

М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин
К. М. Столбов, И. В. Яценко

ЕГЭ 2011

Математика

C1

C2

C3

C4

C5

C6

Задача C6

Арифметика
и алгебра

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Яценко

ЕГЭ 2011. Математика
Задача С6
Арифметика и алгебра

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Яценко

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 373:51
ББК 22.1я72
П70

Авторы: М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Яценко

Пратусевич М. Я. и др.
П70 ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2011. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-668-6

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2011. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи С6.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-94057-668-6

© Пратусевич М. Я., Рукшин С. Е.,
Столбов К. М., Яценко И. В., 2011.
© МЦНМО, 2011.

Предисловие

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся. Эта цель выходит на одно из ведущих мест при изучении математики на повышенном уровне. Поскольку одним из основных отличий задачи С6 от остальных задач ЕГЭ является ее явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов, постольку смыслом включения задачи С6 в состав контрольно-измерительных материалов ЕГЭ является именно диагностика уровня интеллектуального развития учащихся.

Целью данной книги является не только подготовить учащихся к решению задачи С6, но и помочь учителю систематически заниматься интеллектуальным развитием учащихся на материале содержания задачи С6.

Авторы сборника старались дать обзор тех тем, которым традиционно в школе уделяется меньше внимания, и показать некоторые специфические методы решения задач. В сборник включены и более трудные задачи, примыкающие к так называемой «олимпиадной тематике». Эти задачи отмечены звездочкой.

Материалы книги могут служить подспорьем в проведении элективных курсов, кружков и факультативов.

В книге также приведены задачи, аналогичные задачам С6 Единого государственного экзамена 2010 года, вместе с критериями их оценивания. В диагностическую работу, предложенную в начале книги, включены задачи, предлагавшиеся в тренировочных вариантах в 2009/10 учебном году.

В заключение отметим, что, безусловно, перечень возможных сюжетов и тем задачи С6 не исчерпывается приведенными в данной книге.

Авторы будут благодарны за конструктивную критику и замечания по содержанию этой книги, которые можно присылать по адресу ivan@mscme.ru.

Диагностическая работа

Задача 1. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - 3y = xy$.

Задача 2. Найдите все пары натуральных чисел m и n , удовлетворяющие уравнению $2^m - 3^n = 1$.

Задача 3. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

§ 1. Делимость, признаки делимости

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Определение. Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c , что $a = bc$.

Свойства делимости

- Если a делится на b , то и число ka делится на b .
- Если число a делится на c и число b делится на c , то сумма и разность чисел a и b делится на c .

Признаки делимости

- Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.
- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.
- Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из последних двух цифр его десятичной записи, идущих в том же порядке, делится на 4.
- Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.
- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.
- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечетных местах, считая справа в десятичной записи данного числа, и суммы цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи данного числа, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как $(8 + 6 + 9 + 5 + 3) - (0 + 2 + 7 + 0) = 22$ — делится на 11).

Простые и взаимно простые числа

- Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.
- Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.
- 1 не является ни простым, ни составным числом.
- Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.

- Если число a делится на числа b и c , причем числа b и c взаимно просты, то число a делится на их произведение bc . Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причем любые два числа из данных n чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

Основная теорема арифметики и количество делителей. Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

(p_1, p_2, \dots, p_k — попарно различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — натуральные числа). Данная форма записи называется каноническим разложением числа n .

Количество натуральных делителей числа n , записанного в канонической форме, равно $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Остатки. Любое целое число a можно поделить с остатком на любое ненулевое целое число b , а именно существуют числа q (неполное частное) и r (остаток) такие, что выполняется равенство $a = bq + r$, причем $r \in \{0, 1, \dots, |b| - 1\}$.

Сумма (произведение) чисел a и b дает тот же остаток при делении на число m , что и сумма (произведение) остатков чисел a и b при делении на число m .

Подготовительные задачи

- 1.1. Поставьте вместо знака $*$ цифру в числе $566*239$ так, чтобы оно делилось на 9.
- 1.2. Докажите, что произведение любых трех последовательных целых чисел делится на 6.
- 1.3. Сколько натуральных делителей имеет число 3072?
- 1.4. Найдите наибольшее целое число, которое при делении на 11 дает неполное частное 10.
- 1.5. На какую цифру оканчивается число 53^{2007} ?

Основные задачи

Пример 1.1. Может ли число, сумма цифр которого равна 2010, быть квадратом целого числа?

Ответ: Нет.

Решение: Оно делится на 3, но не делится на 9.

Пример 1.2. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

Решение. Среди пяти последовательных чисел есть число, делящееся на 3; число, делящееся на 2; число, делящееся на 5, то есть произведение любых пяти последовательных чисел делится на 3, 2 и 5, а тогда оно делится и на $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$ (в силу попарной взаимной простоты чисел 3, 2 и 5).

Пример 1.3. Докажите, что дробь $\frac{2n+1}{3n+2}$ несократима (n — натуральное число).

Решение. Пусть дробь сокращается на некоторое натуральное число $d > 1$. Это означает, что ее числитель и знаменатель делятся на d , т. е. $2n+1:d$ и $3n+2:d$. Следовательно, $3(2n+1):d$ и $2(3n+2):d$ (мы умножили данные выражения так, чтобы коэффициенты перед n стали одинаковыми). Тогда разность полученных чисел тоже делится на d , откуда $1:d$, что противоречит предположению $d > 1$.

Пример 1.4. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатка 2 при делении на 3.

Решение. Число n может давать при делении на 3 остатки 0, 1, 2. Рассмотрим таблицу:

Остаток числа n при делении на 3	Остаток числа n^2 при делении на 3
0	0
1	1
2	1

Из таблицы видно, что если число n делится на 3, то и n^2 делится на 3, в противном случае остаток числа n^2 при делении на 3 равен 1.

Пример 1.5. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число натуральных делителей.

Решение. Пусть число n записано в канонической форме:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Ясно, что число n является точным квадратом тогда и только тогда, когда все показатели степеней α_i , в которых входят в разложение

простые множители, четны. (Если $n = m^2$ и $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, то $n = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{2\beta_k}$.) С другой стороны, количество делителей числа n равно $N = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$. Из этой формулы следует, что число делителей N нечетно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ четны, что и требовалось доказать.

Пример 1.6. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

Ответ: Только на 7.

Решение. Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трёхзначное простое число не может оканчиваться ни на чётную цифру (т.е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра семь. Существует пример такого числа: 167.

Пример 1.7. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

Ответ: Нет, не существует.

Решение. Два числа, отличающиеся лишь порядком цифр, дают одинаковые остатки при делении на 9. Выясним какие остатки при делении на 9 могут давать числа вида 2^n ($n = 1, 2, 3, \dots$):

Степень числа 2	Остаток степени при делении на 9
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	7
2^5	5
2^6	1
2^7	2
...	...

Докажем, что последовательность остатков при делении на 9 степеней двойки 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2... периодична с периодом 6. Действительно, $2^{n+6} - 2^n = 2^n \cdot 63$, делится на 9. Предположим, что две степе-

ни двойки отличаются только лишь порядком цифр, тогда они дают одинаковый остаток при делении на 9 и отличаются не менее чем в $2^6 = 64$ раза, т. е. в них разное количество цифр. Получаем противоречие.

Замечание. В этой задаче мы воспользовались тем фактом, что число дает такой же остаток при делении на 9, как и сумма всех его цифр.

Пример 1.8*. Докажите, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

Решение. Заметим, что 1981 дает остаток 1 при делении на 9 и при делении на 11, поэтому 1981^n при делении на 9 и на 11 дает остаток 1.

