{6} ha(2a+b)}{\frac{1}{6} hb(2b+a)} = \frac{a(2a+b)}{b(2b+a)}.$$

Ответ:  $\frac{a(2a+b)}{b(2b+a)}.$

2. Дано: прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), у которого катет  $BC = a$  и  $\angle A = 60^\circ$ , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину  $A$  и перпендикулярной биссектрисе угла  $A$ .

Найти:  $V_{\text{тела вращения}}.$

Решение:

$\angle KAC = \angle KAB = 30^\circ$ , т.к.  $AK$  — биссектриса

$\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ$ ,  $CC' \parallel BB' \parallel AK$

$\angle OAC = 90^\circ - \angle KAC = 60^\circ = \angle BAB'$

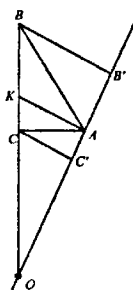
$\angle AOC = 90^\circ - \angle OAC = 30^\circ = \angle B'BA$

$\triangle ABC = \triangle CAO \Rightarrow CO = BC = a$

$V_{\text{фиг}} = V_{\text{кон. } OBB'} - V_{\text{кон. } OCC'} - V_{\text{кон. } ACC'} - V_{\text{кон. } ABB'}.$

$$3V_{\text{конуса } OBB'} = \pi(BB')^2 \cdot BO = \pi(2a \cdot \sin 30^\circ)^2 \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \pi a^3$$

$$3V_{\text{конуса } OCC'} = \frac{1}{8} V_{\text{конуса } OBB'} = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi a^3$$



(конусы гомотетичны с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ );

$$3V_{\text{конуса } ACC'} = \pi(CC')^2 \cdot AC' = \pi(asin30^\circ)^2 \cdot \left( \frac{a}{\cos 30^\circ} - a \cos 30^\circ \right) = \pi a^3 \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

$$3V_{\text{конуса } ABB'} = \pi(BB')^2 \cdot AB' = \pi(2asin30^\circ)^2 \cdot \left( 2a \cos 30^\circ - \frac{a}{\cos 30^\circ} \right) = \pi a^3 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3V_{\text{фигуры}} = \pi a^3 \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \pi a^3 \cdot \frac{12}{8\sqrt{3}} = \pi a^3 \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \pi a^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{фигуры}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

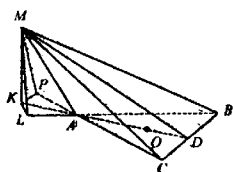
Ответ:  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$ .

### С—19

1. Дано:  $MABC$  — пирамида,  $AB = BC = AC = 1$ ,

$O$  — центр  $\triangle ABC$ ,  $K \in$  прямой  $AO$ ,  $OK = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$MK$  — высота,  $MK = \sqrt{\frac{4}{3}}$ . В  $MABC$  вписан шар.



Найти:  $S_{\text{пов. шара}}$ .

Решение: Если соединить центр шара  $o$  всеми вершинами  $M, A, B, C$ , получим четыре пирамиды с высотами  $r \Rightarrow V(MABC) = S(ABCM) \cdot \frac{1}{3} r$ .

Будем вычислять радиус по формуле  $r = \frac{3V}{S}$ .

Из точки  $K$  опустим перпендикуляр на  $BC$  и продолжим стороны  $AC$  и  $AB$ . Тогда по теореме о трех перпендикулярах  $MD \perp BC$ ,  $ML \perp AB$  и  $MP \perp AC$ ;

$$KD = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad KA = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$KP = \frac{1}{2}KA = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle MKD: MD = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{36}\right)} = \frac{7\sqrt{3}}{6}. \quad S(BMC) = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

$$\triangle MKL: ML = MP = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



$$S(MAC) = S(MAB) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot S = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \cdot R = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}.$$

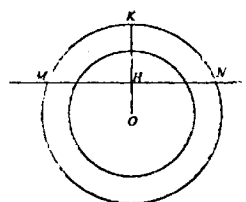
$$S_{\text{шара}} = 4\pi \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} \right)^2 = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$

2. Дано: шар  $(O, R)$ , шар  $(O, r)$ ,  $R - r = 3$  см,  $R = 9$  см,  $OK \perp MN$ ,  $OK \cap MN = H$ ,  $KH = 6$  см.

Найти:  $\rho$  материала.

Решение:



Объем полого шара  $V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ ,  $r = 6 \Rightarrow$

$$V = \frac{4}{3} \pi (729 - 216) = 684\pi \text{ см}^3.$$

Вес шара  $P = V_{\text{ш}} \cdot \rho \cdot g.$

Погруженная в воду часть — сегмент.

$$V_{\text{сегмента}} = \pi \cdot (R + OH)^2 \left( R - \frac{R + OH}{3} \right) = \pi \cdot 144 \cdot 5 = 720\pi \text{ см}^3.$$

Выталкивающая сила  $F = V_{\text{сегмента}} \cdot \rho_{\text{воды}} \cdot g = 720\pi \rho_{\text{воды}} \cdot g;$

$$\rho_{\text{воды}} = \frac{12}{1 \text{ см}^3}.$$

По закону Архимеда  $P = F$ , т.е.  $684\pi \rho_{\text{ш}} \cdot g = 720\pi \rho_{\text{в}} \cdot g$

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{720}{684} = \frac{180}{171} = \frac{20}{19} \text{ г/см}.$$

Ответ:  $\frac{20}{19} \text{ г/см}.$

ДС

1 Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $AB = 2$ ,  $MH$  — высота,  $MH = 1$ .

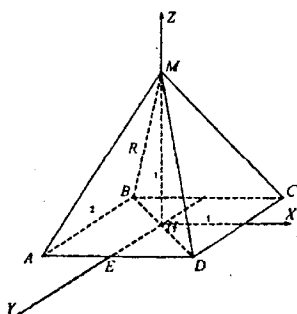
Найти: угол  $\varphi$  между  $AM$  и  $(DMC)$ .

Решение Проведем  $HE \perp AD$ ;

$$HE = \frac{1}{2} AD = 1.$$

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .

В ней  $\overline{AM} \{1, -1, 1\}.$



Найдем угол  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$  между  $\overrightarrow{AM}$  и  $\vec{n} \{1, 0, 1\}$ ,  $\vec{n} \perp (DMC)$ ,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3}, |\vec{n}| = \sqrt{2}. (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = 1 + 1 = 2 = \sqrt{6} \cos \gamma; \cos \gamma = \frac{2\sqrt{6}}{6};$$

$$\gamma = \arccos \frac{2\sqrt{6}}{6}; \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

2. Дано:  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(2, 0, -1)$ ,  $A, B \in \alpha$ ,  $\alpha \parallel \vec{m} \{3, 1, -1\}$ .

Найти: уравнение  $\alpha$ .

Решение: Отложим от точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AC} = \vec{m} \Rightarrow C(4, 0, 0)$ .

Уравнение  $\alpha$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{aligned} A \in \alpha: & \begin{cases} P - Q + R + S = 0 \\ 2P - R + S = 0 \\ 4P + S = 0 \end{cases} \\ B \in \alpha: & \\ C \in \alpha: & \end{aligned} \quad ; \quad \begin{cases} Q = \frac{5S}{4} \\ R = \frac{S}{2} \\ P = -\frac{S}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{уравнение } \alpha: -\frac{x}{4} + \frac{5y}{4} + \frac{z}{2} + 1 = 0 \text{ или } x - 5y - 2z - 4 = 0.$$

Ответ:  $x - 5y - 2z - 4 = 0$ .

## Вариант 8

### C—1

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $M \in AD$ ,  $AM = MD$ ,  $P \in AA_1$ ,  $AP = PA_1$ ,  $F \in A_1 B_1$ ,  $A_1 F = FB_1$ ,  $K \in CC_1$ ,  $C_1 K = KC$ .

Выяснить, лежат ли точки  $P, M, F, K$  в одной плоскости.

Решение: Пусть ребро куба  $2a$ . Поместим куб в прямоугольную систему координат  $AXYZ$ . В ней  $P(0, 0, a)$ ,  $M(a, 0, 0)$ ,  $F(0, a, 2a)$ ,  $K(2a, 2a, a)$ .  
Уравнение плоскости  $(PMF)$ :  $Qx + Ry + Sz + T = 0$ .

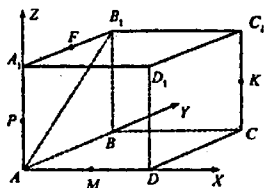
$$\begin{aligned} P \in (PMF): & \begin{cases} aS + T = 0 \\ aQ + T = 0 \end{cases} \\ M \in (PMF): & \begin{cases} aQ + T = 0 \\ aR + 2aS + T = 0 \end{cases} \\ F \in (PMF): & \begin{cases} aS + T = 0 \\ aQ = -T \end{cases} \end{aligned} ; \quad \begin{cases} aS = T \\ aQ = -T \\ aR = T \end{cases}$$

Уравнение  $(PMF)$ :  $x - y + z - a = 0$ .

Подставляя координаты т.  $K$  в уравнение  $(PMF)$ :  $2a - 1a + a - a = 0$ , получаем тождество  $\Rightarrow K \in (PMF)$ .

Все четыре точки лежат в одной плоскости.

Ответ: указанные точки лежат в одной плоскости.



2. Дано:

$$\vec{m} \{1, 1, 1\}, \vec{a} \{1, 1, -2\}, \vec{b} \{1, -1, 0\}, \vec{c} \{0, 2, 3\}, \vec{m} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}.$$

Найти:  $p, q, r$ .

Решение:

$$\begin{cases} 1 = p + q \\ 1 = p - q + 2r \\ 1 = -2p + 3r \end{cases}; \begin{cases} p = 1 - q \\ 1 = 1 - 2q + 2r \\ 1 = -2 + 2q + 3r \end{cases}; \begin{cases} p = 1 - q \\ q = r \\ r = \frac{3}{5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} p = \frac{2}{5} \\ q = \frac{3}{5} \\ r = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = 0,4\vec{a} + 0,6\vec{b} + 0,6\vec{c}.$$

Ответ:  $0,4\vec{a} + 0,6\vec{b} + 0,6\vec{c}$ .

## С—2

1. Дано:

$DABC$  — тетраэдр,  $AD \perp (ABC)$ ,  $AD=2$ ,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $AC = CB = 4$ ,  $AM = BM = CM = DM$ .

Найти:  $AM$ .

Решение:

Точки, равноудаленные от  $A, C, B$ , лежат на перпендикуляре  $HM$ ;  $H \in AB$ ,  $AH = HB = 2\sqrt{2}$ .

$\triangle DAB$  также прямоугольный, значит, точки, равноудаленные от  $A, D, B$ , лежат на перпендикуляре к  $(ADB)$ , проведенном из т.  $M$ .

Значит, искомый центр описанного шара — точка  $M$ .

$$AM = DM = MB = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{32 + 4}}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

2. Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения  $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ .

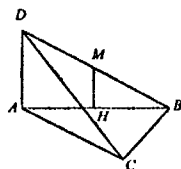
Решение:

Решение — множество точек, сумма расстояний от которых до точек  $A(0, 0, 1)$  и  $B(1, 0, 0)$  равна  $\sqrt{2}$ .

$$\text{Но расстояние } AB = \sqrt{(0-1)^2 + 0^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Значит, нам годятся все точки, лежащие на отрезке  $AB$ .

Ответ: точки, лежащие на отрезке с концами в точках  $(0, 0, 1)$  и  $(1, 0, 0)$ .



### С—3

1. Дано:  $DABC$  — тетраэдр,  $DM$  — высота  $\triangle ADC$ ,  $DN \perp AB$ ,  $N \in AB$ ,  $DM = DN$ ,  $AB = AC$ ,  $A(1, 0, -2)$ ,  $D(2, -1, 1)$ ,  $K \in BC$ ,  $BK = KC$ ,  $K(0, 1, -1)$ ,  $DH$  — высота.

Найти:  $DH$ .

Решение: Основание  $H$  высоты  $DH$  лежит на  $AK$ .

$$|\vec{AD}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}; |\vec{AK}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3};$$

$$|\vec{DK}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3};$$

$$P(AKD) = \frac{AD + AK + DK}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}.$$

$$S(AKD) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(27-11)(11-3)} = \frac{1}{4} \sqrt{16 \cdot 8} = 2\sqrt{2}. DH = \frac{2S(AKD)}{AK} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Ответ:  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

2. Дано:  $S(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ .

Найти:  $S(x_0)$  — наибольшее,  $x_0$ .

Решение: Рассмотрим векторы  $\vec{a} \{ \sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}, 1 \}$  и  $\vec{b} \{ 1, 1, 1 \}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+x+1-x+1} = \sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

$$S(x) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1 = 3 \cdot \cos \hat{\vec{a}\vec{b}}.$$

$S(x)$  наибольшее при  $\cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 1$  т.е. при  $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 0$ .

$$S(x_0)_{\text{наиб.}} = 3; x_0 = 0.$$

Ответ: 3 при  $x = 0$ .

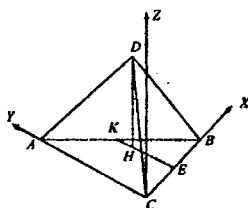
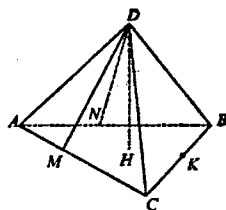
### С—4

1. Дано:  $DABC$  — тетраэдр,  $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 3$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $DH$  — высота.

Найти:  $DH$ .

Решение: Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат  $CXYZ$ . Т.к.  $CD = DB$ , то  $H \in EK$ , средней линии  $\triangle ABC$ ;  $CB = 3\sqrt{2}$ ,  $CE$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



Пусть  $DH = z_0$ , тогда

$$\overline{CD} \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0, z_0 \right\}, \overline{BD} \left\{ -\frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0, z_0 \right\}, \overline{AD} \left\{ -\frac{3\sqrt{2}}{2}, y_0 - 3\sqrt{2}, z_0 \right\}.$$

$$\begin{cases} |\overline{CD}| = \sqrt{\frac{9}{2} + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{18} \\ |\overline{AD}| = \sqrt{\frac{9}{2} + (y_0 - 3\sqrt{2})^2 + z_0^2} = \sqrt{9} \end{cases}; \begin{cases} \frac{9}{2} + y_0^2 + z_0^2 = 18 \\ \frac{9}{2} + (y_0 - 3\sqrt{2})^2 + z_0^2 = 9 \end{cases}$$

$$y_0^2 - (y_0 - 3\sqrt{2})^2 = 9; 2 \cdot 3y_0\sqrt{2} - 18 = 9;$$

$$y_0 = \frac{27}{6\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \Rightarrow |z_0| = \sqrt{18 - \frac{9}{2} - \frac{81}{8}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ .

2. Дано:  $MEFKP$  — пирамида,  $\angle EMP = \angle PMK = \angle KMF = \angle FME = \alpha$ .

Найти:  $\angle EMK = \beta$ .

Решение: Грани  $(FMP)$  и  $(EMK)$  перпендикулярны и пересекаются по прямой  $ML$ . Построим сечение  $(ABCD) \perp ML$ ;  $ML \cap (ABCD) = H$ ;  $ABCD$  — квадрат. Пусть  $AM = a$ , тогда

$$AB = AD = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; AC = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AMC: AC^2 = 2AM^2(1 - \cos \angle AMC);$$

$$8a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2a^2(1 - \cos \beta);$$

$$\cos \beta = 1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \beta = \arccos \left( 1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow \beta = \arccos(2 \cos \alpha - 1).$$

Ответ:  $\arccos(2 \cos \alpha - 1)$ .

### С—5

1. Дано:  $S_A, S_B, S_C$  — центральные симметрии,  $A, B, C$  — не лежат на одной прямой,  $ABCD$  — параллелограмм.

Доказать:  $S_A \circ S_B \circ S_C = S_D$ .

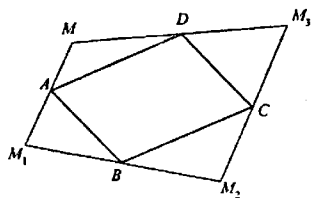
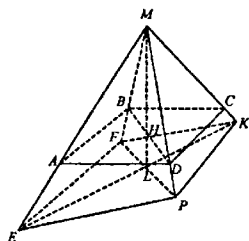
Доказательство:

При симметрии относительно  $A$   $M \rightarrow M_1$ ,  
при симметрии относительно  $B$   $M_1 \rightarrow M_2$ ,  
при симметрии относительно  $C$   $M_2 \rightarrow M_3$ .

Образовался пространственный четырехугольник  $MM_1M_2M_3$ .  $M$  и  $M_3$  симметричны относительно точки  $D$ . Проследим за изменением первой координаты  $M(a, b, c)$ ,

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, \dots), C(x_3, \dots). S_A: M \rightarrow M_1(2x_1 - a, \dots);$$

$$S_B: M_1 \rightarrow M_2(2x_2 - 2x_1 + a, \dots); S_C: M_2 \rightarrow M_3(2(x_3 - x_2 + x_1) - a, \dots)$$



симметрия относительно  $D(x_3 - x_2 + x_1, \dots)$ , которая получена откладыванием вектора  $\overrightarrow{BC} \{x_3 - x_2, \dots\}$  от точки  $A \Rightarrow ABCD$  — параллелограмм.

2. Дано: отображение, переводящее  $A(x, y, z) \rightarrow A_1(x - 1, -y - 2, z + 1)$ . Является ли отображение симметрией?

Решение: Возьмем  $B(x_1, y_1, z_1)$ .

$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}(x_1 - x, y - y_1, z_1 - z).$$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}| \Rightarrow$  отображение — движение. Оно может быть получено симметрией относительно плоскости  $xOz$  и последующим сдвигом на вектор  $\vec{p} \{-1, -2, 1\}$ .

Ответ: да, оно может быть получено симметрией относительно плоскости  $xOz$  и сдвигом на вектор  $\vec{p} \{-1, -2, 1\}$ .

### С—6

1. Дано:  $\alpha, \beta$  — плоскости,  $\alpha \cap \beta = p$  (прямая),  $B \in p, A \in \alpha, AB \perp p, C \in \beta, CB \perp p, BD$  — биссектриса  $\angle ABC$ .

Доказать:  $BD$  — ось симметрии двугранного угла.

Доказательство: При симметрии относительно  $BD$  прямая  $AB \rightarrow BC, p \rightarrow p, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow BD$  — ось симметрии двугранного угла.

2. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед,

$A_1 B E C_1 D F G H$  — параллелепипед.

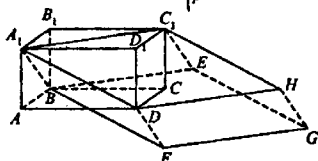
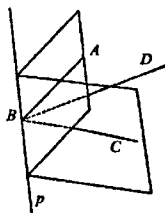
Доказать:

$C$  — центр симметрии  $A_1 B E C_1 D F G H$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 G} &= \overrightarrow{A_1 B} + \overrightarrow{A_1 D} + \overrightarrow{A_1 C_1} = \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 C_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{A_1 C}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  точка  $C$  — середина диагонали параллелепипеда  $A_1 B E C_1 D F G H$ , т.е. центр его симметрии.



### С—7

1. Дано: цилиндр,  $ABCD, EFKL$  — осевые сечения,  $(ABCD) \perp (EFKL), M \in AF, AM = MF,$

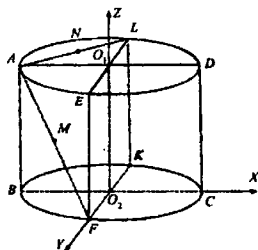
$N \in AL, AN = NL, MN = \sqrt{17}, S(ABCD) = 16.$

Найти:  $S_{\text{цилиндра}}.$

Решение: Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат  $O_2XYZ$ . Пусть  $O_2F = R,$   $EF = 2h$ , тогда  $A(-R, 0, 2h), F(0, R, 0), L(0, -R,$

$2h), M\left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, h\right), N\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, 2h\right).$

$$\overrightarrow{MN} \{0, -R, h\},$$



$$|\overline{MN}| = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{17},$$

$$S(ABCD) = BC \cdot AB = 2R \cdot 2h = 4Rh = 16,$$

$$\begin{cases} R^2 + h^2 = 17, \\ 4Rh = 16 \end{cases}; \begin{cases} \frac{16}{h^2} + h^2 = 17 \\ R = \frac{4}{h} \end{cases};$$

$$h^4 - 17h^2 + 16 = 0; h_1^2 = 16, h_2^2 = 1; h_1 = 4, h_2 = 1$$

$$\Rightarrow R_1 = 1, R_2 = 4.$$

$$S_{\text{цил. 1}} = 2\pi R_1^2 + 4\pi R_1 h_1 = 2\pi + 16\pi = 18\pi$$

$$S_{\text{цил. 2}} = 2\pi R_2^2 + 4\pi R_2 h_2 = 32\pi + 16\pi = 48\pi.$$

Значит, либо  $18\pi$ , либо  $48\pi$ .

Ответ:  $18\pi$ , либо  $48\pi$ .

2. Дано:

$MABCD$  — правильная пирамида,  $AB=a$ ,  
 $\angle MAC = 60^\circ$ , в  $MABCD$  вписан цилиндр,  
 высота цилиндра равна  $h$ .

Найти:

$S_{\text{бок. цилиндра}}$

Решение:

Рассмотрим  $\triangle EFK \sim \triangle BMD$ . В  $\triangle EFK$  вписано основание цилиндра.

$$BD = a\sqrt{2}; AH = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$PH = \frac{h}{2} \Rightarrow AP = AH - PH = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}$$

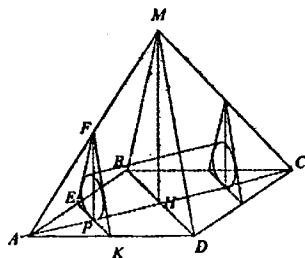
$$\frac{EK}{BD} = \frac{AP}{AH} \Rightarrow EK = \frac{BD \cdot AP}{AH} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}\right)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}\right) = a\sqrt{2} - h.$$

$$\triangle EFK \text{ — правильный} \Rightarrow S(EFK) = EK^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2} - h)^2}{4} \sqrt{3}.$$

$$r = \frac{2S}{3EK} = \frac{(a\sqrt{2} - h)^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot (a\sqrt{2} - h)} = \frac{(a\sqrt{2} - h)\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot \frac{(a\sqrt{2} - h)\sqrt{3}}{6} \cdot h = \frac{\pi\sqrt{3}(a\sqrt{2} - h)}{3} h.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi\sqrt{3}(a\sqrt{2} - h)}{3} h.$$



**C—8**

1. Дано: конус,  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(-2, -1, 2)$ ,  $C(-2, 3, 2)$ ,  $A$ ,

$B$ ,  $C \in$  окружности основания конуса,  $M\left(0, \frac{5}{3}, 6\right)$

лежит на боковой поверхности.

Найти:  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

Решение: Уравнение основания (окружность):

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ (-2-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ (-2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 \\ z=2 \end{cases}; \begin{cases} (1-x_0)^2 = (-2-x_0)^2 \\ \frac{9}{4} + (-1-y_0)^2 = R^2 \\ (1-y_0)^2 = (3-y_0)^2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$1+x_0^2-2x_0=4+x_0^2+4x_0; x_0=-\frac{1}{2}. 2y_0+1+y_0^2=9-6y_0+y_0^2; y_0=1$$

$$\frac{9}{4}+4=R^2, R=\frac{AC}{2}=\frac{5}{2}, O \in AC \quad AO=OC.$$

$$\begin{cases} x_0=-\frac{1}{2} \\ y_0=1 \\ z=2 \end{cases} \text{ — центр основания } O, R=\frac{5}{2} \text{ — радиус.}$$

$$\overline{AB} \{-3, 0, 0\} \quad AB=3$$

$$\overline{AC} \{-3, 4, 0\} \quad AC=5$$

$$\overline{BC} \{0, 4, 0\} \quad BC=4$$

$$O\left(-\frac{1}{2}, 1, 2\right). \text{ Значит, } D\left(-\frac{1}{2}, 1, h\right) \text{ — вершина конуса.}$$

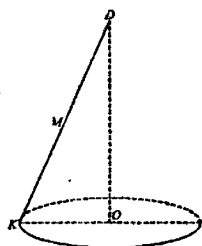
$$\overline{DM} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 6-h \right\}. \text{ Прямая } DM \text{ пересекает основание в точке } K$$

$$\overline{DK} = p \overline{DM} \left\{ \frac{p}{2}, \frac{2p}{3}, p(6-h) \right\} (p>0), K\left(-\frac{1}{2}+\frac{p}{2}, 1+\frac{2p}{3}, h+p(6-h)\right)$$

$K$  принадлежит окружности  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} h+p(6-h)=2 \\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{cases}; \begin{cases} h(1-p)=2-6p \\ \frac{p^2}{4} + \frac{4p^2}{9} = \frac{25}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} h=\frac{2-6p}{1-p} \\ \frac{25}{36}p^2=\frac{25}{4} \end{cases}; \begin{cases} h=\frac{2-6p}{1-p} \\ p^2=9 \end{cases}; \begin{cases} p=3 \\ h=\frac{2-6p}{1-p} \end{cases}; \begin{cases} p=3 \\ h=8 \end{cases}; \overline{DK} \left\{ \frac{3}{2}, 2, -6 \right\}.$$





$$l = |\overline{DK}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 36} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2};$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \pi = \frac{65\pi}{4}.$$

Ответ:  $\frac{65\pi}{4}$ .

2. Дано: усеченный конус,  $ABCD$  — осевое сечение,  $AC \perp BD$ ,  $AB = 1$ ,  $S_{\text{пов.}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + 1)$ .

