

ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова



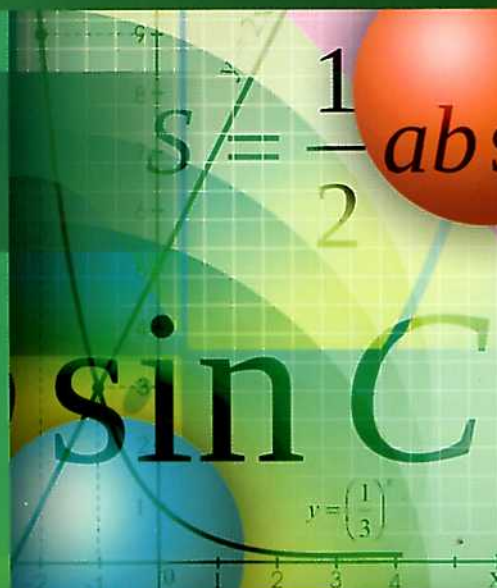
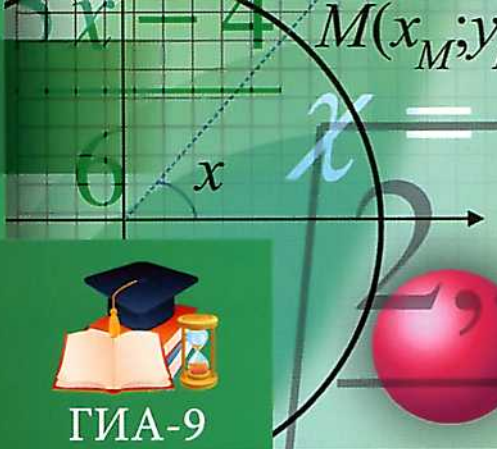
ГИА-9

МАТЕМАТИКА РЕШЕБНИК

ПОДГОТОВКА К **ГИА-2014**

9 класс

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»



Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА-9»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

9 КЛАСС

ПОДГОТОВКА К ГИА-2014

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

Рецензенты: *Л. Н. Евич* — кандидат физико-математических наук,
доцент ДГТУ

Л. Л. Иванова — заслуженный учитель Российской
Федерации

Авторский коллектив:

*Войта Е. А., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Нужа Г. Л.,
Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Ханин Д. И.*

**Р 47 Решебник. Математика. 9 класс. Подготовка к государственной
итоговой аттестации-2014:** учебно-методическое пособие / Под
ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону:
Легион, 2013. — 320 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0422-7

Решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации (ГИА-9) по математике в 9-м классе. Он содержит решения **всех тестовых заданий повышенного уровня сложности и всех задач из раздела «Задачник»** пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова, за исключением решений, которые представлены в указанной выше книге.

Предлагаемый материал поможет девятиклассникам отработать навыки выполнения заданий предстоящего экзамена и систематизировать знания в процессе подготовки к ГИА-9. Пособие также адресовано учителям, организующим подготовку учеников к экзамену.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ГИА-9»**, в который также включены пособия «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014», «Математика. Базовый уровень ГИА-2014» (3 пособия — «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика») и др.

Обсудить издание, оставить отзыв можно на официальном форуме издательства <http://forum.legionr.ru>.

ББК 22.14

ISBN 978-5-9966-0422-7

© ООО «Легион», 2013

Оглавление

Глава I. Решения учебно-тренировочных тестов	4
Решение варианта № 1	4
Решение варианта № 2	7
Решение варианта № 3	10
Решение варианта № 4	13
Решение варианта № 6	16
Решение варианта № 7	18
Решение варианта № 8	22
Решение варианта № 9	25
Решение варианта № 10	28
Решение варианта № 11	31
Решение варианта № 12	34
Решение варианта № 13	37
Решение варианта № 14	39
Решение варианта № 15	42
Решение варианта № 16	45
Решение варианта № 17	48
Решение варианта № 18	51
Решение варианта № 19	54
Решение варианта № 20	57
Решение варианта № 21	60
Решение варианта № 22	63
Решение варианта № 23	66
Решение варианта № 24	69
Решение варианта № 25	71
Решение варианта № 26	74
Решение варианта № 27	76
Решение варианта № 28	80
Решение варианта № 29	83
Решение варианта № 30	86
 Глава II. Решения задач из сборника	 89
Литература	318

Глава I. Решения учебно-тренировочных тестов

Решение варианта № 1

21. Подставим $y = 2x + 1$ во второе уравнение системы. Получим $x^2 - (2x + 1) + (2x + 1)^2 - 2x(2x + 1) = 4x + 21$. Раскрыв скобки и перенеся все слагаемые в левую часть, придём к уравнению $x^2 - 4x - 21 = 0$. Корнями полученного уравнения являются числа $x_1 = -3$ и $x_2 = 7$. При $x = -3$ найдём $y = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$. При $x = 7$ найдём $y = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.

Ответ: $(-3; -5)$, $(7; 15)$.

22. Пусть x км/ч — скорость автобуса по новому расписанию, тогда $(x - 10)$ км/ч — скорость его движения по старому расписанию. По старому расписанию автобус преодолевал расстояние 325 км за $\frac{325}{x - 10}$ часов,

а по новому — за $\frac{325}{x}$ часов. Учитывая, что 40 мин $= \frac{2}{3}$ часа, получим

уравнение $\frac{325}{x} + \frac{2}{3} = \frac{325}{x - 10}$.

$$325(x - 10) + \frac{2}{3}x(x - 10) = 325x; \quad \frac{2}{3}x(x - 10) - 10 \cdot 325 = 0;$$

$$x(x - 10) - \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 325 = 0; \quad x^2 - 10x - 15 \cdot 325 = 0;$$

$$x^2 - 10x - 75 \cdot 65 = 0; \quad (x - 75)(x + 65) = 0; \quad x = 75 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 75 км/ч.

23. $y = \frac{x - 3}{3x - x^2}$, $y = \frac{x - 3}{x(3 - x)} = -\frac{1}{x}$ при условии $x - 3 \neq 0$,

т.е. $x \neq 3$. Графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены во 2-ой и 4-ой четвертях, область определения $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 1).

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = -\frac{1}{x}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	+1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

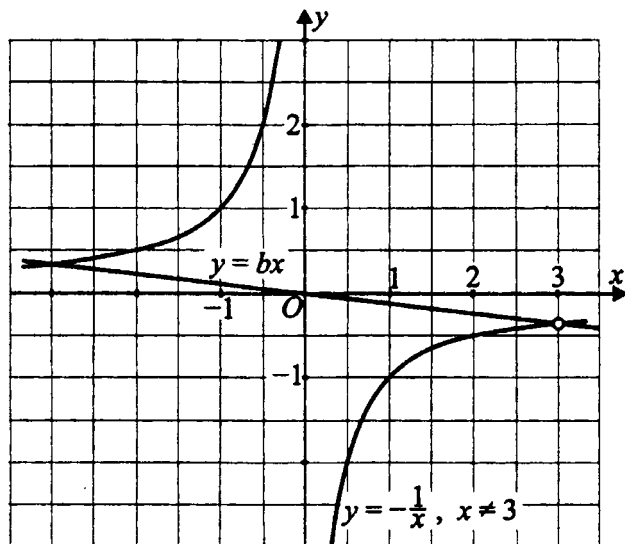


Рис. 1

Прямая $y = bx$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ ровно одну общую точку в том случае, когда $y = bx$ проходит через выколотую точку $(3; -\frac{1}{3})$, то есть $-\frac{1}{3} = b \cdot 3$, $b = -\frac{1}{9}$.

Ответ: $-\frac{1}{9}$.

24. Пусть CM — указанная медиана (см. рис. 2). Она делит прямой угол на углы 30° и 60° .

Так как $CM = AM = BM$ (радиусы окружности, описанной около $\triangle ABC$), то треугольники AMC и BMC равнобедренные, значит $\angle MBC = \angle MCB = 60^\circ$. Заметим, что $\triangle MBC$ равносторонний и $BC = 10$. $\angle CBM > \angle CAM$, поэтому $AC > BC$.

Ответ: 10.

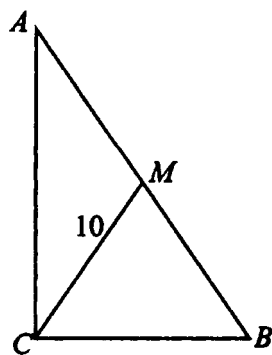


Рис. 2

25. KM , MN и KN — средние линии треугольника ABC (см. рис. 3), значит $KM = \frac{1}{2}AC$, $MN = \frac{1}{2}AB$, $KN = \frac{1}{2}BC$, то есть

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{KN} = \frac{AC}{KM} = 2, \text{ значит } \triangle KMN \sim \triangle ABC.$$

Аналогично $\triangle EFP \sim \triangle KMN$.

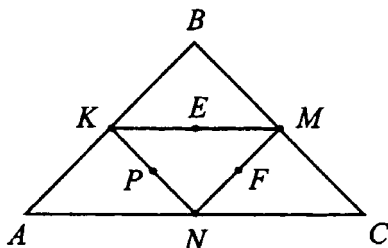


Рис. 3

26. Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 4),

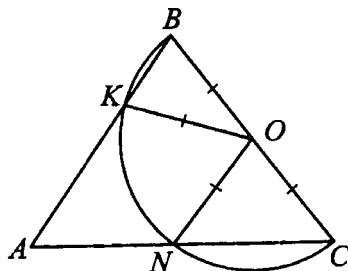


Рис. 4

$$AB = BC, \angle ABC = 56^\circ, \angle BAC = \angle BCA = 62^\circ.$$

O — центр полуокружности, K и N — точки пересечения этой полуокружности со сторонами AB и AC соответственно. OB , OK , ON , OC — радиусы полуокружности, значит $OB = OK = ON = OC$.

Из $\triangle BOK$ имеем $\angle OKB = \angle OBK = 56^\circ$,
 $\angle BOK = 180^\circ - 56^\circ - 56^\circ = 68^\circ$.

Из $\triangle ONC$ имеем $\angle ONC = \angle OCN = 62^\circ$,
 $\angle NOC = 180^\circ - 62^\circ - 62^\circ = 56^\circ$.

$$\angle KON = 180^\circ - \angle BOK - \angle NOC = 56^\circ.$$

Углы $\angle BOK$, $\angle KON$ и $\angle NOC$ — центральные углы полуокружности,

тогда $\sphericalangle BK = 68^\circ$, $\sphericalangle KN = 56^\circ$, $\sphericalangle NC = 56^\circ$.

Большую градусную меру имеет дуга BK .

Ответ: 68.