Таким образом, сумма цифр числа 1981^n дает остаток 1 при делении на 9. Очевидно, что эта сумма цифр не равна 1. Тогда она может быть равна 10, 19, ... Тем самым осталось показать, что сумма цифр числа 1981^n не может быть равна 10.

В самом деле, нетрудно показать, что при делении на 11 число дает тот же остаток, что и разность сумм цифр на нечетных и на четных местах (считая с разряда единиц). Значит, указанная разность может быть равна ..., -10 , 1 , 12 , 23 ...

Если эта разность по модулю больше 10, то сумма всех цифр числа также больше 10.

Если разность сумм цифр на четных и на нечетных местах равна -10 , а сумма всех цифр числа равна 10, значит, на всех нечетных местах стоят 0, что неверно, ибо последней цифрой числа 1981^n является 1.

Если разность сумм цифр на четных и на нечетных местах равна 1, то эти суммы цифр — числа разной четности, а значит, их сумма является числом нечетным, т. е. не равна 10.

Пример 1.9. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, где p — заданное простое число.

Ответ: $(p+1; p^2+p)$; $(2p; 2p)$; $(p^2+p; p+1)$.

Решение. Отметим, что из условия следует, что оба неизвестных должны быть больше p . Приведа к общему знаменателю, получим $xy = p(x+y)$. Это уравнение можно записать в виде $(x-p)(y-p) = p^2$. Из разложения следуют три системы уравнений:

$$\begin{cases} x-p=1, \\ y-p=p^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-p=p, \\ y-p=p; \end{cases} \quad \begin{cases} x-p=p^2, \\ y-p=1, \end{cases}$$

решая которые, получаем ответ.

Задачи для самостоятельного решения

1.6. Какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 5?

1.7. Какое наименьшее натуральное число не является делителем $50!$ ($n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)?

1.8. Докажите, что дробь $\frac{6n+7}{10n+12}$ несократима при натуральных n .

1.9. Каково наименьшее натуральное число n , такое, что $n!$ делится на 990?

1.10. Десятизначное число на 1 больше квадрата натурального числа. Доказать, что в нем есть одинаковые цифры.

1.11. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

1.12. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

1.13. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором число 1?

1.14. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

1.15. Найдите 10 натуральных чисел, обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.

1.16. Числа m и n взаимно просты. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел $4m + 3n$ и $6m + 5n$?

1.17. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

1.18. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

1.19. Натуральные числа m и n таковы, что $m > n$, m не делится на n и имеет от деления на n тот же остаток, что и $m + n$ от деления на $m - n$. Найдите отношение $m : n$.

1.20. Существует ли такое натуральное n , что $n^2 + n + 1$ делится на 1955?

1.21*. Вычислите сумму всех делителей числа $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$.

1.22. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ наименьшее натуральное число, большее 1 и взаимно простое с каждым из чисел $2, 3, \dots, n$, является простым.

§ 2. Десятичная запись числа

Краткая теоретическая справка

Всякое натуральное число N единственным образом представимо в виде

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

где n — натуральное число или 0, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ — цифры от 0 до 9, причем цифра $a_n \neq 0$.

Это представление натурального числа в десятичной системе счисления называют десятичной записью числа. Для краткости мы будем записывать это $(n+1)$ -значное число в виде:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$$

(черта, как правило, ставится, чтобы отличить десятичную запись числа от произведения цифр $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$).

Натуральное число M является n -значным в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет неравенству $10^{n-1} \leq M < 10^n$.

Всякая правильная дробь $\frac{m}{n}$ представима в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Дробь называется чисто периодической, если ее период начинается сразу после запятой, отделяющей целую и дробную часть числа.

Несократимая правильная дробь $\frac{m}{n}$ представляется в виде конечной десятичной дроби в том и только в том случае, когда ее знаменатель n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

Подготовительные задачи

2.1. Цифры двузначного числа \overline{ab} поменяли местами и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что разность $\overline{ab} - \overline{ba}$ всегда делится на 9.

2.2. Двузначное число умножили на произведение его цифр. В ответе получилось трехзначное число из одинаковых цифр, совпадающих с цифрой в разряде единиц исходного числа: $\overline{ab} \cdot a \cdot b = \overline{bbb}$. Какое двузначное число мы умножали?

2.3. Докажите, что десятичная запись числа 3^{20} содержит не более 10 цифр.

2.4. Натуральные числа от 1 до 20 выписали в строчку подряд: 123456789101112...181920. В полученном натуральном числе нужно вычеркнуть 10 цифр так, чтобы натуральное число, образованное оставшимися цифрами, было как можно больше. Как это сделать?

Основные задачи

Пример 2.1. В трехзначном числе \overline{abc} поменяли местами цифры, стоящие в разряде сотен и в разряде единиц, и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что разность $\overline{abc} - \overline{cba}$ всегда делится на 99.

Решение. Запишем разность:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c).$$

Это число делится на 99, что и требовалось доказать.

Пример 2.2. В примере на умножение двузначных чисел одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные цифры — разными. Докажите, что при вычислении была допущена ошибка: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{eff}$.

Решение. Равенство невозможно, потому что для различных цифр a, b, c и d левая часть $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ не делится на 11, а правая часть $\overline{eff} = 11 \cdot (10e + f)$ — делится.

Пример 2.3. Докажите, что квадрат натурального числа, оканчивающегося цифрой 5, оканчивается на 25.

Решение. Всякое натуральное число, оканчивающееся цифрой 5, можно представить в виде $10a + 5$, где a — количество его десятков (не обязательно цифра!). Например, $1945 = 10 \cdot 194 + 5$. Квадрат числа будет равен $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$. Это число оканчивается на 25, так как первые два слагаемых оканчиваются двумя нулями и не влияют на последние две цифры суммы.

Пример 2.4. Найдите все двузначные числа, которые равны сумме цифры десятков и квадрата цифры, стоящей в разряде единиц.

Ответ: 89.

Решение. Из уравнения $\overline{ab} = a + b^2$ следует, что $9a = b(b - 1)$, откуда $a = 8, b = 9$.

Пример 2.5. Сложили шесть трехзначных чисел, полученных перестановками трех различных цифр в разном порядке. Докажите, что полученная сумма делится на 37.

Решение. Запишем сумму всех данных трехзначных чисел:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c) = 37 \cdot 6(a + b + c).$$

Это число делится на 37.

Пример 2.6. При каком наименьшем натуральном n в десятичной записи правильной дроби $\frac{m}{n}$ после запятой могут подряд встретиться цифры 0,...501...?

Ответ: При $n = 251$.

Решение. Домножая дробь на подходящую степень десятки, мы можем получить дробь, у которой цифры 501 встречаются сразу после десятичной запятой (при этом знаменатель полученной дроби будет меньше или равен n). Таким образом, можно считать, что $\frac{m}{n} = 0,501\dots$. Тогда $\frac{m}{n} - \frac{1}{2} < 0,502 - 0,5 = \frac{1}{500}$. С другой стороны, $\frac{m}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2m-n}{2n} \geq \frac{1}{2n}$, откуда $\frac{1}{2n} < \frac{1}{500}$, то есть $n > 250$. Значит, знаменатели, меньшие 251, не подходят. Нетрудно проверить, что дробь $\frac{126}{251} = 0,501\dots$ подходит.

Пример 2.7. Может ли произведение всех цифр десятичной записи натурального числа равняться 2010?

Ответ: Не может.

Решение. $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, а простое число 67 нельзя представить в виде произведения цифр.

Пример 2.8. Докажите, что десятичная запись числа 2^{300} содержит более 90, но не более 100 цифр.

