

ЕГЭ

А. В. СЕМЕНОВ
А. С. ТРЕПАЛИН
И. В. ЯЩЕНКО

ПО МАТЕМАТИКЕ:

ЗАВЕРШАЮЩИЙ ЭТАП ПОДГОТОВКИ



- Каков будет платёж за электроэнергию, если 1 января счётчик показывал 88 742 кВт·ч, а 1 февраля — 88 940 кВт·ч? Стоимость одного кВт·ч составляет 3,5 рубля?

- Найдите корень уравнения $\sqrt{3}x - 2 = 5$.

- В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 40$, $AC = 60$. Найдите боковое ребро SA .

А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко

**ЕГЭ по математике:
завершающий
этап подготовки**

Издание соответствует
новому Федеральному государственному
образовательному стандарту (2012 г.)

Издательство МЦНМО
2012

УДК 373.167.1
ББК 22.141я721
С30

Семенов А. В., Трепалин А. С., Ященко И. В.

С30 ЕГЭ по математике: завершающий этап подготовки. — М.: МЦНМО, 2012. — 112 с. — ISBN 978-5-4439-0015-5

Книга содержит оригинальные варианты репетиционного экзамена по математике в форме единого государственного экзамена, прошедшего 17 марта 2012 года в г. Москве. Варианты, решения, тренировочные задания помогут учителям организовать итоговое повторение и подготовку одиннадцатиклассников к ЕГЭ. Статистика выполнения каждого задания и типичные ошибки, допущенные выпускниками, адресованы учителям и методистам для коррекции завершающего этапа подготовки к экзамену.

Книга будет полезна выпускникам средней школы, их родителям, учителям и методистам.

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (2012 г.).

ББК 22.141я721

ISBN 978-5-4439-0015-5

© Семенов А.В.,
Трепалин А.С.,
Ященко И.В., 2012
© МЦНМО, 2012

Оглавление

Введение	4
Репетиционный экзамен 2012 г.	7
Вариант 1	7
Вариант 2	12
Вариант 3	17
Вариант 4	22
Ответы к заданиям части В	27
Комментарии к части В	28
Краткие решения заданий части С	62
Вариант 1	62
Вариант 2	70
Вариант 3	78
Вариант 4	86
Основные ошибки, допущенные при выполнении за- даний части С	94
Диагностическая работа 1	99
Диагностическая работа 2	103
Ответы к тренировочным заданиям и диагностиче- ским работам	108

Введение

Дорогие ребята, родители!

До экзамена остается совсем немного времени. На завершающем этапе подготовки особенно важно правильно распределить свои силы. Конечно, математику за месяц не выучишь, и экзамен покажет в первую очередь то, как вы учили математику на протяжении долгого времени. Но что-то закрепить, а также снизить риск случайных ошибок — вполне можно.

В этом вам поможет книга, которую вы держите в руках. В пособие включены четыре варианта репетиционного экзамена по математике в форме единого государственного экзамена, прошедшего 17 марта 2012 года, ответы к заданиям первой части и решения заданий второй части. Каждый вариант писали более 12 тысяч выпускников. Статистика выполнения каждого задания первой части, наиболее массовые ошибки, тренировочные упражнения даны в этой книге.

Прежде чем начать работать с пособием, решите, чего вы хотите достичь на ЕГЭ по математике.

Если вы хотите только сдать ЕГЭ, пройдя минимальный порог (который сейчас соответствует 5 задачам первой части), то внимательно ознакомьтесь с материалом по задачам части В, в первую очередь обратив внимание на практические задачи (умение их решать, кстати, пригодится не только на экзамене, но и после школы — в обычной жизни).

Решите первую часть в репетиционных вариантах, а если какие-то задачи вызвали у вас затруднения, дополнительно решите тренировочные задания на эту тему. Особое внимание уделите задачам, в которых способ решения вам известен, но имеются «случайные» ошибки.

Если какие-то задачи вы решать не умеете, то отбросьте их (но только чтобы осталось не менее 7–8 задач, на которые вы возлагаете надежды на экзамене). Одна из мас-

совых ошибок связана с заполнением бланков ответов №1: пропустив задачу, оставьте пустой строку ответа на это задание — не надо в эту строку записывать ответ к другому заданию.

Обратите особое внимание на чтение и понимание условия задания, на отсутствие арифметических ошибок (не забудьте проверить лишний раз свои вычисления!). В практических задачах соотнесите полученный результат со здравым смыслом. Помните, в практических задачах этого пособия (и на экзамене) используются реальные данные, так что оплата электроэнергии в квартире за месяц не может, конечно, составлять 260 тыс. руб., да и скорость течения реки 32 километра в час не бывает, также как и нельзя получить 5689 рублей на сдачу с 1000 рублей.

Если вам нужен балл для поступления в вуз, сосредоточьтесь на полном выполнении первой части — решайте все тренировочные задачи, следя за временем выполнения. Вам нужно не просто сделать безошибочно все задачи, но и постараться уложиться в 90–140 минут.

Занятия по решению задач части В можно построить по тематическому принципу: практические задачи (В1, В2, В4, В10, В12), геометрия (В3, В6 — планиметрия, В9, В11 — стереометрия), алгебра (В5, В7, В13), начала анализа (В8, В14).

Затем приступите к выполнению заданий вторых частей вариантов — решайте только те задачи, которые планируете решать на экзамене, исходя из того времени, которое остается после выполнения заданий первой части. На каждую задачу планируйте затратить не менее 20 минут.

В завершение подготовки проверьте себя на диагностических вариантах. Их надо выполнять в спокойной, приближенной к экзаменационной, обстановке (отключите мобильный телефон, попросите вас не беспокоить все 4 часа).

Удачи на экзамене!

Дорогие учителя!

В ваших руках книга, содержащая не только оригинальные варианты репетиционного экзамена, ответы и решения, но и сведения о типичных ошибках. С учетом массово допускаемых ошибок можно скорректировать завершающий этап подготовки, сформировать индивидуальную траекторию для ваших учеников.

Задачи из этой книги, открытый банк математических задач, качественные пособия для подготовки к единому государственному экзамену помогут подготовить одиннадцатиклассников к экзамену.

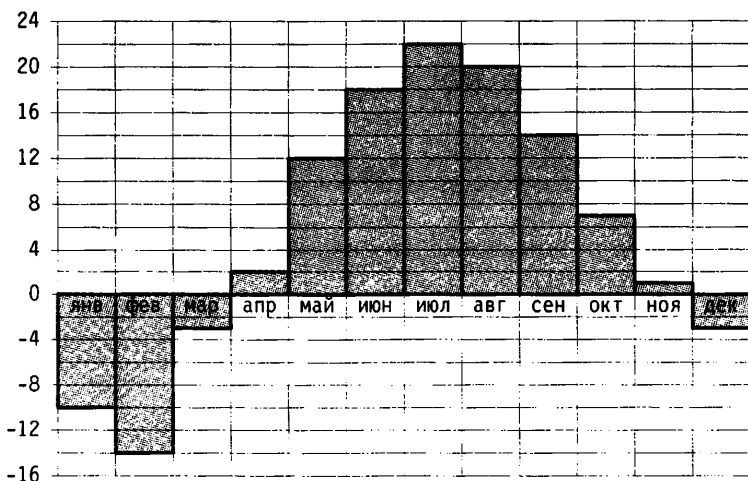
Успехов!

Репетиционный экзамен 2012 г. Вариант 1

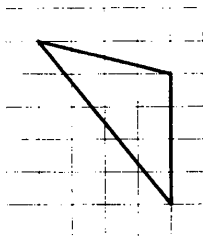
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1.** Теплоход рассчитан на 600 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?
- В2.** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году с отрицательной среднемесячной температурой?



- В3.** Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



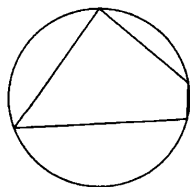
- В4.** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Барнаул	Тверь	Псков
Пшеничный хлеб (батон)	12	11	11
Молоко (1 литр)	25	26	26
Картофель (1 кг)	16	9	14
Сыр (1 кг)	260	240	235
Мясо (говядина)	300	280	280
Подсолнечное масло (1 литр)	50	38	62

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 кг картофеля, 1 кг сыра, 3 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

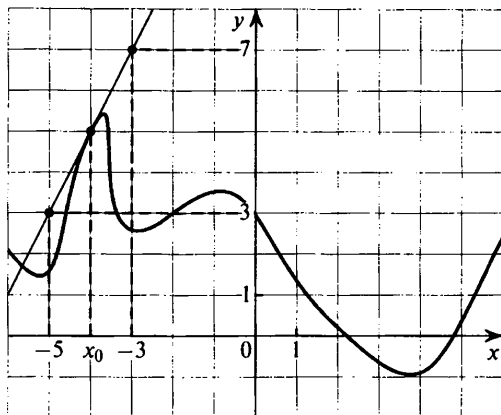
- В5.** Найдите корень уравнения $\sqrt{3x - 2} = 5$.

- В6.** Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 52° и 95° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



- В7.** Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- В8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



- В9.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 40$, $AC = 60$. Найдите боковое ребро SA .
- В10.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.
- В11.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в 10 раз?
- В12.** Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моля воздуха объёмом $V_1 = 10$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 7,9$ постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 14220 Дж?

В13. Семь рубашек дешевле одной куртки на 9%. На сколько процентов одиннадцать рубашек дороже одной куртки?

В14. Найдите точку минимума функции

$$y = (2x^2 - 16x + 16)e^{28-x}.$$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение

$$\begin{aligned} 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + 16^{\sin x - 0.25} - 3 \cdot 4^{\sin x - 0.5} + 1 = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right). \end{aligned}$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$. Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x(\log_2 x + \log_4 x + 1) \geq \\ \geq \frac{1}{\log_2 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 3^x + 3^{x+1} > 4^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

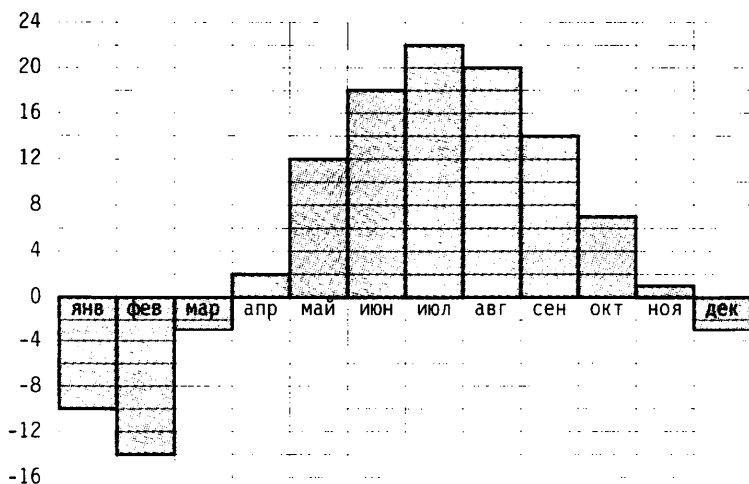
- С4.** Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- С5.** При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?
- С6.** Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.
- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Репетиционный экзамен 2012 г. Вариант 2

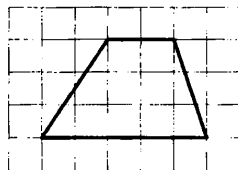
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1.** Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 10%. Книга стоит 370 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?
- В2.** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме среднемесячную температуру в сентябре 2009 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



- В3.** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



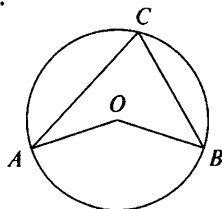
- В4.** Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	1,9 руб. за 1 Мб
План «600»	636 руб. за 600 Мб трафика в месяц	1,1 руб. за 1 Мб сверх 600 Мб
План «900»	738 руб. за 900 Мб трафика в месяц	0,8 руб. за 1 Мб сверх 900 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 700 Мб в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 700 Мб?

