

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ  
В ФОРМАТЕ

ЕГЭ 2013

ФГОС

МАТЕМАТИКА

Библиотечка  
СтатГрад



РАЗРАБОТАНО МИОО - [WWW.MIOO.RU](http://www.mioo.ru)

# Математика

## Диагностические работы в формате ЕГЭ 2013

*Библиотечка СтатГрад*

Издание соответствует новому Федеральному государственному  
общеобразовательному стандарту (ФГОС)

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
М34

Составители:  
И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов, И. В. Яценко

В сборнике использованы задания, предложенные  
И. В. Яценко, М. А. Волчкевичем, И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, Д. Д. Гуциным,  
П. И. Захаровым, В. С. Панфёровым, П. В. Семёновым, И. Н. Сергеевым,  
В. А. Смирновым, С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолем

Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ  
М34 2013. — М.: МЦНМО, 2013. — 88 с.

ISBN 978-5-4439-0516-7

Сборник предназначен для учителей математики в качестве источника материалов для подготовки к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ. Он содержит варианты диагностических работ по математике, формат и содержание которых соответствуют контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения единого государственного экзамена. В книгу входят также ответы к заданиям, система оценивания экзаменационной работы, критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом. Авторы пособия являются разработчиками тренировочных и диагностических работ для системы СтатГрад (<http://statgrad.mioo.ru>).

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к единому государственному экзамену.

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.*

Подписано в печать 09.01.2013 г. Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 5,5. Тираж 5000 экз. Заказ № 2286.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»:  
Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru)

ISBN 978-5-4439-0516-7

© Коллектив авторов, 2013.  
© МЦНМО, 2013.

## Предисловие

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит шесть различных вариантов работ, составленных в соответствии с нормативными документами ЕГЭ по математике. При составлении вариантов использовались задания из открытого банка заданий ЕГЭ ([www.mathege.ru](http://www.mathege.ru)).

Обращаем внимание на то, что варианты К1, К2 предназначены для повторения и подготовки учащихся к ЕГЭ по математике во втором полугодии 10 класса — первом полугодии 11 класса при условии, что математика изучается по учебно-методическим комплектам под редакцией А. Н. Колмогорова, А. Г. Мордковича или аналогичным комплектам, где в курсе 10 класса изучаются элементы анализа, а изучение логарифмической и показательной функций относится к 11 классу.

Варианты А3 и А4, напротив, содержат материал по теме «логарифмы, логарифмическая функция» и «степень с действительным показателем и показательная функция», но не содержат материала, связанного с началами анализа. Таким образом, эти варианты предназначены для повторения и подготовки к ЕГЭ в 10 классе и в первом полугодии 11 класса при условии, что в качестве базового используется УМК под редакцией Ш. А. Алимова или комплекты, аналогичные по структуре расположения материала.

Варианты 5 и 6 предназначены для работы во втором полугодии 11 класса и непосредственно перед экзаменом — задания содержат программный материал вне зависимости от особенностей УМК.

Деление вариантов на варианты «без логарифмов» или «без производной» является в некотором смысле условным — учитель по своему усмотрению может выбирать материал из различных вариантов, компоновать задачи по-разному, наилучшим образом достигая своей дидактической цели.

Ответы имеются ко всем заданиям. Задания второй части приведены с решениями, позволяющими проверить полноту и точность рассуждений учащихся при подготовке к экзамену.

Считаем полезным дать несколько практических рекомендаций, как пользоваться этой книгой. Какие задания выбрать для самостоятельного решения или для работы в классе — зависит, в первую очередь, от того, какую цель учитель и выпускник ставят перед собой при подготовке.

**1. В случае, если цель — преодолеть минимальный порог, чтобы получить аттестат,** мы советуем вам сосредоточиться на заданиях В1—В6 и В10. Задания В1, В2, В4 и В10 ориентированы на математическую подоплёку ситуаций повседневной жизни. Задание В3 — вычисление площади с помощью разграфленной бумаги или системы координат. Решить задачу можно, не зная формул, пользуясь лишь здравым смыслом и представлениями о целом и его части. Задание В5 содержит простейшее уравнение, которое можно решить почти без преобразований, пользуясь только элементарными понятиями школьного курса. Уверенное выполнение 6—7 заданий варианта означает, что выпускник овладел минимальной математической культурой, достаточной для достижения минимальной цели на ЕГЭ.

**2. В случае, если цель на ЕГЭ — подтвердить школьную оценку и самооценку и получить достаточный балл для поступления в вуз,** экзамен для выпускника состоит из всех заданий группы В и заданий С1 и С2 второй части. Эти задания — стандартные с точки зрения школьных программ. Обратите также внимание на задания С3 и С4. Они сложнее, но следует попробовать.

**3. Выпускник собирается поступать на математическую специальность в институт или университет.** Тогда нужен очень высокий балл на ЕГЭ. Выпускник должен уверенно решать все задания первой части и задания С1, С2 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются именно здесь по небрежности). Следует уметь выполнять задания С3 и С4. Основной объект внимания — задание С5, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи. Задание С6 не требует много знаний. Вопрос в том, как применить имеющиеся знания. Здесь нужна высокая математическая культура и хорошая подготовка.

### **Как пользоваться готовыми решениями вариантов**

**1. Часть заданий части С предложена с решениями.** Решения предназначены для самопроверки или для подготовки к решению других заданий. В предложенном решении необходимо тщательно разобраться. Недостаточно, если выпускник просто прочтёт решение и поймёт, что там написано. Нужно проделать самостоятельно все пропущенные выкладки, понять не только ход решения, но и снять все возникающие вопросы «почему». Полезно, если выпускник повторит приведённое решение самостоятельно, воспроизводя все логи-

ческие шаги и вычисления, а затем попробует написать похожее решение аналогичной задачи, воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, наилучший метод подготовки состоит в том, чтобы самостоятельно изменить решение, улучшить или упростить его, а также решить несколько задач с похожим, но изменённым условием.

2. Если выпускник решил задачу самостоятельно и ответ совпал с приведённым в сборнике, это не означает, что решение выпускника не содержит упущений. Сравнение решений поможет определить, в чём решения существенно различаются, а в чём схожи. Необходимо проверить, нашёл ли выпускник все возможные случаи, убедительно ли объяснил все свои построения и преобразования.

## **Инструкция по выполнению работы**

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1—B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1—C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий вы можете пользоваться черновиком. Обращаем ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у вас останется время, вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

**Желаем успеха!**

# Вариант К1<sup>1</sup>

## Часть 1

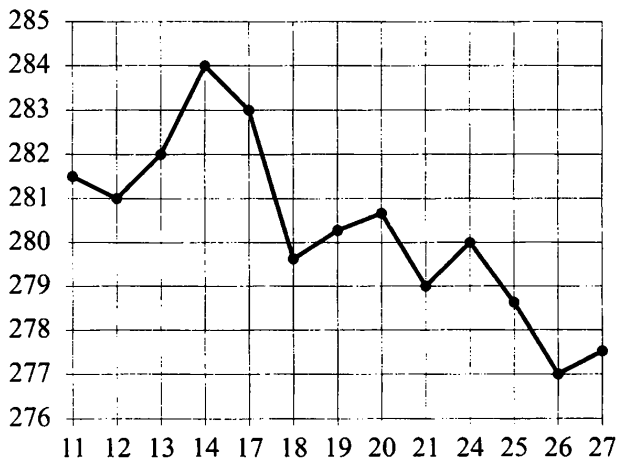
Ответом на задания В1—В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** Поезд отправляется из Санкт-Петербурга в 22 : 40, а прибывает в Москву в 7 : 40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Ответ: 

--	--	--	--	--	--	--	--

**В2** На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой унции золота на момент закрытия торгов в указанный период. Ответ дайте в долларах США.

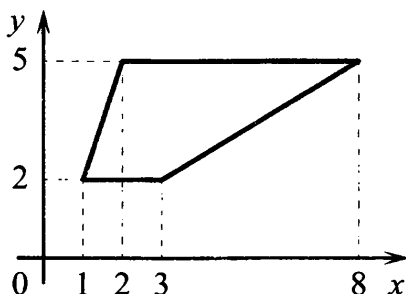


Ответ: 

--	--	--	--	--	--	--	--

<sup>1</sup> Варианты К1 и К2 предназначены для учащихся, изучающих математику по УМК под ред. А. Н. Колмогорова или по УМК под ред. А. Г. Мордковича.

**В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ:

**В4** В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 30 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
А	250 руб.	Нет	13 руб.
Б	Бесплатно	20 мин. — 400 руб.	17 руб.
В	120 руб.	10 мин. — 150 руб.	14 руб.

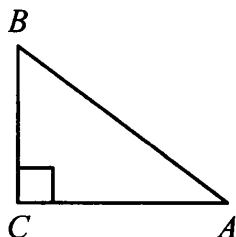
Ответ:

**В5** Найдите корень уравнения  $\sqrt{12 + 2x} = 4$ .

Ответ:

**В6** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $BC = 9$ ,  $\cos A = 0,8$ . Найдите  $AB$ .

Ответ:









## Часть 2

Запишите полное обоснованное решение и ответ.

**[C1]** а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0,25$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**[C2]** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 2 : 3$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**[C3]** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+1)^2 + 4(x-1)^2 \leq \frac{(3x-1)^2}{2} + \frac{1}{2}, \\ \frac{x^3+37}{(x-3)^3} \geq 1 + \frac{1}{(x-3)^2}. \end{cases}$$

**[C4]** В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $AC = 10$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

**[C5]** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке  $(-1; +\infty)$  имеет более двух корней.

**[C6]** За победу в новогодних конкурсах каждый ребёнок получал или конфету, или открытку. Все дети оказались награждёнными, а некоторые из детей стали победителями в двух конкурсах, поэтому у них оказалась и конфета, и открытка. Известно, что мальчиков, получивших конфету, было не более  $\frac{5}{16}$  от общего числа детей, получивших конфеты, а мальчиков, получивших открытку, было не более  $\frac{2}{5}$  от общего числа детей, получивших открытку.

а) Могло ли быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть, если дополнительно известно, что всего было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

## Критерии оценивания

**[C1]** а) Решите уравнение  $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0,25$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

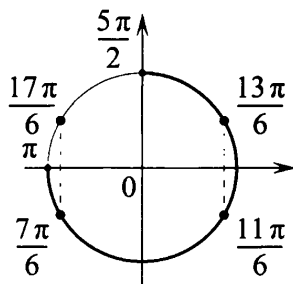
$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25; \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит,  $\sin x = \pm \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

Получим числа  $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$ .

Ответ: а)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$ .

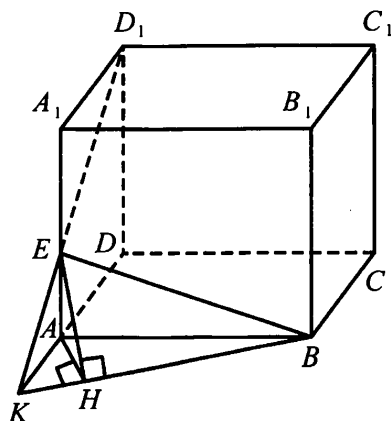


Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**[C2]** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 2 : 3$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**Решение.** Пусть прямая  $D_1 E$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $K$ . Тогда плоскости  $ABC$  и  $BED_1$  пересекаются по прямой  $KB$ .