Найти:  $\angle BAD$ .

Решение: Пусть  $BO_1 = r$ ,  $AO_2 = R$ .

Из  $\triangle BO_1M$  и  $\triangle AO_2M$ :  $BO_1 = O_1M$ ,  $AO_2 = O_2M \Rightarrow O_1O_2 = R + r$ .

Опустим высоту  $BH$ :  $BH = O_1O_2 = R + r$ ,  $AH = R - r$ .

Из  $\triangle ABH$ :

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(R-r)^2 + (R+r)^2} = \sqrt{2R^2 + 2r^2}; AB = 1 \\ \Rightarrow 2R^2 + 2r^2 = 1.$$

$$S_{\text{пов. кон.}} = \pi \cdot AB(BO_1 + AO_2) + \pi \cdot BO_1^2 + \pi \cdot AO_2^2 = \\ = \pi(R+r) + \pi \cdot r^2 + \pi R^2 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\begin{cases} 2R^2 + 2r^2 = 1 \\ \pi(R+r) + \pi r^2 + \pi R^2 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + 1) \end{cases}; \begin{cases} R^2 + r^2 = \frac{1}{2} \\ R+r+R^2+r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases};$$

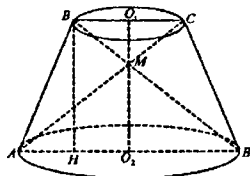
$$\begin{cases} R^2 + r^2 = \frac{1}{2} \\ r+R+R^2+r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} R = \sqrt{\frac{1}{2} - r^2} \\ r+R+\frac{1}{2}-r^2+r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} R^2 + r^2 = \frac{1}{2} \\ r+R = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} R^2 + \frac{3}{4} + R^2 - R\sqrt{3} = \frac{1}{2} \\ r = \frac{\sqrt{3}}{2} - R \end{cases};$$

$$2R^2 - R\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0; 8R^2 - 4\sqrt{3}R + 1 = 0; D = 48 - 32 = 16$$

$$R = \frac{4\sqrt{3} \pm 4}{16} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{4}; R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}, R_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4};$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}, r_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}.$$



Итак,  $r = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$ ,  $R = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$ .

$AH = R - r = \frac{1}{2}$ ,  $BH = R + r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  из  $\triangle AHB$ :  $\angle HAB = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

С—9

1. Дано: четыре квадрата со стороной, равной  $a$ .

Найти:  $S$  поверхности, которая образуется при вращении этой фигуры вокруг оси  $l$ .

Решение: Поскольку фигура симметрична относительно прямой  $m$ , то достаточно найти площадь фигуры вращения, образованной ломаной, лежащей над прямой  $m$ , а потом удвоить.

Продлим первый отрезок ломаной. Проведем через концы остальных отрезков ломаной прямые, параллельные  $l$ . Легко видеть, что соответствующие элементы вращения фигуры, площадь которой легко подсчитать, равны частям конуса (нечетные можно совместить путем сдвига, параллельно  $l$ , а четные — путем симметрии относительно некоторой плоскости).

Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади конуса с образующей  $6a$  и углом между осью вращения и образующей в  $45^\circ$ .

$$S_{\text{пов.}} = 2\pi r l = 2\pi(6a \sin 45^\circ) \cdot 6a = 72a^2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{2}\pi a^2.$$

Ответ:  $36\sqrt{2}\pi a^2$ .

2. Дано:  $A_1B_1C_1ABC$  — правильная призма,  $ABCA_1B_1C_1$  вписана в конус,  $AB = AA_1$ ,  $OH$  — высота конуса,  $\angle OKH = \varphi$ .

Найти:  $S_{\text{ос. сеч.}}$ .

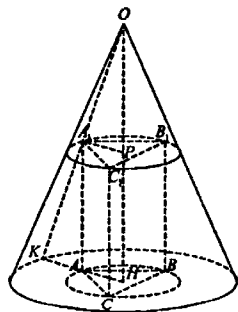
Решение:  $OH \cap (A_1B_1C_1) = P$ .

Пусть  $A_1P = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , тогда  $AA_1 = AB = a$ .

$$OP = A_1P \cdot \operatorname{tg} \varphi, OH = OP + a = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a,$$

$$HK = \frac{OH}{\operatorname{tg} \varphi} = \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a \right) \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\text{ос. сеч.}} &= KH \cdot OH = \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + a \right)^2 \operatorname{ctg} \varphi = a^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi + 1 \right)^2 \operatorname{ctg} \varphi = \\ &= \frac{a^2}{3} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right). \end{aligned}$$



$$S(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{a^2}{3} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} + 2\sqrt{3} \right), \quad S'(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{3}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right).$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 3; \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}; \varphi = 60^\circ. S_{\text{наим}} = \frac{a^2}{3} (\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$ .

### С—10

1. Дано: две сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$  и сфера с центром в точке  $O_2(2; 4; 2)$ . Они пересекаются по окружности, длина которой равна  $2\pi\sqrt{21}$ .

Найти: уравнение второй сферы.

Решение:

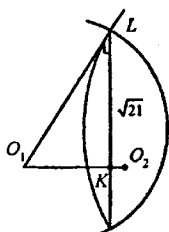
Преобразуем уравнение 1-й сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 25 = 0.$$

Значит, центр ее в т.  $O_1(1, 2, 0)$ , а радиус равен 5.

Проведем сечение через прямую  $O_1O_2$ . Получим такую картинку:

Здесь  $O_1L = 5$  (радиус сферы 1),  $LK = \sqrt{21}$  (радиус окружности пересечения).



$$O_1O_2 = (1, 2, 2) \quad O_1O_2 = 3.$$

$$O_1K = \sqrt{O_1L^2 - LK^2} = \sqrt{25 - 21} = 2 \Rightarrow O_2K = 1$$

$$LK^2 + O_2K^2 = R_2^2 \Rightarrow R_2^2 = 21 + 1 = 22$$

$$\Rightarrow \text{искомое уравнение } (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 22$$

Ответ:  $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 22$ .

2. Найти:

Множество точек, расположенных вдвое ближе к точке  $M(0; 2; 0)$ , чем к точке  $P(0; 4; 0)$ .

Решение:

Запишем условие аналитически. Координаты искомых точек должны удовлетворять равенству

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + (y-4)^2 + z^2} \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4(y-2)^2 + 4z^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8y + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + z^2 - \frac{16}{9} = 0.$$

Значит, искомое множество точек — сфера с центром в т.  $\left\{0, \frac{4}{3}, 0\right\}$  и

радиусом  $\frac{4}{3}$ .

# С—11

1. Дано: четыре шара радиуса  $R$  касаются друг друга. Сфера касается этих шаров внутренним образом.

Найти: радиус сферы.

Решение:

Центры шаров — вершины правильного тетраэдра, длина ребра которого  $2R$ . Центр искомой сферы совпадает с центром тетраэдра. Высота

$$\text{тетраэдра } h = \frac{2\sqrt{6}}{3} R.$$

$$V = S(ABC) \cdot h = 4R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} R = 2\sqrt{2} R^3.$$

По формуле из задачи С-19.1 (вариант 7)

$$\text{Радиус вписанной сферы } r_{\text{впис.}} = \frac{3V}{4S(ABC)} = \frac{6\sqrt{2}R^3}{4R^2\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Радиус искомой сферы } \frac{R\sqrt{6}}{2} - R = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

$$\text{Ответ: } \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

2. Дано:  $DABC$  — тетраэдр, сфера касается всех ребер  $DABC$ .

Сравнить суммы длин скрещивающихся ребер.

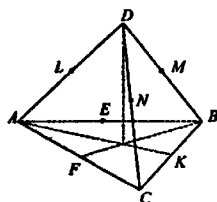
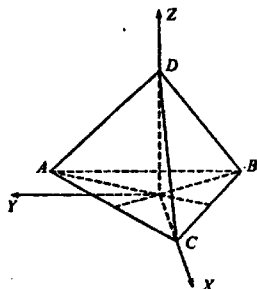
Решение:

Пусть  $E, F, K, L, M, N$  — точки касания. Т.к. отрезки касательных, проведенные к сфере, равны, то

$$A: AF = AE = AL; C: CF = CK = CN; B: BE = BM = BK;$$

$$D: DL = DM = DN;$$

$$AC + BD = AF + FC + BM + MD = AE + CN + BE + DN = AE + BE + CN + DN = AB + CD = AD + BC.$$



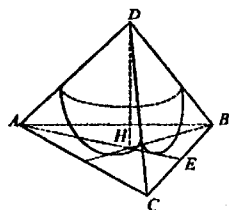
# С—12

1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $AB = a$ ,  $AE \perp CB$ ,  $\angle DEA = 60^\circ$ ,  $DH$  — высота,  $DH$  — диаметр шара.

Найти: длину линии пересечения шара и пирамиды.

Ответ: они равны.

$$\text{Решение: } CB = a, HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



$$\text{Из } \triangle DHE: DE = 2HE = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$DH = HE \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DHC, \text{ где } HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}:$$

$$DC = \sqrt{DH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

Плоский угол  $CDB$  при вершине пирамиды  $\alpha = \angle CDB$ .

$$CB^2 = 2CD^2(1 - \cos \alpha); a^2 = \frac{a^2 \cdot 7}{2 \cdot 3} (1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{6}{7}; \cos \alpha = \frac{1}{7}; \alpha = \arccos \frac{1}{7} \text{ — вписанный.}$$

$l$  линии пересечения равна:

$$2R = DH \cos \angle HDE = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$l = 3 \cdot 2\alpha \cdot R = 3 \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \arccos \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3a\sqrt{3}}{4} \arccos \frac{1}{7}.$$

2. Дано:

$DABC$  — правильная пирамида,  $AB = a$ ,  $AE \perp CB$ ,  $\angle DEA = 60^\circ$ ,  $DH$  — высота, в  $DABC$  вписаны три шара, точки касания на апофемах.

Найти: Радиус шара.

Решение: Рассмотрим сечение  $DHE$ .

Окружность с центром  $P$  — сечение шара плоскостью  $DHE$ .

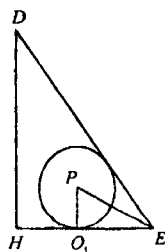
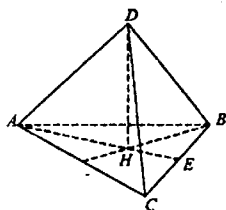
Пусть радиус равен  $r$ , тогда  $O_1E = r \operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3}$ .

$$HE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle O_1O_2O_3$  — правильный со стороной, равной  $2r$ .

$$HO_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}; HE = O_1E + HO_1$$

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + \frac{2r}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{a}{10}.$$



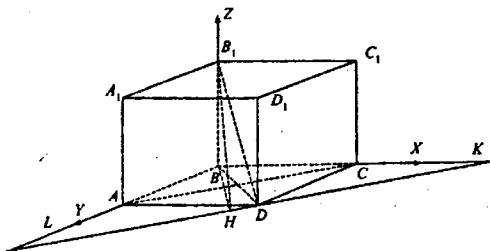
Ответ:  $\frac{a}{10}$ .

### С—13

1. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед,  $AB = 5$ ,  $BC = 12$ , плоскость  $\alpha \parallel AC$ ,  $B_1 D \in \alpha$ , угол между  $\alpha$  и  $ABCD$  равен  $60^\circ$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$



Решение:

Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат  $BXYZ$ .  $\alpha \cap ABCD =$  прямая  $DK$ .

Проведем  $BH \perp DK$ . Из  $\triangle ABC$ :  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$ .

В  $\triangle BLK$   $AC$  — средняя линия;  $LK = 2AC = 26$ ,  $LB = 10$ ,  $BK = 24$ .

$$S(LBK) = \frac{1}{2} LB \cdot BK = \frac{1}{2} LK \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{LB \cdot BK}{LK} = \frac{10 \cdot 24}{26} = \frac{120}{13}$$

$$\text{Из } \triangle B_1 BH: B_1 B = BH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{120}{13} \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 60 \cdot \frac{120\sqrt{3}}{13} = \frac{7200\sqrt{3}}{13}$$

Ответ:  $\frac{7200\sqrt{3}}{13}$ .

2. Дано:

$ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая призма,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $CB = 6$ ,  $M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ ,  $B_1 C \cap BC_1 = P$ , угол  $\alpha$  между  $MP$  и

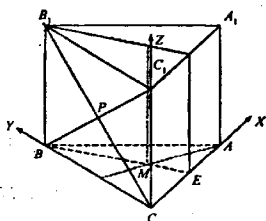
$(AA_1 C_1 C)$  равен  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Найти:  $V(ABCA_1 B_1 C_1)$ .

Решение:

Поместим призму в прямоугольную систему координат  $CXYZ$ .

$$\text{Пусть } \overrightarrow{CC_1} = 2h \cdot \overrightarrow{BE} \left\{ \frac{3}{2}, -6, 0 \right\}, \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = \{1, -4, 0\} \Rightarrow M(1, 2, 0)$$



$$P(0, 3, h), \overrightarrow{MP} \{-1, 1, h\}, \vec{n} \{0, 1, 0\}, \overrightarrow{MP} \vec{n} = \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$$(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{n}) = 1 = |\overrightarrow{MP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta = \sqrt{2 + h^2} \cdot \cos \beta$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{2 + h^2}, |\vec{n}| = 1$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{2 + h^2} = \sqrt{3}; 2 + h^2 = 3, h = 1$$

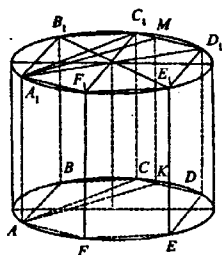
$$\Rightarrow V_{\text{призмы}} = S(ABC) \cdot 2h = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AC \cdot 2h = 6 \cdot 3 = 18.$$

Ответ: 18.

### С—14

1. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма,  $S(AA_1 B_1 B) = Q$ , сечение проходит через  $AA_1$ ,  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$ .



Найти:  $S_{\text{сеч.}}$

Решение:

Секущая плоскость проходит между  $C_1$  и  $D_1$  (или  $D_1$  и  $E_1$ ). Объемы относятся как площади частей основания. Пусть  $A_1 B_1 = a$ , тогда

$$S_1 = S(A_1 B_1 C_1) + S(A_1 C_1 M) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2},$$

$$S_2 = S(A_1 C_1 D_1 E_1 F_1) - S(A_1 C_1 M) = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{3} - \frac{C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2},$$

$$\Rightarrow 3S_1 = S_2.$$

$$\frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{3} - \frac{C_1 M \cdot a \sqrt{3}}{2}, 2C_1 M = \frac{a}{2} \Rightarrow C_1 M = \frac{a}{4}$$

Из прямоугольного  $\Delta A_1 C_1 M$ , где  $C_1 M = \frac{a}{4}$ ,  $A_1 C_1 = a \sqrt{3}$ ,

$$A_1 M = \sqrt{C_1 M^2 + A_1 C_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + 3a^2} = \frac{7}{4} a,$$

$$\frac{S(AA_1MK)}{S(ABB_1A_1)} = \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{7}{4} \Rightarrow S(AA_1MK) = \frac{7}{4}Q.$$

Ответ:  $\frac{7}{4}Q$ .

2. Дано: цилиндр,  $ABCD$  — осевое сечение,  $\Pi$  цилиндр,  $AB$  — диаметр.

Найти:  $\frac{V_1}{V_2}$ .

Решение:  $V_1 = AD \cdot \pi \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{\pi AB^3}{4}$ .

Радиус  $\Pi$  цилиндра  $AO = AB \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а высота равна  $AB$ .

$$V_2 = \pi \cdot AO^2 \cdot AB = \frac{\pi BA^3}{2} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

### С—15

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $AB = 50$ ,  $AC = 40$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AA_1 = 25$ ,  $A_1E \perp AC$ ,  $A_1E = 7$ ,  $A_1F \perp AB$ ,  $A_1F = 20$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: Опустим перпендикуляры  $A_1P \perp C_1C$ ,  $A_1M \perp B_1B$ .

$$S(AA_1C_1C) = A_1E \cdot AC = C_1C \cdot A_1P \Rightarrow$$

$$A_1P = \frac{A_1E \cdot AC}{CC_1} = \frac{7 \cdot 40}{25} = \frac{56}{5};$$

$$A_1M = \frac{AB \cdot A_1F}{B_1B} = \frac{50 \cdot 20}{25} = 40;$$

$A_1PM$  — перпендикулярное сечение,  $C_1N \parallel PM$ ,  $C_1N \perp BB_1$ .

Из  $\triangle A_1C_1B_1$ :

$$C_1B_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos 60^\circ$$

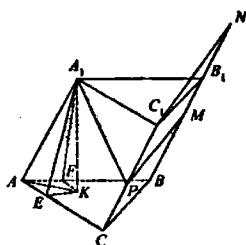
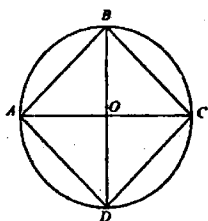
$$C_1B_1^2 = 1600 + 2500 - 4000 \cos 60^\circ; C_1B_1^2 = 4100 - 4000 \cdot \frac{1}{2};$$

$$C_1B_1^2 = 2100; C_1B_1 = 10\sqrt{21}.$$

Из  $\triangle A_1PC_1$ :

$$PC_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1P^2} = \sqrt{1600 - \frac{3136}{25}} = \frac{192}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle A_1MB_1: MB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1M^2} = \sqrt{2500 - 1600} = 30.$$





Из прямоугольной трапеции  $PC_1B_1M$ :

$$B_1N = PC_1 - MB_1 = \frac{192}{5} - 30 = \frac{42}{5}.$$

Из прямоугольного  $\triangle C_1NB_1$   $\angle C_1NB_1 = 90^\circ$

$$C_1N = \sqrt{C_1B_1^2 - B_1N^2} = \sqrt{2100 - \left(\frac{42}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{52500 - 1764}{25}} = \sqrt{\frac{50736}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 1057} = \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151} = PM.$$

$$P(A_1PM) = \frac{A_1P + A_1M + PM}{2} = \frac{\frac{56}{5} + 40 + \frac{4}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}}{2} = \frac{128}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}$$

$$S(A_1PM) = \sqrt{\left(\frac{128}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)\left(\frac{128}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{72}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)\left(\frac{72}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 151}\right)} =$$

$$= \frac{4}{25} \sqrt{(64^2 - 3 \cdot 7 \cdot 151)(3 \cdot 7 \cdot 151 - 36^2)} =$$

$$= \frac{4}{25} \sqrt{(4096 - 3171)(3171 - 1296)} = \frac{4}{25} \sqrt{925 \cdot 1875} =$$

$$= \frac{4}{25} \sqrt{25 \cdot 37 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \sqrt{111}$$

$$\Rightarrow V = S(A_1PM) \cdot AA_1 = 4 \cdot 5 \sqrt{111} \cdot 25 = 500\sqrt{111}.$$

Ответ:  $500\sqrt{111}$ .

2. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — наклонный параллелепипед,  $\angle A_1AB = \angle A_1AD < 90^\circ$ ,  $ABCD$  — квадрат,  $AB = a$ ,  $AA_1 = a$ ,  $E \in AA_1$ ,  $BE \perp AA_1$ ,  $\angle BED = 120^\circ$ .

Найти:  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

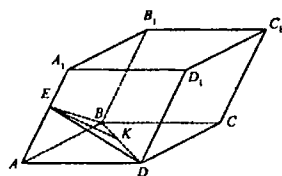
Решение:

$$\text{Из } \triangle BED: BE = ED = \sqrt{\frac{BD^2}{2(1 - \cos 120^\circ)}} = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Высота } EK = \frac{1}{2} ED = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow S(EBD) = \frac{1}{2} BD \cdot EK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

$\triangle EBD$  — половина перпендикулярного сечения



$$\Rightarrow V = AA_1 \cdot 2S(EBD) = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$ .

### С—16

1. Дано:  $MABC$  — тетраэдр,  $AB = BC = AC = \sqrt{3}$ ,  $MA = 6$ ,  $S(MAB) = S(MBC) = S(MAC)$ .

Найти:  $V(MABC)$ .

Решение:

Высоты боковых граней равны  $\Rightarrow$  вершина  $M$  равноудалена от прямых, содержащих стороны. Возможны три случая:

1)  $H$  — основание высоты — центр вписанной окружности.

$$AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1. \text{ Из } \triangle AHM:$$

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}.$$

$$V(MABC) = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{35} = \frac{\sqrt{105}}{4}.$$

2)  $H$  — центр вневписанной окружности.

$H$  лежит на биссектрисе  $AK$ .

$$KH = HE = HF = r, AK = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2};$$

$$AH = AK + KH = \frac{3}{2} + r.$$

$$\text{Из } \triangle AHE: \frac{AH}{HE} = \frac{\frac{3}{2} + r}{r} = 2 = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{3}{2} + r = 2r, r = \frac{3}{2} \Rightarrow AH = 3.$$

$$\text{Из } \triangle AHM: HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3\sqrt{3}.$$

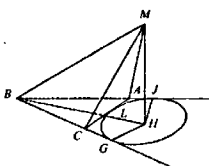
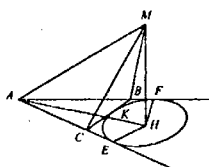
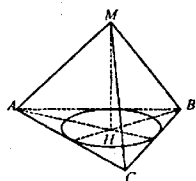
$$V = \frac{1}{3} \cdot MH \cdot S(ABC) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{4}.$$

3)  $H$  — центр вневписанной окружности,  $H \in$  биссектрисе  $BL$ .

$$LH = HJ = GH = \frac{3}{2} \text{ (по предыдущему случаю)}$$

$$\text{Из } \triangle AJH = \triangle ALH \text{ по гипотенузе и катету} \Rightarrow LA = AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AJ^2 + JH^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

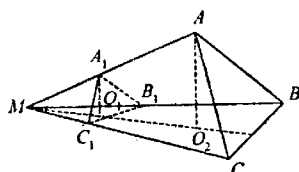


$$\Rightarrow \text{из } \triangle AMH \text{ } MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 3} = \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow V(MABC) = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{33} = \frac{3\sqrt{11}}{4}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{105}}{4}; \frac{9}{4}; \frac{3\sqrt{11}}{4}$ .

2. Дано:  $MABC$  — пирамида,  $MA = 4$ ,  $MB = 6$ ,  $MC = 5$ ,  $A_1 \in MA$ ,  $MA_1 = 1$ ,  $B_1 \in MB$ ,  $MB_1 = 3$ ,  $C_1 \in MC$ ,  $MC_1 = 2$ , плоскость  $A_1B_1C_1$  — секущая.



Найти:  $\frac{V_1}{V_2}$ .

Решение: В пирамиде  $A_1MC_1B_1$ :  $S(MC_1B_1) = \frac{1}{2} MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin \alpha$ ,

$$\alpha = \angle BMC, AO_1 = MA_1 \cdot \sin \varphi, \varphi = \angle A_1MO$$

$$V_1 = S(MC_1B_1) \cdot \frac{1}{3} AO_1 = \frac{MC_1 \cdot MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin \alpha \sin \varphi}{6}$$

Аналогично  $V = \frac{MC \cdot MB \cdot MA \cdot \sin \alpha \sin \varphi}{6}$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{20}$$

Тогда  $\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20V_1 = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{19}$ .

Ответ: 1 : 19.

### C—17

1. Дано: конус,  $MH$  — высота,  $\triangle MAB$  — сечение,  $S(MAB)$  — наибольшая из таких сечений,  $HE \perp AB$ ,  $\angle MEH = \arctg 2$ ,  $MH = H$ .

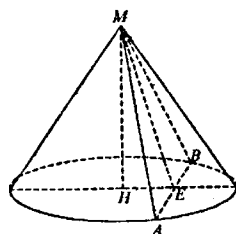
Найти: объем большей части конуса.

Решение:

Т.к.  $S$  — наибольшая, то  $\angle AMB = 90^\circ$ .

Из  $\triangle MHE$ :  $\frac{MH}{HE} = \tg \angle MEH = 2 \Rightarrow$

$$HE = \frac{H}{2}; ME = \sqrt{MH^2 + HE^2} = \frac{H\sqrt{5}}{2}$$



$$\text{В } \triangle AMB: AE = EB = ME = \frac{H\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle HEA: \sqrt{HE^2 + EA^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + \frac{5H^2}{4}} = \frac{H\sqrt{6}}{2} = AH = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Из } \triangle AHB, \text{ где } AB = 2EA = H\sqrt{5},$$

$$AB^2 = 2AH^2(1 - \cos \angle AHB); 5H^2 = 3H^2(1 - \cos \angle AHB)$$

$$\cos \angle AHB = -\frac{2}{3}, \sin \angle AHB = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\text{наиб. сегм.}} = HA^2 \left( \frac{2\pi - \angle AHB}{2} \right) + \frac{1}{2} HA^2 \cdot \sin \angle AHB.$$

$$S = \frac{3H^2}{2} \left( \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{-2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6} \right), V = \frac{1}{3} HS = \frac{H^2}{2} \left( \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{-2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{H^2}{2} \left( \pi - \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{2}{3} \right) + \frac{\sqrt{5}}{6} \right).$$

2. Дано:  $MABCD$  — пирамида,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AB = 12$ ,  $AD = 4$ ,  $AM = MB = MC = MD = 10$ ,  $\triangle ABM$  вписан в окружность — основание конуса, образующая конуса лежит на  $ME$ ,  $ME \perp DC$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение:

$$S(ABM) = \sqrt{16(16-10)^2(16-12)} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

$$R = \frac{AM \cdot MB \cdot AB}{4S} = \frac{100 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}, ME = \frac{2S}{AB} = \frac{96}{12} = 8.$$

Проведем  $MK \perp AB$ ;  $MK = ME = 8$ ,  $KE = 4$ .

$$\text{Из } \triangle MKE: KE^2 = 2MK^2(1 - \cos \angle KME);$$

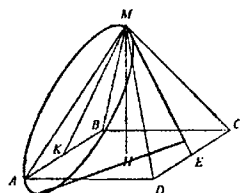
$$16 = 128(1 - \cos \angle KME); \cos \angle KME = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \angle KME = \sqrt{\frac{64-49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}; \operatorname{tg} \angle KME = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

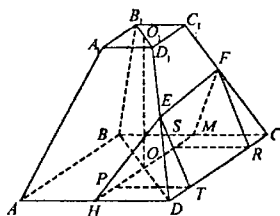
$$\text{Высота конуса равна } h = R \cdot \operatorname{tg} \angle KME = \frac{25}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot R^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{7} \cdot \frac{625}{16} = \frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}.$$



1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная усеченная пирамида,  $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $OO_1$  — ось,  $EF$  — средняя линия  $DD_1 C_1 C$ ,  $\alpha$  — секущая плоскость,  $O \in \alpha$ ,  $FE \in \alpha$ .