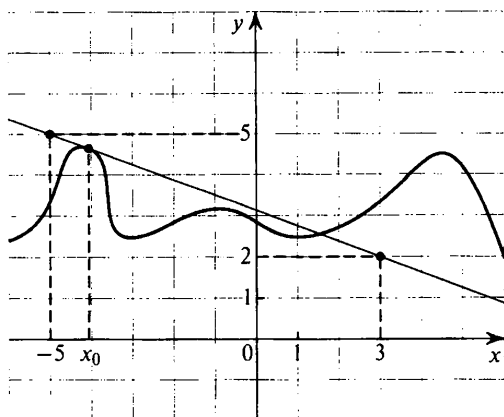
- В5.** Найдите корень уравнения $7^{8+x} = 343$.

- В6.** Найдите центральный угол AOB , если он на 72° больше вписанного угла ACB , опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

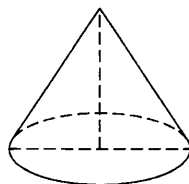


- В7.** Найдите значение выражения $\frac{\log_3 36}{\log_3 6}$.

- В8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



- В9.** Высота конуса равна 11, а длина образующей — 61. Найдите диаметр основания конуса.



- В10.** В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 9 очков. Результат округлите до сотых.
- В11.** Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь его поверхности.
- В12.** Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы M кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{cm(t_2 - t_1)}{qM} \cdot 100\%$, где $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг \cdot $^{\circ}$ С) — теплоёмкость воды, $q = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшую массу дров, которые понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть 166 кг воды от 10° С до температуры кипения,

если известно, что КПД кормозапарника 28%. Ответ выразите в килограммах.

- В13.** Весной катер идёт против течения в 2 раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{2}{3}$ медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч), если скорость катера и весной, и летом — одинакова.

- В14.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 24\sqrt{3} \cos x + 12\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 18$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

- С1.** а) Решите уравнение

$$\begin{aligned} 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \sin 2x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right). \end{aligned}$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- С2.** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $D_1 MK$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x(\log_3 x + \log_9 x + 2) \geq \\ \qquad \qquad \qquad \geq \frac{1}{\log_3 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 4^x + 4^{x+1} > 5^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

С5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет ровно три корня?

С6. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 16, либо в 9 раз. Сумма всех членов последовательности равна 137.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

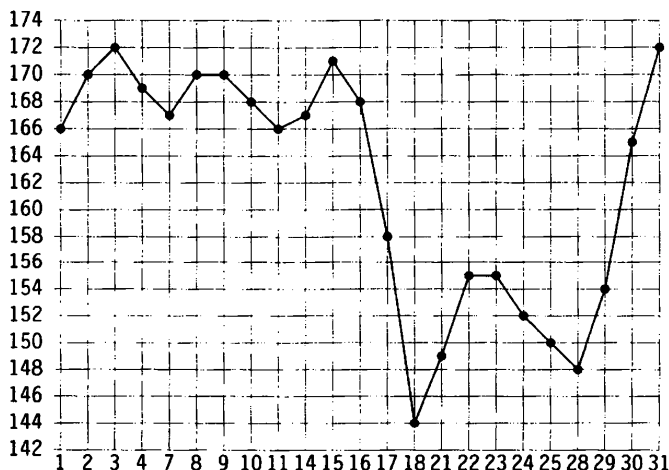
Репетиционный экзамен 2012 г. Вариант 3

Часть 1

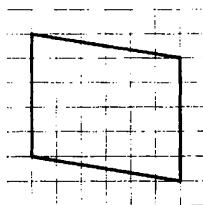
Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек. Счётчик электроэнергии 1 января показывал 88742 киловатт-часа, а 1 февраля показывал 88940 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за январь?

В2. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена палладия была наименьшей за указанный период.



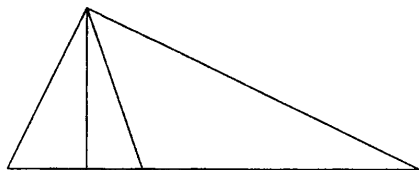
- В3.** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- В4.** Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 810 рублей. Автомобиль расходует 14 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 20,5 рубля за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

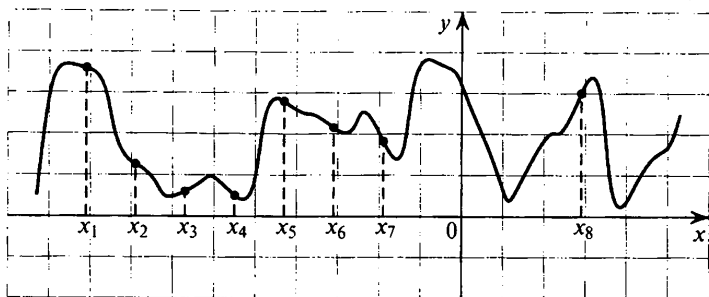
- В5.** Найдите корень уравнения $\log_5(3 - x) = 2$.

- В6.** Острые углы прямоугольного треугольника равны 64° и 26° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



- В7.** Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{6}}$.

- В8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



- В9.** Найдите расстояние между вершинами D и C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, для которого $AB = 15$, $AD = 6$, $AA_1 = 8$.
- В10.** В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменов: 22 из Японии, 12 из Китая, остальные — из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.
- В11.** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 60.
- В12.** Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 220 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.
- В13.** Игорь и Паша красят забор за 14 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 35 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?
- В14.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - x^2 - 5x - 7$$

на отрезке $[-4; 3]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. а) Решите уравнение

$$58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + 81^{\cos x - 0,25} - 4 \cdot 9^{\cos x - 0,5} + 1 = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right).$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 8$. Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_{\frac{x}{3}}(\log_2 x + \log_8 x - 1) \geq \\ \geq \frac{1}{\log_2 \frac{x}{3}} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 2^x + 2^{x+1} > 3^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

C4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 15. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

C5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет более трёх корней?

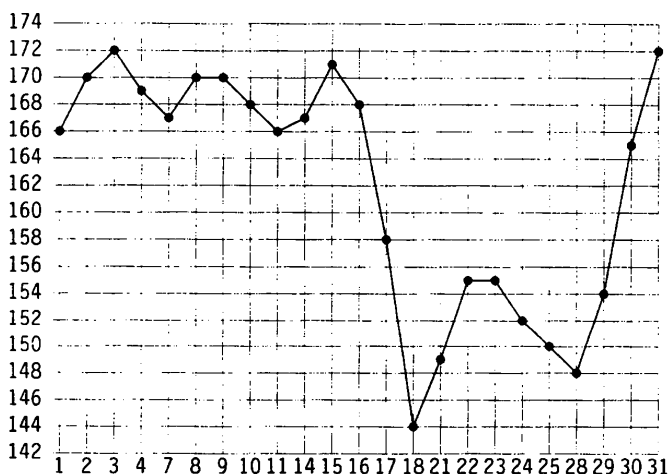
- С6.** Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 8, либо в 5 раз. Сумма всех членов последовательности равна 141.
- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
 - б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Репетиционный экзамен 2012 г. Вариант 4

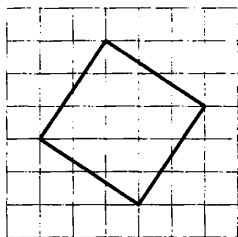
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1.** На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 22 литра бензина по цене 33,2 руб. за литр. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?
- В2.** На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях.



- В3.** Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

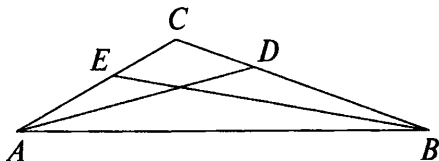


- В4.** Для изготовления книжных полок требуется заказать 24 одинаковых стекла в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,15 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	500	75
В	525	70
С	575	65

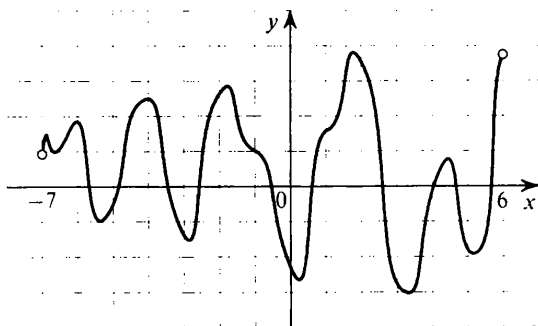
- В5.** Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-2} = 4$.

- В6.** В треугольнике ABC угол C равен 166° , AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.



- В7.** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- В8.** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 5]$.



- В9.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CC_1 = 9$, $AB = 2$, $B_1 C_1 = 6$. Найдите длину диагонали BD_1 .
- В10.** Фабрика выпускает сумки. В среднем на 180 качественных сумок приходится десять сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
- В11.** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 63 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.
- В12.** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 144$ мг. Период его полураспада $T = 3$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 9 мг?
- В13.** Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 672 литра она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 700 литров?

В14. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x + 7) - 10x + 11.$$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение

$$\begin{aligned} 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \cos 2x - \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - 1 &= \\ &= 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right). \end{aligned}$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 8$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $D_1 MK$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x(\log_3 x + \log_{27} x + 2) \geq \\ \geq \frac{1}{\log_3 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 286^x + 6^{x+1} > 7^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 21. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 29. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

- С5.** При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет более трёх корней?
- С6.** Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 93.
- а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?
- б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Ответы к заданиям части В

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
B1	13	333	693	269,6
B2	4	14	18	28
B3	8	10,5	30	13
B4	381	738	2009	3570
B5	9	−5	−22	0,75
B6	128	144	19	173
B7	−0,1	2	2	0,5
B8	2	−0,375	6	5
B9	50	120	17	11
B10	0,375	0,11	0,32	0,95
B11	100	24	180	7
B12	2,5	27	11	12
B13	43	4	12	28
B14	2	54	−4	−6,9

Комментарии к части В

Задание В1

Статистика выполнения задания

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	89,71	89,53	70,01	75,93

Плата по счетчику за электроэнергию вызвала наибольшие затруднения. 3,58% учащихся, решавших этот вариант, просто перемножили показание счетчика на 1 января и стоимость 1 киловатт-часа; 2,57% указали в ответе число, в 10 раз большее правильного ответа; 1,88% учащихся перемножили показание счетчика на 1 февраля и стоимость 1 киловатт-часа.

Почти 24% не смогли вычислить, сколько стоит 22 литра бензина и сколько сдачи нужно получить с 1000 рублей. Есть ответы, содержащие четырехзначные числа.

5,41% округлили в первом варианте число 12,4 как 12 (не учли, что округление должно быть в сторону увеличения).

Вместо ответа на вопрос о стоимости книги с учетом скидки 3,23% указали, сколько рублей составит скидка.

При выполнении задачи В1 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- неполное чтение условия задачи;
- вычислительные ошибки;
- отсутствие связи с реальными событиями.

Тренировочные задания

1. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1400 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?
2. Шоколадка стоит 45 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в по-

дарок). Сколько шоколадок можно получить на 320 рублей в воскресенье?

3. Сырок стоит 5 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 80 рублей?
4. Цена на электрический чайник была повышена на 22% и составила 2196 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?
5. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 632 рубля. На сколько процентов была снижена цена на футболку?
6. Поезд Москва — Казань отправляется в 19:22, а прибывает в 8:22 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?
7. Таксист за месяц проехал 10000 км. Стоимость 1 литра бензина 19,5 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 11 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?
8. Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 38 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет на месяц стоит 207 рублей, а разовая поездка — 21 рубль?
9. В городе N живет 1000000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 35% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?
10. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 30 копеек. Счетчик электроэнергии 1 ноября показывал 99738 киловатт-часов, а 1 декабря показывал 99929 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

Задание В2**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	97,79	90,26	95,41	94,45

Самым трудным оказалось определить цену деления по вертикальной оси: середину между 12 и 16 определили как 13. Определение цены деления как 1 градус не позволило 1,87% учащимся верно указать температуру в сентябре.