Решение. $2^{300} = 8^{100} < 10^{100}$, поэтому 2^{300} имеет не более 100 цифр. С другой стороны, $2^{300} = 1024^{30} > 1000^{30} = 10^{90}$, откуда следует, что 2^{300} имеет более 90 цифр.

Задачи для самостоятельного решения

2.5. Натуральные числа от 1 до 20 выписали подряд после запятой и получили десятичную дробь: 0,123456789101112...181920. Как вычеркнуть 10 цифр, чтобы десятичная дробь, образованная оставшимися цифрами, была как можно меньше?

2.6. Число \overline{abcde} делится на 41. Докажите, что число \overline{eabcd} также делится на 41.

2.7. Найдите все трехзначные числа, для которых любое число, полученное из них произвольной перестановкой цифр, делится на 7.

2.8. Найдите все двузначные числа, квадрат которых оканчивается теми же двумя цифрами, что и само число.

2.9. Найдите все трехзначные числа, квадрат которых оканчивается теми же тремя цифрами, что и само число.

2.10. Сколько существует двузначных чисел, которые ровно в 9 раз больше суммы своих цифр? А сколько существует таких трехзначных чисел?

2.11. В натуральном числе поменяли местами две соседние цифры и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что полученная разность всегда делится на 9.

2.12. В натуральном числе поменяли местами две цифры, стоящих через одну, и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что разность всегда делится на 99.

2.13. В примере на умножение двузначных чисел одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Докажите, что при вычислении была допущена ошибка: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}$.

2.14. Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на \overline{aabb} .

2.15. На чем основан следующий способ возведения в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой пять: отбросьте цифру 5 и умножьте полученное число на следующее за ним натуральное число, а к результату справа припишите число 25 (например, для получения квадрата числа 115 нужно 11 умножить на $11 + 1 = 12$ и к произведению $11 \times 12 = 132$ приписать 25, получив в ответе 13225)?

2.16. Какое наибольшее значение может принимать частное от деления трехзначного числа на сумму всех его цифр?

2.17. Найдите все четырехзначные числа \overline{abcd} такие, что $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2011$.

2.18. Из трех различных цифр составили всевозможные двузначные числа без повторений цифр в одном числе. Сумма шести полученных чисел оказалась равной 528. Найдите эти цифры.

2.19. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{100} и 5^{100} . Сколько всего цифр выписали?

2.20. При некотором натуральном n десятичная запись чисел 2^n и 5^n начинается с одной и той же цифры. Какая это может быть цифра?

2.21. Существует ли натуральное число, которое при зачеркивании первой слева цифры уменьшается ровно в 2011 раз?

2.22. Девятизначное число, в записи которого есть все цифры, кроме нуля, после некоторой перестановки цифр уменьшилось в 8 раз. Найдите все такие числа.

2.23. При каком наименьшем натуральном n в десятичной записи дроби $\frac{1}{n}$ после запятой могут подряд встретиться цифры 0,...142...? А в десятичной записи правильной дроби $\frac{m}{n}$?

2.24. а) Сколько существует натуральных чисел n , меньших 100, таких, что каждое из чисел $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражается конечной десятичной дробью?

б) Найдите все такие натуральные n .

§ 3. Уравнения в целых числах (диофантовы уравнения)

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Уравнение вида $f(x, y, \dots) = 0$, переменные в котором считаются целочисленными, называется *уравнением в целых числах*, или *диофантовым уравнением*. Набор целочисленных значений переменных, при подстановке которых в уравнение получается верное равенство, называется *решением* диофантова уравнения.

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ — диофантово уравнение (если считать, что переменные могут принимать целочисленные значения). Набор (3; 4; 5) — одно из его решений.

Уравнение вида

$$ax + by = c \quad (1)$$

называется *линейным диофантовым уравнением*. Очевидно, что такое уравнение имеет решения в целых числах только тогда, когда $c : (a, b)$. Однако верно и обратное утверждение: если $c : (a, b)$, то уравнение (1) имеет целочисленные решения. В этом случае можно разделить оба коэффициента и свободный член уравнения на (a, b) и решать полученное, более простое уравнение.

Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением такого уравнения, то все его решения можно получить по формулам

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot \frac{b}{(a, b)}, \\ y = y_0 - k \cdot \frac{a}{(a, b)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Обычно указанную пару решений находят подбором, подставляя вместо одной переменной остатки от деления на коэффициент при другой.

Подготовительные задачи

3.1. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 5.

3.2. Найдите три подряд идущих целых числа, сумма кубов которых равна кубу следующего за ними числа.

3.3. Найдите все прямоугольники с целыми сторонами, площадь которых равна их периметру.

3.4. Решите уравнения в целых числах:

а) $3x^2 + 1 = 5y$; б) $2^x + 65 = y^2$.

3.5. Докажите, что прямая $4x + 6y - 7 = 0$ не проходит через точки, обе координаты которых — целые числа.

Основные задачи

В решении уравнений в целых числах часто помогает разложение на множители одной из частей, особенно если в другой части оказывается целое число.

Пример 3.1. Решите уравнение $xy + 2x + 3y = 7$ в целых числах.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде

$$xy + 2x + 3y = (x + 3)(y + 2) - 6,$$

после чего уравнение приобретает вид $(x + 3)(y + 2) = 13$. Если x и y — целые числа, то множители $x + 3$ и $y + 2$ также должны быть целыми.

Число 13 раскладывается в произведение целых чисел четырьмя различными способами: $13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = (-1) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-1)$. Поэтому все решения данного уравнения в целых числах получаются из систем:

$$\begin{cases} x+3=1, \\ y+2=13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=13, \\ y+2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-1, \\ y+2=-13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-13, \\ y+2=-1, \end{cases}$$

решая которые, получаем ответ: $(-2; 11)$, $(10; -1)$, $(-4; -15)$, $(-16; -3)$.

Зачастую для решения диофантовых уравнений требуются более тонкие рассуждения, связанные с делимостью, перебором остатков, оценками частей уравнения, тождественными преобразованиями и т. п.

Пример 3.1. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

Решение. Так как правая часть при натуральных z дает при делении на 4 остаток 1, то и левая часть должна давать такой же остаток при делении на 4, откуда следует, что x четно. Пусть $x = 2m$, где m — натуральное число. Аналогично, рассмотрим остатки обеих частей уравнения от деления на 3. Левая часть при всех натуральных

x и y дает остаток 1, а 5^z дает остаток 1 только при четных z , откуда $z = 2k$, где k — натуральное число. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $3^{2m} + 2^{2y} = 5^{2k}$, или $5^{2k} - 2^{2y} = 3^{2m}$.

Раскладывая левую часть по формуле разности квадратов, получаем $(5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^{2m}$. Так как разложение правой части на простые множители содержит только тройки, то каждая из скобок должна быть неотрицательной степенью тройки. Так как разность между скобками $2 \cdot 2^y$ не делится на 3, то это возможно только в случае, когда $5^k - 2^y = 1$, а $5^k + 2^y = 3^{2m}$. Отсюда $5^k = 2^y + 1$, а $5^k + 2^y = 2^y + 1 + 2^y = 3^{2m}$, или $3^{2m} - 1 = 2^{y+1}$.

Еще раз применяя формулу разности квадратов, получаем

$$(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^{y+1}.$$

Значит, оба сомножителя в левой части являются степенями двойки, отличающимися на 2. Следовательно, $3^m - 1 = 2$, а $3^m + 1 = 4$, откуда $m = 1$, а $2^{y+1} = 8$, т. е. $y = 2$. Тогда $x = 2$ и $3^2 + 4^2 = 5^z$, откуда $z = 2$.