Из точки  $E$  опустим перпендикуляр  $EH$  на прямую  $KB$ , тогда отрезок  $AH$  (проекция  $EH$ ) перпендикулярен прямой  $KB$ . Угол  $AHE$  является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .



Поскольку  $AE : EA_1 = 2 : 3$ , получаем

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников  $A_1D_1E$  и  $AKE$  находим

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике  $AKB$  с прямым углом  $A$  имеем

$$AB = 1; \quad AK = \frac{2}{3}; \quad BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

откуда находим высоту:

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника  $AHE$  с прямым углом  $A$  получаем

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \sqrt{13}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+1)^2 + 4(x-1)^2 \leq \frac{(3x-1)^2}{2} + \frac{1}{2}, \\ \frac{x^3+37}{(x-3)^3} \geq 1 + \frac{1}{(x-3)^2}. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство системы:

$$2(x+1)^2 + 8(x-1)^2 - (3x-1)^2 - 1 \leq 0;$$

$$2x^2 + 4x + 2 + 8x^2 - 16x + 8 - 9x^2 + 6x - 1 - 1 \leq 0;$$

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0; \quad (x-2)(x-4) \leq 0; \quad 2 \leq x \leq 4.$$

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^3+37-(x-3)^3-x+3}{(x-3)^3} \geq 0; \quad \frac{x^3+37-x^3+9x^2-27x+27-x+3}{(x-3)^3} \geq 0;$$

$$\frac{9x^2-28x+67}{(x-3)^3} \geq 0; \quad \frac{1}{(x-3)^3} \geq 0; \quad (x-3)^3 \geq 0, \quad \text{где } x \neq 3; \quad x > 3.$$

3. Решение всей системы:  $3 < x \leq 4$ .

**Ответ:**  $(3; 4]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С4** В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $AC = 10$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

**Решение.** Обе точки  $K$  и  $L$  не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок  $KL$  не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки  $K$  и  $L$  лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник  $AKLC$  вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $LBK$ , так как угол  $ABC$  общий. Пусть коэффициент подобия равен  $k$ , тогда

$$BL = k \cdot AB, \quad BK = k \cdot BC, \quad KL = k \cdot AC.$$

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника  $AKLC$  равны:

$$AK + LC = KL + AC; \quad k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим

$$k = \frac{7+9-10}{7+9+10} = \frac{3}{13}.$$

Следовательно,

$$KL = \frac{3}{13} \cdot AC = \frac{30}{13}.$$

Пусть точка  $K$  лежит на продолжении стороны  $AB$  (рис. 2). Углы  $AKL$  и  $ACL$  равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $LBK$ , так как угол  $ABC$  общий.

Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, т. е. треугольники  $LBK$  и  $ABC$  равны, поэтому  $KL = AC = 10$ . Заметим, что  $BK = BC > AB$  и точка  $K$  действительно лежит на продолжении стороны  $AB$ .

Если точка  $L$  лежит на продолжении стороны  $BC$ , то  $BL > BC$ , но аналогично предыдущему случаю получаем  $BL = AB < BC$ . Значит, этот случай не достигается.

Ответ:  $\frac{30}{13}$  или 10.

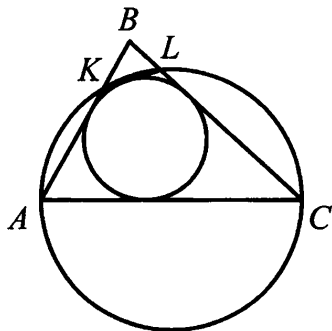


Рис. 1

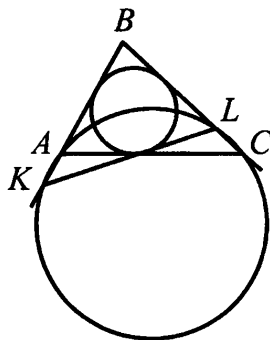


Рис. 2



Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке  $(-1; +\infty)$  имеет более двух корней.

**Решение.** Рассмотрим функции

$$f(x) = ax + a - 2 \quad \text{и} \quad g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|.$$

Исследуем уравнение  $f(x) = g(x)$  на промежутке  $(-1; +\infty)$ .

При  $a \leq 0$  все значения функции  $f(x)$  на промежутке  $(-1; +\infty)$  отрицательны, а все значения функции  $g(x)$  неотрицательны, поэтому при  $a \leq 0$  уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет решений на промежутке  $(-1; +\infty)$ .

При  $a > 0$  функция  $f(x)$  возрастает. Функция  $g(x)$  убывает на промежутке  $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$ , поэтому уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного решения на промежутке  $\left(-1; \frac{2}{3}\right]$ , причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда  $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$ , откуда получаем  $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$ , т. е.  $a \geq \frac{6}{5}$ .

На промежутке  $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$  уравнение  $f(x) = g(x)$  принимает вид

$$ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}; \quad ax^2 + (2a - 5)x + a = 0.$$

Будем считать, что  $a > 0$ , поскольку случай  $a \leq 0$  был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения  $D = 25 - 20a$ , поэтому при  $a > \frac{5}{4}$  это уравнение не имеет корней; при  $a = \frac{5}{4}$  уравнение имеет единственный корень, равный 1; при  $0 < a < \frac{5}{4}$  уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.  $0 < a < \frac{5}{4}$ , то больший корень  $x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}$ , поэтому он принадлежит промежутку  $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ . Меньший корень  $x_1$  принадлежит промежутку  $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$  тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{2}{3}\right) = a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0,$$

т. е.  $a > \frac{6}{5}$ .

Таким образом, уравнение  $\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$  имеет следующее количество корней на промежутке  $(-1; +\infty)$ :

- нет корней при  $a \leq 0$ ;
- один корень при  $0 < a < \frac{6}{5}$  и  $a > \frac{5}{4}$ ;
- два корня при  $a = \frac{6}{5}$  и  $a = \frac{5}{4}$ ;
- три корня при  $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ .

Ответ:  $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** За победу в новогодних конкурсах каждый ребёнок получал или конфету, или открытку. Все дети оказались награждёнными, а некоторые из детей стали победителями в двух конкурсах, поэтому у них оказалась и конфета, и открытка. Известно, что мальчиков, получивших конфету, было не более  $\frac{5}{16}$  от общего числа детей, получивших конфеты, а мальчиков, получивших открытку, было не более  $\frac{2}{5}$  от общего числа детей, получивших открытку.

а) Могло ли быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть, если дополнительно известно, что всего было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

**Решение.** а) Если было 5 мальчиков, которые получили только конфету, 8 мальчиков, которые получили только открытку, и 12 девочек, каждая из которых получила и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше.

Пусть число мальчиков, получивших конфету, равно  $m_1$ . Тогда число  $\frac{m_1}{m_1 + 11}$  не больше чем доля мальчиков, получивших конфету, среди всех детей, получивших конфету, а это число не больше  $\frac{5}{16}$ , откуда  $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$  и, следовательно,  $m_1 \leq 5$ .

Пусть  $m_2$  — число мальчиков, получивших открытку. Аналогично  $\frac{m_2}{m_2 + 11} \leq \frac{2}{5}$ , откуда, учитывая, что число  $m_2$  целое, находим  $m_2 \leq 7$ . Но тогда общее число мальчиков, получивших хоть что-то, не больше чем  $5 + 7 = 12$ . Следовательно, по крайней мере 2 мальчика ничего не получили, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что из 25 детей могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик получил и конфету, и открытку. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых получил только конфету, а другой — только открытку, то доля мальчиков, получивших конфету, и доля мальчиков, получивших открытку, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик получил или только конфету, или только открытку.

Пусть, как прежде,  $m_1$  мальчиков получили конфету,  $m_2$  мальчиков получили открытку, и всего  $d$  девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка получила и конфету, и открытку, поскольку их доля среди всех детей от этого не изменится, а доля среди получивших конфету и доля среди получивших открытку не станут меньше.

По условию

$$\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{5}{16}, \quad \frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5},$$

значит,

$$\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}, \quad \frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{37}{33},$$

поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33} + 1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков получили только конфету, 22 мальчика получили только открытку, и ещё было 33 девочки, каждая из которых получила и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна  $\frac{33}{70}$ .

Ответ: а) да; б) 13; в)  $\frac{33}{70}$ .

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

## Часть 1

**B1** В книге «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять  $\frac{3}{10}$  фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 6 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

**B2** На рисунке жирными точками показано число посещений некоторого поискового сайта во все месяцы с декабря 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество человек, посетивших сайт хотя бы раз за данный месяц. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим числом посещений этого сайта в указанный период.













## Часть 2

Запишите полное обоснованное решение и ответ.

**С1** а) Решите уравнение  $2 \sin^2 \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$ .

**С2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $A_1C_1$ .

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{3}{2-x-\sqrt{3}} + \frac{x+\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}-3} \geq 3, \\ (5x+2)(9-5x)(25x^2-35x-18) < 0. \end{cases}$$

**С4** Внеписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы внеписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на интервале  $(1; 2)$  существует хотя бы одно число  $x$ , не удовлетворяющее неравенству

$$a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2.$$

**С6** Имеется 8 пустых карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

−11, 12, 13, −14, −15, 17, −18, 19.

Карточки собирают, перемешивают и раскладывают пустой стороной вверх.

На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел

−11, 12, 13, −14, −15, 17, −18, 19.

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 117?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

## Критерии оценивания

**[C1]** а) Решите уравнение  $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .

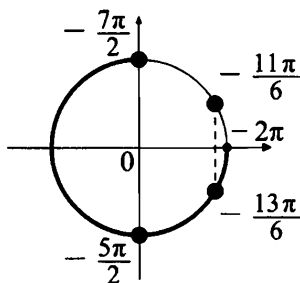
**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = 0$ , откуда  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ .



Получим числа  $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{13\pi}{6}$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$ ;

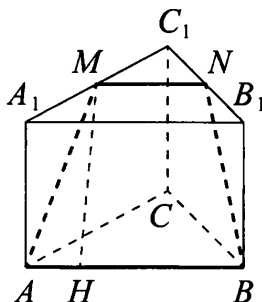
б)  $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{13\pi}{6}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**[C2]** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины  $A, B$  и середину ребра  $A_1C_1$ .

**Решение.** Обозначим через  $M$  и  $N$  середины рёбер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$  соответственно. По теореме о средней линии треугольника  $MN \parallel A_1B_1 \parallel AB$ , так что прямые  $MN$  и  $AB$  лежат в одной плоско-

сти. Сечение, про которое спрашивается в условии, — это сечение призмы этой плоскостью. Оно представляет собой равнобокую трапецию  $AMNB$ .



Основания трапеции равны  $AB = 6$ ,  $MN = 3$ ; по теореме Пифагора найдём боковую сторону:

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Проведём в трапеции высоту  $MN$ . Отрезок  $AH$  равен полуразности оснований трапеции:  $AH = \frac{AB - MN}{2} = \frac{3}{2}$ .