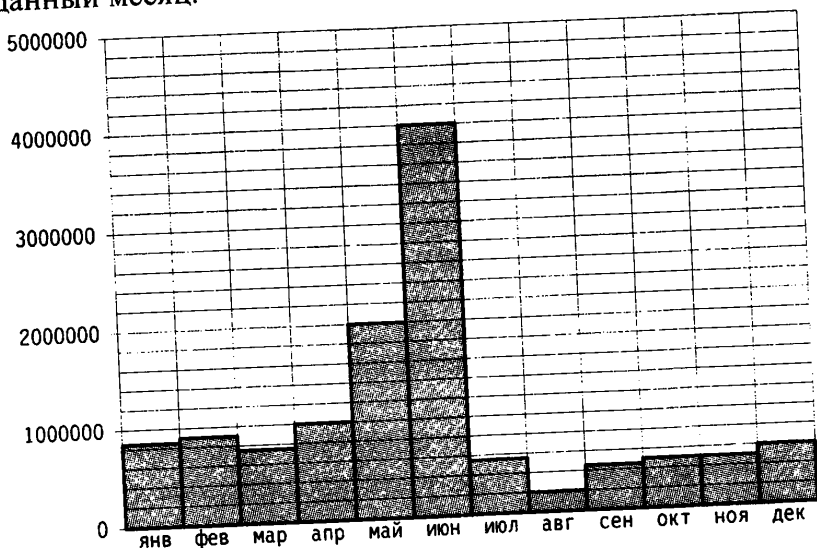
Во всех вариантах есть ответы не на вопросы заданий: нужно указать количество месяцев с отрицательной температурой — в ответе указывают количество месяцев с положительной температурой; путают оси — нужно указать число, когда цена была наименьшей, а указывают эту цену, или число, когда цена наибольшая, или эту наибольшую цену,

При выполнении задачи В2 допущены ошибки, из которых самыми массовыми являются:

- неполное чтение условия задачи;
- вычислительные ошибки;
- неаккуратность при чтении графика.

Тренировочные задания

На диаграмме показано количество запросов со словом ЕГЭ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по декабрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц.



1. Определите по диаграмме количество запросов со словом ЕГЭ в мае.
2. Определите по диаграмме количество запросов со словом ЕГЭ в декабре.
3. Определите по диаграмме минимальное месячное количество запросов со словом ЕГЭ.
4. Определите по диаграмме, сколько в 2009 году было месяцев, когда месячное количество запросов со словом ЕГЭ не превышало 800000.
5. Определите по диаграмме, во сколько раз максимальное месячное количество запросов превышало минимальное месячное количество запросов со словом ЕГЭ в 2009 году.

Задание В3**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	76,00	78,70	83,19	64,46

Самым сложным оказалось задание на вычисление площади квадрата, стороны которого не совпадают с линиями сетки. Для вычисления площади квадрата неверно определили сторону квадрата около 7% учащихся.

В подсчете длины отрезка «по клеточкам» сделали ошибки около 3% учащихся. Ошибку в формуле площади треугольника (забыли коэффициент $\frac{1}{2}$) допустили 1,32% учащихся; в формуле площади трапеции потеряли коэффициент 0,34%; зато в формуле площади параллелограмма 3,49% учащихся умножили на ненужный коэффициент $\frac{1}{2}$.

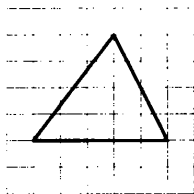
Округлили ответ до целого 2,18% учащихся.

При выполнении задачи В3 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

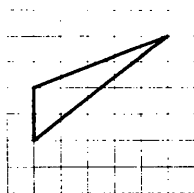
- неверный подсчет длины отрезка «по клеточкам»;
- неверная формула площади треугольника, трапеции, параллелограмма.

Тренировочные задания

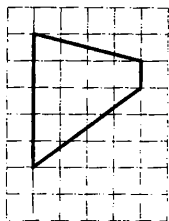
1. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



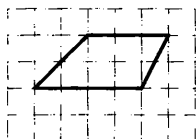
2. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



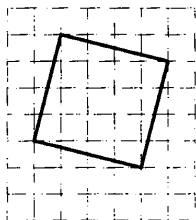
3. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



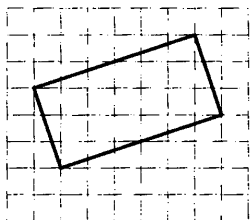
4. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



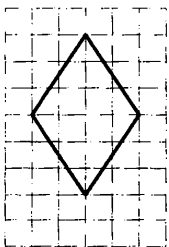
5. Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



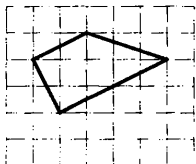
6. Найдите площадь прямоугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



7. Найдите площадь ромба, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



8. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Задание В4**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	86,18	67,17	80,18	35,61

Самым сложным было задание на вычисление стоимости стеклянных полок: оплата стекла по площади, а обработка стеклянных полок поштучно. Ошибку в вычислении стоимости стекла допустили 11,47%: вместо 3,6 м² посчитали стоимость 4 м². Пропустили это задание, не дав никакого ответа, 2,04% учащихся.

Наиболее дешевый тариф 3,46% учащихся истолковали как отсутствие абонентской платы, 7,45% учащихся к дешевому тарифу отнесли план «600».

При вычислении стоимости поездки 7,85% посчитали, что самая дешевая поездка поездом. Очень много вычислительных ошибок.

Пропустили это задание в разных вариантах от 0,38% до 2,04% учащихся.

При выполнении задачи В4 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные;
- неверная трактовка условия.

Тренировочные задания

1. В среднем гражданин А в дневное время расходует 115 кВт · ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 185 кВт · ч электроэнергии. Раньше у А в квартире был установлен одностарифный счетчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,2 руб. за кВт · ч. Год назад А установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,2 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,6 руб. за кВт · ч.

В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько боль-

ше заплатил бы А за этот период, если бы не поменялся счетчик? Ответ дайте в рублях.

2. В первом банке один сингапурский доллар можно купить за 23,2 рубля. Во втором банке 140 долларов — за 3234 рубля. В третьем банке 50 долларов стоят 1150 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придется заплатить за 120 сингапурских долларов?
3. Вася загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 30 Мб за 28 секунд. Петя загружает файл размером 28 Мб за 26 секунд, а Миша загружает файл размером 32 Мб за 29 секунд. Сколько секунд будет загружаться файл размером 512 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки?
4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Кострома	Краснодар	Петрозаводск
Пшеничный хлеб (батон)	11	14	13
Молоко (1 л)	26	23	26
Картофель (1 кг)	17	12	14
Сыр (1 кг)	240	265	230
Говядина (1 кг)	285	280	280
Подсолнечное масло (1 л)	52	44	38

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

5. Для транспортировки 39 тонн груза на 900 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевоз-

чиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

6. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (руб.)
А	300 руб.	Нет	11
Б	Бесплатно	15 мин — 300 руб.	19
В	120 руб.	10 мин — 150 руб.	13

* Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

7. Строительный подрядчик планирует купить 20 тонн облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Вес одного кирпича 5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки?

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	51	9000	Нет
Б	53	7000	Если стоимость заказа выше 200000 руб., доставка бесплатно
В	56	5000	При заказе свыше 250000 руб. доставка со скидкой 50%

8. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 7 тонн природного камня и 13 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 43 мешка цемента. Тонна камня стоит 1600 рублей, щебень стоит 720 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?
9. Для остекления музейных витрин требуется заказать 25 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,3 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	320	20	Нет
В	310	23	Нет
С	380	15	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно

Задание В5**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	93,09	85,86	71,13	72,03

Самым сложным уравнением оказалось логарифмическое. Не справились с определением логарифма (какое число возводить в какую степень) 4,58% учащихся. Пропустили это задание 4,63% учащихся.

Практически таким же сложным оказалось дробно-рациональное уравнение с дробным корнем. 8,24% учащихся посчитали, что дробь равна 4, если числитель равен 1, а знаменатель равен 4. Пропустили это задание 3,53% учащихся.

Простейшее показательное уравнение вызвало сложность уже тем, что в числе 343 не все смогли увидеть 7 в степени 3. Пропустили это задание, не дав никакого ответа, 2,76% учащихся. Изобрели новый способ решения показательного уравнения: показатель степени равен частному 343 и 7 — 2,04% учащихся.

Самым решаемым стало иррациональное уравнение, но и это уравнение пропустили 0,95% учащихся.

Очень много вычислительных ошибок.

Пропустили это задание в разных вариантах от 0,38% до 2,04% учащихся

При выполнении задачи В5 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные;
- неверные алгоритмы решений уравнений.

Тренировочные задания

1. Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x+10} = 10$.
2. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{10}{4x-26}} = \frac{1}{7}$.
3. Найдите корень уравнения $6^{-9-x} = 216$.

4. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-6} = 2$.
5. Найдите корень уравнения $4^{5-2x} = 0,16 \cdot 10^{5-2x}$.
6. Найдите корень уравнения $\log_8(13+x) = \log_8 5$.
7. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(9-x) = -3$.
8. Решите уравнение $\log_{x+5} 25 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
9. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+9)}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.
10. Решите уравнение $\sin \frac{\pi(8x-3)}{6} = 0,5$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Задание В6**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	23,62	39,22	57,39	53,40

Задание на применение свойства четырехугольника, вписанного в окружность, оказалось самым сложным. Пропустили это задание 15,13% учащихся. Посчитали, что на рисунке один угол точно 90° , а два других даны в условии, 18,82%.

Задание на соотношение соответствующих вписанного и центрального углов оказалось чуть проще. Пропустили это задание 13,90% учащихся. Правда, на всякий случай нашли дополнительный до 180° угол к данной в условии угловой величине 9,86%, просто записали в ответе угловую величину, данную в условии, 3,10% учащихся.

При вычислении угла между биссектрисами пропустили это задание 10,35% учащихся, записали в ответе угловую величину, данную в условии, 8,63% учащихся, вычислили дополнительный до 180° угол к данной в условии угловой величине 2,95% учащихся, а 2,58% учащихся, увидев слово «биссектриса», поделили на 2 угловую величину, данную в условии.

При вычислении угла между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла, явно выражена попытка манипулировать с числами, данными в условии: поделили пополам 8,44% учащихся, сложили 3,82%, сложили и поделили пополам 2,95%. Пропустили это задание 5,86% учащихся.

Очень много вычислительных ошибок.

При выполнении задачи В6 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- отсутствие понимания геометрической ситуации;
- вычислительные.

Тренировочные задания

1. В треугольнике ABC угол C равен 68° , $AC = BC$. Найдите внешний угол CBD . Ответ дайте в градусах.
2. В треугольнике ABC угол C равен 80° , AD — биссектриса, угол BAD равен 24° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.
3. В треугольнике ABC угол A равен 33° , а углы B и C острые. BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.
4. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.
5. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.
6. AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 11° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.
7. Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 92° . Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.
8. Углы A , B и C четырехугольника $ABCD$ относятся как $2 : 7 : 16$. Найдите угол D , если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.
9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{3}{7}$, $AC = 6\sqrt{10}$. Найдите AB .
10. В треугольнике ABC высота CH равна 3, $AC = BC = \sqrt{13}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

Задание В7**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	50,52	54,90	64,77	42,20

Задание на вычисление тангенса оказалось самым сложным. Пропустили это задание 20,57% учащихся. Ошиблись в определении знака тангенса угла третьей четверти 7,89% учащихся. Ошиблись в определении тангенса как отношения косинуса к синусу 5,54%.

Чуть лучше вычисляли значение синуса угла, принадлежащего третьей четверти, по данному значению косинуса этого же угла. Пропустили это задание 17,34% учащихся. Ошиблись в определении знака синуса угла третьей четверти 14,34% учащихся. При вычислении значения синуса угла с использованием основного тригонометрического тождества не извлекли корень из полученного числа 4,04%.

При нахождении отношения логарифмов продемонстрировали незнание логарифма — сократили дробь на \log_3 — 27,32% учащихся. Пропустили это задание 5,01% учащихся.

При выполнении задания с корнями не обратили внимания на радикал четвертой степени 10,60% учащихся, не учли степень радикала (извлекли квадратный корень) 5,79%. Пропустили это задание 7,85% учащихся.

При выполнении задачи В7 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- незнание логарифмов;
- неумение извлекать корень степени, отличной от второй;
- незнание соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же угла;
- незнание знаков тригонометрических функций углов, принадлежащих определенным четвертям.

Тренировочные задания

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1,5} \cdot \sqrt{2,1}}{\sqrt{0,35}}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{8} + \sqrt{6})^2}{7 + \sqrt{48}}$.
3. Найдите значение выражения $8^{0,88} \cdot 16^{0,34}$.
4. Найдите значение выражения $9^{2\sqrt{2}+1} \cdot 3^{-2-4\sqrt{2}}$.
5. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$.
6. Найдите значение выражения $\frac{\log_4 729}{\log_4 9}$.
7. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
8. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
9. Найдите $9 \sin \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,28$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
10. Найдите значение выражения $\sqrt{27} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{27} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.

