

ЕГЭ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»



РЕШЕБНИК

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1.

РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ЧАСТЬ 2.

Решения сборника задач
в электронном виде на www.legionr.ru

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2012



Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ–2012

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2011

ББК 22.1
М 34



Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:

*Войта Е. А., Дерезин С. В., Евич Л. Н., Иванов С. О.,
Казьмин И. А., Ковалевская А. С., Коннова Е. Г.,
Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Тимофеев И. В.,
Фофанов А. Е., Ханин Д. И.*

М34 Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2012: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. — 206 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-91724-093-0

Данный решебник поможет при подготовке школьника к ЕГЭ по математике. Он состоит из двух частей.

Часть I — настоящее пособие. Оно содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова, за исключением решения варианта, представленного в упомянутой выше книге.

Часть II — решения сборника задач, которые размещены в электронном виде на сайте издательства www.legion.ru в свободном доступе (бесплатно).

Надеемся, что данная книга поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый ему материал и успешно подготовиться к ЕГЭ.

ББК 22.1

ISBN 978-5-91724-093-0

© ООО «Легион-М», 2011.

Оглавление

Решения вариантов тестов	4
Решение варианта № 2	4
Решение варианта № 3	11
Решение варианта № 4	18
Решение варианта № 5	25
Решение варианта № 6	33
Решение варианта № 7	39
Решение варианта № 8	44
Решение варианта № 9	49
Решение варианта № 10	55
Решение варианта № 11	60
Решение варианта № 12	67
Решение варианта № 13	72
Решение варианта № 14	77
Решение варианта № 15	83
Решение варианта № 16	89
Решение варианта № 17	95
Решение варианта № 18	101
Решение варианта № 19	108
Решение варианта № 20	115
Решение варианта № 21	122
Решение варианта № 22	130
Решение варианта № 23	138
Решение варианта № 24	148
Решение варианта № 25	159
Решение варианта № 26	165
Решение варианта № 27	171
Решение варианта № 28	178
Решение варианта № 29	186
Решение варианта № 30	192
Литература	200

Решения вариантов тестов

Решение варианта № 2

В1. На 15 дней понадобится $183 \cdot 15 = 2745$ пачек сахара. Учитывая, что в одной упаковке 16 пачек и $2745 : 16 = 171,5625$, то надо купить 172 упаковки.

Ответ: 172.

В2. Наибольшая среднесуточная скорость ветра соответствует точке с наибольшей ординатой. По графику определяем, что наибольшая ордината равна 20.

Ответ: 20.

В3. По определению арифметического корня чётной степени имеем $51 - 13x = 25, \Leftrightarrow 13x = 26, \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

В4. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,
 $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot \angle ABD - \angle A = 180^\circ - 2 \cdot 6^\circ - 93^\circ = 75^\circ$.

Ответ: 75.

В5. Определим стоимость набора продуктов в каждом городе.

Астрахань: $30 \cdot 3 + 260 \cdot 1 + 42 \cdot 2 = 434$ (руб.)

Новочеркасск: $35 \cdot 3 + 250 \cdot 1 + 45 \cdot 2 = 445$ (руб.)

Тара: $40 \cdot 3 + 240 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 440$ (руб.)

Стоимость самого дешёвого набора составляет 434 рубля.

Ответ: 434.

В6. $S = \frac{4+8}{2} \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

В7. $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, значит, $\cos \alpha < 0$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{24}{25}} = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

Ответ: -0,2.

В8. На касательной выберем две точки $A(8; 8)$ и $B(3; 1)$, тогда

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 1}{8 - 3} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

В9. По условию цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Значит, в основании параллелепипеда — квадрат со стороной, равной $a = 2r$, где r — радиус основания цилиндра.

$$a = 2 \cdot 5 = 10.$$

Объём прямоугольного параллелепипеда найдём по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, где h — высота параллелепипеда.

$$V = 10^2 \cdot 5 = 500.$$

Ответ: 500.

В10. В формулу $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ подставим $m_0 = 150$ мг, $T = 3$ мин, $m(t) = 18,75$ мг. Получим $150 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} = 18,75$; $2^{-\frac{t}{3}} = \frac{1}{8}$; $2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-3}$;

$$-\frac{t}{3} = -3; t = 9.$$

Ответ: 9.

$$\text{В11. } y' = 3x^2 + 10x - 8, y' = 0, 3x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$-4 \in (-5; -2); \frac{2}{3} \notin (-5; -2).$$

$$y(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - 8 \cdot (-5) + 1 = 41;$$

$$y(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 1 = 49;$$

$$y(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 1 = 29;$$

Из чисел 29, 41, 49 наибольшее число 49.

Ответ: 49.

В12. Пусть x км/ч — скорость первого мотоциклиста, S км — расстояние между пунктами A и B . Тогда $\frac{S}{x}$ ч — время в пути первого мотоциклиста.

$\frac{S}{2 \cdot 30}$ ч — время второго мотоциклиста, затраченное на первую половину

пути, $\frac{S}{2 \cdot (x + 20)}$ ч — время второго мотоциклиста, затраченное на вто-

рую половину пути. $\left(\frac{S}{60} + \frac{S}{2(x + 20)} \right)$ ч — время второго мотоциклиста,

затраченное на весь путь от пункта A до пункта B . По условию мотоциклисты прибыли в пункт B одновременно. Составим уравнение:

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{60} + \frac{S}{2(x + 20)}, x > 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{2(x+20)},$$

$$60x + 1200 = x^2 + 20x + 30x,$$

$$x^2 - 10x - 1200 = 0,$$

$x = 40$, $x = -30$ — корни уравнения.

$x = -30$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Второй мотоциклист во второй половине пути ехал со скоростью $40 + 20 = 60$ км/ч.

Ответ: 60.

$$\text{C1. } (6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4) \sqrt{-5 \cos x} = 0.$$

$$1. -5 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \begin{cases} 6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4 = 0, \\ \cos x \leq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы.

$$6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4 = 0.$$

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leq 1$.

Уравнение примет вид:

$$6t^2 - 11t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

$t = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sin x = \frac{1}{2}, \begin{cases} \left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \right. & \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ (см. рис. 1).}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

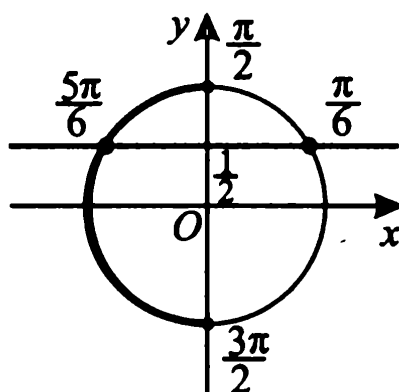


Рис. 1.

С2. 1. Проведём $BH \perp DC$ и $HH_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \perp (ABC)$, значит, $HH_1 \perp (ABC)$, BH_1 — наклонная, BH — проекция наклонной. $BH_1 \perp DC$ по теореме о трёх перпендикулярах (см. рис. 2).

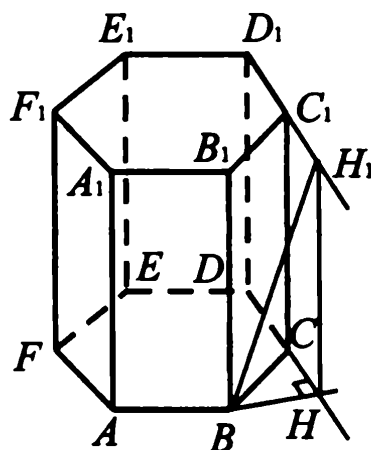


Рис. 2.

Так как $D_1C_1 \parallel DC$, то $BH_1 \perp D_1C_1$, следовательно, BH_1 — искомое расстояние.

2. В $\triangle BHC$ $\angle H = 90^\circ$, $\angle BCH = 180^\circ - \angle BCD$. $\angle BCD = 120^\circ$, так как шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, $\angle BCH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$$\sin \angle BCH = \frac{BH}{BC}, BH = BC \cdot \sin \angle BCH = 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

3. В $\triangle BHH_1$, $\angle H = 90^\circ$:

$$BH_1 = \sqrt{BH^2 + HH_1^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 7^2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{7}}{2}$.

$$\text{С3. } 7 \log_9(x^2 + 3x - 10) \leq 8 + \log_9 \frac{(x-2)^7}{x+5}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 3x - 10 > 0, \\ \frac{(x-2)^7}{x+5} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+5) > 0, \\ \frac{(x-2)^7}{x+5} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ x > 2. \end{cases}$$

Решим неравенство на ОДЗ.

$$7 \log_9(x+5)(x-2) - \log_9 \frac{(x-2)^7}{x+5} \leq 8,$$

$$\log_9 \frac{(x+5)^7(x-2)^7(x+5)}{(x-2)^7} \leq 8,$$

$$\log_9(x+5)^8 \leq 8,$$

$$8 \log_9 |x+5| \leq 8,$$

$$\log_9 |x+5| \leq 1,$$

$$|x+5| \leq 9,$$

$$-9 \leq x+5 \leq 9,$$

$$-14 \leq x \leq 4.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $-14 \leq x < -5$, $2 < x \leq 4$ (см. рис. 3).

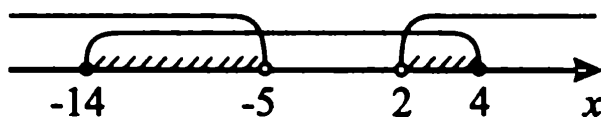


Рис. 3.

Ответ: $[-14; -5) \cup (2; 4]$.

С4. По условию в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 15$, тогда $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

$OE \perp AB$, $OK \perp MN$ по свойству касательной к окружности, $MN \perp AB$ по условию, $OK = OE$, следовательно, $KOEN$ — квадрат.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC}{AC + BC + AB} = \frac{8 \cdot 15}{40} = 3.$$

Рассмотрим два случая.

1. Прямая MN , перпендикулярная гипотенузе AB , пересекает катет BC (см. рис. 4).

$BE = BF$ по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки. $BF = BC - CF$, $CF = r = 3$, $BE = BF = 15 - 3 = 12$, тогда

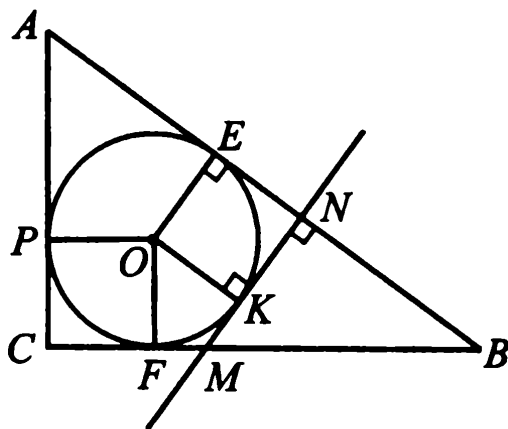


Рис. 4.

$$BN = BE - EN, EN = r = 3, BN = 12 - 3 = 9.$$

$\triangle BNM \sim \triangle BCA$ ($\angle N = \angle C = 90^\circ$, $\angle B$ — общий).

Из подобия следует

$$\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}, MN = \frac{BN \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 8}{15} = 4,8.$$

$$S_{ACMN} = S_{ABC} - S_{MNB} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC - \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BN =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 9 = 60 - 21,6 = 38,4.$$

2. Прямая MN , перпендикулярная гипотенузе AB , пересекает катет AC (см. рис. 5).

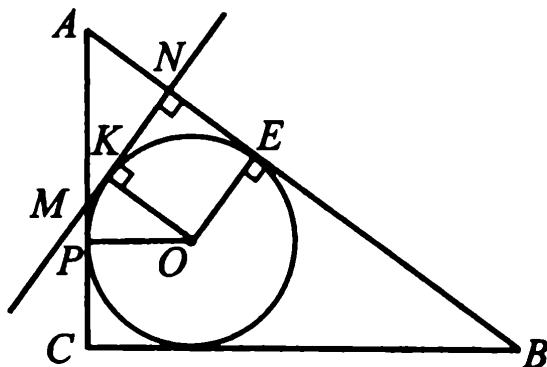


Рис. 5.

$$AP = AE = AC - PC = 8 - 3 = 5, AN = AE - EN = 5 - 3 = 2.$$

$\triangle ANM \sim \triangle ACB$ ($\angle N = \angle C = 90^\circ$, $\angle A$ — общий).

Из подобия следует

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}, MN = \frac{AN \cdot BC}{AC} = \frac{2 \cdot 15}{8} = 3,75.$$

$$S_{CMNB} = S_{ABC} - S_{AMN} = 60 - \frac{1}{2} \cdot AN \cdot MN = 60 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,75 = 56,25.$$

Ответ: 38,4; 56,25.

С5. Первое уравнение системы задаёт две симметричные относительно оси абсцисс окружности радиуса 4, центры которых находятся в точках $(5; 8)$ и $(5; -8)$. Второе уравнение системы задаёт окружность с центром в точке с координатами $(-3; 2)$ радиуса a .

Исходя из расположения задаваемых окружностей, ясно, что система имеет единственное решение в двух случаях.

1. Когда окружность радиуса a (случай *I*), касается «верхней» окружности: $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 16$;

2. Когда окружность радиуса a (случай *II*), касается «нижней» окружности: $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 16$ (см. рис. 6).

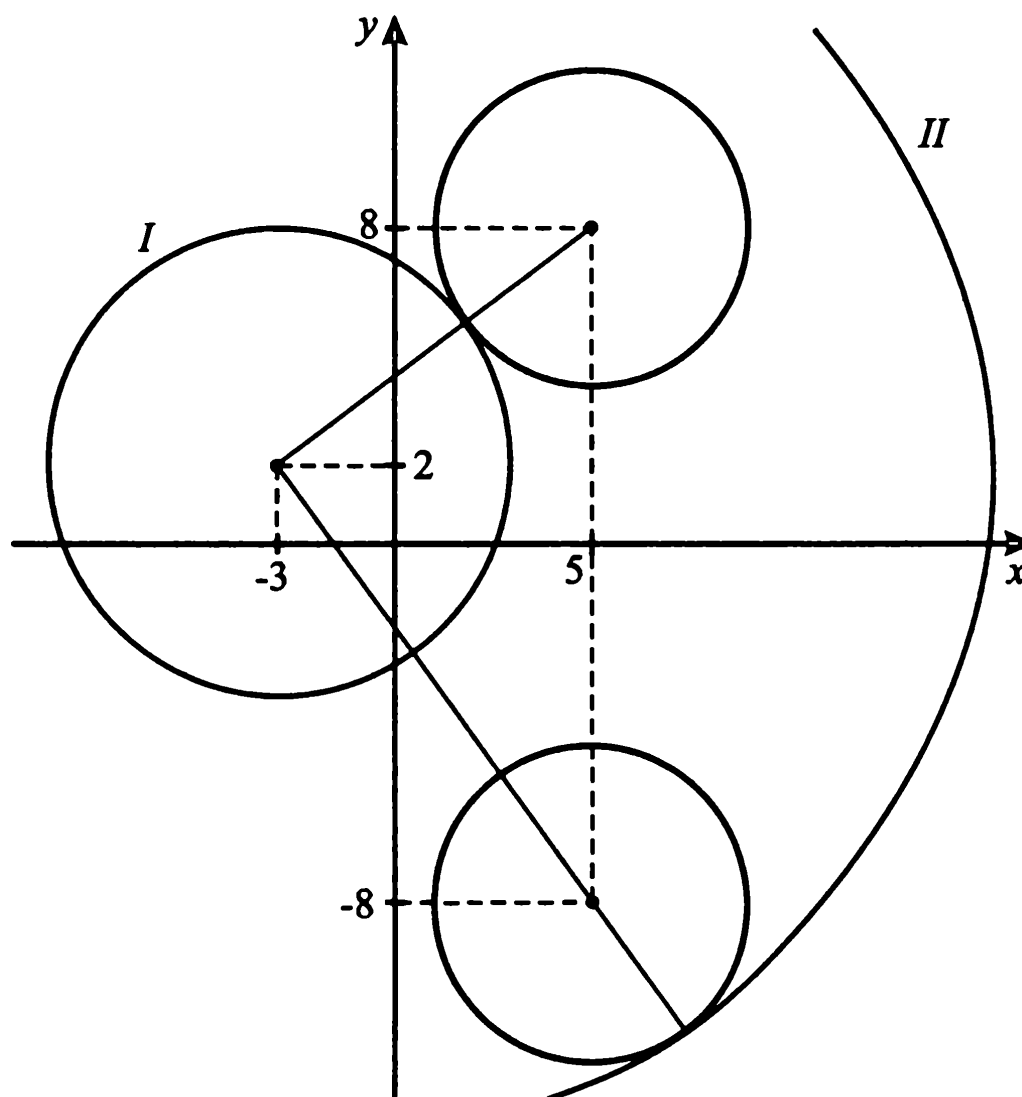


Рис. 6.

Рассмотрим каждый из случаев.

1. Расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов этих окружностей и равно $\sqrt{(5 - (-3))^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$, то есть $a + 4 = 10$, откуда $a = 6$.

2. Расстояние между центрами этих окружностей равно $\sqrt{(5 - (-3))^2 + (2 - (-8))^2} = \sqrt{64 + 100} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ и равно разности радиусов окружностей, значит, $a = 2\sqrt{41} + 4$. Таким образом, при $a = 6$ и $a = 4 + 2\sqrt{41}$ исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: 6; $4 + 2\sqrt{41}$.

С6. Докажем, что a и b взаимно просты. Предположим противное, то есть у них есть общий простой делитель p . Тогда a и b можно представить в виде $a = a_1 \cdot p^m$, где a_1 не делится на p , $m \in \mathbb{N}$;
 $b = b_1 \cdot p^n$, где b_1 не делится на p , $n \in \mathbb{N}$.

При $m \geq n$ из первой строки системы получаем

$$a_1^3 p^{3m} + b_1 p^n = c(a_1^2 p^{2m} + b_1^2 p^{2n}),$$

$$a_1^3 p^{3m-n} + b_1 = c p^n (a_1^2 p^{2m-2n} + b_1^2),$$

$b_1 = c p^n (a_1^2 p^{2m-2n} + b_1^2) - a_1^3 p^{3m-n}$, что невозможно, так как правая часть равенства делится на p , а левая — не делится.

Аналогично при $m < n$ из второй строки системы получаем

$$a_1 = d p^m (a_1^2 + b_1^2 p^{2n-2m}) - b_1^3 p^{3n-m}, \text{ что также приводит к противоречию.}$$

Следовательно, числа a и b взаимно просты.

Рассмотрим число

$$b(ab - 1) = a(a^2 + b^2) - (a^3 + b) = a(a^2 + b^2) - c(a^2 + b^2) = (a - c)(a^2 + b^2).$$

Это число делится на $a^2 + b^2$. Из взаимной простоты чисел a и b следует взаимная простота чисел b и $a^2 + b^2$, поэтому $ab - 1$ делится на $a^2 + b^2$. Это невозможно при $ab > 1$, так как в этом случае $a^2 + b^2 \geq 2ab > ab - 1$. Следовательно, $ab = 1$ и $a = b = c = d = 1$.

Ответ: (1; 1; 1; 1).

Решение варианта № 3

В1. Покупатель может воспользоваться скидкой, поэтому стоимость покупки для него составит $100\% - 15\% = 85\%$ от базовой. Таким образом, покупатель заплатит $40 \cdot 16 \cdot \frac{85}{100} = 544$ рубля.

Ответ: 544.

В2. 13-го мая наибольшая температура была 30°C , 11-го мая наибольшая температура была 20°C . Искомая разность составляет $30 - 20 = 10$ ($^\circ\text{C}$).

Ответ: 10.

В3. $(\sqrt{-12 + 7x})^2 = (x)^2$; $-12 + 7x = x^2$; $x^2 - 7x + 12 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Проверка: $\sqrt{-12 + 7 \cdot 3} = 3$; значит, $x = 3$ — корень исходного уравнения. $\sqrt{-12 + 7 \cdot 4} = 4$; следовательно, $x = 4$ — корень исходного уравнения.

В ответе указываем меньший из них: $x = 3$.

Ответ: 3.

В4. $\frac{CB}{AB} = \frac{1}{3}$ (см. рис. 7), откуда $CB = \frac{1}{3} \cdot AB = 6$.

$\triangle CHB \sim \triangle ACB$, $\angle HCB = \angle BAC$; $\frac{HB}{CB} = \frac{1}{3}$, значит, $HB = 2$.

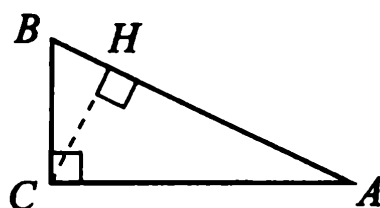


Рис. 7.

Ответ: 2.

В5. Стоимость заказа в фирме А: $330 \cdot 150 + 2000 = 51\,500$ (руб.);

в фирме Б: $290 \cdot 170 + 2500 = 51\,800$ (руб.);

в фирме В: $310 \cdot 170 = 52\,700$ (руб.),

то есть наименьшая стоимость покупки составит 51 500 руб. = 51,5 тыс. рублей.

Ответ: 51,5.

В6. Пусть r — радиус данного круга, тогда площадь круга равна $\pi r^2 = \frac{9}{\pi}$,

$r = \frac{3}{\pi}$. Длина окружности равна $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$.

Ответ: 6.

В7. $\left(5^{\log_2 5}\right)^{\log_5 4} = 5^{\log_2 5 \cdot \log_5 4} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{\log_2 5} = 4^{\log_2 5} =$
 $= (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2 \cdot \log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 5^2 = 25$.

Ответ: 25.

В8. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox . Из треугольника ABC (см. рис. 8):

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\angle CAB) = \frac{CB}{AB} = \frac{7}{4} = 1,75$.

Ответ: 1,75.

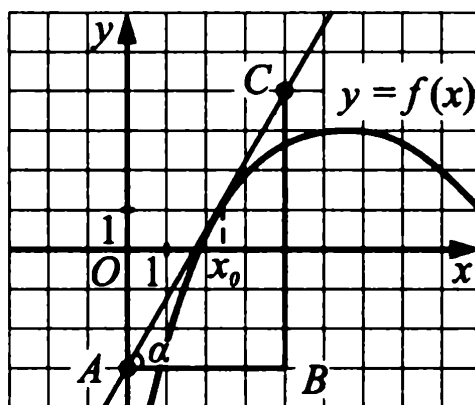


Рис. 8.

$$\begin{aligned} \text{В9. } V_{AEFA_1E_1F_1} &= S_{AEF} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot AA_1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AD\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB\right) \cdot AA_1 = \frac{1}{8} V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2,5. \end{aligned}$$

Ответ: 2,5.

В10. По условию мотоциклист находится в зоне функционирования сотовой связи при $S \leq 28$; $31t + \frac{10t^2}{2} \leq 28$; $5t^2 + 31t - 28 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = -7$ и $t_2 = 0,8$. Решением неравенства является отрезок $[-7; 0,8]$. Искомое наибольшее время по смыслу задачи равно $0,8 \text{ ч} = 48 \text{ мин}$.

Ответ: 48.

$$\text{В11. 1) } y' = -e^{x+10} + (10-x)e^{x+10} = e^{x+10}(-1+10-x) = e^{x+10}(9-x).$$

$$2) \text{ Найдём точки экстремума: } y' = 0 \Rightarrow 9 - x = 0, x = 9.$$

3) При $x < 9$ $y' > 0$, а при $x > 9$ $y' < 0$, значит, $x = 9$ — точка максимума исходной функции.

Ответ: 9.

В12. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста в пути от B к A , тогда $(x - 5)$ км/час — скорость велосипедиста в пути от A к B . Составляем уравнение $\frac{120}{x} + 2 = \frac{120}{x - 5}$, $x - 5 > 0$; $120(x - 5) + 2x(x - 5) = 120x$,

$$2x^2 - 10x - 600 = 0, x^2 - 5x - 300 = 0, x = \frac{5 + 35}{2} = 20.$$

Ответ: 20.

$$\text{С1. } \frac{4 \cos^2 x - 3}{\log_5(-\operatorname{tg} x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 3 = 0, \\ \log_5(-\operatorname{tg} x) \neq 0, \\ \operatorname{tg} x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \neq -1, \\ \operatorname{tg} x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi(k+1)\right), k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. 1) Рассмотрим треугольник AEF (см. рис. 9). Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то $\angle F = 120^\circ$, $AF = FE$, следовательно, $\angle FEA = \angle FAE = 30^\circ$. Тогда $\angle AED = \angle FED - \angle FEA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

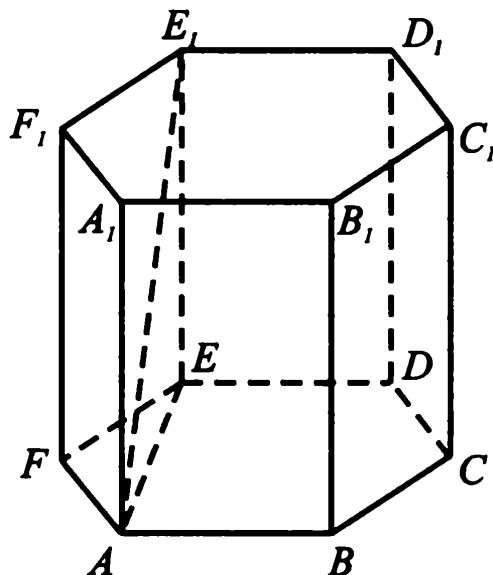


Рис. 9.

2) Отрезок EE_1 перпендикулярен плоскости $FEA \Rightarrow EE_1 \perp EA \Rightarrow EE_1$ — проекция AE_1 на плоскость EE_1D . Так как $EE_1 \perp E_1D_1$, AE_1 — искомое расстояние.

3) По теореме косинусов из треугольника AEF находим $AE^2 = FE^2 + FA^2 - 2FE \cdot FA \cdot \cos \angle FEA = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos 120^\circ = 36 \cdot 3$. Следовательно, $AE = 6\sqrt{3}$.

4) По теореме Пифагора из треугольника $AE E_1$ находим $AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{36 \cdot 3 + 36} = 12$.

Ответ: 12.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (5; +\infty).$

$$\frac{\log_2(x^2 - 5x)}{\log_2 x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2}{\log_2 x^2} \leq 0.$$

Возможны два случая.

$$1) \begin{cases} \log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2 \leq 0, \\ \log_2 x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \leq x^2, \\ x^2 > 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x > 5$.

$$2) \begin{cases} \log_2(x^2 - 5x) - \log_2 x^2 \geq 0, \\ \log_2 x^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \geq x^2, \\ x^2 < 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ \begin{cases} x > -1, \\ x < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0].$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-1; 0)$.

Следовательно, решением исходного неравенства являются значения $x \in (-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (5; +\infty)$.

С4. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 10). Пусть r — радиус вписанной в трапецию окружности, $AB = CD = b$; $BC = a$; $AD = c$, тогда $a + c = 2b$; $a + c + 2b = 40$, откуда $2b = a + c = 20$; $b = 10$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80 \quad (BL = 2r = 2 \cdot 4 = 8).$$

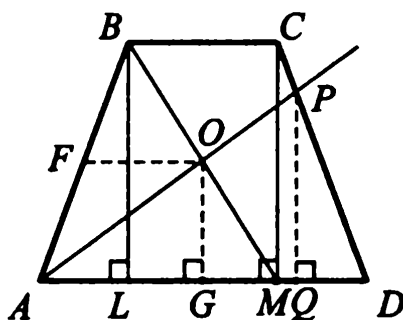


Рис. 10.

По теореме Пифагора $AL^2 = BA^2 - BL^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow AL = 6$.
 $BC + AD = 2 \cdot BC + 2 \cdot AL = 2a + 12 = 20$; $a = 4$; $c = 16$.

1) Пусть AP — отрезок данной прямой, $P \in CD$, а PQ — перпендикуляр к AD , тогда

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{AG}{OG} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow AQ = 2PQ;$$

$$\frac{DQ}{PQ} = \frac{DM}{CM} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DQ = \frac{3}{4}PQ;$$

$$AQ + DQ = \frac{11}{4}PQ = 16 \Rightarrow PQ = \frac{64}{11}.$$

$$S_{APD} = \frac{1}{2} \left(16 \cdot \frac{64}{11} \right) = \frac{512}{11}, \quad \frac{S_{AFD}}{S_{ABCD}} = \frac{32}{55}.$$

2) Пусть BM — отрезок данной прямой (точка $M \in AD$ совпадает с проекцией точки C на AD , так как FO — средняя линия $\triangle ABM$ и $AM = \frac{a+c}{2}$, а $MD = \frac{c-a}{2}$). Тогда искомое отношение $\frac{S_{BAM}}{S_{ABCD}}$, где

$$S_{BAM} = \frac{1}{2}AM \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40 \Rightarrow \frac{S_{BAM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{32}{55}$.

С5. Первое уравнение системы задаёт окружность радиусом 4 с центром $(3; 5)$. Второе уравнение задаёт прямой угол (см. рис. 11) с вершиной $(a; 2)$. Следовательно, система имеет три различных решения только в следующих случаях: когда одна из сторон угла касается окружности, а другая пересекает её в двух точках; когда вершина угла лежит на окружности и каждая его сторона пересекает окружность ещё ровно в одной точке.

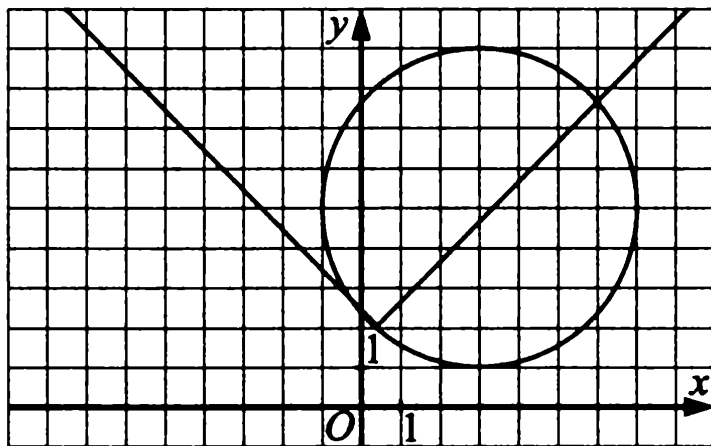


Рис. 11.

1) Подставляя значение $y = x - a + 2$ ($y > 2$) в первое уравнение системы, получим $2x^2 - 2(6+a)x + a^2 + 6a + 2 = 0$; $\frac{D_1}{4} = 32 - a^2$.

2) Для левой стороны угла получаем $y = -x + a + 2$ ($y > 2$) \Rightarrow
 $2x^2 - 2ax + a^2 - 6a + 2 = 0$; $\frac{D_2}{4} = -a^2 + 12a - 4$.

Значит, система имеет ровно 3 решения для всех a , удовлетворяющих совокупности условий

$$\left[\begin{cases} \frac{6+a}{2} - a + 2 > 2, \\ 32 - a^2 = 0, \\ -a^2 + 12a - 4 > 0, \end{cases} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\sqrt{2}, \\ a = 6 - 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} -\frac{a}{2} + a + 2 > 2, \\ 32 - a^2 > 0, \\ -a^2 + 12a - 4 = 0; \end{cases} \right.$$

3) Если вершина угла лежит на окружности, то $(a - 3)^2 + 9 = 16$;
 $a - 3 = \pm\sqrt{7}$; $a = 3 \pm \sqrt{7}$.

Так как ордината вершины угла меньше ординаты центра окружности, а найденные значения a не являются абсциссами точек касания, то исходная система имеет ровно 3 различных решения.

Ответ: $4\sqrt{2}$; $6 - 4\sqrt{2}$; $3 \pm \sqrt{7}$.

С6. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Если обозначим через a одно из чисел этой последовательности, то второе число будет иметь вид $7a$. Тогда сумма членов равна $a + 7a = 8a$. Согласно условию, эта сумма равна 1935 и должна делиться на 8. Но 1935 не делится на 8. Пришли к противоречию. Следовательно, заданная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, таковой является последовательность чисел: 215; 1505; 215.

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 8 (два соседних числа равны 7 и 1).

$$1935 = 8 \cdot 241 + 7.$$

Значит, максимальное число членов последовательности может быть $241 \cdot 2 + 1 = 483$. В этом случае последовательность имеет вид:

7, 1, 7, 1, ..., 7.

Ответ: а) нет; б) да; в) 483.

Решение варианта № 4

В1. Разговор стоил $67 - 10 = 57$ (рублей), следовательно, длился

$$\frac{57}{1,5} = 38 \text{ (минут)}.$$

Ответ: 38.

В2. По рисунку определяем, что 17-го сентября выпал 1 мм осадков.

Ответ: 1.

В3. $3x^2 - 7x - 10 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} = \frac{7 \pm 13}{6}$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$; $-1 < \frac{10}{3}$. В ответе указываем меньший из корней, то есть $x = -1$.

Ответ: -1.

В4. $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \angle A$ (см. рис. 12). По теореме Пифагора

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 153 - 144 = 9$; $\operatorname{ctg} A = \frac{CA}{CB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, откуда $\operatorname{ctg} \alpha = -0,25$.

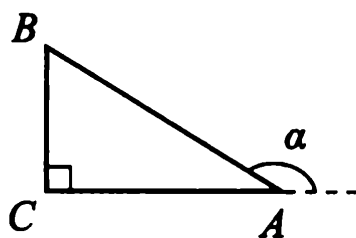


Рис. 12.

Ответ: -0,25.

В5. Стоимость использования первого автомобиля $7 \cdot 8 \cdot 20 + 2800 = 3920$ (рублей);

второго — $7 \cdot 11 \cdot 25 + 2500 = 4425$ (рублей);

третьего — $7 \cdot 15 \cdot 17 + 2600 = 4385$ (рублей).

Самый дешёвый вариант составит 3920 рублей.

Ответ: 3920.

В6. Рассмотрим ромб $ABCD$, в котором $BH = \sqrt{2}$ и $\angle ABC = 150^\circ$ (см. рис. 13). $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 30^\circ$, тогда из прямоугольного треугольника ABH имеем: $AB = 2BH = 2\sqrt{2}$, так как $ABCD$ — ромб, то $AD = AB = 2\sqrt{2}$ и $S_{ABCD} = BH \cdot AD = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

Ответ: 4.

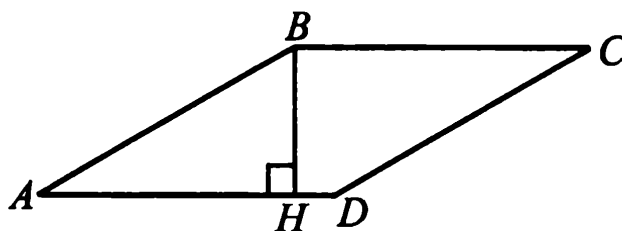


Рис. 13.

$$\begin{aligned}
 \text{В7. } & (16b^2 - 121) \cdot \left(\frac{1}{4b - 11} - \frac{1}{4b + 11} \right) - b + 3 = \\
 & = (16b^2 - 121) \cdot \frac{4b + 11 - (4b - 11)}{(4b - 11)(4b + 11)} - b + 3 = \\
 & = (16b^2 - 121) \cdot \frac{22}{16b^2 - 121} - b + 3 = 22 - b + 3 = 25 - 29 = -4.
 \end{aligned}$$

Ответ: -4 .

В8. Значение производной $f'(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox . Из треугольника ABC (см. рис. 14):

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

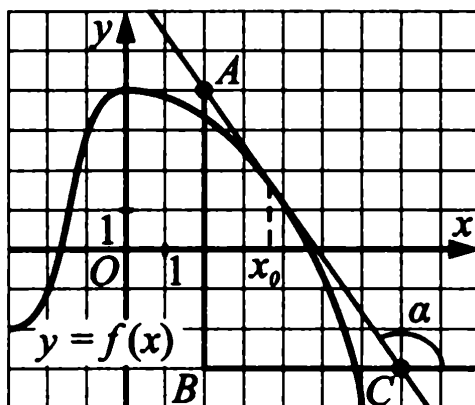


Рис. 14.

Ответ: $-1,4$.

В9. Объём полного конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 9 = 75\pi$. Из основания конуса вырезан сектор 120° (что составляет $\frac{1}{3}$ от полного угла 360°), соответствующий $\frac{1}{3}$ круга. Следовательно, площадь основания

фигуры, изображённой на рисунке 15, соответствует $\frac{2}{3}$ площади основания полного конуса, и объём этой фигуры также равен $\frac{2}{3}$ от объёма всего

конуса. Искомая величина $\frac{V}{\pi} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 75\pi}{\pi} = 50$.

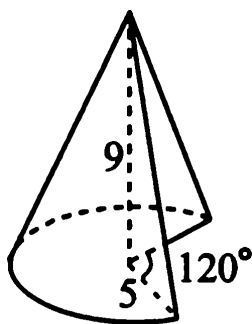


Рис. 15.

Ответ: 50.

В10. По условию должно выполняться неравенство $-\frac{1}{100}x^2 + x \geq 14 + 2$; $x^2 - 100x + 1600 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $x_1 = 20$ и $x_2 = 80$. Решением неравенства является отрезок $[20; 80]$. Искомое наибольшее расстояние равно 80 м.

Ответ: 80.

В11. 1) $y' = -e^{19-x} + (19 - x) \cdot (-e^{19-x}) = -e^{19-x}(1 + 19 - x) = -e^{19-x}(20 - x)$.

2) Найдём точки экстремума: $y' = 0 \Rightarrow 20 - x = 0, x = 20$.

3) При $x < 20$ $y' < 0$, а при $x > 20$ $y' > 0$, значит, $x = 20$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: 20.

В12.

	Труба пропускает (л в мин)	Объём резервуара (л)	Время для заполнения резервуара (мин)
I труба	x	140	$\frac{140}{x}$
II труба	$x - 6$	100	$\frac{100}{x - 6}$

Составляем уравнение: $\frac{140}{x} + 5 = \frac{100}{x-6}$, $x-6 > 0$. Решим уравнение:

$140(x-6) + 5x(x-6) = 100x$, $140x - 840 + 5x^2 - 30x - 100x = 0$,
 $5x^2 + 10x - 840 = 0$, $x^2 + 2x - 168 = 0$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+168} = -1 \pm 13$.
 $x_1 = 12$, $x_2 = -14$ — посторонний корень. Первая труба пропускает в минуту 12 л.

Ответ: 12.

$$\begin{aligned} \text{С1. } (2\cos^2 x - 5\cos x - 3)(1 - \log_2(-\sin x)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0, \\ \log_2(-\sin x) = 1, \\ \sin x < 0; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0, \\ \sin x = -2, \\ \sin x < 0; \end{cases} \end{cases} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 5x - 3 = 0, \\ \sin x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Тогда первое уравнение системы примет вид $2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ или $t = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что $|t| \leq 1$ и возвращаясь

к исходной переменной, получаем $\cos x = -\frac{1}{2}$. Отсюда $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из неравенства $\sin x < 0$ следует $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Значит, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

С2. 1) Пусть CN — перпендикуляр, опущенный к стороне AB , тогда $AN = NB$ (так как $\triangle ABC$ — равносторонний, см. рис. 16). Так как пирамида $SABC$ — правильная, то проекцией вершины S на плоскость ABC является точка $O \in NC$. Следовательно, OC — проекция SC на плоскость ABC . Тогда $SNC \perp ABC$.

2) Опустим из N перпендикуляр NK на ребро SC . Тогда NK — искомое расстояние.

3) Из прямоугольного треугольника NCB находим $NC = \sqrt{BC^2 - NB^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

4) Так как все рёбра пирамиды равны, то $SN = NC \Rightarrow NK$ — медиана треугольника NSC и $SK = KC = 2$.

5) Из треугольника NCK находим $NK = \sqrt{NC^2 - KC^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

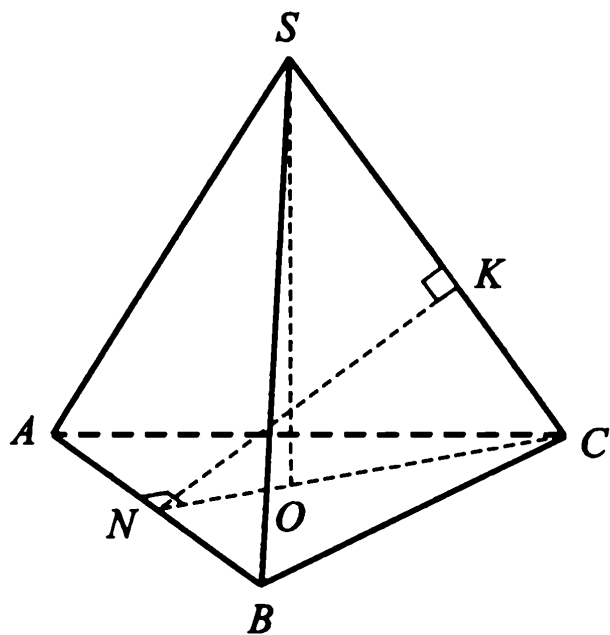


Рис. 16.

$$\text{СЗ. ОДЗ: } \begin{cases} x^2 \neq 1, \\ (x-5)^2 \neq 1, \\ x^2 \neq 0, \\ (x-5)^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq 6, \\ x \neq 4, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Преобразуем исходное неравенство к виду

$$\log_{x^2}(x-5)^2 + \frac{1}{\log_{x^2}(x-5)^2} \leq 2.$$

Пусть $t = \log_{x^2}(x-5)^2$, $t \neq 0$, тогда $t^2 + \frac{1}{t} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \leq 0, \\ t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \geq 0, \\ t < 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t < 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, на ОДЗ получаем

$$\begin{cases} \log_{x^2}(x-5)^2 = 1, \\ \log_{x^2}(x-5)^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = x^2, \\ \begin{cases} (x-5)^2 < 1, \\ x^2 > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-5)^2 > 1, \\ x^2 < 1; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ 4 < x < 6, \\ -1 < x < 1. \end{cases}$$

Так как $x \neq 0$ и $x \neq 5$, то $x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2, 5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2, 5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$

С4. Случай 1. Пусть $BC < AD$ (см. рис. 17).

1) Пусть $O = BD \cap AC$. По условию $\angle BDC = \angle BAC$ и $\angle COD = \angle BOA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle COD$.

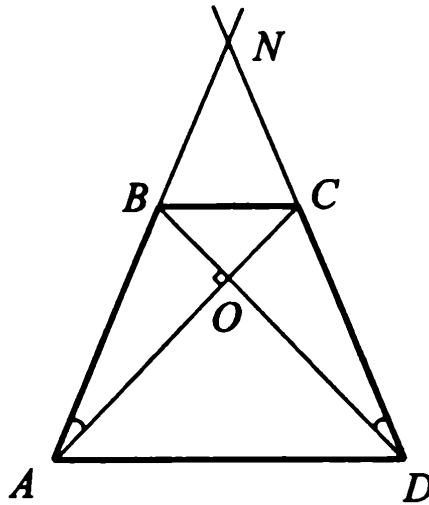


Рис. 17.

2) Пусть h — высота трапеции $ABCD$, тогда, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h = S_{BCD}$. Так как $S_{ABC} = S_{BCO} + S_{BOA}$ и $S_{BCD} = S_{BCO} + S_{COD}$, то $S_{BOA} = S_{COD} \Rightarrow \triangle ABO = \triangle COD \Rightarrow ABCD$ — равнобокая трапеция и $AC = BD = d$.

$$3) S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \angle BOC = \frac{1}{2}d^2 \sin 90^\circ = \frac{d^2}{2}.$$

По условию $S_{ABCD} = 20 \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$.

4) В четырёхугольнике $BNCO$ $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle BNC = 30^\circ$, $\angle NBO = \angle NCO \Rightarrow \angle NBO = \frac{360^\circ - (30^\circ + 90^\circ)}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$. Из

треугольника BND имеем $\frac{ND}{\sin \angle NBD} = \frac{BD}{\sin \angle BND} \Rightarrow$

$$ND = \frac{DB \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{30}.$$

$$5) S_{BNC} = S_{AND} - S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot NA \cdot \sin 30^\circ - 20 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 30 - 20 = 10.$$

Случай 2. Пусть $BC > AD$ (см. рис. 18).

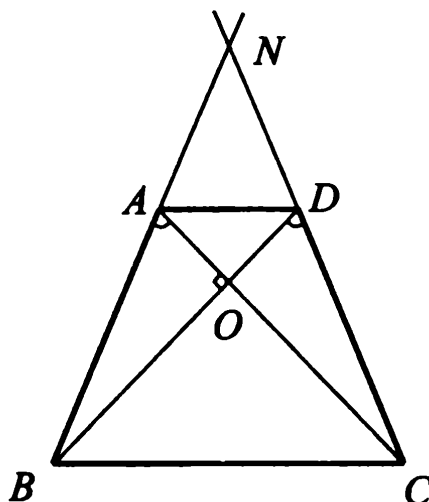


Рис. 18.

Проводя рассуждения, аналогичные 1)–4) случая 1, получим

$$NC = 2\sqrt{30}. \text{ Тогда } S_{BNC} = \frac{1}{2} \cdot NC \cdot NB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{30})^2 \cdot \frac{1}{2} = 30.$$

Ответ: 10; 30.

С5. 1) Первое уравнение системы задаёт график, состоящий из частей парабол с вершинами $(-5; 4)$ и $(-5; -4)$, симметричных оси Ox и обладающих осью симметрии $x = -5$ (см. рис. 19). Второе уравнение системы задаёт семейство окружностей (при $a \neq 0$) с центром $(-5; 0)$ и радиусом $r = |a|$.

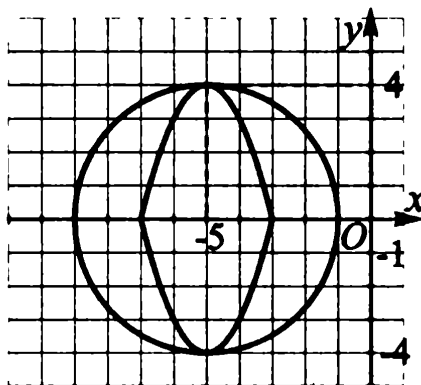


Рис. 19.

2) Согласно условию задачи, необходимо рассматривать случаи, когда окружность касается парабол. В силу симметрии графиков относительно оси Ox и прямой $x = -5$, возможен только один случай: вершина параболы $(-5; 4)$ (а значит, и вершина $(-5; -4)$) лежит на окружности, в этом случае $a^2 = 16$; $a = \pm 4$.

Ответ: ± 4 .

С6. Пусть $m = p^2 + 29$, p — некоторое простое число ($\in P$). Согласно основной теореме арифметики $m = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$ и n — наибольший множитель числа m .

Число всех делителей числа m вычисляется по формуле

$$N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

Согласно условию задачи m имеет ровно 4 различных делителя, значит, $m = p_i p_j$, $p_i \neq p_j$, $p_i, p_j \in P$ (делителями m являются 1, p_i , p_j , $p_i \cdot p_j$) или $m = p_k^3$, $p_k \in P$ (делителями m являются 1, p_i , p_i^2 , p_i^3).

В случае $p = 2$ число $m = 33 = 3 \cdot 11$ и имеет ровно 4 различных делителя.

В случае $p = 3$ число $m = 38 = 2 \cdot 17$ и также имеет ровно 4 различных делителя.

Пусть $p \neq 2, 3$, тогда $m = p^2 - 1 + 30 = (p-1)(p+1) + 30$. Произведение $(p-1)(p+1)$ делится на 6 (оно делится на 2, так как все простые числа, отличные от двойки, являются нечётными, и делится на 3, поскольку при $p \neq 3$ одно из чисел $p-1$ или $p+1$ делится на 3). То есть $(p-1)(p+1) = 6k$, $k \in N$. Значит, $m = 2 \cdot 3 \cdot (k+5)$ и имеет более четырёх различных делителей (делителями m являются 1, 2, 3, 6, $k+5$, $6k+30$ и, возможно, другие).

Ответ: 2; 3.

Решение варианта № 5

В1. После наценки один чайник стал стоить

$420 \cdot 1,25 = 525$ (руб.), $3400 : 525 = 6\frac{10}{21}$. Значит, за эти деньги можно купить 6 чайников.

Ответ: 6.

В2. По графику наибольшее или наименьшее количество золотовалютных резервов в период с 11 февраля по 17 февраля определяются как точки с наибольшим или наименьшим значениями ординат. Наибольшему значению соответствует 488 (млрд долл.), наименьшему — 482 (млрд долл.). Разность между ними составляет 6 (млрд долл.).

Ответ: 6.

В3. $11^{x-10} = 11 \Leftrightarrow x - 10 = 1 \Leftrightarrow x = 11$.

Ответ: 11.

В4. $\angle PQF$ — вписанный, $\angle PQF = \frac{1}{2} \smile PF$, значит, $\smile PF = 2\angle PQF = 2 \cdot 42^\circ = 84^\circ$.

$\angle POF$ — центральный, $\angle POF = \widehat{PF} = 84^\circ$.

$\angle KOP + \angle POF = 180^\circ$ как смежные, $\angle KOP = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.

Ответ: 96.

В5. Составим таблицу:

Автомобиль	Расход топлива на 1500 км (л)	Стоимость топлива (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Итого (руб.)
А	$15 \cdot 8 = 120$	$120 \cdot 20 = 2400$	$3500 \cdot 2 = 7000$	9400
Б	$15 \cdot 11 = 165$	$165 \cdot 22 = 3630$	$3300 \cdot 2 = 6600$	10230
В	$15 \cdot 14 = 210$	$210 \cdot 15 = 3150$	$3000 \cdot 2 = 6000$	9150

Ответ: 9150.

В6. Найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$ (см. рис. 20).

$$AB = 3, CD = 7, BH = 9. S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot BH, S_{ABCD} = \frac{3 + 7}{2} \cdot 9 = 45.$$

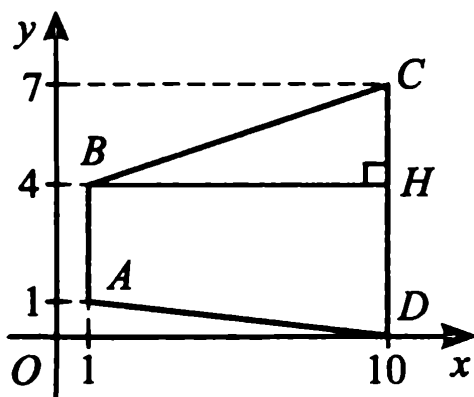


Рис. 20.

Ответ: 45.

$$\begin{aligned} \text{В7. } \frac{12 \sin 76^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ} &= \frac{12 \cdot 2 \sin 38^\circ \cdot \cos 38^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin(90^\circ - 38^\circ)} = \\ &= \frac{24 \cos 38^\circ}{\cos 38^\circ} = 24. \end{aligned}$$

Ответ: 24.

В8. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 2t^3 + t^2 - 5t, \text{ её скорость } v(t) = x'(t) = 6t^2 + 2t - 5.$$

$$v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5 = 99 \text{ м/с.}$$

Ответ: 99.

В9. По условию прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, значит, в основании параллелепипеда — квадрат со стороной $a = 2R$, где R — радиус основания цилиндра; $a = 2 \cdot 1 = 2$. Высота параллелепипеда h равна высоте цилиндра; $h = 1$. Объём параллелепипеда найдём по формуле $V = a^2 \cdot h$; $V = 2^2 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

В10. Для того чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить до того, как его температура поднимется выше 1730 К. Найдём наибольшее время после начала работы прибора, через которое нужно отключить прибор, из неравенства $T(t) > 1730$, или $T_0 + bt + at^2 > 1730$. Подставляя в это неравенство значения $T_0 = 1492$, $b = 153$, $a = -17$, получим $1492 + 153t - 17t^2 > 1730$, $17t^2 - 153t + 238 < 0$, $t^2 - 9t + 14 < 0$, $(t - 2)(t - 7) < 0$, $t \in (2; 7)$. Таким образом, уже через 2 минуты после начала работы прибора температура нагревательного элемента станет больше 1730 К, поэтому его надо выключить не позднее, чем через 2 минуты.

Ответ: 2.

В11. Найдём производную функции y .

$$y'(x) = \frac{7}{x+7} - 7 = \frac{7-7x-49}{x+7} = \frac{-7x-42}{x+7}, y'(x) = 0$$

при $x = -6 \in [-6, 5; 0]$. На отрезке $[-6, 5; 0]$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x = -6$, следовательно, в этой точке она принимает наибольшее значение

$$y(-6) = 7 \ln(-6 + 7) - 7 \cdot (-6) + 8 = 50.$$

Ответ: 50.

В12. Среднюю скорость автомобиля найдём по формуле $v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t}$;

$$v_{\text{ср.}} = \frac{360 + 180 + 200}{360 : 60 + 180 : 90 + 200 : 100} = 74 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 74.

$$\text{С1. } \frac{2 \sin^2 x + 11 \sin x - 6}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 0.$$

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x + 11 \sin x - 6 = 0, \\ 1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leq 1$.

$$2t^2 + 11t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, & t = -6 \text{ — не удовлетворяет условию } |t| \leq 1. \\ t = -6; \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 21), получаем $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

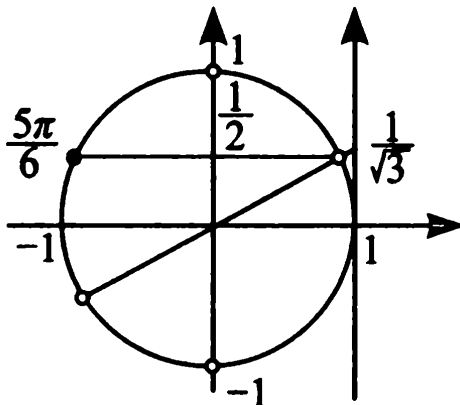


Рис. 21.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. По условию призма правильная, следовательно, $ABCD$ — квадрат. Прямые BD и AD_1 — скрещивающиеся. Проведём $BC_1 \parallel AD_1$, тогда $\angle C_1BD$ — искомый (см. рис. 22). В $\triangle BC_1D$ сторона $BC_1 = DC_1$ как диагонали равных граней, следовательно, $\triangle BC_1D$ — равнобедренный. $BC_1 = DC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $BD = 4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата $ABCD$.