Пример 3.2. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 + 4xy + 13y^2 = 58.$$

Ответ: $(5; 1)$, $(-5; -1)$, $(9; -1)$, $(-9; 1)$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделив полный квадрат относительно переменной x :

$$x^2 + 4xy + 13y^2 = (x + 2y)^2 + (3y)^2.$$

Таким образом, исходное уравнение приобретает вид

$$(x + 2y)^2 + (3y)^2 = 58,$$

откуда следует, что $(3y)^2 \leq 58$, т. е. $|y| \leq 2$. Перебирая значения y , получаем ответ.

Пример 3.3. Решите в целых числах уравнение: $3x + 2y = 7$.

Решение. Подставим вместо x возможные остатки от деления на коэффициент при y , т. е. на 2. Если подставить $x = 0$, значение y получается не целым, а если подставить $x = 1$, то $y = 2$. Таким образом, найдено одно решение этого уравнения — пара $(1; 2)$, а значит, общая формула решений этого уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k, \\ y = 2 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(см. теоретическую справку).

Геометрически решения данного уравнения суть координаты целочисленных точек, через которые проходит прямая, задаваемая этим уравнением.

Пример 3.4. Решите в целых числах уравнение

$$x(x+1) = 4y(y+1).$$

Ответ: $(0; 0)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(-1; -1)$.

Решение. Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2$.

Если $x \geq 1$, имеем $x^2 < (2y + 1)^2 < (x + 1)^2$, т. е. уравнение решений не имеет.

Если $x \leq -2$, то $(x + 1)^2 < x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2 < x^2$, т. е. уравнение решений не имеет.

Подставляя значения x , равные 0 и -1 , находим соответствующие значения y .

Задачи для самостоятельного решения

3.6. Решите в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{239}$.

3.7. Решите уравнение в натуральных числах: $2^x + 3^x + 4^x = y^2$.

3.8. Решите уравнение в натуральных числах: $3^x + 55 = y^2$.

3.9. Решите уравнение в натуральных числах:

а) $x! - 1 = y^2$; б) $x! + 12 = y^2$.

3.10. Решите в натуральных числах систему:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 180, \\ (x, y) = 30; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x = 11y, \\ (x, y) = 45; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} xy = 720, \\ (x, y) = 4. \end{cases}$$

3.11. Решите в натуральных числах уравнение: $xy(x + y) = 120$.

3.12. Решите в целых числах уравнение: $a^2b^2 + a^2 + b^2 = 1969$.

3.13. Решите в натуральных числах уравнение: $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.

3.14. Решите в целых числах уравнение: $3^x = 1 + y^2$.

3.15. Найдите все пары различных натуральных чисел x и y такие, что $x^y = y^x$.

3.16. Решите в целых числах уравнение: $x + y = x^2 - xy + y^2$.

3.17. Решите в целых числах уравнение: $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

3.18. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + 2xy = 4x + 7$.

3.19. Решите уравнение в целых числах: $2x^2 - 12xy + 19y^2 = 132$.

3.20. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + 3x + 5 = y^2$.

3.21. Решите уравнение в натуральных числах: $x + y = x^2 - xy + y^2$.

3.22. Решите в целых числах уравнение: $2x^2 + 3xy + 3y^2 = 2x + 6y$.

3.23. Решите в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ при $x \leq y \leq z$.

3.24. Решите в целых числах уравнение: $3^x + 7 = 2^y$.

§ 4. Прогрессии

Краткая теоретическая справка

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — последовательность, заданная рекуррентно следующим образом: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, где $n \in \mathbb{N}$. Число $d \in \mathbb{R}$ называется разностью арифметической прогрессии. (Говорят также, что несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, если они являются последовательными числами некоторой последовательности, которая является арифметической прогрессией.)

Формула n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — последовательность, заданная рекуррентно следующим образом: $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$, где $n \in \mathbb{N}$. Число $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n -го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий

Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних, то есть для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ выполняется равенство $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

В частности, три числа a , b и c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b = \frac{a + c}{2}$.

Последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль каждого ее члена, начиная со второго,

равен среднему геометрическому соседних, то есть для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ выполняется равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

В частности, три числа a , b и c образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$.

Подготовительные задачи

4.1. Дана арифметическая прогрессия с первым членом 2 и разностью -3 . Найдите десятый член арифметической прогрессии и сумму первых десяти ее членов.

4.2. Второй член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых трех членов прогрессии.

4.3. Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна 1023, а первый член равен 1. Найти знаменатель прогрессии.

4.4. Третий член геометрической прогрессии равен 4. Найдите произведение первых пяти членов прогрессии.

4.5. Найдите наибольшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 78$, $a_2 = 70$.

Основные задачи

Пример 4.1. Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии, если $a_{10} + a_{11} = 4$.

Ответ: 40.

Решение. Заметим, что

$$a_{10} + a_{11} = a_9 + a_{12} = a_8 + a_{13} = \dots = a_1 + a_{20},$$

таким образом, сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии $S_{20} = (a_{10} + a_{11}) \cdot 10 = 40$.

Можно было решить эту задачу и другим стандартным способом: выразив a_{10} и a_{11} через первый член прогрессии a_1 и разность d , получим, что $a_{10} + a_{11} = 2a_1 + 19d = 4$. В то же время по формуле суммы арифметической прогрессии $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 40$.

Пример 4.2. Том Сойер красил забор длиной 105 метров, причем день за днем количество выкрашенного за один день уменьшалось на одну и ту же величину. За сколько дней был покрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 метров забора, а за последние три — только 27 метров?

Ответ: 10.

Решение. Пусть Тому понадобилось на покраску n дней и в день с номером k он покрасил a_k метров забора. По условию числа a_k образуют (убывающую) арифметическую прогрессию.

Заметим, что

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2},$$

а по условию

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 36 + 27 = 63.$$

Отсюда следует, что $a_1 + a_n = 21$. По формуле суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 105$, откуда $n = 10$.

Пример 4.3. Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии и первым и третьим членом некоторой геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма трех первых членов больше?

Ответ: У арифметической.

Решение. Обозначим данные числа a и b . По характеристическим свойствам прогрессий, второй член арифметической прогрессии равен $\frac{a+b}{2}$, а второй член геометрической прогрессии равен \sqrt{ab} . По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим (см. § 5) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, если $a \neq b$. Отсюда следует (ведь первый и третий члены прогрессий совпадают), что сумма членов арифметической прогрессии больше.

Пример 4.4. В арифметической прогрессии четвертый член равен 1. При каком значении разности произведение второго и седьмого членов будет наибольшим?

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Решение. Обозначим разность прогрессии d . Тогда

$$a_2 \cdot a_7 = (a_4 - 2d)(a_4 + 3d) = (1 - 2d)(1 + 3d) = -6d^2 + d + 1.$$

Квадратичная функция $f(d) = -6d^2 + d + 1$ достигает наибольшего значения при $d = \frac{1}{12}$.

Пример 4.5. Могут ли числа 2, 3 и 17 быть членами (не обязательно последовательными) одной геометрической прогрессии?

Ответ: Нет.

Решение. Если бы такая прогрессия существовала, то имели бы место равенства $3 = 2 \cdot q^n$ и $17 = 3 \cdot q^k$ при некоторых $k, n \in \mathbb{N}$, откуда $\left(\frac{3}{2}\right)^k = \left(\frac{17}{3}\right)^n \Leftrightarrow 3^{k+n} = 2^k \cdot 17^n$, что невозможно (хотя бы потому, что левая часть — нечетное число, а правая — четное).