Следовательно, высота трапеции равна

$$MH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Зная её, находим площадь трапеции:

$$S_{AMNB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9\sqrt{91}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{9\sqrt{91}}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**СЗ** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{3}{2-x-\sqrt{3}} + \frac{x+\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}-3} \geq 3, \\ (5x+2)(9-5x)(25x^2-35x-18) < 0. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство. Сделав замену

$$z = x + \sqrt{3},$$

получаем

$$\frac{3}{2-z} + \frac{z-1}{z-3} \geq 3; \quad \frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)} \leq 0; \quad 1 \leq z < 2 \quad \text{или} \quad 3 < z \leq 3,5.$$

Обратная замена даёт

$$1 - \sqrt{3} \leq x < 2 - \sqrt{3} \quad \text{или} \quad 3 - \sqrt{3} < x \leq 3,5 - \sqrt{3}.$$

2. Решим второе неравенство. Заметим, что

$$(5x+2)(9-5x)(25x^2-35x-18) = -(5x+2)^2(9-5x)^2,$$

поэтому неравенство  $-(5x+2)^2(9-5x)^2 < 0$  выполнено при всех  $x$ , кроме  $x = -0,4$  и  $x = 1,8$ , причём

$$1 - \sqrt{3} < -0,4 < 2 - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad 3,5 - \sqrt{3} < 1,8.$$

3. Таким образом, получаем

$$1 - \sqrt{3} \leq x < -0,4; \quad -0,4 < x < 2 - \sqrt{3}; \quad 3 - \sqrt{3} < x \leq 3,5 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } [1 - \sqrt{3}; -0,4) \cup (-0,4; 2 - \sqrt{3}) \cup (3 - \sqrt{3}; 3,5 - \sqrt{3}].$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**[С4]** Внеписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы внеписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

**Решение.** Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = b$ ,  $BC = a$  и гипотенузой  $AB = c$ . Пусть окружность с центром  $O_c$  радиуса  $r_c$  касается гипотенузы в точке  $T$ , продолжений катетов  $BC$  и  $AC$  — в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ . Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следует, что

$$CM = CB + BM = CB + BT \quad \text{и} \quad CN = CA + AN = CA + AT,$$

поэтому

$$\begin{aligned} CM + CN &= CB + BT + CA + AT = CB + CA + (BT + AT) = \\ &= CB + CA + AB = a + b + c = 2p, \end{aligned}$$

а так как  $CM = CN$ , то  $CM = p$ . Далее, пусть окружность с центром  $O_a$  радиуса  $r_a$  касается катета  $BC$  в точке  $K$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  — в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Рассуждая аналогично, получаем  $AQ = AP = p$ . Четырёхугольники  $NO_cMC$  и  $KO_aQC$  — квадраты, поэтому

$$r_c = O_cM = CM = p, \quad r_a = CQ = AQ - AC = p - b,$$

значит,  $r_a < r_c$ . Следовательно, радиус внеписанной окружности, касающейся гипотенузы данного прямоугольного треугольника, не может быть равен 7.

Таким образом, возможны только такие случаи: либо радиус окружности, касающейся гипотенузы, равен 17, а радиус окружности, касающейся одного из катетов, равен 7, либо радиусы окружностей, касающихся катетов, равны 7 и 17.

Предположим, что  $r_c = 17$  и  $r_a = 7$  (рис. 1). Опустим перпендикуляр  $O_aF$  из центра меньшей окружности на  $O_cN$ . Тогда

$$O_aF = QN = QC + CN = O_aK + O_cM = r_a + r_c = 7 + 17 = 24,$$

$$O_cF = MK = CM - CK = r_c - r_a = 17 - 7 = 10.$$

Следовательно,

$$O_aO_c = \sqrt{O_aF^2 + O_cF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

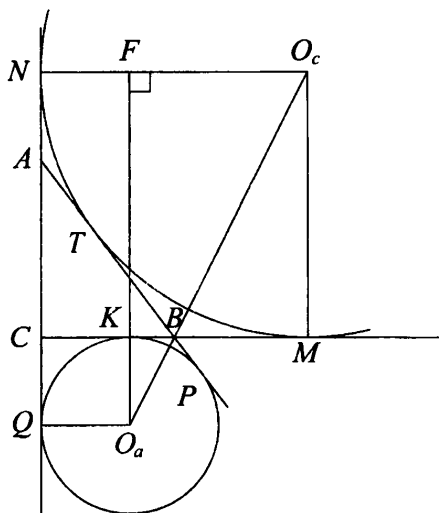


Рис. 1

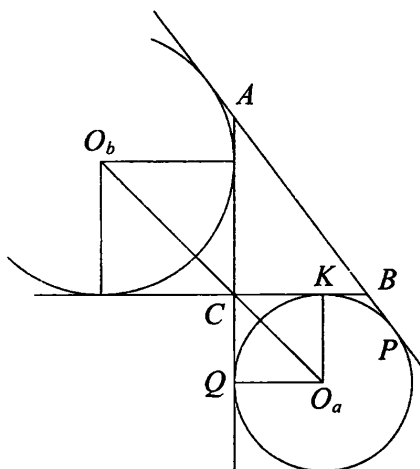


Рис. 2

Пусть теперь  $r_b = 17$  и  $r_a = 7$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому точки  $O_a$ ,  $C$  и  $O_b$  лежат на одной прямой. Следовательно,

$$O_a O_b = O_a C + CO_b = r_a \sqrt{2} + r_b \sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 17\sqrt{2} = 24\sqrt{2}.$$

Ответ: 26 или  $24\sqrt{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на интервале  $(1; 2)$  существует хотя бы одно число  $x$ , не удовлетворяющее неравенству  $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$ .

**Решение.** Преобразуем неравенство:

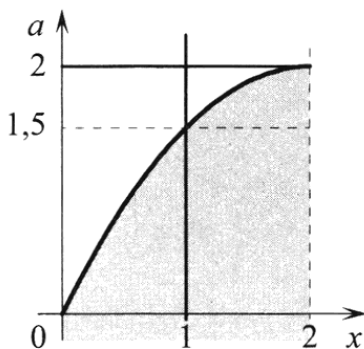
$$a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2; \quad |x - a| \leq 3x - x^2 - a;$$

$$\begin{cases} x - a \leq 3x - x^2 - a, \\ x - a \geq -3x + x^2 + a; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 2) \leq 0, \\ a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x. \end{cases}$$

Неравенство  $x(x - 2) \leq 0$  определяет на плоскости  $Oxa$  полосу, заключённую между прямыми  $x = 0$  и  $x = 2$ . Неравенство  $a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x$  задаёт часть плоскости, ограниченную сверху параболой.

Из рисунка видно, что на интервале  $(1; 2)$  есть значения  $x$ , не удовлетворяющие неравенству, только если  $a > 1,5$ .

**Ответ:**  $(1,5; +\infty)$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** Имеется 8 пустых карточек. На них записывают по одному каждое из чисел

−11, 12, 13, −14, −15, 17, −18, 19.

Карточки собирают, перемешивают и раскладывают пустой стороной вверх.

На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел

–11, 12, 13, –14, –15, 17, –18, 19.

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

**Решение.** а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 117.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, — это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (–11; 12), (12; –11), (13; –14), (–14; 13), (–15; 17), (17; –15), (18; –19), (–19; 18).

*Ответ:* а) нет; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

# Вариант АЗ<sup>1</sup>

## Часть 1

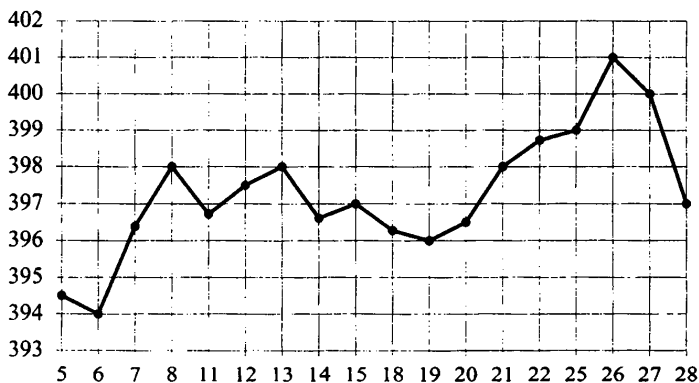
Ответом на задания В1—В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке. Единицы измерений писать не нужно.

**В1** Диагональ экрана телевизора равна 25 дюймов. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если 1 дюйм равен 2,54 см.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

**В2** На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой унции золота на момент закрытия торгов в указанный период. Ответ дайте в долларах США.

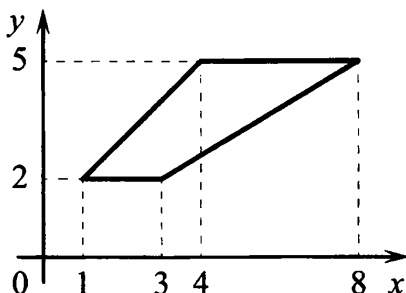


Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

<sup>1</sup> Варианты АЗ и А4 предназначены для тех, кто изучает математику по УМК под ред. Ш. А. Алимова или по УМК под ред. С. М. Никольского.

**В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--

**B4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг  $R$  бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного  $0,001$  средней цены  $P$ , показателей функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый показатель оценивается целым числом от  $0$  до  $4$ . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(3F + 2Q + D) - 0,001P.$$

В таблице даны средняя цена и оценка каждого показателя для нескольких моделей газовых плит. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей газовых плит.

Модель плиты	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	14 000	1	3	3
Б	12 500	2	3	4
В	13 000	2	1	4
Г	9 800	3	3	2

**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--

**B5** Найдите корень уравнения

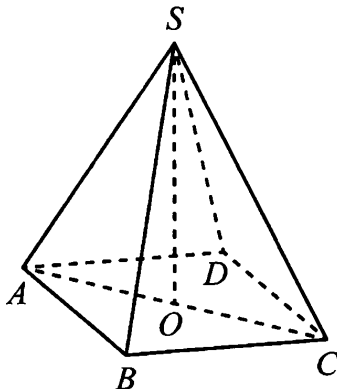
$$\log_3(6+x) = 2.$$

**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--



**В9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точка  $O$  является центром основания,  $SB = 15$ ,  $AC = 18$ . Найдите длину отрезка  $SO$ .



Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

**В10** Спортсмен стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена с первого или второго выстрела.

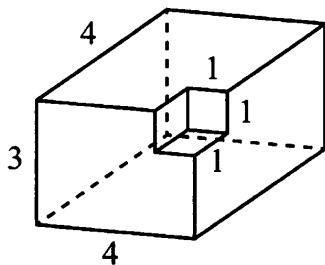
Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

**В11** Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--



**В12** Зависимость объёма спроса  $q$  (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены  $p$  (тыс. руб.) задаётся формулой  $q = 65 - 5p$ . Выручка предприятия за месяц  $r$  (тыс. руб.) вычисляется по формуле  $r(p) = pq$ . Определите наибольшую цену  $p$ , при которой месячная выручка  $r(p)$  составит 200 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--



## Часть 2

Запишите полное обоснованное решение и ответ.

**C1** а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 3 \sin^2 x = 1,25.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**C2** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 2 : 1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{5 - 4^{-x-1}}{1 - 2^{-x-4}} \geq 5, \\ \log_{0,25(x-2)^2} \left( \frac{x+4}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

**C4** В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 14$ ,  $BC = 18$ ,  $AC = 20$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке  $(1; +\infty)$  имеет более двух корней.

**C6** У каждого учащегося в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, живёт и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более  $\frac{1}{4}$  от общего числа учащихся, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более  $\frac{5}{11}$  от общего числа учащихся, имеющих кошек.



а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся без дополнительного условия пунктов а и б?

## Критерии оценивания

**[C1]** а) Решите уравнение  $\cos 2x + 3 \sin^2 x = 1,25$ .

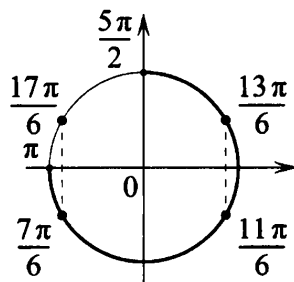
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

$$1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin^2 x = 1,25; \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит,  $\sin x = \pm \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .



Получим числа  $\frac{7\pi}{6}$ ;  $\frac{11\pi}{6}$ ;  $\frac{13\pi}{6}$ .

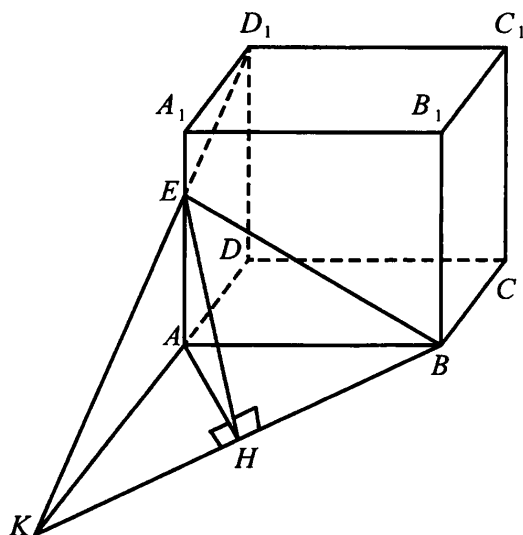
Ответ: а)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{6}$ ;  $\frac{11\pi}{6}$ ;  $\frac{13\pi}{6}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**[C2]** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 2 : 1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**Решение.** Пусть прямая  $D_1 E$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $K$ . Тогда плоскости  $ABC$  и  $BED_1$  пересекаются по прямой  $KB$ .

Из точки  $E$  опустим перпендикуляр  $EH$  на прямую  $KB$ , тогда отрезок  $AH$  (проекция  $EH$ ) перпендикулярен прямой  $KB$ . Угол  $AHE$  является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .



Поскольку  $AE : EA_1 = 2 : 1$ , получаем

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников  $A_1D_1E$  и  $AKE$  находим  $AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2$ .

В прямоугольном треугольнике  $AKB$  с прямым углом  $A$  имеем  $AB = 1$ ;  $AK = 2$ ;  $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$ , откуда находим высоту:

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника  $AHE$  с прямым углом  $A$  получаем  $\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}$ .

Ответ:  $\arctg \sqrt{5}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{5 - 4^{-x-1}}{1 - 2^{-x-4}} \geq 5, \\ \log_{0,25}(x-2)^2 \left( \frac{x+4}{4} \right) \leq 1. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену  $y = 2^{-x}$ :

$$\frac{5 - \frac{1}{4}y^2}{1 - \frac{1}{16}y} \geq 5; \quad \frac{80 - 4y^2}{16 - y} \geq 5; \quad \frac{4y^2 - 5y}{y - 16} \geq 0;$$

$$\frac{y(y - \frac{5}{4})}{y - 16} \geq 0; \quad \begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{5}{4} \\ y > 16. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} 0 \leq 2^{-x} \leq \frac{5}{4} \\ 2^{-x} > 16, \end{cases}$$

откуда находим решение первого неравенства системы:

$$x < -4; \quad x \geq 2 - \log_2 5.$$

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай:  $0,25(x-2)^2 > 1$ . Тогда

$$\log_{0,25}(x-2)^2 \left( \frac{x+4}{4} \right) \leq 1; \quad 0 < \frac{x+4}{4} \leq 0,25(x-2)^2;$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-5) \geq 0, \\ x > -4, \end{cases}$$

откуда находим  $-4 < x \leq 0$ ;  $x \geq 5$ . Учитывая условие  $0,25(x-2)^2 > 1$ , получаем  $-4 < x < 0$ ;  $x \geq 5$ .

Второй случай:  $0 < 0,25x^2 < 1$ . Тогда

$$\log_{0,25}(x-2)^2 \left( \frac{x+4}{4} \right) \leq 1; \quad \frac{x+4}{4} \geq 0,25(x-2)^2;$$

$$x(x-5) \leq 0; \quad 0 \leq x \leq 5.$$

Учитывая условие  $0 < 0,25(x-2)^2 < 1$ , получаем  $0 < x < 2$ ;  $2 < x < 4$ .

Решение второго неравенства исходной системы:

$$-4 < x < 0; \quad 0 < x < 2; \quad 2 < x < 4; \quad x \geq 5.$$

3. Поскольку  $-1 < 2 - \log_2 5 < 0$ , получаем решение исходной системы неравенств:  $2 - \log_2 5 \leq x < 0$ ;  $0 < x < 2$ ;  $2 < x < 4$ ;  $x \geq 5$ .

Ответ:  $[2 - \log_2 5; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 4) \cup [5; +\infty)$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**[C4]** В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 14$ ,  $BC = 18$ ,  $AC = 20$ . Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $C$ , пересекает прямые  $BA$  и  $BC$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ , отличных от вершин треугольника. Отрезок  $KL$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите длину отрезка  $KL$ .

**Решение.** Обе точки  $K$  и  $L$  не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок  $KL$  не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки  $K$  и  $L$  лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник  $AKLC$  вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $LBK$ , так как угол  $ABC$  общий.

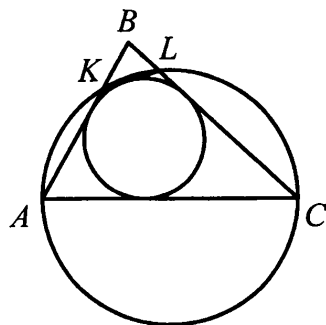


Рис. 1

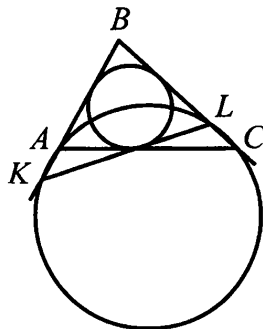


Рис. 2

Пусть коэффициент подобия равен  $k$ , тогда

$$BL = k \cdot AB, \quad BK = k \cdot BC, \quad KL = k \cdot AC.$$

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника  $AKLC$  равны:

$$AK + LC = KL + AC; \quad k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим

$$k = \frac{14 + 18 - 20}{14 + 18 + 20} = \frac{3}{13}.$$

Следовательно,  $KL = \frac{3}{13} \cdot AC = \frac{60}{13}$ .

Пусть точка  $K$  лежит на продолжении стороны  $AB$  (рис. 2). Углы  $AKL$  и  $ACL$  равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $LBK$ , так как угол  $ABC$  общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, т. е. треугольники  $LBK$  и  $ABC$  равны, поэтому  $KL = AC = 20$ . Заметим, что  $BK = BC > AB$  и точка  $K$  действительно лежит на продолжении стороны  $AB$ .

Если точка  $L$  лежит на продолжении стороны  $BC$ , то  $BL > BC$ , но аналогично предыдущему случаю получаем  $BL = AB < BC$ . Значит, этот случай не достигается.

Ответ:  $\frac{60}{13}$  или 20.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - (a+2)$$

на промежутке  $(1; +\infty)$  имеет более двух корней.

**Решение.** Рассмотрим функции

$$f(x) = ax - a - 2 \quad \text{и} \quad g(x) = \left| \frac{5}{x-1} - 3 \right|.$$

Исследуем уравнение  $f(x) = g(x)$  на промежутке  $(0; +\infty)$ .

При  $a \leq 0$  все значения функции  $f(x)$  на промежутке  $(1; +\infty)$  отрицательны, а все значения функции  $g(x)$  — неотрицательны, поэтому при  $a \leq 0$  уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет решений на промежутке  $(1; +\infty)$ .

При  $a > 0$  функция  $f(x)$  возрастает. Функция  $g(x)$  убывает на промежутке  $\left(1; \frac{8}{3}\right]$ , поэтому уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного решения на промежутке  $\left(1; \frac{8}{3}\right]$ , причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда  $f\left(\frac{8}{3}\right) \geq g\left(\frac{8}{3}\right)$ , откуда получаем  $a \cdot \frac{8}{3} - a - 2 \geq 0$ , т. е.  $a \geq \frac{6}{5}$ .

На промежутке  $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$  уравнение  $f(x) = g(x)$  принимает вид

$$ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}; \quad ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0.$$

Будем считать, что  $a > 0$ , поскольку случай  $a \leq 0$  был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения  $D = 25 - 20a$ , поэтому при  $a > \frac{5}{4}$  это уравнение не имеет корней; при  $a = \frac{5}{4}$  уравнение имеет единственный корень, равный 3; при  $0 < a < \frac{5}{4}$  уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня  $x_1$  и  $x_2$ , т. е.  $0 < a < \frac{5}{4}$ , то больший корень  $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$ , поэтому он принадлежит промежутку  $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ . Меньший корень  $x_1$  принадлежит промежутку  $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$  тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{8}{3}\right)\left(x_2 - \frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5) \cdot \frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0,$$

т. е.  $a > \frac{6}{5}$ .

Таким образом, уравнение  $\left| \frac{5}{x-1} - 3 \right| = ax - a - 2$  имеет следующее количество корней на промежутке  $(1; +\infty)$ :

- нет корней при  $a \leq 0$ ;
- один корень при  $0 < a < \frac{6}{5}$  и  $a > \frac{5}{4}$ ;
- два корня при  $a = \frac{6}{5}$  и  $a = \frac{5}{4}$ ;
- три корня при  $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ .

Ответ:  $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** У каждого учащегося в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, живёт и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более  $\frac{1}{4}$  от общего числа учащихся, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более  $\frac{5}{11}$  от общего числа учащихся, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 учащийся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся без дополнительного условия пунктов а и б?

**Решение.** а) Если в классе 3 мальчика, имеющих только кошку, 8 мальчиков, имеющих только собаку, и 10 девочек, каждая из кото-



рых имеет и кошку, и собаку, то условие задачи выполнено. Значит, в классе из 21 учащегося может быть 11 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 12 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше.

Пусть число мальчиков, имеющих кошку, равно  $m_1$ . Тогда число  $\frac{m_1}{m_1+9}$  не больше чем доля мальчиков, имеющих кошку, среди всех учащихся, имеющих кошку, а это число не больше  $\frac{1}{4}$ , откуда  $\frac{m_1}{m_1+9} \leq \frac{1}{4}$  и, следовательно,  $m_1 \leq 3$ .

Пусть  $m_2$  — число мальчиков, имеющих собаку. Аналогично

$$\frac{m_2}{m_2+9} \leq \frac{5}{11},$$

откуда, учитывая, что число  $m_2$  целое, находим  $m_2 \leq 7$ . Но тогда общее число мальчиков, имеющих хоть кого-то, не больше чем  $3+7=10$ . Следовательно, по крайней мере 2 мальчика не имеют никакого животного, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 учащегося могло быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в классе — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только кошку, а другой — только собаку, то доля мальчиков, имеющих кошку, и доля мальчиков, имеющих собаку, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик имеет или только кошку, или только собаку.

Пусть, как прежде,  $m_1$  мальчиков имеют кошку,  $m_2$  мальчиков имеют собаку, и всего  $d$  девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка имеет и кошку, и собаку, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди имеющих кошку и доля среди имеющих собаку не станут меньше.