Решение варианта № 2

21. Подставим значение $y = x - 5$ во второе уравнение системы. Получим $(x - 5)^2 + (x - 5)x - x^2 - 4x = -9$. Раскрыв скобки и перенеся все слагаемые в левую часть, придём к уравнению $x^2 - 19x + 34 = 0$. Корнями полученного уравнения являются числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 17$. При $x = 2$ найдём $y = 2 - 5 = -3$. При $x = 17$ найдём $y = 17 - 5 = 12$.

Ответ: (2; -3), (17; 12).

22. Пусть мотоциклист затратил на прямой путь t часов, а на обратный путь $\left(t - \frac{1}{3}\right)$ часов (так как 20 мин = $\frac{1}{3}$ ч). Средние скорости движения мотоциклиста на прямом и обратном пути равны соответственно $\frac{120}{t}$ км/ч

и $\frac{120}{t - \frac{1}{3}}$ км/ч. Получим уравнение

$$\frac{120}{t} + 12 = \frac{120}{t - \frac{1}{3}}; \quad 120\left(t - \frac{1}{3}\right) + 12t\left(t - \frac{1}{3}\right) = 120t;$$

$$10\left(t - \frac{1}{3}\right) + t\left(t - \frac{1}{3}\right) = 10t;$$

$$t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{10}{3} = 0; \quad 3t^2 - t - 10 = 0; \quad (3t + 5)(t - 2) = 0; \quad t = 2 \text{ ч.}$$

Средняя скорость мотоциклиста на прямом пути равна $\frac{120}{t} = \frac{120}{2} = 60$ км/ч, тогда на обратном пути — $60 + 12 = 72$ км/ч.

Ответ: 72 км/ч.

23. $y = \frac{x+5}{x^2+5x} = \frac{x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{x}$ при условии $x+5 \neq 0$, т.е. $x \neq -5$. Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в 1-ой и 3-ей четвертях при $x \neq -5$, $x \neq 0$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 5).

x	-5	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

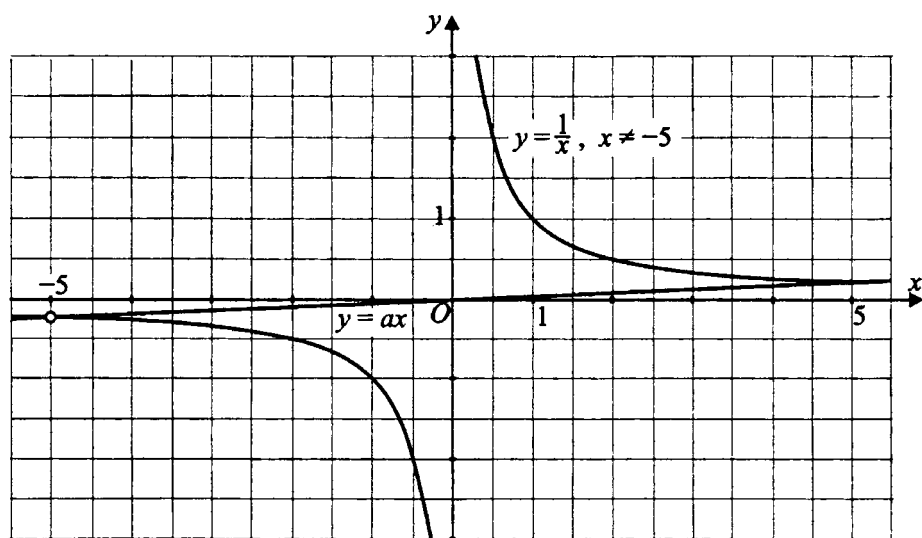


Рис. 5

Прямая $y = ax$, проходящая через начало координат, имеет с графиком функции $y = \frac{1}{x}$ ровно одну общую точку, если $y = ax$ проходит через выколотую точку $\left(-5; -\frac{1}{5}\right)$, то есть $-\frac{1}{5} = a \cdot (-5)$, $a = \frac{1}{25}$.

Ответ: $\frac{1}{25}$.

24. Обозначим меньший угол треугольника через x , тогда остальные его углы равны $2x$ и $3x$. Так как сумма углов треугольника равна $x + 2x + 3x = 180^\circ$, то $x = 30^\circ$ и треугольник прямоугольный с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (см. рис. 6).

Сторона $BC = 9$ лежит напротив угла в 30° , значит она равна половине гипотенузы.

Имеем $AB = 2 \cdot BC = 18$.

Ответ: 18.

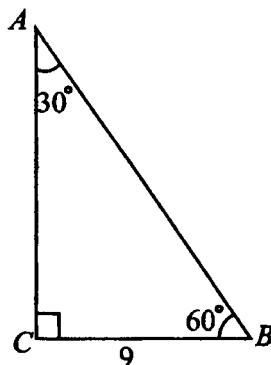


Рис. 6

25. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ с биссектрисами AK и CT (см. рис. 7).

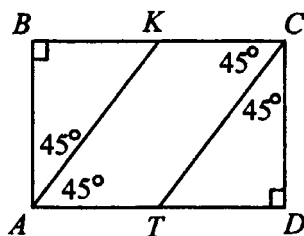


Рис. 7

$$\angle BAK = 45^\circ, \angle TCD = 45^\circ.$$

Треугольники ABK и CDT равны по стороне и прилежащим к ней двум углам ($AB = CD$, $\angle ABK = \angle CDT$, $\angle BAK = \angle TCD$) значит $AK = CT$. Более того, $AK \parallel CT$, так как равны соответственные углы KAT и CTD при пересечении прямых AK и CT прямой AD .

Итак, в четырёхугольнике $AKCT$ две стороны равны и параллельны, значит $AKCT$ — параллелограмм.

26. $\angle CAB = \angle HCB = 90^\circ - \angle ABC$ (см. рис. 8).

Пусть $BH = x$. $\triangle ABC \sim \triangle CBH$ по трём углам, значит $\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$;

$$\frac{15}{16+x} = \frac{x}{15}; \quad x^2 + 16x - 225 = 0; \quad (x+25)(x-9) = 0, \quad x = 9, \quad AB = 25,$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 20; \quad CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 12.$$

Для нахождения радиуса r вписанной окружности воспользуемся форму-

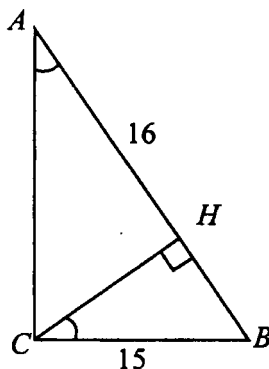


Рис. 8

лой $S = p \cdot r$, где p — полупериметр.

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (AC + BC + AB) \cdot r; \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = \frac{1}{2} (20 + 15 + 25) \cdot r; r = 5.$$

Ответ: 5.

Решение варианта № 3

21. Раскрыв скобки, получим $x^2 - x - 12 > 0$. Решим уравнение $x^2 - x - 12 = 0$, его корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -3$, откуда $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$. Запишем неравенство, равносильное исходному: $(x - 4)(x + 3) > 0$. Следовательно, $x \in (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$ (см. рис. 9).

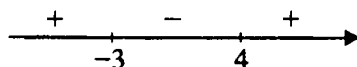


Рис. 9

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

22. Всего теплоход прошёл $60 \text{ км} + 25 \text{ км} + 45 \text{ км} = 130 \text{ км}$. Суммарное время его движения равно $\frac{60 \text{ км}}{30 \text{ км/ч}} + 1 \text{ ч} + \frac{45 \text{ км}}{22,5 \text{ км/ч}} = 2 \text{ ч} + 1 \text{ ч} + 2 \text{ ч} = 5 \text{ ч}$.

Средняя скорость движения теплохода равна $\frac{130 \text{ км}}{5 \text{ ч}} = 26 \text{ км/ч}$.

Ответ: 26.

23. При $a = 0$ обозначенная прямая вертикальна и проходит через начало координат, то есть совпадает с осью ординат. Ось ординат не имеет с гиперболой $y = \frac{3}{x}$ общих точек (см. рис. 10).

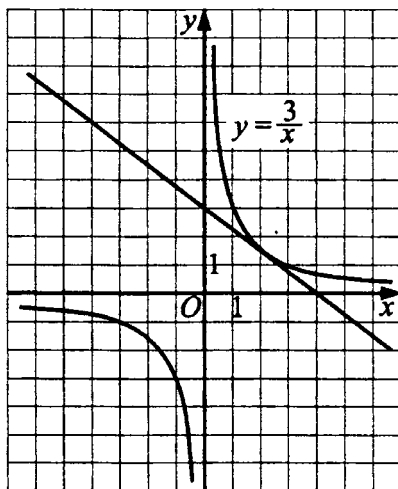


Рис. 10

При $a \neq 0$ прямая имеет вид $y = kx + b$. При этом $y(0) = 3$, откуда $k \cdot 0 + b = 3$, $b = 3$.

$y(a) = 0$, $ka + 3 = 0$, $k = -\frac{3}{a}$. Прямая имеет вид $y = -\frac{3}{a}x + 3$.

Рассмотрим уравнение $-\frac{3}{a}x + 3 = \frac{3}{x}$; $-x^2 + ax = a$; $x^2 - ax + a = 0$;
 $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$ (при этом $x \neq 0$, так как $a \neq 0$). Ровно одно решение будет при $a^2 - 4a = 0$. Так как $a \neq 0$, получим $a = 4$.

Ответ: 4.

24. Пусть CM — медиана (см. рис. 11).

Она делит прямой угол на $\angle ACM = 30^\circ$ и $\angle MCB = 60^\circ$.
 Так как $CM = AM = BM$, то $\angle CAM = \angle ACM = 30^\circ$,
 $\angle MBC = \angle MCB = 60^\circ$. Катет BC лежит напротив угла в 30° , значит

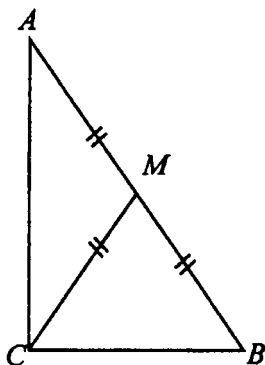


Рис. 11

$$BC = \frac{1}{2}AB = 7.$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 7\sqrt{3}.$$

Ответ: 7; $7\sqrt{3}$.

25. $AK : KC = 3 : 1$, тогда $AK : AC = 3 : 4$ (см. рис. 12).

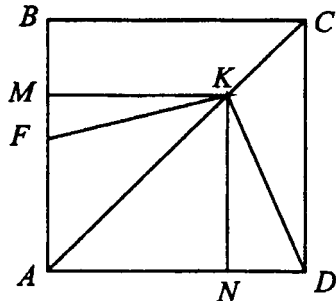


Рис. 12

$MK \parallel BC$, значит $\triangle AMK \sim \triangle ABC$ и $MK : BC = 3 : 4$; $MK = \frac{3}{4}a$, где a — сторона квадрата $ABCD$. Аналогично $KN = \frac{3}{4}a$.