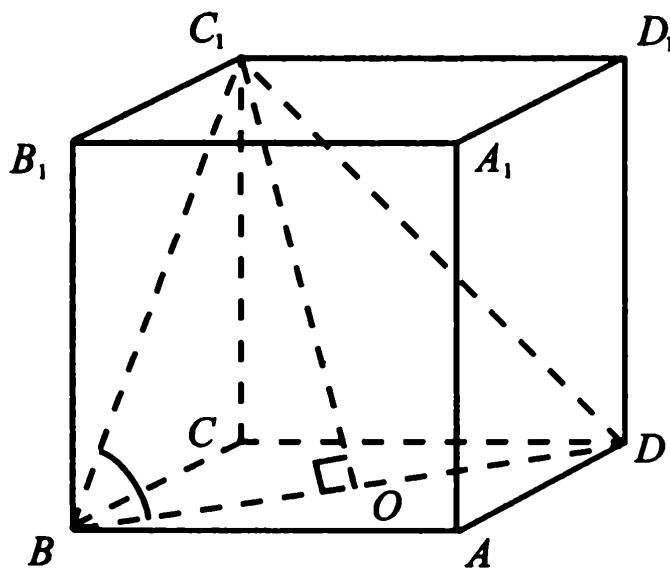


Рис. 22.

Пусть O — середина отрезка BD . Из прямоугольного треугольника BOC_1 $\cos \angle C_1BO = \frac{OB}{BC_1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$; $\angle C_1BO = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

$$\text{СЗ. } \log_{\frac{1}{5}} \left(7^{1+\log_{35} x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35} x}} \right) \geq \log_{35} x - 1.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 7^{1+\log_{35} x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35} x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35^{1+\log_{35} x} - 1}{5^{1+\log_{35} x}} > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $5^{1+\log_{35} x} > 0$ при $x > 0$, последняя система равносильна системе $\begin{cases} 35x - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{35}$.

Решим исходное неравенство на ОДЗ.

$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{35x - 1}{5^{1+\log_{35} x}} \right) \geq \log_{35} x - 1$; $\frac{35x - 1}{5^{1+\log_{35} x}} \leq \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_{35} x - 1}$. Умножив обе части неравенства на $5^{1+\log_{35} x}$, получим $35x - 1 \leq 5^2$; $35x - 1 \leq 25$; $35x \leq 26$; $x \leq \frac{26}{35}$.

Учитывая ОДЗ, имеем $\frac{1}{35} < x \leq \frac{26}{35}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{35}; \frac{26}{35} \right]$.

С4. Пусть AD — большее основание трапеции, $AD = 9$.

$\triangle BEC \sim \triangle AED$ (см. рис. 23) по первому признаку подобия треугольников ($\angle E$ — общий, $\angle EBC = \angle EAD$ как соответственные при пересечении двух параллельных прямых BC и AD секущей AE). $\frac{S_{BEC}}{S_{AED}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2$,

$$\frac{S_{AED} - S_{ABCD}}{S_{AED}} = \frac{1}{4}, \frac{S_{AED} - 27}{S_{AED}} = \frac{1}{4}, S_{AED} = 36. \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}, BC = 4,5.$$

Пусть $AB = x$, $CD = y$ ($AE = 2x$, $DE = 2y$), тогда $x + y = BC + AD = 9 + 4,5 = 13,5$ как сумма противоположных сторон четырёхугольника, в который можно вписать окружность. Воспользуемся формулой Герона для $\triangle AED$, учитывая, что его полупериметр $p = \frac{2x + 2y + 9}{2} = 18$.

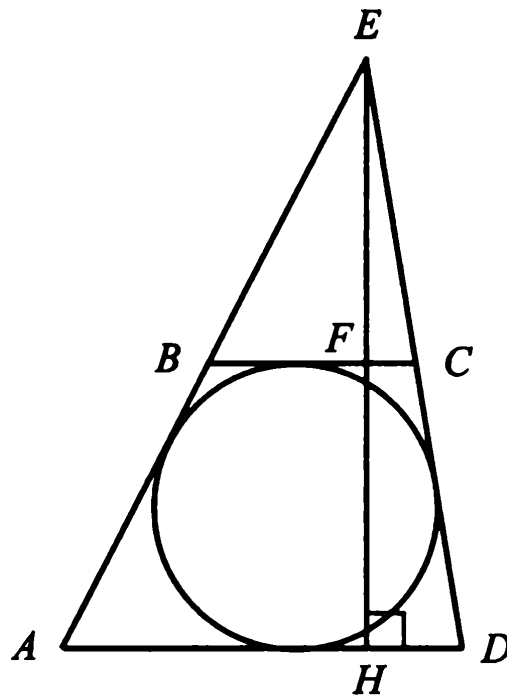


Рис. 23.

$$\begin{cases} 18 \cdot 9(18 - 2x)(18 - 2y) = 36^2, \\ 2x + 2y = 27. \end{cases}$$

Подставим $2y = 27 - 2x$ в уравнение $(18 - 2x)(18 - 2y) = 8$ и найдём значение x .

$$(9 - x)(2x - 9) = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 27x + 85 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = 8,5. \end{cases} \quad \text{Значит, } AB = 5$$

или $AB = 8,5$.

Ответ: 5 или 8,5.

$$\text{С5. } \begin{cases} x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a \leq 0, \\ ax = 1. \end{cases}$$

Разложим на множители левую часть неравенства

$$x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3a - 1 \pm \sqrt{9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a}}{2} = \frac{3a - 1 \pm (a - 1)}{2};$$

$$x_1 = 2a - 1, x_2 = a.$$

Таким образом, система принимает вид: $\begin{cases} (x - a)(x - 2a + 1) \leq 0, \\ ax = 1. \end{cases}$

В прямоугольной системе координат Oax построим прямые $x = a$, $x = 2a - 1$ и гиперболу $x = \frac{1}{a}$. Заштрихуем множество точек (a, x) , кото-

рые удовлетворяют неравенству $(x - a)(x - 2a + 1) \leq 0$. Из рисунка 24 видно, что система имеет решения, если $a \in [a_1; a_2] \cup \{a_3\}$. Найдём a_1 и a_3 из уравнения $a = \frac{1}{a}$: $a^2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_3 = 1$. Найдём a_2 из уравнения

$$a(2a - 1) = 1, 2a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = -\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ Так как } a_2 < 0, a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

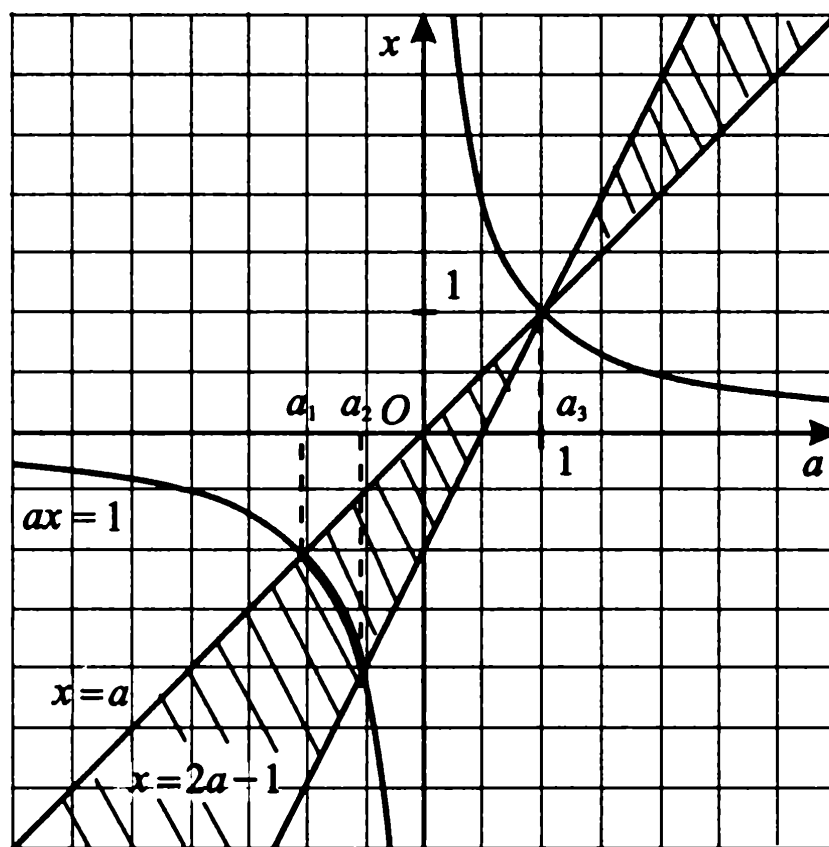


Рис. 24.

Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

С6. Разложим число P на простые множители $P = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$, где n — наибольший простой множитель и $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$. Если запись числа P оканчивается t нулями, то либо $\alpha_2 = t$, $\alpha_5 \geq t$, либо $\alpha_2 \geq t$, $\alpha_5 = t$.

Оценим количество делителей k числа P :

$k = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_n + 1) \geq (t + 1)^2$, при этом k делится на $t + 1$.

1. k — чётное число. Все делители разобьются на $\frac{k}{2}$ пар вида $\left(m; \frac{P}{m}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно P , поэтому произведение всех делителей равно $P^{\frac{k}{2}}$.

2. k — нечётное число. Тогда $k - 1$ делителей разобьются на пары вида $\left(m; \frac{P}{m}\right)$, и есть ещё один делитель \sqrt{P} . Произведение всех делителей в этом случае равно $P^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sqrt{P} = P^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого P произведение всех делителей заканчивается $\frac{tk}{2}$ нулями. По условию $\frac{tk}{2} = 96$, $tk = 192$. Учитывая, что $k \geq (t + 1)^2$, имеем $192 = tk \geq t(t + 1)^2$, следовательно, t — делитель числа 192 и $t \leq 5$ (число 5 — большее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $t^3 + 2t^2 + t \leq 192$). Очевидно, $t = 5$ не удовлетворяет условию $192 = tk$.

Найдём возможные значения P , приняв все значения кратности всех простых множителей, кроме 5 и 2, равными 0.

Выпишем все такие t : 1, 2, 3, 4. Из равенства $192 = tk$ также следует, что 192 делится на $t + 1$. Поэтому возможно только $t = 1, 2, 3$.

1. $\alpha_2 = t = 1$, $k = 192 : t = 192$, $\alpha_5 + 1 = \frac{k}{t + 1} = \frac{192}{2} = 96$, $\alpha_5 = 95$ и $P = 2^1 \cdot 5^{95}$ (или в случае $\alpha_5 = t$ $P = 5^1 \cdot 2^{95}$).

2. $\alpha_2 = t = 2$, $k = 192 : t = 96$, $\alpha_5 + 1 = \frac{96}{3} = 32$, $\alpha_5 = 31$ и $P = 2^2 \cdot 5^{31}$ (или в случае $\alpha_5 = t$ $P = 5^2 \cdot 2^{31}$).

3. $\alpha_2 = t = 3$, $k = 192 : t = 64$, $\alpha_5 + 1 = \frac{64}{4} = 16$, $\alpha_5 = 15$ и $P = 2^3 \cdot 5^{15}$ (или в случае $\alpha_5 = t$ $P = 5^3 \cdot 2^{15}$).

Таким образом, для $t = 1, 2, 3$ найдены возможные значения P , оканчивающиеся t нулями, произведение делителей которых оканчивается 96 нулями.

Ответ: 1, 2, 3.

Решение варианта № 6

В1. В связи с тем, что наценка на один набор составляет 50% и продаётся набор по цене 90 рублей, его закупочная цена составляет $\frac{90 \cdot 100}{150} = 60$ (рублей). $4300 : 60 = 71\frac{2}{3}$. Следовательно, хозяин магазина может закупить только 71 набор.

Ответ: 71.

В2. По графику наибольшее и наименьшее количества золотовалютных резервов в период с 5 марта по 11 марта соответствуют точкам с наибольшим или наименьшим значениями по оси ординат. Наибольшему значению соответствует 500 (млрд долл.), наименьшему — 494 (млрд долл.). Разность между ними составляет 6 (млрд долл.).

Ответ: 6.

В3. $17^{x-16} = 17 \Leftrightarrow x - 16 = 1 \Leftrightarrow x = 17$.

Ответ: 17.

В4. $\angle MKF = \frac{1}{2} \angle MOF$ как вписанный и центральный, опирающиеся на одну дугу. $\angle MOF = 2\angle MKF = 76^\circ$. $\angle FON$ и $\angle MOF$ — смежные, поэтому $\angle FON = 180^\circ - \angle MOF = 104^\circ$.

Ответ: 104.

В5. Составим таблицу.

Авто-мобиль	Расход топлива на 1200 км (л)	Стоимость топлива (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Итого (руб.)
А	$12 \cdot 9 = 108$	$108 \cdot 21 = 2268$	$3300 \cdot 2 = 6600$	8868
Б	$12 \cdot 12 = 144$	$144 \cdot 22 = 3168$	$3100 \cdot 2 = 6200$	9368
В	$12 \cdot 15 = 180$	$180 \cdot 17 = 3060$	$3000 \cdot 2 = 6000$	9060

Ответ: 8868.

В6. По рисунку 25 найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$.

$$AB = 3, DC = 5, AH = 9. S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH,$$

$$S_{ABCD} = \frac{3 + 5}{2} \cdot 9 = 36.$$

Ответ: 36.

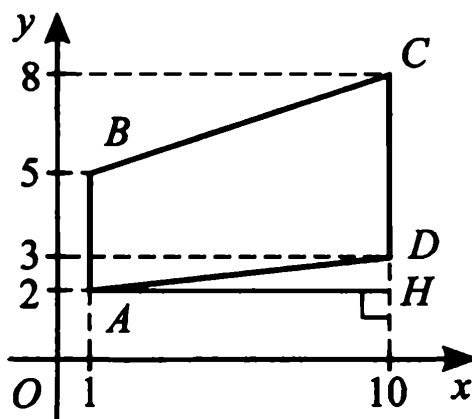


Рис. 25.

$$\text{В7. } \frac{15 \sin 68^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin 56^\circ} = \frac{15 \cdot 2 \sin 34^\circ \cdot \cos 34^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin(90^\circ - 34^\circ)} = \frac{30 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = 30.$$

Ответ: 30.

В8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 + t^2 - 7t$, её скорость $v(t) = x'(t) = 9t^2 + 2t - 7$.

$$v(5) = 9 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 7 = 228.$$

Ответ: 228.

В9. По условию шар вписан в цилиндр. Значит, высота цилиндра h равна диаметру шара, то есть $h = 2r$, где r — радиус шара.

$$\frac{v_{\text{ц}}}{v_{\text{ш}}} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{3}{2}, \quad v_{\text{ц}} = \frac{3}{2} v_{\text{ш}} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

Ответ: 12.

В10. Если температура прибора поднимется выше 2200 К, его нужно будет отключить. Найдём, через какое наибольшее время после начала работы прибора его нужно отключить, из неравенства $T(t) > 2200$, или $T_0 + bt + at^2 > 2200$. Подставляя в это неравенство значения $T_0 = 1240$, $b = 32$, $a = -0,2$, получим $1240 + 32t - 0,2t^2 > 2200$, $t^2 - 160t + 4800 < 0$, $(t - 40)(t - 120) < 0$, $t \in (40; 120)$. Таким образом, через 40 минут температура нагревательного элемента станет больше 2200 К, поэтому его надо выключить не позднее, чем через 40 минут.

Ответ: 40.

В11. Найдём производную функции y .

$$y'(x) = \frac{6}{x+6} - 6 = \frac{6 - 6x - 36}{x+6} = \frac{-6x - 30}{x+6}.$$

$$y'(x) = 0 \text{ при } x = -5 \in [-5; 5; 0].$$

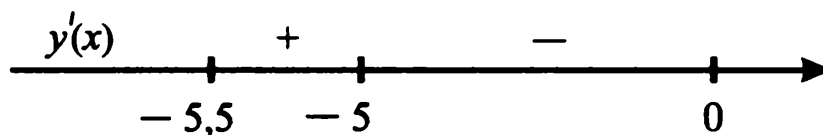


Рис. 26.

На отрезке $[-5,5; 0]$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x = -5$ (см. рис. 26), следовательно, в этой точке функция принимает наибольшее значение $y(-5) = 6 \ln(-5 + 6) - 6 \cdot (-5) + 11 = 41$.

Ответ: 41.

В12. Среднюю скорость автомобиля найдём по формуле $v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t}$.

$$v_{\text{ср.}} = \frac{432 + 150 + 66}{432 : 72 + 150 : 75 + 1} = 72 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 72.

С1. $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0$.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x = 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 x, \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -1, \end{cases} \\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. По условию призма правильная, значит, $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, точка O — центр основания, SO — высота (см. рис. 27).

$BE \parallel AF$, $\angle SEB$ — искомый. $\cos \angle SEB = \frac{OE}{SE}$. Так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности,

то $OE = EF = 3$. $\cos \angle SEB = \frac{3}{5} = 0,6$. $\angle SEB = \arccos 0,6$.

Ответ: $\arccos 0,6$.

С3. $\log_{\frac{1}{2}} \left(3^{1+\log_6 x} - \frac{1}{2^{1+\log_6 x}} \right) \geq 1 + \log_6 x$.

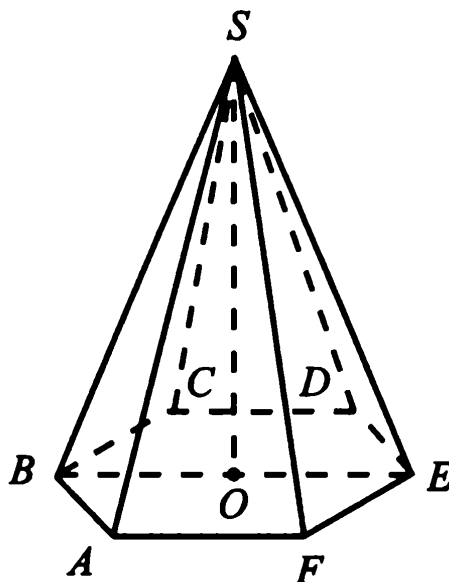


Рис. 27.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3^{1+\log_6 x} - \frac{1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6^{1+\log_6 x} - 1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{6 \cdot 6^{\log_6 x} - 1}{2^{1+\log_6 x}} > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $2^{1+\log_6 x} > 0$ при $x > 0$, последняя система равносильна системе $\begin{cases} 6x - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{6}$.

Решим исходное неравенство на ОДЗ.

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{6x-1}{2^{1+\log_6 x}} \right) \geq 1 + \log_6 x; \frac{6x-1}{2^{1+\log_6 x}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\log_6 x}. \text{ Умножив обе ча-}$$

сти неравенства на $2^{1+\log_6 x}$, получим $6x - 1 \leq 2^{1+\log_6 x} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\log_6 x}$;

$$6x - 1 \leq 2^0; 6x - 1 \leq 1; 6x \leq 2; x \leq \frac{1}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $\frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right]$.

С4. Найдём высоту DH треугольника CDE (см. рис. 28).

$$DH = \frac{2S_{CDE}}{CE} = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11,2, \text{ тогда радиус вписанной окружности}$$

равен $\frac{11,2}{1,4 \cdot 2} = 4$. $S_{CDE} = p \cdot r$ (p — полупериметр $\triangle CDE$, r — радиус вписанной окружности), откуда $p = \frac{S_{CDE}}{r} = \frac{84}{4} = 21$, тогда $CD + DE = 2p - CE = 2 \cdot 21 - 15 = 27$.

Пусть $CD = x$, тогда $DE = 27 - x$. Используя формулу Герона, имеем $84^2 = 21 \cdot (21 - 15)(21 - x)(21 - 27 + x)$, $84^2 = 21 \cdot 6 \cdot (21 - x)(x - 6)$, $x^2 - 27x + 182 = 0$, $x_1 = 13$, $x_2 = 14$. Значит, $CD = 13$ или $CD = 14$.

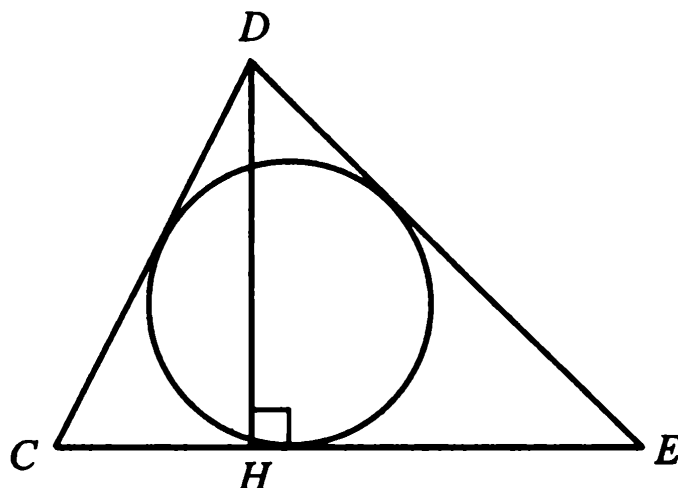


Рис. 28.

Ответ: 13 или 14.

$$\text{С5.} \begin{cases} x^2 - (4a - 1)x + 3a^2 - a < 0, \\ ax = 4. \end{cases}$$

Разложим на множители левую часть неравенства.

$$x^2 - (4a - 1)x + 3a^2 - a = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4a - 1 \pm \sqrt{16a^2 - 8a + 1 - 12a^2 + 4a}}{2} = \frac{4a - 1 \pm (2a - 1)}{2};$$

$$x_1 = 3a - 1, x_2 = a.$$

$$\text{Система принимает вид: } \begin{cases} (x - a)(x - 3a + 1) < 0, \\ ax = 4. \end{cases}$$

В прямоугольной системе координат Oax построим прямые $x = a$, $x = 3a - 1$ и гиперболу $x = \frac{4}{a}$. Заштрихуем множество точек (a, x) , которые удовлетворяют неравенству $(x - a)(x - 3a + 1) < 0$. Из рисунка 29 видно, что система имеет решения, если $a \in (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4)$. Найдём a_1 и a_4 из уравнения $a^2 = 4$: $a_1 = -2$, $a_4 = 2$. Найдём a_2 и a_3 из уравнения

$$a(3a - 1) = 4. \quad 3a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 1\frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, a_3 = 1\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $a \in (-2; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; 2\right)$.

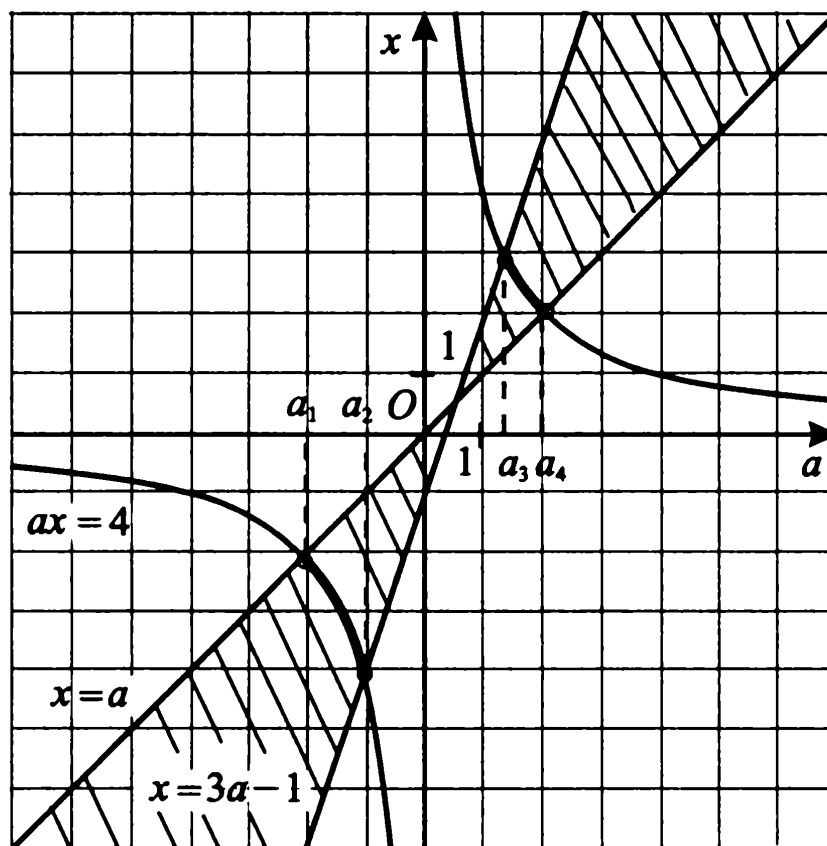


Рис. 29.

Ответ: $(-2; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; 2\right)$.

С6. По условию задачи имеем $100a + b = 3ab$. Заметим, что $3ab$ делится на a , значит, $100a + b$ делится на a . Пусть $b = ta$, причём $t \leq 9$. Тогда $100a + ta = 3a^2t$, $100 + t = 3at$. $3at$ кратно трём, значит, $100 + t$ кратно трём, следовательно, $t = 2, t = 5, t = 8$ — значения $t \leq 9$, при которых $100 + t$ кратно 3. Выберем значения t , при которых a и b — двузначные числа.

1. Если $t = 2$, то $100 + 2 = 3a \cdot 2$, $a = 102 : 6$, $a = 17$, $b = 17 \cdot 2 = 34$.

2. Если $t = 5$, то $100 + 5 = 3a \cdot 5$, $a = 7$ — не удовлетворяет условию задачи.

3. Если $t = 8$, то $100 + 8 = 3a \cdot 8$, $a = 4,5$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 17, b = 34$.

Решение варианта № 7

В1. Так как $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$, то наименьшее достаточное число палаток — это 9.

Ответ: 9.

В2. По рисунку определяем, что 8-го августа наибольшая температура составляет 30°C .

Ответ: 30.

В3. $x = 4\frac{4}{11} : \frac{3}{22}$, $4\frac{4}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} \cdot \frac{22}{3} = \frac{48 \cdot 22}{11 \cdot 3} = \frac{16 \cdot 2}{1} = 32$,
 $x = 32$.

Ответ: 32.

В4. $\sin \beta = \sin(\pi - \angle B) = \sin \angle B$ (см. рис. 30),

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

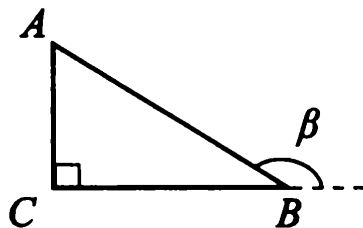


Рис. 30.

Ответ: 0,25.

В5. Перевозка А: нужно $\left\lceil \frac{49}{4,5} \right\rceil = 11$ автомобилей, стоимость

$11 \cdot 18 \cdot 3800 = 752\,400$ (руб.). (Через $\left\lceil \frac{49}{4,5} \right\rceil$ обозначено ближайшее целое число, большее $\frac{49}{4,5}$.)

Перевозка Б: нужно $\left\lceil \frac{49}{7} \right\rceil = 7$ автомобилей, стоимость

$$7 \cdot 18 \cdot 6400 = 806\,400 \text{ (руб.)}.$$

Перевозка В: нужно $\left\lceil \frac{49}{9} \right\rceil = 6$ автомобилей, стоимость

$$6 \cdot 18 \cdot 7200 = 777\,600 \text{ (руб.)}.$$

Самая дешёвая перевозка — 752 400 рублей.

Ответ: 752 400.

В6. Данный треугольник ABC имеет высоту BH , равную 6, и основание AC , равное 8 (см. рис. 31)

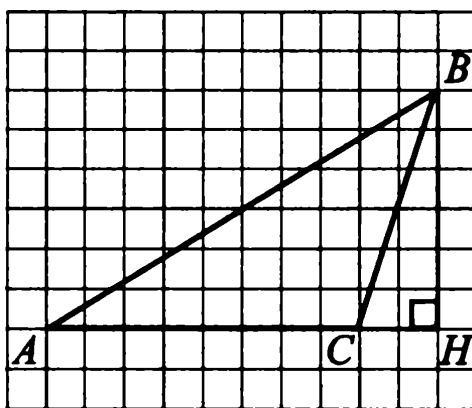


Рис. 31.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = 24.$$

Ответ: 24.

В7. $(\sqrt{15} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{2}) = (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{2})^2 = 15 - 2 = 13.$

Ответ: 13.

В8. Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7$. Таких точек 10.

Ответ: 10.

В9. Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 32). Их суммарный объем равен $5 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 54$.

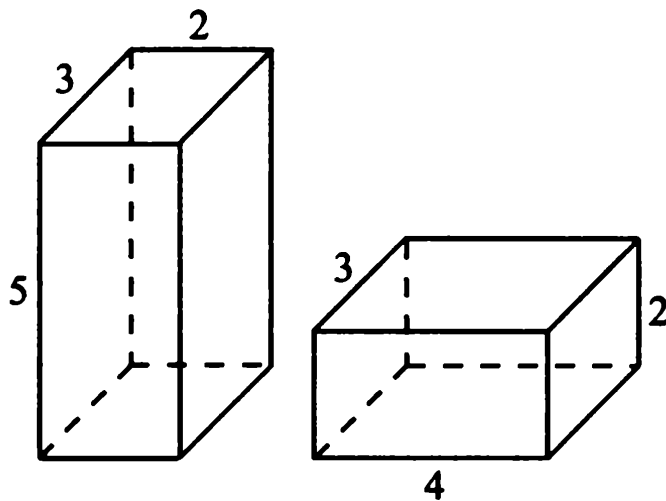


Рис. 32.

Ответ: 54.

В10. До дождя расстояние до воды равно $h = 5 \cdot 1,2^2 = 7,2$ м, а после дождя должно быть равно $h = 5 \cdot (1,2 - 0,4)^2 = 3,2$ м. Уровень воды должен повыситься на $7,2 - 3,2 = 4$ м.

Ответ: 4.

В11. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-1) = 15 \cdot 1 - (-1)^3 = 15 + 1 = 16, y(10) = 15 \cdot 100 - 10^3 = 500.$$

2) Найдём производную: $y' = 15 \cdot 2x - 3x^2 = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю: $3x(10 - x) = 0, x_1 = 0, x_2 = 10$.

4) Значение функции при $x = 10$ подсчитано в 1-м пункте, при $x = 0$ значение функции равно 0.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее:

$$y(10) = 500.$$

Ответ: 500.

В12. Весь путь 3270 км, тогда обозначим через x км — расстояние, на которое каждый день увеличивается пройденный путь, во второй день — $(520 + x)$ км, в третий день — $(520 + 2x)$ км и т. д. За пять дней он прошёл $(2600 + 10x)$ км, что равно 3270 км. Составляем уравнение и решаем его: $2600 + 10x = 3270, 10x = 670, x = 67$. За третий день грузовой автомобиль проехал 654 км.

Ответ: 654.

$$\text{С1. } \begin{cases} x^2 - x + 1 = x + 1, \\ \cos x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{Система имеет единственное решение } x = 0.$$

Ответ: 0.

С2. Пусть длина ребра исходного тетраэдра равна a , точка O — центр вписанной в него сферы (см. рис. 33). Так как $SABC$ — правильный тетраэдр, его вершина S проектируется на плоскость основания в точку M пересечения медиан треугольника ABC , аналогично вершина A проектируется в точку N . Точка $O \in SM$ и $O \in AN$, $OM = ON = r$. Выразим r через a . Проведём высоты SH и AH в треугольниках SBC и ABC .

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SN = \frac{a\sqrt{3}}{3}, MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SH^2 - MH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\triangle SON \sim \triangle SMH$, так как $\angle OSN = \angle MSH$ и $\angle SNO = \angle SMH$

$\Rightarrow \frac{SN}{SM} = \frac{ON}{MH}$, откуда $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Рассмотрим тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения высот граней $SABC$. В $\triangle SKH$ (см. рис. 34) (SH и SK — апофемы) $KH = \frac{a}{2}$ как средняя линия равнобедренного треугольника со стороной a . Точки P и N — вершины полученного тетраэдра. $\triangle SPN \sim \triangle SKH$ по двум равным углам, следовательно, $\frac{PN}{KH} = \frac{SN}{SH} = \frac{2}{3}$, откуда $PN = \frac{a}{3}$. Полученный тетраэдр правильный, следовательно, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим $R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $\Rightarrow \frac{r}{R} = 1$.

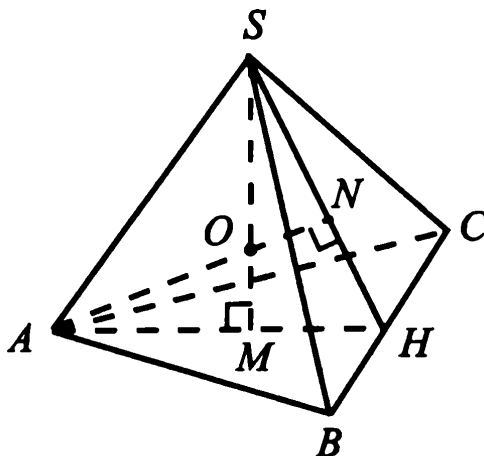


Рис. 33.

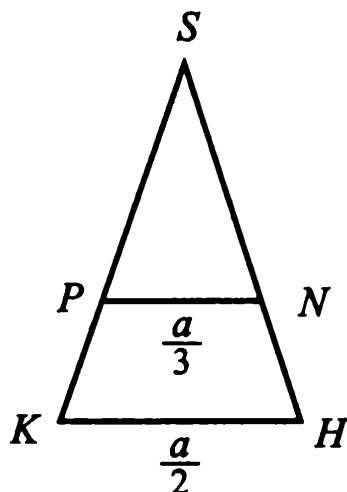


Рис. 34.

Ответ: 1.

С3. $\begin{cases} 3^{2(x-2)} - 4 \cdot 3^{x-2} + 3 \geq 0, \\ \log_{16} 2^x < 1. \end{cases}$ Сделаем замену $t = 3^{x-2}$.

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 \geq 0, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t \geq 3, \\ t \leq 1, \end{cases} \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 2 \geq 1, \\ x - 2 \leq 0, \end{cases} \\ x < 4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [3; 4).$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [3; 4)$.

С4. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$, где R — радиус описанной во-
круг треугольника ABC окружности. Отсюда $R = \frac{3}{2}BC$. Найдём сторону BC .

Возможны два случая:

1) $\cos \angle BAC > 0$, тогда $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и по теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC; BC^2 = 288 - 288 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$BC = 4\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}; R = 6\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}.$$

2) $\cos \angle BAC < 0$, тогда $\cos \angle BAC = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Аналогично первому случаю

$$R = 6\sqrt{18 + 12\sqrt{2}}.$$

Ответ: $6\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$.

С5. $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 3 = 0$. Найдём производную функции:
 $f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$. Из уравнения $f'(x) = 0$ находим точки экстремума:

$$x_1 = a \text{ и } x_2 = \frac{a}{3}.$$

$$f(a) = a^3 - 2a^3 + a^3 - 3 = -3;$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} - \frac{2a^3}{9} + \frac{a^3}{3} - 3 = \frac{4a^3}{27} - 3.$$

Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 2 корня лишь в том случае, когда

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = 3, a^3 = \frac{27 \cdot 3}{4} = \frac{27 \cdot 6}{8}; a = 1,5 \sqrt[3]{6}.$$

Ответ: $1,5 \sqrt[3]{6}$.

С6. Если предположить, что из данных цифр можно составить два чис-
ла, одно из которых будет в 1234567789 больше другого, то достаточно
рассмотреть последнюю цифру каждого из таких чисел. Если последняя
цифра меньшего из чисел 2, то последняя цифра большего должна быть 8;

если 3, то последняя цифра большего — 7; если 4, то — 6; если 9, то — 1. Следовательно, составить из данных цифр два таких числа невозможно.

Ответ: Нет.

Решение варианта № 8

В1. В одном километре $\frac{1}{1,6}$ мили, поэтому искомое значение скорости в

милях равно $\frac{40}{1,6} = 25$.

Ответ: 25.

В2. По рисунку определяем, что 13-го мая наименьшая температура составляет 10°C .

Ответ: 10.

В3. $x = 3\frac{6}{7} : \left(-\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} : \frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} \cdot \frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{27 \cdot 7}{7 \cdot 3}\right) = -9$,

$x = -9$.

Ответ: -9 .

В4. $\sin \alpha = \sin(\pi - \angle ABC) = \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}$ (см. рис. 35). По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 19 = 81$, $AC = 9$. Значит, $\sin \alpha = \frac{9}{10} = 0,9$.

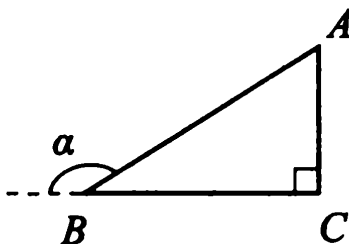


Рис. 35.

Ответ: 0,9.

В5. Заказ в фирме А: $64 \cdot (320 \cdot 0,125 + 85) = 8000$ (рублей).

Заказ в фирме Б: $64 \cdot (360 \cdot 0,125 + 75) = 7680$ (рублей).

Заказ в фирме В: $64 \cdot (440 \cdot 0,125 + 50) = 6720$ (рублей).

Стоимость самого дешёвого заказа — 6720 рублей.

Ответ: 6720.

В6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$ (см. рис. 36).

Ответ: 7,5.

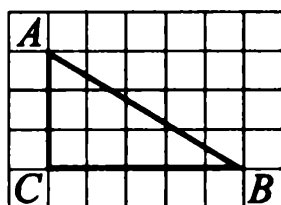


Рис. 36.

В7. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{5} = \log_{5^{-1}} 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_{5^{-1}} 5 = -\frac{1}{4} \log_5 5 = -0,25.$

Ответ: $-0,25.$

В8. Производная функции отрицательна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку убывания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: $-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5$. Таких точек 8.

Ответ: 8.

В9. Площади передней и задней граней равны $7 \cdot 8 - (7 - 3) \cdot (8 - 4) = 40$ каждая; суммарная площадь верхних граней равна площади нижней грани и равна $3 \cdot 8 = 24$; суммарная площадь правых граней равна площади левой грани и равна $7 \cdot 3 = 21$. Таким образом, площадь всей поверхности многогранника равна $40 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 21 \cdot 2 = 170$.

Ответ: 170.

В10. По условию должно выполняться неравенство $\frac{\varepsilon}{R+r} \leq \frac{10}{100} \cdot \frac{\varepsilon}{r}$. Решим это неравенство, подставив $r = 2$ и учитывая, что $\varepsilon > 0$ и $R > 0$.

Имеем: $\frac{1}{R+2} \leq \frac{1}{20}$; $R+2 \geq 20$; $R \geq 18$. Искомое наименьшее значение сопротивления равно 18 Ом.

Ответ: 18.

В11. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-3) = 6 - 27 \cdot 3 - (-3)^3 = 6 - 81 + 27 = -48,$$

$$y(4) = 6 + 27 \cdot 4 - 64 = 6 + 108 - 64 = 50.$$

2) Найдём производную: $y' = 27 - 3x^2 = 3(9 - x^2)$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю: $3(9 - x^2) = 0$ при $x_{1,2} = \pm 3$.

4) Значения $x = \pm 3$ принадлежат отрезку $[-3; 4]$, $y(-3)$ найдено в 1-м пункте, $y(3) = 6 + 27 \cdot 3 - 27 = 60$.

5) Выберем среди найденных значений функции наименьшее:

$$y(-3) = -48.$$

Ответ: -48 .

В12. Пусть x деталей в час делает второй рабочий, тогда $(x + 4)$ детали делает первый рабочий. $\frac{189}{x}$ ч — время, затраченное на изготовление 189

деталей вторым рабочим, $\frac{189}{x+4}$ ч — время, затраченное на изготовление

189 деталей первым рабочим. Составляем уравнение: $\frac{189}{x} - \frac{189}{x+4} = 3$;

$$x > 0; 189(x+4) - 189 \cdot x = 3(x^2 + 4x); 756 = 3x^2 + 12x;$$

$$3x^2 + 12x - 756 = 0; x^2 + 4x - 252 = 0; x = -2 \pm \sqrt{4 + 252}; x = 14.$$

Ответ: 14.

$$C1. \begin{cases} x^2 - x + 4 = 4(2x + 1), \\ \sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 9) = 0, \\ \sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 9, \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \text{Система имеет единственное решение при } x = 0.$$

Ответ: 0.

С2. Пусть длина ребра исходного тетраэдра равна a , точка O — центр описанной около него сферы (см. рис. 37). Так как $SABC$ — правильный тетраэдр, то его вершина S проецируется на плоскость основания в точку пересечения медиан M треугольника ABC , аналогично вершина A проецируется в точку N . Точка $O \in SM$ и $O \in AN$, $AO = OS = R$. Вы-

разим R через a . Проведём высоты SH и AH . $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SH^2 - MH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \triangle SON \sim \triangle SMH, \text{ так как}$$

$$\angle OSN = \angle MSH \text{ и } \angle SNO = \angle SMH \Rightarrow \frac{SO}{SH} = \frac{SN}{SM}, \text{ откуда } R = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Рассмотрим тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис граней $SABC$. В $\triangle SKH$ (см. рис. 38) (SH и SK — апофемы)

$KH = \frac{a}{2}$ как средняя линия равностороннего треугольника со стороной

a . Точки P и N — вершины полученного тетраэдра. $\triangle SPN \sim \triangle SKH$ по

двум равным углам, $\Rightarrow \frac{PN}{KH} = \frac{SN}{SH} = \frac{2}{3}$, откуда $PN = \frac{a}{3}$. Полученный тетраэдр правильный, следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим $r = \frac{a\sqrt{6}}{36}$, $\Rightarrow \frac{R}{r} = 9$.

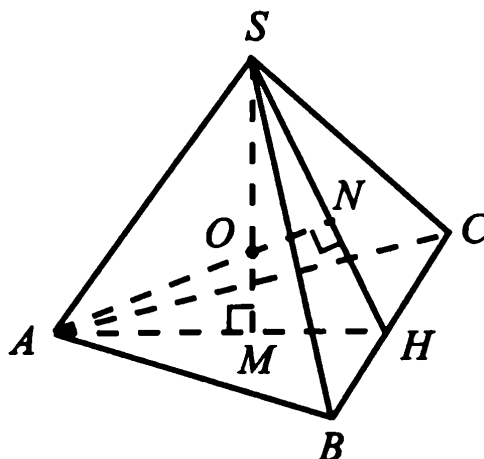


Рис. 37.

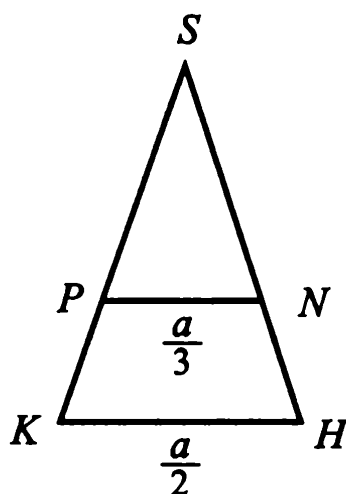


Рис. 38.

Ответ: 9.

$$\text{СЗ. } \begin{cases} 2^{2(3-x)} + 3 \cdot 2^{3-x} - 4 \leq 0, \\ \log_{81} 3^x < 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $t = 2^{3-x}$, $t > 0$.

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 4 \leq 0, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq t \leq 1, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 4. \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 4).$$

Ответ: $[3; 4)$.

С4. Возможны 2 случая:

1) Пусть $BH = 4$ — высота (см. рис. 39). $AH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$;
 $CH = AC - AH = 8 - 4\sqrt{3}$,
 $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{16 + 64 - 64\sqrt{3} + 16 \cdot 3} = 8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

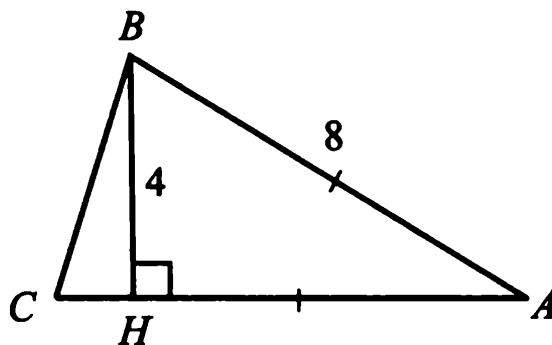


Рис. 39.

2) Пусть $BH = 4$ — высота (см. рис. 40). $AH = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$;
 $CH = AC + AH = 8 + 4\sqrt{3}$,
 $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{16 + 64 + 64\sqrt{3} + 16 \cdot 3} = 8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

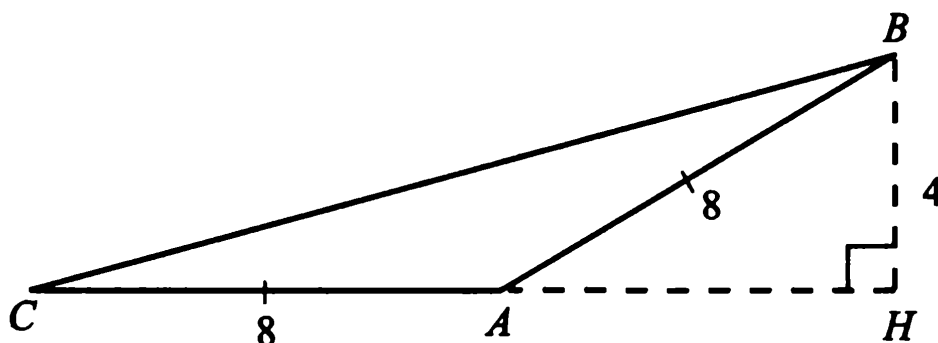


Рис. 40.

Ответ: $8\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

С5. $f(x) = \frac{x^3}{a^2} - \frac{2x^2}{a} + x - 3 = 0$. Найдём производную данной функции:

$f'(x) = \frac{3x^2}{a^2} - \frac{4x}{a} + 1$. Из уравнения $f'(x) = 0$ находим точки экстремума

$x_1 = a, x_2 = \frac{a}{3}$.

$f(a) = a - 2a + a - 3 = -3$;

$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a}{27} - \frac{2a}{9} + \frac{a}{3} - 3 = \frac{4a}{27} - 3$.

Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 2 корня лишь в том случае, если $f\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4a}{27} = 3, a = 20,25$.

Ответ: 20,25.

С6. Предположим, существует такое натуральное число n , что сумма первых n чисел натурального ряда $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n^2+n}{2}$ оканчивается на 123456789. Тогда последняя цифра числа $\frac{n^2+n}{2}$ — это 9, последняя циф-

ра числа $n^2 + n$ — это 8. Тогда $n^2 + n - 8 \div 10 \Rightarrow 4n^2 + 4n - 32 \div 10 \Rightarrow 4n^2 + 4n - 2 \div 10 \Rightarrow (2n+1)^2 - 3 \div 10$. Отсюда получаем, что последней цифрой числа $(2n+1)^2$ должна быть 3. Но это невозможно, так как квадрат натурального числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Следовательно, исходное предположение было неверным и искомого числа n не существует.

Ответ: Нет.

Решение варианта № 9

В1. На первом этаже находятся квартиры с 1-й по 5-ую, на втором — с 6-й по 10-ую и т. д. Квартиры с 36-й по 40-ую находятся на восьмом этаже.

Ответ: 8.

В2. По рисунку определяем, что 4 мм осадков впервые выпало 16-го сентября.

Ответ: 16.

В3. $x = 5\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{16}{3} \cdot 3 = \frac{16 \cdot 3}{3} = 16$.

Ответ: 16.

В4. По теореме Пифагора $CB^2 = AB^2 - CA^2 = 36, CB = 6$.

$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$.

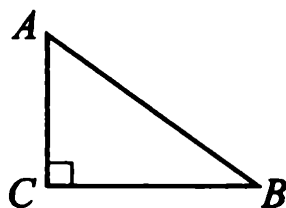


Рис. 41.

Ответ: 0,75.

В5. Автобусом: 10 мин + 1 ч 25 мин + 25 мин = 120 мин.

Электричкой: 40 мин + 55 мин + 30 мин = 125 мин.

Маршрутным такси: 35 мин + $\frac{3}{4}$ часа + 35 мин = 115 мин.

Наименьшее возможное время в пути — 115 минут.

Ответ: 115.

В6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$ (см. рис. 42).

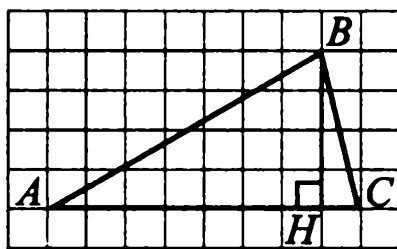


Рис. 42.

Ответ: 16.

В7. $3^4 \cdot 7^5 : 21^4 = \frac{3^4 \cdot 7^5}{(3 \cdot 7)^4} = \frac{3^4 \cdot 7^5}{3^4 \cdot 7^4} = 7^1 = 7$.

Ответ: 7.

В8. На промежутке $(-3; 11)$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно шесть. Сумма их абсцисс равна: $(-2) + 1 + 3 + 6 + 8 + 9 = 25$.

Ответ: 25.

В9. Так как цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то нижняя грань параллелепипеда является квадратом со стороной, равной диаметру основания цилиндра, то есть равной $5 \cdot 2 = 10$. Площадь нижней грани параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Находим высоту параллелепипеда

как отношение его объёма к площади основания: $\frac{400}{100} = 4$. Так как высота параллелепипеда является одновременно и высотой цилиндра, то искомое значение также равно 4.

Ответ: 4.

В10. По условию $I \leq 15$; $\frac{U}{R} \leq 15$; $\frac{240}{R} \leq 15$; $R \geq \frac{240}{15}$; $R \geq 16$. Искомое минимальное сопротивление равно 16 Ом.

Ответ: 16.

В11. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-2) = 5 + 6 \cdot (-2) - 4 = 5 - 12 - 4 = 5 - 16 = -11,$$

$$y(4) = 5 + 6 \cdot 4 - 16 = 5 + 24 - 16 = 29 - 16 = 13.$$

2) Найдём производную: $y' = 6 - 2x$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю: $6 - 2x = 0, x = 3$.

4) Значение $x = 3$ принадлежит отрезку $[-2; 4]$, Найдём значение функции при $x = 3$: $y(3) = 5 + 18 - 9 = 23 - 9 = 14$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y(3) = 14$.

Ответ: 14.

В12. Пусть x км/ч — скорость теплохода в стоячей воде, тогда скорость теплохода по течению реки $(x + 4)$ км/ч, скорость теплохода против течения реки $(x - 4)$ км/ч, его время в пути 24 часа. Составляем уравнение

$$\frac{180}{x+4} + \frac{180}{x-4} = 24, x > 4. 180x - 720 + 180x + 720 = 24(x^2 - 16),$$

$$24x^2 - 360x - 384 = 0, x^2 - 15x - 16 = 0, x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2}, x = 16.$$

Ответ: 16.

$$\text{С1. } \frac{\operatorname{tg}^3 x - 1}{\cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \text{ откуда } \cos x \neq 1, \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $x \neq 2\pi k$ и $x \neq \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению уравнения $\operatorname{tg}^3 x - 1 = 0$ на ОДЗ: $\operatorname{tg}^3 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Учитывая ОДЗ, получим, что } x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний и O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (см. рис. 43). Пусть AK — высота

$\triangle ABC$, тогда $AK = 3\sqrt{3}$ и $AO = \frac{2}{3}AK = 2\sqrt{3}$. Из прямоугольно-

го треугольника AOP : высота $PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{28 - 12} = 4$

и $NO = \frac{1}{2}PO = 2$. Тогда $\operatorname{tg} \angle OAN = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, следовательно, $\angle OAN = 30^\circ$.

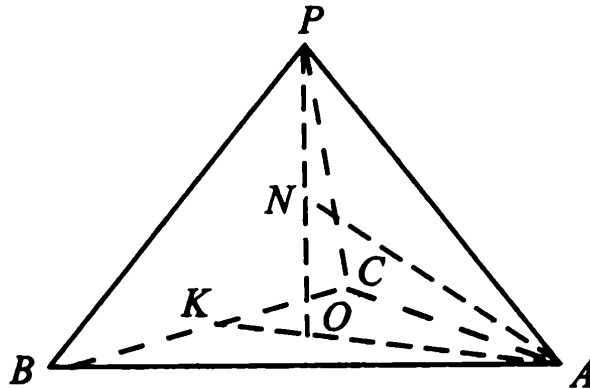


Рис. 43.

Ответ: 30° .

С3. $\log_{(x-4)}^3(x+4) - \frac{4}{9} \log_{(x-4)}^2(x+4)^3 + 5 \log_{(x-4)}(x^2 - 16) > 7$. ОДЗ

данного неравенства определяется системой
$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ x^2 - 16 > 0, \\ x-4 \neq 1, \\ x-4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, преобразуем неравенство:

$$\log_{(x-4)}^3(x+4) - 4 \log_{(x-4)}^2(x+4) + 5 \log_{(x-4)}(x+4) + 5 > 7.$$

Производя замену $t = \log_{(x-4)}(x+4)$, получаем $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 > 0$;
 $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2) > 0 \Leftrightarrow t > 2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$\log_{(x-4)}(x+4) > 2 \Leftrightarrow \log_{(x-4)}(x+4) > \log_{(x-4)}(x-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-4 > 1, \\ x+4 > (x-4)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x-4, \\ x-4 < 1, \\ x+4 < (x-4)^2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 5, \\ x^2 - 9x + 12 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4 < x, \\ x < 5, \\ x^2 - 9x + 12 > 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ \left(x - \frac{9 - \sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right) < 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x, \\ x < 5, \\ \left(x - \frac{9 - \sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств из совокупности является множество $\left(5; \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$ (см. рис. 44).

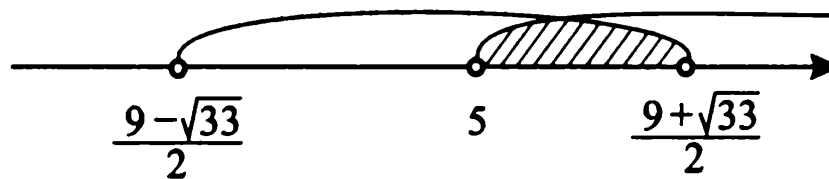


Рис. 44.

Решением второй системы является пустое множество (см. рис. 45).

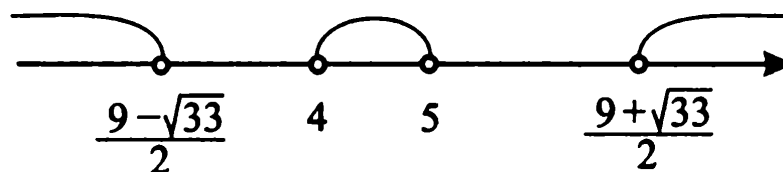


Рис. 45.

Таким образом, получаем, что $x \in \left(5; \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(5; \frac{9 + \sqrt{33}}{2}\right)$.