По условию  $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{1}{4}$ ,  $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{5}{11}$ , значит,  $\frac{m_1}{d} \leq \frac{1}{3}$ ,  $\frac{m_2}{d} \leq \frac{5}{6}$ . Тогда  $\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{7}{6}$ , поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{7}{6}+1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если группа состоит из 2 мальчиков, имеющих

только кошку, 5 мальчиков, имеющих только собаку, и еще 6 девочек, каждая из которых имеет и кошку, и собаку, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна  $\frac{6}{13}$ .

Ответ: а) да; б) 11; в)  $\frac{6}{13}$ .

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

## Часть 1

**В1** В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 182 куб. м воды, а 1 апреля — 192 куб. м. Сколько рублей должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена за 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.?

**В2** На рисунке жирными точками показано количество запросов за месяц со словом ЖАРА, сделанных на некотором поисковом сайте с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим месячным количеством запросов со словом ЖАРА на этом сайте в указанный период.



A circle is divided into 12 equal sectors. 10 sectors are shaded black, and 2 sectors are white.

**Ответ:**

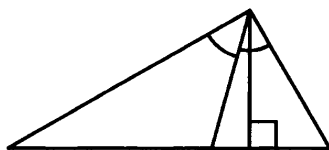
$$R = 4(2F + 3Q + D) - 0,01P.$$

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4 500	2	1	0
Б	4 800	2	3	0
В	4 700	0	4	3
Г	5 200	1	2	2

**Ответ:**

**Ответ:**

**В6** Острые углы прямоугольного треугольника равны  $84^\circ$  и  $6^\circ$ . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

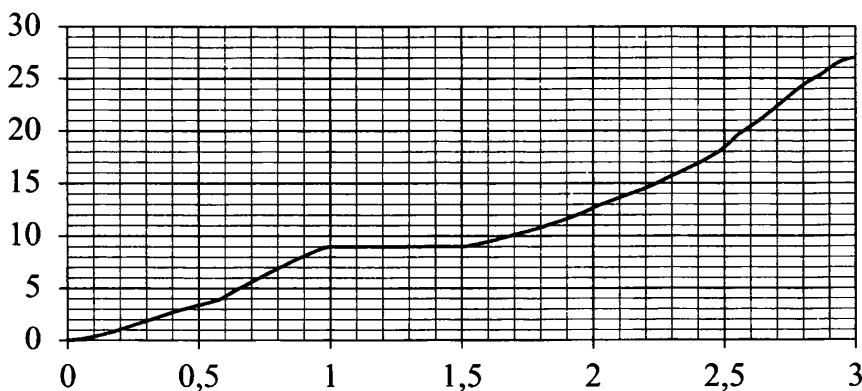


Ответ:

**В7** Найдите значение выражения  $\frac{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\sin 36^\circ}$ .

Ответ:

**В8** На рисунке показана зависимость пройденного пути от времени при движении велосипедиста по некоторому маршруту. По горизонтали откладывается время в часах, по вертикали — пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость велосипедиста на маршруте. Ответ дайте в километрах в час.



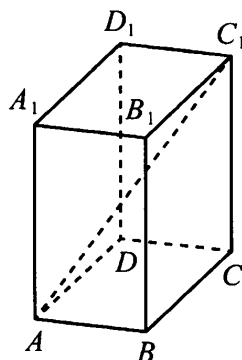
Ответ:

**В9** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что

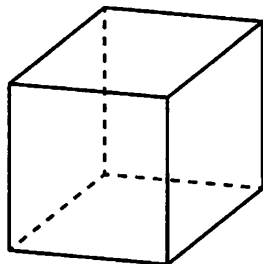
$$AC_1 = 9, \quad C_1 D_1 = 1, \quad A_1 D_1 = 4.$$

Найдите длину ребра  $DD_1$ .

Ответ:



**Ответ:**



**Ответ:**

**ОТВЕТ:**

**Ответ:**

**Ответ:**

## Часть 2

Запишите полное обоснованное решение и ответ.

**[C1]** а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**[C2]** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 8, боковые рёбра равны  $\sqrt{13}$ . Найдите площадь сечения, проходящего через вершины  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $A_1B_1$ .

**[C3]** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2}{5^{x+1}-1} + \frac{5^{x+1}-2}{5^{x+1}-3} \geq 2, \\ \left( \frac{2}{25x^2+40x+7} + \frac{25x^2+40x+7}{2} \right)^2 \geq 4. \end{cases}$$

**[C4]** Внеписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы внеписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 23. Найдите расстояние между их центрами.

**[C5]** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на отрезке  $[0; 1]$  существует хотя бы одно число  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$a + |a + 1 - x| \leq 3x - x^2 - 1.$$

**[C6]** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

## Критерии оценивания

**С1** а) Решите уравнение  $\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{2} \cos^2 x + \cos x = 0;$$

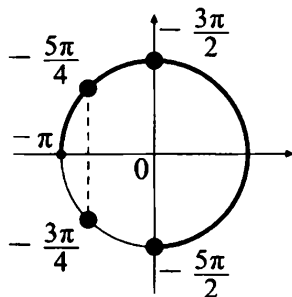
$$\cos x \cdot \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = 0$ , откуда  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .



Получим числа  $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

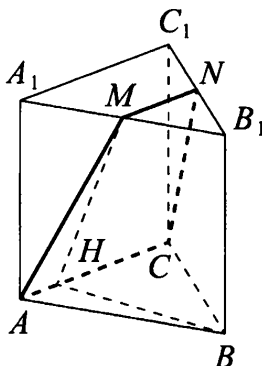
**С2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 8, боковые рёбра равны  $\sqrt{13}$ . Найдите площадь сечения, проходящего через вершины  $A, C$  и середину ребра  $A_1B_1$ .

**Решение.** Обозначим через  $M$  и  $N$  середины рёбер  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  соответственно. По теореме о средней линии треугольника



$MN \parallel A_1C_1 \parallel AC$ , так что прямые  $MN$  и  $AB$  лежат в одной плоскости. Сечение, про которое спрашивается в условии, — это сечение призмы этой плоскостью. Оно представляет собой равнобокую трапецию  $AMNC$ .

Основания трапеции равны  $AB=8$ ,  $MN=4$ ; по теореме Пифагора найдём боковую сторону:  $AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{13+16} = \sqrt{29}$ . Проведём в трапеции высоту  $MH$ .



Отрезок  $AH$  равен полуразности оснований трапеции:

$$AH = \frac{AB - MN}{2} = 2.$$

Следовательно, высота трапеции равна  $MH = \sqrt{29 - 2^2} = 5$ . Зная её, находим площадь трапеции:

$$S_{AMNB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = \frac{4+8}{2} \cdot 5 = 30.$$

Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2}{5^{x+1}-1} + \frac{5^{x+1}-2}{5^{x+1}-3} \geq 2, \\ \left( \frac{2}{25x^2+40x+7} + \frac{25x^2+40x+7}{2} \right)^2 \geq 4. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство. Сделав замену  $z = 5^{x+1}$ , получаем

$$\frac{2}{z-1} + \frac{z-2}{z-3} \geq 2; \quad \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)} \leq 0; \quad 1 < z \leq 2 \text{ или } 3 < z \leq 5.$$

Обратная замена даёт

$$-1 < x \leq \log_5 0,4 \quad \text{или} \quad \log_5 0,6 < x \leq 0.$$

2. Решим второе неравенство. Сделав замену

$$t = \frac{25x^2+40x+7}{2},$$

получаем

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \geq 4; \quad \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 \geq 0; \quad t \neq 0.$$

Значит,  $x \neq -1,4$ ;  $x \neq -0,2$ , причём

$$-1,4 < -1; \quad \log_5 0,6 < -0,2 < 0.$$

3. Таким образом, получаем решение системы:

$$-1 < x \leq \log_5 0,4; \quad \log_5 0,6 < x < -0,2 \quad \text{или} \quad -0,2 < x \leq 0.$$

**Ответ:**  $(-1; \log_5 0,4] \cup (\log_5 0,6; -0,2) \cup (-0,2; 0]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С4** Внеписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы внеписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 23. Найдите расстояние между их центрами.

**Решение.** Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = b$ ,  $BC = a$  и гипотенузой  $AB = c$ . Пусть окружность с центром  $O_c$  радиуса  $r_c$  касается гипотенузы в точке  $T$ , продолжений катетов  $BC$  и  $AC$  — в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а  $p$  — полупериметр треугольника  $ABC$ . Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следует, что

$$CM = CB + BM = CB + BT \quad \text{и} \quad CN = CA + AN = CA + AT,$$

поэтому

$$\begin{aligned} CM + CN &= CB + BT + CA + AT = CB + CA + (BT + AT) = \\ &= CB + CA + AB = a + b + c = 2p, \end{aligned}$$

а так как  $CM = CN$ , то  $CM = p$ . Далее, пусть окружность с центром  $O_a$  радиуса  $r_a$  касается катета  $BC$  в точке  $K$ , а продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  — в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Рассуждая аналогично, получаем  $AQ = AP = p$ . Четырёхугольники  $NO_cMC$  и  $KO_aQC$  — квадраты, поэтому

$$r_c = O_cM = CM = p, \quad r_a = CQ = AQ - AC = p - b,$$

значит,  $r_a < r_c$ . Следовательно, радиус внеписанной окружности, касающейся гипотенузы данного прямоугольного треугольника, не может быть равен 7.

Таким образом, возможны только такие случаи: либо радиус окружности, касающейся гипотенузы, равен 23, а радиус окружности, касающейся одного из катетов, равен 7, либо радиусы окружностей, касающихся катетов, равны 7 и 23.

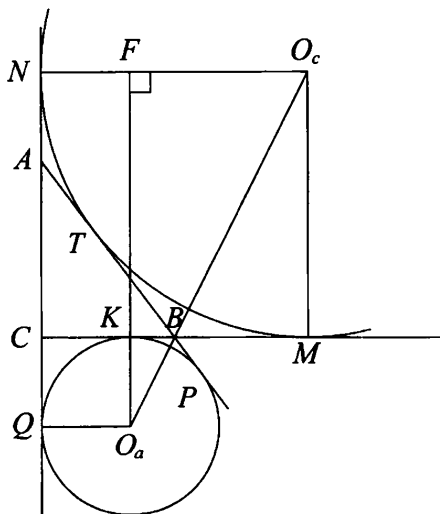
Предположим, что  $r_c = 23$  и  $r_a = 7$  (рис. 1). Опустим перпендикуляр  $O_aF$  из центра меньшей окружности на  $O_cN$ . Тогда

$$O_aF = QN = QC + CN = O_aK + O_cM = r_a + r_c = 7 + 23 = 30,$$

$$O_cF = MK = CM - CK = r_c - r_a = 23 - 7 = 16.$$

Следовательно,

$$O_aO_c = \sqrt{O_aF^2 + O_cF^2} = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34.$$



**Рис. 1**

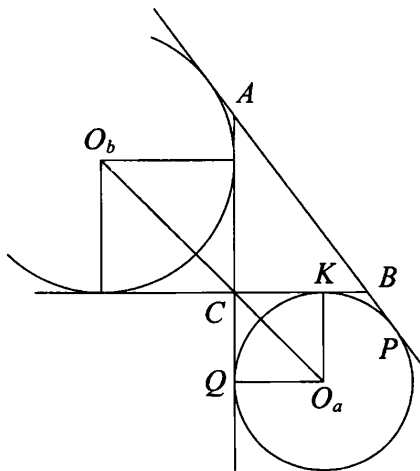


Рис. 2

Пусть теперь  $r_b = 23$  и  $r_a = 7$  (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому точки  $O_a$ ,  $C$  и  $O_b$  лежат на одной прямой. Следовательно,

$$O_a O_b = O_a C + C O_b = r_a \sqrt{2} + r_b \sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 23\sqrt{2} = 30\sqrt{2}.$$

Ответ: 34 или  $30\sqrt{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на отрезке  $[0; 1]$  существует хотя бы одно число  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$a + |a + 1 - x| \leq 3x - x^2 - 1.$$

**Решение.** Преобразуем неравенство:

$$a + |a + 1 - x| \leq 3x - x^2 - 1; \quad |x - (a + 1)| \leq 3x - x^2 - a - 1;$$

$$\begin{cases} x - a - 1 \leq 3x - x^2 - a - 1, \\ x - a - 1 \geq -3x + x^2 + a + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 2) \leq 0, \\ a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1. \end{cases}$$

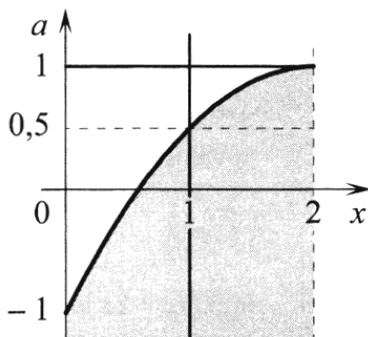
Неравенство  $x(x - 2) \leq 0$  определяет на плоскости  $Oxa$  полосу, заключённую между прямыми  $x = 0$  и  $x = 2$ .  
Неравенство

$$a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

задаёт часть плоскости, ограниченную сверху параболой.