Пример 4.6. Дана арифметическая прогрессия с первым членом 1 и разностью 2. Докажите, что число

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$

является целым.

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}} = \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_{41}} - \sqrt{a_{40}}}{a_{41} - a_{40}} = \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{41}} - \sqrt{a_{40}}}{d} = \\ &= \frac{\sqrt{a_{41}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{\sqrt{81} - \sqrt{1}}{2} = 4. \end{aligned}$$

Пример 4.7. Шесть простых чисел являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30.

Решение. Предположим, что разность прогрессии нечетна. Тогда в этой прогрессии будет как минимум три четных числа, что невозможно. Аналогично, если разность прогрессии не кратна 3, то в этой прогрессии будут как минимум два числа, кратных трем. Значит, разность прогрессии кратна 2 и 3, т. е. кратна 6.

Если разность прогрессии не кратна 5, то в ней есть член, кратный 5. Тогда это просто число 5. Если 5 — первый член прогрессии, то среди оставшихся 5 членов есть еще один член, кратный 5, что невозможно. Если же 5 не является первым членом, то первый член будет отрицательным, ибо ранее доказано, что разность прогрессии не меньше 6.

Итак, разность прогрессии кратна 5 и 6, т. е. кратна 30, а значит, не менее 30.

Интересно, что прогрессия 7, 37, 67, 97, 127, 157 состоит из простых чисел.

Пример 4.8. Различные числа a , b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, а числа $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$, $\frac{1}{c+1}$ (в том

же порядке) — арифметическую. Найдите сумму арифметической прогрессии.

Ответ: 1,5.

Решение. По характеристическому свойству арифметической прогрессии верно равенство

$$\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{c+1} - \frac{1}{b+1} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a+1} = \frac{b-c}{c+1}.$$

Обозначим знаменатель данной в условии геометрической прогрессии как q и подставим в это равенство числа $a = \frac{b}{q}$ и $c = bq$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{b - \frac{b}{q}}{\frac{b}{q} + 1} = \frac{qb - b}{qb + 1} &\Leftrightarrow b\left(1 - \frac{1}{q}\right)(qb + 1) = b(q - 1)\left(\frac{b}{q} + 1\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b(q - 1)(qb + 1)}{q} = \frac{b(q - 1)(b + q)}{q}, \end{aligned}$$

откуда получаем, учитывая, что $q \neq 1$ и $b \neq 0$,

$$qb + 1 = b + q \Leftrightarrow (q - 1)(b - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $b = 1$ и искомая сумма арифметической прогрессии равна $S = \frac{3}{b+1} = \frac{3}{2}$.

Пример 4.9. Найдите наибольшую разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{13}$.

Ответ: $\frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17}$.

Решение. Обозначим разность арифметической прогрессии d . По условию для некоторых чисел $n, k \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{17} = \frac{2}{17 \cdot 15} = dn \quad \text{и} \quad \frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{13 \cdot 15} = dk,$$

откуда

$$\frac{n}{k} = \frac{13}{17} \quad \text{и} \quad d = \frac{2}{15 \cdot 17 \cdot n}.$$

Из последнего равенства следует, что значение d будет наибольшим при наименьшем значении n , а из первого равенства следует, что наименьшим значением n является 13 (ибо n делится на 13). Следовательно, наибольшее значение $d = \frac{2}{13 \cdot 15 \cdot 17}$. Нетрудно заметить, что при этом данные числа действительно будут являться членами арифметической прогрессии с этой разностью и $a_1 = \frac{1}{17}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.6. В арифметической прогрессии $a_1 = -85$, a_{19} — ее первый положительный член. Какие значения может принимать разность прогрессии?

4.7. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12. Найдите наибольшее значение произведения этих чисел.

4.8. Докажите, что последовательность, сумма n первых членов которой задается формулой $S_n = 3^n - 1$, является геометрической прогрессией.

4.9. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40 %, то получится геометрическая прогрессия, сумма которой равна 39. Найдите эти числа.

4.10. Сумма пятого и девятого членов геометрической прогрессии равна 7. Найдите сумму их квадратов, если произведение шестого и восьмого членов этой прогрессии равно 12.

4.11. В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

4.12. Найдите шестой и десятый члены возрастающей геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.

4.13. Отношение суммы первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно $7:3$. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно числу $-\frac{7}{4}$.

4.14. Геометрическая прогрессия с отрицательной суммой состоит из четырех членов. Выбросив из нее второй член, мы получим возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии.

4.15. Найдите всевозможные значения a , при которых числа $2\sqrt{2a}$, $-8, 3\sqrt{8a}$ являются, в некотором порядке, последовательными членами арифметической прогрессии.

4.16. Три числа, сумма которых равна 12, образуют арифметическую прогрессию. Если второе оставить без изменения, а первое

и третье увеличить на 1, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

4.17. Могут ли числа 1 , $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ быть членами (не обязательно последовательными) одной арифметической прогрессии?

4.18. Могут ли цифры простого трехзначного числа образовывать арифметическую прогрессию?

4.19. Найдите все состоящие из простых чисел арифметические прогрессии (состоящие из не менее чем трех чисел) с разностью 10.

4.20. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что 99-й член этой прогрессии также является натуральным числом?

4.21. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все ее члены увеличить на 1, то сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d , где d — разность прогрессии, а n — число ее членов?

4.22. В арифметической прогрессии $a_{20} = 30$ и $a_{30} = 20$. Найдите a_{50} .

4.23. Обозначим через S_n сумму первых n членов непостоянной арифметической прогрессии. Найдите все прогрессии, для которых при всех $n, k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $S_n \cdot S_k = S_{nk}$.

4.24. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

§ 5. Среднее арифметическое и неравенство о средних

Краткая теоретическая справка

Средним арифметическим чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется число $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Средним геометрическим неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется число $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Для любых неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, причем равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. В частности, для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, причем равенство достигается только при $a = b$.

Подготовительные задачи

5.1. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

5.2. Может ли среднее арифметическое 10 целых чисел равняться 566,23?

5.3. Докажите, что для любого положительного числа a выполняется неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Основные задачи

Пример 5.1. Докажите, что среднее арифметическое двух неравных чисел больше меньшего числа и меньше большего числа.

Решение. Пусть $a < b$. Тогда $\frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ и $\frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a$, что и требовалось доказать.

Пример 5.2. Какое наибольшее значение может принимать произведение двух положительных чисел, если их сумма равна 10?

Ответ: 25.

Решение. Обозначим данные числа a и b . По условию $a + b = 10$. Тогда по неравенству о средних $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 5$, откуда $ab \leq 25$. При $a = b = 5$ равенство достигается.

Пример 5.3. Если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, произведение которых равно 1, то $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Решение. Применим неравенство о средних к каждой скобке: $\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_i} \Leftrightarrow 1 + a_i \geq 2\sqrt{a_i}$. Получим $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 2^n$, что и требовалось доказать.

Пример 5.4. Две команды КВН участвуют в игре из четырех конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырех полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

Ответ: Может.

Решение. Пусть оценки судей для первой команды за каждый из первых трех конкурсов — (333334), за четвертый — (334444), а для второй команды за все конкурсы — (333344). Значения, полученные компьютером для первой команды, — 3,2; 3,2; 3,2; 3,7. Значения, полученные для второй, — 3,3; 3,3; 3,3; 3,3. Первая команда победила со счетом 13,3 : 13,2. При этом сумма оценок, выставленных судьями первой команде, — 79, второй команде — 80.

Пример 5.5. В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все они равны.