Задание В8**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	50,99	32,09	54,65	46,68

Задание на вычисление дробного отрицательного углового коэффициента прямой оказалось самым сложным. Пропустили это задание 12,20% учащихся. Ошиблись в определении знака углового коэффициента 17,13% учащихся.

Чуть лучше посчитали количество точек максимума функции по графику ее производной. Пропустили это задание 3,74% учащихся. Не обратили внимание на то, что дан график производной, а не функции, 31,62%. Нашли по графику производной точки экстремума производной, а не количество точек максимума функции, 4,23%. Нашли количество точек экстремума производной без учета принадлежности данному отрезку 3,89%.

При нахождении целого положительного углового коэффициента прямой ошиблись в нахождении тангенса через отношение катетов 14,67%. Пропустили это задание 9,04% учащихся.

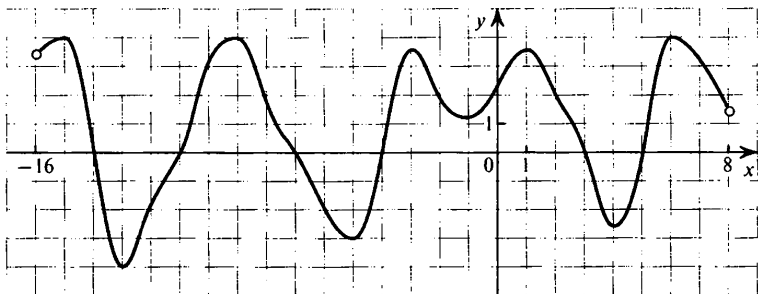
При выполнении задачи В8 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- неверное вычисление тангенса угла наклона касательной;
- неверное определение знака углового коэффициента прямой;
- невнимательное чтение условия;
- путаница в определениях точки максимума и точки экстремума.

Тренировочные задания

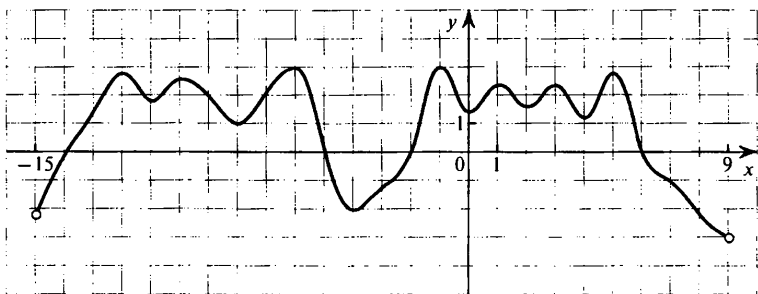
1. Прямая $y = -3x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.
2. Прямая $y = -6x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 - 3x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.
3. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 6]$.

$$y = f'(x)$$

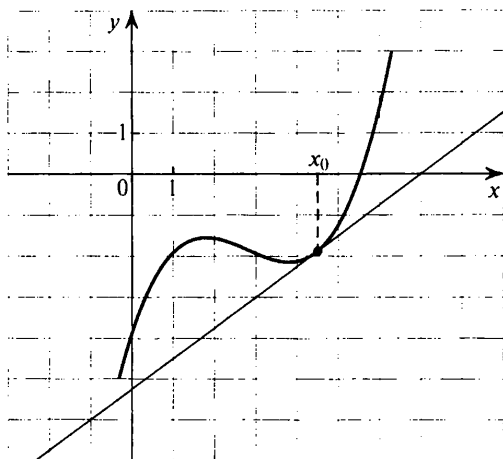


4. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-15; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-13; 5]$.

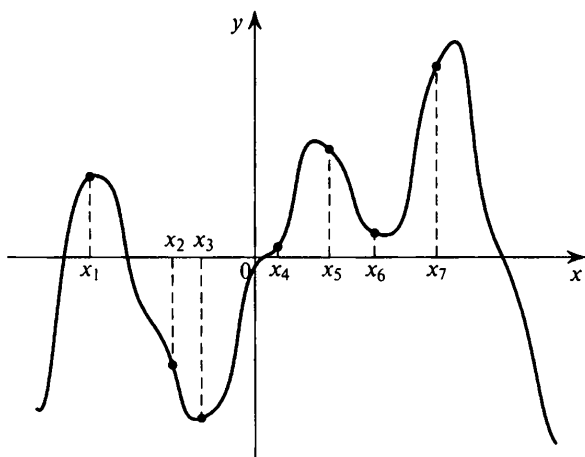
$$y = f'(x)$$



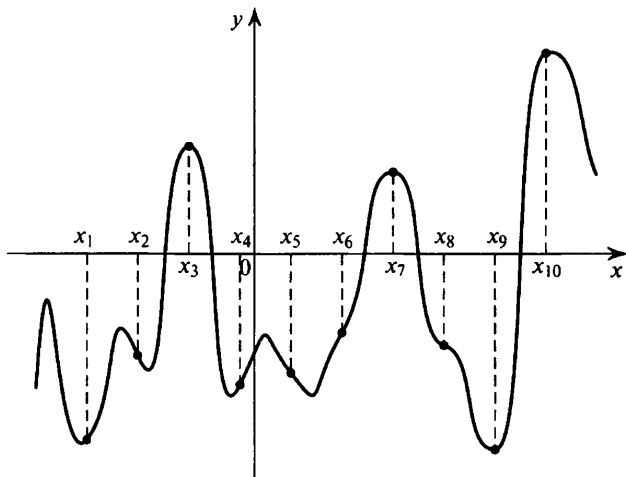
5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



6. На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



7. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^4 + 3t^3 - 6t^2 - 8t - 19$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.
9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 2t + 24$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 50 м/с?

Задание В9**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	76,59	59,46	66,62	64,04

Задание на вычисление диаметра основания конуса оказалось самым сложным. Пропустили это задание 13,39% учащихся. Верно нашли радиус основания, а не диаметр, 6,54% учащихся.

Задание на нахождение диагонали прямоугольного параллелепипеда пропустили 15,77% учащихся.

Задание на нахождение диагонали грани прямоугольного параллелепипеда пропустили 15,25% учащихся.

Задание на нахождение длины бокового ребра пропустили 9,73% учащихся.

При выполнении задачи В9 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются вычислительные. В ответах ярко прослеживается не решение задачи, а манипуляция числами, данными в условии: сложение, вычитание, умножение, деление на два — до 5%.

Тренировочные задания

1. Найдите расстояние между вершинами B_1 и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, для которого $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AA_1 = 14$, $C_1 D_1 = 23$, $BC = 2$. Найдите длину диагонали BD_1 .
3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AC_1 = 9$, $C_1 D_1 = 1$, $A_1 D_1 = 4$. Найдите длину ребра DD_1 .
4. В правильной шестиугольной призме $A \dots FA_1 \dots F_1$ все ребра равны 19. Найдите расстояние между точками A и D .

5. В правильной шестиугольной призме $A \dots FA_1 \dots F_1$ все ребра равны 28. Найдите расстояние между точками D и F_1 .
6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 24$, $BD = 14$. Найдите боковое ребро SC .
7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 36$, $SA = 39$. Найдите длину отрезка BD .
8. Высота конуса равна 18, а диаметр основания — 160. Найдите образующую конуса.
9. Диаметр основания конуса равен 90, а длина образующей — 75. Найдите высоту конуса.
10. Высота конуса равна 4, а длина образующей — 5. Найдите диаметр основания конуса.

Задание В10**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	26,39	38,41	74,36	11,69

Задание на вычисление вероятности покупки качественной сумки оказалось самым трудным. Много учащихся не поняли фразу: «На 180 качественных сумок приходится 10 сумок со скрытыми дефектами». Ошибочный подход к прочтению этой фразы есть во многих некачественных пособиях по подготовке к ЕГЭ. Необходимо помнить, что при вычислении вероятности события надо делить количество исходов, благоприятствующих событию, на *общее* количество исходов. Важно помнить, для контроля, что вероятность не может быть больше 1.

Неверный ответ получили 43,03%. Вычислили вероятность покупки некачественной сумки 7,85%. Пропустили это задание 5,06% учащихся.

Задание на вычисление вероятности выпадения двух орлов из трех бросаний монеты оказалось не из простых. Решили задачу на нахождение вероятности выпадения не менее двух орлов 20,42% учащихся, выполнявших этот вариант. Решили задачу на нахождение вероятности выпадения не менее одного орла 9,87%. Пропустили это задание 4,83% учащихся.

Чуть лучше вычислили вероятность выпадения на двух игровых костях очков, сумма которых равна 9. Количество очков поделили на количество возможных вариантов 6,13%. Пропустили это задание 5,03% учащихся.

Задачу на вычисление вероятности выступления спортсменки первой пропустили 3,44%.

При выполнении задачи В10 допущено много вычислительных ошибок.

Тренировочные задания

1. В сборнике билетов по химии всего 35 билетов, в 7 из них встречается вопрос по солям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по солям.
2. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Эстонии, 8 спортсменов из Латвии, 10 спортсменов из Литвы и 3 — из Польши. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Эстонии.
3. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 32 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?
4. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 9 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.
5. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 170 качественных сумок приходится пятнадцать сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.
7. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 9 очков. Результат округлите до сотых.

Задание В11**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	56,22	25,26	43,32	26,70

Задание на нахождение площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около единичной сферы, оказалось самым сложным. Пропустили это задание 29,08% учащихся, выполнявших этот вариант. Посчитали, что длина ребра куба равна радиусу вписанной в него сферы, 15,32%.

Задание на переливание жидкости из одного цилиндрического сосуда в другой, диаметр которого в 3 раза больше, оказалось почти таким же сложным. Пропустили это задание 9,11% учащихся, выполнявших этот вариант. Посчитали, что если диаметр в три раза больше, то высота в три раза меньше, — 47,07%. Некоторые учащиеся (3,81%) посчитали, что если диаметр в три раза больше, то и высота в три раза больше.

Запутались в соотношениях между объемами цилиндра и конуса, вписанного в цилиндр (общее основание и общая высота), посчитали, что объем цилиндра равен двум объемам вписанного конуса, 13,58%; что объем конуса в три раза больше объема цилиндра — 7,95%. Пропустили это задание 16,11%.

Задание на изменение площади поверхности куба при увеличении всех ребер в 10 раз перепутали с изменением объема 9,58%. Посчитали, что при увеличении длины ребра в 10 раз площадь поверхности увеличится в также в 10 раз, 7,87%. Пропустили это задание 5,60%.

При выполнении задачи В11 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные;
- неверные соотношения между геометрическими величинами.

Тренировочные задания

1. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.
2. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,8. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.
3. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 8. Найдите объем параллелепипеда.
4. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 3. Найдите его объем.
5. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 147 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.
6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 9. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 98. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.
7. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.
8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 36 раз?
9. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 51. Найдите площадь поверхности шара.

Задание В12**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	47,55	30,64	50,24	56,68

Вычисление по формуле, содержащей 7 величин (две величины даны в стандартной форме записи числа), пропустили 31,37%. Много вычислительных ошибок.

Вычисление по формуле, содержащей 6 величин (правда, есть логарифм), пропустили 22,86%. Много вычислительных ошибок.

Задание на определение наибольшей цены продукции пропустили 18,80% учащихся, выполнявших этот вариант. Не обратили внимания на то, что цену нужно дать в тысячах рублей, а не в рублях, 4,56%.

Задание на радиоактивный распад пропустили 16,59%.

При выполнении задачи В12 допущено много вычислительных ошибок.

Тренировочные задания

1. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 250 см? Ответ выразите в м/с.

2. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 15$ кг и радиусом $R = 6$ см и двух боковых с массами $M = 3$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг}\cdot\text{см}^2$, даётся формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $417 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.
3. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c + u}{c - v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 8$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 155 Гц?
4. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,3 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч².
5. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в

квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{512} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $4,56 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

6. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1.4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 288 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.
7. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^6 \text{ Ом}$. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32 \text{ кВ}$. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 58,8 с?
8. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 12,5$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное

давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 22500 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

9. Трактор тащит сани с силой $F = 30$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность (в киловаттах) трактора при скорости $v = 3$ м/с равна $N = Fv \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 45 кВт?
10. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, определяется (в Н·м) формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 6$ А — сила тока в рамке, $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,3$ м — размер рамки, $N = 1250$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 1,35 Н·м?