Из рисунка видно, что на отрезке  $[0; 1]$  есть значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству, только если  $a \leq 0,5$ .

Ответ:  $(-\infty; 0,5]$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

- а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?
- б) Докажите, что число её членов меньше 100.
- в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
- г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

**Решение.** а) Да, например, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

б) Можно считать, что разность  $d$  прогрессии положительна. Пусть разность имеет  $k$  цифр. Тогда при переходе от какого-либо члена последовательности к следующему  $(k+1)$ -й разряд либо не меняется, либо увеличивается на 1. Так как цифра 9 запрещена, возможно не больше 8 переходов со сменой этого разряда. Может случиться несколько членов подряд с одной и той же цифрой в  $(k+1)$ -м разряде. Назовём такие члены группой. Всего таких групп не более 9. Обозначим длину группы  $L$ . Найдём наибольшую возможную длину группы. Так как  $d$  —  $k$ -значное число, каждый переход, не меняющий  $(k+1)$ -й разряд, увеличивает  $k$ -й разряд. И так как цифра 9 запрещена в том числе в  $k$ -м разряде, таких переходов подряд может быть не более 8. Следовательно,  $L \leq 9$ , а в прогрессии не более  $9 \cdot L = 81$  членов.

в) Если в прогрессии нет переходов со сменой  $(k+1)$ -го разряда, то членов прогрессии не больше 9. Пусть такие переходы есть. Рассмотрим член прогрессии, стоящий перед таким переходом. Так как он не содержит 9, его  $k$ -значный «хвост» (остаток от деления на  $10^k$ ) не больше

$$\underbrace{88 \dots 88}_{k \text{ раз}}.$$

Но при прибавлении  $d$  должен произойти переход через десяток в  $(k+1)$ -м разряде. Следовательно,

$$d > \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ раз}}.$$

Рассмотрим такую группу членов прогрессии

$$a > m, a_{m+1}, \dots, a_{m+L-1},$$

что  $(k+1)$ -й разряд не меняется. Тогда  $k$ -значные хвосты сами образуют арифметическую прогрессию с той же разностью:

$b_m, b_{m+1}, \dots, b_{m+L-1}$ . Но

$$b > m \geq 0,$$

$$b_{m+L-1} = b_m + d(L-1) \leq \underbrace{88\dots 88}_{k \text{ раз}},$$

следовательно,  $L \leq 8$ .

г) Пример нужной прогрессии даёт прогрессия с первым членом 1 и разностью 125.

Ответ: а) да; г) например, 1, 126, ..., 8876.

1	1001	2001	...	8001
126	1126	2126	...	8126
251	1251	2251	...	8251
376	1376	2376	...	8376
501	1501	2501	...	8501
626	1626	2626	...	8626
751	1751	2751	...	8751
876	1876	2876	...	8876

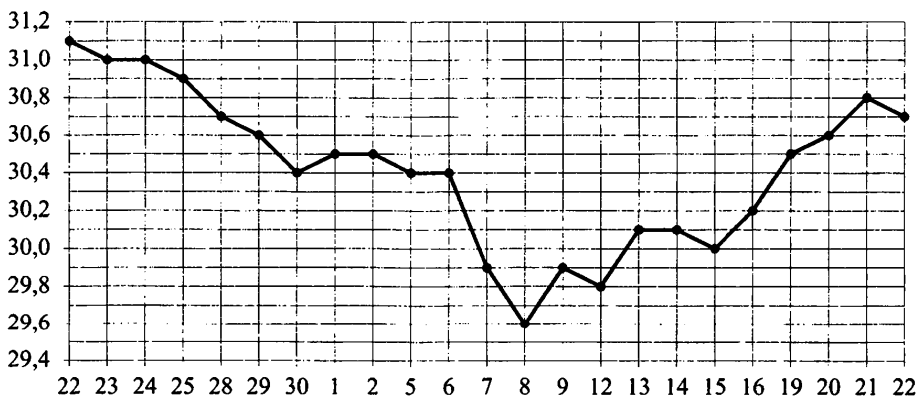
Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены все пункты	4
Верно выполнены три пункта из четырёх	3
Верно выполнены два пункта из четырёх	2
Верно выполнен один пункт из четырёх	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

## Часть 1

**B1** Рост Джона 5 футов 11 дюймов. Выразите рост Джона в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,5 см. Результат округлите до целого числа.

--	--	--	--	--	--	--	--

**B2** На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Определите по рисунку наибольший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.

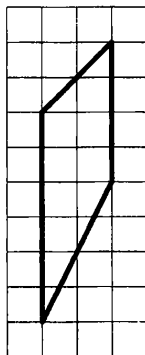


--	--	--	--	--	--	--	--



**В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки  $1\text{ см} \times 1\text{ см}$  (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ:



**В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг  $R$  бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного  $0,01$  средней цены  $P$ , показателей функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый показатель оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(4F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценка каждого показателя для нескольких моделей пылесосов. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей пылесосов.

Модель пылесоса	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4 800	4	1	4
Б	3 700	2	2	2
В	3 800	4	4	2
Г	6 000	4	1	3

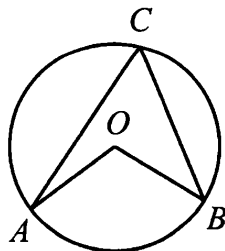
Ответ:

**В5** Найдите корень уравнения  $\log_3(-2 - x) = 2$ .

Ответ:

**В6** Центральный угол на  $48^\circ$  больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

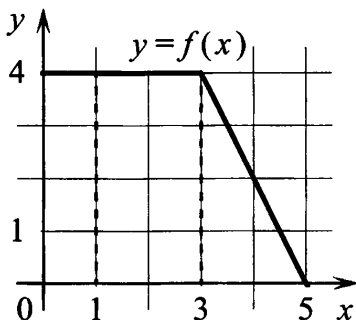


**В7** Найдите значение выражения  $(\sqrt{54} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$ .

**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--

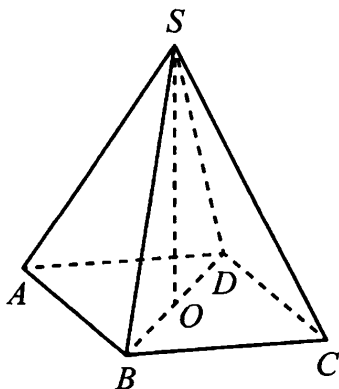
**B8** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(5) - F(1)$ , где  $F(x)$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ .



**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--

**В9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точка  $O$  является центром основания,  $SA = 13$ ,  $BD = 10$ . Найдите длину отрезка  $SO$ .



**Ответ:**

--	--	--	--	--	--	--	--



**Часть 2**

Запишите полное обоснованное решение и ответ.

**C1** а) Решите уравнение  $7 \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**C2** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины рёбер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ . Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

**C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leq 7, \\ \frac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leq x. \end{cases}$$

**C4** Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами  $KN = 11$ ,  $MN = 8$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 4 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**C6** Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 5(30k + 11).$$

(Для натурального числа  $n$  символом  $n!$  обозначается произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .)

## Критерии оценивания

**С1** а) Решите уравнение  $7 \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

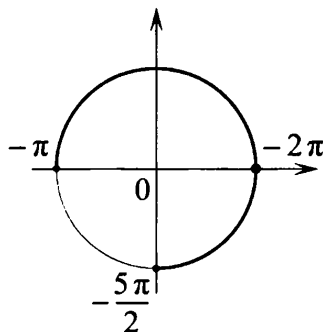
$$\begin{aligned}\frac{7}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} - 6 &= 0; \\ \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)\left(\frac{7}{\cos x} + 6\right) &= 0; \\ (\cos x - 1)\left(\cos x + \frac{7}{6}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Значит, либо  $\cos x = 1$ , откуда  $x = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\cos x = -\frac{7}{6}$ , что невозможно.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ .

Получим число  $-2\pi$ .

**Ответ:** а)  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-2\pi$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

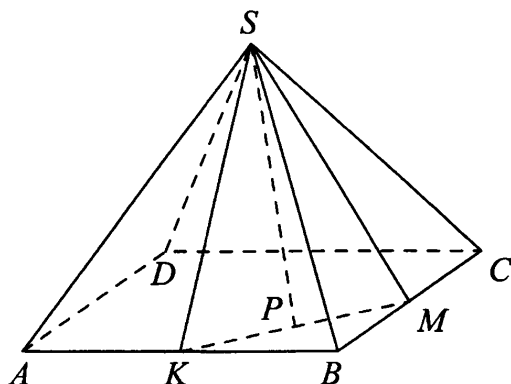
**С2** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины рёбер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ . Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

**Решение.** Изобразим указанное в условии сечение — треугольник  $SKM$ ;

$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Проведем в треугольнике  $SKM$  высоту  $SP$ , где  $P$  — середина  $KM$ . Значит,

$$KP = \frac{1}{2}KM = 2\sqrt{2}.$$



Из прямоугольного треугольника  $SKA$  находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}.$$

Из прямоугольного треугольника  $SPK$  находим  $SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{48 - 8} = 2\sqrt{10}$ .

$$\text{Тогда } S_{SKM} = \frac{1}{2}KM \cdot SP = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ:  $8\sqrt{5}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leq 7, \\ \frac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leq x. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство. Сделаем замену  $2^x = y$ . Поскольку  $y > 0$ , на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{6}{y} \leq 7; \quad y^2 - 7y + 6 \leq 0; \quad (y - 1)(y - 6) \leq 0.$$

Значит,  $1 \leq y \leq 6$ , т. е.  $0 \leq x \leq \log_2 6$ .

2. Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leq \frac{x^2 - 4x}{x - 4}; \quad \frac{x(x - 2)}{x - 4} \leq 0, \quad \text{т. е. } x \leq 0; \quad 2 \leq x < 4.$$

3. Учитывая, что  $2 < \log_2 6 < 3$ , находим решение системы:  $x = 0$  или  $2 \leq x \leq \log_2 6$ .

Ответ:  $\{0\} \cup [2; \log_2 6]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С4** Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами  $KN = 11$ ,  $MN = 8$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 4 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .

**Решение.** Пусть точка  $Q$  лежит между  $K$  и  $N$  (рис. 1),  $P$  — точка касания прямой  $MQ$  с данной окружностью. Обозначим  $KQ = x$ .

Из прямоугольного треугольника  $QPK$  по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 16}.$$

Прямоугольные треугольники  $QPK$  и  $QNM$  подобны, поэтому

$$\frac{PK}{PQ} = \frac{MN}{QN},$$

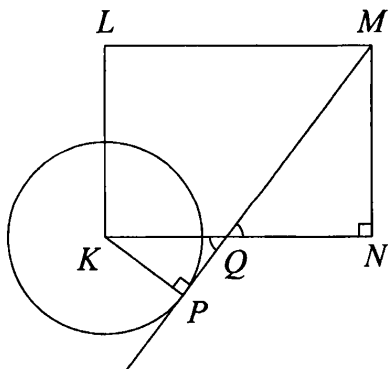


Рис. 1

т. е.

$$\frac{4}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{8}{11 - x}; \quad (11 - x)^2 = 4(x^2 - 16);$$

$$3x^2 + 22x - 185 = 0; \quad x = 5.$$

Если точка  $Q$  лежит на продолжении стороны  $NK$  за точку  $K$  (рис. 2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение  $3x^2 - 22x - 185 = 0$ , из которого находим  $x = \frac{37}{3}$ .

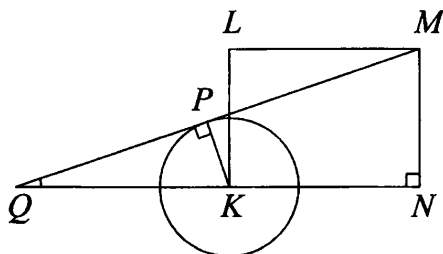


Рис. 2

Ответ: 5 или  $\frac{37}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.



**Решение.** Преобразуем систему:

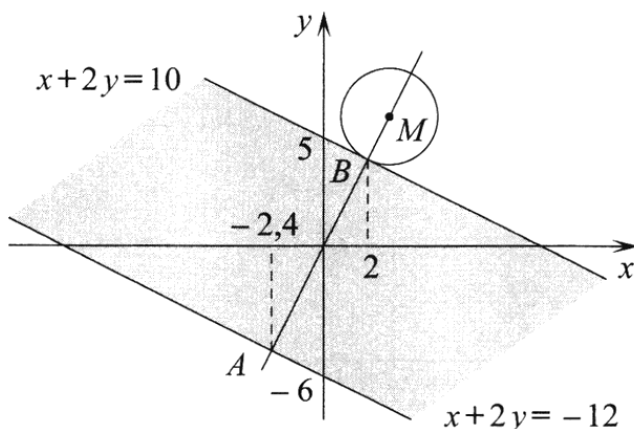
$$\begin{cases} -12 \leq x + 2y \leq 10, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a. \end{cases}$$

Неравенство

$$-12 \leq x + 2y \leq 10$$

задаёт на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых:

$$x + 2y = 10 \quad \text{и} \quad x + 2y = -12.$$



Если  $a < -2$ , то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной.

Если  $a = -2$ , то уравнение принимает вид  $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$  и задаёт единственную точку  $(-2; -4)$ , координаты которой удовлетворяют неравенству  $|-2 - 8 + 1| = 9 < 11$ .

Следовательно, при  $a = -2$  система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай  $a > -2$ . Тогда уравнение

$$(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a$$

определяет окружность радиусом  $r = \sqrt{2 + a}$ . Центр  $M(a; 2a)$  окружности лежит на прямой  $y = 2x$ , которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках  $A(-2, 4; -4, 8)$  и  $B(2; 4)$ . Система имеет единственное решение, только если окружность внешним образом касается полосы в точке  $A$  или точке  $B$ . Если точка касания — точка  $A$ , то  $a < -2, 4$ , что невозможно.

Окружность касается полосы внешним образом в точке  $B$ , только если  $a > 2$  и  $MB = r$ . Получаем

$$(a-2)^2 + (2a-4)^2 = 2+a; \quad 5a^2 - 21a + 18 = 0.$$

Корни:  $a = 3$ ,  $a = 1,2$ . Условию  $a > 2$  удовлетворяет только корень  $a = 3$ .

Ответ:  $-2; 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Решение в целом верное, но допущена арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	3
Обоснованно найдено значение $a = 3$ , но значение $a = -2$ не найдено или не включено в ответ	2
Решение содержит — или верное описание взаимного расположения окружности и полосы; — или верный переход к уравнению относительно $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** Решите в натуральных числах уравнение

$$n^{k+1} - n! = 5(30k + 11).$$

(Для натурального числа  $n$  символом  $n!$  обозначается произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .)

**Решение.** Заметим, что  $5(30k + 11)$  делится на  $n$ . Случай  $n = 1$  не подходит. Простых делителей, меньших 5, число  $5(30k + 11)$  не имеет. Следовательно,  $n \geq 5$ , а значит,  $n!$  делится на 5.

Поскольку правая часть равенства  $n^{k+1} = 5(30k + 11) + n!$  делится на 5, левая часть равенства тоже делится на 5, а значит,  $n$  делится на 5.

Пусть  $n = 5m$ ,  $m > 1$ . Тогда  $5^k \cdot m^{k+1} - 4! \cdot 6 \cdot \dots \cdot (5m) = 30k + 11$ .

Левая часть полученного равенства делится на 5, а правая нет, противоречие.

Пусть  $n = 5$ , тогда  $5^k - 24 = 30k + 11$ ;  $5^{k-1} = 6k + 7$ .

Чтобы правая часть последнего равенства делилась на 5, необходимо, чтобы  $k$  делилось на 5 с остатком 3.

Пусть  $k = 5l + 3$ . Тогда

$$5^{5l+2} = 30l + 25; \quad 5^{5l} - 1 = \frac{6}{5}l; \quad 5^{5l} - 1 - \frac{6}{5}l = 0.$$

Заметим, что функция  $f(l) = 5^{5l} - 1 - \frac{6}{5}l$  равна 0 при  $l = 0$  и строго возрастает при  $l > 0$ , значит, исходное уравнение имеет единственное решение  $n = 5$ ,  $k = 3$ .

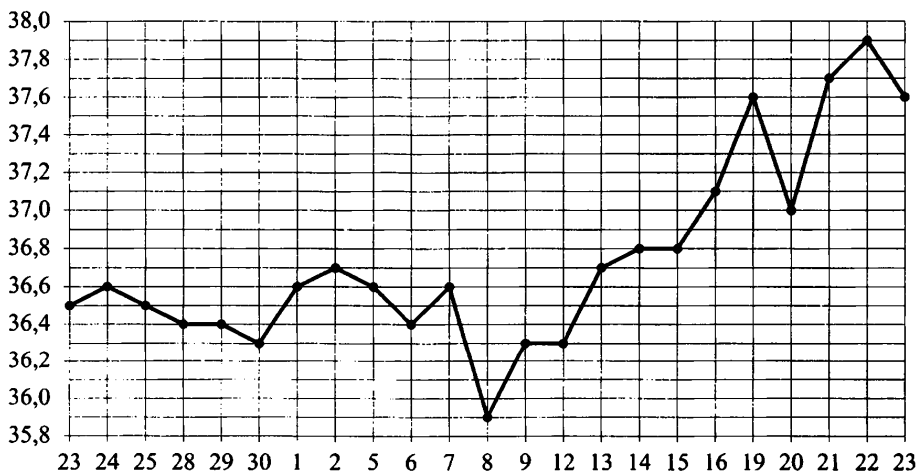
Ответ:  $n = 5$ ,  $k = 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные значения $n$ и $k$	4
Обоснованно получено верное значение $n$ , найдено верное значение $k$ , но не обосновано отсутствие других значений $k$	3
Обоснованно получено верное значение $n$ , но верное значение $k$ не найдено, найдено неверно или ответ содержит лишние значения $k$	2
Верно найдены значения $n$ и $k$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

## Часть 1

**B1** Бегун пробежал 450 метров за 50 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

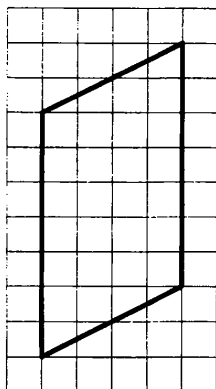
**B2** На рисунке жирными точками показан курс японской йены, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена японской йены в рублях. Определите по рисунку наименьший курс японской йены за указанный период. Ответ дайте в рублях.



**Ответ:**

**В3** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ:



**В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг  $R$  бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного  $0,01$  средней цены  $P$ , показателей функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый показатель оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(3F + 4Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей микроволновых печей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей микроволновых печей.

Модель печи	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5 800	2	2	4
Б	4 200	1	0	1
В	4 300	4	3	2
Г	3 900	2	0	3

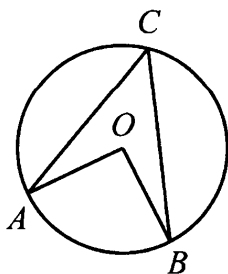
Ответ:

**В5** Найдите корень уравнения  $\log_2(-1 - x) = 1$ .

Ответ:

**В6** Центральный угол на  $36^\circ$  больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

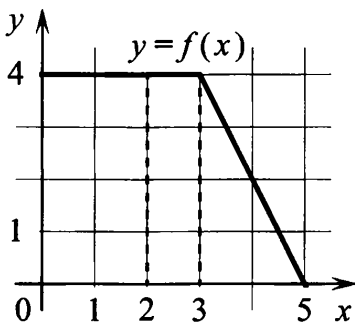
Ответ:



**В7** Найдите значение выражения  $(\sqrt{50} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{8}$ .

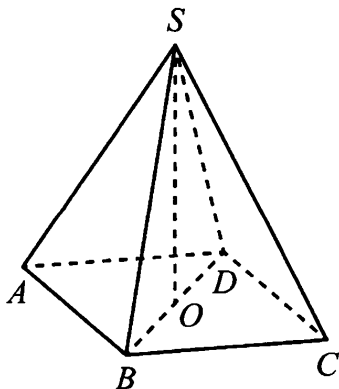
**Ответ:**

**B8** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(5) - F(2)$ , где  $F(x)$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ .



**Ответ:**

**В9** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точка  $O$  является центром основания,  $SD = 5$ ,  $BD = 6$ . Найдите длину отрезка  $SO$ .



**Ответ:**



**Часть 2**

*Запишите полное обоснованное решение и ответ.*

**C1** а) Решите уравнение  $4 \operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**C2** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины ребер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

**C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{-x} \leq 11, \\ \frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq x. \end{cases}$$

**C4** Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами  $KN = 13$ ,  $MN = 6$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 3 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .

**C5** Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**C6** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?



## Критерии оценивания

Решение и критерии оценивания варианта 6

**[C1]** а) Решите уравнение  $4 \operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

**Решение.** а) Запишем уравнение в виде

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} - 1 = 0; \quad 4 \cdot \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{4}\right) = 0;$$

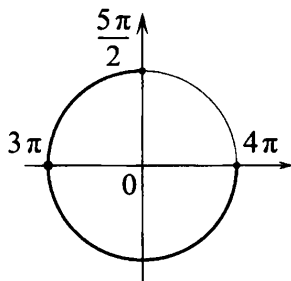
$$(\cos x + 1)(\cos x - 4) = 0.$$

Значит, либо  $\cos x = -1$ , т.е.  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , либо  $\cos x = 4$ , что невозможно.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

Получим число  $3\pi$ .