$FM = AM - AF = \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a$, $ND = AD - AN = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$. Тре-

угольники KMF и KND прямоугольные с катетами $\frac{3}{4}a$ и $\frac{1}{4}a$, значит они равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $\angle MKF = \angle NKD$.
 $\angle DKF = \angle MKN - \angle MKF + \angle NKD = \angle MKN = 90^\circ$.

26. KF — средняя линия $\triangle ABC$, значит $BC = 2KF = 10$ (см. рис. 13).

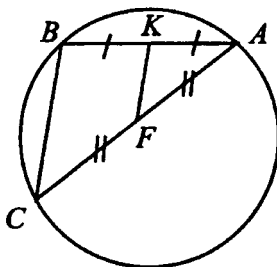


Рис. 13

По теореме косинусов

$$\cos \angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{100 + 289 - 81}{2 \cdot 17 \cdot 10} = \frac{77}{85},$$

$$\sin \angle BCA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCA} = \frac{36}{85}.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{2 \cdot \sin \angle BCA} = R,$

$$R = \frac{9 \cdot 85}{2 \cdot 36} = \frac{85}{8} = 10,625.$$

Ответ: 10,625 см.

Решение варианта № 4

21. Раскрыв скобки, получим $x^2 - 8x - 180 \leq 0$. Решим уравнение $x^2 - 8x - 180 = 0$, его корни $x_1 = -10$ и $x_2 = 18$, откуда $x^2 - 8x - 180 = (x + 10)(x - 18)$. Запишем неравенство равносильное исходному: $(x - (-10))(x - 18) \leq 0$. Следовательно, $x \in [-10; 18]$ (см. рис. 14).

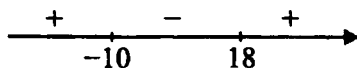


Рис. 14

Ответ: $[-10; 18]$.

22. Пусть первый теплоход двигался со скоростью x км/ч, тогда скорость второго равна $(x + 10)$ км/ч. Первый теплоход находился в пути $\frac{60}{x}$ часов,

а второй $\frac{60}{x + 10}$ часов. Получим уравнение $\frac{60}{x} = \frac{60}{x + 10} + 1$;

$$60(x + 10) = 60x + x(x + 10); \quad x^2 + 10x - 60 \cdot 10 = 0;$$

$$x^2 + 10x - 600 = 0; \quad (x + 30)(x - 20) = 0; \quad x = 20 \text{ км/ч.}$$

Итак, скорость первого теплохода равна 20 км/ч, тогда скорость второго — 30 км/ч.

Ответ: 30.

23. Построим график функции $y = -\frac{3}{x}$ и отметим точку $(0; 3)$ (см. рис. 15).

Рассмотрим возможное расположение точки $(a; 0)$. Очевидно, что при $a = 0$ прямая и гипербола не пересекаются. При $a \neq 0$ прямая имеет вид $y = -\frac{3}{a}x + 3$, $y(a) = 0$, $y(0) = 3$. Заметим, что прямая имеет ровно одну общую точку с гиперболой тогда и только тогда, когда уравнение $-\frac{3}{x} = -\frac{3x}{a} + 3$ имеет единственный корень. $x^2 - ax - a = 0$; $D = a^2 + 4a = 0$. Учитывая, что $a \neq 0$, получим $a = -4$.

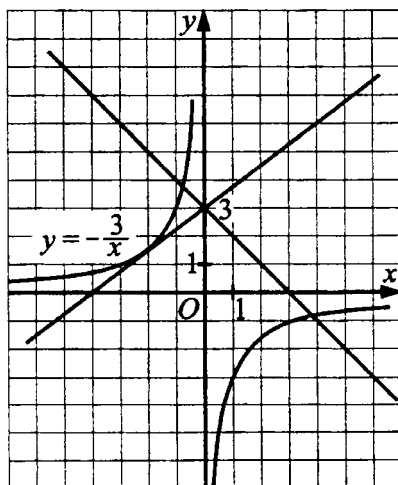


Рис. 15

Ответ: -4.

24. Пусть CM — медиана (см. рис. 16).

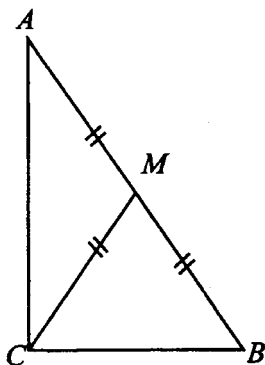


Рис. 16

Она делит прямой угол на $\angle ACM = 30^\circ$ и $\angle MCB = 60^\circ$.
 Так как $CM = BM$, то $\angle MBC = \angle MCB = 60^\circ$,
 откуда $\angle CMB = 60^\circ$ и $\triangle CMB$ равносторонний.
 $BC = CM = 6$, $AB = 2CM = 12$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: 6; $6\sqrt{3}$.

25. В треугольниках NN_1K и MM_1K (см. рис. 17)
 $\angle NN_1K = \angle MM_1K = 90^\circ$, $\angle K$ — общий, значит $\triangle NN_1K \sim \triangle MM_1K$.

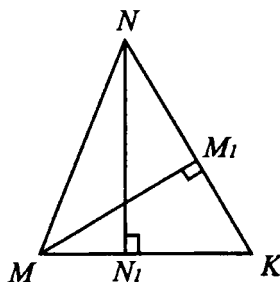


Рис. 17

Тогда $\frac{M_1K}{N_1K} = \frac{MK}{NK}$, или $M_1K \cdot NK = N_1K \cdot MK$.

26. MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 18), значит $BC = 2MN = 10$.

Для нахождения радиуса r вписанной окружности воспользуемся формулой $S = p \cdot r$, где p — полупериметр.

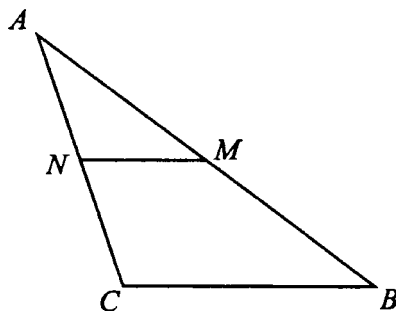


Рис. 18

$$\frac{1}{2}BC \cdot AB \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r;$$

$$r = \frac{10 \cdot 17 \cdot \sin \angle ABC}{36}.$$

По теореме косинусов

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{289 + 100 - 81}{2 \cdot 17 \cdot 10} = \frac{77}{85},$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{36}{85}.$$

$$r = \frac{10 \cdot 17 \cdot \frac{36}{85}}{36} = \frac{10 \cdot 17}{85} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 17}{5 \cdot 17} = 2.$$

Ответ: 2 см.

Решение варианта № 6

21. Запишем неравенство, равносильное исходному: $6x^2 - 5x - 6 \geq 0$.

Решим уравнение $6x^2 - 5x - 6 = 0$, его корни $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = \frac{3}{2}$,

откуда $6x^2 - 5x - 6 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Запишем неравенство:

$\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0$. Следовательно, $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ (см. рис. 19).

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

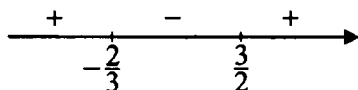


Рис. 19

22. Если $x = -1$ — корень уравнения, то при $x = -1$ выражение $5x^2 - x + 3m$ обращается в нуль. $5 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3m = 0$; $5 + 1 + 3m = 0$; $m = -2$.

Ответ: -2 .

23. Парабола $y = x^2 + x$ имеет с прямой $y = cx - 9$ ровно одну общую точку при условии, что уравнение $x^2 + x = cx - 9$ имеет один корень, то есть $D = 0$.

$x^2 + x(1 - c) + 9 = 0$. $D = 0$, $D = (1 - c)^2 - 36$, $1 - 2c + c^2 - 36 = 0$, $c^2 - 2c - 35 = 0$. $c = 1 \pm \sqrt{1 + 36} = 1 \pm 6$. $c_1 = -5$; $c_2 = 7$. По условию надо найти отрицательные значения c . То есть $c = -5$. Найдём координаты общей точки при $c = -5$: $x^2 + 6x + 9 = 0$, $(x + 3)^2 = 0$, $x = -3$, $y = 6$; $(-3; 6)$.

а) $y = x^2 + x$. Графиком функции $y = x^2 + x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы находится в точке $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 20).

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + x$	6	2	0	0	2	6

б) Построим график прямой $y = cx - 9$. Так как $c = -5$, то $y = -5x - 9$.

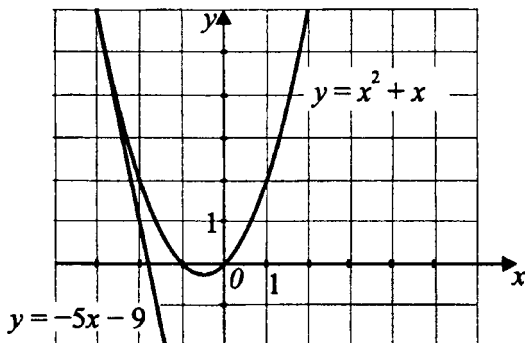


Рис. 20

Ответ: -5 ; $(-3; 6)$.

24. $OB \perp BD$, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Тогда $\angle BDO = 180^\circ - (55^\circ + 90^\circ) = 35^\circ$. $\angle BCA$ — вписанный, опирающийся на дугу AB , значит равен половине центрального угла, опирающегося на эту же дугу.

$$\angle BCA = \frac{1}{2} \angle AOB = 27,5^\circ.$$

Ответ: $27,5^\circ$ и 35° .

25. Если h — высота трапеции, то $S_{ABD} = \frac{1}{2}h \cdot AD$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}h \cdot AD$, значит $S_{ABD} = S_{ACD}$ (см. рис. 21).

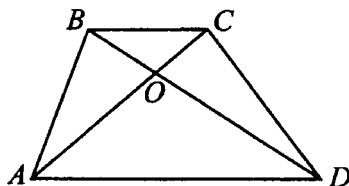


Рис. 21

$$S_{\triangle ABO} = S_{ABD} - S_{AOD}; S_{CDO} = S_{ACD} - S_{AOD}; S_{ABO} = S_{CDO}.$$

26. Проведём радиусы OK и O_1L к точкам касания K и L . $PK = PH = 8$, $PH = PL = 8$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки (см. рис. 22). $KL = 16$. $OK \perp NP$, $O_1L \perp NP$, значит $OK \parallel O_1L$.

Проведём $OT \parallel KL$, тогда $OT = 16$ ($OKLT$ — прямоугольник). Обозначим $OH = r$, тогда в $\triangle OO_1T$ имеем $OO_1 = r + HO_1 = r + 10$, $OT = 16$, $O_1T = O_1L - TL = O_1L - OK = 10 - r$.
 $OO_1^2 = OT^2 + O_1T^2$; $(r + 10)^2 = 16^2 + (10 - r)^2$; $40r = 16^2$; $r = 6,4$.