С4. Возможны два случая:

случай I (см. рис. 46). Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ($AB = BC = a$). Тогда $\angle B = 120^\circ$ и по теореме косинусов

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle B} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2} = a\sqrt{3}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности. С одной стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \text{ с другой стороны,}$$

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{a + a + a\sqrt{3}}{2} \cdot r. \text{ Тогда } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} ar \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})r = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}.$$

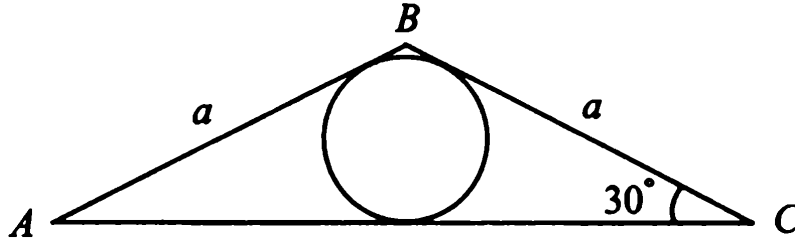


Рис. 46.

случай II (см. рис. 47). Угол, противолежащий основанию AC , равен 30° . Тогда $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cos \angle B \cdot AB \cdot BC} = \sqrt{a^2 + a^2 - a^2 \sqrt{3}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда, с одной стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{a + a + a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot r. \text{ Тогда } \frac{a^2}{4} = \frac{2a + a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot r \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})r = \frac{a}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{4 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{a(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(2 - \sqrt{3})}{2}.$$

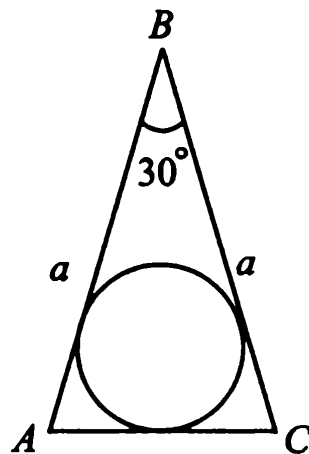


Рис. 47.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}; \frac{a(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(2 - \sqrt{3})}{2}.$

С5. Запишем исходное уравнение в виде $16|x-3| - 8x + |6x - |x+a|| = 0$.

Функция $f(x) = 16|x-3| - 8x + |6x - |x+a||$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 3$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь: $f(x) = 16x - 48 - 8x \pm 6x \pm x \pm a = kx + l$, где $k \geq 16 - 8 - 6 - 1 > 0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \leq 3$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь:

$f(x) = -16x + 48 - 8x \pm 6x \pm x \pm a = kx + l$, где $k \leq -16 - 8 + 6 + 1 < 0$.

Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ принимает при $x = 3$, а уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(3) \leq 0$.

Решим это неравенство: $|18 - |3 + a|| \leq 24$; $-24 \leq |3 + a| - 18 \leq 24$; $|3 + a| \leq 42$; $-45 \leq a \leq 39$.

Ответ: $a \in [-45; 39]$.

С6. Пусть $n \in N$ — первое число в такой последовательности. Тогда $n+1, n+2, n+3, n+4$ — следующие за ним четыре числа. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2;$$

$$n^2 = (n+3)^2 - (n+2)^2 + (n+4)^2 - (n+1)^2;$$

$$n^2 = 2n + 5 + 3(2n + 5) = 8n + 20;$$

$$n^2 - 8n - 20 = 0;$$

$$n_1 = -2 \notin N, n_2 = 10.$$

Если $n = 10$, то сумма чисел такой последовательности

$$S = \frac{n + n + 4}{2} \cdot 5 = 5n + 10 = 60.$$

Ответ: 60.

Решение варианта № 10

В1. Поезд находится в пути вечером $24 \text{ ч} - 21 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 2 \text{ ч } 20 \text{ мин}$, а утром ещё $5 \text{ ч } 10 \text{ мин}$. Всего будет потрачено времени

$$2 \text{ ч } 20 \text{ мин} + 5 \text{ ч } 10 \text{ мин} = 7 \text{ ч } 30 \text{ мин} = 7,5 \text{ ч}.$$

Ответ: 7,5.

В2. Из рисунка следует, что больше всего осадков выпало 22-го марта.

Ответ: 22.

В3. Приведём дроби к общему знаменателю: $\frac{5(x-2)}{5x} = \frac{3x}{5x}$. Так как дро-

би с одинаковыми знаменателями равны, то их числители тоже должны быть равны.

$$5(x-2) = 3x; 5x - 10 = 3x; 5x - 3x = 10; 2x = 10; x = 5.$$

При $x = 5$ знаменатель $5x$ не равен нулю, значит, это корень исходного уравнения.

Ответ: 5.

В4. $\frac{AH}{AB} = \cos \angle A$ (см. рис. 48), $AH = 5\sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 100 - 75 = 25$, откуда $BH = 5$.

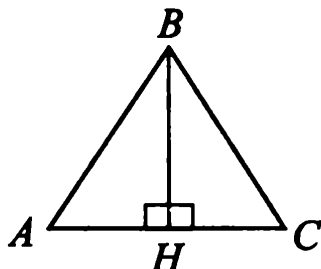


Рис. 48.

Ответ: 5.

В5. Грузовик будет ехать $\frac{20 + 50}{30}$ ч = $\frac{7}{3}$ ч;

автобус — $\frac{34 + 52}{43}$ ч = 2 ч;

легковой автомобиль — $\frac{160}{64}$ ч = 2,5 ч.

Дольше всех в пути будет находиться легковой автомобиль (2,5 часа).

Ответ: 2,5.

В6. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 + 9) = 24$ (см. рис. 49).

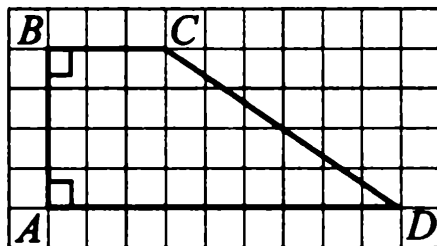


Рис. 49.

Ответ: 24.

В7. $3^{\sqrt{3}-1} \cdot 3^{3-\sqrt{3}} = 3^{(\sqrt{3}-1)+(3-\sqrt{3})} = 3^2 = 9$.

Ответ: 9.

В8. На промежутке $[-2; 5]$ точек функция $y = f(x)$ имеет экстремумы в точках: -1 , 1 и 4 . Их сумма равна $(-1) + 1 + 4 = 4$.

Ответ: 4.

В9. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра по формуле $V = Sh$ (S — площадь основания, h — высота). Так как основание и высота у цилиндра и у конуса общие, то объём конуса составляет $\frac{1}{3}$ от объёма цилиндра и равен $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$.

Ответ: 20.

В10. По условию $\eta \geq 20$; $\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100 \geq 20$; $T_1 - T_2 \geq 0,2T_1$; $0,8T_1 \geq T_2$; $0,8T_1 \geq 310$; $T_1 \geq 387,5$. Искомая минимальная температура равна 387,5 К.

Ответ: 387,5.

В11. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - (-2^3) = 6 \cdot 4 + 8 = 24 + 8 = 32,$$

$$y(3) = 6 \cdot 9 - 27 = 54 - 27 = 27.$$

2) Найдём производную: $y' = 12x - 3x^2$.

3) Найдём значения x , при которых производная функции равна нулю: $12x - 3x^2 = 0$, $3x(4 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

4) Значение $x = 0$ принадлежит отрезку $[-2; 3]$. Найдём значение функции в этой точке: $y(0) = 6 \cdot 0 - 0 = 0$.

5) Выберем из пунктов 1 и 4 наименьшие значения функции. Видим, что из чисел 32; 27; 0 наименьшим является 0.

Ответ: 0.

В12. Автобус, выехавший из B , проехал $(270 - 140) = 130$ (км). Его скорость равна $130 : 2,5 = 52$ (км/ч).

Ответ: 52.

$$\text{С1. } \frac{\operatorname{ctg}^5 x + 1}{\sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0, \text{ откуда } \sin x \neq 1, \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x \neq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, x \neq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению уравнения $\operatorname{ctg}^5 x + 1 = 0$ на ОДЗ: $\operatorname{ctg}^5 x = -1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Учитывая ОДЗ, получим, что $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний и O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (см. рис. 50). Пусть BK — высота $\triangle ABC$, тогда $BK = 3\sqrt{3}$ и $BO = \frac{2}{3}BK = 2\sqrt{3}$. Высота $PO = \sqrt{108}$, тогда $NO = \frac{1}{3}PO = 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} \angle BNO = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$, следовательно, $\angle BNO = 45^\circ$.

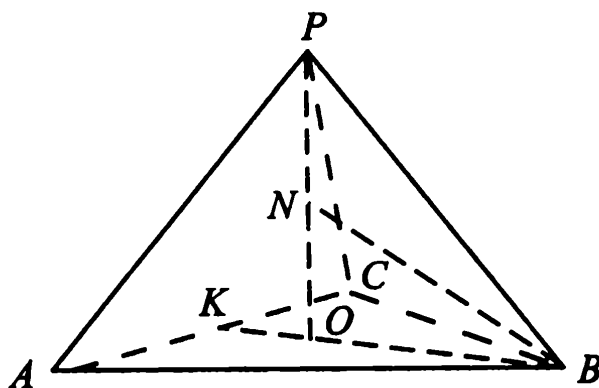


Рис. 50.

Ответ: 45° .

С3. $\frac{1}{27} \log_{(x+2)}^3(x-2)^3 - \frac{1}{5} \log_{(x+2)}^2(x-2)^5 + 8 \log_{(x+2)}(x^2-4) < 12$.

ОДЗ данного неравенства определяется системой
$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x^2-4 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (2; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, преобразуем неравенство:

$$\log_{(x+2)}^3(x-2) - 5 \log_{(x+2)}^2(x-2) + 8 \log_{(x+2)}(x-2) + 8 < 12.$$

Производя замену $t = \log_{(x+2)}(x-2)$, получаем $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 < 0$;
 $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t^2 - 4t + 4) = (t-1)(t-2)^2 < 0 \Leftrightarrow t < 1$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем $\log_{(x+2)}(x-2) < 1$. Так как на ОДЗ $x+2 > 1$, это неравенство равносильно неравенству

$x-2 < x+2$, которое выполняется при любых значениях x , следовательно, $x \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

С4. Возможны два случая:

случай I (см. рис. 51). Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30° ($AB = BC = a$). Пусть R — радиус описанной окружности. По теореме синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow a = R$

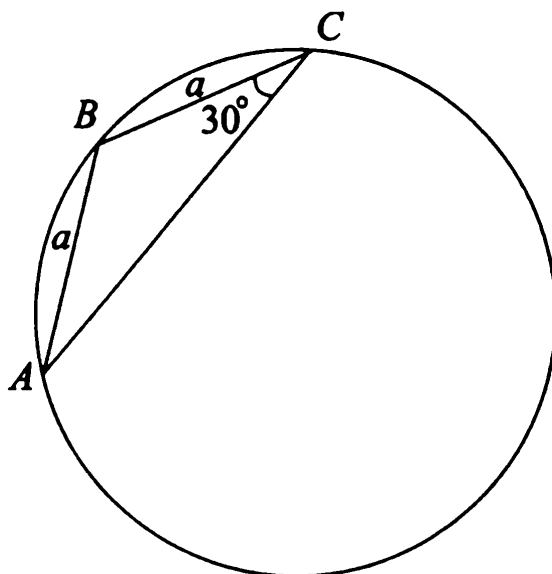


Рис. 51.

случай II (см. рис. 52). Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . $AB = BC = a$. $\angle B = 30^\circ$. По теореме косинусов $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle B} = \sqrt{a^2 + a^2 - a^2 \sqrt{3}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Пусть R — радиус описанной окружности. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow$
 $R = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Ответ: $a; a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

С5. Запишем исходное уравнение в виде $13|x-2| - 5x + |4x + |3x - a|| = 0$.

Функция $f(x) = 13|x-2| - 5x + |4x + |3x - a||$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 2$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь: $f(x) = 13x - 26 - 5x \pm 4x \pm 3x \pm a = kx + l$, где $k \geq 13 - 5 - 4 - 3 > 0$. Функция $f(x)$ убывает при $x \leq 2$, так как при любом раскрытии модулей будем иметь:

$f(x) = -13x + 26 - 5x \pm 4x \pm 3x \pm a = kx + l$, где $k \leq -13 - 5 + 4 + 3 < 0$.

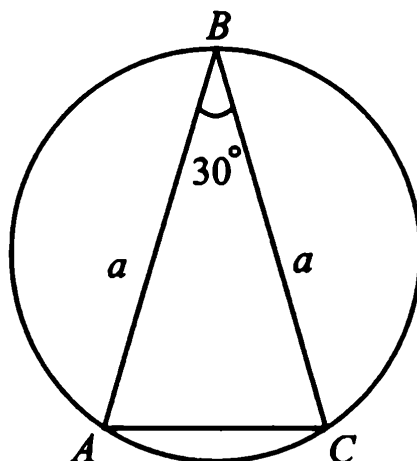


Рис. 52.

Следовательно, наименьшее значение $f(x)$ принимает при $x = 2$, а уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(2) \leq 0$. Решим это неравенство: $|8 + |6 - a|| \leq 10$; $8 + |6 - a| \leq 10$; $|6 - a| \leq 2$; $4 \leq a \leq 8$.

Ответ: $a \in [4; 8]$.

С6. Пусть $n \in N$ — первое число искомой последовательности. Тогда $n + 2, n + 4, n + 6, n + 8, n + 10$ — следующие пять чисел этой последовательности. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + (n + 6)^2 = (n + 8)^2 + (n + 10)^2;$$

$$n^2 + (n + 2)^2 = (n + 8)^2 - (n + 6)^2 + (n + 10)^2 - (n + 4)^2;$$

$$2n^2 + 4n + 4 = 2(2n + 14) + 6(2n + 14);$$

$$n^2 + 2n + 2 = 8n + 56;$$

$$n^2 - 6n - 54 = 0;$$

$$n_1 = 3 - 3\sqrt{7} \notin N, n_2 = 3 + 3\sqrt{7} \notin N.$$

Следовательно, искомым последовательностям натуральных чисел, для которых выполняется данное условие, не существует.

Ответ: Нет решений.

Решение варианта № 11

В1. Так как $\frac{250}{20} = 12,5$, то наибольшее нечётное число — это 11.

Ответ: 11.

В2. Из рисунка следует, что без осадков были дни 15, 17, 18, 19 и 24 ноября, всего 5 дней.

Ответ: 5.

В3. Заметим, что $16 = 2^4$. $2^{x+1} = 2^4$; $x + 1 = 4$; $x = 4 - 1$; $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 3.

В4. По условию $ABCD$ — трапеция (см. рис. 53), значит, $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle B = 180^\circ - \angle A$. $\cos \angle B = \cos(180^\circ - \angle A) =$
 $= -\cos \angle A = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle A} = -\sqrt{1 - \frac{21}{25}} = -\frac{2}{5} = -0,4$.

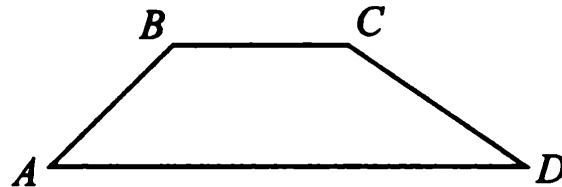


Рис. 53.

Ответ: $-0,4$.

В5. Стоимость заказа в фирме А: $2700 \cdot 80 + 6800 = 222\,800$ руб.;
 в фирме Б: $3100 \cdot 80 + 3200 = 251\,200$ руб.;
 в фирме В: $2800 \cdot 80 = 224\,000$ руб.

Самый дешёвый заказ составит 222 800 (руб.)

Ответ: 222 800.

В6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC$ (см. рис. 54).

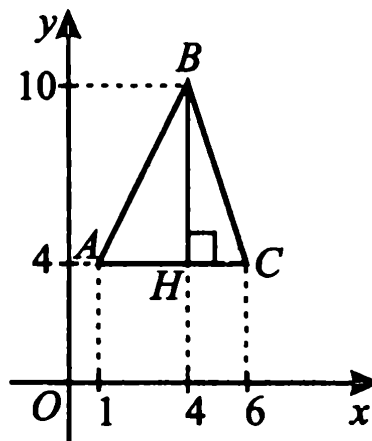


Рис. 54.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15.

$$\text{В7. } \left(3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{7}\right) \cdot 4,2 = \left(\frac{10}{3} - \frac{16}{7}\right) \cdot 4,2 = \frac{70 - 48}{21} \cdot 4,2 = \frac{22}{21} \cdot 4,2 = 22 \cdot 0,2 = 4,4.$$

Ответ: 4,4.

В8. Производная функции $y = f(x)$ равна нулю в точках, в которых касательная к графику данной функции параллельна оси Ox . По графику определяем, что таких точек 4 (это точки с абсциссами $-6, -2, 1$ и 4).

Ответ: 4.

В9. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$ (S — площадь основания, h — высота), высота конуса не меняется, а площадь основания пропорциональна квадрату диаметра ($S = \frac{\pi d^2}{4}$). Поэтому объём уменьшится в $2,5^2 = 6,25$ раза.

Ответ: 6,25.

В10. По условию $U \geq 80$; $\frac{\epsilon R}{R + r} \geq 80$; $\frac{100R}{R + 1} \geq 80$; $100R \geq 80R + 80$; $20R \geq 80$; $R \geq 4$. Искомое наименьшее сопротивление равно 4 Ом.

Ответ: 4.

В11. $y' = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 10$.

1) При $x < 0$ $y' < 0$, при $0 < x < 10$ $y' > 0$, значит, $x = 0$ — точка минимума.

2) При $0 < x < 10$ $y' > 0$, при $x > 10$ и $y' < 0$, значит, $x = 10$ — точка максимума.

Ответ: 0.

В12. Пусть x кг инжира перешло в y кг сушёного инжира, тогда в x кг содержится $0,7x$ кг влаги, в y кг сушёного инжира содержится $0,034y$ влаги. Составляем уравнение: $(1 - 0,7)x = (1 - 0,034)y$; по условию $y = 10$, тогда

$$0,3x = 0,966 \cdot 10, x = \frac{0,966 \cdot 10}{0,3} = \frac{9,66}{0,3} = 32,2 \text{ кг.}$$

Ответ: 32,2.

$$\text{С1. } \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x < 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x < 0; \end{cases} \text{ — решений нет.}$$

$$2) \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x < 0; \end{cases} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ (см. рис. 55).}$$

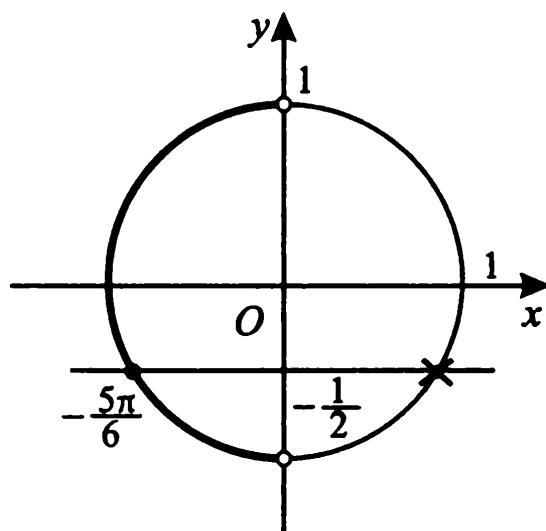


Рис. 55.

Ответ: $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. Пусть a — длина бокового ребра правильной пирамиды $SABC$, тогда сторона основания $AB = \frac{a}{3}$ (см. рис. 56). Пусть также $AH \perp SC$, и так как пирамида правильная, $BH \perp SC$.

SK — высота $\triangle ASC$, тогда $SK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{35}}{6}$. Обозначим

$\angle SCA = \beta$, тогда

$$\sin \beta = \frac{SK}{SC} = \frac{a\sqrt{35}}{6a} = \frac{\sqrt{35}}{6}.$$

$$\sin \beta = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \sin \beta = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{a\sqrt{35}}{18} = BH.$$

$\angle AHB = \alpha$ — величина двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

По теореме косинусов для $\triangle ABH$:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 - 2 \cdot AH \cdot BH \cdot \cos \alpha; \quad AB^2 = 2AH^2(1 - \cos \alpha);$$

$$\frac{a^2}{9} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 35}{18^2} (1 - \cos \alpha); \quad \frac{18}{35} = 1 - \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{18}{35} = \frac{17}{35};$$

$$\alpha = \arccos \frac{17}{35}.$$

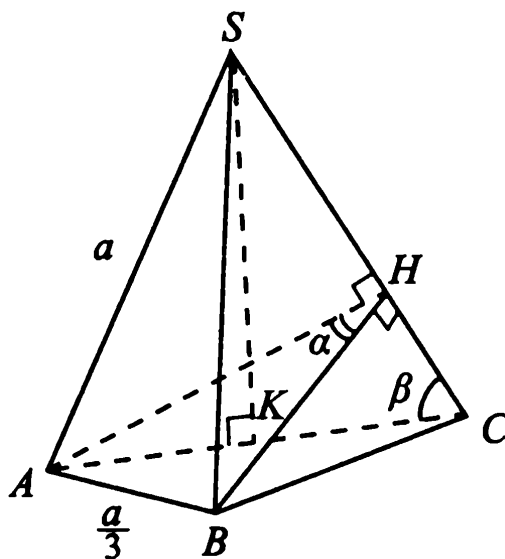


Рис. 56.

Ответ: $\arccos \frac{17}{35}$.

С3. 1) Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 17x + 67 > 0, \\ \log_{11}(x^2 - 17x + 67) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 67 \geq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 66 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x - 11) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 11, \\ x \leq 6, \end{cases} \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 6] \cup [11; +\infty).$$

При этом $x = 6$ и $x = 11$ входят в множество решений исходного неравенства.

2) При $x \in (0; 6] \cup (11; +\infty)$ множитель $\sqrt{\log_{11}(x^2 - 17x + 67)} > 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$17^x(\log_{17} x - 1) - 17(\log_{17} x - 1) \leq 0,$$

$$(\log_{17} x - 1)(17^x - 17) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, получим $1 \leq x \leq 17$.

С учётом ОДЗ $x \in [1; 6] \cup [11; 17]$.

Ответ: $[1; 6] \cup [11; 17]$.

С4. $S_{ABC} = r \cdot p$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK$ (см. рис. 57),

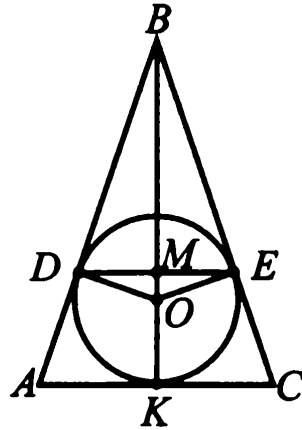


Рис. 57.

$$r = \frac{AC \cdot BK \cdot 2}{2(AB + BC + AC)} = \frac{16 \cdot \sqrt{400 - 64}}{(40 + 16)} = \frac{16 \cdot \sqrt{336}}{56} = \frac{8\sqrt{21}}{7}.$$

$\triangle ABK \sim \triangle ODM$ ($\angle BAK = \angle DOM$, $\angle AKB = \angle OMD = 90^\circ$), то-

$$\text{гда } \frac{BK}{DM} = \frac{AB}{DO}, DM = \frac{BK \cdot DO}{AB} = \frac{4\sqrt{21} \cdot 8\sqrt{21}}{7 \cdot 20} = \frac{21 \cdot 8}{35} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

$$DE = 4,8 \cdot 2 = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

С5. Пусть система имеет решение $(x; y)$. Если $x \neq 0$, то система имеет второе решение $(-x; y)$. Значит, система имеет нечётное число решений, когда абсцисса одного из решений равна нулю, то есть $x = 0$.

$$\text{При } x = 0 \text{ система примет вид } \begin{cases} a(y - 1) = 2, \\ y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2+a}{a}, \\ |y| = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+a}{a} = 3, \\ \frac{2+a}{a} = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

1) $a = -0,5$.

$$\begin{cases} -0,5(y - 1) = 2 - 2|x|, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4|x| - 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

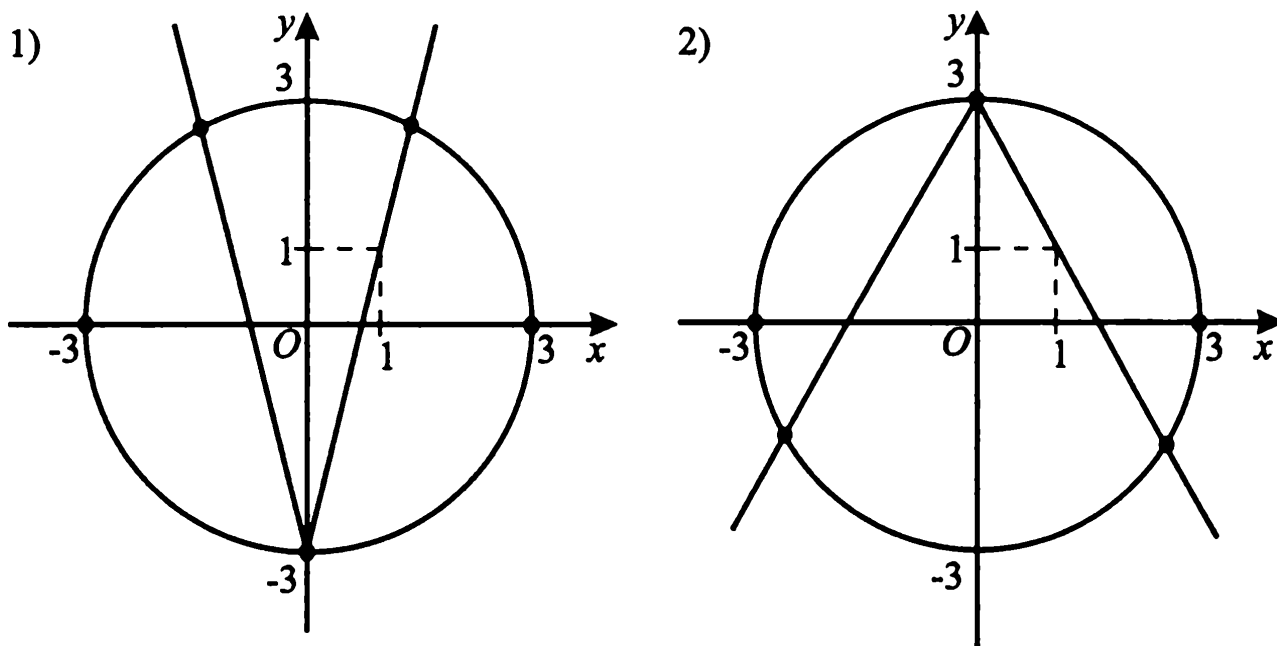


Рис. 58.

График функции $y = 4|x| - 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеют ровно три общие точки (см. рис. 58). Значит, при $a = -0,5$ исходная система имеет ровно три решения.

2) $a = 1$.

$$\begin{cases} y - 1 = 2 - 2|x|, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2|x| + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

График функции $y = -2|x| + 3$ и окружность $x^2 + y^2 = 9$ имеют ровно три общие точки (см. рис. 58), значит, исходная система имеет ровно три решения.

Ответ: $-0,5; 1$.

С6. Пусть x — искомое число, тогда $x + 46$ — увеличенное число.

1) Если $x + 46$ — двузначное число, то оно может состоять из цифр 2 и 3 или из цифр 1 и 6 (так как произведение этих двух цифр по условию должно быть равно 6). Таким образом, необходимо проверить четыре числа: 23, 32, 16, 61. Первые три числа не подходят, так как не могут быть получены увеличением натурального числа на 46. Если $x + 46 = 61$, то $x = 15$, его сумма цифр равна 6 и не равна 14.

2) Если $x + 46$ — трёхзначное число, то его первая цифра 1, так как $x + 46$ является суммой двух двузначных чисел. Оставшиеся две цифры, как и в первом случае, — это 2 и 3 или 1 и 6. Проверим все такие числа: 123, 132, 116 и 161.

$$x + 46 = 123; x = 77, \text{ его сумма цифр } 7 + 7 = 14;$$

$$x + 46 = 132; x = 86, \text{ его сумма цифр } 8 + 6 = 14;$$

$$x + 46 = 116; x = 70, \text{ его сумма цифр } 7 + 0 = 7 \neq 14;$$

$x + 46 = 161$; $x = 115$ и не является двузначным числом.

Искомое число — это 77 или 86.

Ответ: 77; 86.

Решение варианта № 12

В1. Так как $\frac{50}{6,3} = 7\frac{59}{63}$, то можно купить максимум 7 сырков.

Ответ: 7.

В2. По рисунку определяем, что максимум на графике составляет 201 доллар.

Ответ: 201.

В3. $7^{x-9} = 49$; $7^{x-9} = 7^2$; $x - 9 = 2$; $x = 11$.

Ответ: 11.

В4. $\frac{CH}{CB} = \sin \angle B$ (см. рис. 59), $CH = 16 \cdot \frac{3\sqrt{23}}{16} = 3\sqrt{23}$. По теореме

Пифагора $HB^2 = CB^2 - CH^2 = 256 - 207 = 49$. $AB = 2HB = 2 \cdot 7 = 14$.

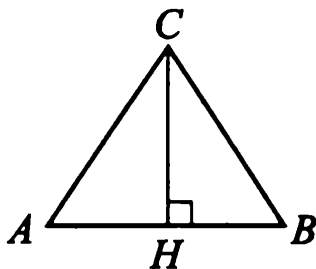


Рис. 59.

Ответ: 14.

В5. Автобусом: 35 мин + 2 ч 24 мин + 25 мин = 204 мин.

Электричкой: 44 мин + 1 ч 58 мин + 30 мин = 192 мин.

Маршрутным такси: 35 мин + 1 ч 46 мин + 76 мин = 217 мин.

Наименьшее возможное время в пути — 192 мин = 3,2 часа.

Ответ: 3,2.

В6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC$ (см. рис. 60).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16.$$

Ответ: 16.

В7. $\frac{15}{7^{\log_7 6}} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Ответ: 2,5.

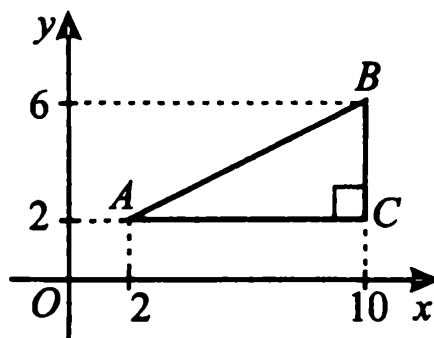


Рис. 60.

В8. Касательные к графику заданной функции $y = f(x)$, параллельные прямой $y = 4$ (или совпадающие с ней), проходят через точки с абсциссами $-5, -2, 2$ и 5 . Всего 4 точки.

Ответ: 4.

В9. Обозначим длину ребра куба через a . Так как квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений, то $(\sqrt{48})^2 = a^2 + a^2 + a^2$; $3a^2 = 48$; $a = 4$. Отсюда находим объём куба: $V = a^3 = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

В10. По условию $f \geq 270$; $250 \cdot \frac{c+20}{c-5} \geq 270$; $25(c+20) \geq 27(c-5)$; $25c + 500 \geq 27c - 135$; $2c \leq 635$; $c \leq 317,5$.

Ответ: 317,5.

В11. $y' = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 10$.

1) При $x < 0$ $y' < 0$, при $0 < x < 10$ $y' > 0$, значит, $x = 0$ — точка минимума.

2) При $0 < x < 10$ $y' > 0$, при $x > 10$ и $y' < 0$, значит, $x = 10$ — точка максимума.

Ответ: 10.

В12. Пусть x дней необходимо второму маляру, чтобы выполнить работу, тогда $\frac{1}{x}$ часть работы выполняется вторым маляром за один день. Пер-

вый маляр делает в один день $\frac{1}{20}$ часть всей работы. Два маляра, рабо-

тая вместе, в один день делают $\frac{1}{15}$ всей работы. Составляем уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}; x \neq 0; 300 + 15x = 20x; 5x = 300; x = 60.$$

Ответ: 60.

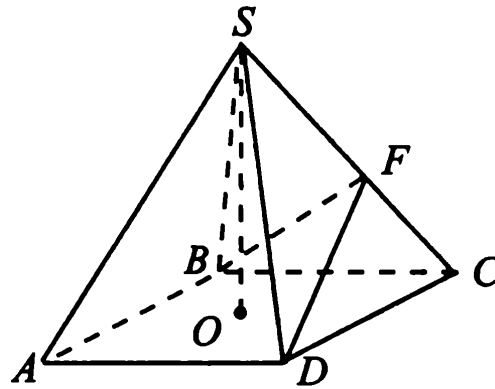


Рис. 61.

$$C1. \frac{12 \cos^4 x - \cos 2x - 3}{\sqrt{\sin x}} = 0, \frac{12 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 2}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

ОДЗ: $\sin x > 0$, то есть $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решим уравнение $12 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - 2 = 0$.

Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1)$, тогда уравнение примет вид $12t^2 - 2t - 2 = 0$,

$t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$ — корни уравнения. $t_1 = -\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $t \in [0; 1)$.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}, |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

C2. $AB = 4$, тогда $BD = 4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата, $BF = DF$, $\angle BFD = 60^\circ$, следовательно, $\triangle BFD$ — равносторонний.

$FD = BF = BD = 4\sqrt{2}$, FD — медиана в $\triangle SDC$ (см. рис. 61).

$$FD = \frac{1}{2} \sqrt{2SD^2 + 2DC^2 - SC^2}, SC = SD, \text{ тогда } FD = \frac{1}{2} \sqrt{32 + SD^2};$$

$$4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{32 + SD^2}; SD = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

$$\triangle SOD: SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{96 - 8} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}.$$

Ответ: $2\sqrt{22}$.

$$C3. 1) \text{ Найдём ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ \log_5(x^2 - 5x + 7) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 \geq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2] \cup [3; +\infty). \text{ При этом } x = 2 \text{ и } x = 3 \text{ входят}$$

во множество решений исходного неравенства.

2) При $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$ множитель $\sqrt{\log_5(x^2 - 5x + 7)} > 0$, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$9^x \log_9 x + 9 - 9 \log_9 x - 9^x \leq 0,$$

$$9^x(\log_9 x - 1) - 9(\log_9 x - 1) \leq 0,$$

$$(\log_9 x - 1)(9^x - 9) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, получим: $1 \leq x \leq 9$.

С учётом ОДЗ, $x \in [1; 2] \cup [3; 9]$.

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 9]$.

С4. Пусть $AB = x$, $ME = 4$ (см. рис. 62),

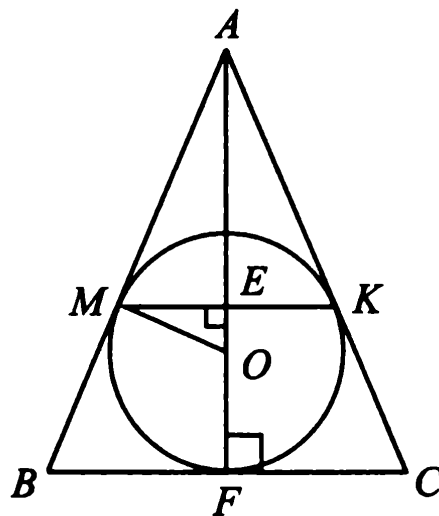


Рис. 62.

$$\triangle MEO \sim \triangle BFA, \frac{ME}{AF} = \frac{MO}{AB}, MO = r, \frac{4}{\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{r}{x}.$$

$$S_{ABC} = r \cdot p, S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = BF \cdot AF, r = \frac{\sqrt{x^2 - 81} \cdot 9}{x + 9}.$$

$$4 \cdot x = \frac{\sqrt{x^2 - 81} \cdot 9 \cdot \sqrt{x^2 - 81}}{x + 9},$$

$$4x = (x - 9) \cdot 9; 5x = 81, x = 16,2.$$

$$AB = 16,2; P = 2 \cdot 16,2 + 18 = 50,4.$$

Ответ: 50,4.

С5. $\sin^2 x + 2m \sin^2 x = 5m + 4$; $(1 + 2m) \sin^2 x = 5m + 4$.

1) $1 + 2m = 0$, $m = -\frac{1}{2}$ — не является целым числом.

2) $1 + 2m \neq 0$, $m \neq -\frac{1}{2}$, $\sin^2 x = \frac{5m + 4}{2m + 1}$.

Так как $\sin^2 x \in [0; 1]$, то $0 \leq \frac{5m + 4}{2m + 1} \leq 1$, и для того, чтобы уравнение не имело решений, надо, чтобы $\frac{5m + 4}{2m + 1} > 1$ или $\frac{5m + 4}{2m + 1} < 0$.

а) $\frac{5m + 4}{2m + 1} > 1$, $\frac{5m + 4 - 2m - 1}{2m + 1} > 0$, $\frac{3m + 3}{2m + 1} > 0$, $\frac{m + 1}{2m + 1} > 0$, $m < -1$,
 $m > -\frac{1}{2}$.

б) $\frac{5m + 4}{2m + 1} < 0$, $-\frac{4}{5} < m < -\frac{1}{2}$ (см. рис. 63).

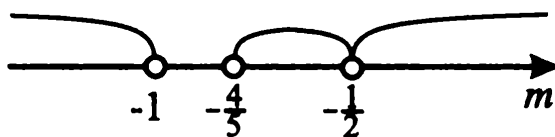


Рис. 63.

Объединим полученные решения:

$m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Наибольшее целое отрицательное значение m равно -2 .

Ответ: -2 .

С6. Пусть искомое число a , число с переставленными цифрами — это b , тогда $a = \frac{107}{41}b$; $41a = 107b$. Так как 107 — простое число, то a должно быть кратно 107 . Рассмотрим все трёхзначные числа, кратные 107 . Это $107, 214, 321, 428, 535, 642, 749, 856, 963$. Из них только у числа 642 сумма цифр равна 12 . Действительно, $642 = \frac{107}{41} \cdot 246$.

Ответ: 642 .

Решение варианта № 13

В1. На три недели потребуется $800 \cdot 3 = 2400$ листов, то есть $\frac{2400}{500} = 4,8$ пачек бумаги. Поэтому необходимо купить 5 пачек.

Ответ: 5.

В2. По рисунку определяем, что минимум на графике достигается 25-го числа.

Ответ: 25.

В3. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2-x} = 36$. Заметим, что $\frac{1}{6} = 6^{-1}$; $6^{x-2} = 6^2$; $x - 2 = 2$; $x = 4$.

Ответ: 4.

В4. $\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$ (см. рис. 64), $BC = AB \cdot \sin \angle A = 144 \cdot \frac{7}{36} = 28$.

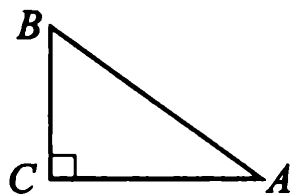


Рис. 64.

Ответ: 28.

В5. Поездом: $3 \cdot 1120 = 3360$ рублей,
автомобилем: $12 \cdot 9 \cdot 30 = 3240$ рублей.
Наиболее дешёвая поездка — 3240 рублей.

Ответ: 3240.

В6. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (BC + AD)$ (см. рис. 65).

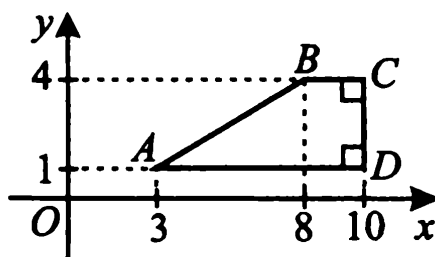


Рис. 65.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 + 7) = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

В7. $\sqrt{435^2 - 300^2} = \sqrt{(435 - 300)(435 + 300)} = \sqrt{135 \cdot 735} =$
 $= \sqrt{(3^3 \cdot 5)(7^2 \cdot 3 \cdot 5)} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2 \cdot 5^2} = 3^2 \cdot 7 \cdot 5 = 315.$

Ответ: 315.

В8. На отрезке $[-5; 3]$ производная меняет знак с «+» на «-» в единственной точке $x = -2$. Следовательно, $x = -2$ — точка максимума.

Ответ: -2 .

В9. Из прямоугольного треугольника ASO по теореме Пифагора получаем: $OA^2 = SA^2 - SO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $OA = 12$. Так как $CO = OA$, то $CA = 2 \cdot OA = 24$. Так как сторона квадрата в $\sqrt{2}$ раз меньше его диагонали, то $DA = \frac{CA}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot DA^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 2 \cdot 5 = 480.$$

Ответ: 480.

В10. По условию $v \geq 120$; $\sqrt{2 \cdot 2a} \geq 120$; $\sqrt{a} \geq 60$; $a \geq 3600$. Искомое наименьшее ускорение равно 3600 км/ч^2 .

Ответ: 3600.

В11. $y' = 6 + 2x$. $y' = 0$ при $x = -3$; $y' < 0$ при $x < -3$, $y' > 0$ при $x > -3$. $x = -3$ — точка минимума.

Ответ: -3 .

В12. Найдём время на прохождение всего пути: $\frac{200}{80} + \frac{190}{95} + \frac{150}{100} = 6$ (ч).

Найдём среднюю скорость автобуса на протяжении всего пути:

$$(200 + 190 + 150) : 6 = 90 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 90.

С1. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2 \cos^2 x - 2 \cos x + \sqrt{2} - 1 = 0, \\ \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0. \end{cases} \quad \text{Производя замену } \cos x = t \text{ и учиты-}$$

вая тождественное равенство $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем

$$\begin{cases} 2t^2 - 2t + \sqrt{2} - 1 = 0, \\ t^2 - 1 + t^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем уравнение $\cos x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]$, то решением последнего уравнения является $x = \pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра, CH — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость нижнего основания (см. рис. 66). Тогда $HO \perp AB$ и $CO \perp AB$, так как $AB \perp CHO$. Следовательно, $\angle COH$ — линейный угол искомого угла между плоскостями ABC и ABH . $BO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. Из прямоугольного треугольника COB по теореме Пифагора имеем $CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Искомый косинус равен $\cos \angle COH = \frac{OH}{CO} = \frac{5}{12}$.

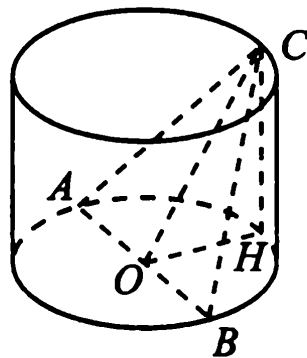


Рис. 66.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

С3. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+2}(x-2) + 1}{\log_{x+2}^2(x-2) + 1} \cdot (\log_{x+2}(x-2) + \log_{x-2}(x+2)) \geq \log_{(x+2)(x-2)}(x+2)^2.$$

ОДЗ неравенства определяется системой
$$\begin{cases} x+2 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x-2 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x^2 - 4 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \end{cases}$$

решением которой является $x \in (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3) \cup (3; +\infty)$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+2}(x-2) + 1}{\log_{x+2}^2(x-2) + 1} \cdot \left(\log_{x+2}(x-2) + \frac{1}{\log_{x+2}(x-2)} \right) \geq \frac{2}{\log_{x+2}(x+2)(x-2)}.$$

Сделав замену $\log_{x+2}(x-2) = t$, получаем неравенство

$$\frac{t+1}{t^2+1} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{2}{t+1}; \quad \frac{t+1}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{t} \geq \frac{2}{t+1}; \quad \frac{(t+1)^2 - 2t}{t(t+1)} \geq 0;$$

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)} \geq 0. \text{ Решением неравенства является } t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

Возвращаемся к исходной переменной: $\begin{cases} \log_{x+2}(x-2) < -1, \\ \log_{x+2}(x-2) > 0. \end{cases}$ Так как на

ОДЗ выполняется $x+2 > 1$, то совокупность можно переписать в виде

$$\begin{cases} x-2 < \frac{1}{x+2}, \\ x-2 > 1. \end{cases} \text{ Так как на ОДЗ выполняется } x+2 > 0, \text{ то равно-}$$

сильной будет совокупность $\begin{cases} x^2 - 4 < 1, \\ x > 3; \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \\ x > 3. \end{cases}$ Учиты-

вая ОДЗ, получаем окончательное решение $x \in (2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.

С4. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (см. рис. 67) по двум углам ($\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle BAO = \angle DCO$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей

AC). Поэтому $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = k$. Отсюда

$AO \cdot OC + BO \cdot OD = k \cdot OC \cdot OC + k \cdot OD \cdot OD = k(OC^2 + OD^2)$. По

теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DOC имеем

$CD^2 = OC^2 + OD^2$, поэтому $k(OC^2 + OD^2) = k \cdot CD^2 = (k \cdot CD) \cdot CD = AB \cdot CD = 8 \cdot 5,5 = 44$.

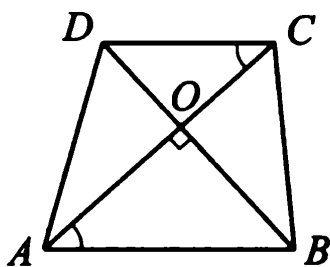


Рис. 67.

Ответ: 44.

С5. Сделаем для удобства замену $z = x + 1$, тогда $x = z - 1$. Ис-

ходная система примет вид $\begin{cases} (z-1)^2 + y^2 = a^2, \\ y + a^2 = |z|. \end{cases}$ Из второго уравне-

ния системы y однозначно выражается через z , а именно $y = |z| - a^2$.

Подставив это выражение для y в первое уравнение системы, получим

$(z - 1)^2 + (|z| - a^2)^2 = a^2$. Таким образом, решение задания сводится к нахождению значений параметра a , при которых последнее уравнение имеет единственное решение. Преобразуем это уравнение к виду $2z^2 - 2z - 2a^2|z| + a^4 - a^2 + 1 = 0$. График функции, стоящей в левой части этого уравнения, состоит из двух кусков парабол: при $z \leq 0$ и $z > 0$.

Для куска $z \leq 0$ уравнение принимает вид $2z^2 + 2(a^2 - 1)z + a^4 - a^2 + 1 = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (a^2 - 1)^2 - 2a^4 + 2a^2 - 2 = -a^4 - 1 < 0$ при любых значениях a . Поэтому на множестве $z \leq 0$ у рассматриваемого уравнения корней нет.

Для куска $z > 0$ уравнение принимает вид $2z^2 - 2(a^2 + 1)z + a^4 - a^2 + 1 = 0$. Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (a^2 + 1)^2 - 2a^4 + 2a^2 - 2 = -a^4 + 4a^2 - 1$. Введя замену $a^2 = t$ и получив значения $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ корнями вспомогательного уравнения $-t^2 + 4t - 1 = 0$, получаем: $\frac{D}{4} = 0$ при $|a| = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ и $\frac{D}{4} > 0$ при $|a| \in (\sqrt{2 - \sqrt{3}}; \sqrt{2 + \sqrt{3}})$. При $D = 0$ получаем один положительный корень $z = \frac{a^2 + 1}{2}$, следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь ровно одно решение. При $D > 0$ получаем два корня $z_{1,2} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{-a^4 + 4a^2 - 1}}{2}$. Докажем, что оба этих корня положи-

тельны (следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь два решения). Положительность первого корня очевидна. Положительность второго корня следует из неравенства $a^2 + 1 > \sqrt{-a^4 + 4a^2 - 1}$, которое при условии положительности подкоренного выражения (то есть $D > 0$) равносильно неравенству $a^4 + 2a^2 + 1 > -a^4 + 4a^2 - 1 \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow (4a^4 - 4a^2 + 1) + 3 > 0 \Leftrightarrow (2a^2 - 1)^2 + 3 > 0$, что очевидно выполняется.

Таким образом, исходная система будет иметь ровно одно решение только при $|a| = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$, то есть при $a = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ или $a = -\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, -\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

С6. При $n = 13$ число $6n^2 - n + 1$ равно 1002, его сумма цифр равна 3. Докажем, что меньше сумма цифр не может быть.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: $m = 6n^2 - n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Для этого последовательно пере-

берём возможные остатки при делении n на 5. Если n даёт остаток 0 при делении на 5, то m даёт остаток 1. Если n даёт остаток 1, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 6$, то есть остаток 1. Если n даёт остаток 2, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 23$, то есть остаток 3. Если n даёт остаток 3, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 52$, то есть остаток 2. Если n даёт остаток 4, то m даёт такой же остаток, как и $6 \cdot 4^2 - 4 + 1 = 93$, то есть остаток 3.

Мы доказали, что $m = 6n^2 - n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Следовательно, число m не может оканчиваться нулём. Теперь предположим, что существует число $m = 6n^2 - n + 1$ с суммой цифр меньше 3. Из вспомогательного утверждения следует, что это число m должно иметь вид $10^k + 1$, где k — неотрицательное целое (первая и последняя цифры — единицы, все остальные цифры — нули). Тогда $6n^2 - n + 1 = 10^k + 1$; $n(6n - 1) = 10^k$. Так как числа n и $6n - 1$ взаимно просты и $6n - 1 > n$ при всех натуральных n , то последнее равенство может выполняться только в двух случаях:

1) $n = 1$, $6n - 1 = 10^k$, что невозможно ввиду $6n - 1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5 \neq 10^k$.
2) $n = 2^k$, $6n - 1 = 5^k$. Тогда при некотором k должно выполняться $6 \cdot 2^k - 1 = 5^k$. При $k = 0$ это равенство не выполняется, так как $6 - 1 \neq 1$. При $k = 1$ равенство не выполняется, так как $6 \cdot 2 - 1 \neq 5$. При $k \geq 2$ имеем $5^k = 25 \cdot 5^{k-2} > 24 \cdot 2^{k-2} > 6 \cdot 2^k - 1$. Следовательно, при $k \geq 2$ равенство $6 \cdot 2^k - 1 = 5^k$ также не может выполняться. Предположение о существовании числа $m = 6n^2 - n + 1$ с суммой цифр меньше 3 было неверно. Следовательно, наименьшая сумма цифр — это 3.

Ответ: 3.

Решение варианта № 14

В1. Всего в лагере $150 + 19 = 169$ человек. Так как $\frac{169}{35} = 4\frac{29}{35}$, то требуется 5 автобусов.

Ответ: 5.

В2. По рисунку определяем, что в период с 21 по 27 ноября наибольшее значение достигается 27-го числа и составляет 10°C .

Ответ: 10.

В3. $17^{x+2} = \left(\frac{1}{17}\right)^x$. Заметим, что $\frac{1}{17} = 17^{-1}$; $17^{x+2} = 17^{-x}$; $x+2 = -x$; $2x = -2$; $x = -1$.

Ответ: -1.

В4. Пусть $OM = \frac{BC}{2} = x$, $OH = \frac{AB}{2} = y$ (см. рис. 68), тогда

$$\begin{cases} 4x + 4y = 52, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5, \\ y = 4,5. \end{cases} \quad AB = 2y = 9.$$

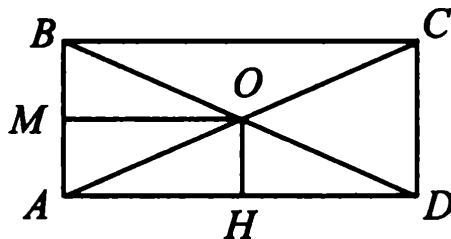


Рис. 68.

Ответ: 9.

В5. Стоимость услуги фирмы А: $12 \cdot 80 = 960$ (руб.);

фирмы Б: $150 + (80 - 20) \cdot 14 = 990$ (руб.);

фирмы В: $50 + 50 + 65 \cdot 13 = 945$ (руб.).

Самая дешёвая поездка обойдётся в 945 рублей.

Ответ: 945.

В6. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BC + AD)$ (см. рис. 69).

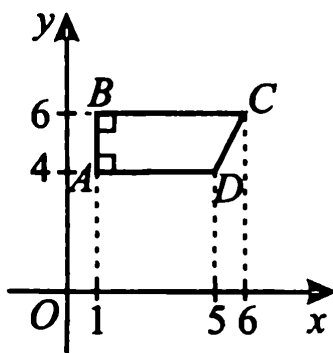


Рис. 69.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 + 5) = 9.$$

Ответ: 9.

В7. $\log_2 1,6 + \log_2 10 = \log_2 (1,6 \cdot 10) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$

Ответ: 4.

В8. На отрезке $[-2; 3]$ функция принимает наименьшее значение в точке, в которой производная меняет знак с «−» на «+». Такой точкой является $x = 2$.

Ответ: 2.

В9. По теореме Пифагора гипотенуза треугольника в основании призмы равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Периметр этого треугольника равен $9 + 12 + 15 = 36$, поэтому площадь боковой поверхности призмы (равная произведению периметра основания на высоту) равна $36 \cdot 10 = 360$. Площадь основания равна $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (половина произведения катетов). Площадь всей поверхности равна $360 + 54 \cdot 2 = 468$.

Ответ: 468.

В10. По условию $\pi(q) \geq 400\,000$;
 $q(p-v) - f \geq 400\,000$; $q(750 - 250) - 800\,000 \geq 400\,000$; $500q \geq 1\,200\,000$;
 $q \geq 2400$. Наименьший искомый объём производства равен 2400 единиц.

Ответ: 2400.

В11. $y' = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 4$.

1) $y' > 0$ при $0 < x < 4$.

2) $y' < 0$ при $x > 4$ и $x < 0$.

$x = 4$ — точка максимума.

Ответ: 4.

В12. Найдём, сколько км пройдут два автомобиля за 1 час:

$95 + 105 = 200$ (км).

Найдём, через сколько часов автомобили встретятся:

$700 : 200 = 3,5$ (ч).

Ответ: 3,5.

С1. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin^2 x - 4\sin x + 2\sqrt{3} - 3 = 0, \\ \sin^2 x - 3\cos^2 x \neq 0. \end{cases} \quad \text{Производя замену } \sin x = t \text{ и учиты-}$$

вая тождественное равенство $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем

$$\begin{cases} 4t^2 - 4t + 2\sqrt{3} - 3 = 0, \\ t^2 - 3 + 3t^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{array} \right. & \Leftrightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем уравнение $\sin x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$, то решением последнего уравнения является

$$x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

С2. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра, CH — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость нижнего основания (см. рис. 70). Тогда $HO \perp AB$ и $CO \perp AB$, так как $AB \perp CHO$. Следовательно, $\angle COH$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью ABC и плоскостью ABH основания цилиндра. Обозначим искомый радиус через r . Тогда из прямоугольного треугольника COB по теореме Пифагора имеем $CO^2 = CB^2 - OB^2 = 41^2 - r^2$. Из $\triangle CHO$ имеем

$$\frac{HO}{CO} = \cos \angle COH; \frac{r}{\sqrt{41^2 - r^2}} = 0,225;$$

$$40r = 9\sqrt{41^2 - r^2}; 40^2 r^2 + 9^2 r^2 = 9^2 \cdot 41^2; 41^2 r^2 = 9^2 \cdot 41^2; r = 9.$$

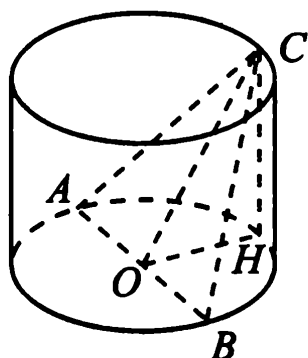


Рис. 70.