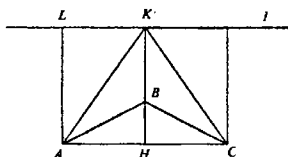
Найти:  $\frac{V_1}{V_2}$ .

Решение: Пусть высота пирамиды  $O_1 O = 2h$ ,  $A_1 B_1 = a \Rightarrow AB = 2A_1 B_1 = 2a$ ,  $FE = \frac{3a}{2}$ .

$$\begin{aligned} V_{\text{пирамиды}} &= \frac{1}{3} O_1 O (S(ABCD) + S(A_1 B_1 C_1 D_1) + \sqrt{S(ABCD) \cdot S(A_1 B_1 C_1 D_1)}) = \\ &= \frac{2h}{3} (4a^2 + a^2 + 2a^2) = \frac{14a^2 h}{3}. \quad V_1 = V(FEPTSR) + 2V(FPEDT) = \\ &= \frac{1}{2} FE \cdot \frac{AB}{2} \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{3} h \cdot \frac{(AB - EF) \cdot AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot ah + \frac{1}{6} h \cdot a \cdot a = \\ &= \frac{3a^2 h}{4} + \frac{1}{6} ha^2 = \frac{11a^2 h}{12}. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{11}{12} a^2 h}{\frac{14}{3} a^2 h - \frac{11}{12} a^2 h} = \frac{11}{56 - 11} = \frac{11}{45}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{11}{45}$ .

2. Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $K$  — точка пересечения высот  $\triangle ABC$ ,  $l \parallel AC$ ,  $K \in l$ ,  $l$  — ось вращения



Найти:  $V_{\text{т. вр.}}$ .

Решение:  $\triangle AKC$  — равнобедренный,  $BH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,  $KH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $KB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 V_{\text{т. вр.}} &= 2\pi(AH \cdot KH^2 - \frac{1}{3}AH \cdot (KH^2 + KB^2 + KH \cdot KB)) = \\
 &= 2\pi\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{6} \left(\frac{9+4+6}{12}\right)\right) = \\
 &= 2\pi\left(\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3 \cdot 19}{6 \cdot 12}\right) = \left(\frac{3a^3}{4} - \frac{19a^3}{36}\right)\pi = \frac{8a^3\pi}{36} = \frac{2a^3\pi}{9}. \quad \text{Ответ: } \frac{2a^3\pi}{9}.
 \end{aligned}$$

### С—19

1. Дано:  $DABC$  — пирамида,  $DK$  — высота,  $O$  — центр  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC = AC = 1$ ,  $OK = 2/\sqrt{3}$ ,

$DK = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . В  $DABC$  вписан шар.

Найти:  $S_{\text{шара}}$ .

Решение:  $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $OE = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Из  $\triangle ADK$ , где  $AK = AO + OK = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ,  $DK = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,

$$AD = \sqrt{DK^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 3} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Из  $\triangle DEK$ :  $DE = \sqrt{EK^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}} = \frac{5}{\sqrt{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ .

$$EK = OK - OE = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем высоту  $DS$  грани  $ADB$ . Из  $\triangle ASK$ :  $AS = AK \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ .

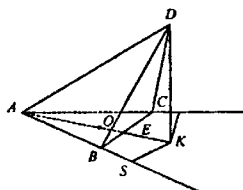
$$\text{Из } \triangle DSA: DS = \sqrt{AD^2 - AS^2} = \sqrt{\frac{13}{3} - \frac{9}{4}} = \frac{5}{\sqrt{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S(ABD) = S(ACD) = \frac{1}{2} AB \cdot DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow S_{\text{пов.}}(DABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле из задачи С-19.1, вариант 7

$$r = \frac{3V}{S_{\text{пов.}}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{27}. \quad \text{Ответ: } \frac{4\pi}{27}.$$



2. Дано: Полый металлический шар, внешний радиус которого  $R$ , плавает, будучи на половину погруженным в воду. Плотность материала  $\rho_{\text{ш}}$ .  
Найти: толщину стенок шара.

Решение: Вес полого шара  $P = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho_{\text{ш}} \cdot g$ ,

выталкивающая сила  $F = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_{\text{в}} g$ . Т.к.  $P = F$ , то

$$\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho_{\text{ш}} \cdot g = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_{\text{в}} \cdot g, \quad 2(R^3 - r^3) \rho_{\text{ш}} = R^3 \rho_{\text{в}},$$

$$2 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right) \frac{\rho_{\text{ш}}}{\rho_{\text{в}}} = 1; \quad \left( \frac{r}{R} \right)^3 = 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}; \quad \frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}} \quad \text{и} \quad r = R \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}}.$$

Тогда толщина стенок шара  $h = R - r = R \left( 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}} \right)$ .

Ответ:  $R \left( 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{2\rho_{\text{ш}}}} \right)$ .

## ДС

1. Дано:  $MABCD$  — пирамида,  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  
 $(AMB) \perp (ABCD)$ ,  $AM = BM$ ,  $MH = 1$ .

Найти: Угол между  $(AMD)$  и  $(DMC)$ .

Решение: Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .

Искомый угол равен углу между  $\vec{n}_1 \{1, 0, 1\}$

$\perp (AMD)$  и  $\vec{n}_2 \{0, 1, 1\} \perp (DMC)$ .

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \angle \vec{n}_1 \vec{n}_2 \Rightarrow \cos \angle \vec{n}_1 \vec{n}_2 = \frac{1}{2}.$$

Искомый угол равен  $60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

2. Дано:  $M(1, 1, 1)$ ,  $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$ ;  $\beta: x + y - 2z - 2 = 0$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ ,  
плоскость  $\gamma \perp l$ ,  $M \in \gamma$ .

Найти: уравнение  $\gamma$ .

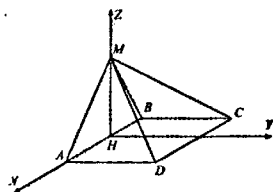
$$\text{Решение: } \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 & \text{I} \\ x + y - 2z - 2 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 + \text{II} & \begin{cases} 3x - z - 3 = 0 \\ 5x - y - 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = 3x - 3 \\ y = 5x - 4 \end{cases} \quad \text{Коллинеарен линии.} \\ 2\text{I} + \text{II} & \end{aligned}$$

Система, задающая линию пересечения, например вектор  $(1, 5, 3)$

$\Rightarrow$  Уравнение  $\gamma$  имеет вид:  $x + 5y + 3z + A = 0$ ,  $M \in \gamma$ :  $1 + 3 + 5 + A = 0$ ;  $A = -9$

Окончательно  $\gamma$ :  $x + 5y + 3z - 9 = 0$ .



# Работы на повторение

## П—1

### Вариант 1

Дано:  $DABC$  — пирамида,  $AB = BC = AC = a$ ,  $DB = a$ ,  $(ADB) \perp (ABC)$ ,  $(CDB) \perp (ABC)$ .

1. Каково взаимное положение прямых: 1)  $AB$  и  $CD$ ; 2)  $BD$  и  $AC$ ; 3)  $PQ$  и  $AC$ .

Решение:

1)  $AB$  и  $CD$  — скрещивающиеся, т.к. не параллельны и не пересекаются.

2)  $BD$  и  $AC$  — скрещивающиеся.

3)  $PQ$  и  $AC$  — скрещивающиеся, т.к. не пересекаются и не параллельны.

Ответ: 1) скрещивающиеся;

2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся.

2. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания и параллельно  $AC$  и  $BD$ . Определить его вид и найти его площадь.

Построение: В  $\triangle ABC$  через центр  $O$  проводим прямую  $EH \parallel AC$ . В гранях  $DBC$  и  $DBA$  через точки  $E$  и  $H$  проводим прямые  $FE$  и  $GH \parallel BD$ . Соединяем  $F$  и  $G$ . Сечение  $EFGH$  — искомое. Его вид прямоугольник

$$S = \frac{2a^2}{9} \left( EH = \frac{2a}{3}, EF = \frac{a}{3} \right).$$

Ответ: прямоугольник;  $\frac{2a^2}{9}$ .

3. Найти угол между гранями: 1)  $ADB$  и  $CDB$ ; 2)  $DAC$  и  $ABC$ .

Решение: 1)  $BD$  — линия пересечения плоскостей,  $CB \perp DB$  и  $AB \perp DB \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$  — искомый угол между плоскостями.

2) Проведем  $DM \perp AC$ . В  $\triangle ABC$   $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  из прямоугольного  $\triangle DBM$ :

$$\frac{DB}{BM} = \operatorname{tg} \angle DMB; \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \angle DMB; \angle DMB = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ — искомый}$$

угол.

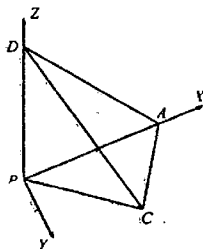
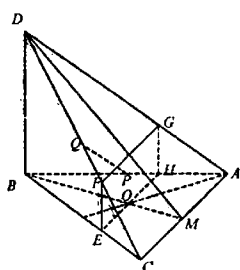
Ответ:  $60^\circ$ ;  $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

4. Чему равен угол между  $DB$  и  $(ADC)$ ?

Решение:

$$\text{Из прямоугольного } \triangle DBM: \angle BDM = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

— искомый угол.





Ответ:  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

5. Найти угол между  $AB$  и  $DC$ .

Решение: Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат

$BXYZ$  как показано на рисунке, тогда  $\overrightarrow{BA} \{a, 0, 0\}$ ,  $\overrightarrow{DC} \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a \right\}$ ,

$$|\overrightarrow{BA}| = a, |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + a^2} = a\sqrt{2},$$

$$(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}) = \frac{a^2}{2} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos \widehat{BA \cdot DC}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BA \cdot DC} = \frac{\frac{a^2}{2}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \widehat{BA \cdot DC} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

6. Найти расстояние между  $AB$  и  $DC$ .

Решение: От точки  $A$  отложим вектор  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DC}$ , координаты точки

$$K \left( a + \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, -a \right) \text{ и } (ABK) \parallel DC.$$

Уравнение плоскости  $ABK$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{matrix} B: \\ A: \\ K: \end{matrix} \begin{cases} S = 0 \\ aP = 0 \\ \frac{3}{2}aP + \frac{a\sqrt{3}}{2}Q - aR = 0 \end{cases}; \begin{cases} S = 0 \\ P = 0 \\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}Q \end{cases}.$$

$$\text{Уравнение } (ABK): y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0. \vec{n} \left\{ 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \perp (ABK).$$

Из т.  $D$  опустим перпендикуляр  $DN$  на  $(ABK)$ ,  $\overrightarrow{DN} = k \cdot \vec{n}$ .

Пусть  $N(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\overrightarrow{DN} \{x_0, y_0, z_0 - a\}$ .

$$\begin{cases} x_0 = k \cdot 0 \\ y_0 = k \\ z_0 - a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = k \\ z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k + a \end{cases} \quad \text{Но } N \in (ABK) \Rightarrow k + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}k + a \right) = 0;$$

$$\frac{7}{4}k + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0, k = -\frac{2\sqrt{3}}{7}a \Rightarrow N \left( 0, -\frac{2\sqrt{3}}{7}a, -\frac{3}{7}a + a \right),$$

$$\overrightarrow{DN}\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{7}a, -\frac{3}{7}a\right); |\overrightarrow{DN}| = \sqrt{\frac{12a^2}{49} + \frac{9a^2}{49}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ:  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .

## Вариант 2

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = CB = a$ ,  $AA_1 = a$ .

1. Каково взаимное расположение прямых: 1)  $AA_1$  и  $BC$ ; 2)  $A_1C_1$  и  $BC$ ; 3)  $EF$  и  $AC$ ;  $E \in AB_1$ ,  $AE : EB_1 = 1 : 2$ ;  $F \in CB_1$ ;  $CF : FB_1 = 2 : 1$ .

Решение: 1)  $AA_1$  и  $BC$  — скрещивающиеся.

2)  $A_1C_1$  и  $BC$  — скрещивающиеся.

3)  $EF$  и  $AC$  — пересекаются (т.к. лежат в одной плоскости и не параллельны).

Ответ: 1) скрещивающиеся;

2) скрещивающиеся; 3) пересекаются.

2. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через  $AC$  и  $K \in C_1B_1$ ,  $C_1K = KB_1$ . Определить его вид. Найти его площадь.

Построение: Соединим точку  $K$  с точкой  $C$ . В  $(A_1C_1B_1)$  проведем  $KD \parallel A_1C_1$ . Соединим  $A$  и  $D$ . Прямоугольная трапеция  $ADKC$  — искомое сечение.

$$S = \frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{5}}{8}.$$

Ответ: прямоугольная трапеция;  $\frac{a^2 \cdot 3\sqrt{5}}{8}$ .

3. 1) Найти угол между  $(A_1B_1C_1)$  и  $(ADKC)$ .

Искомый угол  $\angle C_1KC$  находим из прямоугольного  $\triangle CC_1K$ .

$$CC_1 = a, C_1K = \frac{a}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle C_1KC = \frac{a}{a/2} = 2, \angle C_1KC = \operatorname{arctg} 2.$$

2) Найти угол между  $ADKC$  и  $CC_1B_1B$ .

Решение: плоскости перпендикулярны значит угол — прямой.

Ответ:  $\operatorname{arctg} 2$ ,  $90^\circ$ .

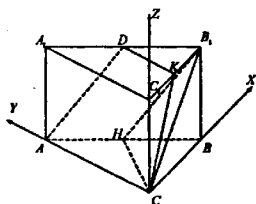
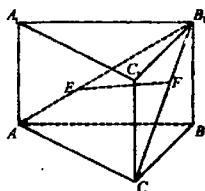
4. Найти угол между  $B_1C$  и  $(AA_1B_1B)$ .

В  $(ABC)$  опустим высоту  $CH$ :  $CH \perp (AA_1B_1B)$ .

$$CH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CB_1 = a\sqrt{2} \Rightarrow \text{из прямоугольного } \triangle CHB_1:$$

$$\sin \angle CB_1H = \frac{CH}{CB_1} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CB_1H = 30^\circ \text{ — искомый угол.}$$

Ответ:  $30^\circ$ .



5. Найти угол между  $AB$  и  $B_1C$ .

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $CXYZ$  как показано на рисунке  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \{a, -a, 0\}, |\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}; \overrightarrow{CB_1} \{a, 0, a\}, |\overrightarrow{CB_1}| = a\sqrt{2}.$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = a^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cdot \cos \widehat{AB \cdot CB_1},$$

$$\cos \widehat{AB \cdot CB_1} = \frac{1}{2}; \widehat{AB \cdot CB_1} = \pi/3.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

6. Находим расстояние от  $AB$  до  $B_1C$ .

Решение: От точки  $B$  отложим вектор  $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{CB_1}$ , координаты  $L(2a, 0, a)$ ,  $(ABL) \parallel CB_1$ . Уравнение  $(ABL)$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{aligned} A: & \begin{cases} aQ + S = 0 \\ aP + S = 0 \end{cases} \\ B: & \begin{cases} aQ = -S \\ aP = -S \end{cases} \\ L: & \begin{cases} 2aP + aR + S = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad ; \quad \begin{cases} aQ = -S \\ aP = -S \\ aP = -aR \end{cases} \quad (ABL): x + y - z - a = 0.$$

$$\vec{n} \{1, 1, -1\} \perp (ABL).$$

Опустим из точки  $C$  перпендикуляр  $CN$  на  $(ABL)$ ,  $\overrightarrow{CN} = k\vec{n}$   
 $\Rightarrow N(k, k, -k)$ ,  $N \in (ABL)$ ,  $k + k + k - a = 0$ ,  $k = a/3$ .

$$\Rightarrow N\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{CN} \left\{ \frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3} \right\}$$

$$|\overrightarrow{CN}| = \sqrt{\frac{a^2 + a^2 + a^2}{3^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ — искомое расстояние.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

### Вариант 3

Дано:  $MABCD$  — пирамида,  $(AMB) \perp (ABCD)$ ,  $AM = MB = AB$ ,  $ABCD$  — квадрат,  $AB = a$ .

1. Выяснить взаимное расположение прямых: 1)  $MB$  и  $AD$ ; 2)  $AC$  и  $MD$ ; 3)  $EF$  и  $PT$ ;  $E \in AM$ ,  $AE = EM$ ,  $F \in MC$ ,  $MF = FC$ ,  $T \in CD$ ,  $DT = TC$ ,  $P \in AD$ ,  $AP = PD$ .

Решение: 1)  $MB$  и  $AD$  — скрещивающиеся.

2)  $AC$  и  $MD$  — скрещивающиеся.

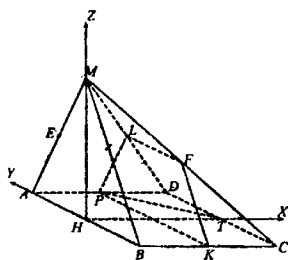
3)  $EF$  и  $PT$  — параллельны, т.к.  $EF \parallel AC \parallel PT$ .

Ответ: 1) скрещивающиеся;

2) скрещивающиеся;

3) параллельны.

2. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину  $AD$  параллельно грани  $AMB$ . Определить вид сечения и найти его площадь. Построение:



Через  $P \in AD$  ( $AP = PD$ ) проводим прямую  $PK \parallel AB$ . В гранях  $AMD$  и  $BMC$  проводим линии  $PL$  и  $KF$  параллельно  $AM$  и  $MB$  соответственно. Равнобедренная трапеция  $PLFK$  — искомое сечение.

$$S(PLFK) = \frac{3}{4} S(AMB) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

Ответ: равнобедренная трапеция;  $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}$ .

3. Найти угол между: 1)  $(ABC)$  и  $(DMC)$ ; 2)  $(AMB)$  и  $(DMC)$ .

Решение: 1)  $MH$  — высота пирамиды,  $MH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $HT = AD = a \Rightarrow$  в пря-

моугольном  $\triangle MHT$ :  $\operatorname{tg} \angle MTH = \frac{MH}{HT} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$\angle MTH = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$  — искомый угол.

2)  $\angle HMT$  — искомый угол,  $\angle HMT = \frac{\pi}{2} - \angle MTH = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ответ: 1)  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4. Найти угол между  $MD$  и  $AMB$ .

Решение:  $DA \perp (AMB) \Rightarrow$  искомый угол —  $\angle DMA$ .

В прямоугольном  $\triangle MAD$ :  $AM = AD = a \Rightarrow \angle DMA = 45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ .

5. Найти угол между  $MD$  и  $AC$ .

Решение: Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат

$HXYZ$  как показано на рисунке  $\Rightarrow \overrightarrow{AC} \{a, -a, 0\}$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ ,

$\overrightarrow{MD} \left\{ a, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right\}$ ,  $|\overrightarrow{MD}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC}) = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} = |\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \cos \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}, \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = \arccos \frac{1}{4}.$$

Ответ:  $\arccos 1/4$ .

6. Найти расстояние между  $BC$  и  $MD$ .

Решение:  $\overrightarrow{BC} \{a, 0, 0\}$ ,  $B \left( 0, -\frac{a}{2}, 0 \right)$ ,  $C \left( a, -\frac{a}{2}, 0 \right)$ .

От точки  $B$  отложим вектор  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MD}$ ;  $N \left( a, 0, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $MD \parallel BCN$ .

Уравнение плоскости  $BCN$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{array}{l} B: \\ C: \\ N: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2}Q + S = 0 \\ aP - \frac{a}{2}Q + S = 0 \\ aP - \frac{a\sqrt{3}}{2}R + S = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} aQ = 2S \\ P = 0 \\ \frac{a\sqrt{3}}{2}R = S \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (BCN): 2y + \frac{2}{\sqrt{3}}z + a = 0, \vec{n} \left\{ 0, 2, \frac{2}{\sqrt{3}} \right\} \perp (BCN).$$

Опустим из т.  $M$  перпендикуляр  $MO$  на  $(BCN)$ ,  $\overrightarrow{MO} = k\vec{n}$ ,

$$O(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{MO} \left\{ x_0, y_0, z_0 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 2k \\ z_0 - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 2k \\ z_0 = \frac{2k}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

$$O \in BCN \Rightarrow 4k + a + \frac{4}{3}k + a = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{8}a$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MO}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \frac{3}{8}a \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{8}a \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

### Вариант 4

Дано:  $DABC$  — тетраэдр,  $(ABC) \perp (DBC)$ ,  $AB = BC = CA = BD = DC = a$ .

1. Каково взаимное расположение: 1)  $AC$  и  $BD$ ; 2)  $AD$  и  $BC$ ; 3)  $EF$  и  $BC$ ;  $E \in AC$ ,  $AE = EC$ ,  $F \in BD$ ,  $BF = FD$ .

Решение: 1)  $AC$  и  $BD$  — скрещивающиеся. 2)  $AD$  и  $BC$  — скрещивающиеся. 3)  $EF$  и  $BC$  — скрещивающиеся

Ответ: 1) скрещивающиеся;

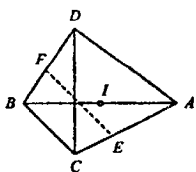
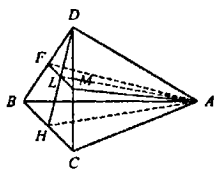
2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся.

2. Через  $A$  и  $M \in DC$  ( $DM = MC$ ) провести сечение  $\parallel BC$ .

Решение: Соединим  $M$  и  $F$  ( $MF \parallel BC$ ), соединим  $F$  и  $M$  с  $A$ . Равнобедренный  $\triangle FAM$  — искомый.  $FM$

$$= \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, DH \text{ — высота, } DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ — делится}$$

средней линией  $FM$  пополам.



$HL = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ ,  $HA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Из прямоугольного  $\Delta LHA$ :

$$LA = \sqrt{LH^2 + HA^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$$S(FMA) = \frac{1}{2} FM \cdot LA = \frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}.$$

Ответ: равнобедренный треугольник,  $\frac{a^2\sqrt{15}}{16}$ .

3. Найти угол между: 1)  $(ADC)$  и  $(ABC)$ ; 2)  $(ADC)$  и  $(ADB)$ .

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $HXYZ$  как показано на рисунке.

В ней:  $A\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ ,  $B\left(0, -\frac{a}{2}, 0\right)$ ,

$C\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $D\left(0, 0, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Найдем уравнения указанных плоскостей:

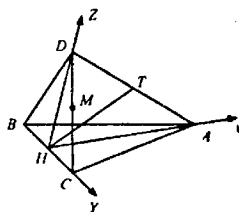
$(ABC): z = 0 \quad \vec{n}_1\{0, 0, 1\}$

(ищем в виде  $Px + Qy + Rz + S = 0$ )

$$(ABC): \begin{cases} A: a\frac{\sqrt{3}}{2}P + S = 0 \\ D: a\frac{\sqrt{3}}{2}R + S = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}x + 2y + \frac{2}{\sqrt{3}}z - a = 0, \vec{n}_2\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} \\ C: \frac{a}{2}Q + S = 0 \end{cases}$$

$$ADB: \begin{cases} A: a\frac{\sqrt{3}}{2}P + S = 0 \\ D: a\frac{\sqrt{3}}{2}R + S = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}x - 2y + \frac{2}{\sqrt{3}}z - a = 0, \vec{n}_3\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, -2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} \\ B: -\frac{a}{2}Q + S = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } \angle((ADC), (ABC)) &= \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}} = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \\ &= 1 \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) \Rightarrow \angle((ADC), (ABC)) = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$



Аналогично,  $(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = -\frac{4}{3} = |\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_3| \cdot \cos(\vec{n}_2 \wedge \vec{n}_3) =$   
 $= \frac{4 \cdot 5}{3} \cos(\vec{n}_2 \wedge \vec{n}_3) \Rightarrow \vec{n}_2 \wedge \vec{n}_3 = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \angle((ADC), (ADB)) = \arccos \frac{1}{5}$   
 (т.к. угол между плоскостями  $\leq \frac{\pi}{2}$ ).

Ответ: 1)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ ;

2)  $\arccos \frac{1}{5}$ .

4. Найти угол между  $AM$  и  $(ABC)$ .

Решение:  $\overrightarrow{AM} \left\{ -a, \frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4} \right\}$ ,  $\vec{n} \{0, 0, 1\} \perp (ABC)$ ,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2 \cdot 3}{16}} = \frac{2\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a, |\vec{n}| = 1,$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = \frac{a\sqrt{3}}{4} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}; \gamma = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

Искомый угол  $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ .

5. Найти угол между: 1)  $AD$  и  $BC$ ; 2)  $AB$  и  $DC$ .