Ответ: 6,4 см.

Решение варианта № 7

21. Домножим первое равенство на 6 и, преобразовав его, придём к системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ 5x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ 10x + 2y = 10. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим

$$\begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ 7x = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -5)$.

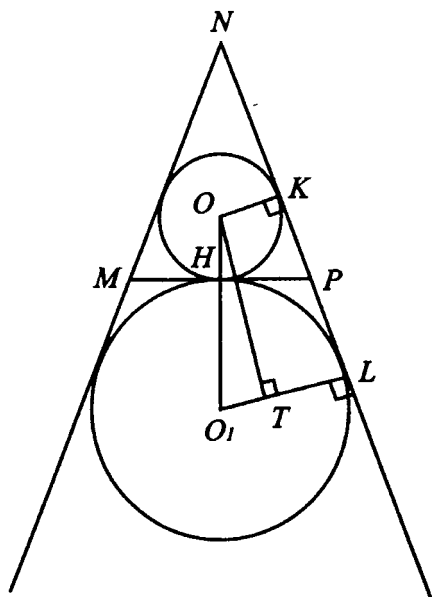


Рис. 22

22. Пусть t — время (в часах), которое Пётр затратил бы на прохождение всего пути пешком. Тогда прохождение $\frac{2}{3}$ пути занимает $\frac{2}{3}t$ часов, а проезд этого же расстояния на автобусе — $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}t = \frac{1}{9}t$ часов. Оставшуюся $\frac{1}{3}$ пути Пётр прошёл за $\frac{1}{3}t$ часов. Составим и решим уравнение: $\frac{1}{9}t + \frac{1}{3}t = 2$, $\frac{4}{9}t = 2$, $t = 4,5$.

Ответ: 4,5 часа.

$$23. y = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ -x^2 + 2x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

Построим график функции y .

1. $y = \frac{3}{x}$, если $x \leq -1$. Графиком этой функции является часть гиперболы, расположенная в 3-ей четверти. Составим таблицу и построим график (см. рис. 23).

x	-3	-2	-1
$y = \frac{3}{x}$	-1	-1,5	-3

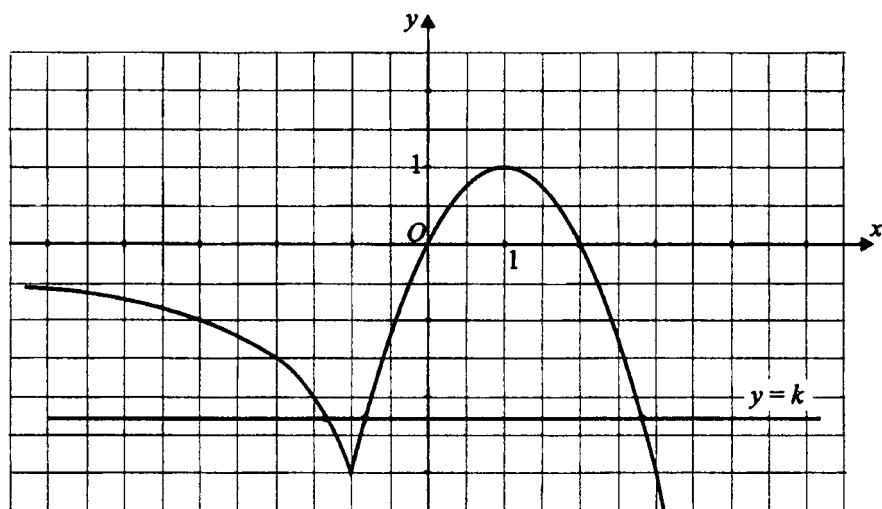


Рис. 23

2. $y = -x^2 + 2x$, если $x > -1$. Графиком этой функции является часть параболы, ветви которой направлены вниз, вершина в точке с координатами (1; 1). Составим таблицу и построим график.

x	-1	0	1	2	3
$y = -x^2 + 2x$	-3	0	1	0	-3

3. Прямая $y = k$ пересекает построенный график функции y в трёх точках при $k \in (-3; 0)$.

Ответ: $(-3; 0)$.

24. KM — средняя линия $\triangle ABC$, $KM = \frac{1}{2}AC$ (см. рис. 24).

$$\triangle KBM \sim \triangle ABC, \text{ так как } \frac{KB}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{KM}{AC} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{KBM} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}\right) = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

$$\text{Аналогично } S_{AKP} = S_{PDN} = S_{MNC} = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

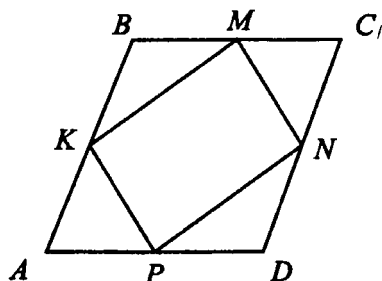


Рис. 24

$$S_{KMNP} = S_{ABCD} - (S_{AKP} + S_{KBM} + S_{MCN} + S_{NDP}) = \\ = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = 7,4.$$

Ответ: 7,4.

25. Пусть P — периметр треугольника, r — радиус вписанной окружности. Нужно доказать, что $P > 2\pi r$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}P \cdot r$, площадь вписанного круга равна πr^2 . Так как площадь треугольника больше площади круга, вписанного в этот треугольник, то $\frac{1}{2}P \cdot r > \pi r^2$, $P > 2\pi r$, что и требовалось доказать.

26. Обозначим r и R — радиусы меньшей и большей полуокружностей с центрами O и O_1 соответственно (см. рис. 25). Так как трапеция равнобедренная, то OO_1 — высота трапеции. Пусть MN — общая касательная окружностей, T — точка касания. Тогда точки O , T и O_1 лежат на одной прямой и $OO_1 \perp MN$, $BC = 2r$, $AD = 2R$.

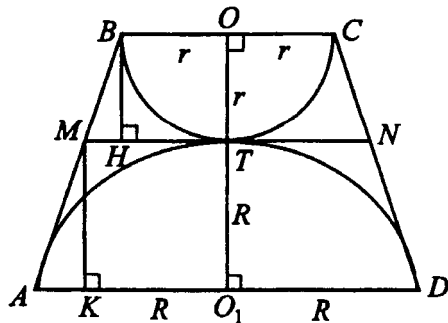


Рис. 25

Высота трапеции равна $r + R$, тогда площадь

$$S_{ABCD} = (R + r) \cdot \frac{1}{2}(BC + AD) = (r + R)^2 = 100, \quad r + R = 10.$$

$BC \parallel MN$, $MN \parallel AD$, значит

$$\angle BMH = \angle MAK, \quad \triangle MBH \sim \triangle AMK.$$

$$MT = \frac{1}{2}MN = 4. \text{ Из соотношения подобия } \frac{MH}{BH} = \frac{AK}{MK} \text{ получим}$$

$$\frac{4-r}{r} = \frac{R-4}{R}, \text{ где } r < 4, \quad R > 4;$$

$$R(4-r) = r(R-4); \quad 2Rr = 4(r+R); \quad Rr = 2(r+R).$$

$$\begin{cases} r+R=10, \\ Rr=20; \end{cases} \quad \begin{cases} r=10-R, \\ R(10-R)=20; \end{cases} \quad \begin{cases} r=10-R, \\ R^2-10R+20=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=10-R, \\ R=5 \pm \sqrt{5}. \end{cases}$$

Так как $R > 4$, то $R = 5 + \sqrt{5}$. $AD = 2R = 10 + 2\sqrt{5}$.

Ответ: $10 + 2\sqrt{5}$.

Решение варианта № 8

21. Домножим первое равенство на 24 и, преобразовав его, придём к системе уравнений

$$\begin{cases} 15x + 8y = 13, \\ x + 7y = -25. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $x = -25 - 7y$ и подставим в первое равенство, получим $-375 - 105y + 8y = 13$, $97y = -388$, $y = -4$. Тогда $x = -25 + 28 = 3$.

Ответ: $(3; -4)$.

22. Пусть S км — длина маршрута, x км/ч — скорость Николая пешком.

Тогда $5x$ км/ч — скорость движения автобуса, $\frac{S}{5x}$ ч — искомое время. Из

$$\text{условия следует, что } \frac{\frac{1}{2}S}{x} + \frac{\frac{1}{2}S}{5x} = 3; \quad \frac{6}{10} \cdot \frac{S}{x} = 3; \quad \frac{S}{5x} = 1.$$

Чтобы преодолеть расстояние S км со скоростью $5x$ км/ч потребовалось бы $\frac{S}{5x}$ часов, то есть 1 час.

Ответ: 1 час.

$$23. y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{если } x \geq 1, \\ x^2 + 2x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

1. Построим график функции $y = -\frac{3}{x}$, если $x \geq 1$. Графиком этой функции является часть гиперболы $y = -\frac{3}{x}$, расположенная в 4-й четверти. Составим таблицу и построим график (см. рис. 26).

x	1	2	3	6
$y = -\frac{3}{x}$	-3	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$

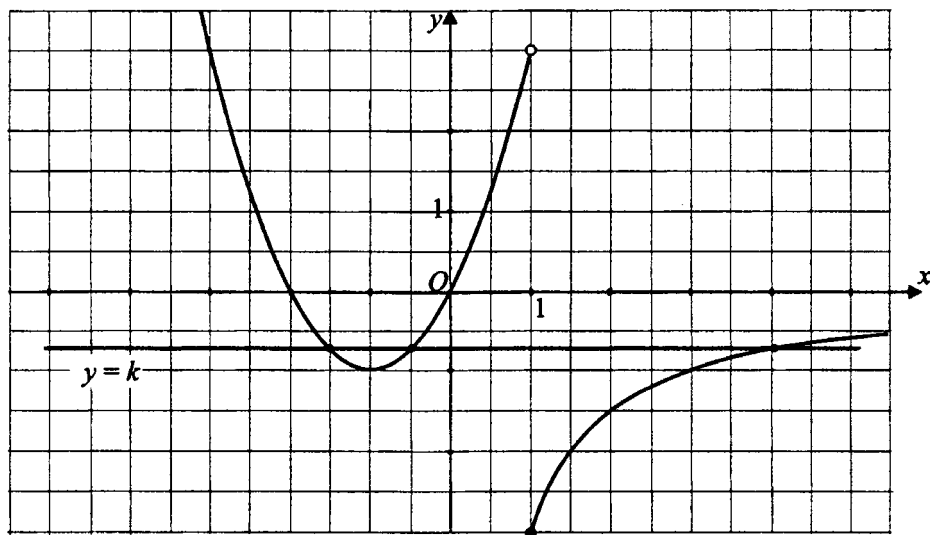


Рис. 26

2. Построим график функции $y = x^2 + 2x$, если $x < 1$. Графиком этой функции является часть параболы, ветви которой направлены вверх, вершина в точке с координатами $(-1; -1)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 26).

x	-3	-2	-1	0
$y = x^2 + 2x$	3	0	-1	0

3. Прямая $y = k$ пересекает построенный график функции y в трёх точках при $k \in (-1; 0)$.