Решение. Рассмотрим наименьшее из всех чисел. Оно равно среднему арифметическому соседей, каждое из которых больше этого числа или равно ему, но такое может быть только в том случае, если соседние числа равны данному. Таким образом, соседние числа — также наименьшие из всех чисел, а значит, и их соседи им равны. Продолжая это рассуждение, мы докажем, что все числа в вершинах 100-угольника равны.

Задачи для самостоятельного решения

5.4. Может ли среднее арифметическое 35 целых чисел равняться 6,35?

5.5. Средний рост пяти баскетболистов равен 195 см. Какое наибольшее количество из этих игроков может быть ниже, чем 191 см?

5.6. Средний рост шести друзей — 1,2 м. Рост самого низкого из них — 1,1 м. Каков средний рост остальных пяти?

5.7. Средний рост пяти игроков баскетбольной команды — 2,04 м. После замены игрока, рост которого равен среднему, средний рост команды увеличился до 2,08 м. Каков рост нового игрока?

5.8. Среднее арифметическое десяти различных положительных целых чисел равняется 10. Чему может равняться наибольшее среди этих чисел?

5.9. В соревновании участвовали 50 стрелков. Первый выбил 60 очков; второй — 80; третий — среднее арифметическое очков первых двух; четвёртый — среднее арифметическое очков первых трех. Каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 42-й стрелок?

5.10. Известно, что произведение двух положительных чисел равно 16. Какое наименьшее значение может принимать их сумма?

5.11. Докажите, что если сумма двух положительных чисел фиксирована, то произведение тем больше, чем ближе друг к другу они расположены на координатной оси.

5.12. Докажите, что если a , b и c — неотрицательные числа, то $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

5.13. Докажите, что $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ для неотрицательных чисел a , b , c и d .

5.14. Произведение положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно 1. Докажите, что их сумма больше или равна n .

5.15. На шахматной доске расставлены числа, причем число в каждой клетке равно среднему арифметическому чисел в соседних клетках (клетки называются соседними, если у них есть общая сторона, так, например, у угловой клетки есть две соседних клетки). Докажите, что все числа равны. Решите задачу, если известно, что числа а) натуральные; б) целые.

5.16. Найдите наибольшее натуральное число, каждая крайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

§ 6. Задачи, аналогичные предложенным на ЕГЭ-2010

Задача 1.1. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. 1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \dots + 7)(13 + \dots + 21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7)(-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 + 20 + 21) = \\ = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1 и 4131.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, либо что сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задача 6.2. Перед каждым из чисел 22, 23, ..., 26 и 50, 51, ..., 60 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое

из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. 1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$11(22 + \dots + 26) + 5(50 + \dots + 60) = \\ = 11\left(\frac{22+26}{2} \cdot 5\right) + 5\left(\frac{50+60}{2} \cdot 11\right) = 55 \cdot (24 + 55) = 4345.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней – нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11(-22 + 23 - 24 + 25 - 26) + \\ + 5(50 + 51 - 52 - 53 + 54 - 55 + 56 - 57 + 58 - 59 + 60) = \\ = -11 \cdot 24 + 5 \cdot 53 = -264 + 265 = 1.$$

Ответ: 1 и 4345.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, либо что сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задача 6.3. Найдите все тройки натуральных чисел k , m и n , удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Решение. 1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, то $n < m$ и $k < m$.

2. Пусть $k \leq n$, тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \geq n+1$ и $k \leq n \leq 3$.

3. Пусть $k > n$, тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \geq k+1$ и $n < k \leq 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$ находим все решения.

Ответ: $k=1, n=2, m=3$; $k=n=3, m=4$; $k=2, n=1, m=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована	2
Приведен хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задача 6.4. Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение. В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем: $24 = 1^b + 23 = \overline{1b}$ или $a^1 + 23 = \overline{a1} = 10a + 1$, что невозможно. Далее считаем $a > 1$ и $b > 1$.

Пусть $a \leq 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leq 9$, так как иначе, если число b k -значное ($k \geq 2$), имеем:

$$a^b \geq 2^{(10^{k-1})} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ab}.$$

Пусть $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b k -значно, а a $(m+1)$ -значно ($m \geq 1$), имеем:

$$\text{если } k > 1, \text{ то } a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m \cdot (k+2)} = 10^{(m+m)+m \cdot k} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k=1, b \geq 3, \text{ то } a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k=1, b=2, m \geq 2, \text{ то } a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

$$\text{если } k=1, b=2, m=1, a \geq 32, \text{ то } a^b \geq (32)^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}.$$

Конечным перебором всех пар a и b , для которых
либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$,
либо $10 \leq a \leq 31$ и $b=2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары $a = 3, b = 2$; $a = 7, b = 2$.

Ответ: $a = 3, b = 2$; $a = 7, b = 2$.

Замечание. Перебор значений a и b может быть произведен с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т. п.). Например, следующим образом.

Остается две возможности: либо $1 < a \leq 9$ и $1 < b \leq 9$, либо $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$.

В первом случае, если $a = 2$, имеем: $20 + b = 2^b + 23$, но $23 > 20$, а $2^b > b$.

Если $a = 3$, имеем: $30 + b = 3^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b = 2$ подходит, а $b = 3$ нет.

Если $a = 4$, имеем: $40 + b = 4^b + 23$.

При $b > 3$ справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ не подходят.

При $a \geq 5$, если $b > 2$, справа стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$; $a^2 - 10a + 21 = 0$, откуда получаем: $a = 3$ и $a = 7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a + 2 = a^2 + 23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведен перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных ее показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор не более чем однозначных ее показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

§ 7. Ответы, указания, решения

Диагностическая работа

Задача 1. Решение. Решим данное уравнение относительно y :

$$x^2 - 3y = xy \Leftrightarrow (x+3)y = x^2.$$

Так как $x = -3$ не является решением уравнения, то последнее уравнение равносильно уравнению $y = \frac{x^2}{x+3}$. Преобразуя правую часть последнего уравнения

$$\frac{x^2}{x+3} = \frac{(x^2-9)+9}{x+3} = x-3 + \frac{9}{x+3},$$

получаем $y = x-3 + \frac{9}{x+3}$.

Поскольку x , y и $x+3$ — натуральные числа, выражение $\frac{9}{x+3}$ может принимать только натуральные значения, откуда $x+3=9$, $x=6$, $y=4$.

Ответ. (6; 4).

Задача 2. Решение. Преобразуем равенство в $2^m = 3^n + 1$. Заметим, что 3^n даёт остатки только 1 и 3 при делении на 8, значит, $3^n + 1$ даёт остатки 2 и 4. При этом левая часть при $m > 2$ даёт остаток 0 при делении на 8. Остатки у левой и правой частей должны быть равны. Отсюда $m \leq 2$. Далее перебором получаем ответ.

Ответ. $m=2$, $n=1$.

Задача 3. Решение. Пусть рейсов автобусами A , будет x , причем в каждый из них помещается A детей. Всего будет перевезено S школьников.

Тогда $S = 2xA$, если перевозить автобусами A и $S = 3(x-1)B$, если перевозить автобусами B (по условию рейсов автобусами B на один меньше). Ещё из условия видно, что $B = A - 7$.

Итого получаем:

$$S = 2xA = 3(x-1)(A-7).$$

Преобразуем это:

$$2xA = 3xA - 3A - 21x + 21.$$

Или, что то же самое,

$$x = \frac{3A-21}{A-21} = 3 + \frac{42}{A-21}.$$

Так как все числа у нас натуральные, то 42 делится на $A - 21$. Построим таблицу:

$A - 21$	1	2	3	6	7	14	21	42
A	22	23	24	27	28	35	42	63
x	45	24	17	10	9	6	5	4
$S = 2xA$	1980	1104	816	540	504	420	420	504

Из этой таблицы видно, что максимальное количество перевозимых школьников равно 1980.