Решение: 1)  $\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right\}$ ,  $\overrightarrow{BC} (0, a, 0)$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0; AD \text{ и } BC \text{ — перпендикулярны.}$$

2)  $\overrightarrow{AB} \left\{ -\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, 0 \right\}$ ,  $\overrightarrow{DC} \left\{ 0, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2} \right\}$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$ ;  $|\overrightarrow{DC}| = a$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}) = -\frac{a^2}{4} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos \varphi; \cos \varphi = -\frac{1}{4}; \varphi = \arccos \left( -\frac{1}{4} \right).$$

Искомый угол равен  $\pi - \arccos \left( -\frac{1}{4} \right) = \arccos \frac{1}{4}$ .

Ответ: 1)  $90^\circ$ , 2)  $\arccos \frac{1}{4}$ .

6. Найти расстояние между  $AD$  и  $BC$ .

Решение: Заметим, что  $\angle DHA = 90^\circ$  и т.к.  $DH$  и  $HA \perp BC$  то плоскость  $DHA \perp BC$  опустим  $HT \perp DA$ , и  $HT \perp BC \Rightarrow HT$  — искомое расстояние.

В прямоугольном  $\triangle DHA$ :  $HD = HA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow HT = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{HD^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

## П—2

### Вариант 1

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямой параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ ,  $M \in CC_1$ ,  $C_1 M = MC$ ,  $AC \cap BD = O$ ,  $\angle MOC = 45^\circ$

1) Найти  $\frac{V_1}{V_2}$  получившихся частей.

Решение:  $CO = \frac{1}{2}AC = 4$ .

Из прямоугольного  $\triangle OCM$ :  $MC = CO = 4 \Rightarrow C_1 C = 2CM = 8$ .

$$V = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 = 192.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BD \cdot OC \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 16.$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = 192 - 16 = 176. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{16}{176} = \frac{1}{11}$$

Ответ:  $\frac{1}{11}$ .

2) Найти  $S(AB_1 BD_1 C_1 C)$ .

Решение:  $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = 5$ . Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат  $OXYZ$  как показано на рисунке.

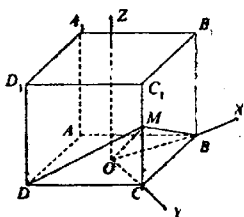
$B(3, 0, 0)$ ,  $C(0, 4, 0)$ ,  $A_1(0, -4, 8)$ ,  $\overrightarrow{BC} \{ -3, 4, 0 \}$ ,  $\overrightarrow{BA_1} \{ -3, -4, 8 \}$

$$|\overrightarrow{BC}| = 5, |\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89}$$

$$(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA_1}) = 9 - 16 = -7 = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA_1}| \cdot \cos \angle A_1 BC, \cos \angle A_1 BC = -\frac{7}{5\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow \sin \angle A_1 BC = \sqrt{1 - \frac{49}{25 \cdot 89}} = \frac{\sqrt{2225 - 49}}{5\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{2176}}{5\sqrt{89}}$$

$$\Rightarrow S(A_1 BCD_1) = A_1 B \cdot BC \cdot \sin \angle A_1 BC = \sqrt{89} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2176}}{5\sqrt{89}} = \sqrt{2176}.$$





$$S(AB_1BD_1C_1C) = \sqrt{2176} + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = \\ = \sqrt{2176} + 80 + 24 = 104 + \sqrt{2176} = 8(13 + \sqrt{34}).$$

Ответ:  $8(13 + \sqrt{34})$ .

3) Найти угол между  $A_1C$  и  $(DD_1C_1C)$ .

Решение.  $A_1(0, -4, 8)$ ,  $C(0, 4, 0)$ ,  $\overline{A_1C}(0, 8, 8)$ , а вектор  $\vec{n}(4, -3, 0)$  перпендикулярен плоскости  $(DD_1C_1C)$ .

$$\overline{A_1C} = 8\sqrt{2}; |\vec{n}| = 5; (\overline{A_1C} \cdot \vec{n}) = 24 = |\overline{A_1C}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \angle \alpha, \\ \cos \alpha = \frac{24}{5 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{3}{5\sqrt{2}} = \arccos \frac{3\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \text{искомый угол } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Ответ:  $\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}$ .

## Вариант 2

Дано:  $DABC$  — пирамида,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = CB = 4$ ,  $DH$  — высота,  $\angle DCH = \angle DBH = \angle DAH = 60^\circ$ ,  $F \in BD$ ,  $BF = FD$ ,  $E \in AB$ ,  $AE : EB = 1 : 3$ ,  $CFE$  — сечение.

1) Найти  $\frac{V_1}{V_2}$  получившихся частей.

Решение:

$$\text{В } \triangle ABC \quad AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow EB = 3\sqrt{2}, \angle CBE = 45^\circ.$$

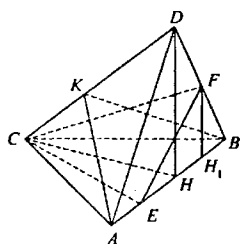
Высота пирамиды  $FCEB \quad FH_1 = \frac{1}{2} DH$ . Точка  $H$  — центр описанной окружности, т.к. в  $\triangle CHD$ ,  $\triangle BHD$ ,  $\triangle AHD$  углы наклона ребер  $60^\circ$ , а  $DH$  — общая  $\Rightarrow H$  — середина гипотенузы  $AB \Rightarrow$  из прямоугольного  $\triangle DHA$ , где  $AH = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle DAH = 60^\circ$ , имеем

$$DH = AH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{6} \Rightarrow FH_1 = \sqrt{6}.$$

$$S(CBE) = \frac{1}{2} CB \cdot EB \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$V_1 = S(CBE) \cdot \frac{1}{3} FH_1 = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot CB = 8, V = S(ABC) \cdot \frac{1}{3} DH = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$



$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{16\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{6} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 3}{10\sqrt{6}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ:  $\frac{3}{5}$ .

2) Найти  $S_{\text{бок}}(DABC)$ .

Решение:  $S(ADB) = AB \cdot \frac{1}{2} DH = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$ .

В  $\triangle DCA = \triangle DCB$   $AD = CD = DB = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{8 + 24} = 4\sqrt{2}$

$$p = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4}{2} = 2 + 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(DCA) = \sqrt{p(p-CA)(p-DA)^2} = \sqrt{(2+4\sqrt{2}) \cdot (4\sqrt{2}-2) \cdot 4} = 2\sqrt{32-4} = 4\sqrt{7}.$$

$$S_{\text{бок}} = 2S(DCA) + S(ADB) = 8\sqrt{7} + 8\sqrt{3}.$$

Ответ:  $8(\sqrt{7} + 8\sqrt{3})$ .

3) Найти угол между  $(ADC)$  и  $(BDC)$ .

Решение: Проведем высоты  $AK$  и  $BK$  в гранях  $(ADC)$  и  $(BDC)$ .

$$S(ADC) = 4\sqrt{7} = \frac{1}{2} CD \cdot AK = 2\sqrt{2} \cdot AK \Rightarrow AK = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{14}.$$

В равнобедренном  $\triangle AKB$  ( $AK = KB$ ) по теореме косинусов:

$$AB^2 = 2AK^2 - 2AK^2 \cos \alpha, 32 = 2 \cdot \frac{4 \cdot 7}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{8}{7}; \cos \alpha = -\frac{1}{7}; \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right), \text{ тогда искомый угол будет}$$

$$\arccos \frac{1}{7} \text{ (т.к. двугранный угол } \leq \frac{\pi}{2} \text{)}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{1}{7}$ .

### Вариант 3

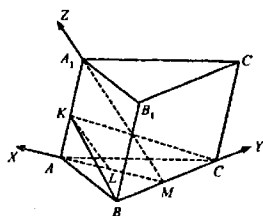
Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — наклонная призма,  $AB = BC = CA = 4\sqrt{3}$ ,  $M \in BC$ ,  $BM = MC$ ,  $A_1M \perp (ABC)$ ,  $\angle A_1AM = 45^\circ$ .

1) Найти  $S_{\text{бок}}(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение:

$$AM = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 = A_1M \text{ (т.к. } \angle A_1AM = 45^\circ) \Rightarrow$$

$$AA_1 = 6\sqrt{2}.$$



$$\text{В } \triangle A_1MB \text{ } BM = 2\sqrt{3}, A_1M = 6 \Rightarrow$$

$$A_1B = \sqrt{BM^2 + A_1M^2} = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Найдем } S(AA_1B) \text{ по теореме Герона } p = \frac{4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(4\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2})^2 \cdot (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{48 - 18} = 3\sqrt{60} = 6\sqrt{15}$$

$$BB_1C_1C \text{ — прямоугольник, } S(BB_1C_1C) = BC \cdot BB_1 = 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{6}.$$

Грани  $AA_1B_1B$  и  $AA_1C_1C$  равны

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = S(BB_1C_1C) + 4S(AA_1B) = 24\sqrt{15} + 24\sqrt{6} = 24(\sqrt{15} + \sqrt{6}).$$

$$\text{Ответ: } 24(\sqrt{15} + \sqrt{6}).$$

2)  $KBC$  — секущая плоскость,  $KBC \perp (CC_1B_1B)$ .

Найти  $\frac{V_1}{V_2}$  получившихся частей.

Решение:  $AK \perp (KBC)$ , причем  $AK = \frac{AA_1}{2}$  (т.к. в равнобедренном прямо-

угольном  $\triangle ABA_1$ ,  $MK \perp AA_1$ , из  $K$  опустим высоту  $KL$  на грань  $ABC$ ,  $L \in AM$ , и  $KL = \frac{1}{2}A_1M = 3$ , (т.к.  $AM = A_1M = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ ) и т.к.  $A_1M \perp (ABC)$ .

$$\text{Далее, } V_1 = V(KABC) = \frac{1}{3}KL \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$

$$V_{\text{призмы}} = A_1M \cdot S(ABC) = 6 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \text{ тогда объем другой части}$$

$$V_2 = V_{\text{призмы}} - V_1 = 60\sqrt{3}, \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$$

3) Найти расстояние от  $B$  до  $(AA_1C_1C)$ .

Решение: Поместим призму в прямоугольную систему координат  $MXYZ$ , в ней  $A(6, 0, 0)$ ,  $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ ,  $A_1(0, 0, 6)$ ,  $B(0, -2\sqrt{3}, 0)$ .

Уравнение  $AA_1C$ :  $Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{matrix} A: \\ A_1: \\ C: \end{matrix} \begin{cases} 6P + S = 0 \\ 6R + S = 0 \\ 2\sqrt{3}Q + S = 0 \end{cases} ; \begin{cases} P = -\frac{S}{6} \\ R = -\frac{S}{6} \\ Q = -\frac{S}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$AA_1C: \frac{x}{6} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{6} - 1 = 0 \text{ или } x + \sqrt{3}y + z - 6 = 0$$

$$\vec{n} \{1, \sqrt{3}, 1\} \perp AA_1C.$$

Опустим из т.  $B$  перпендикуляр  $BN$  на  $AA_1C$

$$\overrightarrow{BN} \{x_0, y_0 + 2\sqrt{3}, z_0\} = k \cdot \vec{n}, \begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = k\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ z_0 = k \end{cases}$$

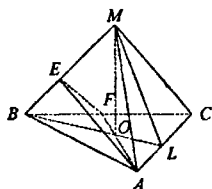
$$N \in AA_1C: k + 3k - 2 \cdot 3 + k - 6 = 0, 5k = 12, k = 2,4, N(2,4; 0,4\sqrt{3}; 2,4),$$

$$\overrightarrow{BN} \{2,4; 2,4\sqrt{3}; 2,4\}, |\overrightarrow{BN}| = 2,4 \cdot \sqrt{1+3+1} = 2,4\sqrt{5}.$$

Ответ:  $2,4\sqrt{5}$ .

### Вариант 4

Дано:  $MABC$  — пирамида,  $AB = BC = 10$ ,  $AC = 12$ ,  $MO$  — высота,  $MO = 4$ , боковые грани равнонаклонены к основанию,  $E \in BM$ ,  $BE = EM$ . Через  $A$ ,  $O$ ,  $E$  проведена плоскость.



1) Найти  $\frac{V_1}{V_2}$  получившихся частей.

Решение:  $O$  — центр вписанной окружности (из условия)  $\triangle ABC$ , т.к.  $AF$  — биссектриса, то  $\frac{BF}{AB} = \frac{FC}{AC}$ , но  $BC = 10$ ;  $\frac{BF}{10} = \frac{FC}{12}$ ;  $\frac{BF}{FC} = \frac{5}{6}$  т.к.  $FC + BF = 10$ ;

$$\Rightarrow BF = \frac{5}{11} \cdot 10 = \frac{50}{11}; FC = \frac{60}{11}. \text{ Высота } EO_1 = \frac{1}{2} MO = 2.$$

$$S(ABC) = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 36} = 6 \cdot 8 = 48. \frac{S(ABC)}{S(BFA)} = \frac{11}{5}; S(BFA) = \frac{5}{11} \cdot 48$$

$$\Rightarrow V_1 = EO_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot S(BFA) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{11} \cdot 48 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 16}{11} = \frac{160}{11}.$$

$$S(ABC) = 48, V = MO \cdot \frac{1}{3} S(ABC) = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64$$

$$V_2 = V - V_1 = 64 - \frac{160}{11} = \frac{704 - 160}{11} = \frac{544}{11}, \frac{V_1}{V_2} = \frac{160}{544} = \frac{5}{17}.$$

Ответ:  $\frac{5}{17}$ .

2) Найти  $S(MABC)$ .

$$\text{Решение: } S(ABC) = \frac{1}{2} P \cdot r = 16 \cdot r = 48 \Rightarrow r = 3.$$

Значит, высоты всех граней равны  $\sqrt{MO^2 + r^2} = 5$ .

$$S(MABC) = 48 + 5 \cdot \frac{1}{2} (AB + BC + AC) = 48 + 5 \cdot 16 = 128.$$

Ответ: 128.

3) *Найти* угол между  $MB$  и  $(AMC)$ .

*Решение:* В грани  $ABC$  проведем высоту и медиану  $BL$ . Будем искать

угол  $\angle BML = \angle BMO + \angle OML$ .  $S(ABC) = 48 = AC \cdot \frac{1}{2} BL = 6BL$ ;  $BL = 8$ .

В прямоугольном  $\triangle MOL$   $ML = 5$ ,  $MO = 4 \Rightarrow OL = 3$ .

Значит,  $BO = BL - OL = 5$ .

Из прямоугольного  $\triangle BOM$   $BM = \sqrt{BO^2 + OM^2} = \sqrt{41}$ .

$S(BML) = \frac{1}{2} BM \cdot ML \cdot \sin \angle BML = \frac{1}{2} BL \cdot OM = \sqrt{41} \cdot 5 \cdot \sin \angle BML = 8 \cdot 4$

$\sin \angle BML = \frac{32}{5\sqrt{41}}$ ;  $\angle BML = \arcsin \frac{32}{5\sqrt{41}}$ .

*Ответ:*  $\arcsin \frac{32}{5\sqrt{41}}$ .

## П—3

### Вариант 1

*Дано:* конус, наибольший угол между образующими  $120^\circ$ ,  $S_{\text{ос.сеч.}} = 16\sqrt{3}$ .

1) *Найти*  $S_{\text{бок.}}$ .

*Решение:* Рассмотрим осевое сечение  $ADB$ .

$S(ADB) = \frac{1}{2} L^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \Rightarrow L^2 =$

$64$ ,  $L = 8$ .

Из  $\triangle AHD$   $AH = AD \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ .

$S_{\text{бок.}} = \pi AH \cdot L = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\pi\sqrt{3}$ .

*Ответ:*  $32\pi\sqrt{3}$ .

2) *Найти* центральный угол развертки боковой поверхности конуса ( $\beta$ ).

*Решение:*  $S_{\text{бок.}} = \pi RL = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \pi L^2$ ;  $\beta = \frac{2\pi RL}{L^2} = \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8}{64} = \pi\sqrt{3}$ .

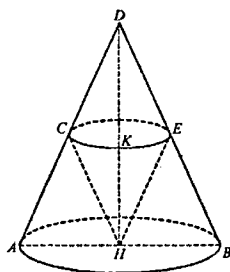
*Ответ:*  $\pi\sqrt{3}$ .

3) В данный конус вписан другой конус, его основание делит высоту в отношении  $1 : 2$  (от вершины).

*Найти*  $\frac{V_1}{V}$ .

*Решение:*  $V = \pi R^2 \cdot \frac{1}{3} DH$  ( $DH = \sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - 48} = 4$ )

$V = \pi \cdot 48 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 64\pi$ .  $DK = \frac{1}{3} DH = \frac{4}{3}$ .  $\triangle CKD \sim \triangle AHD$



$$\Rightarrow \frac{CK}{AH} = \frac{DK}{DH} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. KH = h_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

$$V_1 = \pi \cdot KH \cdot \frac{1}{3} CK^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8\pi}{9} \cdot \frac{16}{3} = \frac{128\pi}{27}, \frac{V_1}{V} = \frac{128\pi}{27 \cdot 64\pi} = \frac{2}{27}.$$

Ответ:  $\frac{2}{27}$ .

4) Около конуса описан шар.

Найти  $S_{\text{шара}}$ .

Решение:  $\triangle ADB$  — вписан в окружность  $\Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$ ;

$$16\sqrt{3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}}{4R}; 64\sqrt{3} R = 64 \cdot 8\sqrt{3}; R = 8. S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 64\pi = 256\pi.$$

Ответ:  $256\pi$ .

## Вариант 2

Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $O_1O_2 = 8$ ,  $AB$  — образующая;  $ABCD$ ,  $ABEF$  — сечения,  $\angle DAF = 60^\circ$ ,  $S(ABCD) = S(ABEF) = 32\sqrt{3}$ .

1) Найти  $S_{\text{бок. цилиндра}}$ .

Решение:  $\triangle ADF$  — равносторонний

$$S(ABCD) = AB \cdot AD = 32\sqrt{3} = 8AD; AD = 4\sqrt{3}.$$

$\triangle ADF$  — вписан в окружность.

$$S(ADF) = \frac{a^3}{4R} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow R = \frac{AD}{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow S_{\text{бок.}} = 2\pi R \cdot l = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi.$$

Ответ:  $64\pi$ .

2) Найти острый угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра.

$$\text{Решение: } S_{\text{развертки}} = S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \alpha$$

$$d = \sqrt{(2\pi R)^2 + l^2} = \sqrt{4\pi^2 \cdot 16 + 64} = 8\sqrt{\pi^2 + 1} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2 \cdot 64\pi}{64(\pi^2 + 1)} = \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}.$$

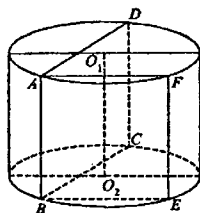
$$\alpha = \arcsin \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}.$$

Ответ:  $\arcsin \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}$ .

3) Можно ли в цилиндр вписать шар? Если да, то найти отношение их объемов.

Решение: В цилиндр можно вписать шар, т.к.  $2r = l = 8$ .

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 64 = \frac{256\pi}{3}, V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot l = \pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\pi,$$



$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{ш.}}}= \frac{256\pi}{3 \cdot 128\pi} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: да;  $\frac{2}{3}$ .

4) Найти  $S$  описанного шара.

Решение:  $2 \cdot R_{\text{ш.}} = \sqrt{(2R)^2 + l^2} = 8\sqrt{2}$ ;  $R_{\text{ш.}} = 4\sqrt{2}$ ,

$$S_{\text{ш.}} = 4\pi R_{\text{ш.}}^2 = 4\pi \cdot 32 = 128\pi.$$

Ответ:  $128\pi$ .

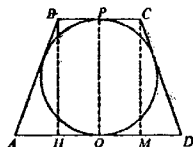
### Вариант 3

Дано: в усеченный конус вписан шар,  $2R = 5\sqrt{3}$ ,  
 $ABCD$  — осевое сечение,  $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$ .

1) Найти  $S_{\text{бок.}}$  конуса.

Решение: Высота усеченного конуса равна  $2R = 5\sqrt{3}$ .

$$BA = \frac{2R}{\cos 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 10. \text{ Т.к. в } ABCD \text{ вписана ок-}$$



ружность, то  $AD + BC = 2AB = 20$ .  $S_{\text{бок.}} = \pi \cdot AB \cdot \frac{BC + AD}{2} = \pi \cdot 10 \cdot 10 = 100\pi$ .

Ответ:  $100\pi$ .

2) Найти  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: Проведем высоты  $BH$  и  $CM$  в осевом сечении  $\Rightarrow AH + HM +$

$$+ MD + BC = \frac{2 \cdot 2R}{\tan 60^\circ} + 2BC = \frac{2 \cdot 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2BC = 10 + 2BC = AD + BC = 20$$

$$\Rightarrow BC = 5, AD = 15, BH = 2R = 5\sqrt{3}$$

$$V_{\text{конуса}} = BH \cdot \frac{1}{3} \pi \left( \left( \frac{AD}{2} \right)^2 + \left( \frac{BC}{2} \right)^2 + \left( \frac{AD}{2} \right) \left( \frac{BC}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \left( \frac{225}{4} + \frac{25}{4} + \frac{75}{4} \right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \cdot \frac{325}{4} = \frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ:  $\frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}$ .

3) Найти  $S_{\text{бок.}}$  развертки, центральный угол развертки, радиусы концентрических окружностей.

Решение:  $S_{\text{бок. развертки}} = 100\pi$  (из п. 2). Достроим усеченный конус до полного с вершиной  $K$ .

$$\text{Из сечения видно, что } KA = \frac{AO}{\cos 60^\circ}, KA = \frac{15}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 15.$$

$$KB = \frac{BP}{\cos 60^\circ} = 5. S_{\text{бок. развертки}} = \frac{\alpha}{2} \cdot (KA^2 - KB^2) = 100\pi.$$

$$\frac{\alpha}{2} \cdot (225 - 25) = 100\pi; \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi.$$

Ответ:  $\pi$ .

4) Около конуса описан шар. Найти  $S_{\text{шара}}$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle AMC$ , где

$$AM = BC + \frac{2R}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 5 + 5 = 10;$$

$$CM = 5\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{100 + 75} = 5\sqrt{7}$$

$$\triangle ABC \text{ вписан в большой круг шара } p = \frac{AC + AB + BC}{2} = \frac{15 + 5\sqrt{7}}{2}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{15 + 5\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{15 - 5\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{5\sqrt{7} - 5}{2}\right)\left(\frac{5\sqrt{7} + 5}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(225 - 175)(175 - 25)} = \frac{1}{4} \sqrt{50 \cdot 150} = \frac{50}{4} \sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{7}}{4R} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{10 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{7}}{2 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}. S_{\text{шара}} = 4\pi \frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{700\pi}{3}$ .

#### Вариант 4

Дано: цилиндр (осевое сечение — квадрат  $EFDG$ ) вписан в конус, образующая конуса наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ ,  $S_{\text{бок. цил.}} = 16\pi$ .

1) Найти  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

Решение: Пусть радиус цилиндра  $R$ , высота  $2R$

$$\Rightarrow S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 2.$$

Рассмотрим осевое сечение конуса:

$\triangle EKB$  — прямоугольный равнобедренный  $\Rightarrow KB = EK = 2$ ,  $ED = 4$ ,  $HK =$

$$4 \Rightarrow BH = BK + ED = 6 \Rightarrow AH = HC = 6, BA = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$S_{\text{бок. конуса}} = \pi \cdot AB \cdot AH = 36\pi \sqrt{2}.$$

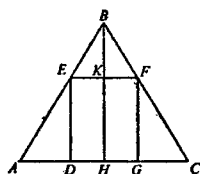
Ответ:  $36\pi \sqrt{2}$ .

2) Какова наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через вершину конуса?

Решение:  $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между образующими, а  $\sin \alpha =$

$$1 \text{ наибольший в осевом сечении} \Rightarrow S_{\text{сеч. наиб.}} = \frac{1}{2} AB^2 = 36.$$

Ответ: 36.





3) Найти  $\frac{V_{\text{верх. конуса}}}{V_{\text{цилиндра}}}$ .

Решение:  $V_{\text{верх. конуса}} = \frac{\pi}{3} \cdot BK \cdot EK^2 = \frac{8\pi}{3}$ .

$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot EK^2 \cdot ED = 4\pi \cdot 4 = 16\pi$ .  $\frac{V_{\text{верх. конуса}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{8\pi}{3 \cdot 16\pi} = \frac{1}{6}$ .

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

4) В конус вписан шар. Найти  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: В осевое сечение  $\triangle ABC$  вписан большой круг шара  $\Rightarrow$

$S(ABC) = AC \cdot \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} P \cdot r$ ;  $36 = \frac{1}{2} (6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 12) \cdot r$ ;  $= \frac{36 \cdot 2}{12(\sqrt{2} + 1)}$ ;

$r = \frac{6}{\sqrt{2} + 1}$ .  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{36 \cdot 2 \cdot 3}{(\sqrt{2} + 1)^3} = \frac{36 \cdot 8\pi}{(\sqrt{2} + 1)^3} = \frac{288\pi}{(\sqrt{2} + 1)^3}$ .

Ответ:  $\frac{288\pi}{(\sqrt{2} + 1)^3}$ .

## II—4

### Вариант 1

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — призма,  $A_1A = AB = BC = AC = a$ ,  $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$ ,  $AK$  — медиана  $\triangle ABC$ .

1) Найти угол между  $A_1C$  и медианой  $AK$  основания.

Решение:

Опустим высоту  $A_1H$ ,  $H$  — центр  $\triangle ABC$ , т.к.