Ответ: $(-1; 0)$.

24. Заметим сначала, что $S_{ABC} = S_{DBC}$ и $S_{BAD} = S_{CAD}$.

KM — средняя линия $\triangle ABC$, $KM = \frac{1}{2}AC$, $\frac{KB}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{KM}{AC} = \frac{1}{2}$,

$\triangle KBM \sim \triangle ABC$ и значит $S_{KBM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ (см. рис. 27).

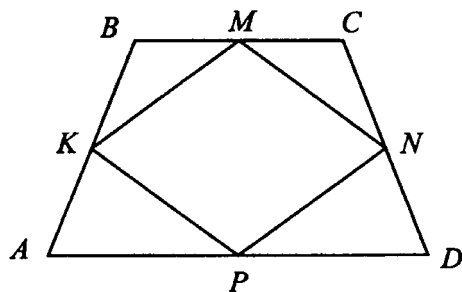


Рис. 27

Аналогично

$$S_{MCN} = \frac{1}{4}S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABC}, S_{KBM} + S_{MCN} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Таким же образом установим, что $S_{NDP} = \frac{1}{4}S_{ADC}$,

$$S_{KAP} = \frac{1}{4}S_{ABD} = \frac{1}{4}S_{ACD}, S_{AKP} + S_{PND} = \frac{1}{2}S_{ACD}.$$

$$\text{Тогда } S_{AKP} + S_{KBM} + S_{MCN} + S_{PND} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{ACD} =$$

$$= \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ACD}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \text{ откуда } S_{KMPN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

25. Пусть O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$ (см. рис. 28). Докажем, что $P_{ABC} < 2\pi R$.

Из неравенства треугольника следует, что

$$\text{в } \triangle AOB \quad AB < OB + OA < 2R,$$

$$\text{в } \triangle AOC \quad AC < 2R,$$

$$\text{в } \triangle BOC \quad BC < 2R.$$

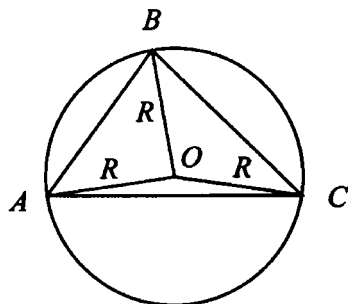


Рис. 28

Имеем $AB + BC + AC < 6R < 2\pi R$. Следовательно, $P_{ABC} < 2\pi R$, что и требовалось доказать.

26. Пусть r — радиус указанных окружностей (см. рис. 29).

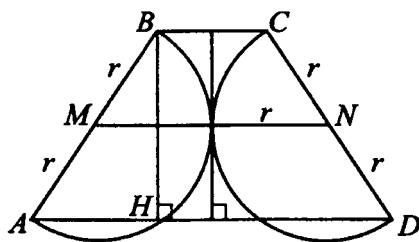


Рис. 29

По условию $2\pi r = 5\pi$, откуда $r = 2,5$.

Из условия следует, что $AD - BC = 6$. $AH = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = 3$.

Тогда $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 4$.

MN — средняя линия трапеции, $MN = 2r = 5$,

$S_{ABCD} = MN \cdot BH = 4 \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Решение варианта № 9

21. Домножив первое равенство на 6 и преобразовав его, придём к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x - 9y = -1. \end{cases} \quad \text{Далее домножим первое уравнение на 3, получим}$$

$$\begin{cases} 6x - 9y = 6, \\ 5x - 9y = -1. \end{cases} \quad \text{Вычтем из первого равенства второе, получим } x = 7.$$

Тогда $2 \cdot 7 - 3 \cdot y = 2$, откуда $y = 4$.

Ответ: (7; 4).

22. Пусть x км/ч — скорость второго автомобилиста, тогда $(x + 20)$ км/ч — скорость первого. Первый находится в пути $\left(\frac{200}{x+20} + \frac{1}{2}\right)$ часов, второй — $\frac{200}{x}$ часов. Из условия следует, что

$$\frac{200}{x+20} + \frac{1}{2} = \frac{200}{x}, \quad x > 0.$$

$$200x + \frac{1}{2}x(x+20) = 200(x+20); \quad \frac{1}{2}x(x+20) = 200 \cdot 20;$$

$$x^2 + 20x - 8000 = 0; \quad (x+100)(x-80) = 0; \quad x = 80.$$

$x = -100$ не удовлетворяет условию $x > 0$. 80 км/ч — скорость второго автомобилиста.

Ответ: 80 км/ч.

$$23. y = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x \geq 1, \\ x^2 + 2x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Построим график функции y .

1. $y = \frac{3}{x}$, если $x \geq 1$. Графиком этой функции является часть гиперболы, расположенная в 1-ой четверти. Составим таблицу и построим график (см. рис. 30).

x	1	$\frac{3}{2}$	2	3	6
$y = \frac{3}{x}$	3	2	1,5	1	0,5

2. $y = x^2 + 2x$, если $x < 1$. Графиком этой функции является часть параболы, ветви которой направлены вверх, вершина в точке $(-1; 1)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 30).

x	-3	-2	-1	0	1
$y = x^2 + 2x$	3	0	-1	0	3

3. Прямая $y = k$ будет иметь с графиком данной функции три общие точки при $k \in (0; 3)$.

Ответ: (0; 3).

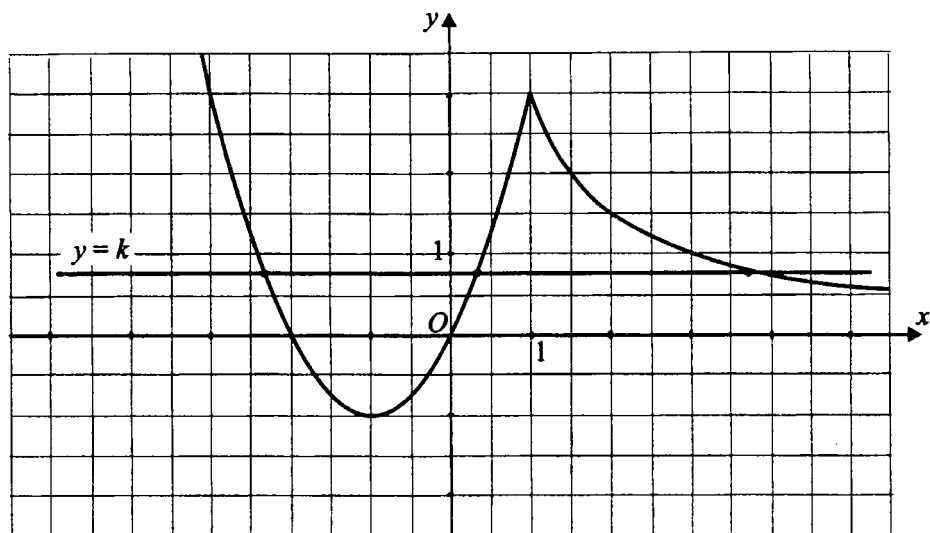


Рис. 30

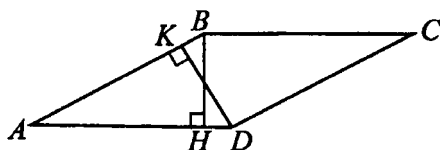


Рис. 31

24. Пусть $DK = 6$, $BH = 3$ (см. рис. 31).

$S_{ABCD} = DK \cdot AB = BH \cdot AD$; $6AB = 3AD$; $AD = 2AB$.
 $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = AB + 2AB + AB + 2AB = 6AB = 36$,
 $AB = 6$; $AD = 12$. В $\triangle ADK$ $\angle K = 90^\circ$, $DK = \frac{1}{2}AD$, значит
 $\angle BAD = 30^\circ$. Тогда $\angle ADC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Ответ: 150.

25. $\angle AED = \frac{1}{2} \angle AEB$ как угол между касательной и секущей,
 $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle AEB$ как вписанный, значит $\angle AED = \angle ABE$ (см. рис. 32).
 $\triangle AED \sim \triangle EBD$ по двум углам ($\angle D$ — общий, $\angle E = \angle B$), тогда
 $\frac{DE}{DB} = \frac{AD}{DE}$; $DE^2 = AD \cdot DB$, что и требовалось доказать.

22. Пусть x км/ч — скорость первого автомобилиста, тогда $(x + 30)$ км/ч — скорость второго. Второй преодолел расстояние 100 км на 45 мин $= \frac{3}{4}$ ч быстрее первого, значит $\frac{100}{x} = \frac{100}{x+30} + \frac{3}{4}$, $x > 0$;

$$100(x+30) = 100x + \frac{3}{4}x(x+30); \quad \frac{3}{4}x(x+30) = 100 \cdot 30; \quad x(x+30) = 4000;$$

$x^2 + 30x - 4000 = 0$; $(x + 80)(x - 50) = 0$; $x = 50$; $x = -80$ не удовлетворяет условию $x > 0$. 50 км/ч — скорость первого автомобилиста.

Ответ: 50 км/ч.

$$23. y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{если } x \geq 1, \\ -x^2 - 2x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Построим график функции y .

1. $y = -\frac{3}{x}$, если $x \geq 1$. Графиком этой функции является часть гиперболы, расположенная в 4-ой четверти. Составим таблицу и построим график (см. рис. 34).

x	1	2	3	6
$y = -\frac{3}{x}$	-3	-1,5	-1	-0,5

2. $y = -x^2 - 2x$, если $x < 1$. Графиком функции $y = x^2 + 2x$ является часть параболы, ветви которой направлены вниз, вершина в точке $(-1; 1)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 34).

x	-2	-1	0	1
$y = -x^2 - 2x$	0	1	0	-3

3. Прямая $y = k$ имеет с графиком три общие точки при $k \in (-3; 0)$.

Ответ: $(-3; 0)$.

24. $S_{ABCD} = CH \cdot AD$ (см. рис. 35). $CH \cdot 5 = 16$, $CH = \frac{16}{5}$.