Ответ: 9.

С3. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+3}(x-3)+2}{\log_{x+3}^2(x-3)+2} \cdot (\log_{x+3}(x-3)+2 \log_{x-3}(x+3)) \geq \frac{3}{2} \log_{(x+3)(x-3)}(x+3)^2.$$

ОДЗ неравенства определяется системой

$$\begin{cases} x+3 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x-3 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \\ x^2-9 \in (0; 1) \cup (1; +\infty), \end{cases}$$

решением которой является $x \in (3; \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; 4) \cup (4; +\infty)$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{x+3}(x-3) + 2}{\log_{x+3}^2(x-3) + 2} \cdot \left(\log_{x+3}(x-3) + \frac{2}{\log_{x+3}(x-3)} \right) \geq$$

$$\geq \frac{3}{\log_{x+3}(x+3)(x-3)}.$$

Сделав замену $\log_{x+3}(x-3) = t$, получаем неравенство

$$\frac{t+2}{t^2+2} \cdot \left(t + \frac{2}{t} \right) \geq \frac{3}{t+1}; \quad \frac{t+2}{t^2+2} \cdot \frac{t^2+2}{t} \geq \frac{3}{t+1}; \quad \frac{(t+1)(t+2) - 3t}{t(t+1)} \geq 0;$$

$$\frac{t^2+2}{t(t+1)} \geq 0. \text{ Решением неравенства является } t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

Возвращаемся к исходной переменной: $\begin{cases} \log_{x+3}(x-3) < -1, \\ \log_{x+3}(x-3) > 0. \end{cases}$ Так как на

ОДЗ выполняется $x+3 > 1$, то совокупность можно переписать в виде

$$\begin{cases} x-3 < \frac{1}{x+3}, \\ x-3 > 1. \end{cases} \text{ Так как на ОДЗ выполняется } x+3 > 0, \text{ то равносильно}$$

$$\text{ной будет совокупность } \begin{cases} x^2 - 9 < 1, \\ x > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}, \\ x > 4. \end{cases} \quad \text{Учитывая}$$

ОДЗ, получаем окончательное решение $x \in (3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$

С4. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (см. рис. 71) по двум углам ($\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle BAO = \angle DCO$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей

AC). Поэтому $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = k$. Отсюда

$$AO \cdot OC + BO \cdot OD = k \cdot OC \cdot OC + k \cdot OD \cdot OD = k(OC^2 + OD^2).$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника DOC имеем $CD^2 = OC^2 + OD^2$, поэтому $k(OC^2 + OD^2) = k \cdot CD^2 = (k \cdot CD) \cdot CD = AB \cdot CD$. Получаем, что $AB \cdot CD = AO \cdot OC + BO \cdot OD = 23$ и

$$CD = \frac{23}{AB} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

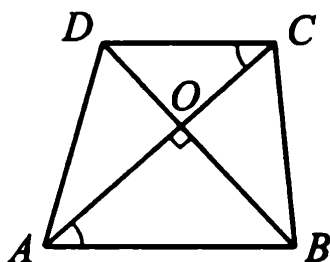


Рис. 71.

Ответ: 4,6.

С5. Сделаем для удобства замену $z = -x + 1$, тогда $x = -z + 1$. Исходная система примет вид $\begin{cases} (z-1)^2 + 4y^2 = b, \\ 2y + b = |z|. \end{cases}$ Из второго уравнения

системы y однозначно выражается через z , а именно $y = 0,5(|z| - b)$. Подставив это выражение для y в первое уравнение системы, получим $(z-1)^2 + (|z| - b)^2 = b$. Таким образом, решение задания сводится к нахождению значений параметра b , при которых последнее уравнение имеет единственное решение. Преобразуем это уравнение к виду $2z^2 - 2z - 2b|z| + b^2 - b + 1 = 0$. График функции, стоящей в левой части этого уравнения, состоит из двух кусков парабол: при $z \leq 0$ и $z > 0$.

Для куска $z \leq 0$ уравнение принимает вид $2z^2 + 2(b-1)z + b^2 - b + 1 = 0$.

Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (b-1)^2 - 2b^2 + 2b - 2 = -b^2 - 1 < 0$ при любых значениях b . Поэтому на множестве $z \leq 0$ у рассматриваемого уравнения корней нет.

Для куска $z > 0$ уравнение принимает вид $2z^2 - 2(b+1)z + b^2 - b + 1 = 0$.

Его дискриминант, делённый на 4, $\frac{D}{4} = (b+1)^2 - 2b^2 + 2b - 2 = -b^2 + 4b - 1$.

Корнями этого трёхчлена являются $b_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, поэтому $\frac{D}{4} = 0$ при

$b = 2 \pm \sqrt{3}$ и $\frac{D}{4} > 0$ при $b \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$. При $D = 0$ получаем

один положительный корень $z = \frac{b+1}{2}$, следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь ровно одно решение. При $D > 0$ получаем два корня $z_{1,2} = \frac{b+1 \pm \sqrt{-b^2 + 4b - 1}}{2}$. Докажем, что оба этих корня

положительны (следовательно, в этом случае и исходная система будет иметь два решения). Положительность первого корня очевидна. Положительность второго корня следует из неравенства $b+1 > \sqrt{-b^2 + 4b - 1}$, которое при условии положительности подкоренного выражения (то есть $D > 0$) равносильно неравенству $b^2 + 2b + 1 > -b^2 + 4b - 1 \Leftrightarrow b^2 - b + 1 > 0 \Leftrightarrow (4b^2 - 4b + 1) + 3 > 0 \Leftrightarrow (2b - 1)^2 + 3 > 0$, что очевидно выполняется.

Таким образом, исходная система будет иметь ровно одно решение только при $b = 2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $2 \pm \sqrt{3}$.

С6. При $n = 16$ число $8n^2 - 3n + 1$ равно 2001, его сумма цифр равна 3. Докажем, что меньше сумма цифр не может быть.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: $m = 8n^2 - 3n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Для этого последовательно переберём возможные остатки при делении n на 5. Если n даёт остаток 0 при делении на 5, то m даёт остаток 1. Если n даёт остаток 1, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 6$, то есть остаток 1. Если n даёт остаток 2, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 27$, то есть остаток 2. Если n даёт остаток 3, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 64$, то есть остаток 4. Если n даёт остаток 4, то m даёт такой же остаток, как и $8 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 117$, то есть остаток 2.

Мы доказали, что $m = 8n^2 - 3n + 1$ не делится на 5 при любом натуральном n . Следовательно, число m не может оканчиваться нулём. Теперь предположим, что существует число $m = 8n^2 - 3n + 1$ с суммой цифр меньше 3. Из вспомогательного утверждения следует, что это число m должно иметь вид $10^k + 1$, где k — целое неотрицательное число (первая и последняя цифры — единицы, все остальные цифры — нули). Тогда $8n^2 - 3n + 1 = 10^k + 1$; $n(8n - 3) = 10^k$. Так как $\text{НОД}(8n - 3, n) = \text{НОД}(3, n)$, то этот НОД может быть равен только 1 или 3. Кроме того, $8n - 3 > n$ при всех натуральных n . Поэтому равенство $n(8n - 3) = 10^k$ может выполняться только в двух случаях:

1) $n = 1$, $8n - 3 = 10^k$, что невозможно ввиду $8n - 3 = 8 \cdot 1 - 3 = 5 \neq 10^k$.
2) $n = 2^k$, $8n - 3 = 5^k$. Тогда при некотором k должно выполняться $8 \cdot 2^k - 3 = 5^k$. При $k = 0$ это равенство не выполняется, так как $8 - 3 \neq 1$. При $k = 1$ равенство не выполняется, так как $8 \cdot 2 - 3 \neq 5$. При $k = 2$ равенство не выполняется, так как $8 \cdot 4 - 3 \neq 25$. При $k \geq 3$ имеем $5^k = 125 \cdot 5^{k-3} > 64 \cdot 2^{k-3} > 8 \cdot 2^k - 3$. Следовательно, при $k \geq 3$ равенство $8 \cdot 2^k - 3 = 5^k$ также не может выполняться. Предположение о существовании числа $m = 8n^2 - 3n + 1$ с суммой цифр меньше 3 было неверно. Следовательно, наименьшая сумма цифр — это 3.

Ответ: 3.

Решение варианта № 15

В1. На 19 кг вишни требуется $19 \cdot 1,5 = 28,5$ кг сахара. Поэтому нужно купить 29 килограммовых упаковок.

Ответ: 29.

В2. По рисунку определяем, что среднемесячная температура ниже 10 градусов Цельсия была первые три месяца года и последние три месяца года, всего 6 месяцев.

Ответ: 6.

В3. По определению логарифма имеем: $2x = 2^3$; $2x = 8$; $x = 4$.

Ответ: 4.

В4. $AH = MD = \frac{AD - BC}{2} = 2$ (см. рис. 72), $\frac{AH}{AB} = \cos \angle A = \frac{1}{4}$,

откуда $AB = 4AH = 8$.

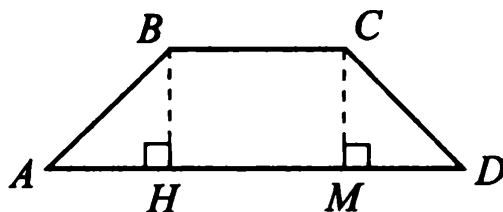


Рис. 72.

Ответ: 8.

В5. Грузовик будет в пути $\frac{75}{28}$ ч, легковой автомобиль — $\frac{145}{58} = 2,5$ (ч) и

автобус — $\frac{96,8}{44} = 2,2$ часа. Т.к. $\frac{75}{28} > 2,2$, то автобус находился в пути наименьшее время 2,2 часа = 132 мин.

Ответ: 132.

В6. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 + 8) = 22$ (см. рис. 73).

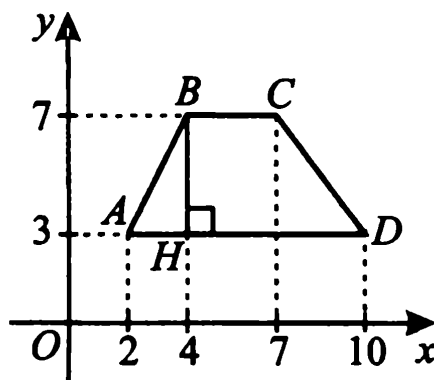


Рис. 73.

Ответ: 22.

В7. $(2x^4)^2 : 2x^8 = 2^2 \cdot (x^4)^2 : 2x^8 = 4x^8 : 2x^8 = 2$.

Ответ: 2.

В8. На отрезке $[-7; 10]$ функция $f(x)$ достигает максимума в двух точках (это точки, в которых производная данной функции меняет знак с плюса на минус).

Ответ: 2.

В9. Так как объём воды в цилиндрическом сосуде прямо пропорционален высоте уровня воды ($V = Sh$), то, обозначив искомый объём через x , получим $\frac{5000}{24} = \frac{x}{18}$; $x = \frac{5000 \cdot 18}{24} = 3750 \text{ см}^3$.

Ответ: 3750.

В10. По условию $R \geq 30$; $\frac{120R_2}{120 + R_2} \geq 30$; $4R_2 \geq 120 + R_2$; $R_2 \geq 40$.

Искомое наименьшее сопротивление равно 40 Ом.

Ответ: 40.

В11. $y' = \left(2 \cos x - \frac{12}{\pi}x + 3\right)' = -2 \sin x - \frac{12}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\pi; 0\right]$. Наибольшим является значение

$$y\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{12}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + 3 = 10.$$

Ответ: 10.

В12. Выехавший из A мотоциклист проехал $280 - 80 = 200$ (км), его скорость равна $\frac{200}{4} = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

С1. $\sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2 - 7} = 3$;

$$\sqrt{x+3}+2 + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2 - 7} = 3.$$

Пусть $t = \sqrt{x+3}+2$, $t \geq 2$, тогда $t + \sqrt{t^2 - 7} = 3$; $\sqrt{t^2 - 7} = 3 - t$. Данное уравнение разрешимо только при $3 - t \geq 0$, то есть $t \leq 3$. При $t \leq 3$ имеем: $t^2 - 7 = (3 - t)^2$; $t^2 - 7 = 9 - 6t + t^2$, откуда $t = 2\frac{2}{3}$. $t = 2\frac{2}{3}$

удовлетворяет условию $2 \leq t \leq 3$. Вернёмся к замене: $\sqrt{x+3}+2 = 2\frac{2}{3}$;

$$\sqrt{x+3} = \frac{2}{3}; x+3 = \frac{4}{9}; x = -\frac{23}{9} = -2\frac{5}{9}.$$

Ответ: $-2\frac{5}{9}$.

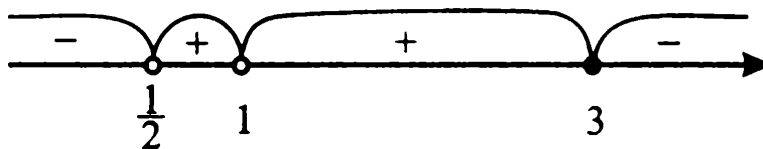


Рис. 75.

С4. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 76). CH — данная высота h , проведённая из вершины C к основанию AD . Пусть $2CH = AC$, тогда $\angle CAD = 30^\circ$ и угол между диагоналями параллелограмма, в три раза больший $\angle CAD$, — прямой. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

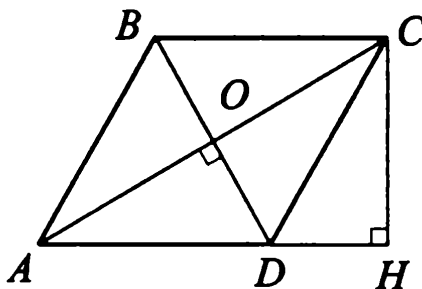


Рис. 76.

Найдём меньшую диагональ BD . $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, $\angle ABD = \angle ADB = \angle CBD = \angle CDB = 60^\circ$, значит, треугольники ABD и BDC равносторонние и площадь ромба $S_{ABCD} = BD \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, отсюда $BD = 2$.

(Если бы изначально $2CH = BD$, то $\angle BDA = 30^\circ$, что не поменяло бы ход решения и полученный ответ, но рисунок 76 ему бы не соответствовал, и меньшей диагональю ромба являлась бы диагональ AC .)

Ответ: 2.

С5. Первое уравнение системы задаёт окружность радиуса $|a|$ с центром в точке с координатами $(0; a)$ (при любом значении a такая окружность проходит через начало координат). Ясно, что система уравнений будет иметь решения только при $a > 0$.

Из графического представления системы (см. рис. 77) видно, что система будет иметь более четырёх решений в том случае, если окружность, заданная первым уравнением, будет иметь радиус больший, чем окружность, проходящая через точку A (окружность, касающаяся ветвей параболы $y = x^2 - 3$).

Найдём радиус окружности, заданной первым уравнением системы и проходящей через точку A с координатами $(x; y)$. Очевидно, что $x > \sqrt{3}$ и $y > 0$. Следовательно, второе уравнение системы можно записать в виде $y = x^2 - 3$, откуда $x^2 = y + 3$. Подставим полученное выражение для x^2 в первое уравнение системы: $y + 3 + (y - a)^2 = a^2$, $y + 3 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$,

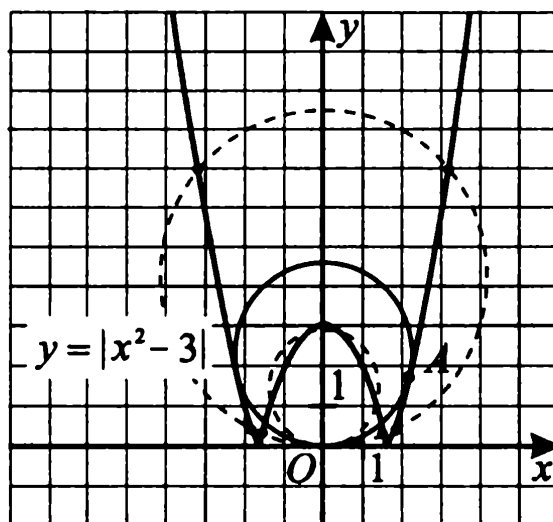


Рис. 77.

$y^2 + (1 - 2a)y + 3 = 0$. Данное уравнение имеет единственное решение, если $D = (1 - 2a)^2 - 12 = 4a^2 - 4a - 11 = 0$. Отсюда

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 11}}{4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}. \text{ Учитывая, что } a > 0, a = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

(при этом $y = a - 0,5 = \sqrt{3} > 0$).

Таким образом, система будет иметь более четырёх решений при

$$a > \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}; +\infty \right).$$

С6. Пусть x — искомое трёхзначное число. Тогда $x^2 - x \vdots 1000$;

$$x(x-1) \vdots 1000; x(x-1) \vdots 8 \text{ и } x(x-1) \vdots 125, \text{ то есть } \begin{cases} x = 8k, \\ x = 8k + 1, \\ x = 125m, \\ x = 125m + 1. \end{cases}$$

Перебором среди чисел $125, 125 \cdot 2, 125 \cdot 3, 125 \cdot 4, 125 \cdot 5, 125 \cdot 6, 125 \cdot 7$; $125 + 1, 125 \cdot 2 + 1, 125 \cdot 3 + 1, 125 \cdot 4 + 1, 125 \cdot 5 + 1, 125 \cdot 6 + 1, 125 \cdot 7 + 1$ находим числа вида $8k$ или $8k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Это $125 \cdot 5 = 625 = 78 \cdot 8 + 1$ и $125 \cdot 3 + 1 = 376 = 47 \cdot 8$.

Таким образом, мы нашли два трёхзначных числа, удовлетворяющих заданному условию: 376 и 625.

$$\text{Ответ: } 376; 625.$$

Решение варианта № 16

В1. Всего на теплоходе $860 + 33 = 899$ человек. Так как $\frac{899}{60} = 14\frac{59}{60}$, то требуется 15 шлюпок.

Ответ: 15.

В2. По рисунку определяем, что число посетителей впервые превысило 40 тысяч человек в 3-м месяце.

Ответ: 3.

В3. $4 + x = 4$; $x = 4 - 4$; $x = 0$.

Проверка: $\log_3(4 + 0) = \log_3 4$; $x = 0$ — корень уравнения.

Ответ: 0.

В4. $\angle AOC = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$ (см. рис. 78).

$\sphericalangle DA = \angle AOD = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

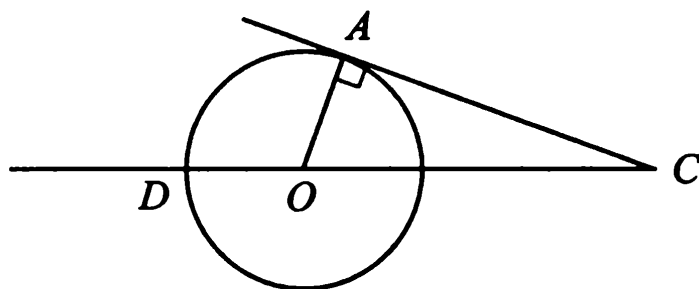


Рис. 78.

Ответ: 124.

В5. Стоимость фундамента из пеноблоков: $7 \cdot 2900 + 3 \cdot 280 = 21\,140$ (руб.).

Стоимость бетонного фундамента: $6 \cdot 750 + 50 \cdot 280 = 18\,500$ (руб.).

То есть наиболее дешёвый вариант составит 18 500 (руб.).

Ответ: 18 500.

В6. Пусть B — точка, симметричная точке A относительно оси Ox (см. рис. 79).

Точка B имеет координаты $(-3; -5)$, ордината равна -5 .

Ответ: -5 .

В7. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot 0,16 - 1 = 0,32 - 1 = -0,68$.

Ответ: $-0,68$.

В8. На отрезке $[-6; 8]$ точек экстремума функции $f(x)$ ровно две: -5 и 7 (в этих точках производная функции $y = f(x)$ меняет знак).

Ответ: 2.

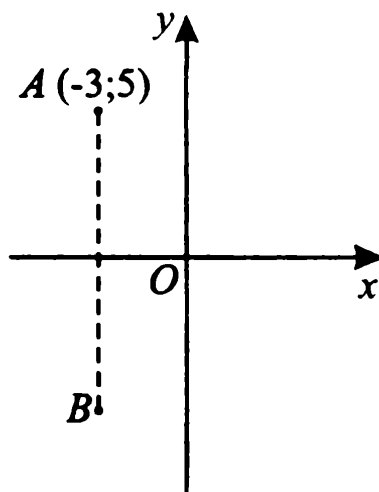


Рис. 79.

В9. Так как объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара, то

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 64$; $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{64} = 4$. Отсюда отношение площадей поверхностей $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4^2 = 16$.

Ответ: 16.

В10. По условию $pq \geq 315$; $p(300 - 60p) \geq 315$; $p(20 - 4p) \geq 21$; $4p^2 - 20p + 21 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $p_1 = 1,5$, $p_2 = 3,5$. Решение этого неравенства — отрезок $[1,5; 3,5]$. Искомый максимальный уровень цены составляет 3,5 тыс. руб.

Ответ: 3,5.

В11. $y' = 11 \cos x - 13$. Т. к. $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 11 \sin 0 - 13 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

В12. $70 + 80 = 150$ (км/ч), $720 : 150 = 4,8$ (ч).

Ответ: 4,8.

С1. Область допустимых значений исходного уравнения находится из системы

$$\begin{cases} 4x^2 + 14x - 98 \geq 0, \\ 8x + 2 \neq 0, \\ 2x - 7 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 7)(x - 3,5) \geq 0, \\ x \neq -0,25, \\ x \neq 3,5. \end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ: $(-\infty; -7] \cup (3,5; +\infty)$.

Возвращаясь к уравнению, получим

$$\sqrt{4x^2 + 14x - 98} \cdot \left(\frac{1}{8x + 2} - \frac{1}{2x - 7} \right) = 0;$$

$$\sqrt{4(x + 7)(x - 3,5)} \left(\frac{-6x - 9}{(8x + 2)(2x - 7)} \right) = 0.$$

Корни данного уравнения: $x_1 = -7$, $x_2 = 3,5$, $x_3 = -1,5$. Таким образом, с учётом ОДЗ корнем данного уравнения является $x = -7$.

Ответ: -7 .

С2. Рассмотрим треугольник AKM (см. рис. 80). Проведём из вершины A высоту $АН$. Тогда $S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot АН \cdot МК$. Треугольники $A_1B_1C_1$

и A_1MK подобны, так как $\angle B_1A_1C_1$ — общий и $\frac{A_1M}{A_1K} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}$, поэтому

$$\frac{MK}{B_1C_1} = \frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{3} \text{ и } MK = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

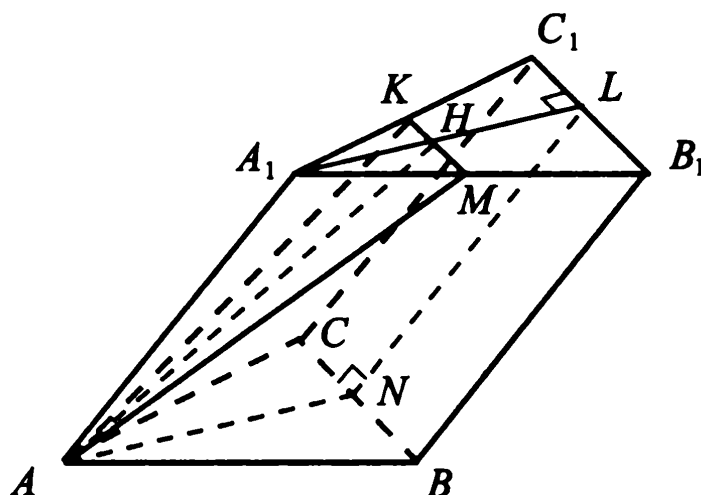


Рис. 80.

Найдём $АН$. Проведём высоту A_1L треугольника $A_1B_1C_1$. Рассмотрим параллелограмм A_1LNA (см. рис. 81). $A_1L = \frac{3}{2}$, $A_1H = \frac{A_1L}{3} = \frac{1}{2}$.

По теореме косинусов $АН^2 = АА_1^2 + A_1H^2 - 2AA_1 \cdot A_1H \cdot \cos 150^\circ = 3 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{4} + \frac{3}{2} = \frac{19}{4}$, откуда $АН = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

$$\text{Получаем, что } S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{57}}{12}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{57}}{12}$.

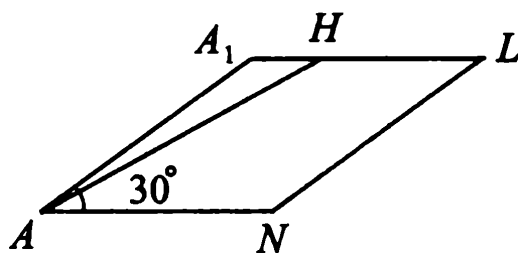


Рис. 81.

С3. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2^x \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x - 2^{-1} \cdot 3^x + 2^{-1} \cdot 3}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x(3^x - 3) - 2^{-1}(3^x - 3)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x - 2^{-1})(3^x - 3)}{(x+1)(x+2)} \leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Нули числителя дроби находим из уравнений $2^{x_1} = 2^{-1}$ и $3^{x_2} = 3$: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$; нули знаменателя: $x_3 = -1$ и $x_4 = -2$. Расставим знаки на соответствующих интервалах (см. рис. 82).



Рис. 82.

Таким образом, $x \in (-2; -1) \cup (-1; 1]$.

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 1]$.

С4. Рассмотрим два случая.

1) Пусть угол $\angle BDA = 60^\circ$ (см. рис. 83). Так как угол между диагоналями в три раза больше угла между стороной AD и одной из диагоналей параллелограмма, то возможно 2 случая:

a) $\angle AOD = 3\angle OAD$; $\angle OAD + 3\angle OAD + 60^\circ = 180^\circ$; $\angle OAD = 30^\circ$.

б) $\angle DOC = 3\angle OAD$; $\angle OAD + (180^\circ - 3\angle OAD) + 60^\circ = 180^\circ$; $\angle OAD = 30^\circ$.

Поэтому $\angle AOD = 90^\circ$, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

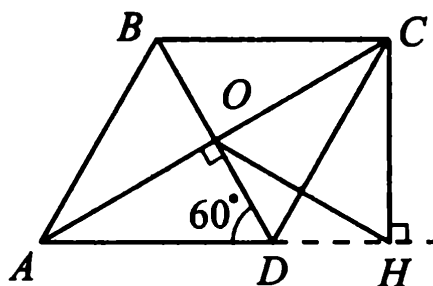


Рис. 83.

$\angle OCH = 90^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ ($\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при пересечении двух параллельных прямых секущей и $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$). Так как $AC = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = 2CH$, то $OC = CH = 4\sqrt{3}$.

Следовательно, $\triangle OCH$ — равносторонний, и $OH = CH = 4\sqrt{3}$.

2) Пусть угол $\angle CAD = 60^\circ$ (см. рис. 84), тогда аналогично 1-му случаю $\angle BDC = 30^\circ$, угол между диагоналями также равен 90° , и, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

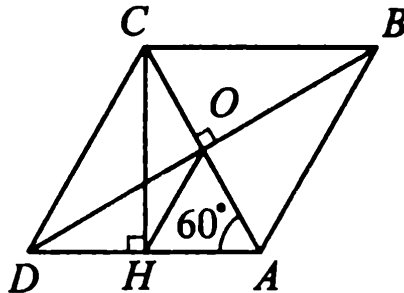


Рис. 84.

$$DB = \frac{CH}{\sin 30^\circ} = 2CH; OB = CH = 4\sqrt{3};$$

$$CB = \frac{OB}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 8. \text{ По теореме Пифагора } CO^2 = CB^2 - OB^2$$

и $CO = \sqrt{64 - 16 \cdot 3} = 4$. В треугольнике CHO $\angle HCO = 30^\circ$, $CO = 4$ и $CH = 4\sqrt{3}$. По теореме косинусов $HO^2 = CH^2 + CO^2 - 2CH \cdot CO \cdot \cos 30^\circ$;

$$HO^2 = 48 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48 + 16 - 48 = 16; HO = 4.$$

Ответ: $4\sqrt{3}; 4$.

С5. Первое уравнение системы задаёт окружность радиуса $|a|$ с центром в точке с координатами $(0; 8 - a)$ (при любом значении a данная окружность проходит через точку с координатой $(0; 8)$). Учитывая, что $a > 0$, система уравнений будет иметь ровно 4 решения, если эта окружность будет проходить или через точку A , или через точку B (см. рис. 85).

Найдём радиус окружности, заданной первым уравнением системы и проходящей через точку B . Координата данной точки $(2; 0)$, подставим $x = 2$ и $y = 0$ в первое уравнение системы: $4 + (a - 8)^2 = a^2$,

$$4 + a^2 - 16a + 64 = a^2, a = \frac{68}{16} = 4,25.$$

Найдём a , при котором окружность, заданная первым уравнением системы, проходит через точку A с координатами $(x; y)$ (окружность, касаю-

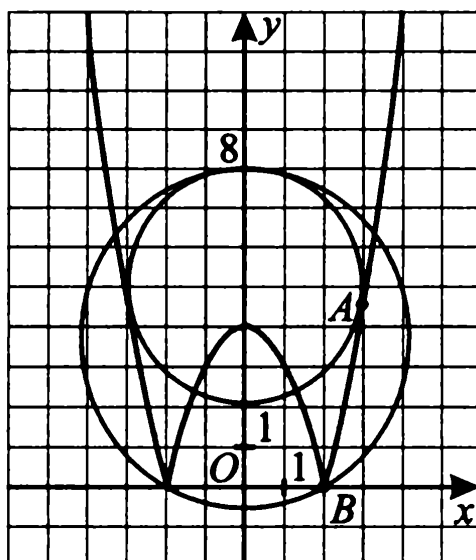


Рис. 85.

щаяся ветвей параболы $y = x^2 - 4$). Ясно, что $x > 2$ и $y > 0$. Тогда второе уравнение системы равносильно уравнению $x^2 - 4 = y$, откуда $x^2 = y + 4$. Подставляем найденное выражение для x^2 в первое уравнение системы: $y + 4 + (y + a - 8)^2 = a^2$, $y + 4 + y^2 + 2y(a - 8) + (a - 8)^2 = a^2$, $y^2 + (2a - 15)y - 16a + 68 = 0$. Данное уравнение имеет единственное решение, если $D = (2a - 15)^2 - 4(68 - 16a) = 4a^2 + 4a - 47 = 0$, откуда $a_{1,2} = \frac{-1 \pm 4\sqrt{3}}{2}$, и так как $a > 0$, $a = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$ (при этом

$$y = 7,5 - a = 7,5 - \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2} > 0).$$

Таким образом, система имеет 4 решения при $a = 4,25$ и

$$a = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $4,25; \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}$.

С6. Пусть x — двузначное число, удовлетворяющее условию.

Тогда $x^3 - x \div 100$; $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \div (5^2 \cdot 2^2)$. Так как только одно из чисел $x - 1$, x , $x + 1$ может делиться на 5, то оно же делится на 5^2 . Выпишем все двузначные x , для которых одно из чисел $x - 1$, x , $x + 1$ делится на 5^2 . Это 24, 25, 26, 49, 50, 51, 74, 75, 76, 99. Для каждого из этих значений x остаётся проверить, что $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) \div 4$. Проверяем:

$$x = 24; 23 \cdot 24 \cdot 25 \div 4;$$

$$x = 25; 24 \cdot 25 \cdot 26 \div 4;$$

$x = 26$; $25 \cdot 26 \cdot 27 \nmid 4$, значение $x = 26$ отбрасываем;

$x = 49$; $48 \cdot 49 \cdot 50 \div 4$;

$x = 50$; $49 \cdot 50 \cdot 51 \nmid 4$, значение $x = 50$ отбрасываем;

$x = 51$; $50 \cdot 51 \cdot 52 \div 4$;

$x = 74$; $73 \cdot 74 \cdot 75 \nmid 4$, значение $x = 74$ отбрасываем;

$x = 75$; $74 \cdot 75 \cdot 76 \div 4$;

$x = 76$; $75 \cdot 76 \cdot 77 \div 4$;

$x = 99$; $98 \cdot 99 \cdot 100 \div 4$.

Таким образом, мы нашли 7 натуральных двузначных чисел, удовлетворяющих заданному условию (24, 25, 49, 51, 75, 76, 99).

Ответ: 7.

Решение варианта № 17

В1. В одном подъезде $12 \cdot 3 = 36$ квартир. В первом подъезде находятся квартиры с 1-й по 36-ую, во втором — с 37-й по 72-ую, в третьем — с 73-й по 108-ую, в четвёртом — с 109-й по 144-ую. Так как $128 - 109 = 19$ и первые 18 квартир четвёртого подъезда находятся на первых шести этажах, то Маша живёт на 7-м этаже.

Ответ: 7.

В2. По рисунку определяем, что менее 3000 автомобилей было продано в 6-м месяце.

Ответ: 6.

В3. $x = \frac{x}{3x-2}$; $x(3x-2) = x$; $x(3x-3) = 0$; $x(x-1) = 0$; $x_1 = 0$,

$x_2 = 1$. Проверка: $0 = \frac{0}{3 \cdot 0 - 2}$; $1 = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2}$. Оба числа являются корнями исходного уравнения. В ответ пишем большее из них.

Ответ: 1.

В4. $BH = 8 - (8 - 2\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$. По теореме Пифагора $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 64 - 28 = 36$, $AH = 6$. Значит,

$\sin \angle B = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

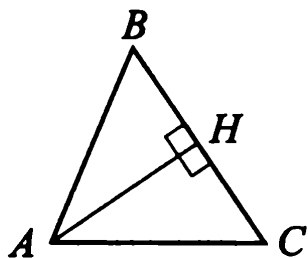


Рис. 86.

В5. Оплата в месяц при повременном тарифном плане:

$$150 + 0,4 \cdot 800 = 470 \text{ (руб.)},$$

$$\text{при комбинированном: } 250 + 300 \cdot 0,3 = 340 \text{ (руб.)},$$

$$\text{при безлимитном: } 400 \text{ (руб.)}.$$

Оплата при наиболее выгодном тарифе составит 340 (руб.).

Ответ: 340.

$$\text{В6. } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3 + 7) = 30 \text{ (см. рис. 87).}$$

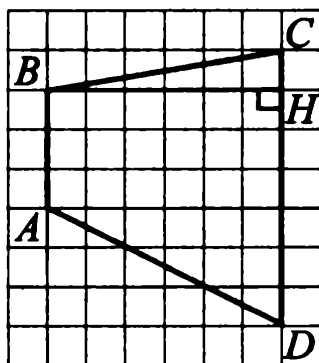


Рис. 87.

Ответ: 30.

$$\text{В7. } \frac{7 \operatorname{tg} 138^\circ}{0,2 \operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{\operatorname{tg} 138^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - 42^\circ)}{\operatorname{tg} 42^\circ} = 35 \cdot \frac{-\operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ} = -35.$$

Ответ: -35.

В8. Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что в эти промежутки входят целые точки -3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8 и 9. Всего 9 точек.

Ответ: 9.

В9. Обозначив через h_1 и r_1 соответственно высоту и радиус основания большего конуса, получаем, что высота меньшего конуса $h_2 = \frac{h_1}{2}$. Из подобия треугольников, являющихся осевыми сечениями конусов, сле-

дует, что радиус основания меньшего конуса $r_2 = \frac{r_1}{2}$. Тогда искомый

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \frac{h_1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{8} \cdot V_1 = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

В10. Так как $6 \text{ мм} = 0,006 \text{ м}$, то по условию должно выполняться равенство $l - l_0 = 0,006$; $l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 0,006$; $l_0 \alpha \cdot t^\circ = 0,006$; $12,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t^\circ = 0,006$; $t^\circ = 40^\circ \text{C}$.

Ответ: 40.

В11. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:

$$y(2) = (6 - 2)e^{10-2} = 4e^8,$$

$$y(9) = (6 - 9)e^{10-9} = -3e.$$

2) Найдём производную: $y' = -e^{10-x} + (6 - x)e^{10-x} \cdot (-1) = -e^{10-x}(1 + 6 - x) = -e^{10-x}(7 - x)$.

3) Найдём значения x , при которых производная равна нулю: $-e^{10-x}(7 - x) = 0$, $x = 7$; $7 \in [2; 9]$.

4) Найдём значения функции при $x = 7$: $y(7) = (6 - 7)e^{10-7} = -e^3$.

5) Среди найденных значений функции выберем наименьшее значение: $y(7) = -e^3$, оно достигается при $x = 7$.

Ответ: 7.

В12. Пусть x часов потребуется второму рабочему, чтобы выполнить весь заказ. Так как рабочие вместе выполнили половину заказа, то оставшуюся половину работы сделал первый рабочий за 8 часов, следовательно всю работу он выполнит за 16 часов.

Таким образом, за один час первый рабочий делает $\frac{1}{16}$ часть заказа,

а второй рабочий — $\frac{1}{x}$ часть заказа.

Составляем уравнение: $\frac{1}{16} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16}$, $x = 48$.

Ответ: 48.

С1. Выпишем ОДЗ: $x > 6$.

Обозначим $\log_2(x - 5)$ через t , тогда $t^2 + t - 20 = 0$, откуда $t_1 = 4$, $t_2 = -5$.

1) $\log_2(x - 5) = 4 \Rightarrow x = 21$, является корнем;

2) $\log_2(x - 5) = -5 \Rightarrow x = 5 + \frac{1}{32}$ — не принадлежит ОДЗ.

Ответ: 21.

С2. Построим чертёж (см. рис. 88),

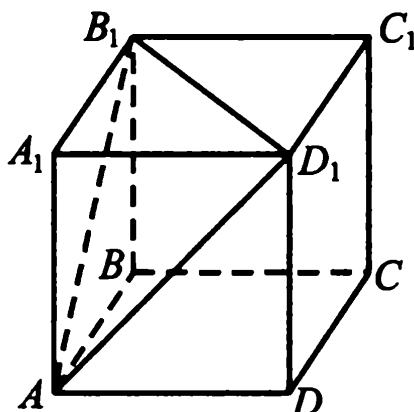


Рис. 88.

По теореме Пифагора из $\triangle A_1B_1D_1$ имеем:

$B_1D_1 = \sqrt{B_1A_1^2 + A_1D_1^2} = 6$, аналогично $AB_1 = AD_1 = 6 \Rightarrow$ сечение — равносторонний треугольник со стороной 6, площадь которого равна $\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Ответ: $9\sqrt{3}$.

С3. Преобразуем исходное неравенство:

$$3^{2x}(3^{x^2} - 3^4) - 2^x(3^{x^2} - 3^4) \geq 0,$$

$$(3^{2x} - 2^x)(3^{x^2} - 3^4) \geq 0,$$

$$(9^x - 2^x)(3^{x^2} - 3^4) \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов, для этого найдём нули левой части.

$$9^x - 2^x = 0 \Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

$$3^{x^2} = 3^4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Теперь найдём решение исходного неравенства (см. рис. 89).

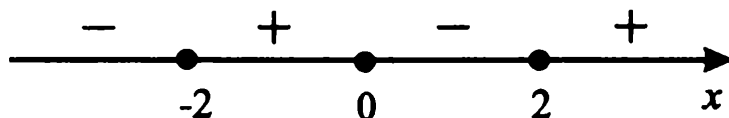


Рис. 89.

В результате $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

С4. Обозначим величину каждого из данных вертикальных углов за α (см.

рис. 90). Тогда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{1}{4}$.

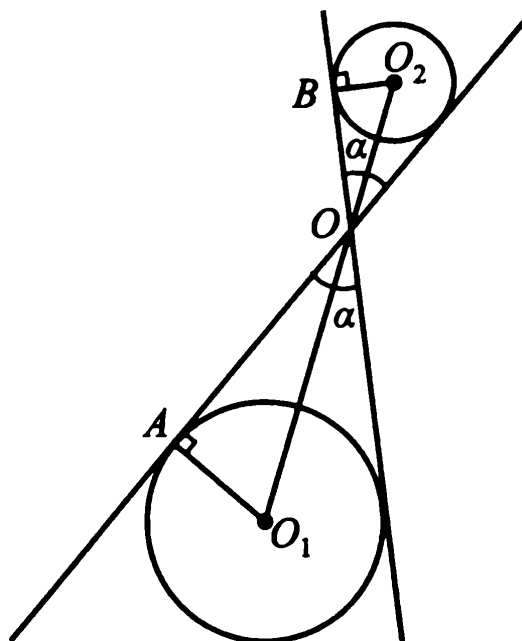


Рис. 90.

Заметим, что $\triangle AO_1O$ подобен $\triangle BO_2O$ ($\angle O_2BO = \angle OAO_1 = 90^\circ$, так как радиус, проведённый к точке касания, перпендикулярен касательной, $\angle BOO_2 = \angle AOO_1$, так как O_1O_2 — биссектриса углов α);

так как $\frac{O_1A}{O_2B} = 2$, то $\frac{O_1O}{O_2O} = 2$; так как $O_1O + O_2O = 12\sqrt{2}$, то

$$O_2O = 4\sqrt{2}, \sin \angle BOO_2 = \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Возможны два варианта:

$$1) \sin \angle BOO_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin \angle BOO_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Далее заметим, что меньший радиус $r = 4\sqrt{2} \cdot \sin \angle BOO_2$, а искомый диаметр $d = 8\sqrt{2} \cdot \sin \angle BOO_2$.

В случае каждого из указанных выше вариантов соответственно получим $4\sqrt{3}$ или $4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ или $4\sqrt{5}$.

$$C5. \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y^2 = (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = x-3, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = 3-x. \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно каждую из этих систем:

$$1) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = x-3. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } (x-a)^2 + (x-3-a)^2 = a^2,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + x^2 + 9 + a^2 - 6x + 6a - 2ax = a^2,$$

$$2x^2 - 4ax - 6x + a^2 + 6a + 9 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (2a+3)^2 - 2(a^2+6a+9) = 4a^2+12a+9-2a^2-12a-18 = 2a^2-9,$$

$$\text{значит, } D=0 \text{ при } a = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}; D < 0 \text{ при } a \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y = 3-x. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } (x-a)^2 + (3-x-a)^2 = a^2,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 9 + x^2 + a^2 - 6x + 2ax - 6a = a^2,$$

$$2x^2 - 6x + a^2 - 6a + 9 = 0,$$

$$\text{значит, } \frac{D}{4} = 9 - 2(a^2 - 6a + 9) = -2a^2 + 12a - 9; \frac{D}{4} = 0 \text{ при } a = 3 \pm 1,5\sqrt{2},$$

$$D < 0 \text{ при } a \in (-\infty; 3 - 1,5\sqrt{2}) \cup (3 + 1,5\sqrt{2}; +\infty).$$

3) Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} < 3 - 1,5\sqrt{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2} < 3 + 1,5\sqrt{2}.$$

Исходная система имеет решение, когда одна из систем совокупности (1) имеет единственное решение, а другая — ни одного.

При $a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ вторая система не имеет решений, при $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ — имеет решение, отличное от решений первой.

При $a = 3 - 1,5\sqrt{2}$ первая система не имеет решений,

при $a = 3 + 1,5\sqrt{2}$ — имеет решение, причём отличное от решения второй системы.

Значит, в результате получим:

$$a = 3 - 1,5\sqrt{2}, a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание. Решения систем могут совпадать только в том случае, если $y = 0$, но тогда $x = 3$, $a = 3$, а этот случай не несёт единственность корня.

$$\text{Ответ: } 3 - 1,5\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

С6. По условию число a представимо в виде $10n + 2$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, значит, при делении на 5 число a даст остаток 2, так как $10n$ делится на 5 нацело. Поэтому $\alpha = 2$. При делении на 9 число a должно также давать

остаток 2, то есть a представимо в виде $9m + 2$, где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Таким образом, имеем $a = 10n + 2$ и $a = 9m + 2$, откуда $10n + 2 = 9m + 2$ и $10n = 9m$, поэтому $10n$ должно делиться на 9, а так как НОД(10; 9) равен 1, то n должно делиться на 9, то есть $n = 9k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, а значит, $a = 90k + 2$. Рассмотрим два случая:

1) Если k — чётное ($k = 2s$, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$), то $a = 180s + 2$, $180s$ делится на 4 нацело, a при делении на 4 даст остаток 2, то есть $\beta = 2$, а значит, при делении на 7 число a также должно давать остаток 2, то есть $a = 7r + 2$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, то есть $180s + 2 = 7r + 2$, $180s = 7r$, а так как НОД(180; 7) равен 1, то s должно делиться на 7, то есть $s = 7t$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, тогда $a = 180 \cdot 7 \cdot t + 2 = 1260t + 2$. Учитывая, что $a < 5000$ при $t = 0, 1, 2, 3$, соответственно получим следующие значения a : 2, 1262, 2522, 3782.

2) Если k — нечётное ($k = 2s + 1$, $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$), то $a = 90k + 2 = 180s + 92$, но 180 делится на 4 нацело, как и 92, то есть при делении на 4 число a даст нулевой остаток, $\beta = 0$. Значит, по условию задачи число a при делении на 7 также должно давать нулевой остаток, то есть $a = 7r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, откуда $180s + 92 = 7r$; $180(s - 4) + 180 \cdot 4 + 92 = 7r$; $180(s - 4) = 7(r - 116)$. Отсюда $s - 4$ делится нацело на 7, и s можно представить в виде $s = 7t + 4$, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда $a = 180s + 92 = 1260t + 812$. Так как $0 < a \leq 5000$, то возможные значения a получаем при $t = 0, 1, 2, 3$, а именно: 812, 2072, 3332, 4592.

Ответ: 2; 1262; 2522; 3782; 812; 2072; 3332; 4592.

Решение варианта № 18

В1. Скидка составила $45 - 41,4 = 3,6$ рублей, что в процентах составляет $\frac{3,6}{45} \cdot 100 = 8\%$.

Ответ: 8.

В2. Менее 30 мм норма осадков составляет в 1, 2, 3 и 12 месяцах, всего в 4-х месяцах.

Ответ: 4.

В3. $(\sqrt{-41 + 3x})^2 = 7^2$; $-41 + 3x = 49$; $3x = 49 + 41$; $3x = 90$; $x = 30$. Проверка: $\sqrt{-41 + 3 \cdot 30} = 7$; $\sqrt{-41 + 90} = 7$; $\sqrt{49} = 7$; $7 = 7$.

Ответ: 30.

В4. По теореме Пифагора $CB^2 = AB^2 - AC^2 = 74 - 25 = 49$; $CB = 7$,

$$\operatorname{ctg} \angle B = \frac{CB}{AC} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

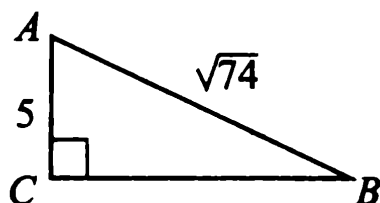


Рис. 91.

В5. Вариант с покупкой цветной пряжи обойдётся в $\frac{300}{60} \cdot 70 = 350$ (руб.), вариант с покупкой неокрашенной пряжи с последующей её окраской обойдётся в $\frac{300}{50} \cdot 40 + \frac{300}{100} \cdot 30 = 330$ (руб.), наиболее дешёвый вариант обойдётся в 330 рублей.

Ответ: 330.

В6. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 92), MN — её средняя линия.

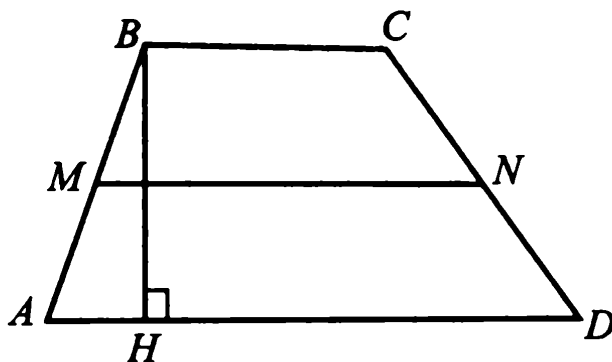


Рис. 92.

$$MN = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD), S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD), \text{ тогда}$$

$$MN = \frac{S_{ABCD}}{BH} = \frac{225}{15} = 15.$$

Ответ: 15.

$$\begin{aligned} \text{В7. } \frac{\log_{17} 1,5}{\log_{17} 7} + \log_7 \log_2 \sqrt[3]{4} &= \log_7 1,5 + \log_7 \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \log_7 \frac{3}{2} + \log_7 \frac{2}{3} = \\ &= \log_7 1 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

В8. Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что в эти промежутки входят целые точки $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8$ и 9 . Их сумма равна 21.

Ответ: 21.

В9. Так как треугольники, лежащие в основаниях обеих призм подобны с коэффициентом подобия 2, то площадь основания исходной призмы в $2^2 = 4$ раза больше площади основания отсечённой призмы. У обеих призм общая высота, поэтому $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h}{S_2 h} = \frac{S_1}{S_2} = 4$, где V_1 и S_1 — объём и площадь основания исходной призмы, V_2 и S_2 — отсечённой. Из последнего равенства получаем $V_1 = 4V_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

В10. Так как $\frac{v}{c} > 0$, то $1 - \frac{v}{c} < 1$ и $\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} > f_0$. По условию должно вы-

полняться неравенство $\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10$; $\frac{490}{1 - \frac{v}{340}} \geq 500$; $1 - \frac{v}{340} \leq \frac{490}{500}$;

$\frac{v}{340} \geq \frac{1}{50}$; $v \geq 6,8$. Искомая минимальная скорость равна 6,8 м/с.

Ответ: 6,8.

В11. $y' = \frac{5(x+4)^4}{(x+4)^5} - 5 = \frac{5}{x+4} - 5 = \frac{-5x-15}{x+4} = \frac{-5(x+3)}{x+4}$. $y' = 0$ при $x = -3$.

Найдём значения функции на концах отрезка и при $x = -3$:

$$y(-3,5) = \ln(-3,5 + 4)^5 - 5 \cdot (-3,5) = -5 \ln 2 + 17,5;$$

$$y(-3) = \ln(-3 + 4)^5 - 5 \cdot (-3) = 15; y(0) = \ln(0 + 4)^5 - 5 \cdot 0 = 5 \ln 4.$$

Наибольшее значение функции при $x = -3$ и равно 15.

Ответ: 15.

В12. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, тогда $(x + 4)$ км/ч — скорость теплохода по течению, $(x - 4)$ км/ч — скорость теплохода против течения, время в пути составляет 8 часов.

$$\frac{60}{x+4} + \frac{60}{x-4} = 8, x > 4. 60x - 240 + 60x + 240 = 8(x^2 - 16),$$

$$8x^2 - 120x - 128 = 0, x^2 - 15x - 16 = 0; x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2},$$

$x = 16$.

Ответ: 16.

С1. Выпишем ОДЗ: $x > 100$. Обозначим $\log_8(x - 3)$ через t , тогда $t^2 - 5t + 6 = 0$, откуда возможны два случая:

1) $t = 2$, тогда $\log_8(x - 3) = 2$, т.е. $x = 67$ — не входит в ОДЗ;

2) $t = 3$, тогда $\log_8(x - 3) = 3$, т.е. $x = 515$ — является корнем.

Ответ: 515.

С2. Построим чертёж (см. рис. 93).

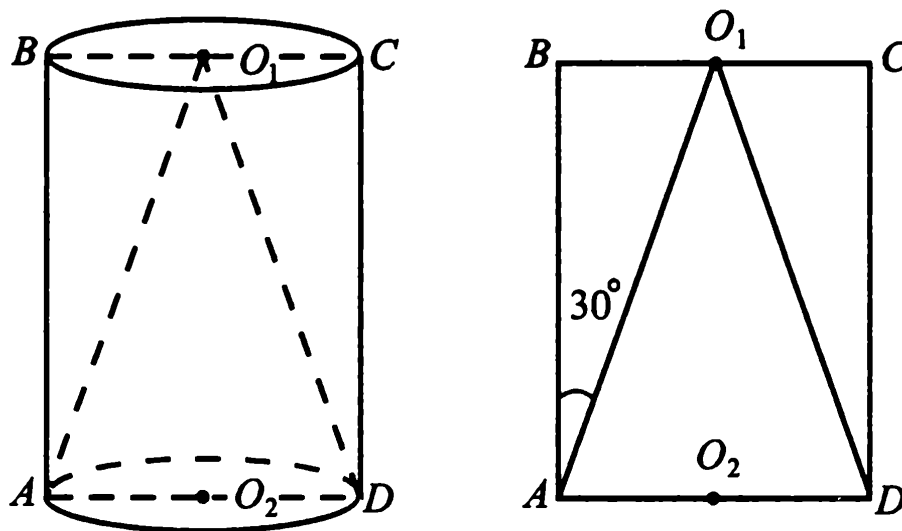


Рис. 93.

Рассмотрим сечение ABC :

$$O_1B = AB \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}}; O_1A = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

$$S = \pi \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} \left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} \right) = 100\pi.$$

Ответ: 100π .

С3. Преобразуем неравенство к виду

$$7^{x^2-2x+1} \cdot 7^{2x} - 7^{2x+1} - 5^x \cdot 7^{x^2-2x+1} + 7 \cdot 5^x \leq 0;$$

$$7^{2x}(7^{(x-1)^2} - 7) - 5^x(7^{(x-1)^2} - 7) \leq 0;$$

$$(7^{2x} - 5^x)(7^{(x-1)^2} - 7) \leq 0.$$

$$\text{Решим уравнение } (7^{2x} - 5^x)(7^{(x-1)^2} - 7) = 0.$$

Найдём нули левой части:

$$1) 7^{2x} - 5^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{49}{5}\right)^x = 1, \text{ откуда } x = 0.$$

$$2) 7^{(x-1)^2} = 7^1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ или } x = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{C5. } & \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y^2 = (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = x-3, \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = 3-x. \end{cases} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждую из этих систем:

$$1) \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = x-3. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(x-3 + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{1}{a^2} + x^2 - 6x + 9 + \frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + \frac{2x}{a} = \frac{1}{a^2},$$

$$2x^2 + \frac{4x}{a} - 6x + \frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + 9 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{2}{a} - 3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{6}{a} + 9\right) = \frac{4}{a^2} - \frac{12}{a} + 9 - \frac{2}{a^2} + \frac{12}{a} - 18 = \frac{2}{a^2} - 9,$$

значит, $D = 0$ при $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$; $D < 0$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$.

$$2) \begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y = 3-x. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(3-x + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{1}{a^2} + 9 + x^2 + \frac{1}{a^2} - 6x - \frac{2x}{a} + \frac{6}{a} = \frac{1}{a^2},$$

$$2x^2 - 6x + \frac{1}{a^2} + \frac{6}{a} + 9 = 0,$$

$$\text{значит, } \frac{D}{4} = 9 - 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{6}{a} + 9\right) = -\frac{2}{a^2} - \frac{12}{a} - 9; \frac{D}{4} = 0 \text{ при } a = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{3},$$

$$D < 0 \text{ при } a \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

3) Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < -\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{-2 + \sqrt{2}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Исходная система имеет решение, когда одна система из совокупности (1) имеет единственное решение, а другая — ни одного.