$\triangle A_1CA_1$  и  $\triangle AA_1B$  — равносторонние  $\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,

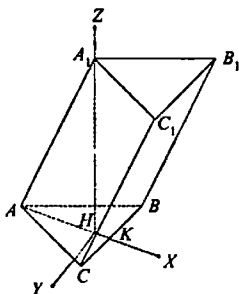
$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |AC| = a$ . Введем прямоугольную

систему координат  $HXYZ$ , в ней

$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$ ,  $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $A_1\left(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ .

Из прямоугольного  $\triangle AHA_1$ :  $A_1H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

$A_1C\left\{\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, -a\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ ,  $AK\left\{\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, 0\right\}$ ,  $\overline{AK}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right\}$



$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{(\overline{A_1C}, \overline{AK})}{|\overline{A_1C}| |\overline{AK}|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{a \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

2) Доказать, что грань  $CC_1B_1B$  — прямоугольник.

$$\overline{AA_1} \left\{ \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}} \right\}, \overline{CC_1} = \overline{AA_1}, \overline{CB} \{0, -a, 0\}$$

$(\overline{CC_1}, \overline{CB}) = 0 \Rightarrow CC_1 \perp CB$  и противоположные стороны параллелограмма  $CC_1B_1B$  равны  $\Rightarrow$  он прямоугольник.

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — призма,  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(-1, -1, 2)$ ,  $C(3, -2, 2)$ ,  $A_1(1, 2, 5)$ ,  $E \in A_1C_1$ ,  $(A_1E = EC_1) \alpha \perp B_1C$ .

Найти угол между  $AE$  и  $\alpha$ .

Решение:  $\overline{AA_1} \{0, 0, 3\}$ ,  $\overline{CC_1} = \overline{AA_1} \Rightarrow C_1(3, -2, 5)$ .

Координаты  $E \left( \frac{1+3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{5+5}{2} \right)$ ,  $E(2, 0, 5)$ ,  $\overline{BB_1} = \overline{AA_1} \Rightarrow$

$B_1(-1, -1, 5)$ ,  $\overline{B_1C} \{4, -1, -3\}$ ,  $\overline{AE} \{1, -2, 3\}$ .

Найдем угол между  $\overline{AE}$  и  $\overline{CB_1}$ ,  $\overline{CB_1} \{-4, 1, 3\}$ .

$$(\overline{AE}, \overline{CB_1}) = -4 - 2 + 9 = 3 = |\overline{AE}| \cdot |\overline{CB_1}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\overline{AE}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; |\overline{CB_1}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}}; \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}}$$

Искомый угол равен  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , т.е.  $\arcsin \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}}$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}}$ .

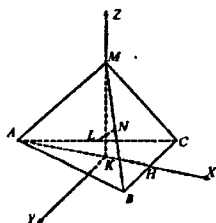
## Вариант 2

1. Дано:  $MABC$  — тетраэдр,  $AB = BC = AC = a$ ,  $MA = 2a$ ,  $\angle MAC = \angle MAB = 45^\circ$ .

1) Доказать:  $AM \perp CB$ .

Доказательство:

Проведем высоту  $AN$  в  $(ABC)$ ,  $MK$  — высота пирамиды,  $K \in AN$ ,  $\overline{AN} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{MK} \perp (ABC) \Rightarrow \overline{MK} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{AM} = \overline{AK} + \overline{KM} \perp \overline{BC}$ , т.к.



$$(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}) = ((\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM}) \cdot \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0.$$

2) Найти расстояние  $\angle N, L \in AC, AL = LC, N \in MB, MN = NB$ .

Решение: Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат  $KXYZ$  как показано на рисунке.

$$\text{В } \triangle AKM \text{ } AK^2 + KM^2 = AM^2 = 4a^2, \text{ пусть } AK = x \Rightarrow KM = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \left( x, 0, \sqrt{4a^2 - x^2} \right), |\overrightarrow{AM}| = 2a$$

$$\overrightarrow{AB} \left\{ \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right\}, |\overrightarrow{AB}| = a, \cos \widehat{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \alpha.$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{ax\sqrt{3}}{2} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha = 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2}, AK = x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a, KM = \sqrt{4a^2 - \frac{8}{3}a^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A \left( -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a, 0, 0 \right), C \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, 0 \right) \Rightarrow L \left( \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{4}, 0 \right)$$

$$M \left( 0, 0, \frac{2a}{\sqrt{3}} \right), B \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, 0 \right) \Rightarrow N \left( \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}, \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{Значит, } \overrightarrow{LN} \left\{ \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{3}} \right\}, |\overrightarrow{LN}| = a\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Дано:  $M(-1, 2, 5), A(1, -1, 2), B(-2, 1, 2), C(-1, 3, 2), D(3, 1, 2)$ ,  $MABCD$  — пирамида.

Найти  $V(MABCD)$ .

Решение: Уравнение плоскости  $(ABC): Px + Qy + Rz + S = 0$ .

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ C: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P - Q + 2R + S = 0 \\ -2P + Q + 2R + S = 0 \\ -P + 3Q + 2R + S = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 3P - 2Q = 0 \\ -2P + \frac{3}{2}P + 2R + S = 0 \\ -P + \frac{9}{2}P + 2R + S = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{3P}{2} \\ -\frac{P}{2} + 2R + S = 0 \\ \frac{7}{2}P + 2R + S = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = -\frac{S}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \text{уравнение } ABCD: z = 2$$

$MH$  — высота пирамиды,  $MH = 3$

$\overrightarrow{AC} \{-2, 4, 0\}$ ,  $\overrightarrow{DB} \{-5, 0, 0\}$ ,  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ ,  $|\overrightarrow{DB}| = 5$   
 $(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}) = 10 = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между  $AC$  и  $DB$ .

$$\cos \varphi = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10$$

$$\Rightarrow V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{3}{3} \cdot 10 = 10.$$

Ответ: 10.

### Вариант 3

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед,  $ABCD$  — ромб,  $AB = a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AA_1 = a$ ,  $E \in D_1 C$ ,  $D_1 E = EC$ .

1) Найти угол между  $AE$  и  $BD$ .

Решение: Поместим параллелепипед в прямоугольную систему координат  $OXYZ$ . В ней

$$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), D_1\left(0, \frac{a}{2}, a\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right) \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right), B\left(0, -\frac{a}{2}, 0\right), D\left(0, \frac{a}{2}, 0\right) \quad \overrightarrow{AE}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{BD}(0, a, 0)$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\frac{27a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{4\sqrt{2}a}{4} = a\sqrt{2}; |\overrightarrow{BD}| = a$$

$$(\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}) = \frac{a^2}{4} = |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{AE \cdot BD}$$

$$\cos \widehat{AE \cdot BD} = \frac{a^2}{4a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}, (\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

2) Доказать:  $A_1 C \perp BD$ .

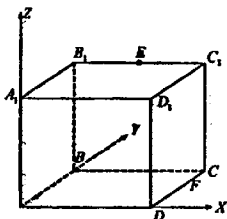
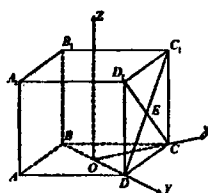
$$\text{Доказательство: } A_1\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, a\right), \overrightarrow{A_1 C}\{a\sqrt{3}, 0, -a\}$$

$$(\overrightarrow{A_1 C} \cdot \overrightarrow{BD}) = 0 \Rightarrow A_1 C \perp BD.$$

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $F \in DC$ ,  $DF = FC$ ,  $E \in B_1 C_1$ ,  $B_1 E = EC_1$ .

Найти угол между  $EF$  и плоскостью  $(A_1 BD)$ .

Решение: Поместим куб в прямоугольную систему координат  $AXYZ$ .



$$A_1(0, 0, a), B(0, a, 0), D(a, 0, 0), C(a, a, 0), F\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), E\left(\frac{a}{2}, a, a\right).$$

Уравнение  $(A_1BD)$ :  $x + y + z - a = 0$ .  $\vec{n} \{1, 1, 1\} \perp (A_1BD)$ .

$$\overrightarrow{FE} \left\{ -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a \right\}, |\vec{n}| = \sqrt{3}; |\overrightarrow{FE}| = a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{FE}) = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + a = a = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{FE}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ ;  $\alpha$  — угол между  $FE$  и перпендикуляром  $\vec{n}$  к  $A_1BD \Rightarrow$

угол между  $FE$  и  $(A_1BD) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

#### Вариант 4

1. Дано:  $DABC$  — правильный тетраэдр,  $AB = DA = a$ ,  $M$  — точка пресечения медиан  $\triangle BDC$ ,  $E \in AD$ ,  $AE = ED$ .

1) Найти  $EM$ .

Решение: Опустим высоту  $DH$  и поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .  $\triangle ACB = \triangle DCB$  (по трем сторонам)  $\Rightarrow AK = DK$ , но  $H$  — и точка пересечения медиан  $\triangle ABC \Rightarrow AH = DM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$\triangle AEN = \triangle DEM$  по двум сторонам и углу между ними  $\Rightarrow EM = EN$ .

$$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right), DH^2 = AD^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3},$$

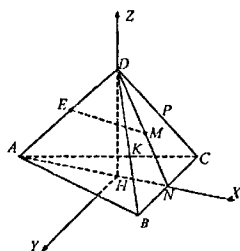
$$D\left(0, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow E\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \overrightarrow{HE} \left\{ -\frac{a\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{a}{\sqrt{6}} \right\},$$

$$|\overrightarrow{HE}| = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 3}{36} + \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{2} = EM.$$

Ответ:  $\frac{a}{2}$ .

2)  $P \in DC$ ,  $DP = PC$ ,  $K \in DB$ ,  $DK = KB$ .

Доказать:  $\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{AD}$ .



Доказательство:  $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \left\{ 0, \frac{a}{2}, 0 \right\},$

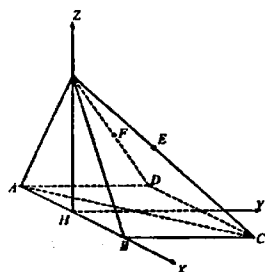
$$\overrightarrow{AD} \left\{ \frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, a\sqrt{\frac{2}{3}} \right\} \Rightarrow (\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0 \Rightarrow PK \perp AD$$

2. Дано:  $MABCD$  — пирамида,  $ABCD$  — прямоугольник,  $AD = 1$ ,  $AB = 2$ .  $(MAB) \perp (ABCD)$ ,  $MH \perp AB$ ,  $H \in AB$ ,  $MH = 1$ .

Найти угол между  $AE$  и  $DE$ ;  $E \in MC$ ,  $ME = EC$ ,  $F \in MD$ ,  $MF = FD$ .

Решение: Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ . В ней  $M(0, 0, 1)$ ,

$$A(0, -1, 0), D(1, -1, 0) \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), C(1, 1, 0)$$



$$\begin{aligned} 0) \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AF}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{DE}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), |\overrightarrow{AF}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\overrightarrow{DE}| \\ = \frac{\sqrt{11}}{2}, (\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = |\overrightarrow{AF}| \cdot |\overrightarrow{DE}| \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{33}} = \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{33}}; \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{3}{\sqrt{33}}.$

МД—1

Вариант 1

1. Дано:  $M(1; 3; 2)$ ,  $M_1$  — проекция  $M$  на плоскость  $Oxz$ ,  $M_2$  — проекция  $M$  на ось  $Oz$ .

Решение:  $M_1(1; 0; 2)$ ,  $M_2(0; 0; 2)$

Ответ:  $M_1(1; 0; 2)$ ,  $M_2(0; 0; 2)$ .

2. Дано:  $E(-1; 2; 3)$ ,  $F(1; -1; 4)$ . Разложить  $\overrightarrow{EF}$  по векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Решение:  $\overrightarrow{EF} \{1 - (-1); -1 - 2; 4 - 3\}$ ;

$\overrightarrow{EF} (2; -3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \vec{j} + \vec{k}$ .

Ответ:  $2 \cdot \vec{i} - 3 \vec{j} + \vec{k}$ .

3. Найти угол между  $\vec{j}$  и  $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ .

Решение:  $(\vec{j} \cdot \vec{m}) = (\vec{j} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{k})) = 2(\vec{j} \cdot \vec{i}) - 3(\vec{j} \cdot \vec{k}) =$

$= |\vec{j}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos(\hat{\vec{j}\vec{m}}) = 0$ .  $\hat{\vec{j}\vec{m}} = \frac{\pi}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2}$ .

4. Дано: параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , вершины:  $A(1; 2; -4)$ ,  $C_1(3; 0; 2)$ .

Найти точку пересечения диагоналей.

Решение: Середина  $AC_1$  т.  $H\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2}{2}; \frac{2-4}{2}\right)$ ;  $H(2; 1; -1)$ .

Ответ:  $(2; 1; -1)$ .

5. Дано:  $\overrightarrow{AB} \{-2; 4; 3\}$  и  $\overrightarrow{AC} \{4; -8; -6\}$ .

Лежат ли точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на одной прямой.

Ответ: лежат, т.к. есть такое  $k = -2$ , что  $k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ , а значит, векторы коллинеарны.

6. Дано:  $\vec{m} \{1; 2; 2\}$ .

Найти координаты единичного вектора  $\vec{e}$ , сонаправленного с  $\vec{m}$ .

Решение:  $|\vec{m}| = \sqrt{1+4+4} = 3 \Rightarrow$  вектор  $\vec{e} \uparrow \vec{m}$  будет иметь координаты  $\vec{e} \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ .

Ответ:  $\vec{e} \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ .

7. Дано:  $|\vec{a}| = 2$ , угол между положительным направлением  $Ox$  и  $\vec{a}$  равен  $135^\circ$ . Найти абсциссу  $\vec{a}$ .

Решение: Пусть  $\vec{a} \{x_0, y, z\}$ , т.к.  $\vec{i} \{1; 0; 0\}$ , то  $(\vec{a} \cdot \vec{i}) = x_0$ .

$$(\vec{a} \cdot \vec{i}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 135^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} = x_0.$$

Ответ:  $x_0 = -\sqrt{2}$ .

8. Дано:  $DABC$  — правильный тетраэдр.

Упростить:  $(\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB})$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } & (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \\ & = (|\vec{AB}|^2 - |\vec{BC}|^2) + \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \\ & = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

9. Дано:  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 120^\circ$ .

Найти  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ .

$$\text{Решение: } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0.$$

Ответ: 0.

10. Дано:  $\triangle ABC$ :  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 2; 1)$ ,  $C(1; -1; 1)$ .

Найти координаты центра описанной окружности.

Решение: Длина  $AB = \sqrt{6}$ , длина  $AC = \sqrt{3}$ , длина  $BC = 3 \Rightarrow \triangle ABC$  — прямоугольный, т.к.  $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$  центр описанной окружности лежит на середине  $BC$ , т.е. в точке  $O\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

Ответ:  $\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

## Вариант 2

1. Дано:  $E(2; -1; 3)$ .

Найти:  $E_1$  — проекцию  $E$  на плоскость  $Oyz$ ;

$E_2$  — проекцию  $E$  на ось  $Oy$ .

Решение:  $E_1(0; -1; 3)$ ;  $E_2(0; -1; 0)$ .

Ответ:  $E_1(0; -1; 3)$ ;  $E_2(0; -1; 0)$ .

2. Дано:  $K(2; -1; 3)$ ,  $M(1; -2; 1)$ .

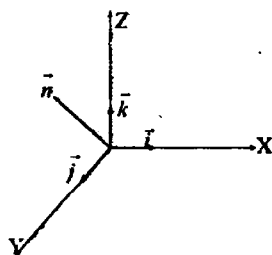
Разложить  $\vec{KM}$  по векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ .

Решение:  $\vec{KM} \{1 - 2; -2 - (-1); 1 - 3\}$ ;

$\vec{KM} \{-1; -1; -2\}$ ;  $\vec{KM} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ .

Ответ:  $\vec{KM} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ .

3. Найти угол между  $\vec{j}$  и  $\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$ .





Решение.  $\vec{j} \cdot \vec{n} = (\vec{j} \cdot (-2\vec{j} + \vec{k})) = -2|\vec{j}|^2 + \vec{k} \cdot \vec{j} = -2|\vec{j}|^2 = -2$

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = |\vec{j}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \sqrt{0^2 + 4 + 1} \cdot \cos \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha; \vec{n} \{0; -2; 1\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \cos \alpha = -2, \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Ответ:  $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

4. Дано: параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $B_1(-1; 3; 2)$ , точка пересечения диагоналей  $M(2; -1; 1)$ .

Найти координаты  $D$ .

Решение: Т.к.  $M$  точка пересечения диагоналей, то она лежит на середине

$$B_1 D. \text{ Пусть } D(x; y; z), \text{ тогда } \begin{cases} \frac{-1+x}{2} = 2 \\ \frac{3+y}{2} = -1 \\ \frac{2+z}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5; -5; 0).$$

Ответ:  $D(5; -5; 0)$ .

5. Дано:  $\overrightarrow{EF} \{1; -2; 3\}$ ,  $\overrightarrow{EK} \{-2; 4; 6\}$ .

Лежат ли точки  $E, F$  и  $K$  на одной прямой.

Ответ: нет, не лежат, т.к. нет такого  $k$ , что  $\overrightarrow{EF} = k \overrightarrow{EK}$ , а значит, векторы не коллинеарны и точки не лежат на одной прямой.

6. Дано:  $\vec{p} \{-2; -2; 1\}$ .

Найти координаты  $\vec{e}$ , противоположно направленного  $\vec{p}$ .

Решение:  $|\vec{p}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \Rightarrow$  координаты  $\vec{e} \uparrow \vec{p}$  будут  $\vec{e} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$

Ответ:  $\vec{e} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}$ .

7. Дано:  $\vec{a}$  составляет с положительным направлением оси  $Oy$  угол  $135^\circ$

Найти ординату вектора  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ .

Решение. Пусть  $\vec{a} \{x; y_0; z_0\}$ . Т.к.  $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ , то  $(\vec{a} \cdot \vec{j}) = y_0$ .

$$(\vec{a} \cdot \vec{j}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 135^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{6} = y_0.$$

Ответ:  $-\sqrt{6}$

8. Дано: правильная пирамида  $HPMK E$ .

Упростить:  $(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } & (\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE}) = \\ & = |\overrightarrow{PH}|^2 - |\overrightarrow{MK}|^2 + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{ME}. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

9. Дано:  $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = \sqrt{2}, \hat{m}\vec{n} = 135^\circ$

Найти:  $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n}$ .

Решение:  $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \vec{n} - (\vec{n})^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 = -4$ .

Ответ: -4.

10. Дано:  $\Delta MFP, M(0; 0; 0), F(2; -1; 3), P(-1; 1; 1)$ .

Найти  $d$  описанной окружности.

Решение: Длина  $MF = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ , длина  $MP = \sqrt{3}$ , длина  $PF = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ . Итак,  $\Delta MFP$  — прямоугольный, т.к.  $PF^2 = MF^2 + MP^2 \Rightarrow$  длина диаметра описанной окружности равна длине  $PF = \sqrt{17}$ .

Ответ:  $\sqrt{17}$ .

## МД—2

### Вариант 1

1. Дано: цилиндр, сечение отстоит от осевого сечения на 3; высота 10;  $R = 5$ .

Найти:  $S_{\text{сеч.}}$ .

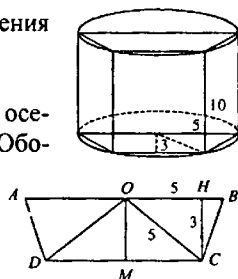
Решение: Рассмотрим сечение, перпендикулярное осевому  $ABCD$  — трапеция, вписанная в окружность. Обозначим меньшее основание за  $x$ . тогда

$$HB = \frac{10-x}{2} \quad (\text{т.к. большее основание — диаметр,}$$

а трапеция равнобокая).

$$\frac{1}{2}x = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 4 \Rightarrow S_{\text{сеч}} = x \cdot h = 4 \cdot 2 \cdot 10 = 80$$

Ответ: 80.



2. Дано:

призма, стороны 6, 8 и 10, высота 4

Найти:

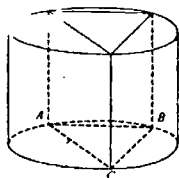
$S_{\text{бок. пов. шл.}}$

Решение:

$$1) S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h = 8\pi R$$

$$2) S_{\text{осн}} = \sqrt{\frac{8+10+6}{2} \left( \frac{8+10+6}{2} - 8 \right) \left( \frac{8+10+6}{2} - 6 \right) \left( \frac{8+10+6}{2} - 10 \right)} = \\ = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2} = 24. R = \frac{abc}{4S_{\text{осн}}} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5, S_{\text{бок пов. шл.}} = 40\pi.$$

Ответ:  $40\pi$ .



3. Дано: конус,  $ABC$  — сечение,  $BC = a$ ,  
 $\angle COB = 90^\circ$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ .

Найти:  $S_{\text{бок пов.}}$ .

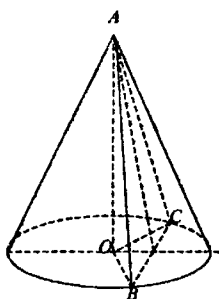
Решение: 1)  $S_{\text{бок пов.}} = \pi Rl$ ;

2) Из  $\triangle COB$ :  $OC = OB = R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Из  $\triangle CAB$   $BC = AC = AB = a$

$$\Rightarrow S_{\text{бок пов.}} = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a = \pi \frac{a^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ .



4. Дано:

$\angle DAO = \angle DCO = \angle DBO = 60^\circ$ ,  $AC = 10$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ .

Найти:  $S_{\text{бок конуса}}$ .

Решение:

1)  $S_{\text{бок конуса}} = \pi Rl$

2) Т.к. углы при основании равны, то вершина проецируется в центр описанной окружности (из равенства  $\triangle ADO = \triangle COD = \triangle BDO$ ).

3) По теореме синусов  $\frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 10$ .

4) Из  $\triangle AOD$ , в котором  $\angle DAO = 60^\circ$ ,  $AO = R = 10 = AD \cdot \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{10}{AD} \Rightarrow AD = 20.$$

5)  $S_{\text{бок конуса}} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 200\pi$ .

Ответ:  $200\pi$ .

5. Найти множество точек, удаленных на  $a$  от точки  $M$  и на  $b$  от точки  $P$ .

Ответ:

Это будет окружность, по которой пересекаются сферы: одна с центром в т.  $M$  и с радиусом  $a$ , а вторая с центром в т.  $P$  и с радиусом  $b$ .

6. Указать множество центров сфер: которые касаются плоскости в заданной точке.

Ответ: Все центры будут лежать на перпендикуляре, восстановленном из этой точки.

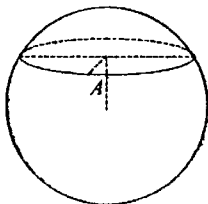
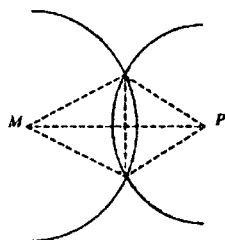
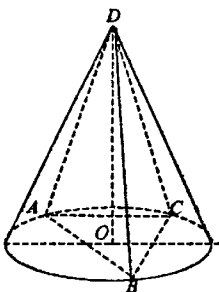
7. Дано:

координаты  $A(3; 4; 12) \in$  сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ ,  $A \in \alpha$ ,  $\alpha \perp OZ$

Найти:  $R_{\text{сеч.}}$ .

Решение:

Уравнение плоскости  $\alpha: z=k$ . Т.к.  $A \in \alpha$ , то  $12 = k$ .



Т.е. плоскость  $\alpha$  удалена от центра сферы на расстояние  $k = 12$ . А значит радиус сечения будет

$$r = \sqrt{R^2 - k^2} = \sqrt{169 - 144} = 5, S_{\text{сеч}} = 25\pi = \pi r^2.$$

Ответ:  $25\pi$ .

8. Дано: В усеченный конус с радиусами оснований 2 и 4 вписан шар.

Найти:  $S_{\text{бок}}$ .

Решение: 1) Построим осевое сечение  $ABCD$ ,  $BC = 4$ ,  $AD = 8$ .

2) Т.к.  $ABCD$  — трапеция, в которую вписан круг, то  $BC + AD = AB + CD$ , но  $AB = CD \Rightarrow 4 + 2 = 2AB = 2AB \Rightarrow AB = 6$ .

3)  $S_{\text{бок. ус. кон.}} = \pi(R + r)l = \pi \cdot 6 \cdot 6 = 36\pi$ .

Ответ:  $36\pi$ .

9. Дано:

$AC = AB = BC = 3$ ,  $\angle DCO = \angle DAO = \angle DBO = 45^\circ$ .

$DABC$  — правильная

Около  $DABC$  описана сфера

Найти:  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle ABC$ , т.к. он равнобедренный, то  $R = \sqrt{3}$  — радиус описанной окружности.

2) Рассмотрим  $\triangle DOC$ . Он прямоугольный и равнобедренный  $\Rightarrow OD = \sqrt{3} \Rightarrow$  т.  $O$  — центр сферы.

3)  $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3 \cdot \pi = 12\pi$ .

Ответ:  $12\pi$ .

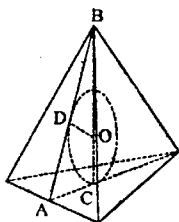
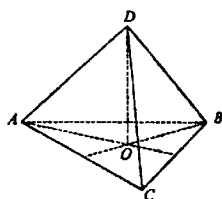
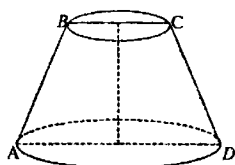
10. Дано: пирамида, центр шара делит высоту в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Найти угол наклона боковых граней.

Решение: 1) Рассмотрим сечения: Т.к. т.  $O$  делит  $BC$  в отношении 2 : 1, то  $BO = 2OC = 2OD$ .