Ответ. 1980.

§ 1. Делимость, признаки делимости

1.1. *Ответ.* 5.

1.2. *Указание.* Среди них есть число, делящееся на 2, и число, делящееся на 3.

1.3. *Ответ.* 22. *Указание.* $3072 = 2^{10} \cdot 3$.

1.4. *Ответ.* 120.

1.5. *Ответ.* 7.

1.6. *Ответ.* 0, 1, 4.

1.7. *Ответ.* 53.

1.8. *Указание.* Умножьте верхнюю дробь на 5, нижнюю на 3 и рассмотрите их разность.

1.9. *Ответ.* $n = 11$.

1.10. *Решение.* Если в десятизначном числе все цифры различны, то каждая из цифр встречается в нем ровно 1 раз, а тогда сумма его цифр равна 45, т.е. это число делится на 3. Тогда квадрат, на 1 меньший этого числа, дает от деления на 3 остаток 2, чего не может быть.

1.11. *Ответ.* 8910.

1.12. *Ответ.* 7.

1.13. *Ответ.* 2. *Указание.* Сумма всех чисел равна $37 \cdot 19$, а она должна делиться на последнее число, значит, последнее число равно 19, а тогда третье может быть равно только 2.

1.14. *Ответ.* 6, 42, 1806.

1.15. *Ответ.* 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

1.16. *Ответ.* 1 или 2.

1.17. *Ответ.* 251.

1.18. *Ответ.* 133.

1.19. *Ответ.* $m/n = 5/2$.

1.20. *Ответ.* Нет. *Указание.* Рассмотрите остатки числа $n^2 + n + 1$ при делении на 5.

1.21. Ответ. $\frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$.

1.22. Решение. Если это число составное, то его можно разложить в произведение двух сомножителей, больших 1. Если упомянутое число взаимно просто с числами 2, 3, 4, ..., n , то и его сомножители взаимно просты с этими числами. Если оба этих сомножителя меньше, чем само число, получаем противоречие с выбором этого числа как наименьшего.

§ 2. Десятичная запись числа

2.1. Решение. Представим числа в десятичной записи. Тогда $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9(a - b) : 9$.

2.2. Ответ. $\overline{ab} = 37$. Решение. Сократив обе части равенства $\overline{ab} \cdot a \cdot b = \overline{bbb}$ на b , получим $\overline{ab} \cdot a = 111$. Из разложения на простые множители числа 111 получаем $\overline{ab} = 37$.

2.3. Решение. $3^{20} = 9^{10} < 10^{10}$. Так как 10^{10} — наименьшее натуральное число, имеющее ровно одиннадцать цифр, то число 3^{20} имеет в десятичной записи не более 10 цифр.

2.4. Ответ. 911 121 314 151 617 181 920. Указание. При равном количестве цифр большим будет то натуральное число, у которого больше цифра в старшем разряде.

2.5. Ответ. 0,011121314151617181920.

2.6. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа.

2.7. Ответ. 700, 707, 770, 777. Указание. Сначала докажите, что все цифры этого трехзначного числа дают одинаковый остаток при делении на 7.

2.8. Ответ. 25, 76. Указание. Воспользоваться десятичной записью или правилом умножения целых чисел в столбик.

2.9. Ответ. 376, 625. Указание. Воспользоваться десятичной записью или правилом умножения целых чисел в столбик.

2.10. Ответ. Такое двузначное число единственное и равно 81. Трехзначных чисел с таким свойством не существует. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа для составления уравнения, связывающего его цифры.

2.11. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа и поменяйте местами цифры a_k и a_{k+1} .

2.12. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа и поменяйте местами цифры a_{k-1} и a_{k+1} .

2.13. Указание. Смотрите решение примера 2.2. Решение. Равенство невозможно, потому что левая часть $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ не делится на 101, а правая часть \overline{efef} — делится на 101.

2.14. Решение. Число \overline{aabb} делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ для различных c и d — нет, поэтому $\overline{cdcdcdcd}$ не может делиться на \overline{aabb} .

2.15. Указание. Смотри решение примера 2.3. **Решение.** Пусть возводимое в квадрат число равно $10a + 5$, где a — количество его десятков (не обязательно цифра!). Тогда $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1) \cdot 100 + 25$.

2.16. Ответ. 100. **Решение.** Заметим, что для трехзначного числа \overline{abc} выполняется неравенство $\overline{abc} \leq 100(a + b + c)$, причем равенство достигается при $b = c = 0$.

2.17. Ответ. $\overline{abcd} = 1811$. **Указание.** Десятичная запись дает уравнение $1111a + 111b + 11c + d = 2011$ с естественными для цифр ограничениями на величину a, b, c и d .

2.18. Ответ. 7, 8, 9. **Решение.** Пусть эти цифры a, b, c . Тогда из уравнения $\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ac} + \overline{ca} = 528$ получаем $a + b + c = 24$. Учитывая, что a, b, c различны, получаем ответ. **Замечание.** Здесь мы воспользовались тем, что для любой другой тройки различных цифр сумма будет меньше 24.

2.19. Ответ. 101 цифра. **Решение.** Пусть 2^{100} имеет m цифр, а 5^{100} n цифр. Тогда $10^{m-1} < 2^{100} < 10^m$, а $10^{n-1} < 5^{100} < 10^n$. Перемножая почленно эти неравенства, получаем $10^{m+n-2} < 10^{100} < 10^{m+n}$, откуда

$$\begin{cases} m + n - 2 < 100, \\ m + n > 100. \end{cases}$$

Следовательно, общее количество выписанных цифр $m + n = 101$.

2.20. Ответ. Цифра 3. **Решение.** Предположим, что оба числа начинаются с цифры a . Тогда $a \cdot 10^k < 2^n < (a + 1) \cdot 10^k$ и $a \cdot 10^l < 5^n < (a + 1) \cdot 10^l$. Перемножая неравенства и сокращая на 10^{k+l} , получим $a^2 < 10^{n-k-l} < (a + 1)^2$, откуда $a = 3$.

2.21. Ответ. Нет, не существует. **Указание.** Напишите уравнение для десятичной записи числа и воспользуйтесь идеей решения примера 2.7.

2.22. Ответ. Это число 987 654 312.

2.23. Ответ. При $n = 7$. **Решение.** Заметим, что $\frac{1}{7} = 0,142\dots$, а у дробей со знаменателем, меньшим 7, такое сочетание цифр не встречается.