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5};$$

$$AH = AD + DH = 5 + \frac{12}{5} = \frac{37}{5}.$$

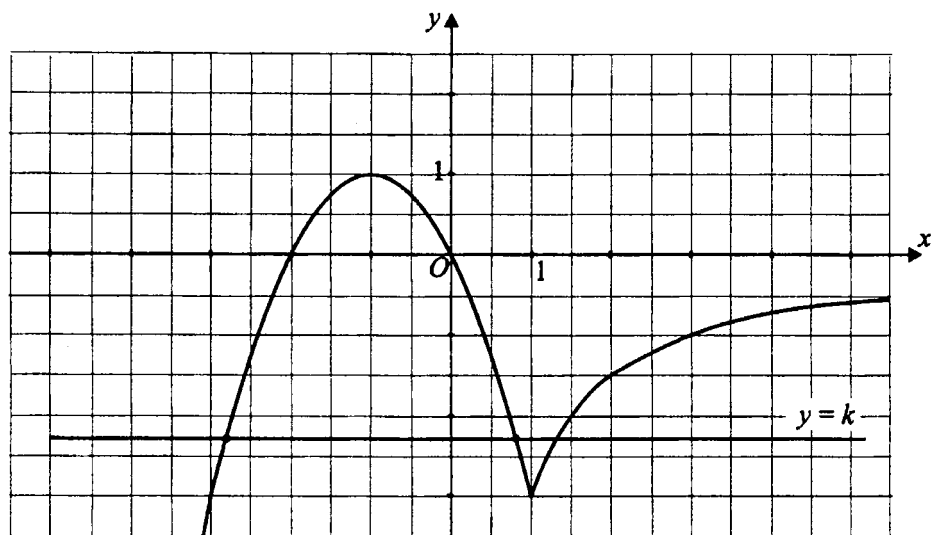


Рис. 34

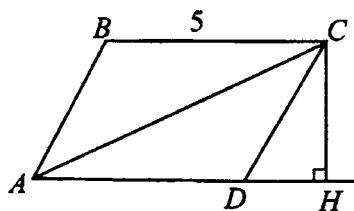


Рис. 35

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{1625}}{5} = \sqrt{65}. \text{ Имеем } 8^2 = 64, 8,5^2 = 72,25,$$

$\sqrt{64} < \sqrt{65} < \sqrt{72,25}$, при округлении до целого числа получим $\sqrt{65} \approx 8$.

Ответ: 8.

25. $\angle DBE$ и $\angle BEC$ вписанные, $\angle DBE = \frac{1}{2} \circ DE$, $\angle BEC = \frac{1}{2} \circ BC$ (см. рис. 36). Рассмотрим $\triangle ABE$.

$$\begin{aligned} \angle A &= 180^\circ - \angle ABE - \angle AEB = 180^\circ - \angle ABE - (180^\circ - \angle BEC) = \\ &= \frac{1}{2} \circ BC - \frac{1}{2} \circ DE = \frac{1}{2} (\circ BC - \circ DE), \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

26. Сначала заметим, что $AC = AD + DC = 4$ (см. рис. 37), то есть AC — диаметр описанной окружности и $\triangle ABC$ — прямоугольный с прямым углом B .

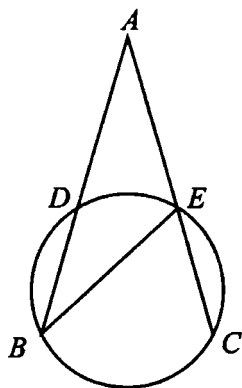


Рис. 36

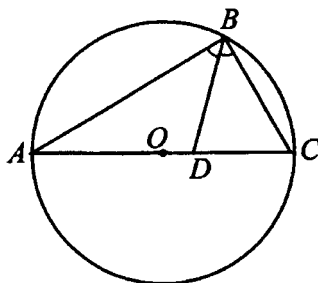


Рис. 37

BD — биссектриса, значит $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, $AB = 3BC$.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \quad 9BC^2 + BC^2 = 16; \quad BC^2 = \frac{16}{10};$$

$$BC = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2}{5}\sqrt{10}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

Решение варианта № 11

21. Преобразуем исходное неравенство: $6x^2 - 11x - 121 < 0$. Решим уравнение $6x^2 - 11x - 121 = 0$, его корни $x_1 = -\frac{11}{3}$ и $x_2 = \frac{11}{2}$, откуда

$6x^2 - 11x - 121 = 6\left(x + \frac{11}{3}\right)\left(x - \frac{11}{2}\right)$. Запишем неравенство, равносильное исходному: $\left(x - \left(-\frac{11}{3}\right)\right)\left(x - \frac{11}{2}\right) < 0$.

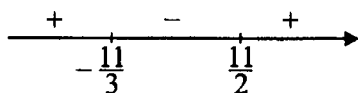


Рис. 38

Следовательно, $x \in \left(-\frac{11}{3}; \frac{11}{2}\right)$ (см. рис. 38).

Ответ: $\left(-\frac{11}{3}; \frac{11}{2}\right)$.

22. Пусть скорость мальчика равна x ступенек в секунду, тогда скорость при подъёме по опускающемуся эскалатору равна $(x - 1)$ ступенек в секунду. Аналогично его скорость на спуске по поднимающемуся эскалатору равна $(x - 1)$ ступеньке в секунду. Так как 2,5 минуты = 150 секунд, получим уравнение

$$\frac{150}{x-1} + \frac{150}{x-1} = 150; \quad \frac{2}{x-1} = 1; \quad x-1 = 2; \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

23. При $y = \frac{|x^2 - 4x + 3|}{|x - 1|} = \left| \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)} \right|$. График этой функции совпадает с графиком функции $y = |x - 3|$ при $x \neq 1$. Точка с абсциссой $x = 1$ выколота. График функции $y = |x - 3|$ получается из графика $y = |x|$ смещением на 3 единицы вправо (см. рис. 39). График прямой $y = kx$ проходит

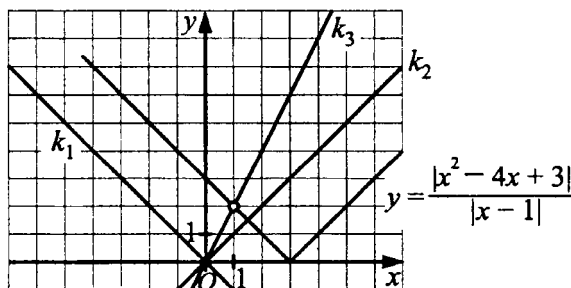


Рис. 39

через начало координат. Из графика видно, что одна точка пересечения будет при $k = 0$ и при $k \in (-\infty; k_1) \cup [k_2; k_3) \cup (k_3; +\infty)$, где прямая $y = k_1x$ параллельна прямой $y = 3 - x$, прямая $y = k_2x$ параллельна прямой $y = x - 3$, то есть $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Очевидно, что $k_3 = 2$, так как прямая $y = k_3x$ проходит через выколотую точку $(1; 2)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

24. BK — высота, биссектриса и медиана равнобедренного $\triangle ABC$ (см. рис. 40).

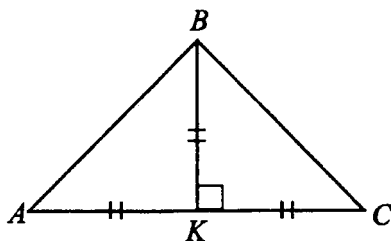


Рис. 40

$\angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$, $\angle KAB = \angle KBA = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, то есть $AB \perp BC$ и искомая высота равна $AB = 3$.

Ответ: 3.

25. Предположим противное: $AC = 2r$ (см. рис. 41).

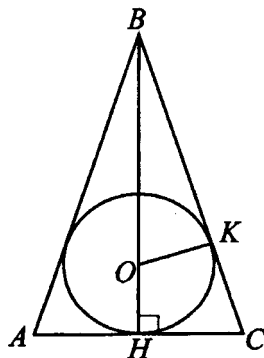


Рис. 41

Так как $AH = HC$ (BH — высота, биссектриса и медиана равнобедренного треугольника), то $OH = AH = HC = r$.

$SK = CH$ — отрезки касательных, проведённых из одной точки, тогда $OK = KC = CH = OH = r$, значит $OKCH$ — ромб.

$\angle OHC = \angle OKC = 90^\circ$, значит $OKCH$ — квадрат и $\angle KCH = 90^\circ$, что невозможно. Получили противоречие, значит наше предположение неверно и равенство $AC = 2r$ невозможно.

26. $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC (см. рис. 42). Тогда $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ по первому признаку подобия.

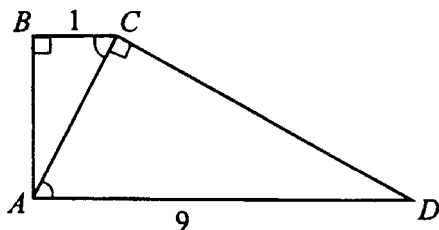


Рис. 42

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}, AC^2 = 9, AC = 3. AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = 10\sqrt{2}.$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Решение варианта № 12

21. Преобразуем исходное неравенство: $14x^2 - 15x - 9 \geq 0$. Решим уравнение $14x^2 - 15x - 9 = 0$, его корни $x_1 = -\frac{3}{7}$ и $x_2 = \frac{3}{2}$, откуда

$14x^2 - 15x - 9 = 14\left(x + \frac{3}{7}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Запишем неравенство, равносильное исходному: $\left(x - \left(-\frac{3}{7}\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0$.



Рис. 43

Следовательно, $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ (см. рис. 43).

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

22. Пусть длина первого эскалатора x ступенек, тогда второго — $\frac{x}{2}$ ступенек. По первому эскалатору мальчик двигался со скоростью $2,5 - 1 = 1,5$ ступеньки в секунду; по второму эскалатору он двигался с той же скоростью. Так как $3\frac{1}{3}$ минуты = 200 секунд, получили уравнение

$$\frac{x}{1,5} + \frac{\frac{x}{2}}{1,5} = 200; \quad \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = 200; \quad x = 200.$$

Ответ: 200.

23. При $y = \frac{|x^2 + 3x + 2|}{|x + 1|} = \frac{|(x + 2)(x + 1)|}{|(x + 1)|} = |x + 2|$ при $x \neq -1$ (выколотая точка). График функции $y = |x + 2|$ получен из графика $y = |x|$ смещением на 2 единицы влево (см. рис. 44). Функция $y = \frac{|x^2 + 3x + 2|}{|x + 1|}$ имеет с прямой $y = kx$ ровно одну общую точку при $k \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

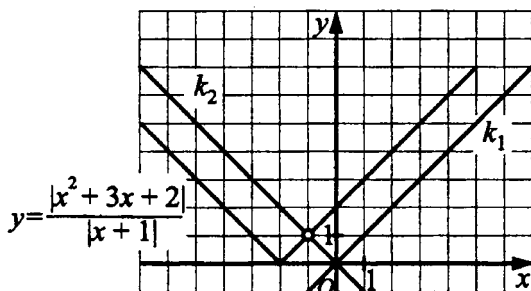


Рис. 44

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

24. $OA = OD = R$ (см. рис. 45), $BC = \frac{1}{2}AD = R$, $OB = OC = R$.