2) Рассмотрим  $\triangle DBO$ :  $DO = R$ ,  $BO = 2R \Rightarrow \angle DBO = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .



## Вариант 2

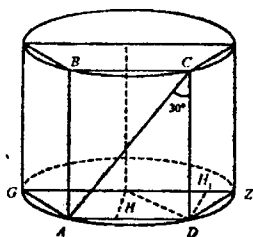
1. Дано:  $AC = 16$ ,  $\angle CAD = 60^\circ$  радиус основания равен 5.

Найти: расстояние от оси до плоскости.

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle ACD$ :  $\angle ACD = 30^\circ$ ,  $AC = 16 \Rightarrow AD = 8$ .

2) Искомое расстояние равно

$$\sqrt{\frac{AD^2}{4} + R^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$



Ответ: 3.

2. Дано:  $ABCD$  — ромб, сторона 4,  $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ , высота  $AA_1 = 5$ .

Найти:  $S_{\text{вписан. цилиндра}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle AOD$ :  $\angle OAD = 30^\circ$ ,  $AD = 4 \Rightarrow OD = 2 \Rightarrow AO = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$ .

2) Рассмотрим  $\triangle AOH$ :  $AO = \sqrt{12}$ ,  $\angle AOH = 30^\circ$

$$\Rightarrow HO = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} = R.$$

$$3) S_{\text{цил. бок. пов.}} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \sqrt{3} \cdot 5 = 10\pi\sqrt{3}.$$

Ответ:  $10\pi\sqrt{3}$ .

3. Дано:  $\angle COB = 60^\circ$ ,  $\angle CAB = 90^\circ$ ,  $CB = m$ .

Найти:  $S_{\text{бок. пов.}}$ .

Решение: 1)  $\triangle OCB$  равнобедренный ( $OC = OB = R$ ,  $\angle COB = 60^\circ$ )  $\Rightarrow OC = CB = OB = m$ .

2) Рассмотрим  $\triangle ABC$ :  $\angle CAB = 90^\circ$ ,  $AB = AC$  как образующие.

$$m^2 = AB^2 + AC^2, \text{ но } AB = AC; m^2 = 2AB^2;$$

$$AB = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}m}{2}.$$

$$3) S_{\text{бок. пов.}} = \pi R l = \pi \cdot m \cdot \frac{\sqrt{2}m}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} m^2 \pi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2} \pi m^2.$$

4. Дано:  $DO = 1$ ,  $AB = BC = AC = 6$ .

Найти:  $S_{\text{конуса}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle ABC$ . Он правильный.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$$

2) Рассмотрим  $\triangle DGO$ :  $OG = r = \sqrt{3}$ ,  $DO = 1 \Rightarrow$  по теореме Пифагора  $DG = 2$ .

$$3) S_{\text{конуса}} = \pi r l = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \pi.$$

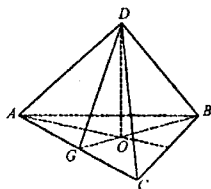
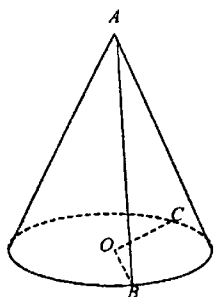
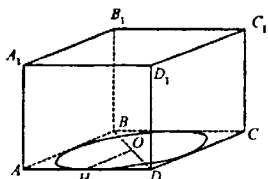
Ответ:  $2\sqrt{3} \pi$ .

5. Найти множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Ответ: Это будет сфера с диаметром, равным этому отрезку.

6. Указать множество центров всех шаров данного радиуса, которые касаются данной плоскости.

Ответ: Центры будут лежать двух плоскостях, параллельных данной и лежащих от нее на расстоянии, равном радиусу.



7. Дано: координаты  $B(3; 4; 12)$ , сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ ,  $B \in \alpha$ ,  $\alpha \perp Ox$   
 Найти:  $R_{\text{сеч.}}$ .

Решение: Уравнение  $\alpha: x = K$ ,  $B \in \alpha \Rightarrow K = 3$

Значит плоскость удалена от центра сферы на  $K = 3$

Радиус сечения равен  $r = \sqrt{R^2 - K^2} = \sqrt{169 - 9} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ .

Ответ:  $4\sqrt{10}$ .

8. Дано: Образующая усеченного конуса равна 6, в конус вписан шар.

Найти:  $S_{\text{бок. пов. кон.}}$ .

Решение:

1)  $S_{\text{бок. пов.}} = \pi(R + r)l$ .

2) Рассмотрим осевое сечение, т.е. трапецию  $ABCD$ : т.к. в сечении в нее вписана окружность, то  $AB + CD = BC + AD$ , но  $BC = 2r$ ,  $AD = 2R$ ;  $AB = CD = 6$ ,  $12 = 2(R + r) \Rightarrow S_{\text{бок. пов.}} = \pi \cdot 6 \cdot 6 = 36\pi$ .

Ответ:  $36\pi$ .

9. Дано:  $\angle JAC = \angle JBD = \angle JCA = \angle JDB = 45^\circ$ ,

$S_{\text{опис. сферы}} = 64\pi$ .

Найти: сторону основания пирамиды.

Решение: Рассмотрим  $\triangle AJC$ :  $AJ = JC$ ,  $\angle JAC = \angle JCA = 45^\circ \Rightarrow \angle AJC = 90^\circ \Rightarrow$  т.  $O$  — центр описанной окружности, а значит, и сферы.

$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$ ;  $64\pi = 4\pi R^2$ ;  $R^2 = 16$ ,  $R = 4 \Rightarrow d = AC = 8 = \sqrt{2}a \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ .

Ответ:  $4\sqrt{2}$ .

10. Дано:

Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом  $45^\circ$ . В пирамиду вписан шар ( $G$  — центр шара).

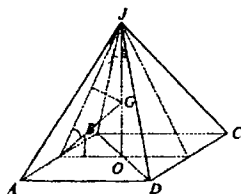
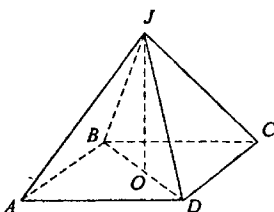
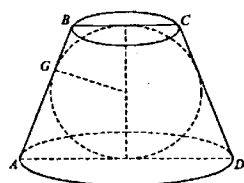
Найти:  $\frac{JD}{OG}$ .

Решение:

1. Рассмотрим сечение:  $\frac{1}{2}P \cdot r = S$ . Пусть радиус сферы равен  $r$ , сторона основания  $a$ , тогда высота пирамиды  $h = \frac{a}{2}$ .

$S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ ;  $P = a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a(1 + \sqrt{2})$ ,

$r = \frac{2S}{P} = \frac{a^2}{2(1 + \sqrt{2})a} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$ ,



$$h-r = \frac{a}{2}(1 - (\sqrt{2}-1)) = \frac{a}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \frac{h-r}{r} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}.$$

Ответ:  $\sqrt{2}$ .

### МД—3

#### Вариант 1

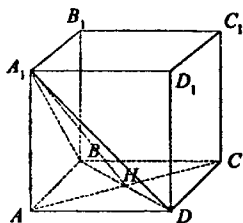
1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма,  $ABCD$  — квадрат,  $\angle C_1 A_1 H = 45^\circ$ ,  $BD = d$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle A_1 A H$  в нем:  $\angle A_1 H A = 45^\circ$  (как накрест лежащий при параллельных плоскостях);  $\angle A_1 A H = 90^\circ \Rightarrow \angle A A_1 H = 45^\circ \Rightarrow A H = A A_1$ .

$$2) A H = \frac{1}{2} d. \quad 3) V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{2} d^2 \cdot \frac{1}{2} d = \frac{1}{4} d^3.$$

Ответ:  $\frac{1}{4} d^3$ .



2. Дано:  $S_{A A_1 C_1 C} = 30$ ,  $S_{C C_1 B_1 B} = 40$ ,  $\angle G C_1 H = 90^\circ$ .

Найти:  $V$ .

Решение: 1) Рассмотрим сечение  $GC_1H$ , в нем:  $GC_1 = 3$  (т.к.  $S_{A A_1 C_1 C} = 30$ , а ребро 10),  $C_1 H = 4$  (аналогично рассуждая)  $\Rightarrow S_{GC_1H} = 6 \Rightarrow V = 6 \cdot 10 = 60$ .

Ответ: 60.

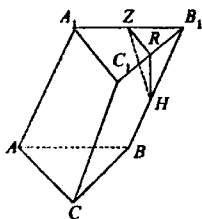
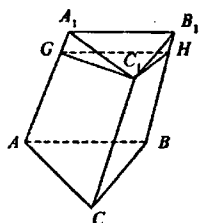
3. Дано:  $V$  — объем призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ ,  $H$  — середина  $BB_1$ ,  $Z$  — середина  $A_1 B_1$ ,  $R$  — середина  $C_1 B_1$ .

Найти:  $V_{ZB_1 R H}$ .

$$\text{Решение: } S_{ZB_1 R} = \frac{1}{4} S_{A_1 C_1 B_1}; \quad h_{ZB_1 R H} = \frac{1}{2} h_{\text{призмы}} \Rightarrow$$

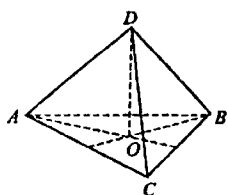
$$V_{ZB_1 R H} = \frac{1}{3} h_{ZB_1 R H} \cdot S_{ZB_1 R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h_{\text{призмы}} \cdot \frac{1}{4} S_{A_1 C_1 B_1} = \frac{1}{12} V_{\text{призмы}} = \frac{V}{12}.$$

Ответ:  $\frac{1}{24} V$ .



4. Дано:  $ABCD$  — пирамида,  $AC = 3$ ,  $CB = 4$ , боковые грани наклонены к основанию по углом  $= 45^\circ$ .

Найти:  $V$ .



Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle ABC$ :  $\angle C$  — прямой,  $AC = 3$ ,  $CB = 4 \Rightarrow AB = 5$ .

$$2) \frac{1}{2} Pr = S; r = 2 \frac{S}{P} = 2 \cdot \frac{6}{12} = 1.$$

$O$  — центр вписанной окружности.

$$\text{Высота пирамиды } h = r = 1 \Rightarrow V = \frac{1}{3} S(ABC) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1 = 2.$$

Ответ: 2.

5. Дано: Правильная четырехугольная пирамида  $HABCD$ .  $ABCD$  — квадрат,  $4S_{\triangle HND} = S$ ,  $OI = d$ .

Найти:  $V$ .

Решение: Разбив пирамиду на несколько, получим

$$V = S \cdot d \frac{1}{3} = \frac{Sd}{3}.$$

Ответ:  $\frac{Sd}{3}$ .

6. Дано:  $V_{\text{пир.}} = V$ ,  $BR = RH = HA$ .

Найти:  $V_{\text{HONMYRZW}}$ .

Решение:  $V = h \cdot S_{ADCE}$ . Пусть  $S_{ADCE} = S$ .

$$S_{RZMY} = \frac{1}{9} S, S_{HONM} = \frac{4}{9} S, h_{\text{HONMYRZW}} = \frac{1}{3} h$$

$$\Rightarrow V_{\text{ус. пир.}} = \frac{h}{9} \left( \frac{1}{9} S + \frac{4}{9} S + \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} S^2} \right) =$$

$$= \frac{h}{9} \left( \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \right) S = \frac{7}{81} hS = \frac{7}{27} V.$$

7. Дано:  $V_{\text{конуса}} = 40$ ,  $AB = BC$ .

Найти:  $V_{\text{цил.}}$ .

$$\text{Решение: } 1) V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = 40 \Rightarrow S_{\text{осн.}} \cdot h = 120.$$

$$2) S_{\text{верх.}} = S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{4}, h_{\text{цил.}} = \frac{1}{2} h$$

$$\Rightarrow V_{\text{цил.}} = \frac{1}{4} S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{2} h = \frac{3}{8} V_{\text{конуса}} = \frac{120}{8} = 15.$$

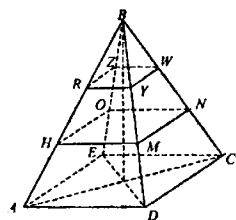
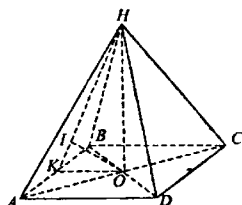
Ответ: 15.

8. Дано: пирамида,  $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO = 45^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ .

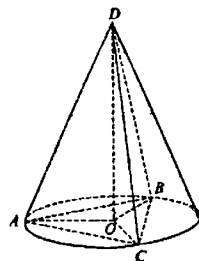
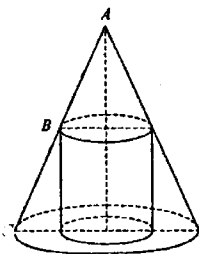
Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: 1) Т.к. ребра равнонаклонены, то точка пересечения — центр описанной окружности.

$$2) \text{ По теореме синусов в } \triangle ABC \quad \frac{AB}{\sin \angle BCA} = 2R, \\ R = 10.$$



Ответ:  $\frac{7}{27} V$





3) Рассмотрим  $\triangle ADO$ : он равнобедренный, т.к.  $\angle DOA = 90^\circ$ , а  $\angle DAO = = 45^\circ \Rightarrow AO = OD = 10$ .

$$4) V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1000 = \frac{1000\pi}{3}.$$

Ответ:  $\frac{1000\pi}{3}$ .

9. Дано: в правильную призму вписан шар, сторона  $2\sqrt{3}$ .

Найти:  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим сечение  $HUI$ , радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1.$$

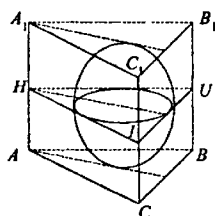
$$2) V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4 \cdot \pi}{3} = \frac{4}{3} \pi.$$

10. Дано:  $BA = 3, AI = 9$ .

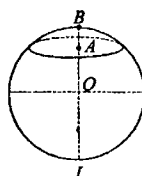
Найти:  $V_{\text{сегм.}}$ .

Решение:  $V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right) = \pi \cdot 9 \left( 6 - \frac{3}{3} \right) = 45\pi$ .

Ответ:  $45\pi$ .



Ответ:  $\frac{4}{3} \pi$ .



## Вариант 2

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма, сторона  $a$ ,  $\angle A_1GA = 45^\circ$ .

Найти:  $V$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle A_1AG$ : он прямоугольный и равнобедренный ( $\angle A_1GA = 45^\circ$ )  $\Rightarrow A_1A = AG$ .

2) Рассмотрим  $\triangle ABC$ : он правильный  $\Rightarrow AG = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ .

$$3) V = S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3a^3}{8}.$$

2. Дано: призма,  $S_{AA_1C_1C} = 20$ ,  $S_{CC_1B_1B} = 30$ , боковые ребра 5.

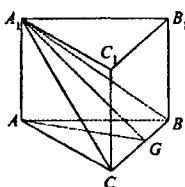
Найти:  $V$ .

Решение: 1)  $S_{AA_1C_1C} = A_1R \cdot AA_1 = 20$ ,  $AR = 4$ .

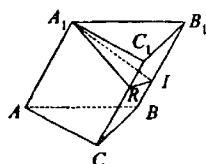
2)  $S_{CC_1B_1B} = RI \cdot CC_1 = 30$ ,  $RI = 6$ .

$\triangle ARI$  — прямоугольный  $\Rightarrow S_{ARI} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ ;  $V = 12 \cdot 5 = 60$ .

Ответ:  $V = 60$ .



Ответ:  $\frac{3a^3}{8}$ .



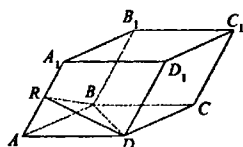
3. Дано: наклонный параллелепипед,  $AR = RA_1$ ,  
объем параллелепипеда —  $V$ .

Найти:  $V_{ARBD}$ .

Решение:  $V_{\text{парал.}} = h \cdot S_{\text{осн.}}$ ;

$$V_{ARBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{2} S_{\text{осн.}} = \frac{1}{12} V.$$

Ответ:  $\frac{1}{12} V$ .



4. Дано:  $ABCD$  — ромб, сторона  $a$ ,  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  
боковые грани наклонены к основанию под углом  
 $= 60^\circ$ .

Найти:  $V$ .

Решение:

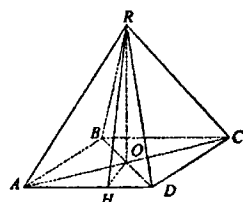
$$S(ABO) = \frac{1}{2} S(ABD) = \frac{a^2}{4} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^2}{8} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot HO = \frac{a}{2} \quad HO \Rightarrow HO = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Из } \triangle ROH \quad OR = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} S(ABCD) \cdot RO = \frac{2}{3} S(ABD) \cdot RO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Ответ:  $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ .



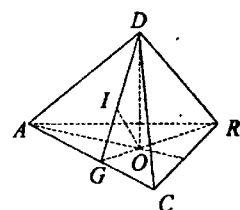
5. Дано: пирамида,  $\triangle ABC$  — правильный,  $V$  — ее  
объем,  $S$  — площадь боковой поверхности.

Найти:  $OI$ .

$$\text{Решение: } V_{ADCO} = \frac{1}{3} S_{\text{ARC}} \cdot OI = \frac{1}{9} S \cdot OI,$$

$$\text{но } V = 3V_{ADCO} = \frac{1}{3} S \cdot OI \Rightarrow OI = \frac{3V}{S}.$$

Ответ:  $\frac{3V}{S}$ .

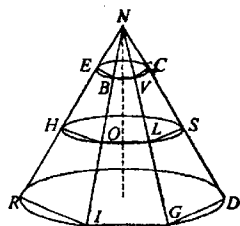


6. Дано: пирамида, ребра разделены в отношении  
 $1 : 2 : 1$ .

Найти:  $\frac{V_{EBVCSLOH}}{V_{EBVCN}}$ .

Решение: Пусть  $h$  — высота в пирамиде  $EBVCN$ .  
Тогда высота в усеченной пирамиде  $SLOHEBVC$  =  
 $= 2h$ .

Пусть  $S_{HOLS} = S$ , тогда  $S_{EBVC} = \frac{1}{9} S$



$$\Rightarrow \frac{V_{EBVCN}}{V_{HOISN}} = \frac{\frac{1}{3}h \cdot \frac{5}{9}}{\frac{1}{3} \cdot 3h \cdot S} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{V_{EBVCN}}{V_{EBVCSLOH}} = \frac{1}{26}.$$

Ответ:  $\frac{1}{26}$ .

7. Дано: конус, в него вписан цилиндр,  $AR = RI$ ,  $V_{\text{цил.}} = 9$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение:  $V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow S_{\text{осн.}} \cdot h = 18$ .

$$V_{\text{конуса}} = 4S_{\text{осн.}} \cdot h = 72.$$

Ответ: 72.

8. Дано: пирамида,  $RI = 6$ ,  $IG = 8$ ,  $RG = 10$ ,  $\angle ORS = \angle OGS = \angle OIS = 60^\circ$ . Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: 1)  $R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$  (из  $RIG$ ).

2) Рассмотрим  $\triangle RSO$ :  $\frac{OS}{R} = \operatorname{tg} 60^\circ$ ;  $OS = \sqrt{3} \cdot 5$

$$\Rightarrow V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OS = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ .

9. Дано: прямой параллелепипед,  $ABCD$  — ромб, сторона  $4\sqrt{3}$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ .

Найти:  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: 1) Рассмотрим  $\triangle AOD$ :  $\angle AOD = 90^\circ$  (как пересечение диагоналей);  $\angle OAB = 30^\circ$ ;  $AD = 4\sqrt{3} \Rightarrow OD = 2\sqrt{3}$ ,  $AO = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ .

2)  $\triangle AOD \sim \triangle AOS$ ;  $\frac{SO}{OD} = \frac{AO}{AD}$ ;  $SO = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = 3$ .

3)  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi$ .

Ответ:  $36\pi$ .

10. Дано: сектор  $60^\circ$  и радиус 6.

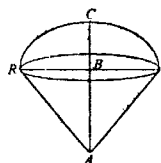
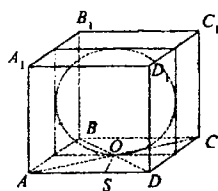
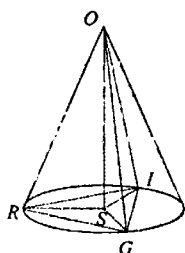
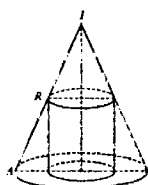
Найти:  $V_{\text{тела вращения}}$ .

Решение: 1)  $V_{\text{сектора}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H$ .

2) Рассмотрим  $\triangle RBA$ : в нем  $BA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$$CB = H = 6 - 3\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{2}{3} \pi \cdot 36(6 - 3\sqrt{3}) = 24\pi(6 - 3\sqrt{3}) = 72\pi(2 - \sqrt{3}).$$

Ответ:  $72\pi(2 - \sqrt{3})$ .



# Контрольные работы

К—1

## Вариант 1

1. Дано:  $|\vec{a}|, |\vec{b}| = 1, (\vec{a} + 2\vec{b}, 5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$ .

Найти: угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Решение:  $(\vec{a} + 2\vec{b}, 5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5|\vec{a}| - 8|\vec{b}| + 6(\vec{a}, \vec{b}) = 5 - 8 + 6\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}; \quad \vec{a}, \vec{b} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ:  $\pi/3$ .

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $AB = 1, M \in D_1 C, D_1 M = MC$ .

1) Найти угол между  $AM$  и  $B_1 D$ .

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $AXYZ$ .

$$A(0, 0, 0), M\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B_1(0, 1, 1), D(1, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{AM} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \overrightarrow{B_1 D} (1, -1, -1). (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B_1 D}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow AM \perp B_1 D.$$

2) Найти расстояние между серединами отрезков  $AM$  и  $B_1 D$ .

$$\text{Решение: } E \in AM, AE = EM, F \in B_1 D, E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{EF} \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}, |\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: 1)  $90^\circ$ , 2)  $\sqrt{2}/4$ .

3. Дано:  $A \in Oy, B(1, 0, 1)$ , угол между  $AB$  и  $(Oxy)$  равен  $30^\circ$ .

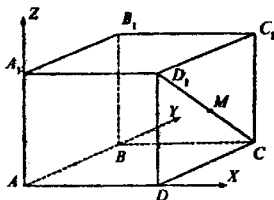
Найти: координаты  $A$ .

Решение: Пусть  $A(0, y_0, 0)$ ;  $\overrightarrow{AB} \{1, -y_0, 1\}$  составляет с  $\vec{n} \{0, 1, 0\}$  угол в  $60^\circ$ , т.к.  $\vec{n} \perp Oxy$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = -y_0 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \angle \overrightarrow{AB} \vec{n} = \sqrt{2 + y_0^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2 + y_0^2} = -2y_0.$$

$$2 + y_0^2 = 4y_0^2; y_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow A \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) \text{ или } \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) \text{ или } \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right).$$



4\*. Дано:  $\vec{a} \parallel \vec{b} \in \{6; 8; -7,5\}; |\vec{a}| = 50; \vec{a} \cdot \vec{j} > \frac{\pi}{2}$ .

Найти: координаты  $\vec{a}$ .

Решение:  $\vec{a} = k \cdot \vec{b}; |\vec{b}| = \sqrt{36 + 64 + 56,25} = 12,5 \Rightarrow \text{т.к. } |\vec{a}| = k \cdot |\vec{b}| \Rightarrow k = \pm 4$ .

$\vec{j}(0, 1, 0)$ , т.к.  $\vec{a} \cdot \vec{j} > \frac{\pi}{2}$ , то  $(\vec{a} \cdot \vec{j}) < 0 \Rightarrow k = -4$ , т.е.  $\vec{a} = -4\vec{b} = \vec{a} \{-24, -32, 30\}$ .

Ответ:  $\vec{a} \{-24, -32, 30\}$ .

## Вариант 2

1. Дано:  $A(-1, 2, 1), B(3, 0, 1), C(2, -1, 0), D(2, 1, 2)$ .

1) Найти  $\widehat{ABCD}$ . 2) Расстояние между серединами  $AB$  и  $CD$ .

Решение.  $\overrightarrow{AB} \{4, -2, 0\}, \overrightarrow{CD} \{0, 2, 2\}, |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}, |\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) = -4 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \widehat{ABCD}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABCD} = -\frac{4}{4\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}; \widehat{ABCD} = -\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + \pi.$$

2)  $E \in AB, AE = EB, F \in CD, CF = FD, E(1, 1, 1), F(2, 0, 1)$

$$\overrightarrow{EF} = (1, -1, 0), |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{2}.$$

Ответ: 1)  $\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ ; 2)  $\sqrt{2}$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма,

$\angle ACB = 120^\circ, AC = CB = BB_1$ .

Найти угол между  $AB$  и  $CB_1$ .

Решение: Поместим призму в прямоугольную систему координат  $MXYZ$ .

Пусть  $AC = a$ , тогда высота  $MC$  —  $\triangle ABC$ .

$$MC = \frac{a}{2}, AB = a\sqrt{3}, AM = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

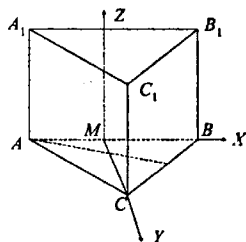
$$A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{a}{2}, 0\right), B_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0, a\right), \overrightarrow{AB}(a\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{CB_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}, a\right), |\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{3}, |\overrightarrow{CB_1}| = a\sqrt{2}$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}) = \frac{a^2 \cdot 3}{2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}| \cdot \cos(\widehat{ABCB_1}) = a^2 \sqrt{6} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{ABCB_1} = \frac{3a^2}{2a^2 \sqrt{6}}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \text{ Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Дано:  $A \in Oxy, B(1, 1, 1), A(x_0, x_0, 0)$ . Угол между  $AB$  и  $Ozy = 30^\circ$ .