Задание В13**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	38,56	20,38	10,08	29,22

Задание на совместную работу оказалось самым сложным. Время совместной работы как полусумму времен, данных в условии, вычислили 12,47%. Нахождение обратной величины к сумме совместных производительностей Игоря и Паши, Паши и Володи, Володи и Игоря, приводит к получению времени покраски двух заборов. Это время записали в ответ 11,46%. Много манипуляций с числами, данными в условии. Брались решать это задание практически все.

Задание на движение катера по течению реки и против течения летом и весной оказалось во многом неожиданным, поскольку не получалось дробно-рациональное уравнение. При правильном решении в ответ была вынесена скорость не весной, а летом, 10,38% учащихся. Много манипуляций с данными в условии числами. Брались решать это задание практически все.

Задание на заполнение резервуара водой через две трубы с разной пропускной способностью брались решать практически все. Много манипуляций с данными в условии числами.

Задание «на проценты» брались решать практически все. Много манипуляций с данными в условии числами.

При выполнении задачи В13 допущено много вычислительных ошибок. К сожалению, ярко выражена попытка получить ответ, не решая задачу, а манипулируя с данными в условии числами.

Тренировочные задания

1. Расстояние между городами А и В равно 760 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мо-

тоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

2. Расстояние между пристанями А и В равно 175 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 69 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
3. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 110%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?
4. Смешав 17-процентный и 94-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 68-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 17-процентного раствора использовали для получения смеси?
5. Первый насос наполняет бак за 45 минут, второй — за 1 час 3 минуты, а третий — за 1 час 45 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?
6. Первая труба наполняет резервуар на 48 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 45 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Задание В14**Статистика выполнения задания**

Вариант	1	2	3	4
Процент выполнения	11,24	25,34	39,55	10,75

Задание на нахождение точки максимума функции, содержащей переменную по знаком логарифма, оказалось самым сложным. Брались решать это задание практически все.

Задание на нахождение точки максимума функции, содержащей переменную в показателе степени, оказалось почти таким же сложным. Чаще всего возникала ошибка при применении правила нахождения производной произведения двух функций — 13,23%. Ошибку в нахождении производной сложной функции допустили 10,96% учащихся, выполнявших этот вариант, треть учащихся в ответе указали не точку минимума, а точку максимума. Брались решать это задание практически все.

При нахождении наибольшего значения функции, заданной многочленом, 9,53% учащихся в ответе записали точку, в которой достигается это наибольшее значение.

При выполнении задачи В14 допущено много вычислительных ошибок. К сожалению, ярко проявляется незнание и непонимание темы «Применение производной к исследованию функции».

Тренировочные задания

1. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 + 18x^2 + 81x + 3$$

на отрезке $[-12; -7]$.

2. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 10x + 7.$$

3. Найдите точку минимума функции

$$y = (79 - x)e^{79-x}.$$

4. Найдите точку максимума функции

$$y = (x + 17)^2 e^{x-30}.$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (3x^2 - 66x + 66)e^{x-20}$$

на отрезке $[17; 25]$.

6. Найдите точку минимума функции

$$y = 4x - \ln(x + 4) + 3.$$

7. Найдите точку максимума функции

$$y = 1,5x^2 - 42x + 120 \ln x + 2.$$

8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 7x + \ln x - 7$$

на отрезке $\left[\frac{7}{8}; \frac{9}{8}\right]$.

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 26 \cos x - 29x + 27$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

10. Найдите точку максимума функции

$$y = (2x - 1) \cos x - 2 \sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Краткие решения заданий части С

Вариант 1

С1. а) Решите уравнение

$$\begin{aligned} 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + 16^{\sin x - 0,25} - 3 \cdot 4^{\sin x - 0,5} + 1 = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right). \end{aligned}$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Задача сводится к следующей:

$$16^{\sin x - 0,25} - 3 \cdot 4^{\sin x - 0,5} + 1 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 2: $16^{\sin x} - 3 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0$. Сделаем замену $y = 4^{\sin x}$. Получаем квадратное уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$. Корни: $y = 1$ и $y = 2$.

Из уравнения $4^{\sin x} = 1$ находим: $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $4^{\sin x} = 2$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ принадлежат корни 2π , $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ и 3π .

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) 2π , $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, 3π .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$. Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

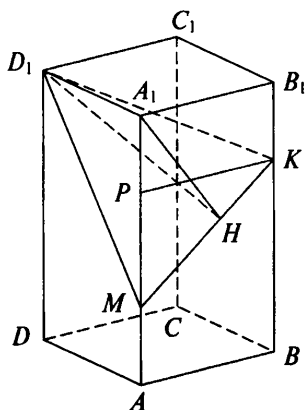
Решение.

Заменим плоскость $CC_1 D_1$ параллельной ей плоскостью ABB_1 . Из точки A_1 проведём перпендикуляр $A_1 H$ к прямой MK . Он является проекцией отрезка $D_1 H$ на плоскость ABB_1 . Следовательно, $\angle A_1 H D_1$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями $D_1 MK$ и ABB_1 .

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1 . Имеем $PM = 3$, $KP = 4$, значит, $MK = 5$. В прямоугольном треугольнике $A_1 H M$ гипотенуза $A_1 M$ также равна 5. Значит, треугольники $A_1 H M$ и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M . Поэтому $A_1 H = KP = 4$.

В прямоугольном треугольнике $D_1 A_1 H$ катеты равны, следовательно, $\angle A_1 H D_1$ равен 45° .

Ответ: 45° .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x(\log_2 x + \log_4 x + 1) \geq \\ \qquad \qquad \qquad \geq \frac{1}{\log_2 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 3^x + 3^{x+1} > 4^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

Решение.

Задача сводится к следующей:

$$\begin{cases} \log_x(\log_2 x + \log_4 x + 1) \geq \frac{1}{\log_2 x}, \\ 3^x + 3^{x+1} > 4^x. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x\left(\frac{3}{2} \log_2 x + 1\right) \geq \log_x 2.$$

При $x > 1$ получаем:

$$\frac{3}{2} \log_2 x + 1 \geq 2; \quad \log_2 x \geq \frac{2}{3},$$

откуда $x \geq 2^{\frac{2}{3}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x > 1$.

При $0 < x < 1$ получаем:

$$0 < \frac{3}{2} \log_2 x + 1 \leq 2; \quad -\frac{2}{3} < \log_2 x \leq \frac{2}{3},$$

откуда $2^{-\frac{2}{3}} < x \leq 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая условие $0 < x < 1$, получаем $2^{-\frac{2}{3}} < x < 1$.

Решение первого неравенства: $(2^{-\frac{2}{3}}; 1); [2^{\frac{2}{3}}; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы:

$$4 \cdot 3^x > 4^x; \quad 4 > \left(\frac{4}{3}\right)^x; \quad x < \log_{\frac{4}{3}} 4.$$

Поскольку $\log_{\frac{4}{3}} 4 > 2 > 2^{\frac{2}{3}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $(2^{-\frac{2}{3}}; 1); [2^{\frac{2}{3}}; \log_{\frac{4}{3}} 4)$.

Ответ: $(2^{-\frac{2}{3}}; 1); [2^{\frac{2}{3}}; \log_{\frac{4}{3}} 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB . Длина перпендикуляра равна 24. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 25$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Следовательно, $AB = 14$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 168$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{25 \cdot 25 \cdot 14}{4 \cdot 168} = \frac{625}{48}.$$

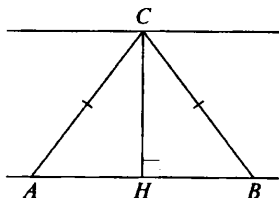


Рис. 1

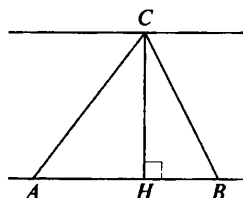


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB . Пусть для определённости $AB = AC = 25$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB , поэтому $HB = 25 - 7 = 18$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30$. Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 24 = 300.$$

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{25 \cdot 30 \cdot 25}{4 \cdot 300} = \frac{125}{8}.$$

Ответ: $\frac{625}{48}$ или $\frac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

Решение.

Каждый корень уравнения $|x + a^2| = |a + x^2|$ является корнем уравнения $x + a^2 = a + x^2$ или корнем уравнения $-x - a^2 = a + x^2$.

Уравнение $x + a^2 = a + x^2$ имеет корни $x = a$ и $x = 1 - a$. При $a = \frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x - a^2 = a + x^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2 + x + a^2 + a = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 - 4a^2 - 4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{-\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, один корень при $a = \frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x + a^2 = a + x^2$ и $-x - a^2 = a + x^2$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x + a^2 = a + x^2 = 0$. В этом случае $x = -a^2$ и $a^4 + a = 0$; $a(a+1)(a^2 - a + 1) = 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. При $a = -1$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три корня при $a = \frac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $a = -1$, $a = 0$ и $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ: $a = \frac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $a = -1$, $a = 0$, $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы два верных значения параметра	2
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 10, либо в 7 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 163 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 17 и 119 верно $27 + 17 + 119 = 163$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $8 = 1 + 7$. Значит, последовательность не может состоять из 42 или более чисел, поскольку $\frac{42}{2} \cdot 8 = 168 > 163$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 8 только тогда, когда эти числа равны 1 и 7, иначе их сумма не меньше $12 = 1 + 11$. Если последовательность состоит из 41 числа, то либо эта последовательность состоит только из чисел 1 и 7, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 12 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 161 или 167. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 12 или больше, найдётся ещё 19 пар соседних членов последовательности, сумма которых 8 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $164 = 12 + 19 \cdot 8$. Таким образом, последовательность не может состоять из 41 числа.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её

сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 40 чисел.

Последовательность может состоять из 39 чисел. Например, для 39 чисел 11, 1, 7, 1, 7, ... верно $11 + 19 \cdot (1 + 7) = 163$.

Ответ: а) 3; б) 39.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт а); – доказано, что в последовательности менее 42 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 40 и 41 числа; – приведён пример последовательности, состоящей из 39 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Вариант 2**С1. а) Решите уравнение**

$$58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \sin 2x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right).$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Задача сводится к следующей:

$$\sin 2x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Преобразуем уравнение:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0; \quad \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $2 \cos x - 1 = 0$ находим: $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{7\pi}{3}, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}$ и $-\pi$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;1б) $-\frac{7\pi}{3}, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в в п. а) или в п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $D_1 MK$.

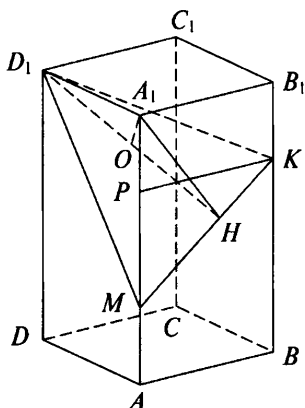
Решение.

Из точки A_1 проведём перпендикуляр $A_1 H$ к прямой MK и перпендикуляр $A_1 O$ к плоскости $D_1 MK$. Точка O лежит на гипотенузе $D_1 H$ прямоугольного треугольника $D_1 A_1 H$, поэтому отрезок $A_1 O$ — высота этого треугольника.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1 . Имеем $PM = 3$, $KP = 4$, значит, $MK = 5$. В прямоугольном треугольнике $A_1 HM$ гипотенуза $A_1 M$ также равна 5. Значит, треугольники $A_1 HM$ и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M . Поэтому $A_1 H = KP = 4$.

В прямоугольном треугольнике $D_1 A_1 H$ катеты равны, следовательно, $A_1 O = A_1 H \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x(\log_3 x + \log_9 x + 2) \geq \\ \qquad \qquad \qquad \geq \frac{1}{\log_3 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 4^x + 4^{x+1} > 5^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

Решение.