При $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ вторая система имеет решение, отличное от решений первой, при $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ — не имеет решений.

При $a = \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$ первая система не имеет решений,

при $a = \frac{-2 + \sqrt{2}}{3}$ — имеет, причём отличное от второй системы.

Значит, в результате получим: $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $a = \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$.

С6. Так как $b \neq 1$ и $(b^m - a^m) = (b^n - a^n)b$, то $b^m - a^m$ должно делиться на b , но b^m на b делится, значит, a^m должно делиться на b .

Пусть p — некоторый простой делитель b , тогда p также является делителем a , b представимо в виде $p^k s$, $s \in N$, $s \not\equiv p$, a представимо в виде $p^l r$, $r \in N$, $r \not\equiv p$, $l, k \in N$. Будем считать, что $k \neq l$. Если это не так, то выберем другое p , для которого это верно, такое p найдётся, так как $a \neq b$. Тогда исходное равенство переписывается в виде $(p^{km} s^m - p^{lm} r^m) = p^k s (p^{kn} s^n - p^{ln} r^n)$.

Рассмотрим 2 случая:

1) $k < l$, тогда $p^{km} (s^m - p^{(l-k)m} r^m) = s p^{k+kn} (s^n - p^{(l-k)n} r^n)$, откуда $km = k + kn$ и $m = n + 1$ (так как $s^m - p^{(l-k)m} r^m$ на p не делится, так же, как $s^n - p^{(l-k)n} r^n$), тогда $b^{n+1} - a^{n+1} = b^{n+1} - a^n b$ и $a = b$, что противоречит условию.

2) $k > l$, $p^{lm} (s^m p^{(k-l)m} - r^m) = p^k \cdot s \cdot p^{ln} (s^n p^{(k-l)n} - r^n)$, откуда $lm = k + ln$, левая часть последнего равенства кратна l , значит, и правая тоже, то есть $(k + ln)$ — кратно l , то есть $k = ql$, $q \in N$, тогда $lm = ql + ln$, $m = q + n$ (при этом $q > 1$, так как $k = ql > l$).

Пусть $t \neq p$ — любой другой простой делитель b и a . Вводя для него значения \bar{k} и \bar{l} аналогично тому, как вводились значения k и l для числа p ,

получим, что $\bar{k} \geq \bar{l}$ (действительно, иначе $m = n + 1$, а это противоречит тому, что $m = q + n$, $q > 1$), значит, $b = au$, $u \in N$.

Перепишем исходное равенство в виде

$$1 = \frac{b(b^n - a^n)}{b^m - a^m} = \frac{aua^n(u^n - 1)}{a^m(u^m - 1)} = \frac{a^{n+1}u(u^n - 1)}{a^m(u^m - 1)} =$$

$$= \frac{u^{n+1} - u}{a^{m-n-1}(u^m - 1)} < \frac{u^{n+1} - u}{u^m - 1} < \frac{u^{n+1} - 1}{u^m - 1} < 1, \text{ так как } m > n + 1.$$

Ответ: решений нет.

Решение варианта № 19

В1. Цена была снижена на $600 - 330 = 270$ рублей, что в процентах составляет $\frac{270}{600} \cdot 100 = 45\%$.

Ответ: 45.

В2. По графику видно, что удельная теплоёмкость раствора составляет не более $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ при температуре от 10°C до 80°C . Наибольшей температурой из этого диапазона является 80°C .

Ответ: 80.

В3. По определению арифметического квадратного корня из числа имеем: $-27 - x = 11^2$; $-27 - x = 121$; $-27 - 121 = x$; $x = -148$.

Ответ: -148.

В4. $\frac{CB}{AB} = \cos \angle B$ (см. рис. 96), откуда

$$AB = \frac{CB}{\cos \angle B} = 8 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}. \text{ По теореме Пифагора}$$

$$AC^2 = 80 - 64 = 16, \text{ откуда } AC = 4.$$

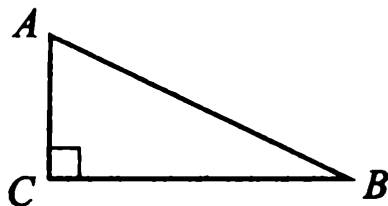


Рис. 96.

Ответ: 4.

В5. Заказ в фирме А обойдётся в $4500 \cdot 90 + 20\,000 = 425\,000$ (руб.), заказ в фирме Б обойдётся в $4700 \cdot 90 = 423\,000$ (руб.) (доставка бесплатная), заказ в фирме В обойдётся в $4600 \cdot 90 + 10\,000 = 424\,000$ (руб.).

Наименьшая стоимость составит 423 000 рублей.

Ответ: 423 000.

В6. $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $AB = CD = 3$ (см. рис. 97).

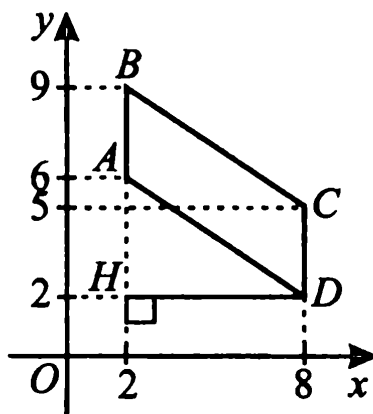


Рис. 97.

Тогда $S_{ABCD} = DH \cdot AB = 6 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

$$\begin{aligned} \text{В7. } \frac{\left(4^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{21}}{10^8} &= \frac{\left(4^{\frac{2}{7}}\right)^{21} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{21}}{10^8} = \frac{4^6 \cdot 5^7}{10^8} = \frac{2^{12} \cdot 5^7}{(2 \cdot 5)^8} = \frac{2^{12} \cdot 5^7}{2^8 \cdot 5^8} = \\ &= \frac{2^4}{5} = \frac{16}{5} = 3,2. \end{aligned}$$

Ответ: 3,2.

В8. Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков $[-7; -4]$ имеет длину 3.

Ответ: 3.

В9. Из условия следует, что отрезок SH является высотой пирамиды и равен 3. Так как SH — высота, то угол SHC прямой. Так как

$\operatorname{ctg} \angle SDH = \frac{DH}{SH}$, то $DH = SH \cdot \operatorname{ctg} \angle SDH = 3 \operatorname{ctg} 30^\circ = 3\sqrt{3}$. Площадь квадрата в основании пирамиды равна $S = DC^2 = (2DH)^2 =$
 $= (2 \cdot 3\sqrt{3})^2 = 108$. Объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 108.

В10. На высоте не менее семи метров мяч будет находиться при всех t , для которых $h(t) \geq 7$; $-5t^2 + 13t + 1 \geq 7$; $-5t^2 + 13t - 6 \geq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = 0,6$ и $t_2 = 2$. Решением неравенства является отрезок $[0,6; 2]$. Искомый промежуток времени равен $2 - 0,6 = 1,4$ (с).

Ответ: 1,4.

В11.1) $y' = -(e^{x+27}) + e^{x+27}(27-x) = e^{x+27}(-1+27-x) = (26-x)e^{x+27}$.

2) $y' = 0$ при $x = 26$.

3) При переходе через точку $x = 26$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус», значит, $x = 26$ — точка максимума исходной функции.

Ответ: 26.

В12. Пусть x вопросов в работе, тогда $\frac{x}{12}$ ч — время исполнения всей контрольной работы Вaley, а $\frac{x}{15}$ ч — время исполнения всей контрольной работы Светой.

Составляем уравнение: $\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = \frac{1}{4}$, ($\frac{1}{4}$ ч = 15 мин).

$5x - 4x = 15$, $x = 15$.

Ответ: 15.

С1. ОДЗ: $\cos x > 0$.

Сделаем замену $\sin x = t$, тогда $1 - 5t + 2(1 - t^2) = 0$, $2t^2 + 5t - 3 = 0$, $t_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$, $t_1 = -3$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

а) $\sin x = -3$ — решений нет;

б) $\sin x = \frac{1}{2}$ (см. рис. 98),

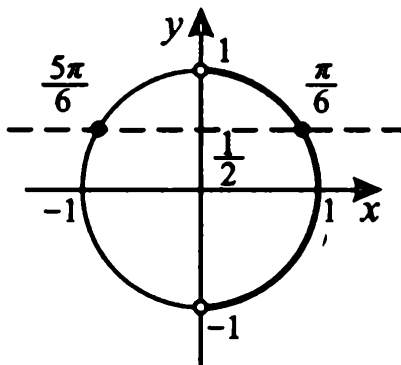


Рис. 98.

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ОДЗ удовлетворяет только $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

С2. Пусть AB — образующая, BK — перпендикуляр к плоскости большего основания, тогда AK — проекция AB на плоскость большего основания и $\angle BAK$ — искомый (см. рис. 99).

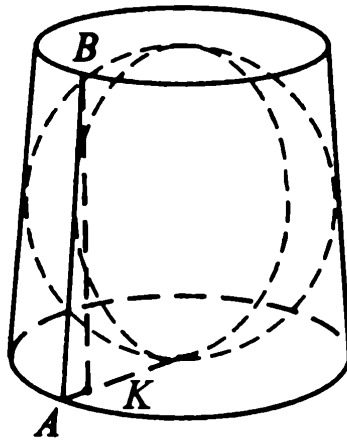


Рис. 99.

Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ усечённого конуса (см. рис. 100), им будет равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 2R$ и $BC = 2r$.

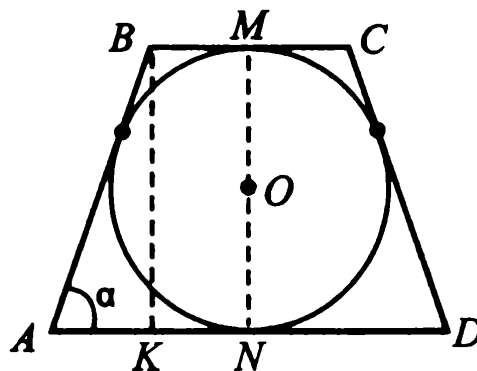


Рис. 100.

Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию, тогда высоты трапеции BK и MN будут равны диаметру этой окружности.

Так как площади основания относятся как 1 : 4, то $\pi R^2 = 4\pi r^2$, или $R = 2r$. По свойству касательных $AB = BM + AN$, $AB = r + R = 3r$, $AK = AN - KN = R - r = r$. Тогда из $\triangle ABK$:

$$\cos \alpha = \frac{AK}{BA} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}, \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

$$\text{СЗ. ОДЗ: } \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ \frac{x+1}{x-1} > 0, \\ \frac{x+1}{x-1} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2 \frac{x+1}{x-1}} > 0, t = \log_2 \frac{x-1}{x+1},$$

$$t - \frac{1}{t} > 0, \frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0 \text{ (см. рис. 101).}$$

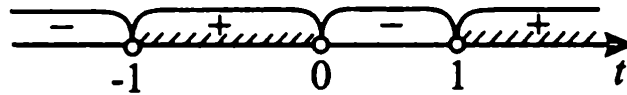


Рис. 101.

$$\begin{aligned} \left[\begin{cases} t > -1, \\ t < 0, \\ t > 1; \end{cases} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \log_2 \frac{x-1}{x+1} > -1, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 0, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} > 1; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > \frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1} < 1, \\ \frac{x-1}{x+1} > 2; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \frac{x-3}{x+1} > 0, \\ \frac{-2}{x+1} < 0, \\ \frac{-x-3}{x+1} > 0; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(см. рис. 102) (см. рис. 103)

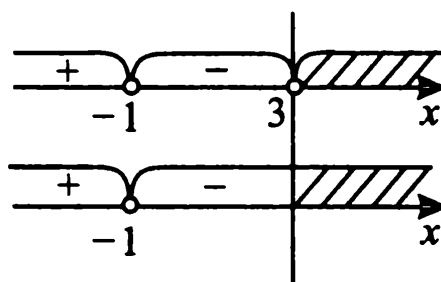


Рис. 102.

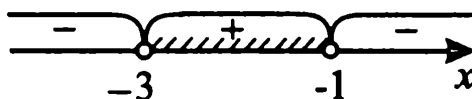


Рис. 103.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ -3 < x < -1. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ: $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

С4. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 (см. рис. 104, 105).

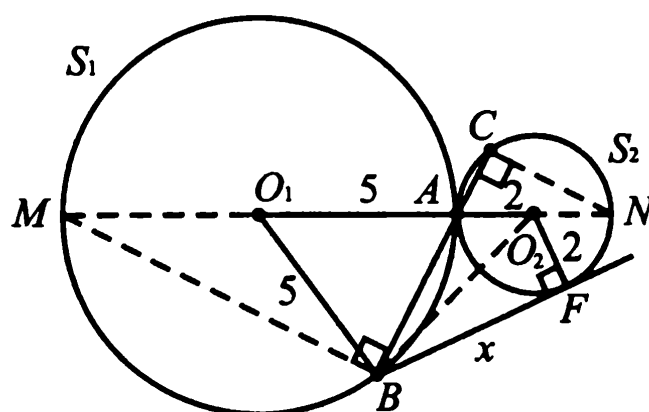


Рис. 104.

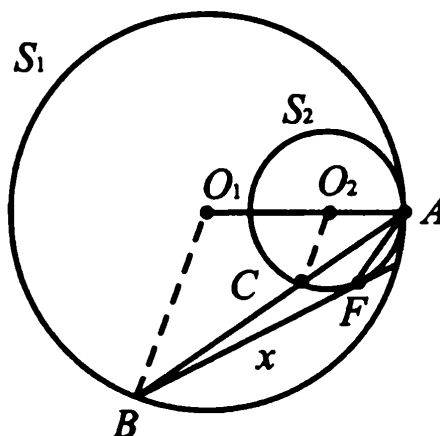


Рис. 105.

Обозначим: C — вторая точка пересечения прямой AB с окружностью S_2 , $BF = x$ — искомая длина отрезка касательной. Имеем: $x^2 = AB \cdot BC$. Кроме того, $\triangle ABM \sim \triangle ACN$ ($\angle ABM = \angle ACN = 90^\circ$ как вписанные, опирающиеся на диаметр, $\angle BAM = \angle CAN$ как вертикальные).

Из подобия следует $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{2AO_1}{2AO_2} = \frac{AO_1}{AO_2}$; $AC = \frac{AB \cdot AO_2}{AO_1}$;

$$BC = AB + AC = AB + \frac{AB \cdot AO_2}{AO_1} = \frac{AB(AO_1 + AO_2)}{AO_1} = \frac{AB \cdot O_1O_2}{AO_1}.$$

Итак, $x^2 = AB \cdot BC = AB^2 \cdot \frac{O_1O_2}{R} = AB^2 \cdot \frac{R \pm r}{R} = 9 \cdot \frac{5 \pm 2}{5}$, где R и r — радиусы окружностей S_1 и S_2 соответственно.

Замечание. Также задачу можно решить, используя теорему косинусов для $\triangle O_1AB$, затем для $\triangle O_1O_2B$, тем самым найти O_2B . Далее, по теореме Пифагора, найти искомую длину.

Ответ: $3\sqrt{\frac{3}{5}}$ или $3\sqrt{\frac{7}{5}}$.

$$C5. \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 4(1 - m(x + 2)) = x^2 + 8x + 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ 4 - 4mx - 8m = x^2 + 8x + 16; \end{cases}$$

$$x^2 + x(8 + 4m) + 8m + 12 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = (4 + 2m)^2 - 8m - 12 = 4(m + 1)^2.$$

При $m = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = -2$, что удовлетворяет условию $x \geq -4$.

При $m \neq -1$, $x_{1,2} = -2m - 4 \pm \sqrt{4(m + 1)^2}$; $x_1 = -2$, $x_2 = -4m - 6$.

Чтобы исходное уравнение имело один корень, необходимо выполнение условия $x_2 < -4$, следовательно, $m > -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\{-1\} \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C6. Перепишем уравнение: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, откуда $x^2 - 4 = 5u$, $10 - y^2 = 6v$, $\Rightarrow u = v$ ($u, v \in \mathbb{Z}$).

Итак, $x^2 = 5u + 4$, $5u + 4 \geq 0$, $\Rightarrow u \geq -\frac{4}{5}$. Аналогично $10 - y^2 = 6u$,

$$10 - 6u \geq 0, \Rightarrow u \leq \frac{5}{3}.$$

Итак, целое число u удовлетворяет условию $-\frac{4}{5} \leq u \leq \frac{5}{3} \Rightarrow u = 0$ или $u = 1$. При $u = v = 0 \Rightarrow 10 = y^2$, где y — целое, что неверно. При $u = v = 1 \Rightarrow x^2 = 9, y^2 = 4$.

Ответ: $(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)$.

Решение варианта № 20

В1. Конечная цена холодильника составляет 112%, то есть $\frac{112}{100}$ от первоначальной. Поэтому начальная цена была $14\,000 \cdot \frac{100}{112} = 12\,500$ рублей.

Ответ: 12 500.

В2. 8-го августа наибольшая температура была 30°C , а наименьшая — 5°C . Разность составляет $30 - 5 = 25^\circ\text{C}$.

Ответ: 25.

В3. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 15} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1;$$

$x_1 = 5, x_2 = 3; 3 < 5$ (в ответе указываем меньший корень).

$x = 3$.

Ответ: 3.

В4. $\angle ACB = \angle CAB$ (см. рис. 106). По теореме Пифагора

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 64 - 28 = 36, AH = 6, \cos \angle CAB = \frac{AH}{AC} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

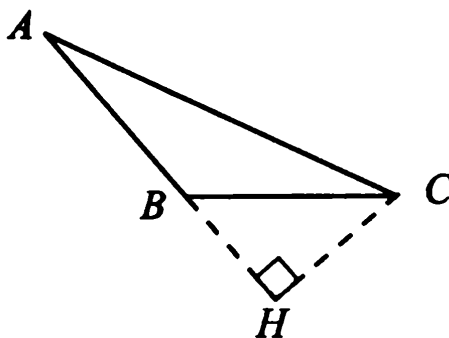


Рис. 106.

Ответ: 0,75.

В5. Сумма вклада в банке А составит $(20\,000 - 150) \cdot 1,04 = 20\,644$ (руб.),
 в банке Б: $20\,000 \cdot 1,02 = 20\,400$ (руб.),
 а в банке В: $(20\,000 - 12 \cdot 10) \cdot 1,03 = 20\,476,4$ (руб.),
 то есть в банке А вклад окажется наибольшим и составит 20 644 рубля.
Ответ: 20 644.

В6. По теореме Пифагора сторона квадрата AB равна $\sqrt{AK^2 + KB^2}$ (см. рис. 107), то есть $AB = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$, откуда $S_{ABCD} = AB^2 = 29$.

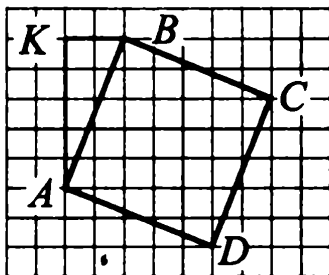


Рис. 107.

Ответ: 29.

$$\text{В7. } \frac{\sqrt[2]{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27} \sqrt[4]{a}}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\frac{1}{3} \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \frac{3 \cdot \sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a}} = 3.$$

Ответ: 3.

В8. Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков $[-7; -2]$ имеет длину 5.

Ответ: 5.

В9. Примем за основание пирамиды треугольник ABS (см. рис. 108), тогда высота пирамиды $h = CS$. Площадь прямоугольного треугольника ABS равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18. \text{ Объем пирамиды равен}$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36.$$

Ответ: 36.

В10. По условию прибор выходит из строя при $1251 + 150t - 16t^2 > 1580$; $16t^2 - 150t + 329 < 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = 3,5$ и $t_2 = 5,875$. Температура превысит критическую на интервале времени $(3,5; 5,875)$ мин. Отключить прибор следует через 3,5 мин.

Ответ: 3,5.

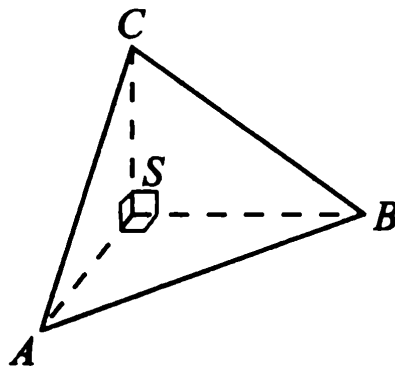


Рис. 108.

В11. 1) $y' = e^{x-5} + (x+9)e^{x-5} = e^{x-5}(1+x+9) = e^{x-5}(10+x).$

2) $y' = 0, (10+x)e^{x-5} = 0, 10+x = 0, x = -10.$

3) При переходе через точку $x = -10$ производная функции меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, $x = -10$ — точка минимума.

Ответ: $-10.$

В12. Первая фирма — 30 млн рублей, Вторая фирма (по условию) — 22,5 млн руб, Третья фирма 45 млн рублей. Итого: 97,5 млн рублей.

Оставшаяся часть составляет 35% уставного капитала, таким образом, сумма от общей прибыли причитающейся для четвертой фирмы составляет $100(\text{млн}) \cdot 0,35 = 35(\text{млн}).$

Ответ: 35.

С1. ОДЗ: $\sin x > 0.$

Сделаем замену $\cos x = t$, тогда $4 - 5t - 2(1 - t^2) = 0, 2t^2 - 5t + 2 = 0,$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2.$$

а) $\cos x = \frac{1}{2}$ (см. рис. 109), $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$ ОДЗ удовлетворяет

только $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

б) $\cos x = 2$ — решений нет.

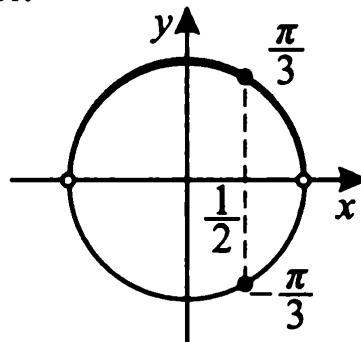


Рис. 109.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

С2. Пусть высота боковой грани — CD (C и D — середины соответствующих сторон оснований), CK — перпендикуляр к большему основанию, тогда DK — проекция CD на большее основание, $\Rightarrow \angle CDK$ — искомый (см. рис. 110).

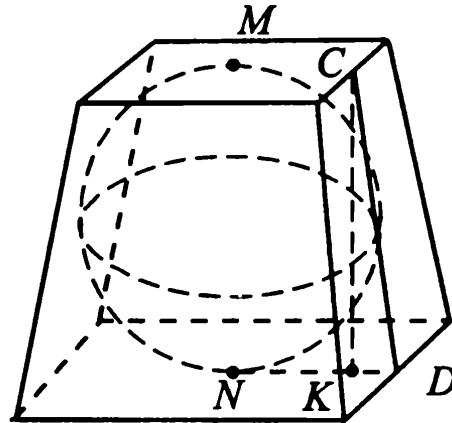


Рис. 110.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью $MCDN$ (см. рис. 111), оно является равнобедренной трапецией с основаниями $AD = 2b$ и $BC = 2a$. Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию, высота трапеции равна диаметру этой окружности.

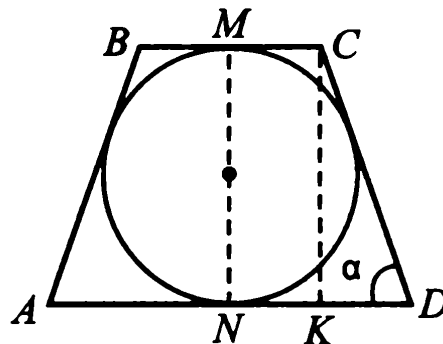


Рис. 111.

Так как основания пирамиды — квадраты и площадь большего основания в 9 раз больше площади меньшего, то $(2b)^2 = 9(2a)^2$ или $b = 3a$. По свойству касательных $CD = CM + DN$, $CD = a + 3a = 4a$. $DK = DN - NK = 3a - a = 2a$. Тогда из $\triangle CKD$:

$$\cos \alpha = \frac{KD}{CD} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{СЗ. ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \frac{x-3}{x+3} > 0, \Leftrightarrow x > 3. \\ \frac{x-3}{x+3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\log_{0,5} \frac{x-3}{x+3} + \log_{\frac{x-3}{x+3}} 2 > 0,$$

$$-\log_2 \frac{x-3}{x+3} + \frac{1}{\log_2 \frac{x-3}{x+3}} > 0,$$

$$\log_2 \frac{x-3}{x+3} = t,$$

$$-t + \frac{1}{t} > 0, t - \frac{1}{t} < 0, \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0 \text{ (см. рис. 112),}$$

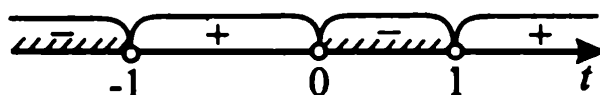


Рис. 112.

$$\begin{cases} t < -1, \\ 0 < t < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{x-3}{x+3} < -1, \\ 0 < \log_2 \frac{x-3}{x+3} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x+3} < \frac{1}{2}, \\ 1 < \frac{x-3}{x+3} < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-9}{x+3} < 0, \\ \begin{cases} \frac{-6}{x+3} > 0, \\ \frac{-x-9}{x+3} < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решим полученную совокупность методом интервалов (см. рис. 113, 114).

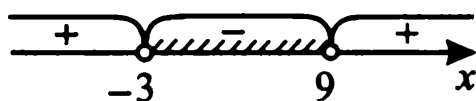


Рис. 113.

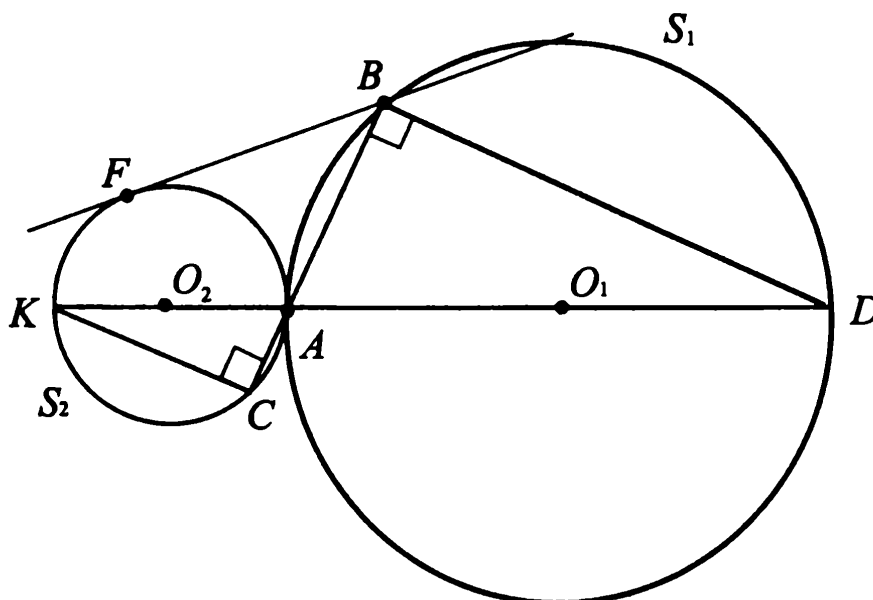


Рис. 116.

$$2) BC = AB + AC = 10x, 7x \cdot 10x = 16, x^2 = \frac{16}{70}, x = \frac{4}{\sqrt{70}};$$

$$AB = 7x = \frac{4 \cdot 7}{\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{7} \text{ или } \frac{2\sqrt{70}}{5}.$$

С5. Обозначим $y = \sqrt{2x+p} \geq 0$, тогда $x = \frac{y^2 - p}{2}$. Уравнение примет вид $3y^2 - 6y + 2 = 3p$.

Построим графики $z = 3y^2 - 6y + 2, y \geq 0$ и $z = 3p$ (см. рис. 117).

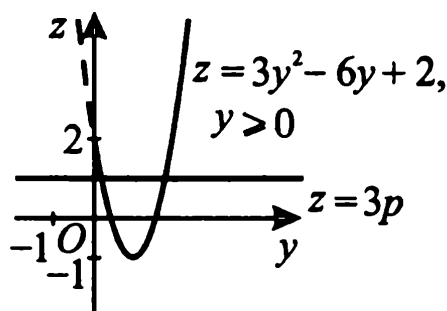


Рис. 117.

Находим ординату вершины параболы: $z_0 = -1$. Очевидно, искомые p должны удовлетворять условию $-1 < 3p \leq 2$, откуда $-\frac{1}{3} < p \leq \frac{2}{3}$.

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

С6. Так как для любых целых чисел a и b $a^2 + b^2 \div 3 \Leftrightarrow a \div 3$ и $b \div 3$ и $19 \nmid 3$ и $28 \nmid 3$, то из исходного уравнения следует, что $x \div 3$ и $y \div 3$, то есть $x = 3u$, $y = 3v$ ($u, v \in \mathbb{Z}$). Сделав соответствующие замены, получаем из исходного уравнения уравнение $19u^2 + 28v^2 = 81$. Повторяя рассуждения, получаем уравнение $19t^2 + 28s^2 = 9$ ($u = 3t$, $v = 3s$, $s, t \in \mathbb{Z}$), которое очевидно не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

Решение варианта № 21

В1. После удержания налога у студента останется $100\% - 13\% = 87\%$ гонорара, то есть $1200 \cdot \frac{87}{100} = 1044$ рубля. Так как $\frac{1044}{50} = 20,88$, то искомое наибольшее нечётное число тюльпанов равно 19.

Ответ: 19.

В2. 4 и более миллиметров осадков выпало 16, 20 и 22 марта, всего 3 дня.

Ответ: 3.

В3. Воспользуемся формулой $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

С помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций находим $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, тогда $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Разделим каждый член уравнения на π :

$$\frac{x+4}{3} = \pm \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

Умножим каждый член уравнения на 3, а потом вычтем из обеих частей уравнения 4, получим:

$$x + 4 = \pm 1 + 6k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm 1 - 4 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения получаем при $k = 0$.

Это корень $x = 1 - 4 + 6 \cdot 0 = -3$.

Ответ: -3.

В4. $AH_1 = H_2D = \frac{AD - BC}{2} = 2\sqrt{7}$ (см. рис. 118). По теореме

Пифагора $BH_1^2 = AB^2 - AH_1^2 = 64 - 28 = 36$, $BH_1 = 6$, откуда

$$\sin A = \frac{BH_1}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

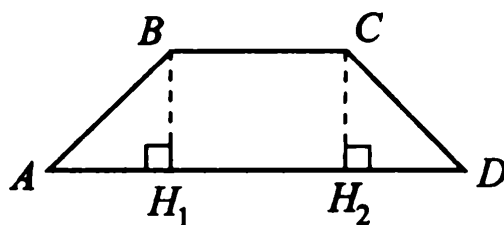


Рис. 118.

- В5.** Скидка первого типа может составить $420 \cdot 0,3 = 126$ (рублей);
 второго типа — $280 \cdot 0,15 = 42$ (рубля);
 третьего типа — $460 \cdot 0,25 = 115$ (рублей).

То есть наиболее выгодной окажется первая скидка, при этом клиент заплатит $420 + 280 + 460 - 126 = 1034$ (рубля).

Ответ: 1034.

- В6.** $S_{ABC} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMA}$ (см. рис. 119).

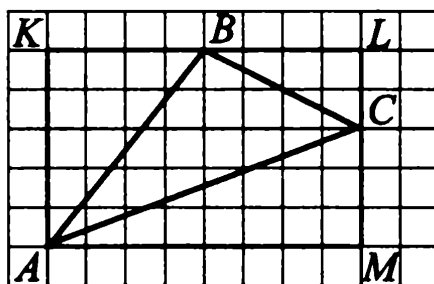


Рис. 119.

$$S_{ABC} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 40 - 10 - 4 - 12 = 14.$$

Ответ: 14.

- В7.** $\log_{\sqrt{a}}(a^2 b^3) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}(a^2 b^3) = 2 \log_a(a^2 b^3) = 2(\log_a a^2 + \log_a b^3) =$
 $= 2(2 + 3 \log_a b) = 4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_b a} = 4 + \frac{6}{1,5} = 8.$

Ответ: 8.

- В8.** Для заданной материальной точки изменение скорости движения определяется через производную пути по времени:

$v(t) = x'(t) = (4t^2 - 34t + 5)' = 8t - 34$. Определим скорость в момент времени $t = 9$ с: $v(9) = 8 \cdot 9 - 34 = 38$.

Ответ: 38.

- В9.** Каждая боковая грань пирамиды является равнобедренным треугольником с основанием 14 и боковыми сторонами, равными 25. Проводя в этом треугольнике высоту (являющуюся одновременно медианой), мы мо-

жем найти её длину по теореме Пифагора: $h^2 = 25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 576$;

$h = 24$. Тогда площадь одной боковой грани равна $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 14 = 168$. Искомая площадь равна $168 \cdot 5 = 840$.

Ответ: 840.

В10. По условию лебёдка может функционировать без проверки рабочим при $\varphi \leq 2400$; $20t + \frac{4t^2}{2} \leq 2400$; $t^2 + 10t - 1200 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $x_1 = -40$ и $x_2 = 30$. Решением неравенства является отрезок $[-40; 30]$. Искомое время равно 30 мин.

Ответ: 30.

В11. 1) Найдём значения функции на концах отрезка: $y(1) = 1 + \frac{16}{1} = 17$;

$$y(8) = 8 + \frac{16}{8} = 10.$$

2) Найдём производную: $y' = 1 - \frac{16}{x^2}$.

3) Найдём стационарные точки: $1 - \frac{16}{x^2} = 0$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$.

4) Значение $x = -4$ не принадлежит указанному в условии отрезку. Значение $x = 4$ отрезку $[1; 8]$ принадлежит.

5) Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:

$$y(4) = 4 + \frac{16}{4} = 8.$$

6) Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Наименьшим является 8.

Ответ: 8.

В12. В 24 кг сплава меди содержится $\frac{24 \cdot 45}{100} = 10,8$ (кг).

Пусть x кг чистого олова надо прибавить к куску сплава. Составим и решим уравнение:

$$\frac{10,8}{24 + x} = \frac{40}{100}; 24 + x = 27, x = 3.$$

Ответ: 3.

$$\text{С1. ОДЗ: } \begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Замена $2\sqrt{x} = t$.

$$t^3 - \frac{7t^2}{2} + \frac{7t}{2} - 1 = 0; \quad 2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0, \quad 2(t^3 - 1) - 7(t^2 - t) = 0,$$

$$2(t-1)(t^2+t+1) - 7t(t-1) = 0; \quad (t-1)(2t^2+2t+2-7t) = 0;$$

$$(t-1)(2t^2-5t+2) = 0; \quad (t-1)(2t-1)(t-2) = 0,$$

$$t_1 = 1 = 2\sqrt{x}, \quad x = 0 \text{ — не удовлетворяет ОДЗ,}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} = 2\sqrt{x}, \quad \sqrt{x} = -1, \text{ решений нет.}$$

$$t \geq 1, \quad t_3 = 2 = 2\sqrt{x}, \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

С2. 1. Пусть $SA = SB = SC = AB = BC = AC = a$.

Тогда $SM = MN = NB = \frac{a}{3}$ (см. рис. 120). По теореме косинусов

$$CM^2 = SC^2 + SM^2 - 2SC \cdot SM \cos 60^\circ = a^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{9};$$

$$CM = CN = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

$$2. HM = HN = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{19}}{6}a.$$

3. Из $\triangle HMN$ по теореме косинусов

$$\cos \angle MHN = \frac{HM^2 + HN^2 - MN^2}{2HM \cdot HN} = \frac{\frac{19}{36} + \frac{19}{36} - \frac{1}{9}}{2 \cdot \frac{19}{36}} = \frac{34}{38} = \frac{17}{19}.$$

$$4. (\widehat{AMC}, \widehat{ANC}) = \arccos \frac{17}{19}.$$

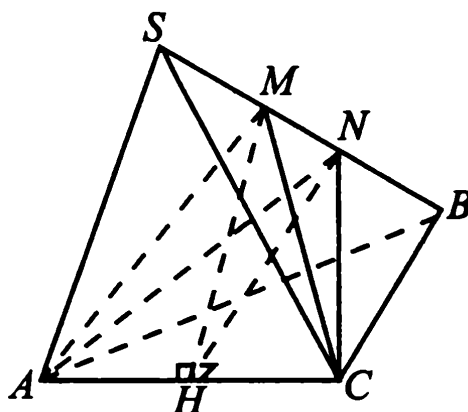


Рис. 120.

Ответ: $\arccos \frac{17}{19}$.

С3. ОДЗ: $|x + 2| - 2 \neq 0$, $|x + 2| \neq 2$, откуда $x \neq 0$ и $x \neq -4$.

$$\frac{4}{|x + 2| - 2} \geq |x| \Leftrightarrow \frac{4 - |x| \cdot (|x + 2| - 2)}{|x + 2| - 2} \geq 0.$$

а) $x > 0$

$$\frac{4 - x \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} \leq 0.$$

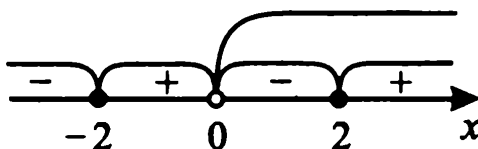


Рис. 121.

$$x \in (0; 2].$$

б) $-2 \leq x < 0$

$$\frac{4 + x \cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{x} \geq 0. \text{ Нет решений при } -2 \leq x < 0.$$

в) $x < -2$

$$\frac{4 + x(-x - 4)}{-x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 4}{x + 4} \geq 0. x \in [-2 - 2\sqrt{2}; -4).$$

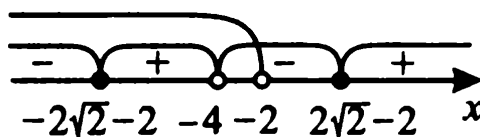


Рис. 122.

Ответ: $[-2 - 2\sqrt{2}; -4) \cup (0, 2]$.

С4. 1. BD и MC — хорды (см. рис. 123). Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$, $MO \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $MO = 1$, $AM = 3$.

2. Найдем ND — радиус окружности, описанной вокруг $\triangle AMD$. По теореме синусов $2ND = \frac{AM}{\sin \angle ADM}$, $ND = \frac{AM}{2 \sin \angle ADM} = 3$.

3. Докажем, что $BD \perp ND$. $MO \cdot OC = MO \cdot OA = OD^2 \Rightarrow OD$ — касательная (OA — секущая). $BN = \sqrt{BD^2 + ND^2} = 5$.

Ответ: 5.

4. Пусть $x_1 = 0$. Тогда $y_1 = 4, 16 = 25a^2, a = \pm \frac{4}{5}$. Пусть $y_1 = 0$. Тогда

$x_1 = 4, 16 = 25a^2, a = \pm \frac{4}{5}$. Каждому решению $(0; y_1)$, где $y_1 > 0$, соответствует 2 решения. Каждому решению $(x_1; 0)$, где $x_1 > 0$, соответствует 2 решения. Проверим, что других решений нет.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 2, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16. \end{cases} \quad \text{Пусть } \sqrt{x_1} = t_1, \sqrt{y_1} = t_2; t_1, t_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1^4 + t_2^4 = 2^4, \end{cases} \quad (t_1 + t_2)^4 = t_1^4 + t_2^4 + 3t_1t_2(t_1 + t_2) = 0, \text{ что возможно}$$

только при $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$. Значит, при $a = \pm \frac{4}{5}$ система имеет 4 решения.

Ответ: $-\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{4}{5}$.

Решение 2.

Выполним замену переменных системы. Пусть $\bar{x} = x + 1, \bar{y} = y + 2$. Таким образом, исходная система уравнений будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда ровно четыре решения будет иметь система уравнений $\begin{cases} \sqrt{|\bar{x}|} + \sqrt{|\bar{y}|} = 2, \\ \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25a^2. \end{cases}$

Далее для удобства вместо \bar{x}, \bar{y} будем писать x и y .

Из первого уравнения системы получаем $|y| = (2 - \sqrt{|x|})^2$. Данное уравнение задаёт две кривые на плоскости: график функции $y = (2 - \sqrt{|x|})^2$, симметричный относительно оси Oy , и симметричный ему относительно оси Ox график функции $y = -(2 - \sqrt{|x|})^2$.

Пусть $f(x) = (2 - \sqrt{x})^2$. $f(0) = 4, f(4) = 0$. $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}, f'(x) = 0$ при $x = 4, f'(x) > 0$ при $x > 4, f(x) < 0$ при $0 < x < 4$. Таким образом, $x = 4$ — точка минимума функции $f(x)$.

$f''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$ при $x > 0$, следовательно, график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз.

Построим на плоскости Oxy множество точек, отвечающих первому уравнению полученной системы (см. рис. 124).

Второе уравнение полученной системы задаёт окружность радиуса $5|a|$ с центром в точке начала координат.

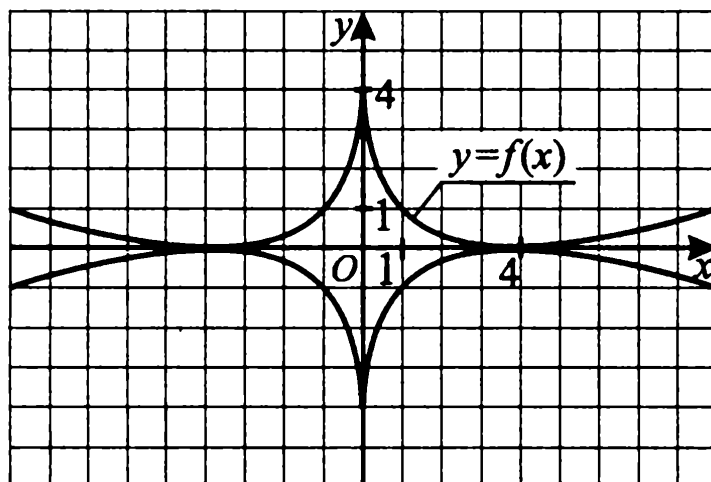


Рис. 124.

Таким образом, система уравнений может иметь ровно четыре решения в двух случаях (см. рис. 125)

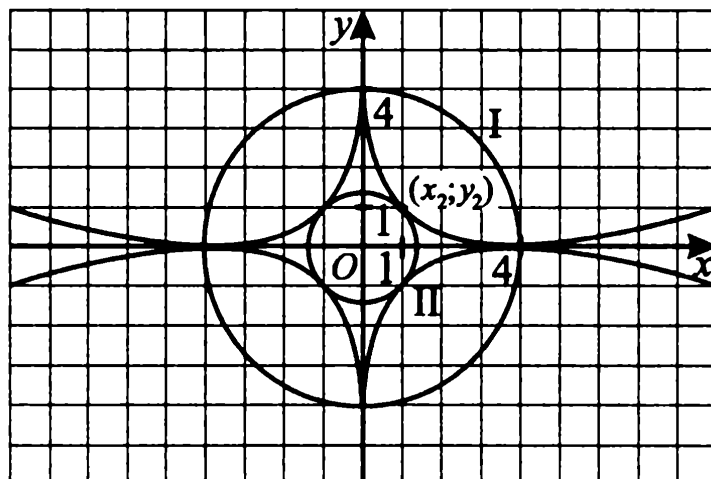


Рис. 125.

В случае I радиус окружности должен быть равен 4, то есть $25a^2 = 16$,
 $a = \pm \frac{4}{5}$.

В случае II окружность и график функции $y = f(x)$ имеют одну общую точку с абсциссой $x \in (0; 4)$ (функция $f(x) = (2 - \sqrt{x})^2$).

Так как и график $y = f(x)$ на интервале $(0; 4)$, и окружность, задаваемая вторым уравнением системы, симметричны относительно прямой $y = x$, абсцисса этой точки x_2 равна ординате y_2 , откуда $x_2 = (2 - \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow x_2 = y_2 = 1$. Следовательно, радиус окружности II равен $\sqrt{2}$, то есть $25a^2 = 2$, $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}$.

С6. 1. Вычислим первые члены последовательности $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 11, a_4 = 102, \dots$ a_1 и a_2 — точные квадраты.

2. Выведем формулу общего члена для a_n . Пусть $u_n = a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Тогда u_n удовлетворяет соотношению

$$u_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = 9a_{n+1} + (n+1) - 9a_n - n = 9(a_{n+1} - a_n) + 1 = 9u_n + 1. \text{ Таким образом, членами } u_n \text{ являются } u_1 = 1, u_2 = 10, u_3 = 91.$$

Заметим, что так как $a_1 = 0$, то $a_2 = a_2 - a_1 = u_1$,

$$a_3 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = u_2 + u_1,$$

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1.$$

Заметим, что разности между соседними членами u_n образуют геометрическую прогрессию. Действительно, пусть $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Тогда $v_n = 9u_n + 1 - 9u_{n-1} - 1 = 9(u_n - u_{n-1}) = 9v_{n-1}$. Таким образом, членами v_n являются $v_1 = 9, v_2 = 81, \dots, v_n = 9^n$. Получаем для u_n :

$$u_1 = 9^0,$$

$$u_2 = 9^0 + 9^1, u_3 = 9^0 + 9^1 + 9^2, \dots, u_n = 9^0 + 9^1 + \dots + 9^{n-1} =$$

$$= \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \frac{9^n - 1}{8}.$$

$$\text{Тогда } a_n = u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{9^1 - 1}{8} + \dots + \frac{9^{n-1} - 1}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}(9^1 + \dots + 9^{n-1} - (n-1)) = \frac{1}{8}\left(9 \cdot \frac{9^{n-1} - 1}{9 - 1} - (n-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{64}(9^n - 8n - 1).$$

3. a_n является точным квадратом $\Leftrightarrow 9^n - 8n - 1$ является точным квадратом. Но при $n > 2$ справедливо неравенство

$(3^n - 1)^2 < 9^n - 8n - 1 < (3^n)^2$, т. к. $2 \cdot 3^n - 1 > 8n + 1$ (что можно доказать, например, графически). Значит, при $n > 2$ точных квадратов среди a_n нет.

Ответ: 0; 1.

Решение варианта № 22

В1. Футболом интересуются $100\% - 70\% = 30\%$ жителей, то есть

$$50\,000 \cdot \frac{30}{100} = 15\,000 \text{ человек. Из них финал смотрели } 60\%, \text{ то есть}$$

$$15\,000 \cdot \frac{60}{100} = 9\,000 \text{ человек.}$$

Ответ: 9000.

В2. По рисунку определяем, что наибольшее количество осадков в указанный период выпало 21 ноября.

Ответ: 21.

В3. $\frac{\pi x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Разделим каждый член уравнения на π .

$$\frac{x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4} + k, k \in \mathbb{Z}.$$

Умножим каждый член уравнения на 4, получим $x = (-1)^{k+1} + 4k, k \in \mathbb{Z}.$ Наименьший положительный корень получим при $k = 1$. Это корень $x = (-1)^2 + 4 \cdot 1 = +1 + 4 = 5.$

Ответ: 5.

В4. $\frac{BC}{AB} = 0,2$ (см. рис. 126), $AB = x$, тогда $BC = 0,2x$. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2$, откуда $216 = x^2 - 0,04x^2 = 0,96x^2$, значит, $x^2 = \frac{216}{0,96} = 225$, откуда $x = 15$, $BC = 0,2x = 3$.

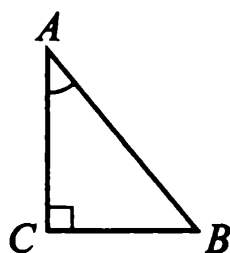


Рис. 126.

Ответ: 3.

В5. Стоимость у поставщика А составит $(1800 \cdot 135 + 17\,000) \cdot 0,85 = 221\,000$ (руб.);
у поставщика Б: $1700 \cdot 135 = 229\,500$ (руб.);
у поставщика В: $(1600 \cdot 135 + 14\,000) = 230\,000$ (руб.).

Самым выгодным будет заказ у поставщика А, он составит 221 000 рублей.

Ответ: 221 000.

В6. $S_{ABCD} = S_{OKLM} - S_{OAD} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMD}$ (см. рис. 127).

$$S_{ABCD} = 11 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 77 - 8 - 35 = 34.$$

Ответ: 34.

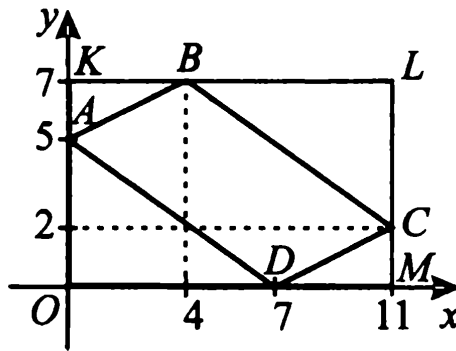


Рис. 127.

$$\begin{aligned}
 \text{В7. } (2 - \log_5 250)(2 + \log_{10} 0,05) &= (2 - \log_5 (25 \cdot 10)) \cdot \left(2 + \log_{10} \frac{5}{100}\right) = \\
 &= (2 - 2 - \log_5 10)(2 + \log_{10} 5 - 2) = -\log_5 10 \cdot \log_{10} 5 = \\
 &= -\log_5 10 \cdot \frac{1}{\log_5 10} = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

В8. Для заданной материальной точки изменение скорости движения определяется через производную пути по времени:

$$v(t) = x'(t) = (0,4t^3 - 2t^2 + t)' = 1,2t^2 - 4t + 1. \text{ Определим скорость в момент времени } t = 5 \text{ с: } v(5) = 1,2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Ответ: 11.

В9. Проведя из центра правильного шестиугольника в основании призмы отрезки ко всем его вершинам, мы разобьём этот шестиугольник на шесть правильных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Площадь всего шестиугольника равна

$$6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}. \text{ Объём правильной призмы получим, умножив площадь основания на длину бокового ребра: } V = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144.$$

Ответ: 144.

В10. Вода закончит вытекать, когда впервые станет верным равенство

$$H(t) = 0; \quad \frac{1}{300}t^2 - \frac{2}{5}t + 9 = 0; \quad t^2 - 120t + 2700 = 0; \quad t_1 = 30, t_2 = 90.$$

Искомое время равно 30 мин.

Ответ: 30.

В11. 1) Найдём значения функции на концах отрезка:

$$y(-3) = -3 - 3 + 16 = 10, \quad y(9) = 1 + 9 + 16 = 26.$$

$$2) \text{ Найдём производную: } y' = -\frac{9}{x^2} + 1.$$

3) Найдём стационарные точки: $y' = 0$, $-\frac{9}{x^2} + 1 = 0$, $\frac{9}{x^2} = 1$, $x^2 = 9$,
 $x = \pm 3$.

4) Найдём значение функции при $x = 3$: $y(3) = 3 + 3 + 16 = 22$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y(9) = 26$.

Ответ: 26.

B12. x км/ч — скорость мотоциклиста, $(x - 20)$ км/ч — скорость велосипедиста, тогда время, затраченное на путь мотоциклистом, — $\frac{105}{x}$ ч,

велосипедистом — $\frac{105}{x - 20}$. Составляем уравнение: $\frac{105}{x - 20} - \frac{105}{x} = 4$,

$105x - 105x + 2100 = 4x^2 - 80x$, $4x^2 - 80x - 2100 = 0$, $x^2 - 20x - 525 = 0$.
 $x > 20$, $x = 10 \pm 25$, $x = 35$.

Ответ: 35.

C1. ОДЗ: $x^2 - x > 0$, $x(x - 1) > 0$, $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Замена
 $3x^2 = t > 1$.

$$t^3 - \frac{13t^2}{3} + \frac{13t}{3} - 1 = 0;$$

$$3t^3 - 13t^2 + 13t - 3 = 0; 3(t^3 - 1) - 13(t^2 - t) = 0;$$

$$3(t - 1)(t^2 + t + 1) - 13t(t - 1) = 0; (t - 1)(3t^2 + 3t + 3 - 13t) = 0;$$

$$(t - 1)(3t^2 - 10t + 3) = 0; (t - 1)(3t - 1)(t - 3) = 0;$$

$t_1 = 1 = 3x^2$, $x = 0$ — не удовлетворяет ОДЗ.

$t_2 = \frac{1}{3} = 3x^2$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

$t_3 = 3 = 3x^2$, $x^2 = 1$, $\begin{cases} x = -1, \\ x = 1 \end{cases}$ — не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: -1.

C2. 1) Пусть $SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = AD = a$,
 $SM = MN = NC = \frac{a}{3}$ (см. рис. 128).

$$DM^2 = SD^2 + SM^2 - 2SD \cdot SM \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9}; DM = DN = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

2) Проведём $MM' \parallel AD$, где $M' \in SB$. $MM' = \frac{a}{3}$.

В трапеции $AM'MD$ проведём высоту MH_1 (см. рис. 129), HG — также высота этой трапеции.

$$H_1D = \frac{AD - MM'}{2} = \frac{a}{3}; HG = MH_1 = \sqrt{DM^2 - H_1D^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Пусть $NN' \parallel AD$, RH и NH_2 — высоты трапеции $AN'DN$.

$$NN' = \frac{2}{3}a \text{ (см. рис. 130); } H_2D = \frac{AD - NN'}{2} = \frac{a}{6};$$

$$RH = NH_2 = \sqrt{DN^2 - DH_2^2} = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{36}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

3) Найдём высоту SL треугольника BCS (см. рис. 131): $SL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$GR = \frac{1}{3}SL = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

4) Из $\triangle GHR$, по теореме косинусов, $\cos \angle GHR = \frac{GH^2 + RH^2 - GR^2}{2GH \cdot RH} =$
 $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $(\widehat{AMD}, \widehat{AND}) = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

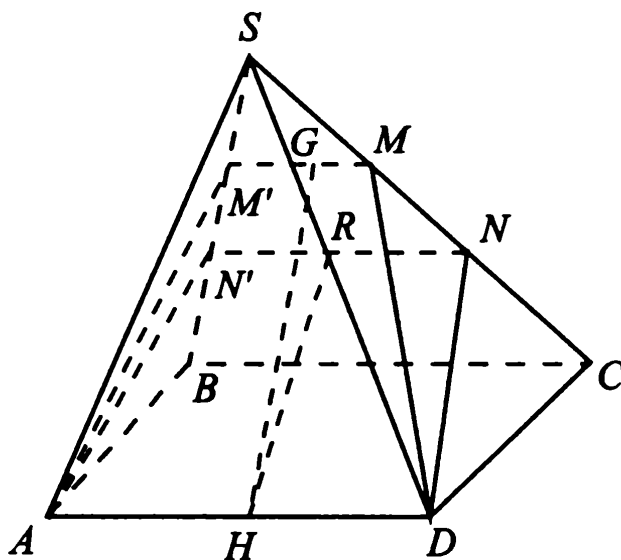


Рис. 128.