**Найти:** координаты  $A$ .

**Решение:**  $\overrightarrow{AB} \{1-x_0, 1-x_0, 1\}$  составляет с  $\vec{n} (1, 0, 0)$  угол  $60^\circ$ , т.к.  $\vec{n} \perp Oyz$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2(1-x_0)^2 + 1}; |\vec{n}| = 1$$

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = 1 - x_0 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \sqrt{2(1-x_0)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4(1-x_0)^2 = 2(1-x_0)^2 + 1; 2(1-x_0)^2 = 1; (1-x_0)^2 = 1/2;$$

$$1-x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x_0 = 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow A \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \text{ или } A \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

$$\text{Ответ: } \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \text{ или } \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

4\*. Дано:  $\vec{a}$

$$\{7, 0, 0\}, \vec{b} \{0, 0, 3\}, (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a}) = 0, (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b}) = 0.$$

**Найти:** множество точек  $M$ .

**Решение:** Пусть  $\overrightarrow{OM} \{x_0, y_0, z_0\} \Rightarrow (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a}) = 7x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0;$

$$(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b}) = 3z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0.$$

Значит, искомое множество точек  $M(0, y, 0)$ , где  $y$  — произвольное число. **Ответ:** точки, лежащие на оси  $Oy$ .

### Вариант 3

1. Дано:  $\vec{a}, \vec{b}, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \vec{a} \vec{b} = 135^\circ$ .

**Найти:**  $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ .

**Решение:**  $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow$  по теореме косинусов имеем

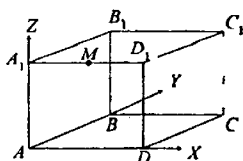
$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 35^\circ$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 4 + 8 - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20; |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{5}. \quad \text{Ответ: } 2\sqrt{5}.$$

2. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,  $AB = 1, M \in A_1 D_1, A_1 M = MD_1$ .

**Найти:** 1) угол между  $A_1 C$  и  $C_1 M$ .

**Решение:** Поместим куб в прямоугольную систему координат  $AXYZ$ . В ней  $A_1(0, 0, 1), C(1, 1, 0), D_1(1, 0, 1), M(1/2, 0, 1), C_1(1, 1, 1);$



$$\overrightarrow{A_1 C} \{1, 1, -1\}, \overrightarrow{M C_1} \left\{ \frac{1}{2}, 1, 0 \right\}; |\overrightarrow{A_1 C}| = \sqrt{3}, |\overrightarrow{M C_1}| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$(\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{MC_1}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = |\overrightarrow{A_1C}| \cdot |\overrightarrow{MC_1}| \cdot \cos \widehat{A_1C MC_1} = \frac{\sqrt{15}}{2} \cos \widehat{A_1C MC_1}.$$

$$\cos \widehat{A_1C MC_1} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{3}{5}}; \widehat{A_1C MC_1} = \arccos \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2)  $E \in A_1C, A_1E = EC, F \in C_1M, C_1F = FM$ .

Найти:  $EF$ .

$$\text{Решение: } E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{EF} \left\{ \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right\}, |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: 1)  $\arccos \sqrt{3/5}$ ; 2)  $\sqrt{5}/4$ .

3. Дано:  $A(0, 0, z_0) \in Oz, B(2, 2, 0)$ . Угол между  $AB$  и  $Ox$  равен  $60^\circ$ .

Найти: координаты  $A$ .

Решение:  $\overrightarrow{AB} \{2, 2, -z_0\}$  составляет с  $\vec{n} \{0, 0, 1\}$  угол  $\alpha = 30^\circ$ , т.к.  $\vec{n} \perp (Oxy)$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8 + z_0^2}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ .

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}) = -z_0 = \sqrt{8 + z_0^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} z_0^2 = 8 + z_0^2; \frac{1}{3} z_0^2 = 8, z_0 = \pm 2\sqrt{6}.$$

Значит,  $A(0, 0, 2\sqrt{6})$  или  $A(0, 0, -2\sqrt{6})$ .

Ответ:  $(0, 0, 2\sqrt{6})$  или  $(0, 0, -2\sqrt{6})$ .

4\*. Дано:  $\vec{b} \parallel \vec{a} \{8, -10, 13\}, |\vec{b}| = \sqrt{37}, \vec{b} \cdot \vec{k} < \frac{\pi}{2}$ .

Найти: координаты  $\vec{b}$ .

Решение:  $\vec{a} = \sqrt{64 + 100 + 169} = \sqrt{333}$ ,  $\vec{b} = n\vec{a} \Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{37}{333}} = \pm \frac{1}{3}$ ;  $\vec{k} \{0,$

$0, 1\}$ . Т.к.  $\vec{b} \cdot \vec{k} < \frac{\pi}{2}$ , то  $(\vec{b} \cdot \vec{k}) > 0 \Rightarrow n = \frac{1}{3} \vec{b} \left( \frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{13}{3} \right)$ .

Ответ:  $\vec{b} \left( \frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{13}{3} \right)$ .

## Вариант 4

1. Дано:  $E(1, -2, 2), F(3, 0, 2), K(0, -2, 3), T(2, 4, 1)$ .

1) Найти  $\widehat{EF KT} = \alpha$ .

Решение:  $\overrightarrow{EF} \{2, 2, 0\}, \overrightarrow{KT} \{2, 6, -2\}, |\overrightarrow{EF}| = 2\sqrt{2}, |\overrightarrow{KT}| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ ;

$$(\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{KT}) = 4 + 12 = 16 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{11} \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{4\sqrt{22}} = \frac{4}{\sqrt{22}}; \alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{22}}.$$

2) Найти  $MN$  ( $M \in EF, EM = MF, N \in KT, KN = NT$ ).

Решение:  $M(2, -1, 2), N(1, 1, 2), \overline{MN} \{-1, 2, 0\}, |\overline{MN}| = \sqrt{5}$ .

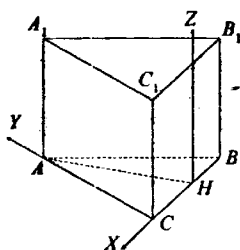
Ответ: 1)  $\arccos \frac{4}{\sqrt{22}}$ ; 2)  $\sqrt{5}$ .

2. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма,  $AB = BC = AC = AA_1$ .

Найти  $\widehat{A_1CAB} = \alpha$ .

Решение: Поместим призму в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ , где  $H \in CB, CH = HB$ . В

$$HXYZ \quad \overline{AB} \left\{ -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right\}, \quad \overline{A_1C} \left\{ \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, -a \right\}.$$



$$|\overline{AB}| = a, |\overline{A_1C}| = a\sqrt{2}; (\overline{AB} \cdot \overline{A_1C}) = -\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = a^2\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}, \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

3. Дано:  $M \in Oxz, P(1, 2, 1), M(x_0, 0, x_0)$ , угол между  $PM$  и  $xOy$  равен  $30^\circ$ . Найти координаты  $M$ .

Решение:  $\overline{MP} \{1 - x_0, 2, 1 - x_0\}$  составляет с  $\vec{n} \{0, 0, 1\}$  угол в  $60^\circ$ , т.к.

$$\vec{n} \perp Oxy, |\overline{MP}| = \sqrt{2(x_0 - 1)^2 + 4}; |\vec{n}| = 1.$$

$$(\overline{MP} \cdot \vec{n}) = 1 - x_0 = \sqrt{2(x_0 - 1)^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}; 4(x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)^2 + 4;$$

$$2(x_0 - 1)^2 = 4; x_0 - 1 = \pm\sqrt{2} \quad x_0 = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ответ:  $M(\sqrt{2} + 1, 0, \sqrt{2} + 1)$  или  $M(1 - \sqrt{2}, 0, 1 - \sqrt{2})$ .

4\*. Дано:  $\vec{c} \{0, -2, 0\}, \vec{b} \{0, 0, 5\}, (\overline{OE} \cdot \vec{b}) = (\overline{OE} \cdot \vec{c}) = 0$ .

Найти: множество точек  $E$ .

Решение: Пусть  $E(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (\overline{OE} \cdot \vec{c}) = -2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0;$

$$(\overline{OE} \cdot \vec{b}) = 5z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0.$$

Значит, множество точек  $E$  точки  $(x, 0, 0)$ , где  $x$  — любое число.

Ответ: точки, лежащие по оси  $Ox$ .

## К—2

### Вариант 1

1. Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $\angle A = 90^\circ, BC = 3, AD = 5, \angle D = 45^\circ, AD$  — ось вращения.

Найти:  $S_{\text{т. вр.}}$ .

Решение:

$$S_{\text{т. вр.}} = 2\pi BA \cdot BC + \pi BA \cdot CD + \pi BA^2 = \pi BA(2BC + CD + BA);$$





$$HD = AD - BC = 2 = CH = AB; CD = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{т. вр}} = 2\pi(6 + 2\sqrt{2} + 2) = 4\pi(4 + \sqrt{2})$$

$$\text{Ответ: } 4\pi(4 + \sqrt{2}).$$

2. Дано: шар  $(O, R)$ , в шар вписан конус, угол между образующей и основанием  $\varphi$ .

1) Найти:  $S_{\text{бок. кон.}}$

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса  $ABC$ . В

$$\triangle ADB \quad AD = AB \cdot \cos \varphi, \quad AB = BC. \quad S = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R};$$

$$4R \quad S = 2AB^2 \cos \varphi, \quad S = \frac{1}{2} AB^2 \sin 2\varphi = AB^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\Rightarrow 4R \quad AB^2 \sin \varphi \cos \varphi = 2AB^2 \cos \varphi; \quad R = \frac{AB}{2 \sin \varphi}; \quad AB = 2R \sin \varphi.$$

$$S_{\text{бок. кон.}} = \pi \cdot AB \cdot AD = \pi \cdot 2 \sin \varphi \cdot 2R \sin \varphi \cos \varphi = 4\pi R^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

2)  $\varphi = 30^\circ$  Найти наибольшую площадь сечения конуса, проходящего через вершину.

Решение. Угол при вершине в осевом сечении  $120^\circ$ .

$$S_{\text{наиб}} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin \varphi; \quad \sin \varphi_{\text{наиб}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow S_{\text{наиб}} = \frac{1}{2} AB^2 = 2R^2 \sin^2 \varphi = \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Ответ: } 1) 4\pi R^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi; \quad 2) \frac{R^2}{2}.$$

3\* Дано: сфера  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \cap Ox = A$ , сфера  $\cap Oy = B$ , сфера  $\cap Oz = C$ ,  $A(x_1, 0, 0)$ ,  $x_1 > 0$ ,  $B(0, y_1, 0)$ ,  $y_1 > 0$ ,  $C(0, 0, z_1)$ ,  $z_1 > 0$ .  
Найти угол  $\varphi$  между  $(ABC)$  и плоскостью  $z = 0$ .

Решение  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $y_1 = \sqrt{3}$ ,  $z_1 = 3$ . Уравнение  $(ABC)$ :

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \quad \begin{cases} \sqrt{3}P + S = 0 \\ \sqrt{3}Q + S = 0 \\ 3R + S = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} P = -\frac{S}{\sqrt{3}} \\ Q = -\frac{S}{\sqrt{3}} \\ R = -\frac{S}{3} \end{cases}.$$

$$ABC \quad \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0; \quad \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 1z - 3 = 0;$$

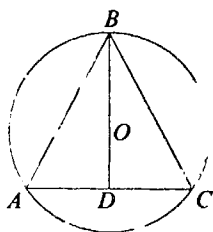
$$\vec{n} \{ \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 \} \perp (ABC); \quad \vec{n}_2 \{ 0, 0, 1 \} \perp \text{плоскости } z = 0.$$

Искомый угол между  $ABC$  и  $z = 0$  равен углу между  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

$$|\vec{n}| = \sqrt{3+3+1} = \sqrt{7}; \quad |\vec{n}_2| = 1, \quad (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 1 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \varphi;$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{7}}.$$



## Вариант 2

1. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $\angle AO_1B = 90^\circ$ ,  $ABCD$  — секущая плоскость,  $ABCD \parallel O_1O_2$ ,  $AC = 10$ , расстояние между  $O_1O_2$  и  $AC$  равно 4.

Найти:  $S_{\text{бок}}$  цилиндра.

Решение: Расстояние между  $O_1O_2$  и  $AC$  равно  $O_1H$  — высоте  $\triangle O_1AB$ .

Из прямоугольного равнобедренного  $\triangle AO_1B$ , где  $O_1H = 4$ ,  $O_1A = 4\sqrt{2} = O_1B$ ,  $AB = 8$ .

Из прямоугольного  $\triangle ABC$ :  $AC^2 - AB^2 = BC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow BC = 6$ .

$$S_{\text{бок}} = 2\pi O_1A \cdot BC = 2\pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 = 48\pi\sqrt{2}.$$

Ответ:  $48\pi\sqrt{2}$

2. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида, боковые грани наклонены к основанию под углом  $\beta = 60^\circ$ . В  $DABC$  вписан шар радиуса  $R$ .

1) Найти  $S_{\text{бок}}(DABC)$ .

Решение: В прямоугольном  $\triangle MHD$ :

$$\angle MDH = 90^\circ - \beta = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} MD;$$

$$DH = MD \frac{\sqrt{3}}{2}; \triangle MHD \sim \triangle OPD \text{ (по двум углам); } OD = DH - R = MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R.$$

$$\text{Из подобия } \frac{OP}{DO} = \frac{MH}{MD}; \frac{R}{MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R} = \frac{1}{2}; 2R = MD \frac{\sqrt{3}}{2} - R;$$

$$MD = \frac{6R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}R \Rightarrow MH = \sqrt{3}R \Rightarrow MC = 3\sqrt{3}R \text{ (т.к. } H \text{ — точка пересечения медиан); } \frac{\sqrt{3}}{2} AC = MC; AC = \frac{2}{\sqrt{3}} MC = 6R = AB.$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot MC = 3R \cdot 3\sqrt{3}R = 9R^2\sqrt{3}, DH = MD \frac{\sqrt{3}}{2} = 3R.$$

$$S_{\text{бок}} = 3 \cdot AB \cdot DM \cdot \frac{1}{2} = 18R \cdot \sqrt{3}R = 18R^2\sqrt{3}.$$

2) Найти длину окружности, по которой шар касается боковых граней.

Решение:

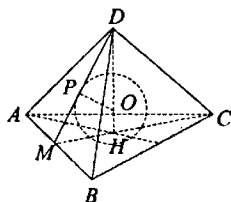
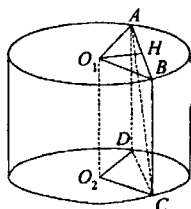
$$\text{Опустим перпендикуляр из т. } P \text{ на } DH, \text{ получим } r = PO \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow l = 2\pi r = \pi R \sqrt{3}.$$

Ответ:  $18R^2\sqrt{3}$ ; 2)  $\pi R \sqrt{3}$ .

3\*. Дано:  $M(-7, 3, -4)$ , сфера  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$ ,  $H \in$  сфере,  $MH$  — касательная.

Найти:  $MH$ .



Решение: Уравнение сферы  $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + z^2 - 32 = 0$   
или  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (4\sqrt{2})^2$ .

Значит, центр сферы точка  $O(1, 2, 0)$ , а радиус  $OH = R = 4\sqrt{2}$ .

$OH \perp MH$ , т.к.  $MH$  — касательная.  $\overrightarrow{OM}(-8, 1, -4)$ ,  $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9$ .

$\triangle OHM$  — прямоугольный  $\Rightarrow MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$ .

Ответ: 7.

### Вариант 3

1. Дано:  $ABCD$  — ромб,  $AB = a$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $HC \perp AC$ ,  
 $HC$  — ось вращения.

Найти:  $S_{\text{т. вр.}}$ .

Решение: В ромбе  $BD = 2BM = a$ ,  $AC = 2AM = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\text{т. вр.}} = \pi \cdot AB(BH + AC) + \pi \cdot AD(DK + AC) + \pi \cdot BH \cdot BC + \pi \cdot DK \cdot DC =$

$$= 2\pi a \left( a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\pi(a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}) = 4\pi a^2\sqrt{3}.$$

Ответ:  $4\pi a^2\sqrt{3}$ .

2. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $DH$  — высота,  
 $AB = a$ ,  $\angle DAH = \alpha$ ,  $DABC$  вписана в сферу.

1) Найти  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение:  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ;

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}; DH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha; S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$r$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

$$r = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$$

Возможны 3 случая:

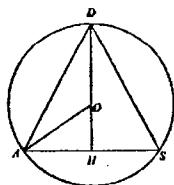
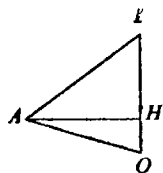
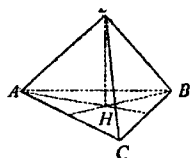
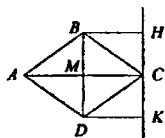
$$1) \angle \alpha = 45^\circ \Rightarrow R = AH = HD = \frac{\sqrt{3}}{3} a \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi a^2.$$

$$2) \alpha < 45^\circ. OH = R - HD = R - \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha.$$

Из прямоугольного  $\triangle AHO$ :

$$AO^2 - OH^2 = AH^2 = R^2 - \left( R - \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha \right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$R^2 - R^2 + 2R \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha - \frac{a^2}{3} \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{3};$$



$$2R \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{3} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1); R = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{12} \cdot \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$$

3)  $\alpha > 45^\circ$ .

Достроим  $\triangle ADH$  до  $\triangle ADS$ , вписанного в окружность.

$$AS = 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; DH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha; AD = \frac{a\sqrt{3}}{3 \cos \alpha};$$

$$R = \frac{AD^2 \cdot AS}{4S} = \frac{AD^2 \cdot AS}{4 \cdot \frac{1}{2} AS \cdot DH} = \frac{AD^2}{2DH} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3 \cos^2 \alpha \cdot 2a \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3 \cos^4 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi a^2}{3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{4\pi a^2}{3 \sin^2 2\alpha}.$$

Эта формула выражает ту же зависимость, что и формула в 2) и обобщает 1).

2)  $\alpha = 30^\circ$ .

Найти  $\angle OAH$  (из случая 2).

Решение: Вернемся к случаю 2. В  $\triangle AHD$   $\angle ADH = 60^\circ = \angle DAO$  (т.к.  $\triangle DOA$  — равнобедренный,  $DO=OA=R$ )  $\Rightarrow \triangle DOA$  — равносторонний  $\Rightarrow \angle OAD = 60^\circ$ .

Искомый  $\angle OAH = \angle OAD - \alpha = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ .

Ответ: 1)  $\frac{4\pi a^2}{3 \sin^2 \alpha}$ ; 2)  $30^\circ$ .

3\*. Дано: сфера  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5 \cap Oy = A(0, y, 0), y < 0, M(1, 1, 0), B \in$  сфере,  $MB \parallel Oz$ .

Найти: угол  $\alpha$  между  $AB$  и  $(Oxy)$ .

Решение: Т.к.  $\overline{MB} \parallel Oz \Rightarrow \overline{MB}(0, 0, z) \Rightarrow B(1, 1, z)$ . Координаты  $A$  удовлетворяют уравнению сферы  $\Rightarrow y = -2, A(0, -2, 0)$ .

$B$  лежит на сфере  $\Rightarrow 0 + 1 + z^2 = 5, z = \pm 2$

$\Rightarrow B(1, 1, 2)$  или  $B(1, 1, -2)$ ;  $\overline{AB}\{1, 3, 2\}$  или  $\overline{AB}\{1, 3, -2\}$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

Найдем угол  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  между  $\overline{AB}$  и  $\vec{n}\{0, 0, \pm 1\} \perp OXY$ .

$$(\overline{AB}, \vec{n}) = 2 = |\overline{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \arcsin \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Ответ:  $\arcsin \frac{2}{\sqrt{14}}$ .

## Вариант 4

1. Дано:

конус,  $DKM$  — сечение,  $KM = 3$ ,  $\angle MHK = 120^\circ$ ,  $DH$  — высота,  $AB$  — диаметр основания,  $AB \perp KM$ ,  $AB \cap KM = L$ ,  $\angle DLH = 45^\circ$ .

Найти  $S_{\text{бок. конуса}}$ .

Решение:

Из равнобедренного  $\triangle KHM$ :

$$KM^2 = 2HK^2(1 - \cos \angle KHM);$$

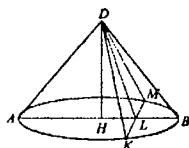
$$9 = 2R^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right); R = \sqrt{3}; \angle HKL = 30^\circ \Rightarrow HL = \frac{1}{2} HK = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Из прямоугольного равнобедренного } \triangle DHL: DH = HL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Из } \triangle DHK \quad DK = \sqrt{DH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + 3} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi DK \cdot HK = \pi \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\pi\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi\sqrt{5}}{2}.$$



2. Дано:

$MABCD$  — правильная пирамида, в  $MABCD$  вписан шар,  $O$  — центр шара,  $MO = a$ ,  $K \in DC$ ,  $DK = KC$ ,  $\angle MKN = 60^\circ$ .

1) Найти:  $S_{\text{бок.}}(MABCD)$ .

Решение:

Рассмотрим осевое сечение пирамиды, параллельное  $AD$ .

$\triangle MOF \sim \triangle MKN$  (по двум углам), а из  $\triangle MNK$   $2HK = MK$ .

$$\text{Из подобия } \frac{MO}{OF} = \frac{MK}{HK} = 2 \Rightarrow OF = \frac{a}{2} = OH \Rightarrow MH = \frac{3a}{2} = OM + OH;$$

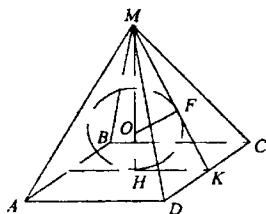
$$HK = MH \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = KC = KD \Rightarrow DC = 2KC = a\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \frac{1}{2} MK \cdot DC = 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{3} = 6a^2$$

2) Найти  $S_{\text{сфера}}$ , по которому сфера касается пирамиды.

$$\text{Решение: } r = OF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\text{сфера}} = \pi r^2 = \frac{3a^2\pi}{16}.$$

$$\text{Ответ: 1) } 6a^2; 2) \frac{3a^2\pi}{16}.$$



3\*. Дано:  $M(4, 2, 8)$ ,  $\alpha \parallel Oz$ ,  $M \in \alpha$ , угол между  $\alpha$  и  $Oxz$ ,  $Ozy = 45^\circ$ , сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap \alpha =$  окружность.

Найти длину окружности  $l$ .

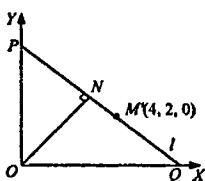
Решение: Рассмотрим плоскость  $XOY$ . Плоскость  $\alpha$  — пересекает ее по прямой, проходящей через  $O$  под углом  $45^\circ$  к  $OX$  и  $OY$ . Расстояние от  $O$  до прямой есть расстояние от центра сферы до центра окружности в сечении.

Уравнение прямой  $l$ :  $x + y - S = 0$ ,  $M' \in l \Rightarrow 6 - S = 0 \Rightarrow S = 6, \Rightarrow Q(6, 0, 0) \Rightarrow$

$ON = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}6\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ , тогда радиус окружности в сечении:

$\sqrt{25 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7} \Rightarrow l = 2\pi\sqrt{7}$ .

Ответ:  $2\pi\sqrt{7}$ .



### К—3

#### Вариант 1

1. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $DH$  — высота,  $BM$  — медиана  $\triangle ABC$ ,  $\angle DMH = 60^\circ$ ,  $HK \perp DM$ ,  $HK = \sqrt{3}$ .

Найти:  $V(DABC)$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle MKN$ :  $MN = HK \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4$ .

Из прямоугольного  $\triangle MHD$ :  $DH = MN \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$ ,

$H$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC \Rightarrow BH : MH = 2 : 1 \Rightarrow MB = 3MH = 12$ .

Из  $\triangle AMB$ :  $AB = \frac{MB}{\sin 60^\circ} = \frac{12 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3} = AC$ .

$V(ABC) = \frac{1}{3}DH \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = \frac{32 \cdot 12}{2} = 32 \cdot 6 = 192$ .

Ответ: 192.

2. Дано: цилиндр,  $O_1O_2$  — ось,  $ABCD$  — сечение,  $ABCD \parallel O_1O_2$ ,  $\angle AO_1B = 2\alpha$ , угол между  $AC$  и  $O_1O_2 = \varphi$ . Расстояние от  $AC$  до  $O_1O_2$  равно  $d$ .

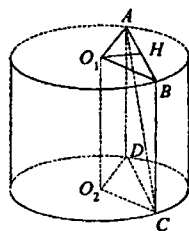
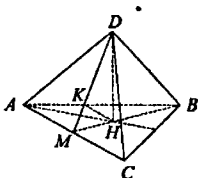
Найти:  $V_{\text{цилиндра}}$ .

Решение:

Расстояние между  $O_1O_2$  и  $AC$  равно  $O_1H$  — высоте  $\triangle AO_1B$ . А угол  $\varphi$  между  $AC$  и  $O_1O_2$  равен  $\angle ACB$ .

Из  $\triangle O_1HA$ :  $AN = O_1H \cdot \operatorname{tg} \alpha = d \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow AB = 2AN = 2d \operatorname{tg} \alpha$ .