Задача сводится к следующей:

$$\begin{cases} \log_x(\log_3 x + \log_9 x + 2) \geq \frac{1}{\log_3 x}, \\ 4^x + 4^{x+1} > 5^x. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x\left(\frac{3}{2} \log_3 x + 2\right) \geq \log_x 3.$$

При $x > 1$ получаем:

$$\frac{3}{2} \log_3 x + 2 \geq 3; \quad \log_3 x \geq \frac{2}{3},$$

откуда $x \geq 3^{\frac{2}{3}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x > 1$.

При $0 < x < 1$ получаем:

$$0 < \frac{3}{2} \log_3 x + 2 \leq 3; \quad -\frac{4}{3} < \log_3 x \leq \frac{2}{3},$$

откуда $3^{-\frac{4}{3}} < x \leq 3^{\frac{2}{3}}$. Учитывая условие $0 < x < 1$, получаем $3^{-\frac{4}{3}} < x < 1$.

Решение первого неравенства: $(3^{-\frac{4}{3}}; 1); [3^{\frac{2}{3}}; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы:

$$5 \cdot 4^x > 5^x; \quad 5 > \left(\frac{5}{4}\right)^x; \quad x < \log_{\frac{5}{4}} 5.$$

Поскольку $\log_{\frac{5}{4}} 5 > 3 > 3^{\frac{2}{3}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $(3^{-\frac{4}{3}}; 1); [3^{\frac{2}{3}}; \log_{\frac{5}{4}} 5)$.

Ответ: $(3^{-\frac{4}{3}}; 1); [3^{\frac{2}{3}}; \log_{\frac{5}{4}} 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB . Длина перпендикуляра равна 12. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 13$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Следовательно, $AB = 10$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}.$$

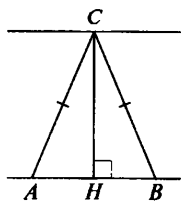


Рис. 1

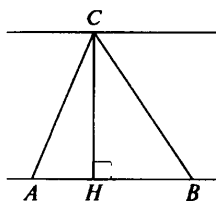


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB . Пусть для определённости $AB = AC = 13$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB , поэтому $HB = 13 - 5 = 8$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 4\sqrt{13}}{4 \cdot 78} = \frac{13\sqrt{13}}{6}.$$

Ответ: $\frac{169}{24}$ или $\frac{13\sqrt{13}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет ровно три корня?

Решение.

Каждый корень уравнения $|x + a^2| = |x^2 - a|$ является корнем уравнения $x + a^2 = x^2 - a$ или корнем уравнения $-x - a^2 = x^2 - a$.

Уравнение $x + a^2 = x^2 - a$ имеет корни: $x = -a$ и $x = 1 + a$. При $a = -\frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x - a^2 = x^2 - a$ равносильно квадратному уравнению $x^2 + x + a^2 - a = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 - 4a^2 + 4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, один корень при $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x + a^2 = x^2 - a$ и $-x - a^2 = x^2 - a$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x + a^2 = x^2 - a = 0$. В этом случае $x = -a^2$ и $a^4 - a = 0$; $a(a-1)(a^2+a+1) = 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. При $a = 1$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три корня при $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a = 0$, $a = 1$ и $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответ: $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a = 0$, $a = 1$, $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но — или в ответ включены также и одно-два неверных значения; — или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы два верных значения параметра	2
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 16, либо в 9 раз. Сумма всех членов последовательности равна 137.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 16, либо в 9 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 137 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 11 и 99 верно $27 + 11 + 99 = 137$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $10 = 1 + 9$. Значит, последовательность не может состоять из 28 или более чисел, поскольку $\frac{28}{2} \cdot 10 = 140 > 137$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 10 только тогда, когда эти числа равны 1 и 9, иначе их сумма не меньше $18 = 1 + 17$. Если последовательность состоит из 27 чисел, то либо эта последовательность состоит только из чисел 1 и 9, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 18 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 131 или 139. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 18 или больше, найдётся ещё 12 пар соседних членов последовательности, сумма которых 10 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $138 = 18 + 12 \cdot 10$. Таким образом, последовательность не может состоять из 27 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять

из чётного количества членов, поскольку в этом случае её сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 26 чисел.

Последовательность может состоять из 25 чисел. Например, для 25 чисел 17, 1, 9, 1, 9, ... верно $17 + 12 \cdot (1 + 9) = 137$.

Ответ: а) 3; б) 25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт а); – доказано, что в последовательности менее 28 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 26 и 27 чисел; – приведён пример последовательности, состоящей из 25 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Вариант 3

С1. а) Решите уравнение

$$58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + 81^{\cos x - 0,25} - 4 \cdot 9^{\cos x - 0,5} + 1 = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right).$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Задача сводится к следующей:

$$81^{\cos x - 0,25} - 4 \cdot 9^{\cos x - 0,5} + 1 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 3: $81^{\cos x} - 4 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

Сделаем замену $y = 9^{\cos x}$. Получаем квадратное уравнение $y^2 - 4y + 3 = 0$. Корни: $y = 1$ и $y = 3$.

Из уравнения $9^{\cos x} = 1$ находим: $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $9^{\cos x} = 3$ находим: $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$ и $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в в п. а) или в п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 8$. Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

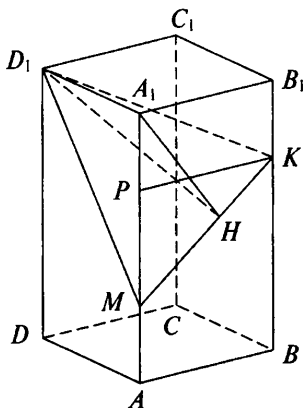
Решение.

Заменим плоскость $CC_1 D_1$ параллельной ей плоскостью ABB_1 . Из точки A_1 проведём перпендикуляр $A_1 H$ к прямой MK . Он является проекцией отрезка $D_1 H$ на плоскость ABB_1 . Следовательно, $\angle A_1 H D_1$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями $D_1 MK$ и ABB_1 .

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1 . Имеем $PM = 5$, $KP = 12$, значит, $MK = 13$. В прямоугольном треугольнике $A_1 H M$ гипотенуза $A_1 M$ также равна 13. Значит, треугольники $A_1 H M$ и $K P M$ равны по гипотенузе и общему острому углу M . Поэтому $A_1 H = KP = 12$.

В прямоугольном треугольнике $D_1 A_1 H$ катеты равны, следовательно, $\angle A_1 H D_1$ равен 45° .

Ответ: 45° .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_{\frac{x}{3}}(\log_2 x + \log_8 x - 1) \geq \\ \qquad \qquad \qquad \geq \frac{1}{\log_2 \frac{x}{3}} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 28 + 2^x + 2^{x+1} > 3^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

Решение.

Задача сводится к следующей:

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{3}}(\log_2 x + \log_8 x - 1) \geq \frac{1}{\log_2 \frac{x}{3}}, \\ 2^x + 2^{x+1} > 3^x. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{4}{3} \log_2 x - 1\right) \geq \log_{\frac{x}{3}} 2.$$

При $\frac{x}{3} > 1$ получаем:

$$\frac{4}{3} \log_2 x - 1 \geq 2; \quad \log_2 x \geq \frac{9}{4},$$

откуда $x \geq 2^{\frac{9}{4}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $\frac{x}{3} > 1$.

При $0 < \frac{x}{3} < 1$ получаем:

$$0 < \frac{4}{3} \log_2 x - 1 \leq 2; \quad \frac{3}{4} < \log_2 x \leq \frac{9}{4},$$

откуда $2^{\frac{3}{4}} < x \leq 2^{\frac{9}{4}}$. Учитывая условие $0 < \frac{x}{3} < 1$, получаем $2^{\frac{3}{4}} < x < 3$.

Решение первого неравенства: $(2^{\frac{3}{4}}; 3); [2^{\frac{9}{4}}; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы:

$$3 \cdot 2^x > 3^x; \quad 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^x; \quad x < \log_{\frac{3}{2}} 3.$$

Поскольку $\log_{\frac{3}{2}} 3 < 3$ и $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2 > 2^{\frac{3}{4}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $(2^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{3}{2}} 3)$.

Ответ: $(2^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{3}{2}} 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 15. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB . Длина перпендикуляра равна 12. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Следовательно, $AB = 18$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{18 \cdot 15 \cdot 15}{4 \cdot 108} = \frac{75}{8}.$$

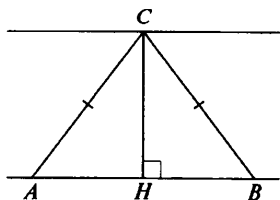


Рис. 1

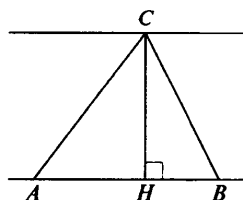


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB . Пусть для определённости $AB = AC = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB , поэтому $HB = 15 - 9 = 6$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 = 90$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 15}{4 \cdot 90} = \frac{15\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\frac{75}{8}$ или $\frac{15\sqrt{5}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет более трёх корней?

Решение.

Каждый корень уравнения $|x + a^2| = |a + x^2|$ является корнем уравнения $x + a^2 = a + x^2$ или корнем уравнения $-x - a^2 = a + x^2$.

Уравнение $x + a^2 = a + x^2$ имеет корни $x = a$ и $x = 1 - a$. При $a = \frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x - a^2 = a + x^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2 + x + a^2 + a = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 - 4a^2 - 4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{-\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, один корень при $a = \frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x + a^2 = a + x^2$ и $-x - a^2 = a + x^2$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x + a^2 = a + x^2 = 0$. В этом случае $x = -a^2$ и $a^4 + a = 0$; $a(a+1)(a^2 - a + 1) = 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. При $a = -1$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет более трёх корней при $\frac{-\sqrt{2}-1}{2} < a < -1$, $-1 < a < 0$ и $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ: $\frac{-\sqrt{2}-1}{2} < a < -1$, $-1 < a < 0$, $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения найдены хотя бы две граничные точки множества искомых значений параметра	2
С помощью верного рассуждения найдена хотя бы одна граничная точка множества искомых значений параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 8, либо в 5 раз. Сумма всех членов последовательности равна 141.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 8, либо в 5 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 141 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 19 и 95 верно $27 + 19 + 95 = 141$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $6 = 1 + 5$. Значит, последовательность не может состоять из 48 или более чисел, поскольку $\frac{48}{2} \cdot 6 = 144 > 141$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 6 только тогда, когда эти числа равны 1 и 5, иначе их сумма не меньше $10 = 1 + 9$. Если последовательность состоит из 47 чисел, то либо эта последовательность состоит только из чисел 1 и 5, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 10 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 139 или 143. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 10 или больше, найдётся ещё 22 пары соседних членов последовательности, сумма которых 6 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $142 = 10 + 22 \cdot 6$. Таким образом, последовательность не может состоять из 47 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её

сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 46 чисел.

Последовательность может состоять из 45 чисел. Например, для 45 чисел 9, 1, 5, 1, 5, ... верно $9 + 22 \cdot (1 + 5) = 141$.

Ответ: а) 3; б) 45.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт а); – доказано, что в последовательности менее 48 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 46 и 47 чисел; – приведён пример последовательности, состоящей из 45 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Вариант 4

С1. а) Решите уравнение

$$58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \cos 2x - \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - 1 = \\ = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right).$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Задача сводится к следующей:

$$\cos 2x - \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - 1 = 0.$$

Преобразуем уравнение:

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0; \quad 2 \sin^2 x + \sin x = 0; \\ \sin x \cdot (2 \sin x + 1) = 0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $2 \sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ и 0.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в в п. а) или в п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 8$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $D_1 MK$.

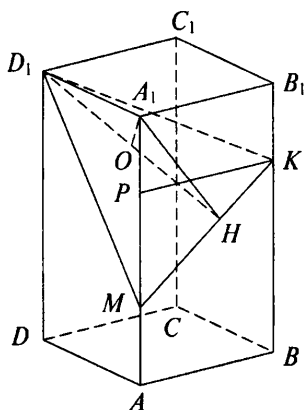
Решение.