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

С3. ОДЗ: $|x+2| - 1 \neq 0$, $|x+2| \neq 1$, откуда $x \neq -1$ и $x \neq -3$.

$$\frac{3}{|x+2| - 1} \geq |x+1| \Leftrightarrow \frac{3 - |x+1| \cdot (|x+2| - 1)}{|x+2| - 1} \geq 0.$$

В зависимости от значений x раскрываем модули в соответствии с определением, откуда имеем три случая.

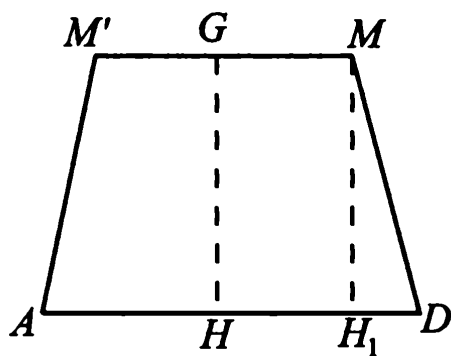


Рис. 129.

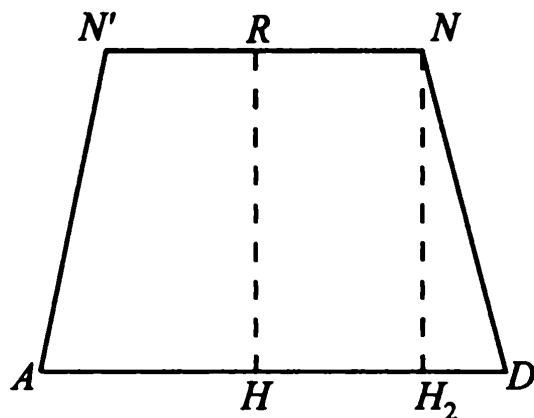


Рис. 130.

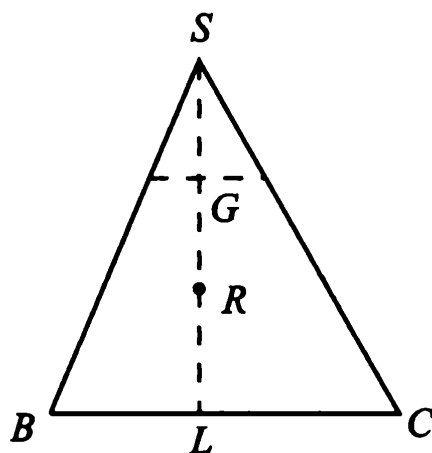


Рис. 131.

а) $x > -1$

$$\frac{3 - (x+1)(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} \leq 0.$$

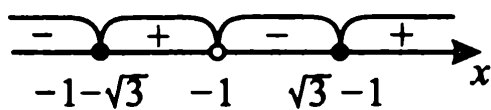


Рис. 132.

 $x \in (-1; \sqrt{3} - 1]$ (см. рис. 132).

б) $-2 \leq x < -1$

$$\frac{3 + (x+1)(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + 3}{x+1} \geq 0. \text{ Нет решений при } -2 \leq x < -1.$$

в) $x < -2$

$$\frac{3 + (x+1)(-x-3)}{-x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+4)}{x+3} \geq 0. x \in [-4; -3) \text{ (см. рис. 133).}$$

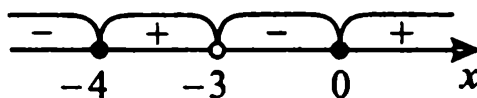


Рис. 133.

Ответ: $[-4; -3) \cup (-1; \sqrt{3} - 1]$.

С4. 1) Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. BD , MC — хорды (рис. 134). $MO \cdot OC = BO \cdot OD$, $MO \cdot 9 = 3 \cdot 3$, $MO = 1$, $AM = 8$.

2) По теореме синусов $2NB = \frac{AM}{\sin \angle ABM}$; $NB = \frac{AM}{2 \sin \angle ABM} = 8 : \frac{2}{3} = 12$.

3) $NB \perp BD$, т. к. $OM \cdot OA = OB^2$, тогда $ND = \sqrt{BD^2 + NB^2} = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

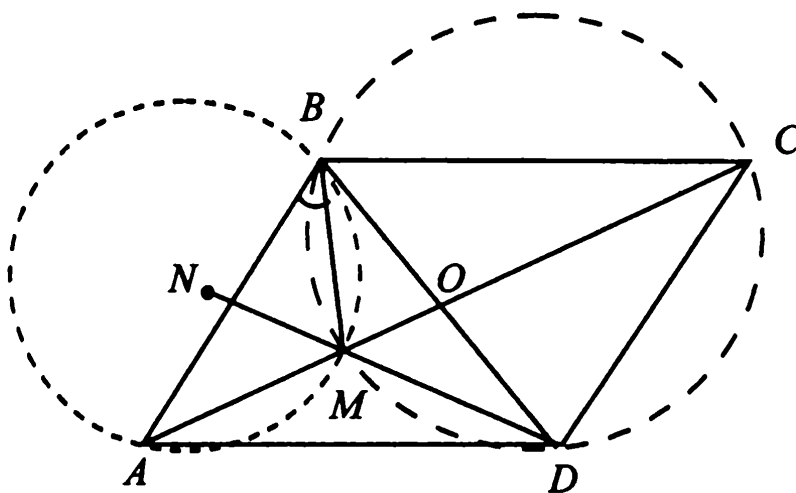


Рис. 134.

Ответ: $6\sqrt{5}$.

C5. 1) $x^2 - 6x + y^2 - 2y = 16a^2 - 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16a^2$.

2) Сделаем замену переменных: $x_1 = |x - 3|$, $y_1 = |y - 1|$.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16a^2. \end{cases}$$

Каждому решению $(x_1; y_1)$: $x_1 > 0, y_1 > 0$ соответствуют 4 решения $(x; y)$.

3) $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16a^2. \end{cases}$

Система может иметь единственное решение $(x_1; y_1)$:

$x_1 > 0, y_1 > 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ (из-за симметрии). Тогда $x_1 = y_1 = 4$, $32 = 16a^2$, $a = \pm\sqrt{2}$. Покажем, что решение $x_1 = y_1 = 4$ — единственное

при данных a (относительно x_1 и y_1), $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 32. \end{cases}$ Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$,

$$\sqrt{y_1} = t_2, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0.$$

$(t_1^4 + (4 - t_1)^4)' = 4t_1^3 - 4(4 - t_1)^3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 - t_1 \Leftrightarrow t_1 = 2$ — точка минимума. При $t_1 = t_2 = 2$ имеем $x_1 = y_1 = 4$, при $t_1 > 2$ имеем $t_1^4 + t_2^4 > 32$.

4) Пусть $x_1 = 0$, тогда $y_1 = 16$, $a = \pm 4$. Пусть $y_1 = 0$, тогда $x_1 = 16$, $a = \pm 4$. Каждому решению $(0; y_1)$ ($y_1 > 0$) соответствуют 2 решения, каждому решению $(x_1; 0)$, ($x_1 > 0$) соответствуют 2 решения.

Проверим, что других решений нет. $\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 4, \\ x_1^2 + y_1^2 = 16 \cdot 16. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x_1} = t_1$, $\sqrt{y_1} = t_2$, $t_1, t_2 \geq 0$, тогда $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4, \\ t_1^4 + t_2^4 = 4^4; \end{cases}$

$(t_1 + t_2)^4 = t_1^4 + t_2^4$. Если раскрыть скобки, то легко увидеть, что это возможно только при $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$ (откуда $x = 0$ или $y = 0$ соответственно). Значит, при $a = \pm 4$ исходная система имеет 4 решения.

Ответ: $\pm\sqrt{2}; \pm 4$.

C6. 1) Вычислим первые члены последовательности: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 27, \dots$ a_1 и a_2 — точные квадраты.

2) Выведем формулу общего члена для a_n . Пусть $u_n = a_{n+1} - a_n$,

$n \geq 1$. Тогда u_n удовлетворяет соотношению

$$u_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_{n+1} + (n+1) - 4a_n - n = 4(a_{n+1} - a_n) + 1 = 4u_n + 1.$$

Таким образом, членами u_n являются $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 21$.

Заметим, что $a_2 = a_2 - a_1 = u_1$, $a_3 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = u_2 + u_1$,

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_2 - a_1) = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1.$$

Покажем, что разности между соседними членами u_n образуют геометрическую прогрессию. Пусть $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Тогда $v_n = 4u_n + 1 - 4u_{n-1} - 1 = 4(u_n - u_{n-1}) = 4v_{n-1}$. Членами v_n являются $v_1 = 4, v_2 = 16, \dots, v_n = 4^n$. Получаем для u_n : $u_1 = 4^0, u_2 = 4^0 + 4^1, u_3 = 4^0 + 4^1 + 4^2, \dots, u_n = 4^0 + 4^1 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_n &= u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{4^0 - 1}{3} + \frac{4^1 - 1}{3} + \dots + \frac{4^{n-1} - 1}{3} = \\ &= \frac{1}{3}(4^1 + \dots + 4^{n-1} - (n - 1)) = \frac{1}{3}\left(4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} - (n - 1)\right) = \\ &= \frac{1}{9}(4^n - 3n - 1). \end{aligned}$$

3) a_n является точным квадратом $\Leftrightarrow 4^n - 3n - 1$ является точным квадратом. Но при $n > 2$ справедливо неравенство $(2^n - 1)^2 < 4^n - 3n - 1 < (2^n)^2$, так как $2 \cdot 2^n - 1 > 3n + 1$ при $n > 2$ (что можно, например, доказать методом математической индукции). Значит, при $n > 2$ точных квадратов среди a_n нет.

Ответ: 0; 1.

Решение варианта № 23

В1. Так как на счёт будет зачислено $100\% - 6\% = 94\%$ от внесённой суммы, то внести нужно не менее $500 \cdot \frac{100}{94} = 531 \frac{86}{94}$ рублей. Так как внесённая сумма должна быть целой и кратной числу 10, то внести нужно минимум 540 рублей.

Ответ: 540.

В2. По рисунку определяем, что наименьшей цена была 24 января.

Ответ: 24.

В3. Используя свойство логарифмов: $b > 0, a > 0, a \neq 1, \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$,

$$p \neq 0, \text{ имеем } \log_2(6 - x) = \frac{1}{2} \log_2 x; \log_2(6 - x) = \log_2 x^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6 - x > 0, & 0 < x < 6; \\ x > 0; & 6 - x = x^{\frac{1}{2}}; \end{cases} (6 - x)^2 = x; 36 - 12x + x^2 = x;$$

$$x^2 - 13x + 36, x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}; x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}; x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2};$$

$$x_1 = 4; x_2 = 9.$$

$$x_2 \notin \text{ОДЗ.}$$

Ответ: 4.

В4. $\sin \alpha = \sin \angle A$ (см. рис. 135). Пусть $\sin \angle A = x$, тогда

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}$, откуда $3x = 4\sqrt{1-x^2}$, $9x^2 = 16(1-x^2)$, $x^2 = \frac{16}{25}$, то есть

$$x = \frac{4}{5} = 0,8.$$

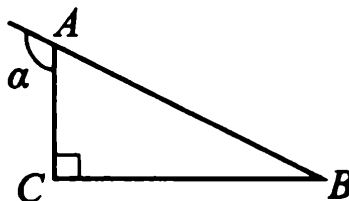


Рис. 135.

Ответ: 0,8.

В5. В случае выбора тарифного плана «Вера» клиент заплатит $2000 + 5 \cdot 100 = 2500$ (рублей);

в случае выбора «Надежды» — $600 + 3 \cdot 700 = 2700$ (рублей);

в случае выбора «Любви» — $50 + 2,5 \cdot 950 = 2425$ (рублей).

Разница между самым дорогим и наиболее выгодным тарифным планом составит $(2700 - 2425)$ рублей = 0,275 тыс. рублей.

Ответ: 0,275.

В6. Нетрудно заметить, что указанный четырёхугольник является квадратом со стороной $AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \sqrt{37}$ (см. рис. 136), откуда его площадь равна $S_{ABCD} = AB^2 = 37$.

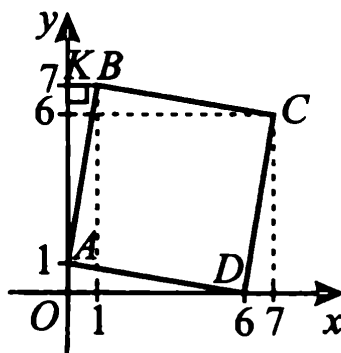


Рис. 136.

Ответ: 37.

В7. $\sqrt{(b-3)^2} + \sqrt{(b-13)^2} = |b-3| + |b-13| = b-3 + (13-b) = 10$.

Ответ: 10.

В8. Согласно условию прямая $y = -7x + 3$ и парабола $y = ax^2 + 3x - 2$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $-7x + 3 = ax^2 + 3x - 2$; $ax^2 + 10x - 5 = 0$. Так как

точка единственная, то дискриминант $D = 10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot a = 0$. Отсюда $a = -5$.

Ответ: -5 .

В9. Обозначим через h общую высоту параллелепипеда и пирамиды, V_1 — объём пирамиды, V_2 — объём параллелепипеда. Тогда искомый

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ACD} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} h = \frac{1}{6} V_2 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$$

Ответ: 5.

В10. По условию $\frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_2} \leq \frac{1}{50} - \frac{1}{250} = \frac{4}{250}$; $d_1 \geq \frac{250}{4}$; $d_1 \geq 62,5$.

Наименьшее значение $d_1 = 62,5$ достигается при $d_2 = 250$.

Ответ: 62,5.

В11. $y' = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$, $x \neq 0$. $y' = 0$ при $x = \pm 4$.

1. $y' > 0$ при $x < -4$ и $x > 4$;

2. $y' < 0$ при $-4 < x < 4$.

Точка $x = -4$ — точка максимума.

Ответ: -4 .

В12. Капитал «Омега-транс» каждый следующий год составлял $100\% + 100\% = 200\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 2 раза больше. Капитал «Елена-плюс» каждый следующий год составлял $100\% + 300\% = 400\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 4 раза больше. Через 5 лет капитал «Омега-транс» равнялся $10\,000 \cdot 2^5 = 320\,000$ (долл.), а капитал «Елена-плюс» через 4 года — $5000 \cdot 4^4 = 1\,280\,000$ (долл.).

$$1\,280\,000 - 320\,000 = 960\,000 \text{ (долл.)}.$$

Ответ: 960 000.

С1. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, перепишем исходное уравнение

в виде $\frac{8 \sin^2 x - 2 \sin x - 1}{\sqrt{3 \cos x + 2\sqrt{2}}} = 0$, то есть $\begin{cases} 8 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0, \\ 3 \cos x + 2\sqrt{2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{4}, \end{array} \right. \\ \cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

Решению совокупности соответствует четыре точки (см. рис. 137).

Точки в I-й и IV-й четвертях удовлетворяют условию $\cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (так как в этих четвертях косинус положителен). Проверим точки во II-й и III-й четвертях. Здесь неравенство $\cos x > -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ равносильно неравенству $\cos^2 x < \frac{8}{9} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x > \frac{1}{9} \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{3}$. Этому условию удовлетворяет точка $\frac{5\pi}{6}$ во II-й четверти, соответствующая решению уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$; точка $-\pi + \arcsin \frac{1}{4}$, соответствующая решению уравнения $\sin x = -\frac{1}{4}$, не удовлетворяет условию $|\sin x| > \frac{1}{3}$.

Окончательным решением является $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$$x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

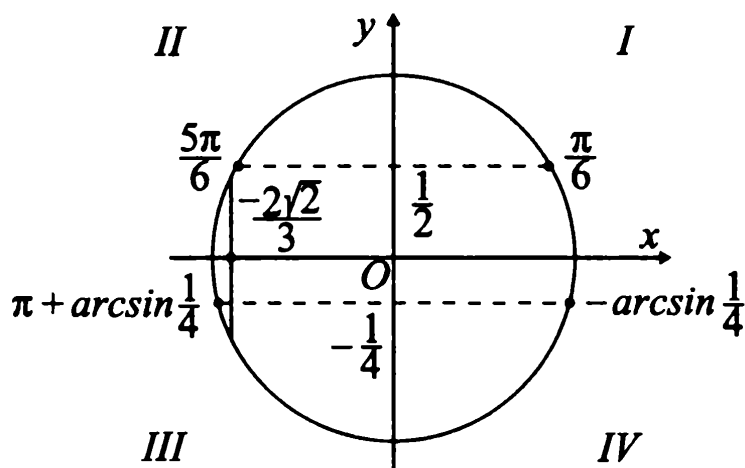


Рис. 137.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. Так как призма правильная, то $B_1F_1 \parallel EC$ (см. рис. 138). Отсюда следует, что прямая, по которой пересекаются плоскости B_1DF_1 и ED_1C , параллельна EC .

Так как $AA_1D_1D \perp EC$, то искомый угол равен углу HMD , где M — точка пересечения плоскости AA_1D_1D и прямой, по которой пересе-

$$\frac{HD}{KD_1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ то } HM = \frac{HD_1}{4} = \frac{5}{4}, DM = \frac{KD}{4} = \frac{3\sqrt{17}}{4}.$$

По теореме косинусов для $\triangle HMD$:

$$HD^2 = HM^2 + MD^2 - 2 \cdot HM \cdot MD \cdot \cos \angle HMD;$$

$$4^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{17}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3\sqrt{17}}{4} \cos \angle HMD;$$

$$256 = 25 + 153 - 30\sqrt{17} \cos \angle HMD; \cos \angle HMD = -\frac{13}{5\sqrt{17}}.$$

Отсюда следует, что $\angle HMD$ тупой. Так как в качестве угла между плоскостями следует брать острый или прямой угол, то в качестве ответа следует записать $\cos(180^\circ - \angle HMD) = \frac{13}{5\sqrt{17}}.$

Ответ: $\frac{13}{5\sqrt{17}}.$

С3. $\frac{1}{4}x^{2+\log_2 x} - 2\log_2^2 x - 4\log_2 x + 4 \leq 0.$

ОДЗ: $x > 0.$

Перепишем неравенство в виде

$$2^{-2} \cdot (2^{\log_2^2 x})^{2+\log_2 x} - 2(\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2) \leq 0;$$

$$2^{\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2} - 2(\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2) \leq 0.$$

Сделаем замену $t = \log_2^2 x + 2\log_2 x - 2$. Тогда $2^t - 2t \leq 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = 2^t - 2t$. Она определена при всех t и $f'(t) = 2^t \ln 2 - 2$;

$$f'(t_0) = 0 \text{ при } t_0 = \log_2 \frac{2}{\ln 2}. f'(t) < 0 \text{ при } t < t_0 \text{ и } f'(t) > 0 \text{ при } t > t_0.$$

Так как $f(1) = f(2) = 0$, то в силу убывания $f(t)$ при $t < t_0$ и возрастания $f(t)$ при $t > t_0$ получаем решение неравенства $2^t - 2t \leq 0$ — это отрезок $t \in [1; 2]$ (см. рис. 140). Отсюда $1 \leq \log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 \leq 2$. Сделаем

замену $\log_2 x = s$. Тогда $1 \leq s^2 + 2s - 2 \leq 2$; $\begin{cases} s^2 + 2s - 3 \geq 0, \\ s^2 + 2s - 4 \leq 0; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty), \\ s \in [-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}]; \end{cases} \Leftrightarrow s \in [-1 - \sqrt{5}; -3] \cup [1; -1 + \sqrt{5}];$$

$$\log_2 x \in [-1 - \sqrt{5}; -3] \cup [1; -1 + \sqrt{5}]; x \in \left[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}\right] \cup [2; 2^{\sqrt{5}-1}].$$

Ответ: $\left[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}\right] \cup [2; 2^{\sqrt{5}-1}].$

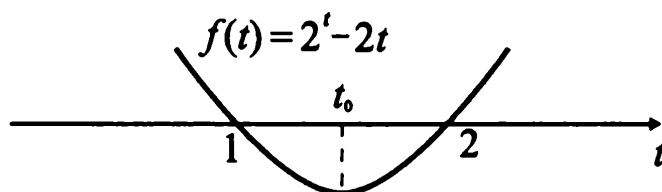


Рис. 140.

С4. Сделаем чертёж (см. рис. 141) и обозначим через x, y, z радиусы соответственно первой, второй и третьей окружностей. Обозначив центры окружностей через K, L и M , перерисуем чертеж (см. рис. 142). Выберем точку P так, чтобы получился прямоугольник $ABLP$, проведем перпендикуляр MH к AB , MC к AP , MD к BL . Тогда $KM = x + z$, $LM = y + z$, $KL = x + y$, $AC = BD = MH = z$, $AK = x$, $BL = y$, $KC = AK - AC = x - z$, $DL = BL - BD = y - z$, $PK = AP - AK = BL - AK = y - x$. По теореме Пифагора для $\triangle KCM$: $CM = \sqrt{KM^2 - KC^2} = \sqrt{(x + z)^2 - (x - z)^2} = 2\sqrt{xz}$; для $\triangle DLM$: $MD = \sqrt{ML^2 - DL^2} = \sqrt{(y + z)^2 - (y - z)^2} = 2\sqrt{yz}$; для $\triangle KLP$: $PL = \sqrt{KL^2 - PK^2} = \sqrt{(x + y)^2 - (y - x)^2} = 2\sqrt{xy}$. Так как $PL = CD = CM + MD$, то $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$;

$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$. Если среди данных в условии числовых значений радиусов есть радиус z , то $z = 64$ (так как он наименьший среди тройки x, y, z)

и неизвестный радиус находится как $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{64}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} =$

$= \frac{5 - 4}{40} = \frac{1}{40}$; $x = 1600$. Если среди данных в условии числовых значе-

ний нет радиуса z , то он находится из $\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt{100}} =$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5 + 4}{40} = \frac{9}{40}$.

$$z = \left(\frac{40}{9}\right)^2 = \frac{1600}{81} = 19\frac{61}{81}.$$

Ответ: 1600 или $19\frac{61}{81}$.

С5. Так как корнями трехчлена во 2-й строке системы являются $x = a$, $x = 3a - 3$, то систему можно переписать в виде

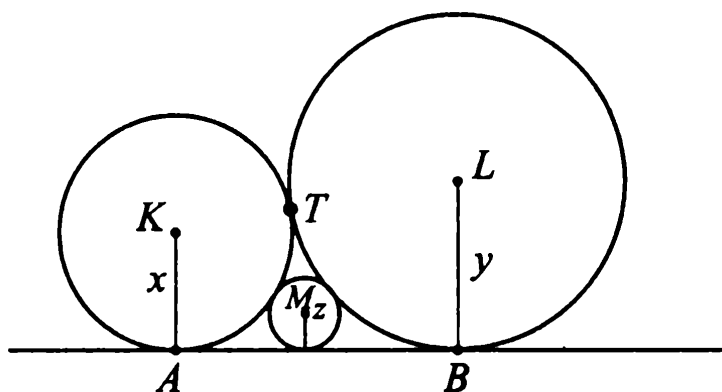


Рис. 141.

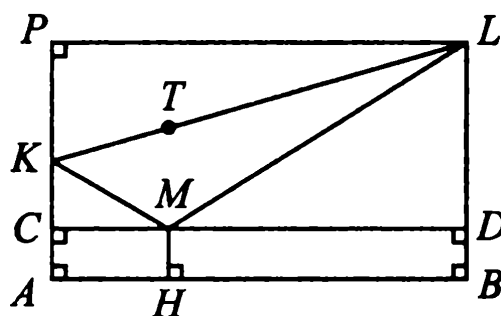


Рис. 142.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 5^2, \\ (x-a)(x-(3a-3)) \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 4. \end{cases}$$

Изобразим соответствующие кривые в системе координат, где по оси абсцисс откладываются значения a , по оси ординат — значения x (см. рис. 143). Первая строка системы задает окружность радиуса 5 с центром в точке $(0; 2)$. Вторая строка системы задает часть плоскости между прямыми $x = 3a - 3$ и $x = a$, а именно внутри углов AEB и CEF . Третья строка системы задает часть плоскости вне квадрата с вершинами $(4; 0)$, $(0; 4)$, $(-4; 0)$, $(0; -4)$. Из построенных графиков ясно, что решениями системы являются точки, соответствующие дугам AB и CD окружности. Найдем соответствующие значения параметра a .

$$\text{Точка } A: \begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, & (3a-5)^2 + a^2 = 25; \\ x = 3a-3; \end{cases}$$

$9a^2 - 30a + 25 + a^2 = 25; 10a^2 - 30a = 0; a(a-3) = 0$. Так как $a > 0$, то $a = 3$.

$$\text{Точки } B \text{ и } C: \begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, & (a-2)^2 + a^2 = 25; a^2 - 4a + 4 + a^2 = 25; \\ x = a; \end{cases}$$

$2a^2 - 4a - 21 = 0$; $a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{46}}{2}$. Для точки C — значение $a = \frac{2 - \sqrt{46}}{2}$,

для точки B — значение $a = \frac{2 + \sqrt{46}}{2}$.

Точка D : $\begin{cases} (x-2)^2 + a^2 = 25, \\ x = -a - 4; \end{cases} \quad (a+6)^2 + a^2 = 25; 2a^2 + 12a + 36 = 25;$

$2a^2 + 12a + 11 = 0$; $a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{2}$. Так как из двух точек пересечения окружности и прямой $x = -a - 4$ нужно выбрать точку с бóльшим значением координаты a , то $a = \frac{-6 + \sqrt{14}}{2}$. Таким образом, система имеет

решение при $a \in \left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{14}}{2} \right] \cup \left[3; \frac{2 + \sqrt{46}}{2} \right]$.

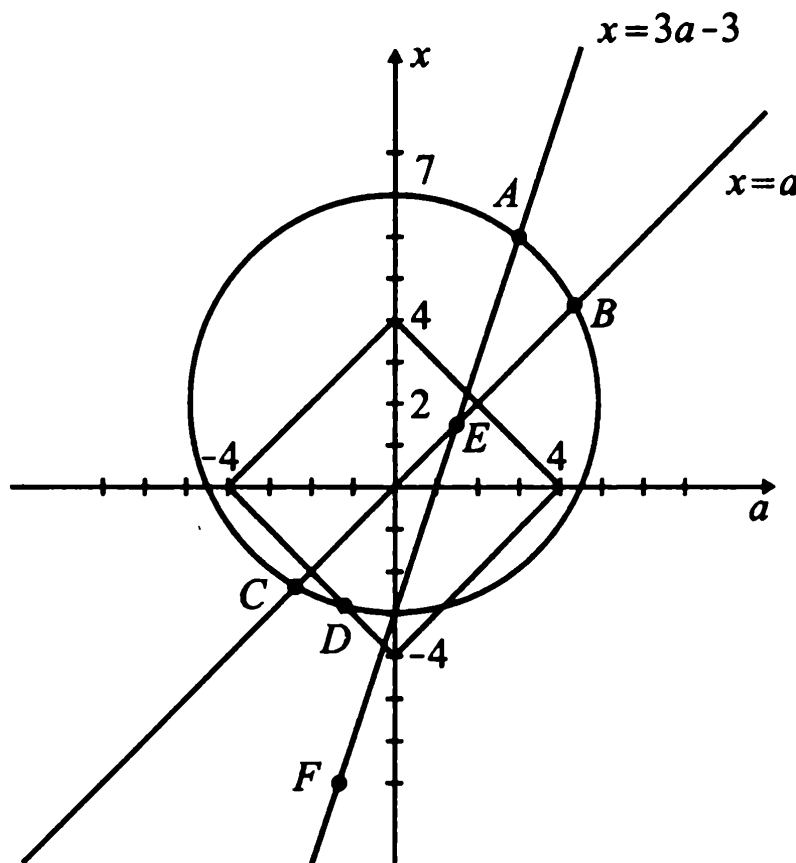


Рис. 143.

Ответ: $\left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{14}}{2} \right] \cup \left[3; \frac{2 + \sqrt{46}}{2} \right]$.

С6. Рассмотрим произвольное простое число p . Пусть p входит в разложение числа n на простые множители a раз, в разложение числа m входит b раз, то есть $n = p^a \cdot q$, где q не делится на p ; $m = p^b \cdot z$, где z не делит-

ся на p . Условия задачи для числа n не выполняются, если найдётся такое m , что m^5 делится n^2 и m^{30} не делится на n^{17} , что в свою очередь выполняется при существовании простого множителя p и числа b таких, что

$$\begin{cases} 5b \geq 2a, \\ 30b < 17a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{2}{5}a, \\ b < \frac{17}{30}a; \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left[\frac{2}{5}a; \frac{17}{30}a \right).$$

Рассмотрим, при каких значениях a возможно существование указанного целого числа b . При $a = 0$ указанного значения b не существует. При $a = 1$ требуется $b \in \left[\frac{2}{5}; \frac{17}{30} \right)$. На этом полуинтервале нет целых чисел, следовательно, такое целое b не существует. При $a = 2$ требуется $b \in \left[\frac{4}{5}; 1\frac{4}{30} \right)$. Отсюда $b = 1$. При $a = 3$ требуется $b \in \left[1\frac{1}{5}; \frac{21}{30} \right)$. Целых чисел здесь нет. При $a = 4$ требуется $b \in \left[1\frac{3}{5}; 2\frac{8}{30} \right)$. Отсюда $b = 2$. При $a = 5$ имеем $b = 2$. При $a \geq 6$ длина полуинтервала равна $a \cdot \left(\frac{17}{30} - \frac{2}{5} \right) = a \cdot \frac{17-12}{30} = a \cdot \frac{1}{6} \geq 1$. Следовательно, на полуинтервале найдётся целое число.

Итак, условие для числа n не выполняется, если в его разложении на простые множители есть множитель p , входящий в разложение $a = 2$ или $a \geq 4$ раз. Подсчитаем количество таких «неподходящих» чисел n , меньших 60. Такие числа n могут иметь один из следующих видов:

- 1) $p = 2, a = 2, n = 2^2 \cdot q$, где q нечетное. Это числа 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52 — всего 7 чисел.
- 2) $p = 2, a = 4, n = 2^4 \cdot q$, где q нечетное. Это числа 16 и 48 — всего 2 числа.
- 3) $p = 2, a = 5, n = 2^5 \cdot q$, где q нечетное. Это единственное число 32.
- 4) $p = 3, a = 2, n = 3^2 \cdot q$, где q не делится 3. Это числа 9, 18, 36, 45. Так как число 36 уже было посчитано в первом пункте, то здесь остаются 3 числа.
- 5) $p = 5, a = 2, n = 5^2 \cdot q$, где q не делится 5. Это числа 25 и 50 — всего 2 числа.

- 6) $p = 7, a = 2, n = 7^2 \cdot q$, где q не делится 7. Это единственное число 49.

Суммируя количества «неподходящих» чисел по всем пунктам, получаем $7 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 = 16$ чисел. Так как всего натуральных чисел, меньших 60, имеется 59, то условию задачи удовлетворяет $59 - 16 = 43$ числа.

Ответ: 43.

Решение варианта № 24

В1. Стоимость одной поездки равна $400 \cdot \frac{2,5}{100} = 10$ рублей. Без проездного Аня потратила бы $10 \cdot 55 = 550$ рублей. Экономия составила $550 - 400 = 150$ рублей.

Ответ: 150.

В2. Цена выше 34-х долларов была в рабочие дни с 11 по 19 января, а также 21 января. Всего получается 8 дней.

Ответ: 8.

В3. Используя свойство логарифмов: $b > 0, a > 0, a \neq 1, \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$,

$p \neq 0$, имеем $\frac{1}{2} \log_5(5+x) = \log_5(2x)$,

$$\log_5(5+x)^{\frac{1}{2}} = \log_5(2x),$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 5+x > 0, \end{cases} \quad x > 0.$$

$$(5+x)^{\frac{1}{2}} = 2x.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5+x = 4x^2; 4x^2 - x - 5 = 0; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 5 \cdot 4}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8};$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{4}.$$

Учитывая ОДЗ, $x = \frac{5}{4}$.

Ответ: 1,25.

В4. $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ (см. рис. 144) $\angle HOB = 15^\circ$;

$$\frac{r}{R} = \cos 15^\circ; \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \cos 15^\circ. R = \frac{r}{\cos 15^\circ} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 6,$$

так как $\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} + \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}.$

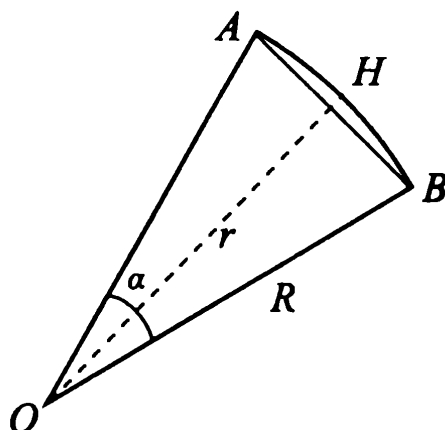


Рис. 144.

Ответ: 6.

В5. Найдём, какой тарифный план выбрал абонент. Стоимость 700 минут разговора при выборе тарифного плана Super составит $60 + 350 = 410$ (рублей), Extra — $320 + 80 = 400$ (рублей), Super Extra — 420 (рублей), то есть он выбрал Extra и заплатил 320 рублей. При тарифном плане Super 500 минут стоили бы $60 + 250 = 310$ (рублей), Super Extra — 420 (рублей). Переплата составила $(320 - 310) = 10$ (рублей).

Ответ: 10.

В6. $S_{ABCD} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{KBC} - S_{CLD} - S_{ADM}$ (см. рис. 145).

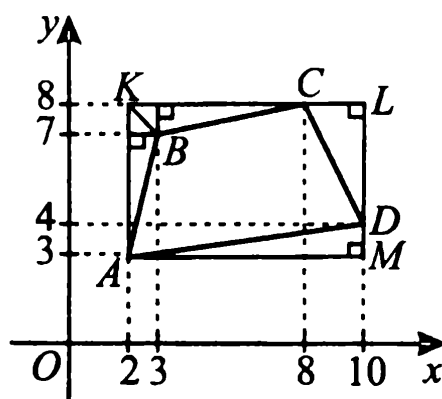


Рис. 145.

$$S_{ABCD} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 26,5.$$

Ответ: 26,5.

$$\begin{aligned} \text{В7. } f(3x+4) &= \sqrt[5]{(3x+4)-8} + \sqrt[5]{3x+4} = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4}; \\ f(4-3x) &= \sqrt[5]{(4-3x)-8} + \sqrt[5]{4-3x} = \sqrt[5]{-3x-4} + \sqrt[5]{4-3x} = \\ &= -\sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4}; \end{aligned}$$

$$\text{тогда } f(3x+4) + f(4-3x) = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4} = 0.$$

Ответ: 0.

В8. Согласно условию прямая $y = -7x + 11$ и парабола $y = 2x^2 - 5x + c$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $-7x + 11 = 2x^2 - 5x + c$; $2x^2 + 2x - 11 + c = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c - 11) = 0$. Отсюда $c = 11,5$.

Ответ: 11,5.

В9. Введём обозначения: S — вершина конуса, SO — высота конуса, OK — радиус основания конуса (см. рис. 146). Тогда

$$SO = \frac{1}{2}SK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ как катет, лежащий против угла } 30^\circ \text{ в пря-}$$

моугольном треугольнике SOK . По теореме Пифагора для этого же треугольника: $OK^2 = SK^2 - SO^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Искомый объём

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OK^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot 75 \cdot 5 = 125\pi. \text{ Искомое значение } \frac{V}{\pi} \text{ равно } 125.$$

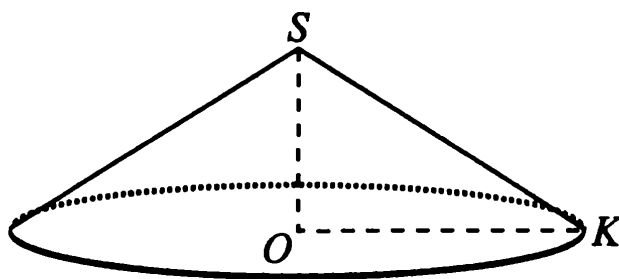


Рис. 146.

Ответ: 125.

$$\text{В10. По условию } \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U} \geq 42; 0,7 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \log_2 \frac{32}{U} \geq 42;$$

$$\log_2 \frac{32}{U} \geq 2; \frac{32}{U} \geq 4; U \leq 8. \text{ Искомое наибольшее напряжение равно } 8 \text{ кВ.}$$

Ответ: 8.

$$\text{В11. } y' = -\frac{9}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 9}{x^2}, x \neq 0. y' = 0, \text{ при } x = \pm 3.$$

$$1. y' < 0 \text{ при } -3 < x < 3;$$

2. $y' > 0$ при $x < -3$ или $x > 3$.

Точка $x = 3$ — точка минимума функции $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Ответ: 3.

В12. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, тогда $(x - 3)$ км/ч — скорость пешехода. Время, затраченное на проезд всего пути велосипедистом, — $\frac{158\frac{2}{3}}{x}$ ч, а время, затраченное пешеходом на прохождение всего

пути, — $\frac{158\frac{2}{3}}{x - 3}$ ч. Разница во времени составляет два часа, то есть имеем

уравнение: $\frac{158\frac{2}{3}}{x - 3} - \frac{158\frac{2}{3}}{x} = 2, x > 3$. Решаем уравнение:

$$158\frac{2}{3} \cdot x - 158\frac{2}{3} \cdot (x - 3) = 2x(x - 3), \frac{476}{3}x - \frac{476}{3}x + \frac{476}{3} \cdot 3 = 2x^2 - 6x,$$

$$2x^2 - 6x - 476 = 0, x^2 - 3x - 238 = 0, x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 238 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm 31}{2},$$

$x_1 = 17, x_2 = -14$ — посторонний корень.

Ответ: 17.

С1. Учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде $\frac{12 \cos^2 x - 4 \cos x - 5}{\sqrt{2 - 3 \sin x}} = 0$, то есть $\begin{cases} 12 \cos^2 x - 4 \cos x - 5, \\ 2 - 3 \sin x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{5}{6}, \end{array} \right. \\ \sin x < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решению совокупности соответствует четыре точки (см. рис. 147).

Так точки в III и IV четвертях удовлетворяют условию $\sin x < \frac{2}{3}$. Про-

верим точки в I и II четвертях. Здесь неравенство $\sin x < \frac{2}{3}$ равносиль-

но неравенству $\sin^2 x < \frac{4}{9} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x < \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 x > \frac{5}{9}$. Для

точки $x = \frac{2\pi}{3}$ имеем: $\cos^2 x = \frac{1}{4} < \frac{5}{9}$. Для точки $x = \arccos \frac{5}{6}$ имеем: $\cos^2 x = \frac{25}{36} > \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$. Поэтому условию $\sin x < \frac{2}{3}$ удовлетворяют три точки (в I, III и IV четверти). Окончательным решением является $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

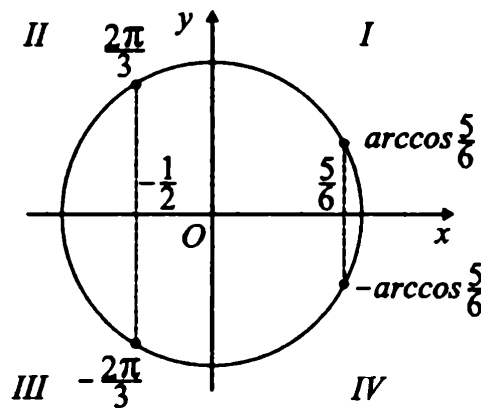


Рис. 147.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. Так как призма правильная, то $B_1F_1 \parallel CE \parallel C_1E_1$ (см. рис. 148). Отсюда следует, что прямая, по которой пересекаются плоскости CEB_1 и AE_1C_1 , параллельна EC .

Так как $AA_1D_1D \perp EC$, то искомым углом равен углу ANM , где N — точка пересечения плоскостей CEB_1 , AE_1C_1 и AA_1D_1D , M — точка пересечения прямых EC и AD .

В равнобедренном $\triangle EDC$ имеем: $\angle EDC = 120^\circ$ как угол правильного шестиугольника, поэтому $\angle DCM = 30^\circ$ и $DM = \frac{DC}{2} = 4$ как катет против угла 30° в прямоугольном $\triangle DCM$.

Аналогично $A_1K = D_1L = 4$. Кроме того, $A_1D_1 = AD = 2AB = 16$ как диагональ правильного шестиугольника, соединяющая противоположные вершины. Отсюда $AM = AD - DM = 12$,
 $KL = A_1D_1 - A_1K - LD_1 = 8$.

Рассмотрим сечение AA_1D_1D (см. рис. 149). По теореме Пифагора для $\triangle AML$: $AL = \sqrt{AM^2 + ML^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; для $\triangle MLK$: $MK = \sqrt{KL^2 + ML^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$. $\triangle ANM \sim \triangle LNK$ ($\angle NAM = \angle NLK$ и $\angle NMA = \angle NKL$ как накрест лежащие). Поэтому

$$\frac{AN}{NL} = \frac{MN}{NK} = \frac{AM}{KL} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \text{ Отсюда } AN = \frac{3}{5}AL = \frac{3}{5} \cdot 13 = \frac{39}{5};$$

$$MN = \frac{3}{5}KM = \frac{3}{5}\sqrt{89}.$$

По теореме косинусов для $\triangle ANM$:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2 \cdot AN \cdot MN \cdot \cos \angle ANM;$$

$$12^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 13^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 89 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 13 \cdot \frac{3}{5}\sqrt{89} \cos \angle ANM;$$

$$400 = 169 + 89 - 26\sqrt{89} \cos \angle ANM; \cos \angle ANM = -\frac{71}{13\sqrt{89}}.$$

Отсюда следует, что $\angle ANM$ тупой. Так как в качестве угла между плоскостями следует брать острый или прямой угол, то в качестве отве-

та следует записать $\cos(180^\circ - \angle ANM) = \frac{71}{13\sqrt{89}}.$

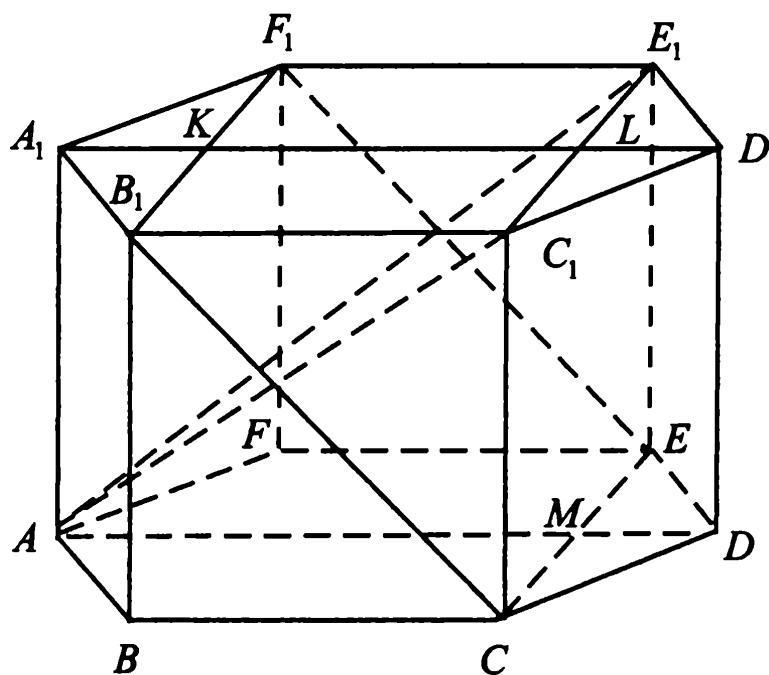


Рис. 148.

Ответ: $\frac{71}{13\sqrt{89}}.$

С3. $\frac{1}{81}x^{3+\log_3 x} - 2\log_3^2 x - 6\log_3 x + 7 \leq 0.$

ОДЗ: $x > 0.$

Перепишем неравенство в виде

$$3^{-4} \cdot (3^{\log_3 x})^{3+\log_3 x} - 2(\log_3^2 x + 3\log_3 x - 4) - 1 \leq 0;$$

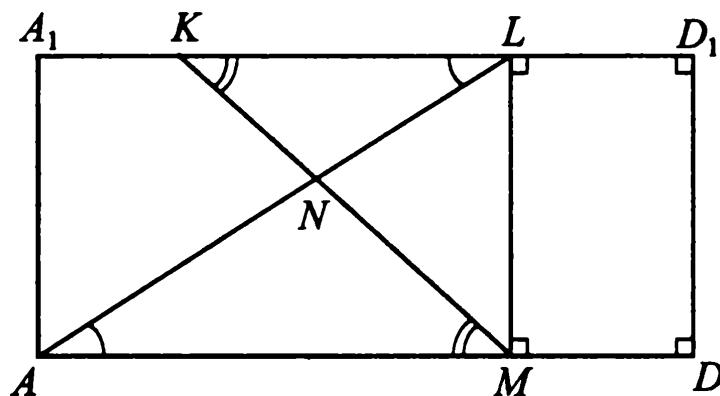


Рис. 149.

$$3^{\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4} - 2(\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4) - 1 \leq 0.$$

Сделаем замену $t = \log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4$. $3^t - 2t - 1 \leq 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = 3^t - 2t - 1$. Она определена при всех t и $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2$;

$$f'(t_0) = 0 \text{ при } t_0 = \log_3 \frac{2}{\ln 3}; f'(t) < 0 \text{ при } t < t_0 \text{ и } f'(t) > 0 \text{ при } t > t_0.$$

Так как $f(0) = f(1) = 0$, то в силу убывания $f(t)$ при $t < t_0$ и возрастания $f(t)$ при $t > t_0$ получаем решение неравенства $3^t - 2t - 1 \leq 0$ — это отрезок $t \in [0; 1]$ (см. рис. 150). Отсюда $0 \leq \log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4 \leq 1$.

Сделаем замену $\log_3 x = s$. Тогда $0 \leq s^2 + 3s - 4 \leq 1$; $\begin{cases} s^2 + 3s - 4 \geq 0, \\ s^2 + 3s - 5 \leq 0; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty), \\ s \in \left[\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s \in \left[\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}; -4 \right] \cup \left[1; \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \right]. \text{ Так как } x = 3^s, \text{ то}$$

$$x \in \left[3^{\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81} \right] \cup \left[3; 3^{\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}} \right].$$

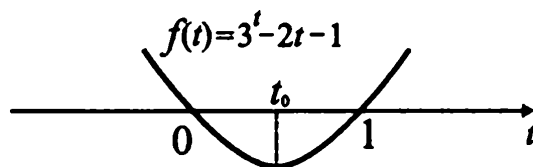


Рис. 150.

Ответ: $\left[3^{\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81} \right] \cup \left[3; 3^{\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}} \right]$.

С4. Обозначим центр меньшей окружности через S , центр большей окружности через O , радиус большей окружности через x , точку касания окружностей через T . Так как KM — диаметр меньшей окружности, то её

радиус $TS = \frac{KM}{2} = 1$. Так как каждый из радиусов OT и ST перпендикулярен общей касательной окружностей, то точки T, S, O лежат на одной прямой и $OS = OT - ST = x - 1$ (см. рис. 151).

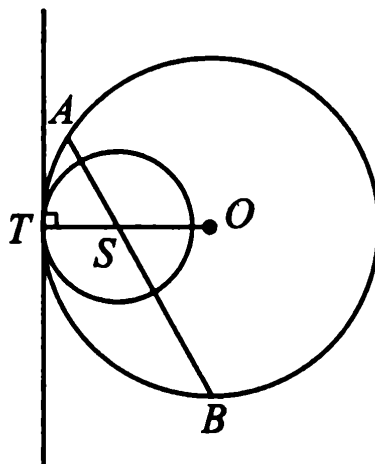


Рис. 151.

Рассмотрим два случая:

1) На прямой AB точки K и M лежат в порядке A, K, M, B (см. рис. 152). Тогда $AB = AK + KM + MB = 3 + 2 + 4 = 9$.

Проведём $OH \perp AB$. Так как $\triangle OAB$ — равнобедренный ($OA = OB = x$), то $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{9}{2}$. По теореме Пифагора для $\triangle OHB$: $OH^2 = OB^2 - HB^2$; $OH^2 = x^2 - \frac{81}{4}$. По теореме Пифагора для $\triangle OHS$: $OS^2 = OH^2 + SH^2$. Так как $SH = SM + MB - BH = 1 + 4 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$, то $(x - 1)^2 = x^2 - \frac{81}{4} + \frac{1}{4}$; $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 20$; $-2x = -21$; $x = 10,5$.

2) На прямой AB точки K и M лежат в порядке A, M, K, B (см. рис. 153). тогда $AB = AK + BM - KM = 3 + 4 - 2 = 5$.

Проведём $OH \perp AB$. Так как $\triangle OAB$ — равнобедренный ($OA = OB = x$), то $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$. По теореме Пифагора для $\triangle OHB$: $OH^2 = OB^2 - HB^2 = x^2 - \frac{25}{4}$. По теореме Пифагора для $\triangle OHS$: $OS^2 = OH^2 + HS^2$. Так как $HS = BM - MS - BH = 4 - 1 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$,

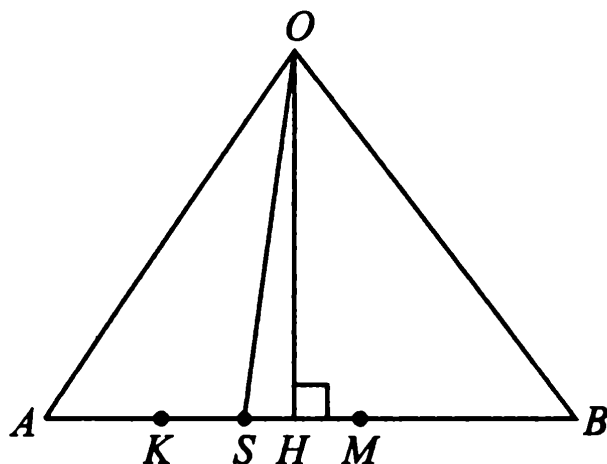


Рис. 152.

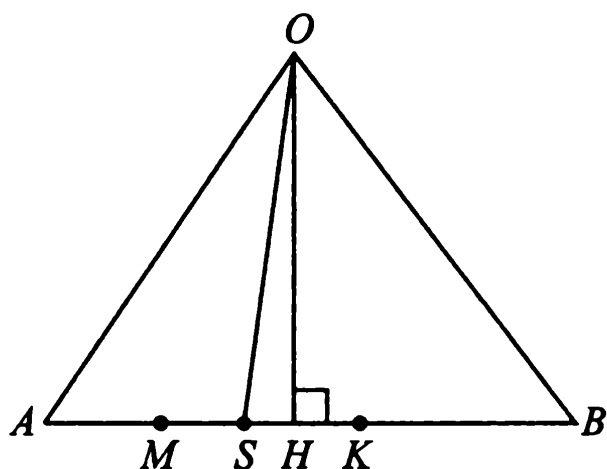


Рис. 153.

то $(x - 1)^2 = x^2 - \frac{25}{4} + \frac{1}{4}$; $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6$; $-2x = -7$; $x = 3,5$.

Ответ: 3,5 или 10,5.

С5. Так как корнями трехчлена во 2-й строке системы являются $x = -\frac{a}{2}$

и $x = -4a + 4$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + a^2 = 49, \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)(x + 4a - 4) \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 6. \end{cases}$$

Изобразим соответствующие кривые в системе координат, где по оси абсцисс откладываются значения a , по оси ординат — значения x (см. рис. 154). Первая строка системы задает окружность радиуса 7 с центром в точке $(0; -3)$. Вторая строка системы задает часть плоскости между прямыми $x = -\frac{a}{2}$ и $x = -4a + 4$, а именно внутри углов AEB и CEF .

Третья строка системы задает часть плоскости вне квадрата с вершинами $(6; 0)$, $(0; 6)$, $(-6; 0)$, $(0; 6)$.

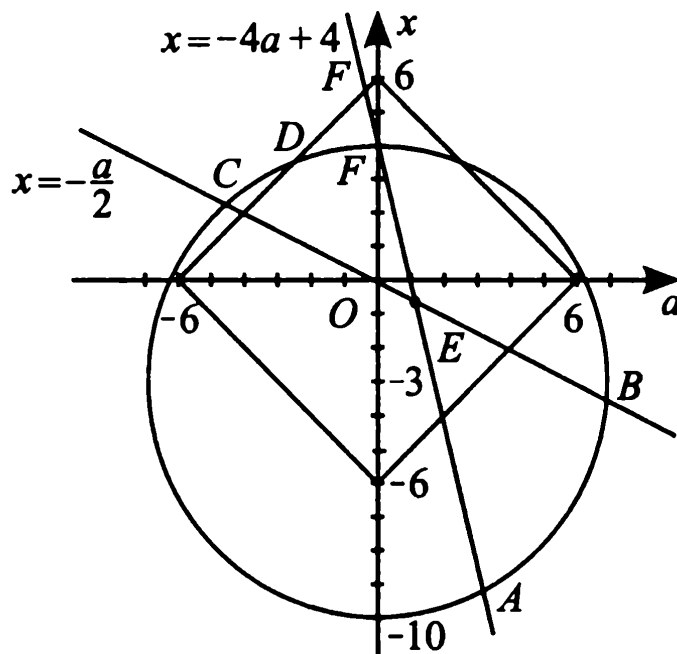


Рис. 154.

Из построенных графиков видно, что решениями системы являются точки, соответствующие дугам AB и CD окружности. Найдем соответствующие значения параметра a .

Точка A :
$$\begin{cases} x = -4a + 4, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad (4a - 7)^2 + a^2 = 49;$$

$$16a^2 - 56a + 49 + a^2 = 49; 17a^2 - 56a = 0; a\left(a - \frac{56}{17}\right) = 0. \text{ Так как } a > 0,$$

то $a = \frac{56}{17}$.

Точки B и C :
$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2}, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + a^2 = 49;$$

$$\frac{a^2}{4} - 3a + 9 + a^2 = 49; 5a^2 - 12a - 160 = 0; a_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{209}}{5}. \text{ Для точки}$$

C — значение $a = \frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}$, для точки B — значение $a = \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5}$.