$\triangle BOC$ — равносторонний, значит $\angle BOC = \angle BCO = \angle CBO = 60^\circ$.

$\angle AOB = \angle CBO = 60^\circ$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей OB . В равнобедренном $\triangle AOB$ $\angle O = 60^\circ$, значит $\triangle AOB$ — равносторонний, $R = AB = 2$.

Ответ: 2.

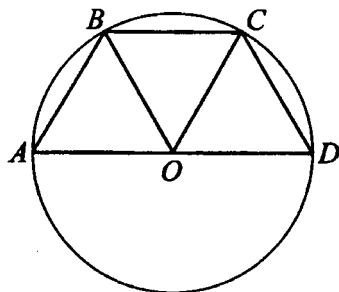


Рис. 45

25. Проведём через точку H касания этих окружностей общую касательную HN (см. рис. 46). Из того, что $O_1H \perp HN$ и $O_2H \perp HN$ следует, что точки O_1, O_2, H лежат на одной прямой.

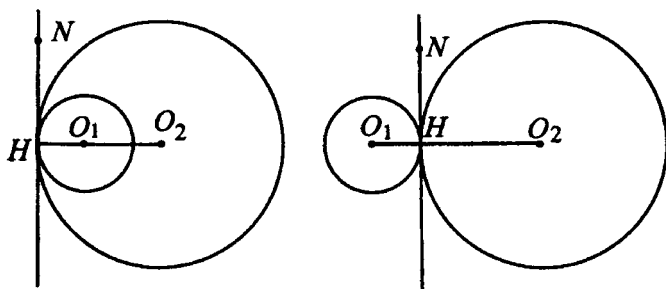


Рис. 46

26. Из условия следует, что $AH = HC = 2r$; $KC = HC = 2r$ (см. рис. 47).

$\triangle OBK \sim \triangle CBH$ по двум углам
($\angle BHC = \angle BKO = 90^\circ$, $\angle HBC$ — общий),

$$\frac{OK}{HC} = \frac{BO}{BC}, BO = 5.$$

Из равенства $BH^2 + HC^2 = BC^2$ получим
 $(5 + r)^2 + 4r^2 = 100$, $r > 0$; $5r^2 + 10r + 25 = 100$;
 $r^2 + 2r - 15 = 0$; $r_1 = 3$, $r_2 = -5$ не удовлетворяет условию $r > 0$. Радиус вписанной окружности равен 3.

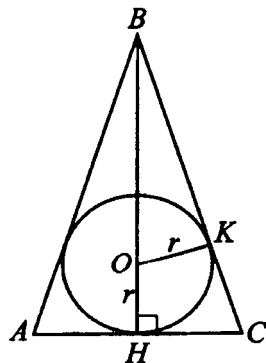


Рис. 47

Ответ: 3.

Решение варианта № 13

$$21. \frac{(4^3 - 1)^n}{7^n \cdot 3^{2n-1}} = \frac{63^n}{7^n \cdot 3^{2n} \cdot 3^{-1}} = \frac{7^n \cdot 3^{2n}}{7^n \cdot 3^{2n} \cdot 3^{-1}} = 3.$$

Ответ: 3.

22. Пусть килограмм огурцов стоит x рублей, а килограмм апельсинов стоит y рублей. Новые цены будут равны $\frac{x}{2}$ рублей и $y \cdot 1,5$ рублей соответственно. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 5y = 300, \\ \frac{x}{2} + 5 \cdot 1,5y = 350; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y = 300, \\ x + 15y = 700; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y = 300, \\ 10y = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 40, \\ x + 5 \cdot 40 = 300; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100, \\ y = 40. \end{cases}$$

Ответ: 100 и 40.

23. $y = \frac{x+3}{x^2+3x} = \frac{x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{x}$ при $x \neq -3, x \neq 0$. Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в 1-ой, 3-ей четвертях при $x \neq -3, x \neq 0$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 48).

x	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{1}{x}$	-0,5	-1	1	0,5	$\frac{1}{3}$

Прямая $y = ax$ имеет с графиком функции $y = \frac{1}{x}$ ровно одну общую точку, если проходит через точку с координатами $(3; \frac{1}{3})$, то есть $\frac{1}{3} = a \cdot 3$,
 $a = \frac{1}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

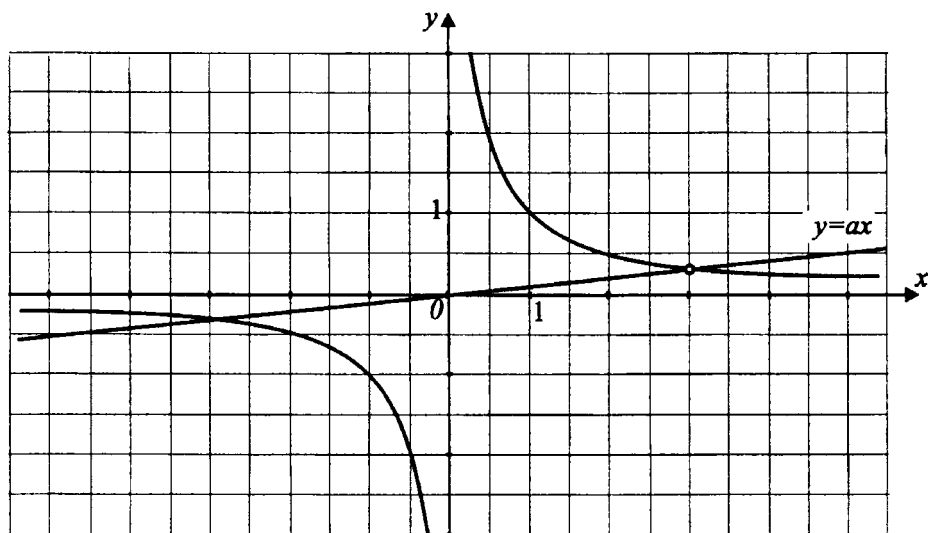


Рис. 48

24. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$ (см. рис. 49).

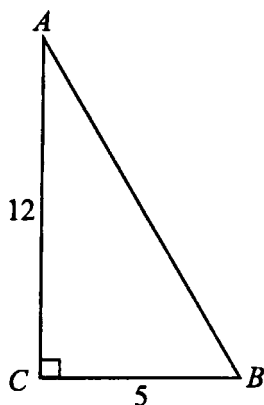


Рис. 49

Вспользуемся формулой радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник. $r = \frac{a + b - c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

$$r = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

25. Если h — высота трапеции (см. рис. 50), то $S_{ABD} = \frac{1}{2}h \cdot AD$; $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD}$; $S_{COD} = S_{ACD} - S_{AOD}$, значит $S_{AOB} = S_{COD}$.

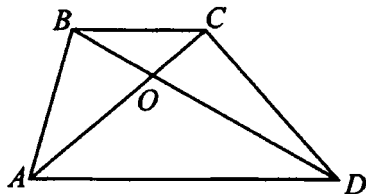


Рис. 50

26. Так как AO — биссектриса $\triangle ABH$, то $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}$, тогда $\cos \angle BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}$, $\sin \angle BAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAH} = \frac{4}{5}$ (см. рис. 51).

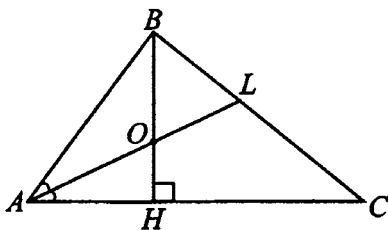


Рис. 51

Из теоремы синусов получаем $R = \frac{BH}{2 \sin \angle BAC} = \frac{4}{2 \cdot \frac{4}{5}} = 2,5$.

Ответ: 2,5.

Решение варианта № 14

$$21. \frac{(37^2 - 12^2)^n}{5^{2n+1} \cdot 7^{2n-1}} = \frac{(37-12)^n (37+12)^n}{5^{2n+1} \cdot 7^{2n-1}} = \frac{25^n \cdot 49^n}{5 \cdot 25^n \cdot 7^{-1} \cdot 49^n} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

22. Пусть зимой килограмм помидоров стоит x рублей, а килограмм апельсинов y рублей. Летом они будут стоить соответственно $\frac{2}{3}x$ и y рублей за килограмм. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 270, \\ 3 \cdot \frac{2}{3}x + 2y = 230; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 270, \\ 2x + 2y = 230; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 40, \\ 2x + 2 \cdot 40 = 230; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 75, \\ y = 40. \end{cases}$$

Ответ: 75 и 40.

23. $y = \frac{x-7}{7x-x^2} = \frac{x-7}{x(7-x)} = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 7, x \neq 0$. Графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены во 2-ой и 4-ой четвертях при $x \neq 7, x \neq 0$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 52).

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

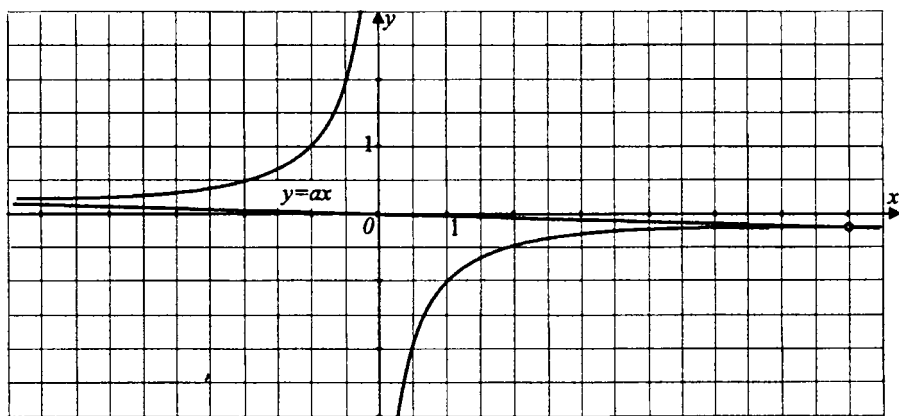


Рис. 52

Прямая $y = ax$ имеет с графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ ровно одну общую точку, если проходит через точку с координатами $(7; -\frac{1}{7})$, то есть $-\frac{1}{7} = a \cdot 7, a = -\frac{1}{49}$.

Ответ: $-\frac{1}{49}$.

24. Пусть K, L, M — точки касания окружности со сторонами треугольника (см. рис. 53).

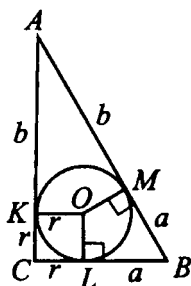


Рис. 53

$CK = CL$, $AK = AM$, $BL = BM$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из точек C, A, B соответственно. Обозначим $AK = b$, $BL = a$. Тогда по условию $AC + BC = 14$; $a + b + 4 = 14$; $a + b = 10$, $AB = a + b = 10$.