Ответ: а)  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $3\pi$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а или в п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

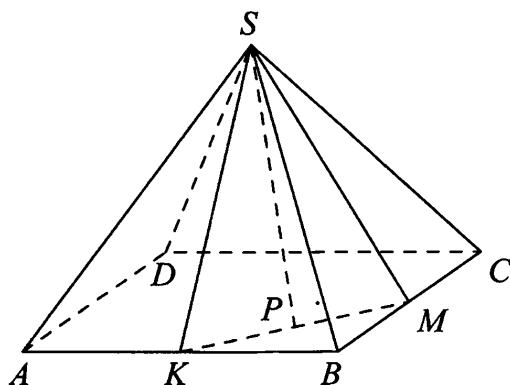
**[C2]** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  проведено сечение через середины ребер  $AB$  и  $BC$  и вершину  $S$ . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

**Решение.** Изобразим указанное в условии сечение — треугольник  $SKM$ ;

$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Проведем в треугольнике  $SKM$  высоту  $SP$ , где  $P$  — середина  $KM$ . Значит,

$$KP = \frac{1}{2}KM = \sqrt{2}.$$



Из прямоугольного треугольника  $SKA$  находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}.$$

Из прямоугольного треугольника  $SPK$  находим  $SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{21 - 2} = \sqrt{19}$ .

$$\text{Тогда } S_{SKM} = \frac{1}{2} KM \cdot SP = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{19} = \sqrt{38}.$$

Ответ:  $\sqrt{38}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{-x} \leq 11, \\ \frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq x. \end{cases}$$

**Решение.** 1. Решим первое неравенство. Сделаем замену  $3^x = y$ . Поскольку  $y > 0$ , на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{10}{y} \leq 11; \quad y^2 - 11y + 10 \leq 0; \quad (y - 1)(y - 10) \leq 0.$$

Значит,  $1 \leq y \leq 10$ , т. е.  $0 \leq x \leq \log_3 10$ .

2. Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq \frac{x^2 - 3x}{x - 3}; \quad \frac{x(x - 2)}{x - 3} \leq 0, \quad \text{т. е. } x \leq 0; \quad 2 \leq x < 3.$$

3. Учитывая, что  $2 < \log_3 10 < 3$ , находим решение системы:  $x = 0$  или  $2 \leq x \leq \log_3 10$ .

Ответ:  $\{0\} \cup [2; \log_3 10]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С4** Дан прямоугольник  $KLMN$  со сторонами  $KN = 13$ ,  $MN = 6$ . Прямая, проходящая через вершину  $M$ , касается окружности с центром  $K$  радиуса 3 и пересекается с прямой  $KN$  в точке  $Q$ . Найдите  $QK$ .

**Решение.** Пусть точка  $Q$  лежит между  $K$  и  $N$  (рис. 1),  $P$  — точка касания прямой  $MQ$  с данной окружностью. Обозначим  $KQ = x$ .

Из прямоугольного треугольника  $QPK$  по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Прямоугольные треугольники  $QPK$  и  $QNM$  подобны, поэтому

$$\frac{PK}{PQ} = \frac{MN}{QN},$$

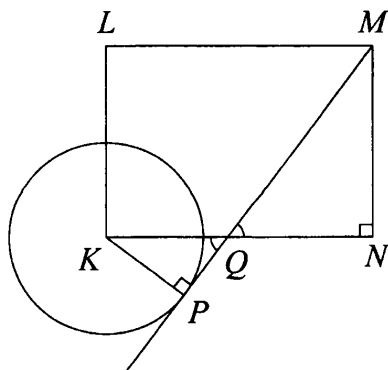


Рис. 1

т. е.

$$\frac{3}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{6}{13-x}; \quad (13-x)^2 = 4(x^2-9);$$

$$3x^2 + 26x - 205 = 0; \quad x = 5.$$

Если точка  $Q$  лежит на продолжении стороны  $NK$  за точку  $K$  (рис. 2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение  $3x^2 - 26x - 205 = 0$ , из которого находим  $x = \frac{41}{3}$ .

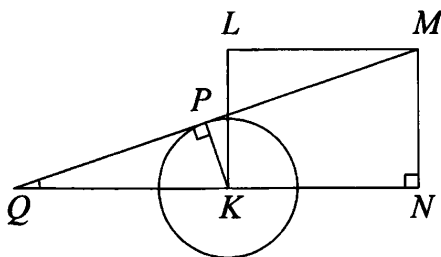


Рис. 2

Ответ: 5 или  $\frac{41}{3}$ .

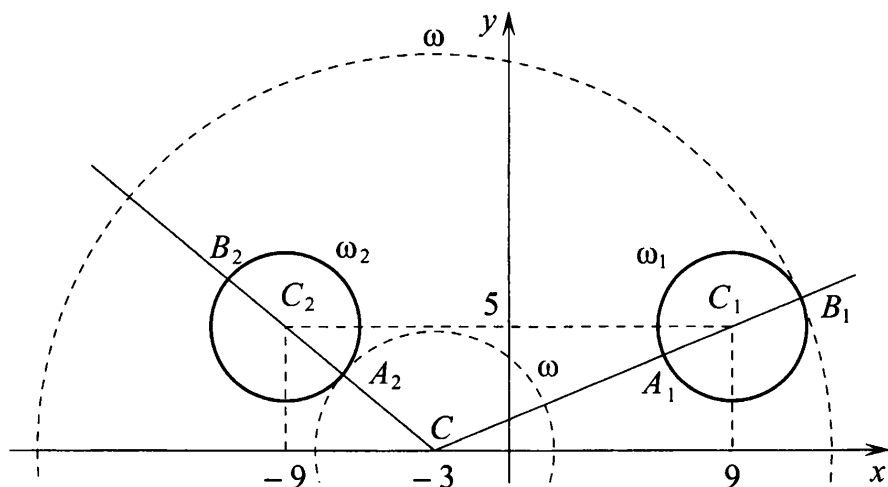
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**С5** Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $(|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$  задаёт окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $C_1(9; 5)$  радиуса 3, а если  $x < 0$ , то оно задаёт окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $C_2(-9; 5)$  того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра  $a$  уравнение

$$(x + 3)^2 + y^2 = a^2$$

задаёт окружность  $\omega$  с центром в точке  $C(-3; 0)$  радиуса  $a$ . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых окружность  $\omega$  имеет единственную общую точку с объединением окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Из точки  $C$  проведём луч  $CC_1$  и обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_1$ , где  $A_1$  лежит между  $C$  и  $C_1$ . Так как  $CC_1 = \sqrt{(9+3)^2 + 5^2} = 13$ , то  $CA_1 = 10$ ,  $CB_1 = 16$ .

При  $a < CA_1$  или  $a > CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  не пересекаются.

При  $CA_1 < a < CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_1$  или  $a = CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  касаются.

Из точки  $C$  проведём луч  $CC_2$  и обозначим через  $A_2$  и  $B_2$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_2$ , где  $A_2$  лежит между  $C$  и  $C_2$ . Так как  $CC_2 = \sqrt{(-9+3)^2 + 5^2} = \sqrt{61}$ , то  $CA_2 = \sqrt{61} - 3$ ,  $CB_2 = \sqrt{61} + 3$ .

При  $a < CA_2$  или  $a > CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  не пересекаются.

При  $CA_2 < a < CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_2$  или  $a = CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность  $\omega$  касается ровно одной из двух окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и не пересекается с другой. Так как

$$CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1,$$

условию задачи удовлетворяют только числа  $a = \sqrt{61} - 3$  и  $a = 16$ .

Ответ:  $\sqrt{61} - 3$ ; 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения $a$ , но — или в ответ включены лишние значения $a$ ; — или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение $a$	2
Задача сведена к исследованию — или взаимного расположения трёх окружностей; — или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**С6** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

**Решение.** а) Покажем, что пяти чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Действительно, пусть такие пять чисел найдутся. Обозначим первый член прогрессии  $b_1$ , а знаменатель прогрессии  $q$ . Тогда

$$1512 = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 \cdot b_1 q^4 = b_1^5 q^{10} = (b_1 q^2)^5,$$

т. е. 1512 является пятой степенью. Противоречие.

б) Покажем, что четырёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, быть не может. Пусть среди натуральных чисел, дающих

в произведении 1512, есть четыре целых числа, образующих геометрическую прогрессию. Обозначим первый член прогрессии  $b_1$ , а знаменатель прогрессии  $q = \frac{m}{n} > 1$  ( $m, n$  — взаимно простые числа, причём  $m > 1$ ). Тогда произведение этих четырёх чисел будет являться делителем числа 1512.

Заметим, что произведение чисел равно  $\frac{b_1^4 m^6}{n^6}$ . Так как числа  $m, n$  взаимно просты, простые множители числа  $m$  будут входить в состав произведения чисел в той степени, в которой они входят в число  $b_1^4 m^6$ , т. е. как минимум в шестой степени. Однако  $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$ , т. е. простых множителей, входящих в шестой степени, в составе этого числа нет.

в) Приведём пример пяти чисел, произведение которых равно 1512 и среди которых есть три образующих геометрическую прогрессию: 1, 2, 4, 9, 21.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены п. а, б, в	4
Верно выполнены п. б и один пункт из двух: а, в	3
Верно выполнены п. б или а и в	2
Верно выполнен один пункт из двух: а или в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

# Система оценивания экзаменационной работы по математике

## Часть 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

## Часть 2

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий части 2, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов. Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают. В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

## Ответы к заданиям части 1

Задание	Вариант К1	Вариант К2	Вариант А3	Вариант А4	Вариант 5	Вариант 6
В1	9	72	63,5	231	180	32,4
В2	7	650 000	7	56 000	31,1	35,9
В3	12	16	9	12	10	28
В4	550	13	58,2	13	66	61
В5	2	2,5	3	-76	-11	-3
В6	15	6	114	39	48	36
В7	1	6	-2	1	6	8
В8	6	-0,25	6	9	12	8
В9	78	6,5	12	8	12	4
В10	0,998	0,35	0,91	0,8	0,8	0,4
В11	4	125	80	8	5	8
В12	11	6250	8	2250	25	7000
В13	28	35	26	75	25	100
В14	8	3	243	3	8	16



# Содержание

Предисловие . . . . .	3
Инструкция по выполнению работы . . . . .	5
Вариант К1 . . . . .	6
Часть 1 . . . . .	6
Часть 2 . . . . .	10
Критерии оценивания . . . . .	12
Вариант К2 . . . . .	20
Часть 1 . . . . .	20
Часть 2 . . . . .	25
Критерии оценивания . . . . .	27
Вариант А3 . . . . .	34
Часть 1 . . . . .	34
Часть 2 . . . . .	39
Критерии оценивания . . . . .	41
Вариант А4 . . . . .	50
Часть 1 . . . . .	50
Часть 2 . . . . .	54
Критерии оценивания . . . . .	55
Вариант 5 . . . . .	63
Часть 1 . . . . .	63
Часть 2 . . . . .	67
Критерии оценивания . . . . .	68
Вариант 6 . . . . .	75
Часть 1 . . . . .	75
Часть 2 . . . . .	79
Критерии оценивания . . . . .	80
Система оценивания экзаменационной работы по математике	87
Ответы к заданиям части 1 . . . . .	87