Точка D :
$$\begin{cases} x = a + 6, \\ (x + 3)^2 + a^2 = 49; \end{cases} \quad (a + 9)^2 + a^2 = 49; 2a^2 + 18a + 81 = 49;$$

$$a^2 + 9a + 16 = 0; a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Так как из двух точек пересечения окружности и прямой $x = a + 6$ нужно выбрать точку с большим значением координаты a , то $a = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$.

Таким образом, система имеет решения при

$$a \in \left[\frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{56}{17}; \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{56}{17}; \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5} \right].$$

С6. Рассмотрим произвольное простое число p . Пусть p входит в разложение числа n на простые множители a раз, а в разложение числа m входит b раз, то есть $n = p^a q$, где q не делится p ; $m = p^b s$, где s не делится на p .

Условие задачи для числа n не выполняется, если найдется такое число m , что m^5 делится на n и m^{40} не делится на n^{13} , что в свою очередь выполняется при существовании простого числа p и числа b , что

$$\begin{cases} 5b \geq a, \\ 40b < 13a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{1}{5}a, \\ b < \frac{13}{40}a; \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left[\frac{1}{5}a; \frac{13}{40}a \right).$$

Рассмотрим, при каких значениях a возможно существование указанного целого числа b . При $a = 0$ указанного значения b не существует. При $a = 1$ требуется $b \in \left[\frac{1}{5}; \frac{13}{40} \right)$, здесь нет целых чисел, следовательно, требуемого числа b не существует. При $a = 2$ требуется $b \in \left[\frac{2}{5}; \frac{26}{40} \right)$ — целых чисел здесь нет. При $a = 3$ требуется $b \in \left[\frac{3}{5}; \frac{39}{40} \right)$. Целых чисел здесь нет. При $a = 4$ требуется $b \in \left[\frac{4}{5}; \frac{52}{40} \right) \Rightarrow b = 1$. При $a = 5$ требуется $b \in \left[\frac{5}{5}; \frac{65}{40} \right) \Rightarrow b = 1$. При $a = 6$ требуется $b \in \left[\frac{6}{5}; \frac{78}{40} \right)$. Целых чисел нет. При $a = 7$ требуется $b \in \left[\frac{7}{5}; \frac{91}{40} \right) \Rightarrow b = 2$. При $a \geq 8$ длина полуинтервала равна $\left(\frac{13}{40} - \frac{1}{5} \right)a = \frac{5}{40}a \geq 1$. Следовательно, на полуинтервале найдется целое число.

Итак, условие для числа n не выполняется, если в его разложении на простые множители есть множитель p , входящий в разложение $a = 4$, $a = 5$ или $a \geq 7$ раз. Подсчитаем количество таких «неподходящих» чисел n , меньших 200. Такие числа n могут иметь один из следующих видов:

- 1) $p = 2, a = 4, n = 2^4 q$, где q нечетное. Это числа 16, 48, 80, 112, 144, 176 — всего 6 чисел.
- 2) $p = 2, a = 5, n = 2^5 q$, где q нечетное. Это числа 32, 96, 160 — всего 3 числа.
- 3) $p = 2, a = 7, n = 2^7 q$, где q нечетное. Это единственное число 128.
- 4) $p = 3, a = 4, n = 3^4$, где q не делится на 3. Это числа 81 и 162 — всего 2 числа.

Суммируя количество «неподходящих» чисел по всем пунктам, получаем $6 + 3 + 1 + 2 = 12$ чисел. Так как всего натуральных чисел, меньших 200, имеется 199, то условию удовлетворяют $199 - 12 = 187$ чисел.

Ответ: 187.

Решение варианта № 25

В1. Всего требуется $0,5 \cdot 5 \cdot 9 = 22,5$ г лекарства. В одной упаковке $0,5 \cdot 10 = 5$ г лекарства. Так как $\frac{22,5}{5} = 4,5$, то требуется 5 упаковок.

Ответ: 5.

В2. Из данных диаграммы следует, что только 27-го числа среднесуточная температура была $+10^\circ\text{C}$.

Ответ: 27.

В3. ОДЗ: $\begin{cases} 7 - x \geq 0, \\ 5 - x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x \leq 5; \end{cases} x \leq 5.$

$$\begin{cases} \sqrt{5-x} - 4 = 0, \\ \sqrt{7-x} - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} 5 - x = 16, \\ 7 - x = 4; \end{cases} \begin{cases} x = -11, \\ x = 3. \end{cases}$$

Оба корня принадлежат области определения, большим из них является число 3.

Ответ: 3.

В4. Пусть $DA = 9x$, $AB = 4x$, $CB = 5x$ (см. рис. 155), тогда $DC + AB = DA + CB = 14x$, откуда $DC = 10x$.

Периметр $P = DC + CB + AB + DA = 28x$, значит, $x = \frac{98}{28} = 3,5$.

Большая сторона $DC = 10x = 35$.

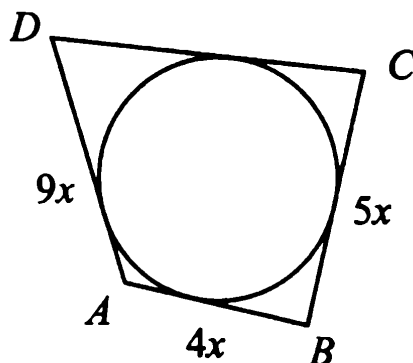


Рис. 155.

Ответ: 35.

В5. Фундамент из пеноблоков будет стоить $3,5 \cdot 2750 + 280 \cdot 8 = 11\,865$ (руб.), бетонный — $3 \cdot 680 + 25 \cdot 280 = 9040$ (руб.), разница — 2825 (руб.).

Ответ: 2825.

В6. $S = S_{ABCD} - S_{KLMN}$ (см. рис. 156).

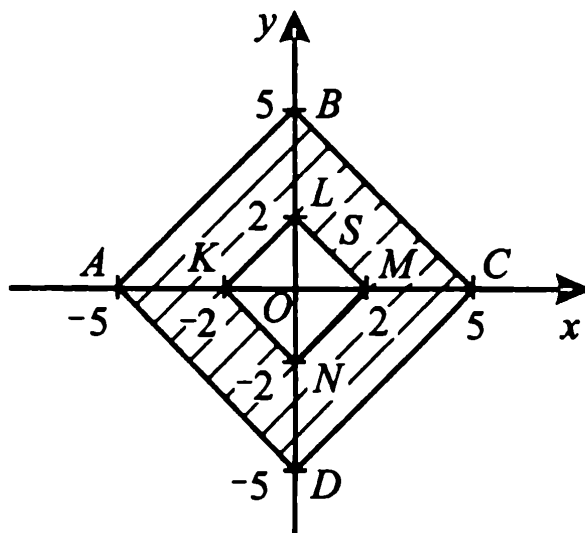


Рис. 156.

$ABCD$ и $KLMN$ — квадраты, тогда $S_{ABCD} = AB^2 = OA^2 + OB^2 = 50$, $S_{KLMN} = KL^2 = OK^2 + OL^2 = 8$, $S = 50 - 8 = 42$.

Ответ: 42.

$$\text{В7. } \frac{9}{4 \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{113\pi}{3}\right)} = \frac{9}{4 \cos\left(-4\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \sin\left(38\pi - \frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{9}{4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{9}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{9}{3} = -3.$$

Ответ: -3 .

В8. Согласно условию прямая $y = 6x + 5$ и парабола $y = 3x^2 + bx + 17$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $6x + 5 = 3x^2 + bx + 17$; $3x^2 + (b - 6)x + 12 = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = (b - 6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$. Отсюда $b = -6$ или $b = 18$. При $b = -6$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(-6 - 6)}{6} = 2$. При

$b = 18$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(18 - 6)}{6} = -2$. Учитывая, что по условию абсцисса точки касания меньше 0, получаем $b = 18$.

Ответ: 18.

В9. Пусть $\angle CAC_1 = 30^\circ$, $\angle D_1AC_1 = 45^\circ$, $\angle B_1AC_1 = 45^\circ$. Тогда из прямоугольных треугольников CAC_1 , D_1AC_1 , B_1AC_1 соответственно получаем: $CC_1 = AC_1 \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$; $D_1C_1 = AC_1 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$; $B_1C_1 = AC_1 \sin 45^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$. Искомый объём $V = CC_1 \cdot D_1C_1 \cdot B_1C_1 = 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 432$.

Ответ: 432.

В10. По условию $0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,5}{30} \cdot \log_2 \frac{84 - 20}{T - 20} = 49$; $\log_2 \frac{64}{T - 20} = 1$;
 $\frac{64}{T - 20} = 2$; $T - 20 = 32$; $T = 52$.

Ответ: 52.

В11. $y' = -\left(\frac{1 \cdot (x^2 + 169) - (2x \cdot x)}{(x^2 + 169)^2}\right) = \frac{x^2 - 169}{(x^2 + 169)^2} \cdot y' = 0$ при $x = \pm 13$.

1. $y' > 0$ при $x < -13$ или $x > 13$;

2. $y' < 0$ при $-13 < x < 13$.

Точка $x = -13$ — точка максимума.

Ответ: -13 .

В12. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда составим таблицу:

$S(\text{км})$	$v(\text{км/ч})$	$t(\text{ч})$
21 км	$8 + x$	$\frac{21}{8 + x}$
21 км	$8 - x$	$\frac{21}{8 - x}$
Итого		$(16 - 8) - 1 = 7$

Составляем уравнение: $\frac{21}{8 + x} + \frac{21}{8 - x} = 7$. Решим уравнение:

$$3 \cdot (8 - x) + 3 \cdot (8 + x) = (64 - x^2), \quad 24 - 3x + 24 + 3x = 64 - x^2, \quad 64 - x^2 = 48, \\ x^2 = 16, \quad x = 4.$$

Ответ: 4.

С1. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{2 \cos x} \cdot 2^{\sqrt{2} \cos x} - 2^{\sqrt{2} \cos x} - 4 \cdot 2^{2 \cos x} + 4 = 0, \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2^{2 \cos x} - 1)(2^{\sqrt{2} \cos x} - 4) = 0, \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2^{2 \cos x} = 2^0, \\ 2^{\sqrt{2} \cos x} = 2^2, \end{cases} \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \sqrt{2}, \end{cases} \\ (2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2 \sin x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. Пусть R — радиус сферы. тогда $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi, R = 3$. Обозначим O — центр сферы, a — сторона основания пирамиды, h — высота пирамиды. Возможны два случая (см. рис. 157).

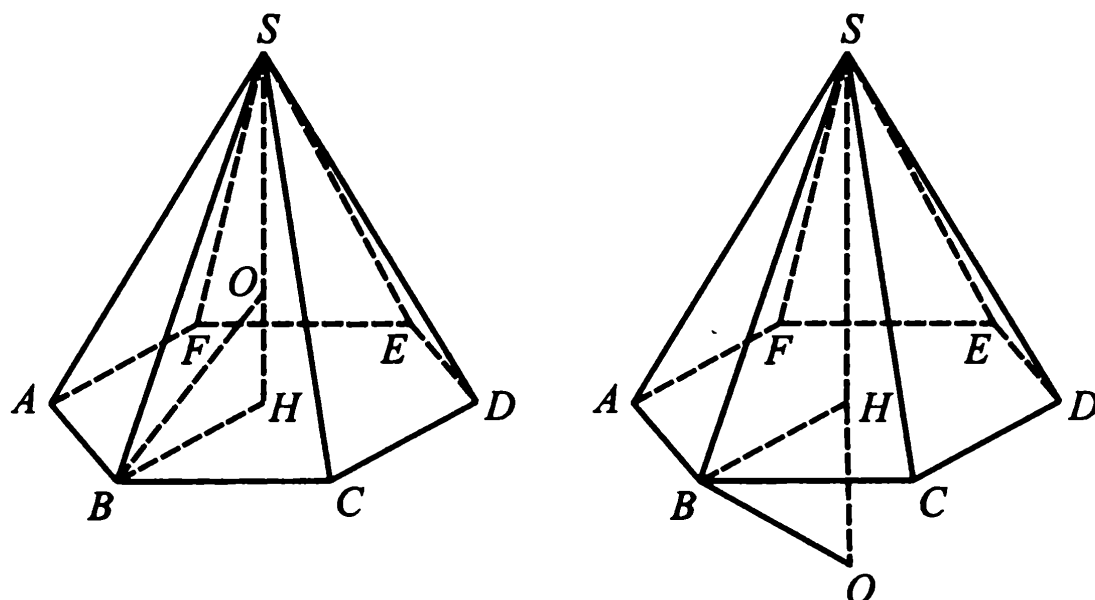


Рис. 157.

Треугольник OBH — прямоугольный, $BH = a = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{2}$, $S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн}}.$$

Возможны два случая: в первом $h = R + OH = 4$ и $V = 16\sqrt{3}$, а во втором $h = R - OH = 2$ и $V = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}; 16\sqrt{3}$.

СЗ. Так как при любых значениях $x \neq 0$ справедливо $2 \cdot 2^{x^2} - 1 > 0$ и $3^{2x^2} - 1 > 0$, то исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_5(3^{4x^2} - 2 \cdot 3^{2x^2} + 4) - \frac{1}{3^{2x^2} - 1} > \log_5(2^{2(x^2+1)} - 2 \cdot 2^{x^2+1} + 4) - \frac{1}{2^{x^2+1} - 1},$$

$$\log_5((3^{2x^2} - 1)^2 + 3) - \frac{1}{3^{2x^2} - 1} > \log_5((2^{x^2+1} - 1)^2 + 3) - \frac{1}{2^{x^2+1} - 1}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_5((t-1)^2 + 3) - \frac{1}{t-1}$.

Так как $f(t)$ возрастает при $t > 1$, то для любых $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $f(t_1) > f(t_2)$ тогда и только тогда, когда $t_1 > t_2$.

Имеем $f(3^{2x^2}) > f(2^{x^2+1})$, $3^{2x^2} > 3^0 = 1$, $2^{x^2+1} > 2^1 = 2$, тогда $3^{2x^2} > 2^{x^2+1}$, $9^{x^2} > 2 \cdot 2^{x^2}$, $4,5^{x^2} > 2$, $x^2 > \log_{4,5} 2$, откуда $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \cup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \cup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$.

С4. Треугольники APC и QBC (см. рис. 158) подобны по двум углам, тогда $\frac{PN}{BH} = \frac{AC}{QC}$, $PN \cdot QC = AC \cdot BH$, $\frac{1}{2}PN \cdot QC = \frac{1}{2}AC \cdot BH = S_{ABC}$, то есть $S_{QPC} = 13$.

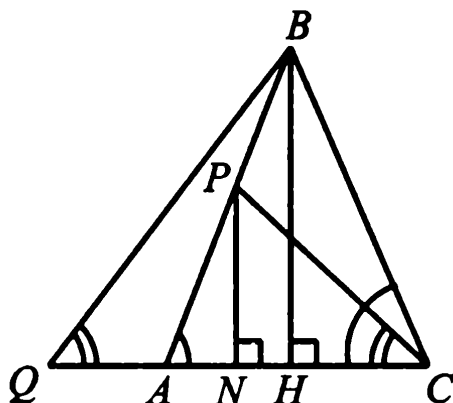


Рис. 158.

Ответ: 13.

С5. Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определены всюду, кроме $x = 0$.

Если x_1 — корень $g_1(x)$, то $x_1^2 f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = 0$ и $f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) = 0$, то есть

$1 + \frac{1}{x_1}$ — корень $f(x)$. Таким образом, каждому корню $g_1(x)$ соответствует корень $f(x)$, причём различным корням $g(x)$ соответствуют различные корни $f(x)$.

Аналогичное утверждение верно для $g_2(x)$. Требование о различном числе корней выполняется только в случае, когда $f(x)$ имеет корень x_0 , которому не соответствует (в указанном выше смысле) никакой корень функции $g_1(x)$ или корень функции $g_2(x)$. Это выполняется только при

$x_0 = \pm 1$ (иначе $x_1 = \frac{1}{x_0 - 1}$, $x_2 = \frac{1}{x_0 + 1}$). Найдём, когда f имеет корень $x_0 = \pm 1$. Это выполнено при $1 \pm |m - 2| + 5 - 2m = 0$; $|m - 2| = \pm(2m - 6)$;

$$\begin{cases} m - 2 = 2m - 6, \\ m - 2 = 6 - 2m; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4, \\ m = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $2\frac{2}{3}; 4$.

С6. Пусть p — указанное в условии простое число $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$;

$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{p}$; $p(m+n) = mn$; $mn - np - mp = 0$, $(m-p)(n-p) = p^2$. Так как число p — простое, то возможны только три случая:

$$1) \begin{cases} m - p = 1, \\ n - p = p^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p + 1, \\ n = p^2 + p. \end{cases}$$

Подставив m и n в уравнение $m^2 + 2n^2 = k^2$, получим

$(p + 1)^2 + 2p^2(p + 1)^2 = k^2$, $(p + 1)^2(2p^2 + 1) = k^2$, что возможно только в том случае, если $2p^2 + 1 = l^2$, где $l \in N$.

$l^2 - 1 = 2p^2$; $(l - 1)(l + 1) = 2p^2$, что равносильно совокупности:

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} l - 1 = 1, \\ l + 1 = 2p^2, \end{cases} \\ \begin{cases} l - 1 = 2, \\ l + 1 = p^2, \end{cases} \\ \begin{cases} l - 1 = p, \\ l + 1 = 2p; \end{cases} \end{cases} \right.$$

откуда имеем $p = 2$, тогда $m = 3$, $n = 6$, $k = 9$.

$$2) \begin{cases} m - p = p, \\ n - p = p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2p, \\ n = 2p. \end{cases}$$

$m^2 + 2n^2 = k^2$, $12p^2 = k^2$, что невозможно.

$$3) \begin{cases} m - p = p^2, \\ n - p = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = p^2 + p, \\ n = p + 1. \end{cases}$$

$m^2 + 2n^2 = k^2$; $p^2(p + 1)^2 + 2(p + 1)^2 = k^2$, $(p + 1)^2(p^2 + 2) = k^2$, что невозможно, так как $p^2 + 2$ не может являться квадратом натурального числа.

Ответ: $m = 3, n = 6, k = 9$.

Решение варианта № 26

В1. За год клиент должен выплатить $100\% + 15\% = 115\%$ от взятой суммы,

то есть $18\,000 \cdot \frac{115}{100} = 20\,700$ рублей. Каждый месяц необходимо вносить

$$\frac{20\,700}{12} = 1725 \text{ рублей.}$$

Ответ: 1725.

В2. Из данных диаграммы следует, что самая высокая среднемесячная температура наблюдалась в 8-м месяце.

Ответ: 8.

$$\text{В3. } \begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x + 1,5 = 0; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1,5; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1,5. \end{cases}$$

Сумма корней равна 2,5.

Ответ: 2,5.

В4. Пусть $\angle D = 3x$, $\angle C = 2x$, $\angle B = 7x$ (см. рис. 159),
 $\angle D + \angle B = 180^\circ$, откуда $10x = 180^\circ$, $x = 18^\circ$. $\angle C + \angle A = \angle B + \angle D$,
 значит, $\angle A = 8x$, тогда $\angle A = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$.

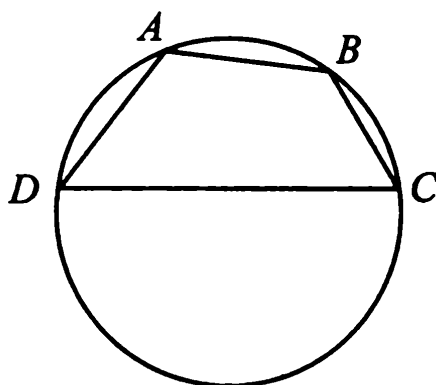


Рис. 159.

Ответ: 144.

В5. Время движения одного поезда через пункт $C — \frac{105}{70} = 1,5$ (ч) =

= 90 (мин), через $B — \frac{60}{60} = 1$ ч = 60 (мин), без промежуточных пунк-

тов — $\frac{150}{90} = \frac{5}{3}$ (ч) = 100 (мин). Минимальное время очевидно составит

90 минут, если два поезда поедут через B с интервалом 20 минут за 80 мин и один через C — за 90 мин. Если хотя бы один поезд поедет по дороге без остановок, то это займёт не менее 100 минут. Если хотя бы два поезда едут через C , то общее время будет не меньше, чем 110 минут.

Ответ: 1,5.

В6. $\vec{a}(4; 6)$, $\vec{b}(7; 3)$, тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(11; 9)$ и сумма его координат равна $11 + 9 = 20$.

Ответ: 20.

В7. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\sin \alpha < 0$ и тогда

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{65}} = -\sqrt{\frac{49}{65}} = -\frac{7}{\sqrt{65}},$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7}{4} = 1,75$.

Ответ: 1,75.

В8. Согласно условию прямая $y = 9x + 5$ и парабола $y = -x^2 + bx - 11$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $9x + 5 = -x^2 + bx - 11$; $x^2 + (9 - b)x + 16 = 0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D = (9 - b)^2 - 4 \cdot 16 = 0$. Отсюда $b = 1$ или $b = 17$. При $b = 1$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(9 - 1)}{2} = -4$.

При $b = 17$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(9 - 17)}{2} = 4$. Учитывая, что по условию абсцисса точки касания больше 1, получаем $b = 17$.

Ответ: 17.

В9. Так как высота у обеих пирамид общая, то их объёмы относятся так же, как площади их оснований. Обозначим сторону правильного шестиугольника $ABCDEF$ через a . Тогда $S_{ABCDEF} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Отсюда видно, что площадь шестиугольника в 6 раз больше площади треугольника ABC , поэтому объём шестиугольной пирамиды в 6 раз больше объёма треугольной пирамиды и равен $2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

В10. По условию $H(t) \leq 4,05$; $5 - \frac{1}{200} \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{200^2} \cdot t^2 \leq 4,05$;

$\frac{1}{8000} t^2 - \frac{1}{20} t + 0,95 \leq 0$; $t^2 - 400t + 7600 \leq 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = 20$, $t_2 = 380$. Решение неравенства — отрезок $[20; 380]$. До указанного в условии уровня высота воды в баке опустится в момент $t = 20$ с.

Ответ: 20.

$$\text{В11. } y' = -\left(\frac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2 + 9)^2}\right) = -\frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 9)^2} \cdot y' = 0, \\ x^2 - 9 = 0, \text{ при } x = \pm 3.$$

1) $y' > 0$ при $x < -3$ или $x > 3$;

2) $y' < 0$ при $-3 < x < 3$.

Точка $x = 3$ — точка минимума.

Ответ: 3.

В12. Пусть x км/ч — скорость теплохода на пути из A в B , тогда $(x+8)$ км/ч — скорость теплохода на пути от B до A . Составляем таблицу:

S(км)	v(км/ч)	t(ч)
570 км	x	$\frac{570}{x}$
570 км	$x + 8$	$\frac{570}{x + 8}$

$$\text{Уравнение: } \frac{570}{x} - \frac{570}{x+8} = 4, x > 0; 570 \cdot (x+8) - 570 \cdot x = 4x(x+8), \\ 570x + 4560 - 570x = 4x^2 + 32x, 4x^2 + 32x - 4560 = 0, x^2 + 8x - 1140 = 0, \\ x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 1140} = -4 \pm \sqrt{1156} = -4 \pm 34. x_1 = 30, x_2 = -38 — \\ \text{посторонний корень.}$$

Ответ: 30.

С1. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25^{\sin x} + 5^{\sin x+1} - 6 = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2 \sin x} + 5 \cdot 5^{\sin x} - 6 = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (5^{\sin x} + 6)(5^{\sin x} - 1) = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\sin x} = 1, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2 \cos x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. Пусть R — радиус сферы, тогда $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, $R = 3$. Обозначим O — центр сферы, H — основание высоты пирамиды, r — радиус описанной около основания пирамиды окружности. Пусть A — одна из вершин основания, тогда $\triangle OHA$ — прямоугольный и $r^2 = HA^2 = R^2 - 1$, $r = 2\sqrt{2}$ (см. рисунок 160).

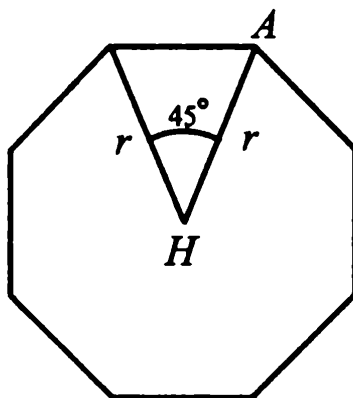


Рис. 160.

$$S_{\text{осн}} = 8 \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

Если точка O расположена внутри пирамиды, то высота пирамиды равна $R + 1$ и тогда $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}$, иначе высота равна $R - 1$ и $V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{32\sqrt{2}}{3}; \frac{64\sqrt{2}}{3}$.

С3. Исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_{0,5}((2^{|x|+1}-2)^2+1) + \frac{1}{2^{|x|+1}-1} > \log_{0,5}((2^{\sqrt{x}+3}-2)^2+1) + \frac{1}{2^{\sqrt{x}+3}-1}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_{0,5}((t-2)^2+1) + \frac{1}{t-1}$.

При $t \geq 2$ функция $f(t)$ убывает как сумма двух убывающих функций, значит, для любых $t_1 \geq 2, t_2 \geq 2$ имеем $f(t_1) > f(t_2)$ равносильно $t_1 < t_2$.

Имеем:

$$f(2^{|x|+1}) > f(2^{\sqrt{x}+3});$$

$$2^{|x|+1} \geq 2^1 = 2, 2^{\sqrt{x}+3} \geq 2^3 = 8, \text{ тогда}$$

$$2^{|x|+1} < 2^{\sqrt{x}+3}; |x| - \sqrt{x} - 2 < 0, (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) < 0, \sqrt{x} < 2; x \in [0; 4).$$

Ответ: $x \in [0; 4)$.

С4. Так как $AB = CD = BD$, то $\angle DBC = \angle DCB$. Треугольники BCK и BDT (см. рис. 161) подобны по двум углам, откуда $\frac{DH}{NK} = \frac{BT}{BC}$,

$$NK \cdot BT = DH \cdot BC = S_{ABCD}, S_{BKT} = \frac{1}{2} NK \cdot BT = 12,5.$$

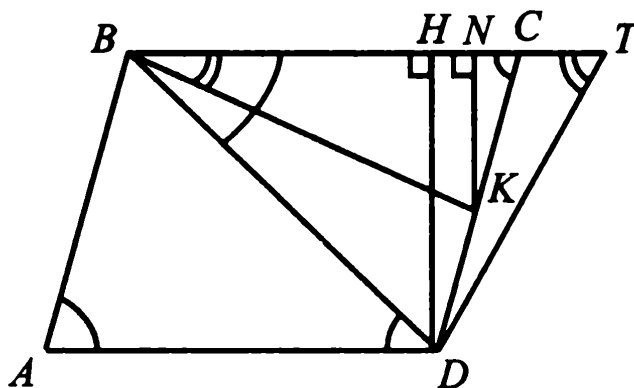


Рис. 161.

Ответ: 12,5.

С5. Функция $g_1(x)$ определена при $x \neq 1$, функция $g_2(x)$ определена при $x \neq 0$.

Если x_1 — корень $g_1(x)$, то $(x_1 - 1)^2 f\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{x_1 - 1}\right) = 0$,

то есть $\frac{1}{x_1 - 1}$ — корень $f(x)$. Таким образом, каждому корню $g_1(x)$ соответствует корень $f(x)$, причём различным корням $g_1(x)$ соответствуют различные корни $f(x)$.

Аналогичное утверждение верно для $g_2(x)$. Требование о различном числе корней выполняется только в случае, когда $f(x)$ имеет корень x_0 , которому не соответствует (в указанном выше смысле) никакой корень функции $g_1(x)$ или корень функции $g_2(x)$. Это выполняется только при $x_0 = 0$ или $x_0 = -1$ (иначе $x_1 = \frac{1}{x_0} + 1$; $x_2 = \frac{1}{x_0 + 1}$). Найдём, когда f имеет корни 0 или -1 .

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} f(0) = 0, \\ f(-1) = 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m + 4 = 0, \\ 1 + |3 - m| - m + 4 = 0; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4, \\ |m - 3| = m - 5; \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4, \\ \begin{cases} m - 5 \geq 0, \\ 3 - m = m - 5; \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow m = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

С6. Пусть p — указанное в условии простое число $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$;

$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{p}$; $p(m+n) = mn$; $mn - np - mp = 0$, $(m-p)(n-p) = p^2$. Так как число p — простое, то возможны только три случая:

$$1) \begin{cases} m-p=1, \\ n-p=p^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=p+1, \\ n=p^2+p. \end{cases}$$

Подставив m и n в уравнение $4m^2 + 3n^2 = k^2$, получим

$4(p+1)^2 + 3p^2(p+1)^2 = k^2$, $(p+1)^2(3p^2+4) = k^2$, что возможно только в том случае, если $3p^2+4 = l^2$, где $l \in N$.

$$3p^2+4 = l^2; 3p^2 = (l-2)(l+2);$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} l-2=3, \\ l+2=p^2, \end{cases} \\ \begin{cases} l-2=p, \\ l+2=3p, \end{cases} \\ \begin{cases} l-2=1, \\ l+2=3p^2; \end{cases} \end{array} \right.$$

откуда имеем $p=2$, тогда $m=3$, $n=6$, $k=12$.

$$2) \begin{cases} m-p=p, \\ n-p=p; \end{cases} \quad m=n=2p \Leftrightarrow 4m^2+3n^2=k^2, \quad 7 \cdot 4p^2=k^2, \text{ что невозможно.}$$

$$3) \begin{cases} m-p=p^2, \\ n-p=1; \end{cases} \quad \begin{cases} m=p^2+p, \\ n=p+1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$4m^2+3n^2=k^2$; $4p^2(p+1)^2+3(p+1)^2=k^2$, $(p+1)^2(4p^2+3)=k^2$, что невозможно, так как $(2p)^2+3$ не может являться квадратом натурального числа при натуральных p .

Ответ: $m=3, n=6, k=12$.

Решение варианта № 27

В1. Цена билета для школьника равна $1580 \cdot \frac{50}{100} = 790$ рублей. Общая стоимость билетов составляет $790 \cdot 17 + 1580 \cdot 3 = 18\,170$ рублей.

Ответ: 18170.

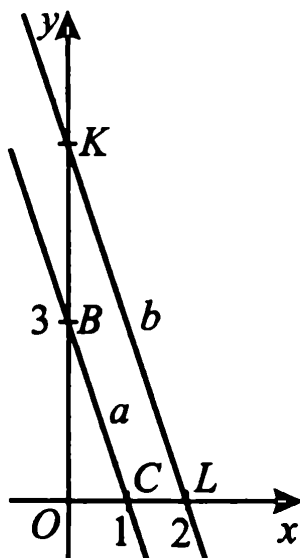


Рис. 163.

$$\text{В7. } 0,35 = \frac{5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 14 \cos \alpha} = \frac{5 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3}{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 14} = \frac{5 \operatorname{tg} \alpha - 3}{3 \operatorname{tg} \alpha + 14};$$

$$\frac{5 \operatorname{tg} \alpha - 3}{3 \operatorname{tg} \alpha + 14} = 0,35; 5 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 1,05 \operatorname{tg} \alpha + 4,9; 3,95 \operatorname{tg} \alpha = 7,9; \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Ответ: 2.

В8. Угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 2$, то есть равен 3. Так как $(x^2 + 4x - 5)' = 2x + 4$, то в точке касания выполняется $2x + 4 = 3$, откуда $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

В9. Так как треугольник MSK — равнобедренный с основанием MK , то его высота SO является одновременно биссектрисой, $\angle KSO =$

$= \frac{1}{2} \angle KSM = 45^\circ$. Радиус $KO = \frac{1}{2} KM = 6$. В $\triangle SOK$ находим $\angle SKO = 180^\circ - \angle SOK - \angle OSK = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Видно, что $\triangle SOK$ — равнобедренный (углы при основании SK равны) и $SO = KO = 6$. Отсюда находим искомое значение:

$$V \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} \pi \cdot OK^2 \cdot OS \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 72.$$

Ответ: 72.

В10. По условию $\frac{2 \cdot 20 \sin \alpha}{10} \geq 2$; $\sin \alpha \geq 0,5$. Искомое наименьшее значение угла равно 30° .

Ответ: 30.

B11. $y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2}$. $y' = 0$, $x^2 - 49 = 0$, $x = \pm 7$.
 $-7 \notin (1; 7)$, $7 \notin (1; 7)$.

Найдём значения функции на концах отрезка: $y(1) = \frac{1 + 49}{1} = 50$,

$$y(7) = \frac{49 + 49}{7} = \frac{49 \cdot 2}{7} = 14.$$

Ответ: 50.

B12. Пусть x км — расстояние от города A до места, где автомобили встретятся, тогда x км — расстояние, которое прошёл первый автомобиль, $850 - x$ км — прошёл второй автомобиль до встречи.

Время первого автомобиля до встречи $\frac{x}{75}$ часов, время второго автомобиля до встречи $\frac{850 - x}{80}$ часов.

Составляем уравнение: $\frac{x}{75} = \frac{850 - x}{80} + 1$. $80x = 850 \cdot 75 - 75x + 75 \cdot 80$,

$$(80 + 75)x = 75(850 + 80), x = \frac{930 \cdot 75}{155}, x = 450.$$

Ответ: 450.

C1. $\sin 12x - 1 \leq 0$, $(|\sin 2x| - \cos 6x)^2 \geq 0$, поэтому равенство возможно лишь в случае одновременного равенства нулю обеих частей уравнения:

$$\begin{cases} \sin 12x - 1 = 0, \\ |\sin 2x| = \cos 6x. \end{cases} \quad \text{Решением первого уравнения являются}$$

$$x_k = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z. \text{ Поскольку } 6x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ а } \cos 6x \geq 0, \text{ то } k$$

$$\text{должно быть чётным, } \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi n}{6}, n \in Z. \text{ Так как } \cos 6x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то}$$

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ что будет выполняться при } n = \pi(3p + 1), p \in Z \text{ и тогда}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \pi p, p \in Z.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \pi p, p \in Z$.

C2. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр (см. рис. 164). Проведём через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD . Такая плоскость будет единственной и выполним её построение следующим об-

разом: возьмем точку K на AB , проведём через неё прямую $C_1D_1 \parallel CD$, тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1 будет требуемой. Далее так же построим плоскость, проходящую через CD и параллельную AB . Две построенные плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных рёбер тетраэдра аналогичным образом плоскости, получим куб с диагональю грани, равной $4\sqrt{2}$. Шар, касающийся рёбер тетраэдра, будет вписан в построенный куб, а значит, искомый радиус равен $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

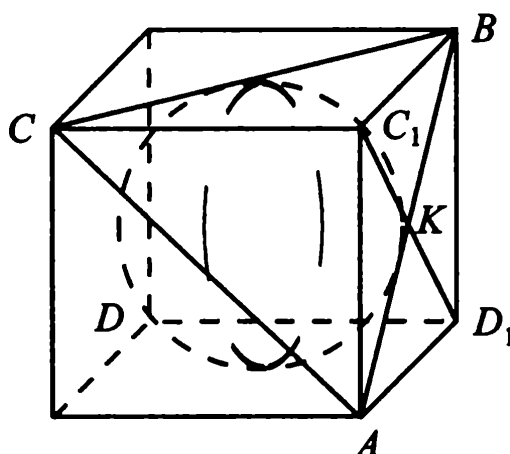


Рис. 164.

Ответ: 2.

С3. Равенство $\log_b a = \log_c a$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a = 1, \\ b, c > 0, \\ b, c \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > 0, \\ b = c, \\ b > 0, \\ b \neq 1. \end{cases}$$

$$1) \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2x + 2 > 0 \Rightarrow x > -1;$$

$$11 + 10x - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 11.$$

$$\text{В этом случае имеем } x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

$$2) 2x + 2 = 11 + 10x - x^2;$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 9.$$

Так как $\sin(-1) < 0$, то $x = -1$ не принадлежит области определения. $\sin 9 > 0$, так как $2\pi < 9 < 3\pi$;

$2 \cdot 9 + 2 \neq 1 \Rightarrow x = 9$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $9; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

С4. Пусть $\triangle MNP$ (см. рис. 165) тот, периметр которого требуется определить. Найдем MN . Треугольник AMC подобен треугольнику BNC

(угол ACB — общий, $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$), $\Rightarrow \frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$. Отсюда следует, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ ($\angle ACB$ — общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны).

Пусть $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 6$, R — радиус описанной около $\triangle ABC$, а R_1 — около $\triangle MNC$ окружности, тогда $\frac{MN}{R_1} = \frac{7}{R}$,

$MN = \frac{7R_1}{R}$; $R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4S}$, где S — площадь $\triangle ABC$, $R_1 = \frac{OC}{2}$ (так как окружность, описанная около $\triangle MNC$ пройдет через O , причем OC — диаметр, так как $\angle OMC = \angle ONC = 90^\circ$).

$$\begin{aligned} MN &= \frac{7R_1}{R} = \frac{7 \cdot OC}{2R} = \frac{7(PC - PO)}{2R} = \frac{7PC - 7PO}{2R} = \\ &= \frac{2S - 2S_{\triangle ABO}}{2R}. \text{ Аналогично } NP = \frac{S - S_{\triangle BCO}}{R}, PM = \frac{S - S_{\triangle ACO}}{R} \Rightarrow \\ P &= MN + NP + PM = \frac{3S - (S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle ACO})}{R} = \\ &= \frac{2S}{R} = \frac{8S^2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8(\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2})^2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{288}{35} \quad (S \text{ вычисляется по формуле Герона}). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{288}{35}$.

С5. Разложим левую часть неравенства на множители:

$s(x - a)(x + a + 2)(x - 2a + 3) > 0$. Изобразим графически множество решений неравенства. Решения будут в заштрихованной области (см. рис. 166). Так как уравнение $x^2 + a^2 = 36$ задает окружность, то решения системы — это точки дуг окружности, которые попали в заштрихованную область. Ординаты концов этих дуг находим из систем:

$$\begin{cases} x - a = 0, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x + a + 2 = 0, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2a + 3 = 0, \\ x^2 + a^2 = 36. \end{cases} \quad \text{Решениями си-}$$

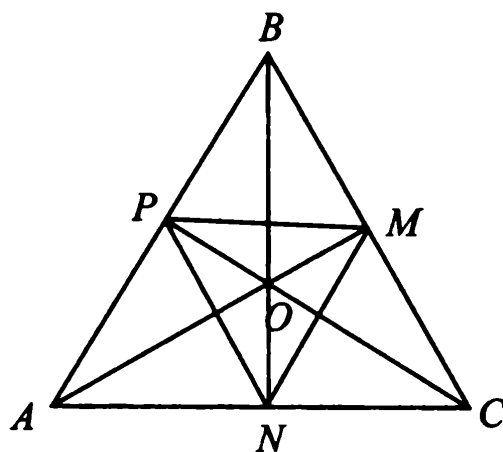


Рис. 165.

стем будут $a_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$, $a_{3,4} = -1 \pm \sqrt{17}$ и $a_{5,6} = \frac{6 \pm \sqrt{171}}{5}$ соответственно. Имеем $a \in (-1 - \sqrt{17}; 6]$.

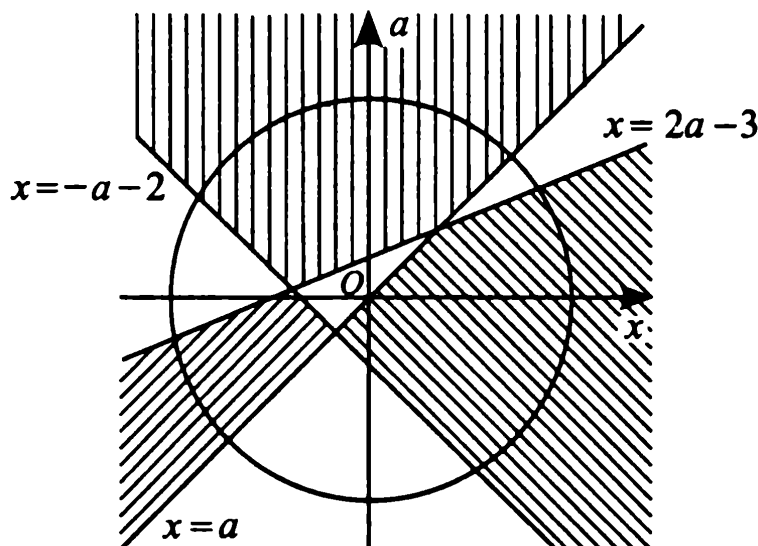


Рис. 166.

Ответ: $a \in (-1 - \sqrt{17}; 6]$.

С6. Для любого действительного числа x через $[x]$ будем обозначать его целую часть, то есть такое целое число, что $0 \leq x - [x] < 1$.

Лемма. Для любого иррационального числа $x > 0$ и любого числа $b \in (0; 1)$ найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что $0 < px - q < b$.

Доказательство леммы. Разделим отрезок $[0; 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше b . Пусть количество этих отрезков равно k , тогда среди чисел $x - [x]$, $2x - [2x]$, \dots , $(k+1)x - [(k+1)x]$, есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Выберем такие числа $ix - [ix]$ и $jx - [jx]$, где $ix - [ix] \geq jx - [jx]$. Обозначим $\Delta = (ix - [ix]) - (jx - [jx]) = (i-j)x - ([ix] - [jx])$. По построению Δ —

иррационально и $0 \leq \Delta < b$. К тому же, $\Delta \neq 0$, так как в противном случае $x = \frac{[ix] - [jx]}{i - j}$ — рациональное число. Введём обозначения $p_0 = i - j$, $q_0 = [ix] - [jx]$. Тогда $\Delta = p_0 x - q_0$ и $0 < p_0 x - q_0 < b$. Так как p_0 и q_0 являются целыми числами, то для выполнения последнего неравенства необходимо $p_0 q_0 \geq 0$. Рассмотрим 2 случая:

- 1) $p_0 > 0, q_0 \geq 0$. В этом случае лемма доказана, так как $p = p_0, q = q_0$.
- 2) $p_0 < 0, q_0 \leq 0$. Теперь подберём натуральное число k , чтобы $k\Delta$ было меньше 1, но отличалось от 1 менее чем на Δ . Это число $k = \left[\frac{1}{\Delta} \right]$. Дей-

ствительно, $\left[\frac{1}{\Delta} \right] \cdot \Delta < \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1$;

$\left[\frac{1}{\Delta} \right] \cdot \Delta + \Delta > \left[\frac{1}{\Delta} \right] \cdot \Delta + \Delta \cdot \left(\frac{1}{\Delta} - \left[\frac{1}{\Delta} \right] \right) = 1$. Имеем: $1 - \Delta < k\Delta < 1$,
 $-1 < -k\Delta < -1 + \Delta$,
 $0 < 1 - k\Delta < \Delta$, откуда следует неравенство
 $0 < 1 - k\Delta < b$,
 $0 < -kp_0 x - (-kq_0 - 1)$. В этом случае $p = -kp_0, q = -kq_0 - 1$. Лемма доказана.

Перейдём к решению исходной задачи. Обозначим $3842561 = c$. Тогда по лемме найдутся такие целые числа p и q , $p > 0, q \geq 0$, что
 $0 < p \lg 2 - q < \lg(c + 1) - \lg c$. Отсюда следует, что найдётся такое натуральное число N , что $\lg c < N(p \lg 2 - q) < \lg(c + 1)$;
 $Nq + \lg c < Np \lg 2 < Nq + \lg(c + 1)$; $10^{Nq} \cdot c < 2^{Np} < 10^{Nq} \cdot (c + 1)$,
откуда Np — искомая степень числа 2.

Ответ: да.

Решение варианта № 28

В1. Взрослых жителей в городе $100\% - 20\% = 80\%$, то есть

$300\,000 \cdot \frac{80}{100} = 240\,000$ человек. Из них работают $100\% - 40\% = 60\%$, то

есть $240\,000 \cdot \frac{60}{100} = 144\,000$ человек.

Ответ: 144 000.

В2. Менее 5000 автомобилей было продано во все месяцы, кроме 1-го и 5-го, всего 10 месяцев.

Ответ: 10.

В3. По определению логарифма имеем $37x + 7 = 3^4$; $37x + 7 = 81$; $37x = 74$; $x = 2$.

Ответ: 2.

В4. Пусть $\smile BE = 3x$, $\smile BC = 5x$, $\smile CD = 6x$, $\smile DE = 4x$.

$\angle A = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile BE) = \frac{1}{2}(6x - 3x) = 1,5x$ (см. рис. 167).

$\smile BE + \smile CB + \smile CD + \smile DE = 18x = 360^\circ$, значит, $x = 20^\circ$, откуда $\angle A = 1,5 \cdot 20^\circ = 30^\circ$.

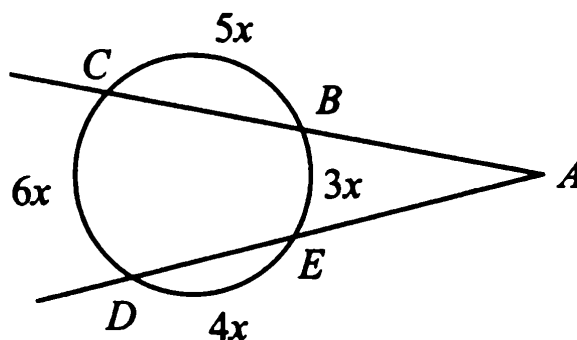


Рис. 167.

Ответ: 30.

В5. Найдём стоимость наиболее дешёвой поездки от Ростова-на-Дону до Москвы. На поезде эта поездка стоила бы $1400 \cdot 2 + 1400 \cdot 0,9 \cdot 2 = 5320$ (руб.), а на самолёте — $1320 \cdot 4 = 5280$ (руб.). То есть наиболее дешёвый вариант составит 5280 рублей. От Москвы до Санкт-Петербурга дешевле ехать поездом, что составит $820 \cdot 2 + 820 \cdot 0,9 \cdot 2 = 3116$ (руб.). При этом в метро надо заплатить $27 \cdot 4 = 108$ (руб.). То есть стоимость дороги: сначала самолётом до Москвы, потом до Санкт-Петербурга поездом равна $5280 + 108 + 3116 = 8504$ (руб.), сначала поездом до Москвы, потом до Санкт-Петербурга поездом $5320 + 3116 = 8436$ (руб.). Поэтому дешевле весь маршрут преодолевать с помощью поезда, что обойдётся в 8436 рублей.

Ответ: 8436.

В6. Так как $\overrightarrow{OA} (2; 5)$ и $\overrightarrow{CB} (8 - 6; 7 - 2)$; $CB = (2; 5)$, то векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{CB} равны, откуда в четырёхугольнике $OABC$ две стороны параллельны и равны. Значит, $OABC$ — параллелограмм, тогда P — середина AC и, значит, $P \left(\frac{2+6}{2}; \frac{5+2}{2} \right)$, $P(4; 3,5)$.

Ответ: 3,5.

$$\text{В7. } g(a) = \left(2a + \frac{5}{a}\right) \left(5a + \frac{2}{a}\right); g\left(\frac{1}{a}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{a} + 5a\right) \left(5 \cdot \frac{1}{a} + 2a\right) = g(a),$$

$$\text{тогда } g(a) : g\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Ответ: 1.

В8. Угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = -8x + 1$, то есть равен -8 . Так как $(2x^2 - 2x + 9)' = 4x - 2$, то в точке касания выполняется $4x - 2 = -8$, откуда $x = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

В9. Из формулы $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ для радиуса окружности, описанной около правильного треугольника, выражаем сторону основания призмы:

$$a = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9. \text{ Периметр основания призмы равен } P = 3a = 3 \cdot 9 = 27. \text{ Площадь боковой поверхности равна } P \cdot h = 27 \cdot 7 = 189.$$

Ответ: 189.

В10. По условию $\frac{2 \cdot 35 \sin \alpha}{10} \geq 7$; $\sin \alpha \geq 1$. Искомое наименьшее значение угла равно 90° .

Ответ: 90.

$$\text{В11. } y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2}. y' = 0, x^2 - 49 = 0, x = \pm 7. \\ -7 \notin (-7; -1), 7 \notin (-7; -1).$$

Найдём значения функции на концах отрезка: $y(-1) = \frac{1 + 49}{-1} = -50$,

$$y(-7) = \frac{49 + 49}{-7} = \frac{49 \cdot 2}{-7} = -14.$$

Ответ: -50 .

В12. Пусть 15%-го раствора взяли x г, тогда 25%-го раствора — $(750 - x)$ г. Кислоты в 15%-ом растворе было $0,15x$ г, а в 25%-ом — $0,25(750 - x)$ г. В результате смешивания стало $750 \cdot 0,2 = 150$ г кислоты.

Составим и решим уравнение:

$$0,15x + 0,25(750 - x) = 150; 0,1x = 37,5; x = 375 \text{ г.}$$

Ответ: 375.

С1. $\cos 6x - 1 \leq 0, (|\cos x| - \sin 4x)^2 \geq 0, \Rightarrow$ равенство возможно лишь в случае одновременного равенства нулю обеих частей уравнения:

$$\begin{cases} \cos 6x = 1, \\ |\cos x| = \sin 4x. \end{cases} \text{ Решением первого уравнения являются } x_k = \frac{\pi k}{3}, \\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задача сводится к решению уравнения $\left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = 0, k \in Z$.

Если $k = 3n$, где $n \in Z$, то $\left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = |\cos \pi n| - \sin 4\pi n = 1 - 0 \neq 0$. Если $k = 3n + r$, где $r = 1$ или $r = 2$, то $\left| \cos \frac{\pi k}{3} \right| - \sin \frac{4\pi k}{3} = \left| \cos \left(\pi n + \frac{\pi r}{3} \right) \right| - \sin \left(4\pi n + \frac{4\pi r}{3} \right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$. Рассмотренное последним уравнение решений не имеет, следовательно, у исходной системы решений нет.

Ответ: решений нет.

С2. Пусть $ABCD$ данный тетраэдр (рис. 168). Проведём через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD . Такая плоскость будет единственной, и выполним её построение следующим образом: возьмем точку K на AB , проведём через точку K прямую $C_1D_1 \parallel CD$, тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1 , будет требуемой. Далее так же построим плоскость, проходящую через CD и параллельную AB . Две построенные плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных ребер тетраэдра аналогичным образом плоскости, получим куб с диагональю грани, равной ребру данного тетраэдра. Шар, касающийся ребер тетраэдра, будет вписан в построенный куб, а значит, ребро куба равно $2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, а длина диагонали его грани равна $6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$ и является искомой длиной ребра.

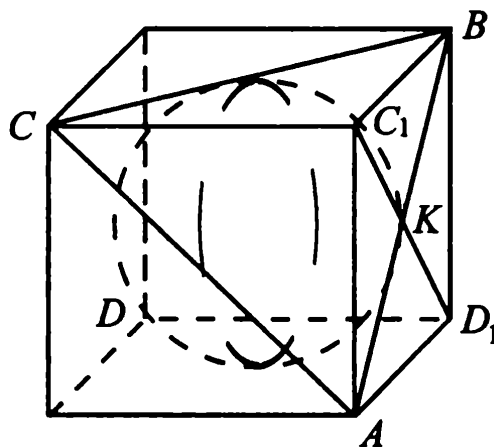


Рис. 168.

Ответ: 12.

С3. Равенство $\log_b a = \log_c a$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a = 1, \\ b, c > 0, \\ b, c \neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > 0, \\ b = c, \\ b > 0, \\ b \neq 1. \end{cases}$$

1) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$3x + 14 > 0 \Rightarrow x > -\frac{14}{3};$$

$$20 + 8x - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 10.$$

В этом случае имеем $x_1 = 0, x_2 = 2\pi$.

2) $3x + 14 = 20 + 8x - x^2;$

$$x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 6.$$

$$\cos(-1) > 0, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} < -1 < 0;$$

$$3 \cdot (-1) + 14 \neq 1 \Rightarrow x = -1 \text{ — корень.}$$

$$\cos(6) > 0, \text{ так как } \frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi;$$

$$3 \cdot 6 + 14 \neq 1 \Rightarrow x = 6 \text{ — корень.}$$

Ответ: $-1; 0; 6; 2\pi$.

С4. Пусть в исходном $\triangle ABC$ стороны $AC = 10, AB = 4, BC = 8, CM, AN, BH$ — высоты $\triangle ABC$. По теореме косинусов для $\triangle ABC$ имеем: $16 = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos \angle BCA$, откуда $\cos \angle BCA = \frac{37}{40}$. Тогда

$$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{8^2 - \frac{37^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{231}}{5}. \text{ Введём прямоугольную де-}$$

картову систему координат (см. рис. 169), в которой $H(0; 0), A\left(-\frac{13}{5}; 0\right),$

$$C\left(\frac{37}{5}; 0\right), B\left(0; \frac{\sqrt{231}}{5}\right).$$

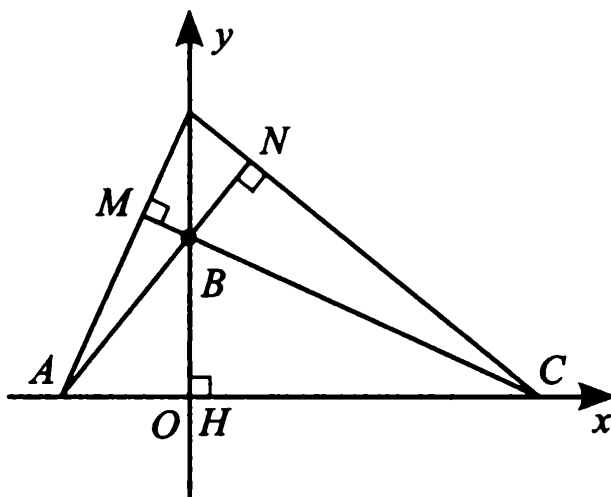


Рис. 169.

Тогда уравнение прямой AB , проходящей через точки $A\left(-\frac{13}{5}; 0\right)$ и $B\left(0; \frac{\sqrt{231}}{5}\right)$, имеет вид $y = \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5}$. Перпендикулярная ей прямая CN имеет угловой коэффициент $-\frac{13}{\sqrt{231}}$, а так как она проходит через $C\left(\frac{37}{5}; 0\right)$, то её уравнение имеет вид $y = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}$. Найдём координаты N , учитывая, что $N = AB \cap CN$.