2.24. Ответ. Таких чисел два: $n = 1$ и $n = 4$. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что несократимая правильная дробь $\frac{m}{n}$ представляется в виде конечной десятичной дроби в том и только в том случае, когда ее знаменатель n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

**Уравнения в целых числах
(диофантовы уравнения)**

- 3.1. Ответ. (3; 2).
3.2. Ответ. 3, 4, 5.
3.3. Ответ. Прямоугольники 4×4 или 3×6 .
3.4. Ответ. а) Нет решений; б) (4; 9), (4; -9), (10; 33), (10; -33).
3.5. Указание. 7 — нечетное число.
3.6. Ответ. (239; $239 \cdot 240$); (478; 478); ($239 \cdot 240$; 239).
3.7. Ответ. (1; 3).
3.8. Ответ. (2; 8), (6; 28).
3.9. Ответ. а) (2; 1); б) (4; 6).
3.10. Ответ. а) (30; 150), (150; 30); б) (495; 315); в) (4; 180), (180; 4), (36; 20); (20; 36).
3.11. Ответ. (3; 5), (5; 3).
3.12. Ответ. (3; 14); (-3, 14), (3; -14), (-3; -14), (14; 3), (14; -3), (-14; 3), (-14; -3).
3.13. Ответ. (1, 2, 3).
3.14. Ответ. (0; 0). Указание. Рассмотрите остатки от деления на 3.
3.15. Ответ. (2; 4) и (4; 2).
3.16. Ответ. (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).
3.17. Ответ. (0; 0), (1; 2).
3.18. Ответ. (7; -1), (-7; 5), (1; 5), (-1; -1). Указание. Из уравнения следует, что 7 кратно x .
3.19. Ответ. (14; 2), (2; -2), (-2; 2), (-14; -2), (-34; -10), (34; 10), (26; 10), (-26; -10). Указание. Для сокращения перебора полезно заметить, что y — четное.
3.20. Ответ. (1; 3), (1; -3), (-4; 3), (-4; -3). Указание. Возможны два пути решения: либо показать, что при достаточно больших по модулю x выражение $x^2 + 3x + 5$ находится между двумя последовательными квадратами, либо умножить уравнение на 4 и, выделив полный квадрат, разложить на множители.
3.21. Ответ. (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2). Указание. Заметим, что $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$. Так как $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$, получаем $(x + y)^2 - 3xy \geq (x + y)^2 - 3 \cdot \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{(x + y)^2}{4}$. Таким образом, из уравнения получаем $x + y \geq \frac{(x + y)^2}{4}$, откуда $0 \leq x + y \leq 4$. Подставляя в исходное уравнение возможные значения $x + y$, получаем значения xy , а затем находим значения переменных.

3.22. *Ответ.* $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 2)$, $(-2; 2)$. *Указание.* Перенесем слагаемые из правой части уравнения в левую и рассмотрим получившееся уравнение как квадратное относительно переменной x . Его дискриминант равен $-15y^2 + 36y + 4$. Целыми значениями y , удовлетворяющими неравенству $-15y^2 + 36y + 4 > 0$, являются только 0, 1 или 2. Подставляя эти значения y в исходное уравнение, получаем соответствующие значения x .

3.23. *Ответ.* $(3; 3; 3)$, $(2; 3; 6)$, $(2; 4; 4)$. *Указание.* Наибольшая из дробей, т. е. $\frac{1}{x}$, не меньше $\frac{1}{3}$. Тогда $x = 2$ или $x = 3$. Подставляя в исходное уравнение, получаем два случая, разбираемых аналогично.

3.24. *Ответ.* $(0; 3)$, $(2; 4)$. *Указание.* Из уравнения следует $2^y > 7$, а значит, y — натуральное число, причем $y \geq 3$. Тогда x — неотрицательное число. Если $x = 0$, то $y = 3$. При $x \geq 1$, рассматривая остатки от деления левой и правой частей уравнения на 3 и на 4, получаем, что обе переменные могут быть только четными. Далее решаем уравнение разложением на множители.

§ 4. Прогрессии

4.1. *Ответ.* -25 ; -115 .

4.2. *Ответ.* 15.

4.3. *Ответ.* 2.

4.4. *Ответ.* 1024.

4.5. *Ответ.* 420.

4.6. *Ответ.* $(85/18; 5]$.

4.7. *Ответ.* 64.

4.8. *Ответ.* Да ($a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$).

4.9. *Ответ.* 3, 15, 27.

4.10. *Ответ.* 25.

4.11. *Ответ.* -8 .

4.12. *Ответ.* 6, 10.

4.13. *Ответ.* 4.

4.14. *Ответ.* $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

4.15. *Ответ.* 8.

4.16. *Ответ.* 1, 4, 7 или 7, 4, 1.

4.17. *Ответ.* Нет.

4.18. *Ответ.* Нет. *Указание.* Если цифры образуют арифметическую прогрессию, то их сумма делится на 3.

4.19. *Ответ.* 3, 13, 23.

4.20. *Ответ.* Неверно. (Пример: $a_n = 2^{\frac{n-1}{9}}$.)

4.21. Ответ. ± 400 .

4.22. Ответ. 0.

4.23. Ответ. 1, 3, 5, 7, ... Указание. S_n является квадратичной функцией от n , а для функции $f(n) = an^2 + bn + c$ свойство $f(n) \cdot f(m) = f(mn)$ выполняется только при $a = 1$, $b = c = 0$.

4.24. Ответ. (2; 3), (3; 5; 7).

§ 5. Среднее арифметическое и неравенство о средних

5.1. Ответ. 32.

5.2. Ответ. Нет.

5.3. Указание. Это просто неравенство между средними.

5.4. Ответ. Нет.

5.5. Ответ. 4.

5.6. Ответ. 1,22 м.

5.7. Ответ. 2,24 м.

5.8. Ответ. От 15 до 55 включительно.

5.9. Ответ. 70.

5.10. Ответ. 8.

5.11. Ответ. Да.

5.12. Указание. Примените неравенство о средних для каждой из скобок.

5.13. Указание. Примените два раза неравенство о средних для двух чисел.

5.14. Указание. Примените неравенство о средних для n чисел.

5.15. Указание. Рассмотрим максимальное из всех чисел. Нетрудно доказать, что все его соседи ему равны. Их соседи — тоже. И т. д.

5.16. Ответ. 96 433 469. Указание. В нашем числе разница между цифрой и следующей за ней убывает. Отсюда и из того, что все цифры маленькие (не больше 9), несложно получить оценку на количество цифр (если положительных разностей хотя бы 4, то одна из цифр больше 9; аналогично с отрицательными, и еще одна нулевая). Кроме того, ясно, что нам нужно максимально возможное количество цифр, а также то, что по набору разностей максимальное число с таким набором восстанавливается легко. Последнее соображение дает понять, что наилучшее число получается из набора «3, 2, 1, 0, -1, -2, -3», что и дает верный ответ.

Содержание

Предисловие	3
Диагностическая работа	4
§ 1. Делимость, признаки делимости	5
Простые и взаимно простые числа	5
§ 2. Десятичная запись числа	12
§ 3. Уравнения в целых числах (диофантовы уравнения)	17
§ 4. Прогрессии	22
Арифметическая прогрессия	22
Геометрическая прогрессия	22
§ 5. Среднее арифметическое и неравенство о средних	29
§ 6. Задачи, аналогичные предложенным на ЕГЭ-2010	32
§ 7. Ответы, указания, решения	36

*Максим Яковлевич Пратусевич
Сергей Евгеньевич Рукишин
Константин Михайлович Столбов
Иван Валериевич Ященко*

ЕГЭ 2011. МАТЕМАТИКА. ЗАДАЧА С6. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 14.12.2010 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 30 000 экз. Заказ № 1020290.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83



Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат».
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcsme.ru

Книгу можно купить

в магазине «Математическая книга»

в здании Московского центра
непрерывного математического образования.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11.
Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская»,
далее пешком.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья
с **10:00 до 20:00.**

e-mail: biblio@mccme.ru

Адрес в Интернете: www.biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio@mccme.ru



(499) 241-72-85

(495) 745-80-31



(495) 229-67-59

КНИГОТОРГОВАЯ
КОМПАНИЯ



Оптовые заказы: abrisd@textbook.ru

Розничные заказы: в интернет-магазине UMLIT.RU

(812) 327-04-50

Санкт-Петербург, пр. Железнодорожный, д. 20

e-mail: info@prosv-spb.ru, www.prosv-spb.ru

ЕГЭ 2011

Математика

ISBN 978-5-94057-668-6



9 785940 576686 >