Из точки A_1 проведём перпендикуляр $A_1 H$ к прямой MK и перпендикуляр $A_1 O$ к плоскости $D_1 MK$. Точка O лежит на гипотенузе $D_1 H$ прямоугольного треугольника $D_1 A_1 H$, поэтому отрезок $A_1 O$ — высота этого треугольника.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1 . Имеем $PM = 5$, $KP = 12$, значит, $MK = 13$. В прямоугольном треугольнике $A_1 HM$ гипотенуза $A_1 M$ также равна 13. Значит, треугольники $A_1 HM$ и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M . Поэтому $A_1 H = KP = 12$.

В прямоугольном треугольнике $D_1 A_1 H$ катеты равны, следовательно, $A_1 O = A_1 H \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $6\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 29x - 8 \cdot \ln 15 + \log_x (\log_3 x + \log_{27} x + 2) \geq \\ \qquad \qquad \qquad \geq \frac{1}{\log_3 x} + 29x - 8 \cdot \ln 15, \\ -13x - 14 \cdot \ln 286^x + 6^{x+1} > 7^x - 13x - 14 \cdot \ln 28. \end{cases}$$

Решение.

Задача сводится к следующей:

$$\begin{cases} \log_x (\log_3 x + \log_{27} x + 2) \geq \frac{1}{\log_3 x}, \\ 6^x + 6^{x+1} > 7^x. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x \left(\frac{4}{3} \log_3 x + 2 \right) \geq \log_x 3.$$

При $x > 1$ получаем:

$$\frac{4}{3} \log_3 x + 2 \geq 3; \quad \log_3 x \geq \frac{3}{4},$$

откуда $x \geq 3^{\frac{3}{4}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x > 1$.

При $0 < x < 1$ получаем:

$$0 < \frac{4}{3} \log_3 x + 2 \leq 3; \quad -\frac{3}{2} < \log_3 x \leq \frac{3}{4},$$

откуда $3^{-\frac{3}{2}} < x \leq 3^{\frac{3}{4}}$. Учитывая условие $0 < x < 1$, получаем $3^{-\frac{3}{2}} < x < 1$.

Решение первого неравенства: $(3^{-\frac{3}{2}}; 1); [3^{\frac{3}{4}}; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы:

$$7 \cdot 6^x > 7^x; \quad 7 > \left(\frac{7}{6}\right)^x; \quad x < \log_{\frac{7}{6}} 7.$$

Поскольку $\log_{\frac{7}{6}} 7 > 3 > 3^{\frac{3}{4}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $(3^{-\frac{3}{2}}; 1); [3^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{7}{6}} 7)$.

Ответ: $(3^{-\frac{3}{2}}; 1); [3^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{7}{6}} 7)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 21. На одной из них взята точка C , а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 29. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB . Длина перпендикуляра равна 21. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 29$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$. Следовательно, $AB = 40$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 21 = 420$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{29 \cdot 29 \cdot 40}{4 \cdot 420} = \frac{841}{42}.$$

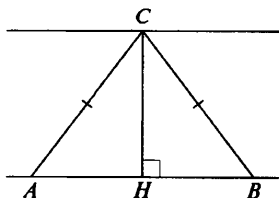


Рис. 1

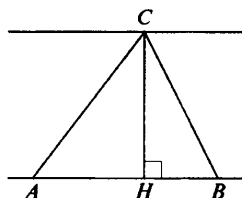


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB . Пусть для определённости $AB = AC = 29$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB , поэтому $HB = 29 - 20 = 9$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{21^2 + 9^2} = 3\sqrt{58}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 21 = \frac{609}{2}$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{29 \cdot 29 \cdot 3\sqrt{58}}{2 \cdot 609} = \frac{29\sqrt{58}}{14}.$$

Ответ: $\frac{841}{42}$ или $\frac{29\sqrt{58}}{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5. При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет более трёх корней?

Решение.

Каждый корень уравнения $|x + a^2| = |x^2 - a|$ является корнем уравнения $x + a^2 = x^2 - a$ или корнем уравнения $-x - a^2 = x^2 - a$.

Уравнение $x + a^2 = x^2 - a$ имеет корни $x = -a$ и $x = 1 + a$. При $a = -\frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x - a^2 = x^2 - a$ равносильно квадратному уравнению $x^2 + x + a^2 - a = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 - 4a^2 + 4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, один корень при $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x + a^2 = x^2 - a$ и $-x - a^2 = x^2 - a$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x + a^2 = x^2 - a = 0$. В этом случае $x = -a^2$ и $a^4 - a = 0$; $a(a-1)(a^2+a+1) = 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. При $a = 1$ исходное уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет более трёх корней при $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < 0$, $0 < a < 1$ и $1 < a < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < 0$, $0 < a < 1$, $1 < a < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения найдены хотя бы две граничные точки множества искомых значений параметра	2
С помощью верного рассуждения найдена хотя бы одна граничная точка множества искомых значений параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 93.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 12, либо в 7 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 93 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 21, 9 и 63 верно $21 + 9 + 63 = 93$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $8 = 1 + 7$. Значит, последовательность не может состоять из 24 или более чисел, поскольку $\frac{24}{2} \cdot 8 = 96 > 93$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 8 только тогда, когда эти числа равны 1 и 7, иначе их сумма не меньше $14 = 1 + 13$. Если последовательность состоит из 23 чисел, то либо эта последовательность состоит только из чисел 1 и 7, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 14 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 89 или 95. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 14 или больше, найдётся ещё 10 пар соседних членов последовательности, сумма которых 8 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $94 = 14 + 10 \cdot 8$. Таким образом, последовательность не может состоять из 23 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её

сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 22 чисел.

Последовательность может состоять из 21 числа. Например, для 21 числа 13, 1, 7, 1, 7, ... верно $13 + 10 \cdot (1 + 7) = 93$.

Ответ: а) 3; б) 21.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт а); – доказано, что в последовательности менее 24 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 22 и 23 чисел; – приведён пример последовательности, состоящей из 21 числа	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Основные ошибки, допущенные при выполнении заданий части С

Задание С1

Основные ошибки при решении показательных уравнений связаны с неверным переходом от одного основания к другому, например, от 16 к 4 или от 81 к 3: в показателе степени только одно из слагаемых умножается на 2 (4) или показатель степени возводится во вторую (четвертую степень). При разложении выражения, стоящего в левой части, на множители многие сделали ошибочный вывод, что произведение равно минус единице, если один из множителей принимает значение минус единица.

Основные ошибки при решении тригонометрического уравнения повышенной сложности связаны с неверным решением получаемых простейших тригонометрических уравнений, с незнанием табличных данных тригонометрических функций. Многие учащиеся даже не смогли приступить к этому заданию или сделали его неверно из-за незнания основных тригонометрических формул: приведения, двойного угла, основного тригонометрического тождества.

Только половина тех, кто правильно решил тригонометрическое уравнение, смогли правильно указать корни, принадлежащие конкретному отрезку, причем примерно половина ошибок связана не с тригонометрией, а с вычислительными ошибками, допущенными при сложении обыкновенных дробей в процессе отбора корней.

Задание С2

Большое число учащихся, приступивших к решению заданий второй части, пропустили задачу С2. Многие учащиеся не сумели правильно построить линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями, опустить перпендикуляр из точки на плоскость, не говоря о доказательстве того, что это действительно искомый угол или действительно искомое расстояние. Учащиеся, выбрав-

шие координатный метод решения, запутались в составлении уравнения плоскости, в записи формулы расстояния от точки до плоскости, косинуса угла (потеря модуля в числителе), что привело к неверному ответу.

Разумеется, за месяц стереометрию уже не выучишь, но если начальные знания имеются, то стоит сосредоточиться на этой задаче, изучить типичные расположения прямых, плоскостей в основных телах, которые представлены в учебниках и удачно систематизированы в брошюре В. А. Смирнова «Задача С2» (М: МЦНМО, 2012). Это позволит не только получить дополнительно 1–2 балла, но и развить геометрическое воображение, полезное для учебы в техническом вузе.

Задание С3

Основной ошибкой оказалась потеря области определения логарифмической функции: помня про x , стоящий под знаком внутреннего логарифма, учащиеся не учли область определения внешнего логарифма. С большим трудом решалось показательное неравенство: его можно было свести к простейшему показательному неравенству с основанием, большим единицы, а можно — к неравенству с основанием, меньшим единицы. Простейшее показательное неравенство с основанием меньше единицы чаще решается с ошибкой. Многие из давших правильный ответ не указали взаимного расположения точек на числовой прямой.

Эта задача рассчитана уже на тех, кто борется за место в достаточно престижном вузе с высокими требованиями по математике. Для них решение таких задач — подготовка к учебе на первом курсе. Стоит начать с самых простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задание С4

Основная часть учащихся к ней просто не приступали. В основном смогли рассмотреть одну геометрическую

конфигурацию. Много ошибок в формулах: площади треугольника, радиуса описанной окружности, в теореме синусов. Многие из приступивших к решению находили радиус вписанной окружности вместо радиуса описанной окружности.

Задание С5

Приступило к решению этого задания небольшое количество учащихся, поэтому можно говорить лишь о частных ошибках.

В решениях можно найти отголоски разных подходов к решению задач с параметрами. Графический способ решения (являющийся вполне допустимым при аккуратном исполнении) чаще всего вызывает сомнение в достоверности полученных результатов из-за небрежности построения графиков функций, в результате чего нельзя увидеть существенных для решения задачи свойств графиков и их взаимного расположения. По неаккуратным (и неверным в существенных деталях) эскизам трудно сделать выводы о существовании трех (более трех) корней уравнения. Наверное, самая большая проблема — в распознавании графика по формуле, задающей этот график. Проблема в построении графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля, известна. Плохо, что про уравнение окружности говорят, что это парабола, — и ведь строят параболу! Про график квадратичной функции говорят, что это гипербола, — и ее строят! Редко, но встречается такой подход к решению: учащиеся строят графики функций в двух различных системах координат, а потом пытаются сделать какой-то вывод о взаимном расположении графиков. И самое тяжелое — это исследование взаимного расположения графиков в зависимости от параметра.

При аналитическом способе решения распространенной является логическая ошибка при исследовании полученной совокупности двух квадратных уравнений. Наличие трех корней у исходного уравнения ищут, исследуя

только единственность корня у одного из квадратных уравнений. Не все смогли выстроить логику решения: нужно найти случай, когда одно из квадратных уравнений имеет один корень, а другое уравнение имеет два различных корня, не совпадающих с корнем первого уравнения, или когда оба уравнения имеют два различных корня, но один из них является общим для этих уравнений. Очень часто, получив какие-то значение параметра, забывают удостовериться в выполнении условий задания.

Помните: чтобы получить хотя бы 1 балл за выполнение этого задания, нужно найти хотя бы одно значение параметра и убедиться, что при этом значении параметра выполняется условие.

Задание С6

Приступило к решению этого задания совсем небольшое количество учащихся, поэтому будем говорить о частных ошибках.

Главное в этой задаче — не бояться к ней приступить, посмотреть на нее свежим взглядом и попробовать что-нибудь сделать. Заработать хоть 1 балл из соображений здравого смысла вполне возможно. Например, нужно найти наименьшее число членов последовательности: предполагаем, что в последовательности два члена (по тексту задания понятно, что в последовательности больше одного члена), и пытаемся найти их перебором всех вариантов, а если не получилось, предполагаем три; рассматривая разные последовательности, получаем пример такой последовательности.

Существенный момент во многих заданиях С6: если нужно найти наибольшее число, например, членов последовательности — это значит, что нужно дать ответы на два вопроса: оценить это наибольшее число (доказать, что больше не может быть) и привести пример, что такое возможно. Просто пример ничего не доказывает, а оценка наибольшего числа может быть нереализуемой.

При записи решения в этой (да и в остальных) задачах следует прежде всего обратить особое внимание на то, чтобы были видны все этапы рассуждений. Просто ответ, даже и правильный, оценивается в 0 баллов.