Из  $\triangle ABC$ :  $L = BC = \frac{AB}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}$ . Из  $\triangle O_1HA$ :  $O_1A = R = \frac{O_1H}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha}$ .



$$\Rightarrow V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 L = \pi \cdot \frac{d^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{2d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2\pi d^3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

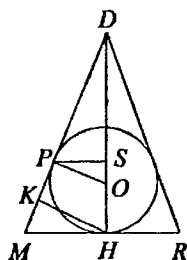
Ответ:  $\frac{2\pi d^3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$ .

3\*. Дано:  $DABC$  — правильная пирамида,  $DH$  — высота,  $BM$  — медиана  $\triangle ABC$ ,  $\angle DMH = 60^\circ$ ,  $HK \perp DM$ ,  $HK = 2\sqrt{3}$ , в  $DABC$  вписан шар, плоскость  $\alpha$  проходит через точки касания боковой поверхности.

Найти объем меньшей части шара.

Решение: Рассмотрим осевое сечение  $DMR$ . Построим прямоугольный  $\triangle MHD$  до равнобедренного  $\triangle MDR$ :

$$MD = DR = \frac{MH}{\cos 60^\circ} = 8 = MR.$$



В  $\triangle MDR$  вписан большой круг шара,  $MR = 2MH = 8$ ,  $DH = 4\sqrt{3}$ .

$$S(\triangle MDR) = \frac{1}{2} DH \cdot MR = 16\sqrt{3},$$

$$r = PO = OH = MH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = MH \cdot \operatorname{tg} \angle OMH = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{Из } \triangle POS: SO = \frac{1}{2} PO = \frac{2\sqrt{3}}{3}, H_{\text{сеч}} = r - SO = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$V_{\text{сеч}} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3}{9} \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{40\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Ответ:  $\frac{40\pi\sqrt{3}}{27}$ .

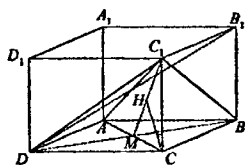
## Вариант 2

1. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма,  $AC \cap BD = M$ ,  $\angle C_1 MC = 45^\circ$ ,  $CH \perp C_1 M$ .

$$CH = 4\sqrt{2}.$$

Найти  $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ .

Решение: В  $\triangle C_1 CM$ :  $CH = C_1 H = HM = 4\sqrt{2} \Rightarrow CM = C_1 C = 8$ .



$$\text{В } \triangle CMD \text{ } CM = DM = 8 = \frac{1}{2} AC. S(ABCD) = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 256 = 128.$$

$$V_{\text{призмы}} = C_1 C \cdot S(ABCD) = 8 \cdot 128 = 1024.$$

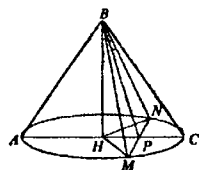
Ответ: 1024.

2. Дано: конус,  $B$  — вершина,  $BMN$  — сечение,  $AC$  — диаметр основания,  $AC \perp MN$ ,  $BH$  — высота,  $\angle MHN = 2\alpha$ ,  $\angle BPH = \varphi$ ,  $AH = R$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение: Из  $\triangle HPN$ :  $HP = HN \cdot \cos \alpha = R \cos \alpha$ ,

Из  $\triangle BHP$ :  $BH = HP \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$



$$V_{\text{конуса}} = \pi \cdot \frac{BH}{3} \cdot R^2 = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi R^3}{3} \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$$

3\*. Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма,  $AC \cap BD = M$ ,  $\angle C_1 M C = 45^\circ$ ,  $CH \perp C_1 M$ .  $CH = 4\sqrt{2}$ , вокруг призмы описан шар,  $K \in DB_1$ ,  $DK \cdot KB_1 = 3 : 1$ ,  $\alpha \perp DB_1$ ,  $K \in \alpha$ .

Найти:  $V_{\text{сегмента (меньшего)}}$ .

Решение:

$$d_{\text{сферы}} = DB_1 = \sqrt{BD^2 + C_1 C^2} = \sqrt{256 + 64} = 8\sqrt{5} = 2R \Rightarrow R = 4\sqrt{5},$$

$$KB_1 = 2\sqrt{5}; H_{\text{сегмента}} = R - KB_1 = 2\sqrt{5}.$$

$$V_{\text{сегмента}} = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right) = 20\pi \left( 4\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{200\pi\sqrt{5}}{3}.$$

### Вариант 3

1. Дано:  $PABCD$  — правильная пирамида,  $PH$  — высота,  $MH \perp AD$ ,  $\angle PMH = 60^\circ$ ,  $K \in HP$ ,  $HK = KP$ ,  $LK \perp MP$ ,  $LK = 2$ .

Найти:  $V(PABCD)$ .

Решение: Из прямоугольного  $\triangle PLK$ :  $PK = 2LK = 4 \Rightarrow PH = 8$ . Из прямоугольного  $\triangle PHM$ :

$$MH = PH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

$$V(PABCD) = PH \cdot \frac{1}{3} AB^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{256}{3} = \frac{2048}{9}.$$

2. Дано: цилиндр,  $O_1 O_2$  — ось,  $ABCD$  — сечение,  $ABCD \parallel O_1 O_2$ ,  $\angle A O_1 B = \varphi$ ,  $AC = 2m$ , расстояние между  $O_1 O_2$  и  $AC$  равно  $m$ .

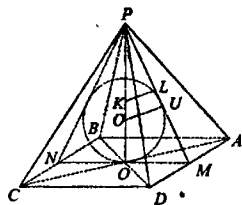
Найти:  $V_{\text{цм.}}$ .

Решение:  $O_1 H = m$ . Из  $\triangle O_1 H A$ :  $AH = O_1 H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = m \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ;

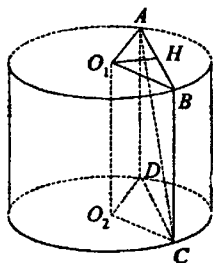
$$O_1 A = \frac{O_1 H}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{m}{\cos \frac{\varphi}{2}}; AB = 2AH = 2m \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle ABC: BC = L = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4m^2 - 4m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = 2m \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$V_{\text{цм.}} = \pi BC \cdot O_1 A^2 = \pi \cdot 2m \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{m^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} =$$



$$\text{Ответ: } \frac{2048}{9}.$$





$$= 2\pi m^3 \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} = 2\pi m^3 \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

3\*. Дано:  $PABCD$  — правильная пирамида,  $PH$  — высота,  $MH \perp AD$ ,  $\angle PMH = 60^\circ$ ,  $K \in HP$ ,  $HK = KP$ ,  $LK \perp MP$ ,  $LK = 2$ . В  $PABCD$  вписан шар. Точки касания образуют плоскость  $\alpha \parallel ABCD$ ,  $\alpha$  отсекает сегмент от шара. Найти:  $V_{\text{меньшего сегмента}}$ .

Решение:  $PH = 8$ ;  $MN = AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle MHP$ :

$$MP = 2MH = MN = \frac{16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \triangle MNP \text{ — равносторонний}$$

$$\Rightarrow PO : OH = 2 : 1 \Rightarrow OH = R = \frac{PH}{3} = \frac{8}{3}; h = HO \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{\text{сегм.}} = \pi h^2 \cdot \left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi \cdot \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi \cdot 16}{9} \cdot \frac{20}{9} = \frac{320\pi}{81} = \frac{320\pi}{81}.$$

Ответ:  $320\pi/81$ .

### Вариант 4

1. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма,  $A_1BC$  — сечение,  $M \in BC$ ,  $BM = MC$ ,  $\angle A_1MA = 45^\circ$ ,  $AK \perp A_1M$ ,  $K \in A_1M$ ,  $AK = 2$ .

Найти:  $V(ABCA_1B_1C_1)$ .

Решение: В прямоугольном равнобедренном  $\triangle A_1AM$ :  $AK = A_1K = KM = 2 \Rightarrow S(AA_1M) = 1/2(AK) \cdot A_1M = 4$ . Достроим  $\triangle A_1AB$  до квадрата  $AA_1LM$ .  $S(AA_1LM) = 2S(AA_1M) = 8$ .

$$A_1A = AM = 2\sqrt{2}. \text{ Из } \triangle ABC: \frac{\sqrt{3}}{2} BC = AM \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}} AM = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$V_{\text{призмы}} = AA_1 \cdot AM \cdot \frac{1}{2} BC = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ:  $(16\sqrt{6})/3$ .

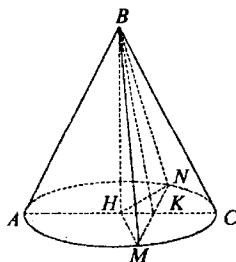
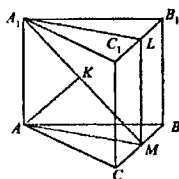
2. Дано: конус,  $B$  — вершина,  $BH$  — высота,  $BMN$  — сечение,  $\angle MHN = \alpha$ ,  $\angle BKH = \varphi$ ,  $BH = h$ .

Найти:  $V_{\text{конуса}}$ .

Решение:  $AC$  — диаметр,  $AC \cap MN = K$ .

$$\text{Из } \triangle BHK: HK = \frac{BH}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\text{Из } \triangle HKM: HM = \frac{HK}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{\operatorname{tg} \varphi \cos \frac{\alpha}{2}} = R.$$



$$V_{\text{конуса}} = \frac{\pi h}{3} R^2 = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot \frac{h^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\pi h^3}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi}. \text{ Ответ: } \frac{\pi h^3}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

3\*. Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма,  $A_1BC$  — сечение,  $M \in BC$ ,  $BM=MC$ ,  $\angle A_1MA = 45^\circ$ ,  $AK \perp A_1M$ ,  $K \in A_1M$ ,  $AK = 2$ , вокруг призмы описан шар, плоскость  $BB_1C_1C$  — секущая.

Найти  $V$  меньшего сегмента.

Решение: Радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$   $r = \frac{2AM}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

$\frac{h}{2} = \frac{AA_1}{2} = \sqrt{2}$  образует с  $r$  прямоугольный треугольник, гипотенуза которого  $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{32}{9} + 2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ .

Расстояние от центра сферы до  $BB_1C_1C$ :  $R - H = \frac{AM}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ;

$$\frac{5\sqrt{2}}{3} - H = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow H = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right) = \pi \cdot 2 \cdot \left( \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

## К—4

### Вариант 1

Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $MH$  — высота,  $AB = 6$ ,  $MA = 5$ .

1) Найти  $S_{\text{бок.}}(MABCD)$ .

Решение:  $S(AMB) = \sqrt{p(p-MA)^2(p-AB)}$ ;

$$p = \frac{5+5+6}{2} = 8.$$

$$S(AMB) = \sqrt{8(8-5)^2(8-6)} = 4 \cdot 3 = 12.$$

$$S_{\text{бок.}} = 4S(AMB) = 4 \cdot 12 = 48.$$

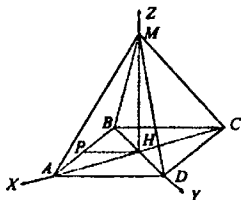
Ответ: 48.

2) Найти  $V(MABCD)$ .

Решение:  $AH = AB \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ .

$$\text{Из } \triangle AHM: MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}.$$

$$V(MABCD) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot 36 = 12\sqrt{7}. \quad \text{Ответ: } 12\sqrt{7}.$$



3)  $P \in AB, AP = PB$ .

Найти  $\angle MPH$ .

Решение:  $PH = \frac{AD}{2} = 3 \Rightarrow$  из  $\triangle MHP$ :  $MP = \sqrt{PH^2 + MH^2} = \sqrt{9 + 7} = 4$

$$\Rightarrow \cos \angle MPH = \frac{PH}{MP} = \frac{3}{4} \Rightarrow \angle MPH = \arccos \frac{3}{4}. \quad \text{Ответ: } \arccos \frac{3}{4}$$

4) Найти  $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AM}$ .

Решение:  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ . Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .  $\overrightarrow{AM} \{-3\sqrt{2}, 0, \sqrt{7}\}$ ,  $\overrightarrow{AC} \{-6\sqrt{2}, 0, 0\}$ ,

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}) = 18 \cdot 2 = 36. \quad \text{Ответ: } 36.$$

5) Вокруг  $MABC$  описан шар.

Найти  $S_{\text{сферы}}$ .

Решение: Вокруг  $\triangle AMC$  описан большой круг сферы.  $AC = 6\sqrt{2}$ ,  $MH = \sqrt{7}$ ,  $AM = MC = 5 \Rightarrow R = \frac{AM \cdot AC \cdot MC}{4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot MH} = \frac{5 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 5}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}} = \frac{25}{2\sqrt{7}} = \frac{25\sqrt{7}}{14}$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{625}{28} = \frac{\pi}{7} \cdot 625. \quad \text{Ответ: } \frac{625}{7} \pi$$

6)\* Найти угол между  $BD$  и  $(DMC)$ .

Решение: Координаты точек:  $D(0, 3\sqrt{2}, 0)$ ,  $C(-3\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $M(0, 0, \sqrt{7})$ ,  $\overrightarrow{DC} \{-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 0\}$ ,  $\overrightarrow{CM} \{3\sqrt{2}, 0, \sqrt{7}\}$ ,  $\vec{n}(x_0, y_0, z_0) \perp (DMC)$ .

$$\begin{cases} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC}) = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{CM}) = 0 \end{cases} \begin{cases} -3\sqrt{2}x_0 - 3\sqrt{2}y_0 = 0 \\ 3\sqrt{2}x_0 + \sqrt{7}z_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = -y_0 \\ z_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x_0 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n} \left( -1, 1, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right)$ ,  $\overrightarrow{BD}(0, 6\sqrt{2}, 0)$ . Искомый угол  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ , где  $\beta$  — угол

между  $\vec{n}$  и  $\overrightarrow{BD}$ .  $|\vec{n}| = \sqrt{2 + \frac{9 \cdot 2}{7}} = \sqrt{\frac{32}{7}} = 4\sqrt{\frac{2}{7}}$ ;  $|\overrightarrow{BD}| = 6\sqrt{2}$ ;

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}) = 6\sqrt{2} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \beta; \cos \beta = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{2}{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}};$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{\sqrt{14}}{8} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ т.е. } \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

## Вариант 2

Дано:  $MAVC$  — правильная пирамида,  $MH$  — высота,  $AB = 4\sqrt{3}$ ,  $AM = 5$ .

1) Найти:  $S_{\text{бок}}$ .

Решение:  $\triangle AMB$ :  $AM = MB = 5$ ;  $p = 5 + 2\sqrt{3}$ .

$$S(AMB) = \sqrt{(5+2\sqrt{3})(2\sqrt{3})^2(5-2\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\sqrt{25-12} = 2\sqrt{39}.$$

$$S_{\text{бок}} = 3S(AMB) = 6\sqrt{39}.$$

Ответ:  $6\sqrt{39}$ .

2) Найти  $V(MABC)$ .

$$\text{Решение: } AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4.$$

$$\text{Из } \triangle AHM \Rightarrow HM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3. S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{48}{4} \sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

$$V(MABC) = \frac{1}{3} MH \cdot S(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 12\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ:  $12\sqrt{3}$ .

3)  $\angle MAH = ?$

$$\text{Решение: } \operatorname{tg} \angle MAH = \frac{MH}{AH} = \frac{3}{4}; \angle MAH = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ .

$$4) \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \overrightarrow{EA} = ? \quad (E \in BC, BE = EC).$$

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .  $M(0, 0, 3)$ ;

$$A(0, 4, 0); B(-2\sqrt{3}, -2, 0), C(2\sqrt{3}, -2, 0) \Rightarrow E(0, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{AE} \{0, -6, 0\}, \overrightarrow{MB} \{-2\sqrt{3}, -2, -3\}, \overrightarrow{MC} \{2\sqrt{3}, -2, -3\}.$$

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2} \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AE} = -6 - 6 = -12.$$

Ответ:  $-12$ .

5) В  $MABC$  вписан шар.

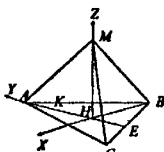
Найти  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: Большой круг шара вписан в  $\triangle KME$ , где  $K \in AH$ ,  $AK = KH$ ,  $KE = 4$ ,  $ME = \sqrt{HM^2 + HE^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = MK$ .

$$\frac{1}{2} P \cdot r = S(KME) = \frac{1}{2} KE \cdot MH = 6 \Rightarrow r = \frac{12}{2\sqrt{13} + 4}$$

$$\Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left( \frac{12}{2\sqrt{13} + 4} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{6}{\sqrt{13} + 2} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 6^3 \left( \frac{\sqrt{13} - 2}{9} \right)^3 = \frac{32\pi}{81} (\sqrt{13} - 2)^3.$$

$$\text{Ответ: } \frac{32\pi}{81} (\sqrt{13} - 2)^3.$$



6)\* Найдите угол  $\alpha$  между  $AB$  и  $(AMC)$ .

Решение: Проведем  $BL \perp (AMC)$ ,  $ML \cap BH = T$ , очевидно,  $\angle BAL$  — искомый. Итак,

$$S(MTB) = \frac{1}{2} MH \cdot BT = BL \cdot MT \Rightarrow BL = \frac{MH \cdot BT}{MT}$$

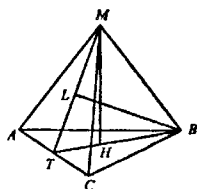
$$MH = 3, BT = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 6;$$

$$MT = \sqrt{MH^2 + HT^2} = \sqrt{MH^2 + \frac{BT^2}{9}} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \Rightarrow BL = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Тогда, } \sin \angle BAL = \frac{BL}{AB} = \frac{18}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{2\sqrt{39}} = \frac{3\sqrt{39}}{26},$$

$$\text{т.е. } \angle BAL = \arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}.$$



### Вариант 3

Дано:  $MABCD$  — правильная пирамида,  $AM = 8$ ,  $MH$  — высота,  $\angle MAN = 60^\circ$ .

1) Найдите  $S_{\text{бок}}$ .

Решение:  $\triangle AMB$ :  $AM = MB = 8$ ,  $AB = 4\sqrt{2}$ ;

$$p = 8 + 2\sqrt{2}.$$

$$S(AMB) = \sqrt{p(p-AB)(p-AM)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{64-8} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14} = 8\sqrt{7}. S_{\text{бок}} = 4S(AMB) = 32\sqrt{7}.$$

Ответ:  $32\sqrt{7}$ .

2) Найдите  $V(MABCD)$ .

Решение: Из  $\triangle AHM$ :  $AH = \frac{AM}{2} = 4$ ,  $MH = AM \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ ;

$$AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{2}. V(MABCD) = \frac{MH}{3} \cdot S(ABCD) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 16 \cdot 2 = \frac{128\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{128\sqrt{3}}{3}.$$

3) Найдите угол между  $(AMD)$  и  $(BMC)$ .

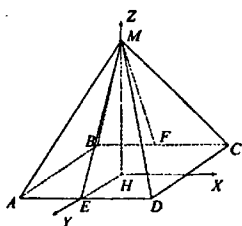
Решение:

Искомый угол равен  $\angle EMF$ , где  $E \in AD$ ,  $AE = ED$ ,  $F \in BC$ ,  $BF = FC$ . В

$$\triangle EMF: EM = MF = \sqrt{EH^2 + HM^2} = \sqrt{8 + 48} = 2\sqrt{14}.$$

По теореме косинусов:  $EF^2 = 2EM^2(1 - \cos \angle EMF)$ ;

$$32 = 2 \cdot 56(1 - \cos \angle EMF); 1 - \cos \angle EMF = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}; \cos \angle EMF = \frac{5}{7},$$



$$\angle EMF = \arccos \frac{5}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{5}{7}.$$

4) Найдите  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{ME}$  ( $E \in DC$ ,  $DE = EC$ ).

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $HXYZ$ .

В ней  $M(0, 0, 4\sqrt{3})$ ,  $A(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ ,  $C(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0)$ ,  $D(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0) \Rightarrow E(2\sqrt{2}, 0, 0)$ .

$$\overrightarrow{MA} \{ -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\sqrt{3} \}, \overrightarrow{MC} \{ 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -4\sqrt{3} \},$$

$$\overrightarrow{ME} (2\sqrt{2}, 0, -4\sqrt{3}). \vec{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = (0, 0, -4\sqrt{3}) = \overrightarrow{MH}$$

$$(\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME}) = 16 \cdot 3 = 48.$$

Ответ: 48.

5) Вокруг  $MABCD$  описан шар.

Найдите  $V_{\text{шара}}$ .

Решение: Вокруг  $\triangle AMC$  описан в большой круг шара;  $AC=8$ ,  $AM=MC=8$ ;

$$S(AMC) = AM^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}; R = \frac{AM \cdot MC \cdot AC}{4S} = \frac{8^3}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{8^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{4 \cdot 8^3 \pi \cdot \sqrt{3}}{27} = \frac{2048\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2048\sqrt{3}}{27}.$$

6)\* Найдите угол  $\alpha$  между  $AM$  и  $(DMC)$ .

$$\overrightarrow{AM} \{ 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\sqrt{3} \}; \overrightarrow{DM} \{ -2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\sqrt{3} \};$$

$$\overrightarrow{CM} \{ -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3} \}; \vec{n}(x_0, y_0, z_0) \perp (DMC) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{DM}) &= -2\sqrt{2}x_0 - 2\sqrt{2}y_0 + 4\sqrt{3}z_0 = 0 \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{CM}) &= -2\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0 + 4\sqrt{3}z_0 = 0 \end{aligned} \right\}; \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}z_0 = \sqrt{6}z_0 \end{cases}$$

$$\vec{n}(\sqrt{6}, 0, 1) \perp (DMC).$$

Искомый угол  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ , где  $\beta$  — угол между  $\vec{n}$  и  $\overrightarrow{AM}$ .

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{8+8+48} = 8; |\vec{n}| = \sqrt{6+1} = \sqrt{7};$$

$$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} = 8\sqrt{7} \cos \beta;$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \beta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ т.е. } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

# Вариант 4

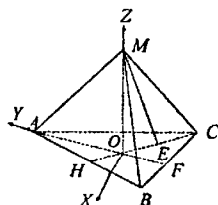
Дано:  $MABC$  — правильная пирамида,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  
 $MO$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $\angle MHO = 60^\circ$ .

1) Найти  $S_{бок}$ .

Решение:  $AC = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ ;  $HO = \frac{1}{3} AC = 1$ , т.к.  $O$  —

центр  $\triangle ABC$ . В  $\triangle HOM$ :  $HM = 2HO = 2$ ,

$$MO = \sqrt{3} \Rightarrow S_{бок} = 3 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot HM = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3}.$$



Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

2) Найти  $V(MABC)$ .

$$\text{Решение: } S(ABC) = AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$V(MABC) = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3.$$

Ответ: 3.

3) Найти  $\angle MAO$ .

$$\text{Решение: } AO = 2HO = 2, MO = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{Из } \triangle MAO: \operatorname{tg} \angle MAO = \frac{MO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \angle MAO = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Найти  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{OM}$ .

Решение: Введем прямоугольную систему координат  $OXYZ$ .

В ней  $M(0, 0, \sqrt{3})$ ,  $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $B(\sqrt{3}, -1, 0)$ ;

$$\overrightarrow{MC} \{ -\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3} \}, \overrightarrow{MB} \{ \sqrt{3}, -1, -\sqrt{3} \}.$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = (0, -1, -\sqrt{3}); \overrightarrow{OM} (0, 0, \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{OM} = -3.$$

Ответ: -3.

5) В  $MABC$  вписана сфера.

Найти  $S_{сферы}$ .

Решение: Построим  $\triangle HOM$  до равнобедренного  $\triangle HME$ , в который вписан большой круг сферы.

$$S(HME) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}; P(HME) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{P} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{сферы} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{4\pi}{3}.$$

6)\* Найти угол  $\alpha$  между  $MF$  и  $(AMC)$ ,  $F \in BC$ ,  $BF = FC$ .

$$\text{Решение: } F(0, -1, 0), \overrightarrow{MF} \{ 0, -1, -\sqrt{3} \}, \overrightarrow{AC} \{ -\sqrt{3}, -3, 0 \},$$

$$\overrightarrow{AM} \{0, -2, \sqrt{3}\}, \vec{n}(x_0, y_0, z_0); \vec{n} \perp (AMC) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0: & \begin{cases} -\sqrt{3}x_0 - 3y_0 = 0 \\ -2y_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = -\sqrt{3}y_0 \\ z_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}y_0 \end{cases}; \vec{n} \left\{ \sqrt{3}, -1, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}, \\ (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}) = 0: & \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{MF}| = 2; |\vec{n}| = \sqrt{3+1+\frac{12}{9}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ , где  $\beta$  — угол между  $\overrightarrow{MF}$  и  $\vec{n}$ .

$$(\overrightarrow{MF} \cdot \vec{n}) = 1 + 2 = 3 = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos \beta; \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{8};$$

$$\beta = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8}; \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta, \text{ т.е. } \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad \text{Ответ: } \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$



*Учебно-методическое издание*

**Рылов Арсений Сергеевич**

# **Решение контрольных и самостоятельных работ по геометрии за 11 класс**

Издательство «ЭКЗАМЕН»

ИД № 05518 от 01.08.01

Гигиенический сертификат

№ 77.99.28.953.Д.005398.08.05 от 30.08.2005 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лапто*

Дизайн обложки *Л.В. Дельянова*

Компьютерная верстка *Н.Э. Хрущева, М.В. Власова*

105066, Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 4, стр. 1

[www.examen.biz](http://www.examen.biz)

E-mail: по общим вопросам: [info@examen.biz](mailto:info@examen.biz);

по вопросам реализации: [sale@examen.biz](mailto:sale@examen.biz)

тел./факс 263-96-60

Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов

в ОАО «Владимирская книжная типография»

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует

качеству предоставленных диапозитивов

**По вопросам реализации обращаться по тел.: 263-96-60.**