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5}, \\ y = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \end{cases} \quad \frac{\sqrt{231}}{13}x + \frac{\sqrt{231}}{5} = -\frac{13}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}};$$

$$\frac{400}{13\sqrt{231}}x = \frac{250}{5\sqrt{231}}; x = \frac{13}{8}; \text{отсюда } y = \frac{13\sqrt{231}}{40} \text{ и } N\left(\frac{13}{8}; \frac{13\sqrt{231}}{40}\right).$$

Уравнение прямой BC , проходящей через точки $B\left(0; \frac{\sqrt{231}}{5}\right)$ и $C\left(\frac{37}{5}; 0\right)$, имеет вид $y = -\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5}$. Перпендикулярная ей прямая AM имеет угловой коэффициент $\frac{37}{\sqrt{231}}$, а так как она проходит через $A\left(-\frac{13}{5}; 0\right)$, то её уравнение имеет вид $y = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}$. Найдём координаты M , учитывая, что $M = BC \cap AM$.

$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5}, \\ y = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{231}}{37}x + \frac{\sqrt{231}}{5} = \frac{37}{\sqrt{231}}x + \frac{481}{5\sqrt{231}}; \frac{1600}{37\sqrt{231}}x = -\frac{50}{\sqrt{231}}; x = -\frac{37}{32},$$

отсюда $y = \frac{37\sqrt{231}}{160}$ и $M\left(-\frac{37}{32}; \frac{37\sqrt{231}}{160}\right)$.

Найдём длины отрезков NH , MH , MN :

$$NH^2 = \frac{13^2}{8^2} + \frac{13^2 \cdot 231}{40^2} = \frac{26^2}{5^2};$$

$$NH = \frac{26}{5};$$

$$MH^2 = \frac{37^2}{32^2} + \frac{37^2 \cdot 231}{160^2} = \frac{37^2}{160^2}(5^2 + 231) = \frac{37^2 \cdot 16^2}{160^2} = \frac{37^2}{10^2};$$

$$MH = \frac{37}{10};$$

$$MN^2 = \left(\frac{37}{32} + \frac{13}{8}\right)^2 + \left(\frac{37\sqrt{231}}{160} - \frac{13\sqrt{231}}{10}\right)^2 = \frac{25^2}{8^2}; MN = \frac{25}{8}.$$

$$P = NH + MH + MN = \frac{26}{5} + \frac{37}{10} + \frac{25}{8} = \frac{481}{40}.$$

Ответ: $\frac{481}{40}$.

С5. Разложим левую часть неравенства на множители:

$(x + a)(x - 3a - 2)(2x + a + 3) < 0$. Изобразим графически множество решений неравенства. Решения будут лежать в заштрихованной области. Так как уравнение $x^2 + a^2 = 9$ задает окружность, то решения системы — это точки дуг окружности, которые попали в заштрихованную область

(рис. 170). Ординаты концов этих дуг находим из систем: $\begin{cases} x + a = 0, \\ x^2 + a^2 = 9; \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3a - 2 = 0, \\ x^2 + a^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + a + 3 = 0, \\ x^2 + a^2 = 9. \end{cases} \quad \text{Решениями систем будут}$$

$$a_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, a_{3,4} = \frac{-6 \pm \sqrt{86}}{10} \text{ и } a_{5,6} = -3; \frac{9}{5} \text{ соответственно. Имеем}$$

$$a \in \left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-6 - \sqrt{86}}{10}; 3\right].$$

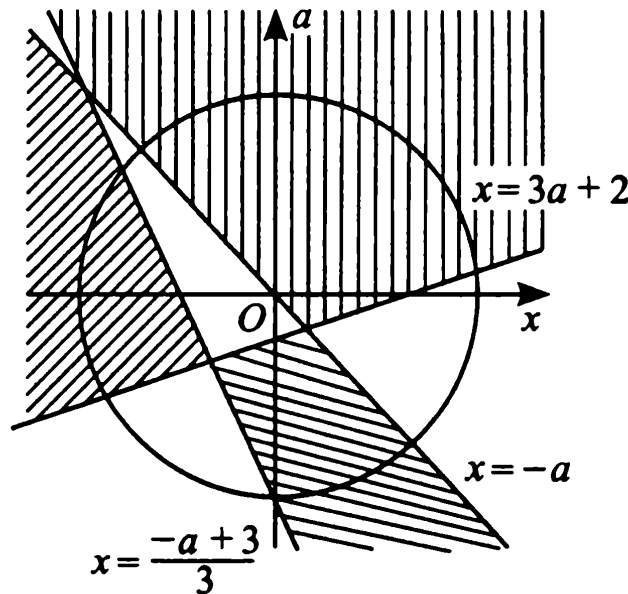


Рис. 170.

Ответ: $\left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-6 - \sqrt{86}}{10}; 3\right]$.

С6. Для любого действительного числа x через $[x]$ будем обозначать его целую часть, то есть такое целое число, что $0 \leq x - [x] < 1$.

Лемма. Для любого иррационального числа $x > 0$ и любого числа $b \in (0; 1)$ найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что $0 < px - q < b$.

Доказательство леммы. Разделим отрезок $[0; 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше b . Пусть количество этих отрезков равно k , тогда среди чисел $x - [x]$, $2x - [2x]$, \dots , $(k+1)x - [(k+1)x]$, есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Выберем такие числа $ix - [ix]$ и $jx - [jx]$, где $ix - [ix] \geq jx - [jx]$. Обозначим $\Delta = (ix - [ix]) - (jx - [jx]) = (i-j)x - ([ix] - [jx])$. По построению Δ — иррационально и $0 \leq \Delta < b$. К тому же $\Delta \neq 0$, так как в противном случае

$x = \frac{[ix] - [jx]}{i-j}$ — рациональное число. Введём обозначения: $p_0 = i - j$,

$q_0 = [ix] - [jx]$. Тогда $\Delta = p_0x - q_0$ и $0 < p_0x - q_0 < b$. Так как p_0 и q_0 являются целыми числами, то для выполнения последнего неравенства необходимо $p_0q_0 \geq 0$.

Рассмотрим 2 случая:

- 1) $p_0 > 0$, $q_0 \geq 0$. В этом случае лемма доказана, так как $p = p_0$, $q = q_0$.
- 2) $p_0 < 0$, $q_0 \leq 0$. Теперь подберём натуральное число k , чтобы $k\Delta$ было меньше 1, но отличалось от 1 менее чем на Δ . Это число $k = \left[\frac{1}{\Delta}\right]$. Дей-

ствительно, $\left[\frac{1}{\Delta}\right] \cdot \Delta < \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = 1$;

$\left[\frac{1}{\Delta}\right] \cdot \Delta + \Delta > \left[\frac{1}{\Delta}\right] \cdot \Delta + \Delta \cdot \left(\frac{1}{\Delta} - \left[\frac{1}{\Delta}\right]\right) = 1$. Имеем: $1 - \Delta < k\Delta < 1$,
 $-1 < -k\Delta < -1 + \Delta$,
 $0 < 1 - k\Delta < \Delta$, откуда следует неравенство
 $0 < 1 - k\Delta < b$,
 $0 < -kp_0x - (-kq_0 - 1)$. В этом случае $p = -kp_0$, $q = -kq_0 - 1$. Лемма доказана.

Перейдём к решению исходной задачи. Обозначим $100032452 = c$. Тогда по лемме найдутся целые числа p и q , $p > 0$, $q \geq 0$, что
 $0 < p \lg 7 - q < \lg(c + 1) - \lg c$. Отсюда следует, что найдётся натуральное число N , что $\lg c < N(p \lg 7 - q) < \lg(c + 1)$;
 $Nq + \lg c < Np \lg 7 < Nq + \lg(c + 1)$; $10^{Nq} \cdot c < 7^{Np} < 10^{Nq} \cdot (c + 1)$,
 откуда Np — искомая степень числа 7.

Ответ: Да.

Решение варианта № 29

В1. Присутствовали на занятиях $100\% - 5\% = 95\%$, то есть

$1200 \cdot \frac{95}{100} = 1140$ учеников. Из них обедали в столовой $1140 \cdot \frac{40}{100} = 456$ человек.

Ответ: 456.

В2. Из данных диаграммы следует, что наименьшая норма осадков была зафиксирована во 2-м месяце.

Ответ: 2.

В3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = 81^{-2x}$. Заметим, что $81^{-2x} = (3^4)^{-2x} = 3^{-8x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}$.

Таким образом, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}$; $3x + 12 = 8x$; $5x = 12$; $x = 2,4$.

Ответ: 2,4.

В4. По условию трапеция $ABCD$ — равнобедренная и $\angle AKD = 60^\circ$, поэтому $\triangle AKD$ — равносторонний. $\frac{RC}{KR} = \tg 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. рис. 171),

$$RC = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2, BC = 2RC = 4.$$

$$\frac{KL}{LD} = \tg 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, LD = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 6, AD = 2LD = 12, AD + BC = 16.$$

Ответ: 16.

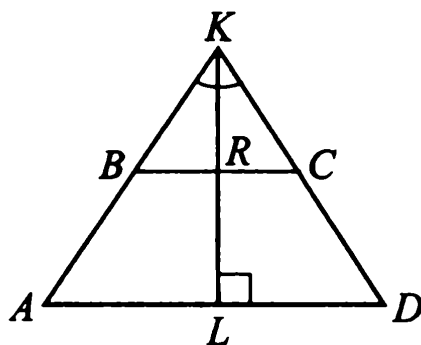


Рис. 171.

В5. Услуга «Счастье» позволит сэкономить $0,15 \cdot 450 - 50 = 17,5$ (руб.), услуга «Вызов свободе» $(700 \cdot 0,08 - 120) = -64$, то есть подключать её невыгодно. Услуга «Паук» позволит сэкономить $500 \cdot 0,2 - 60 = 40$ (руб.), то есть выгодно подключать услуги «Счастье» и «Паук», что позволит сэкономить $40 + 17,5 = 57,5$ (руб.).

Ответ: 57,5.

В6. Нетрудно заметить, что данный треугольник прямоугольный ($\angle ABC = 90^\circ$), значит, центр описанной окружности P лежит на середине гипотенузы AC . Так как $A(1; 5)$ и $C(5; -1)$, то $P\left(\frac{1+5}{2}; \frac{5-1}{2}\right)$, $P(3; 2)$.

Ответ: 3.

В7. $\frac{7x - 13y + 8}{3x - 8y + 14} = 5$; $7x - 13y + 8 = 15x - 40y + 70$; $8x - 27y + 62 = 0$, $8x - 27y + 68 = 6$.

Ответ: 6.

В8. Согласно условию, прямая $y = -4x + 1$ параллельна касательной к данной кривой. Угловой коэффициент касательной совпадает с угловым коэффициентом заданной прямой, т.е. $k = -4$. С другой стороны, $k = y'(x_0)$, $y'(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 10x + 3$. Следовательно, абсциссу точки касания можно найти из уравнения $3x_0^2 + 10x_0 + 3 = -4$.

Отсюда $x_0 = -\frac{7}{3}$ или $x_0 = -1$. Наибольшая из абсцисс равна -1 .

Ответ: -1 .

В9. Так как все рёбра тетраэдра равны между собой, то тетраэдр правильный. Стороны четырёхугольника, являющегося сечением, — это средние линии граней (треугольников), на которых они лежат. Поэтому каждая из сторон четырёхугольника равна половине ребра тетраэдра, то есть 1,5. Диагонали этого четырёхугольника равны, так как являются расстояниями между серединами противоположных граней тетраэдра, а все эти рас-

стояния равны между собой в силу симметрии этого тетраэдра. Следовательно, четырёхугольник в сечении — квадрат, так как является ромбом с равными диагоналями. Его площадь равна $1,5^2 = 2,25$.

Ответ: 2,25.

В10. Лампочка будет гореть при условии $U \geq 5$; $10 \sin(\omega t) \geq 5$; $\sin(\omega t) \geq 0,5$. На протяжении первой секунды ωt меняется от 0° до 100° . На этом отрезке последнее неравенство выполняется при $\omega t \in [30; 100]$, то есть при $t \in [0,3; 1]$. Искомая часть времени равна $\frac{1-0,3}{1} \cdot 100\% = 70\%$.

Ответ: 70.

В11. $y' = 2 \cos x - 2(\cos x - x \sin x) - x = 2x \sin x - x = x(2 \sin x - 1)$.

$y' = 0$, $\begin{cases} x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$ так как $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$, то $\begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$ Найдём значе-

ния функции на концах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ и при $x = 0$:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0,5 \cdot \frac{\pi^2}{4} = -2 - \frac{1}{8}\pi^2 = \\ = \frac{-16 - \pi^2}{8};$$

$$y(0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 = 0; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - 0,5 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \\ = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi^2}{72}. \text{ Среди этих значений наибольшим является значение } y(0), \text{ равное } 0.$$

Ответ: 0.

В12. Пусть средний платёж за кредит составляет 10 000 руб. Тогда после первого повышения платёж стал 11 200 руб. После второго повышения — стал $11\,200 + \frac{11\,200 \cdot 12}{100} = 12\,544$ (руб.). Итак, в среднем за год платёж

$$\text{повысился на } \frac{(12\,544 - 10\,000) \cdot 100}{10\,000} = \frac{2544 \cdot 100}{10\,000} = 25,44 (\%).$$

Ответ: 25,44.

$$S\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), K\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\overrightarrow{BK} \left\{2; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}, \overrightarrow{AC} \{2; -2\sqrt{3}; 0\}.$$

Пусть φ — искомый угол, тогда $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BK}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{3} + 0 = 4 - \frac{2 \cdot 3}{3} = 2,$$

$$|\overrightarrow{BK}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}} = \sqrt{7};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 4; \cos \varphi = \frac{2}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}; \varphi = \arccos \frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{7}}{14}$.

С3. Область допустимых значений $|x| \leq 1$. Сделаем подстановку $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Заметим, что $\sin t \geq 0$ при таких t . Уравнение примет вид: $\cos t(1 - 2\cos^2 t)\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{1}{8}, -\cos t \cdot \cos 2t\sqrt{\sin^2 t} = \frac{1}{8};$

$$\cos t \cos 2t |\sin t| = -\frac{1}{8}; |\sin t| = \sin t, \text{ т. к. } \sin t \geq 0. \sin t \cos t \cos 2t = -\frac{1}{8};$$

$$\sin 2t \cos 2t = -\frac{1}{4}; \sin 4t = -\frac{1}{2}; \begin{cases} 4t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 4t = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, \\ t = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}. \end{cases}$$

Учитывая, что $t \in [0; \pi], t = \frac{11\pi}{24}; \frac{23\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}$. Вернёмся к исходной

переменной: $x = \cos t$, тогда корни уравнения $\cos \frac{11\pi}{24}; \cos \frac{23\pi}{24}; \cos \frac{7\pi}{24}; \cos \frac{19\pi}{24}$.

Ответ: $\cos \frac{11\pi}{24}; \cos \frac{23\pi}{24}; \cos \frac{7\pi}{24}; \cos \frac{19\pi}{24}$.

Система имеет решения при $a \in [-4; 2, 4]$.

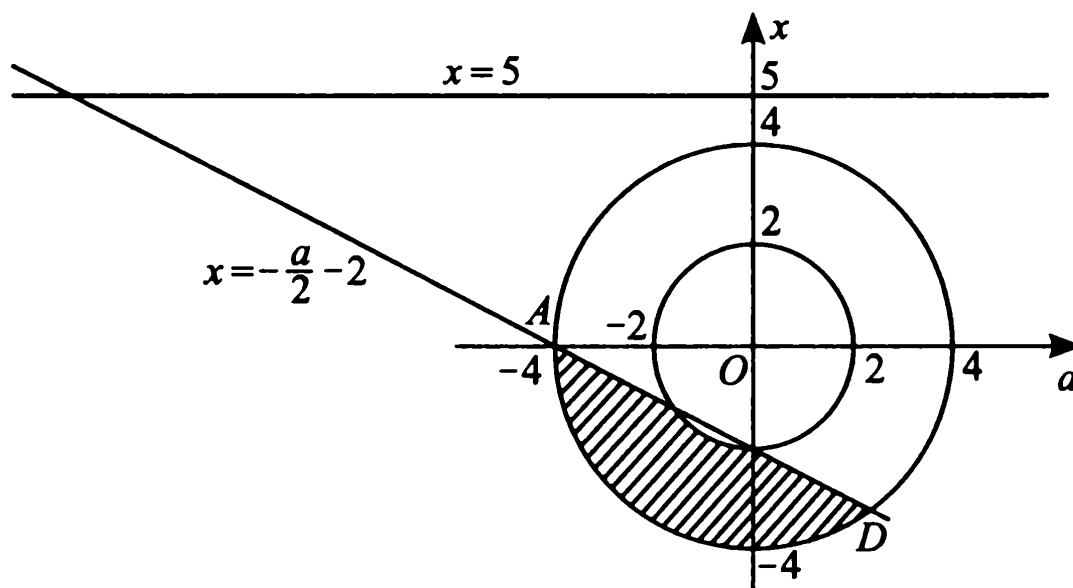


Рис. 174.

Ответ: $a \in [-4; 2, 4]$.

С6. Если $n \leq 8$, то данное число $A = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^n(1 + 2^{8-n} + 2^{11-n})$ является произведением четного числа 2^n и нечетного числа $1 + 2^{8-n} + 2^{11-n}$. Чтобы A было квадратом, n должно быть четным. Проверка показывает, что $n = 2, 4, 6, 8$ не подходят. Если $n = 9$, $A = 2^8(1 + 2 + 2^3) = 2^8 \cdot 11$, не подходит. $n = 10$, $A = 2^8(1 + 4 + 2^3) = 2^8 \cdot 13$ не подходит. Если $n > 10$, $A = 2^8(1 + 2^{n-8} + 2^3) = (2^4)^2(9 + 2^{n-8})$. Если A — квадрат, то $9 + 2^{n-8}$ тоже квадрат некоторого нечетного числа $2p + 1$, где $p \in \mathbb{N}$. $9 + 2^{n-8} = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$, тогда $2^{n-8} = 4(p^2 + p - 2)$; $2^{n-10} = p^2 + p - 2 = (p - 1)(p + 2)$. 2^{n-10} делится только на 1 и четные числа, но $p - 1$ и $p + 2$ различаются на 3, значит, они разной четности. Тогда $p - 1 = 1$, $p = 2$, $2^{n-10} = 1 \cdot 4 = 2^2$; $n - 10 = 2$, $n = 12$.

Ответ: $n = 12$.

Решение варианта № 30

В1. Розничная цена составляет $100\% + 30\% = 130\%$ от оптовой, поэтому оптовая цена равна $156 \cdot \frac{100}{130} = 120$ рублей. Так как $\frac{5000}{120} = 41 \frac{80}{120}$, то купить по оптовой цене можно максимум 41 учебник.

Ответ: 41.

В2. Искомым минимумом на графике является значение $4180 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$.

Ответ: 4180.

В3. $\ln \frac{12}{x-4} = \ln(x+7)$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-4 > 0, \\ x+7 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 4, \\ x > -7; \end{cases} x > 4$.

$$\frac{12}{x-4} = x+7; 12 = (x+7)(x-4);$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0; \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8, \\ x = 5. \end{cases} \text{ Учитывая ОДЗ, получаем единственный корень } x = 5.$$

Ответ: 5.

В4. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$;
 $AC^2 = 9 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0,28 = 23,04$; $AC = 4,8$;
 $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$ (см. рис. 175).

$$\frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} P \cdot r; r = \frac{4,8 \cdot 1,8}{3 + 3 + 4,8} = 0,8.$$

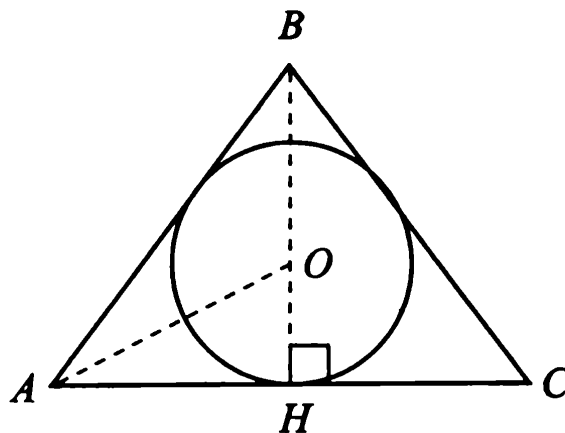


Рис. 175.

Ответ: 0,8.

В5. Необходимо приобрести $\frac{15\,000}{5} = 3000$ кирпичей. Стоимость заказа в фирме А составит $3000 \cdot 16 = 48\,000$ руб., а со скидкой $0,92 \cdot 48\,000 = 44\,160$ рублей.

В фирме Б стоимость самого заказа составит $15 \cdot 3000 = 45\,000$ руб., а с доставкой $45\,000 + 10\,000 \cdot 0,3 = 48\,000$ руб.

Стоимость заказа в фирме В составит $17 \cdot \frac{3000}{100} \cdot 90 = 45\,900$ рублей.

Таким образом, стоимость наиболее дешёвого заказа составит 44 160 рублей.

Ответ: 44 160.

В6. $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $|\overline{AC}| = AC = 15$, так как AC — большая диагональ ромба.

Ответ: 15.

В7. $4x - y + z = 1$ и $5x + 4y - 13z = 62$, тогда, сложив эти равенства, получим $9x + 3y - 12z = 63$, откуда $3x + y - 4z = 21$.

Ответ: 21.

В8. Согласно условию, прямая $y = 3x + 30$ параллельна касательной к данной кривой. Угловой коэффициент касательной совпадает с угловым коэффициентом заданной прямой, то есть $k = 3$. С другой стороны, $k = y'(x_0)$, $y'(x) = (x^3 + 5x^2 - 5x - 18)' = 3x^2 + 10x - 5$. Следовательно, абсциссу точки касания можно найти из уравнения $3x_0^2 + 10x_0 - 5 = 3$.

Отсюда $x_0 = -4$ или $x_0 = \frac{2}{3}$. Наименьшая из абсцисс равна -4 .

Ответ: -4 .

В9. Обозначим через V объём параллелепипеда. Тогда

$$V_{A_1ABD} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{6} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot AD = \\ = \frac{1}{6} \cdot V = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2. \text{ Аналогично } V_{A_1DD_1C_1} = 2, \quad V_{A_1BB_1C_1} = 2 \text{ и}$$

$V_{C_1BCD} = 2$. Найдём искомый объём:

$$V_{A_1DBC_1} = V - V_{A_1ABD} - V_{A_1DD_1C_1} - V_{A_1BB_1C_1} - V_{C_1BCD} = \\ = 12 - 2 - 2 - 2 - 2 = 4.$$

Ответ: 4.

В10. Лампочка будет гореть при условии $U \geq 15$; $30 \cos(80t + 30) \geq 15$; $\cos(80t + 30) \geq 0,5$. На протяжении первой секунды величина $80t + 30$ меняется от 30° до 110° . На этом отрезке последнее неравенство выполняется при $80t + 30 \in [30; 60]$, то есть при $t \in [0; 0,375]$. Искомая часть времени равна $\frac{0,375 - 0}{1} \cdot 100\% = 37,5\%$.

Ответ: 37,5.

$$\text{В11. } y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x^3}}{4x} = \frac{\sqrt[4]{x}(1 - 3\sqrt{x})}{4x}.$$

Если $y' = 0$, то $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, откуда $x = \frac{1}{9}$, но $\frac{1}{9} \notin [1; 16]$.

При $x \in [1; 16]$ $y' < 0$, следовательно, наименьшее значение функция $y(x)$ принимает при $x = 16$:

$$y(16) = \sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{16^3} = 2 - \sqrt[4]{2^{12}} = 2 - 8 = -6.$$

Ответ: -6 .

В12. Пусть x км — расстояние между городами. Тогда в первый день автомобиль проехал — $\left(\frac{x}{4} + 40\right)$ км, во второй день — $\left(\frac{x}{3} + 30\right)$ км, а в третий день $\left(\frac{17}{60}x + 45\right)$ км. Составим и решим уравнение.

$$\frac{x}{4} + 40 + \frac{x}{3} + 30 + \frac{17}{60}x + 45 = x. \quad 15x + 60 \cdot 40 + 20x + 60 \cdot 30 + 17x + 45 \cdot 60 = 60x, \\ 60x - 52x = 6900, 8x = 6900, x = 862,5.$$

Ответ: $862,5$.

$$\text{С1. Обозначим } 6^{y^2-2} = a, \text{ тогда } \begin{cases} a + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{5}{3}, & (1) \\ a^2 - 36\frac{1}{6}a + 6 = 0, & (2) \\ 5\sin x + 1 > 0. & (3) \end{cases}$$

Из (2) $a_1 = 36, a_2 = \frac{1}{6}$, тогда из (1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{5}{3} - a$; при $a = 36$ корней нет, при $a = \frac{1}{6}$ получим $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4\sin^2 x} = \frac{3}{2}; -4\sin^2 x = -1; \sin x = \pm \frac{1}{2}$.

Учитывая (3), $\sin x > -\frac{1}{5}$, то есть подходит $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Найдём y . $6^{y^2-2} = \frac{1}{6}; y^2 - 2 = -1; y^2 = 1;$
 $y_{1,2} = \pm 1$.

Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; 1\right), \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right), n \in Z$.

С2. Введём прямоугольную систему координат с началом в центре нижнего основания призмы и найдём координаты направляющих векторов прямых BD и AP (см. рис. 176, 177).

$A(0; 1; 0), D_1(-\cos 45^\circ; -\sin 45^\circ; 2), E(0; -1; 0), P(0; -1; 1),$
 $B(-\cos 45^\circ; \sin 45^\circ; 0),$

$D_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), \vec{BD}_1 \{0; -\sqrt{2}; 2\}; \vec{AP} \{0; -2; 1\};$

$$|BD_1| = \sqrt{0^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2} = \sqrt{6}; |AP| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Пусть φ — искомый угол, тогда $\cos \varphi = \frac{|\vec{BD}_1 \cdot \vec{AP}|}{|\vec{BD}_1| \cdot |\vec{AP}|} =$
 $= \frac{0 \cdot 0 + (-\sqrt{2}) \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{30}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{15}}.$

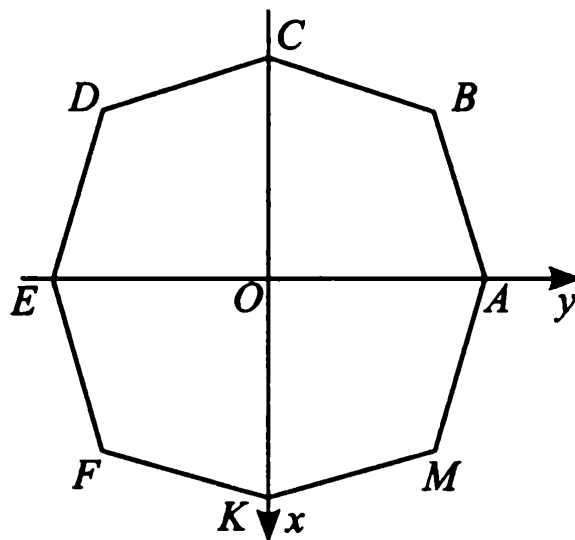


Рис. 176.

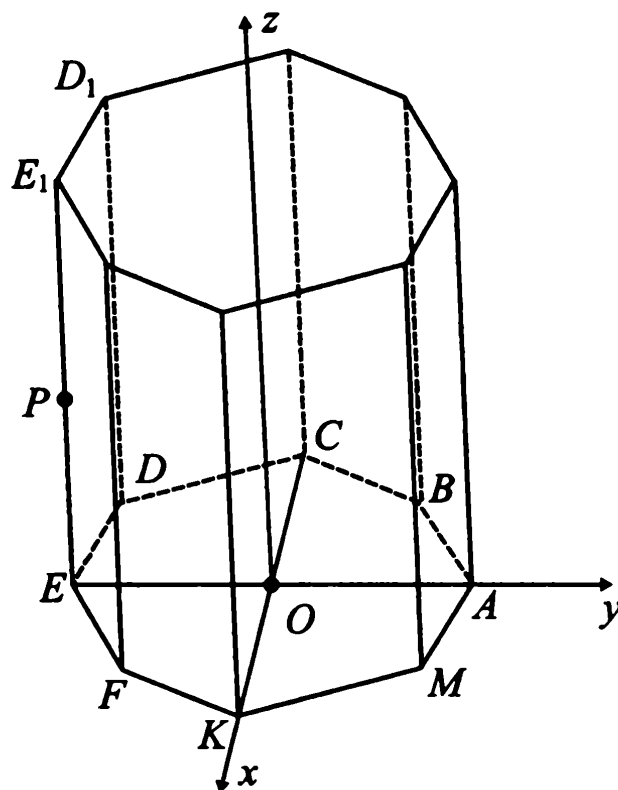


Рис. 177.

Ответ: $\arccos \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{15}}.$

С3. Так как $|x| \leq 1$, сделаем замену $\sin x = t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, так как $\cos t \geq 0$ при заданных значениях t . Уравнение примет вид: $3 \sin t - 4 \sin^3 t = \cos t(1 - 4 \sin^2 t)$
 $\sin 3t = \cos t(1 - 4(1 - \cos^2 t))$; $\sin 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$; $\sin 3t = \cos 3t$;
 $\operatorname{tg} 3t = 1$; $3t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; так как $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $t = -\frac{\pi}{4}$;
 $t = \frac{\pi}{12}$; $t = \frac{5\pi}{12}$.

Вернёмся к исходной переменной. $x = \sin t$; $x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x = \sin \frac{\pi}{12}; x = \sin \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{12}; \sin \frac{5\pi}{12}$.

С4. Пусть $AR \cap BC = K$ (см. рис. 178). Дуги AB и AC равны по 120° , углы BRA и ARC опираются на эти дуги и равны 60° . На продолжении BR за точку R отметим точку D так, что $RD = RC$. $\triangle RCD$ — правильный и $KR \parallel DC$. $\triangle RBK \sim \triangle DBC$, поэтому $\frac{BR}{RK} = \frac{BD}{DC} = \frac{BR+RD}{DC} =$
 $= \frac{BR}{DC} + \frac{RD}{DC} = \frac{BR}{DC} + 1$; при $RC > RB$. $\frac{BR}{RK} = \frac{BR}{RC} + 1$; $\frac{RC-40}{21} =$
 $= \frac{RC-40}{RC} + 1$; $RC^2 - 82RC + 840 = 0$; $RC = 70, RB = 30$. $RC = 12$ (не подходит). Если $RC < RB$, $RB = 70$.

Ответ: 30 или 70.

С5. Рассмотрим точки на координатной плоскости, координаты которых $(a; x)$ таковы, что система имеет решения. Преобразуем второе неравенство системы $D = (a+5)^2 - 4(4a+4) = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$.

$\begin{cases} x = -4, \\ x = -a - 1, \end{cases} (x+4)(x+a+1) \leq 0$. Точки, координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы, — это углы, ограниченные прямыми $x = -4$ и $x = -a - 1$. $(a^2 + x^2 - 9)(a^2 + x^2 - 4x - 5) = 0$, если $a^2 + x^2 = 9$; $a^2 + (x-2)^2 = 9$, это окружности радиуса 3 и центрами $(0; 0)$ и $(2; 0)$. Точки, координаты которых удовлетворяют первому неравенству, — это часть кругов, ограниченных данными окружностями (см. рис. 179). Точки, координаты которых удовлетворяют системе, — общие для (1) и (2) (см.

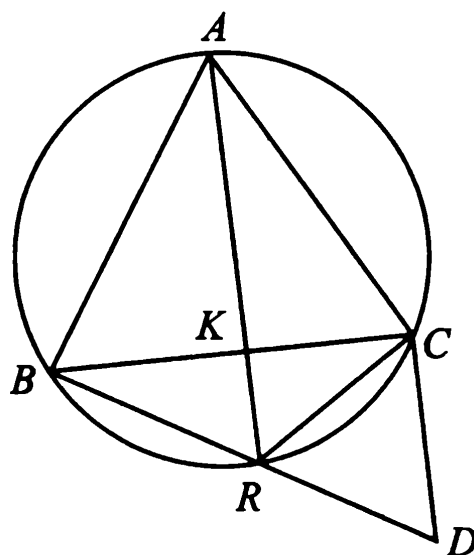


Рис. 178.

рис. 180). Найдём a для точек A и D . Для точки A : $\begin{cases} x = -a - 1, \\ x^2 + a^2 - 9 = 0; \end{cases}$
 $2a^2 + 2a - 8 = 0; a^2 + a - 4 = 0; a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$. Ордината точки A больше нуля, следовательно, $a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Точка D имеет координаты $(0; -3)$. Система имеет решения при $-3 \leq a \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, так как дуга AD содержит решения;
 при $a > \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ или $a < -3$ решений нет.

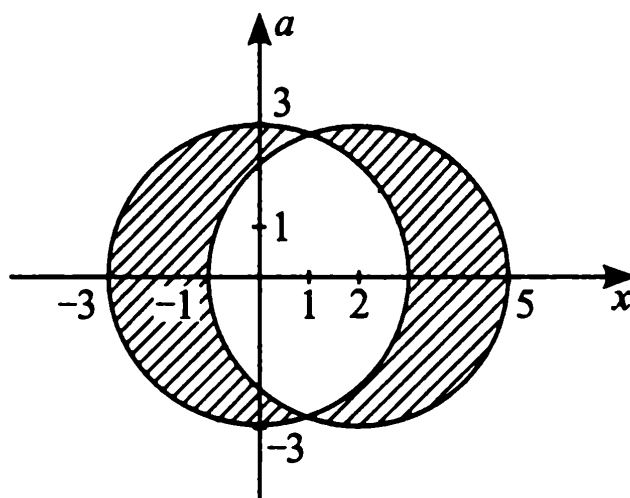


Рис. 179.

Ответ: $a \in \left[-3; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right]$.

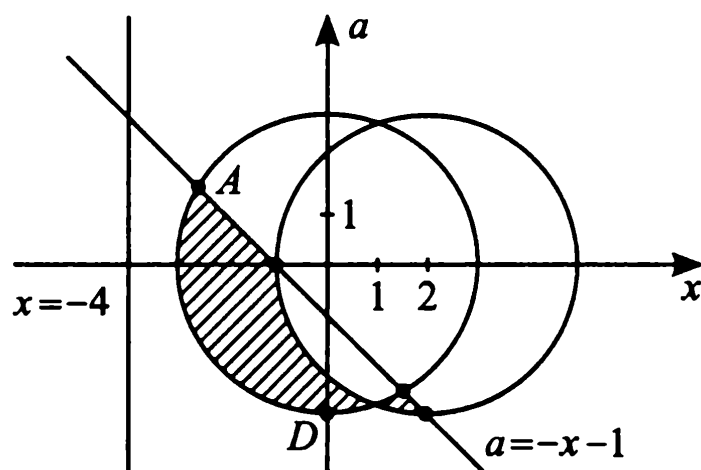


Рис. 180.

С6. $n = 1$, 14 не является полным квадратом. $n = 2$, $144 = 12^2$; $n = 3$, $1444 = 38^2$. Если $n \geq 4$, $\underbrace{144 \dots 4}_{n \text{ цифр}} = m^2$, где $m \in N$, то m — четно. $m = 2p$,

$$p \in N. A = \underbrace{144 \dots 4}_{n \text{ цифр}} = 4p^2.$$

$$A = \underbrace{144 \underbrace{0 \dots 0}_{n-2 \text{ цифры}}}_{n-2 \text{ цифры}} + \underbrace{44 \dots 4}_{n-2 \text{ цифры}} = 4(\underbrace{36 \underbrace{11 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}}}_{n-2 \text{ цифры}}).$$

$$\frac{A}{4} = \underbrace{36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}}}_{n-2 \text{ цифры}} = p^2 \text{ — нечетно, } p = 2t + 1. \underbrace{36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}}}_{n-2 \text{ цифры}} = 4t^2 + 4t + 1;$$

$\underbrace{36 \underbrace{1 \dots 1}_{n-2 \text{ цифры}} 0}_{n-3 \text{ цифры}} = 4(t^2 + t)$ делится на 4. Но если число делится на 4, оно не

может заканчиваться на 10. Получили противоречие. Значит, при $n \geq 4$ число A не может быть полным квадратом.

Ответ: $n = 2$; $n = 3$.

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2010. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2010. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
3. Кодификатор элементов содержания для составления контрольных измерительных материалов для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2010. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2011 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2010. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ №1897 от 17.12.2010.
6. Проект ФГОС среднего (полного) общего образования (10–11 классы). [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: Министерство образования и науки РФ. — 2011. — Режим доступа: <http://mon.gov.ru/pro/fgos/oob2/>, свободный.
7. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012. Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. — 416 с.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2012**

Учебно-методическое пособие

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Обложка *А. Вартаков*

Компьютерная верстка *А. Ковалевская*

Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать 08.08.2011.

Формат 60х84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл печ л 12,1.

Тираж 20 000 экз. Заказ № 265.

Издательство ООО «ЛЕГИОН-М» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

ООО «ЛЕГИОН-М»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение». 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.

**Пособия издательства «Легион» можно приобрести
в книоторговых организациях:**

АБАКАН

ООО «Кругозор Иванова и К»
(3902) 22-36-40
ГОУ ДПО ХРИПК и ПРО
(3902) 22-70-12, 2-61-22

АНАПА

ИП Ладанова Н. И.
(86133) 3-72-76

АРХАНГЕЛЬСК

ООО «Оберег»
(8182) 65-12-41, 20-72-12, 65-24-77
Магазин учебной литературы
«Школьный мир»
(8142) 78-24-43

АСТРАХАНЬ

ИП Агаев Сархаддин Х.О.
8-960-859-53-89
ИП Агаев Сейфаддин Х.О.
(8512) 72-77-93
ИП Щенина В.В.
8-917-180-88-18, (8512) 22-33-62

БАРНАУЛ

ИП Нестеренко Т.Н.
(3852) 36-80-93

БЕЛГОРОД

ИП Бабъяк И. А.
(4722) 34-15-59
Областное государственное учреждение
«Квант»
(4722) 34-17-34, 34-30-28
ИП Поляков А.М.
(4722) 35-61-83

БЕЛЕБЕЙ, респ. Башкортостан

ООО «Предприятие Прогресс»
(34786) 448-61, 467-39, 450-89

БОРИСОГЛЕБСК Воронежской обл.

ИП Мусатов С.Ю.
(47354) 64-560

БРЯНСК

ООО «Александрия»
(4832) 66-52-30, 74-41-80
ИП Белкина И. В.
(4832) 67-68-40
ИП Трубка Л. И.
(4832) 74-92-20, 74-61-64

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД

ООО «Маркет-Сервис»
(8162) 62-30-47
ООО «Книжный магазин «Прометей»
(8162) 77-82-96, 77-30-21

ВЛАДИМИР

ИП Митина Л.Г.
8-960-721-40-48, 8-960-721-55-48
ОГОУ ДПО ВИПКРО
(4922) 36-63-94, 36-63-69
ООО «Талета»
(4922) 21-26-66

ВОЛГОГРАД

ИП Гражданкин Н.Н.
(8442) 93-04-65, 90-05-85, 95-54-11
ООО «Кассандра»
(8442) 97-58-00, 97-85-85
ООО «Учебная и деловая книга»
(8442) 76-06-06, 76-34-34, 76-60-92,
76-60-93

ВОЛОГДА

ОАО «Библиотечный коллектор»
(8172) 72-04-75, 21-05-86, 72-20-45
ОАО «Источник»
(8172) 72-42-38
ИП Соловьев А.В.
(8172) 72-61-28, 21-17-36

ВОРОНЕЖ

ООО «Амиталь»
(4732) 26-77-77, 24-24-90, 26-35-19,
26-35-60
ООО «Риокса»
(4732) 21-08-66, 46-13-26, 46-43-94

ВЫШНИЙ ВОЛОЧЕК

ИП Лебедев В. Ф.
(48233) 6-41-03, 8-910-930-86-35

ГЕОРГИЕВСК

ИП Куцева Т.И.
(87951) 6-77-43, 6-39-12
ИП Филатов В.П.
8-928-366-05-00

ДЕРБЕНТ

ИП Шисинов И. Ш.
(87240) 4-35-00

ДИМИТРОВГРАД

ООО «Учебник»
(84235) 7-48-48

ЕЙСК

ООО «Телеком»
(86132) 69-069

ЕКАТЕРИНБУРГ

ООО «Алис-Альянс»
(343) 355-33-86, 355-43-92
ИП Евтюгина Н.С.
(343) 228-10-91, 228-10-79

ИВАНОВО

ООО «Новая мысль»
(4932) 41-64-16
ИП Ракова О.В.
(4932) 30-04-28

ИЖЕВСК

ООО «Инвис»
(3412) 78-16-24
ООО «Свиток»
(3412) 78-22-24, 51-05-37
ООО «Учебно-методическая книга»
(3412) 78-35-04

ЙОШКАР-ОЛА

ИП Бессолицын В.С.
(8362) 42-88-55
ИП Кошкин Н.Ю.
(8362) 63-41-55, 63-44-04
ИП Удальцова З.И.
(8362) 46-24-69

КАЗАНЬ

ИП Крамень И.Н.
(843) 292-46-51
ИП Микашкин В. Н.
8-903-344-90-63
ООО «Пегас»
(843) 272-34-55, 272-34-55, 295-12-71
ООО Торговый дом «Аист-Пресс»
(843) 525-55-40, 525-52-14

КАЛИНИНГРАД

ООО «Лабор»
(4012) 75-87-46

КАЛУГА

ИП Безбородова Т. И.
8-906-643-37-17
ИП Калуженский Г.В.
8-910-910-41-76
ИП Махонина А. А.
(4842) 56-10-10

ИП Настенко Т. Н.
8-910-913-08-49, (4842) 54-71-95

КИРОВ

ИП Кокорин Ю. П.
(8332) 29-40-40, 29-44-08

КОСТРОМА

ИП Аббакумова Э. О.
(4942) 31-53-76, 37-05-21, 37-04-21
ООО «Филлипок»
(4942) 41-50-91, 36-00-72
МУП города Костромы «Школьник»
(4942) 51-42-55, 31-25-58

КРАСНОДАР

ООО «Когорта»
(861) 279-54-21, 279-54-20
ООО «Ремикс»
(861) 267-24-49

КРАСНОЯРСК

ООО фирма «Градъ»
(391) 212-39-94; 226-91-45; 227-82-65;
ООО «Мила-В»
(391) 240-04-80

КУРГАН

ООО «Алис-К»
(3522) 24-61-04; 24-61-05
ООО «Кристалл»
(3522) 49-23-01

КУРСК

ООО «Аистенок»
(4712) 52-86-10
ИП Захаров С.Ю.
(4712) 35-16-51
ООО «Интеллект Образование XXI»
(4712) 52-97-03

КЫЗЫЛ, респ. Тыва

ИП Тунева Е. Г.
(39422) 2-29-27, 2-42-86, 2-42-86

ЛЕНИНОГОРСК, респ. Татарстан

ИП Исхакова Ф.Г.
(85595) 5-08-74

ЛИПЕЦК

ООО «ЛКТФ Книжный клуб 36,6»
(4742) 77-40-64, 48-79-32, 22-19-61,
22-19-50

МОСКВА

ООО «Абрис Д»
(495) 229-67-59

ООО ТД «БИБЛИО-ГЛОБУС»

(495) 621-78-39, 781-19-08, 621-19-47

ООО «Учебно-методический Центр «Глобус»

(495) 988-72-83, 721-17-13

НЕВИННОМЫСК

ИП Гагарин Н. В.

(86554) 6-74-94

НЕФТЕКАМСК

ИП Киямова Г. Ф.

(34783) 4-88-83, 9-07-34

НЕФТЕЮГАНСК

ИП Пугачева М.В.

(3463) 25-47-42

НИЖНИЙ НОВГОРОД

ИП Кулемина Л. М.

(831) 241-92-27, 241-95-57, 241-95-74

ИП Чернышев В. В.

(831) 436-58-14

НОВОРОССИЙСК

ООО «Центр социальных инициатив»

(8617) 63-17-04

НОВОСИБИРСК

ИП Березкина Е.В.

(383) 223-47-71

ИП Камалетдинов Р.Р.

(383) 28-999-06, 224-63-48

ООО «СибВерк»

(383) 212-50-90

ОМСК

ООО «Принт ТФ»

(3812) 53-52-73, 53-42-73

ООО «Сфера»

8-960-989-48-65

ООО «Форсаж»

(3812) 23-35-71, 57-88-56, 53-89-67

ОРЕЛ

ЗАО «Орловский учебный коллектор»

(4862) 74-48-34, 75-29-11

ОРЕНБУРГ

ООО «Фирма «Фолиант»

(3532) 77-46-92, 77-40-33

ПЕРМЬ

ИП Жмыхова Г.И.

(342), 226-66-91, 226-44-10

ИП Габзалилов М.Х.

(342) 245-24-37

ПЕТРОЗАВОДСК

ООО «Азбука»

(8142) 78-55-03

ООО Книжный магазин «Экслибрис»

(8142) 76-33-76, 76-75-51

Пос. ЛАЗАРЕВСКАЯ Краснодарского края

ИП Зайцев А. А.

8-918-916-71-66, (8622) 70-74-13

ПСКОВ

ИП Васильева А. В.

(8112) 66-25-04

ОАО «Псковский областной учебный коллектор»

(8112) 56-93-63, 58-58-36

ПЯТИГОРСК

ПБОЮЛ Бердникова Л.А.

(8793) 33-88-80, 39-47-17

ИП Борисковский В.А.

(8793) 39-02-54, 39-02-53

РОСТОВ-НА-ДОНУ

ООО «Алтай»

(863) 262-37-95

ООО «Донская школа»

(863) 267-56-11

ИП Евдокимов И. А.

(863) 279-39-11, 26-35-331

ОАО «Ростовкнига»

(863) 295-89-32, 278-36-23

ИП Рудницкий А.В.

(863) 291-03-53, 234-82-96

САМАРА

Магазин «Учебная книга»

(846) 995-58-68

ООО «МЕТИДА-ОПТ»

(846) 269-17-17

ООО «Чакона»

(846) 331-22-33

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

ООО «Век развития»

(812) 924-04-58

ООО «Коллибри»

(812) 703-59-94; 703-59-95; 703-59-75

ООО «Санкт-Петербургский Дом Книги»

(812) 448-23-57

САРАНСК

ГУП РМ «Мордовское книжное издательство»

(8342) 47-05-91

САРАТОВ

ИП Вавилов О.Ю.
(8452) 222-404
ООО «Гемера-Плюс»
(8452) 64-37-37, 64-78-24
ООО «Стрелец и К»
(8452) 52-25-24

СМОЛЕНСК

ИП Воронцов С.В.
(4812) 65-62-94, 32-75-21
ИП Кормильцева И. В.
(4812) 38-93-52
ИП Кудашова Н.Н.
(4812) 65-86-65

СОЧИ

ООО «Анис»
(8622) 92-33-51, 64-83-56
МУП г. Сочи «Книги»
(8622) 64-14-61, 64-69-28

СТАВРОПОЛЬ

ИП Апурин А.И.
(8652) 28-07-30, 28-23-81
ИП Колесников А.П.
8-928-650-29-33
ООО «Ставрополь-Сервис-Школа»
(8652) 57-47-27, 72-87-40

СЫКТЫВКАР

ИП Коврижных Д.Г.
(8212) 66-37-35

ТАГАНРОГ

ИП Боринский И.Г.
(8634) 61-03-57

ТАМБОВСКАЯ ОБЛ.

ГОУ ДПО «Тамбовский областной ИПК
работников образования»
(8-4752) 63-05-08

ТВЕРЬ

ООО «ВООК-СЕРВИС»
(4822) 34-52-11
ООО «Кириллица»
(4822) 32-05-68

ТИХОРЕЦК

ООО «Астреля»
(86196) 7-36-42, 7-36-53

ТОМСК

Книжный магазин-музей
«Петр Макушин»
(3822) 51-58-33

ТУЛА

ООО «Система плюс»
(4872) 31-29-23, 70-02-48, 32-60-94

ТЮМЕНЬ

ООО «Книжник»
(3452) 35-72-12
ИП Нестеров В.А.
(3452) 20-56-10

УЛАН-УДЭ

ИП Шашина О. К.
(3012) 22-01-05

УЛЬЯНОВСК

ИП Селезнев Ю. И.
(8422) 53-33-33

УФА

ГУП Башучколлектор РБ
(3472) 63-37-78, 83-95-66
ООО «Мир книги»
(3472) 82-56-30, 82-83-92, 82-89-65

ЧЕБОКСАРЫ

Чувашский учколлектор
(8352) 56-08-55, 61-45-76, 62-85-57
Чувашский бибколлектор
(8352) 62-15-67, 62-03-70, 62-28-46

ЧЕЛЯБИНСК

ООО «ИнтерСервис ЛТД»
(351) 247-74-14, 247-74-13
ООО ПК «Урал-пресс»
(351) 772-69-57, 773-48-37, 771-44-03

ЭЛИСТА

ИП Борлыкова Л.А.
(84722) 2-86-42

ЯРОСЛАВЛЬ

ИП Зелинская Т.В.
(4852) 73-40-07
ГОУ «Институт развития образования»
(4852) 73-93-00, 21-06-83

ИЗДАТЕЛЬСТВО



344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550 (для писем)

Тел.: (863) 303-05-50, 248-14-03

e-mail: legionrus@legionrus.com

www.legionr.ru

Книги для тех, кто учится и учит

Издательство «Легион» специализируется на выпуске учебно-методических пособий для школьников, абитуриентов и учителей

Книги объединены в серии:

**«Готовимся к ЕГЭ», «ГИА-9», «Тематические тесты»,
«Промежуточная аттестация», «Готовимся к олимпиаде»,
«Начальное общее образование», «Мастер-класс»**

Пособия издательства «Легион» позволяют:

- ✓ эффективно подготовиться к любым экзаменам и контрольным работам и систематизировать свои знания;
- ✓ освоить методы решения трудных, в том числе и олимпиадных задач;
- ✓ ознакомиться с идеями единого государственного экзамена (ЕГЭ) и государственной итоговой аттестации за курс основной школы (ГИА-9).

Книги издательства соответствуют требованиям государственных образовательных стандартов, в том числе стандартов второго поколения, поэтому применимы ко всем действующим программам и УМК.

Издательство ООО «Легион» **включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01 2010 № 15987.**

ОПТОВИКАМ, МАГАЗИНАМ, ПРЕДПРИНИМАТЕЛЯМ ВСЕХ РЕГИОНОВ!

- ✓ Удобные условия
- ✓ Индивидуальный подход к каждому клиенту
- ✓ Оперативная доставка
- ✓ Проверенное качество



Рекомендует

Готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2012

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова



Пособие содержит необходимый материал и рекомендации для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **30 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по плану ЕГЭ с учётом опыта экзамена 2011 года;
- **задачник** (около 1500 задач), предназначенный для более детальной отработки разных видов тестовых заданий;
- **подробное решение** одного варианта;
- математический **справочник**.

Наша книга позволит выпускникам и абитуриентам, не обращаясь к дополнительной литературе, получить на ЕГЭ желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи экзамена, до максимально возможного, практически до 100 баллов. Пособие может быть использовано выпускниками общеобразовательных учреждений и преподавателями.

Вместе с данной книгой выходит в свет и её решебник.



Рекомендует

Готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА
УЧИМСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: ЗАДАНИЕ С5

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова



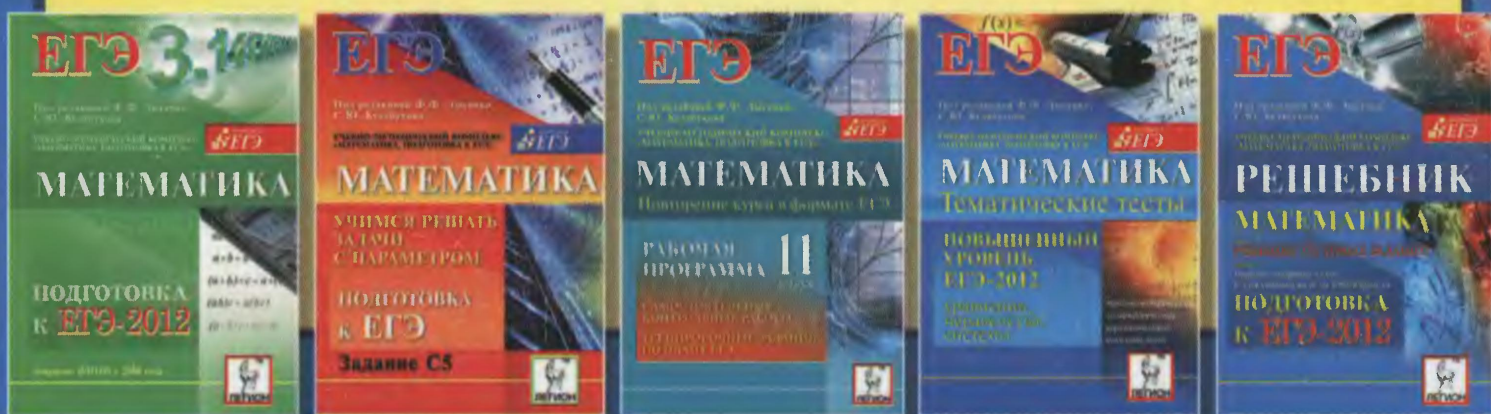
Пособие содержит задания по отдельным темам, которые являются традиционными в курсе математики и потому, как правило, входят в ЕГЭ. Они полностью охватывают задания типа С1 и С3 последнего плана ЕГЭ. Каждой теме посвящен отдельный параграф, включающий 10 вариантов: 1 демонстрационный с решениями, 9 — тренировочных. Каждый вариант состоит из 8 заданий.

Цель настоящей книги — выработать навыки решения заданий с развернутым ответом тестов ЕГЭ. Это пособие необходимо всем выпускникам, стремящимся получить на ЕГЭ высокий балл, а также учащимся 10-х классов, которым нужно закрепить пройденные темы

под углом зрения ЕГЭ. Пособие также может быть полезно и педагогам, осуществляющим подготовку учащихся к ЕГЭ.

Учебно-методический комплекс
«Математика. Подготовка к ЕГЭ»
под редакцией Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова
включает следующие пособия для учащихся и учителей:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012
- Решебник. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012
- Математика. Устные вычисления и быстрый счет. Тренировочные упражнения за курс 7-11 классов
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В1 – В6). Пособие для «чайников»
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2012 (В7 – В12). Пособие для «чайников»
- Математика. Тематические тесты. Повышенный уровень ЕГЭ-2012 (С1, С3). Уравнения, неравенства, системы
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5
- Математика. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа. 11 класс. Самостоятельные, контрольные работы. Тренировочные задания по плану ЕГЭ
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012. Учебно-тренировочные тесты
- Карманный справочник по математике



Издательство включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

ISBN 978-5-91724-093-0



344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

Сайт, интернет-магазин: www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН



Опт, мелкий опт, интернет-магазин, книга — почтой