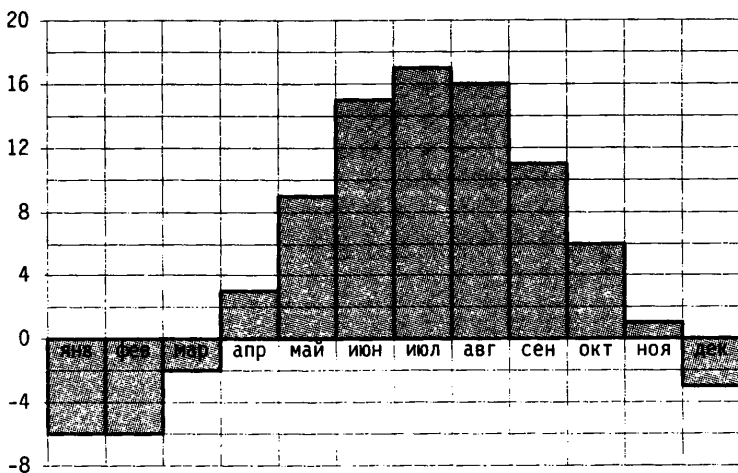
Диагностическая работа 1

Часть 1

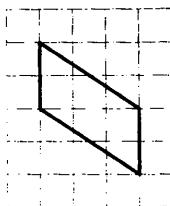
Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Теплоход рассчитан на 900 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

В2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме среднемесячную температуру в октябре 2009 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



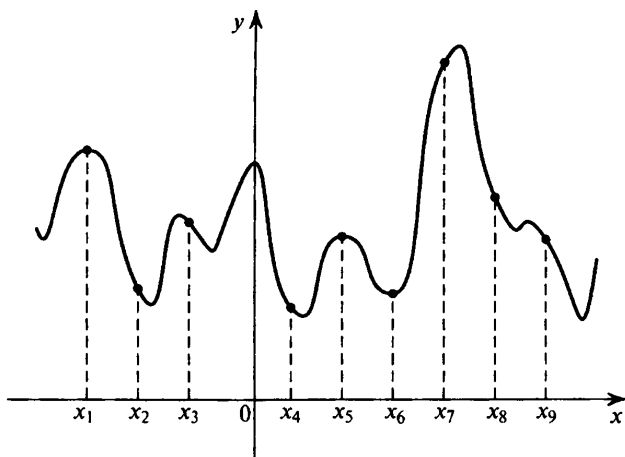
- В3.** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- В4.** Для изготовления книжных полок требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,35\text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	420	75
В	440	65
С	470	55

- В5.** Найдите корень уравнения $\sqrt{7x-3} = 9$.
- В6.** Острые углы прямоугольного треугольника равны 57° и 33° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
- В7.** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- В8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



- В9.** Высота конуса равна 7, а длина образующей — 25. Найдите диаметр основания конуса.
- В10.** В чемпионате по гимнастике участвуют 40 спортсменов: 11 из Японии, 17 из Китая, остальные — из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.
- В11.** Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его площадь его поверхности.
- В12.** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 112$ мг. Период его полураспада $T = 5$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 14 мг?
- В13.** Шесть рубашек дешевле одной куртки на 4%. На сколько процентов восемь рубашек дороже одной куртки?
- В14.** Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x + 3) - 4x - 8.$$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
- C2. В правильной шестиугольной призме $A \dots FA_1 \dots F_1$ все рёбра равны. Найдите угол между плоскостью $B_1 C_1 F$ и плоскостью BEE_1 .
- C3. Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} 625^x - 25^{2x-1} \geq 7, \\ \log_{2x+1}(4x^2 - 4x + 1) \cdot \log_{1-2x}(2 + 4x) \geq 2. \end{cases}$$
- C4. Равнобокая трапеция описана около окружности. Основания трапеции относятся как 1 : 2. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H — основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HP на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону?
- C5. При каких значениях a уравнение $|x^2 - x + a| + |x| = 9$ имеет ровно три корня?
- C6. Числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:
- а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?
 - б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?
 - в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

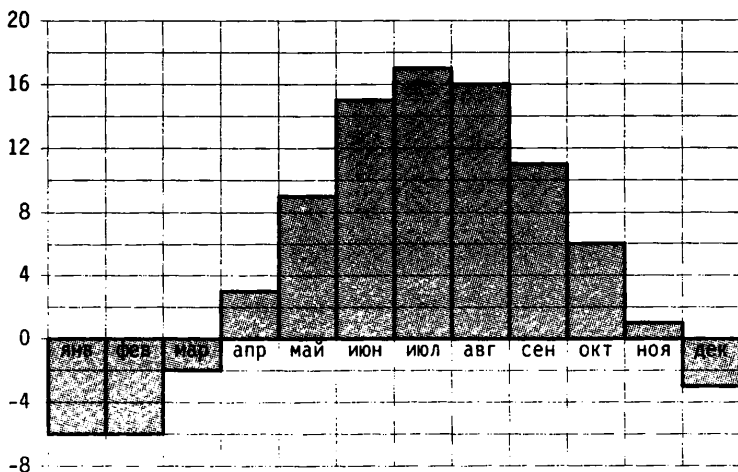
Диагностическая работа 2

Часть 1

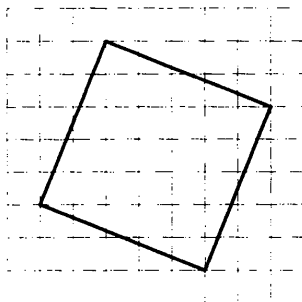
Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек. Счётчик электроэнергии 1 января показывал 39871 киловатт-час, а 1 февраля показывал 40027 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за январь?

В2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году с отрицательной среднемесячной температурой?



- В3.** Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- В4.** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Барнаул	Тверь	Псков
Пшеничный хлеб (батон)	12	11	11
Молоко (1 л)	25	26	26
Картофель (1 кг)	16	9	14
Сыр (1 кг)	260	240	235
Мясо (говядина)	300	280	280
Подсолнечное масло (1 л)	50	38	62

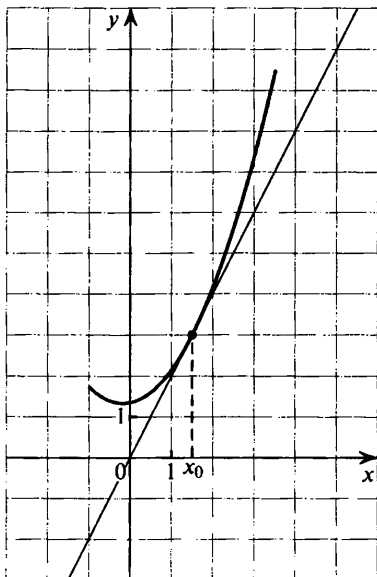
Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 л молока, 2 кг сыра, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

- В5.** Найдите корень уравнения $\lg(27 - x) = 2$.

- В6.** Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 102° и 77° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

- В7.** Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{98}}$.

- В8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



- В9.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 24$, $AC = 20$. Найдите боковое ребро SA .
- В10.** Фабрика выпускает сумки. В среднем на 120 качественных сумок приходится 14 сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
- В11.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в 7 раз?
- В12.** Коэффициент полезного действия (КПД) тормоза-парника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах

Цельсия), к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы M кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{cm(t_2 - t_1)}{qM} \cdot 100\%$, где $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг \cdot $^{\circ}$ С) — теплоёмкость воды, $q = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшее количество дров, которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть 40 кг воды от 17° С до температуры кипения, если известно, что КПД кормозапарника 24%. Ответ выразите в килограммах.

В13. Игорь и Паша красят забор за 20 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 30 часов, а Володя и Игорь — за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

В14. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 17$$

на отрезке $[0; 5]$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1. а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos 2x + 2 \sin x - 2 \cos 2x - 1 = 0.$$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ со стороной основания $AB = 4$ и боковым ребром $SC = 6$, точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра AB . Найдите расстояние от прямой BC до прямой MK .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 125^x - 5^{3x-2} \geq 17, \\ \log_{2x+1}(9x^2 - 12x + 4) \cdot \log_{2-3x}(6x + 3) \geq 2. \end{cases}$$

С4. Равнобокая трапеция описана около окружности. Основания трапеции относятся как 3 : 4. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H — основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HP на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка P делит боковую сторону?

С5. При каких значениях a уравнение $|x^2 - x + a| + |x| = 9$ имеет ровно четыре корня?

С6. Числа от 12 до 21 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

б) пять чисел в порядке возрастания или в порядке убывания?

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Ответы к тренировочным заданиям и диагностическим работам

Задание В1. 1. 23. 2. 9. 3. 13. 4. 1800. 5. 21. 6. 13. 7. 21450.
8. 591. 9. 552500. 10. 248,3.

Задание В2. 1. 2000000. 2. 600000. 3. 200000. 4. 7. 5. 20.

Задание В3. 1. 10. 2. 5. 3. 12. 4. 7. 5. 17. 6. 20. 7. 12. 8. 7,5.

Задание В4. 1. 3552. 2. 2760. 3. 464. 4. 393. 5. 295200. 6. 790.
7. 212000. 8. 14190. 9. 2850.

Задание В5. 1. -3,3. 2. 129. 3. -12. 4. 5,75. 5. 1,5. 6. -8. 7. 1.
8. 0. 9. -2. 10. -0,5.

Задание В6. 1. 124. 2. 104. 3. 147. 4. 45. 5. 150. 6. 158. 7. 88.
8. 110. 9. 21. 10. 1,5.

Задание В7. 1. 3. 2. 2. 3. 16. 4. 1. 5. -2,5. 6. 3. 7. -0,75. 8. 0,25.
9. 8,64. 10. -4,5.

Задание В8. 1. -4,5. 2. -3. 3. 2. 4. 1. 5. 0,75. 6. 3. 7. 3. 8. 73.
9. 6.

Задание В9. 1. 15. 2. 27. 3. 8. 4. 38. 5. 56. 6. 25. 7. 30. 8. 82.
9. 60. 10. 6.

Задание В10. 1. 0,2. 2. 0,16. 3. 0,15. 4. 0,995. 5. 0,92. 6. 0,0625.
7. 0,12.

Задание В11. 1. 8. 2. 1,6. 3. 2048. 4. 216. 5. 3. 6. 4. 7. 84. 8. 1296.
9. 34.

Задание В12. 1. 5. 2. 1. 3. 608. 4. 13500. 5. 8000. 6. 9. 7. 8. 8. 9,6.
9. 60. 10. 30.

Задание В13. 1. 440. 2. 18. 3. 39. 4. 30. 5. 21. 6. 72.

Задание В14. 1. 3. 2. 25. 3. 80. 4. -19. 5. -54. 6. -3,75. 7. 4.
8. -11. 9. 53. 10. 0,5.

Диагностическая работа 1

В1. 16. **В2.** 6. **В3.** 6. **В4.** 4380. **В5.** 12. **В6.** 12. **В7.** 2. **В8.** 5. **В9.** 48.
В10. 0,3. **В11.** 96. **В12.** 15. **В13.** 28. **В14.** -2,75. **С1.** а) $2\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;
 $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$. **С2.** $\arccos \frac{1}{4}$. **С3.** $\left[\frac{1}{2} \left(1 + \log_{25} \frac{7}{24} \right); \frac{1}{2} \right)$.
С4. 1 : 8 или 1 : 2. **С5.** -8; -72. **С6.** а) да; б) нет; в) да.

Диагностическая работа 2

В1. 546. **В2.** 4. **В3.** 29. **В4.** 596. **В5.** -73. **В6.** 103. **В7.** 2.
В8. 2. **В9.** 26. **В10.** 0,9. **В11.** 49. **В12.** 7. **В13.** 18. **В14.** -17.
С1. а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}$. **С2.** $\frac{\sqrt{46}}{4}$.
С3. $\left[\frac{1}{3} \left(2 + \log_{25} \frac{17}{24} \right); \frac{2}{3} \right)$. **С4.** 1 : 48 или 1 : 6. **С5.** (-72; -8). **С6.** а) да;
б) нет; в) да.

Книги издательства МЦНМО
можно приобрести в магазине
«Математическая книга» по
адресу: Бол. Власьевский пер.,
д. 11. Тел.: (499) 241-72-85.
URL: biblio.mccme.ru

*Андрей Викторович Семенов
Андрей Сергеевич Трепалин
Иван Валериевич Яценко*

**ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ:
ЗАВЕРШАЮЩИЙ ЭТАП ПОДГОТОВКИ**

Подписано в печать 11.4.2012. Гарнитура Newton.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Печ. л. 7. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3694

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Тел.: (499) 241-74-83, (495) 745-80-31.

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Тел.: (495) 363-48-86. <http://capitalpress.ru>