Ответ: 10.

25. Пусть M и N — середины оснований, O_1 и O_2 — точки пересечения прямой MN с диагоналями AC и BC соответственно, O — точка пересечения диагоналей (см. рис. 54).

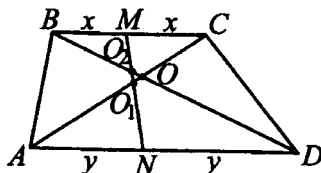


Рис. 54

Очевидно $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{AO} = \frac{x}{y}$.

$\triangle BMO_2 \sim \triangle DNO_2$, $\frac{BO_2}{O_2D} = \frac{BM}{ND} = \frac{x}{y}$, значит точка O_2 совпадает с точкой O .

Аналогично $\triangle MCO_1 \sim \triangle NAO_1$, $\frac{CO_1}{AO_1} = \frac{MC}{AN} = \frac{x}{y}$, значит точка O_1 совпадает с точкой O . Следовательно, MN проходит через точку O .

26. $AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = 10$ (см. рис. 55).

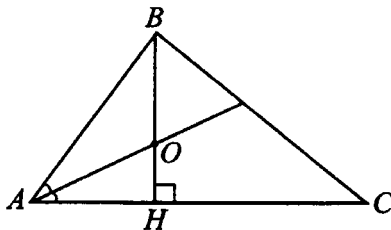


Рис. 55

Так как AO — биссектриса $\triangle ABH$, то $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH}$; $\frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}$.
 $BH = BO + OH$, $5x + 3x = 8$, $x = 1$. Значит $BO = 5$, $OH = 3$.

Ответ: 5.

Решение варианта № 15

$$21. \frac{7 \cdot 6^n}{6^{n-1} - 6^{n+1}} = \frac{7 \cdot 6^n}{6^{n-1}(1 - 36)} = \frac{42}{-35} = -1,2.$$

Ответ: $-1,2$.

22. При любых значениях x и y выражения $(7x - 3y + 10)^2$ и $(5x - y - 2)^2$ неотрицательны, поэтому их наименьшее значение (а значит, и наименьшее значение исходного выражения) достигается, когда они оба равны нулю.

$$\begin{cases} 7x - 3y + 10 = 0, \\ 5x - y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 3y = -10, \\ 15x - 3y = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = 16, \\ 7x - 3y = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 8. \end{cases}$$

При $x = 2$, $y = 8$ исходное выражение равно -3 .

Ответ: -3 ; $(2; 8)$.

23. $y = \frac{4x-1}{4x^2-x} = \frac{4x-1}{x(4x-1)} = \frac{1}{x}$ при $4x-1 \neq 0$, $x \neq \frac{1}{4}$ и $x \neq 0$. Графиком функции $y = \frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в

1-ой и 3-ей четвертях при $x \neq \frac{1}{4}$ и $x \neq 0$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 56).

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	-0,5	-1	-2	2	1	0,5

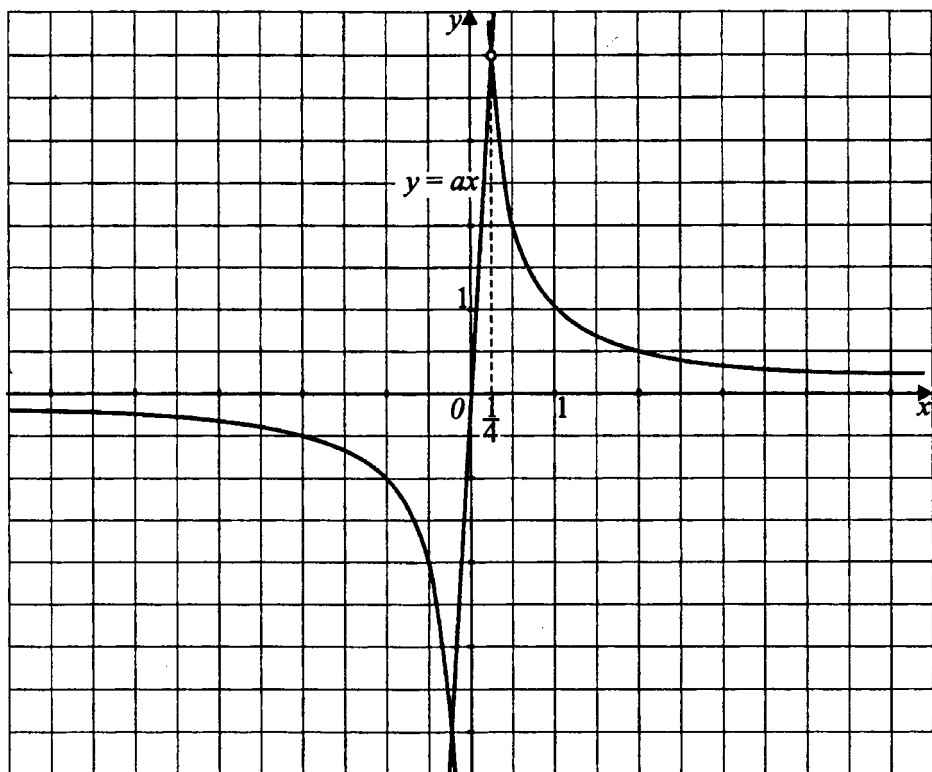


Рис. 56

Прямая $y = ax$ имеет с графиком функции $y = \frac{1}{x}$ единственную общую точку при $x = \frac{1}{4}$, то есть $\frac{1}{\frac{1}{4}} = a \cdot \frac{1}{4}$, $4 = a \cdot \frac{1}{4}$, $a = 16$.

Ответ: 16.

24. Если $BC = CD$ (см. рис. 57), то $\sphericalangle BC = \sphericalangle CD$,

$\sphericalangle BC = 2\angle BDC = 30^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$, $\angle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD = 30^\circ$.

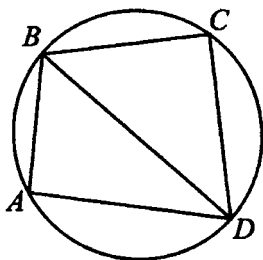


Рис. 57

Ответ: 30° .

25. Обозначим $AB = BC = CD = AD = a$, $AK = BL = CM = DN = b$ (см. рис. 58). Тогда $BK = LC = MD = AN = a - b$.

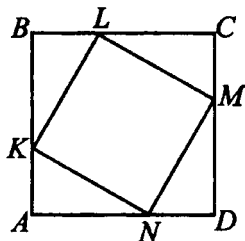


Рис. 58

Тогда прямоугольные треугольники AKN , BLK , CML и DNM равны по двум катетам, откуда $KN = NM = ML = LK$.

Также $\angle ANK = \angle BKL = \angle CLM = \angle DMN = \alpha$, $\angle AKN = \angle BLK = \angle CML = \angle DNM = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Тогда $\angle NKL = 180^\circ - \angle AKN - \angle BKL = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$.

Аналогично остальные углы четырёхугольника $KLMN$ прямые, и так как все стороны равны, то $KLMN$ — квадрат.

26. $CETD$ — вписанный четырёхугольник (см. рис. 59), значит $\angle DCE + \angle DTE = 180^\circ$, $\angle DTE = \angle FTG = 100^\circ$.

$\angle BEG$ — угол между касательной и хордой, $\angle EFG = \angle BEG = 21^\circ$.

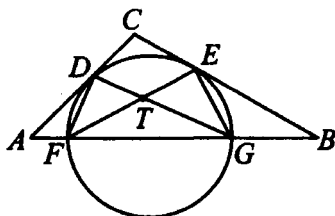


Рис. 59

В $\triangle FTG$ получим $\angle TGF = 180^\circ - 100^\circ - 21^\circ = 59^\circ$,
 $\angle ADF = \angle DGF = 59^\circ$.

Ответ: 59° .

Решение варианта № 16

$$21. \frac{12 \cdot 7^n}{7^{n-1} - 7^{n+1}} = \frac{12 \cdot 7^n}{7^{n-1}(1 - 49)} = \frac{84}{-48} = -\frac{7}{4} = -1,75.$$

Ответ: $-1,75$.

22. При любых значениях x и y выражения $(6x - 7y - 9)^2$ и $(2x - 3y - 1)^2$ неотрицательны, поэтому их наименьшее значение (а значит, и наименьшее значение исходного выражения) достигается, когда они оба равны нулю.

$$\begin{cases} 6x - 7y - 9 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 7y = 9, \\ -6x + 9y = -3. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем $2y = 6$, $y = 3$. Отсюда $2x - 3 \cdot 3 - 1 = 0$, $x = 5$.

При $x = 5$, $y = 3$ исходное выражение равно 4.

Ответ: 4; (5; 3).

23. $y = \frac{25 - x^2}{x + 5} = \frac{(5 - x)(5 + x)}{x + 5} = 5 - x$ при $x + 5 \neq 0$, то есть $x \neq -5$. Графиком функции $y = 5 - x$ является прямая, заданная на области определения $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$, проходящая через точки (0; 5) и (5; 0). Построим график (см. рис. 60).

Прямая $y = ax$ не имеет с графиком $y = 5 - x$ ни одной общей точки в одном из двух случаев:

1. Прямая $y = ax$ проходит через точку $(-5; 10)$, откуда $5 - (-5) = a \cdot (-5)$, $10 = -5a$, $a = -2$.

2. Прямая $y = ax$ параллельна прямой $y = 5 - x$, откуда $a = -1$.

Ответ: $-2; -1$.

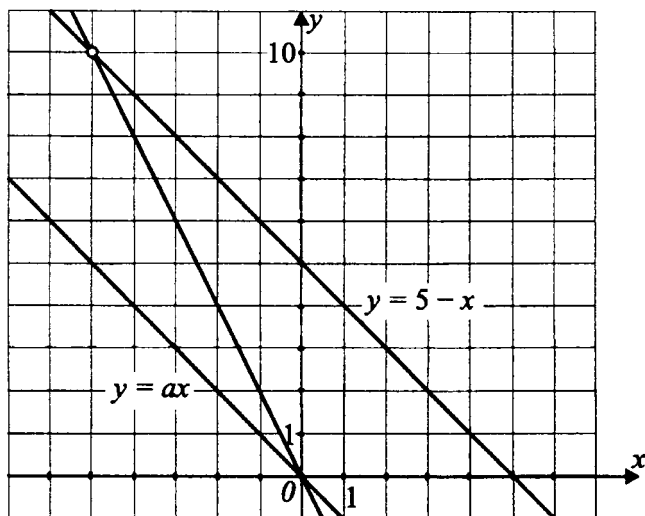


Рис. 60

24. Заметим, что $\angle LMN + \angle LKN = 180^\circ$ (см. рис. 61), так как $LMNK$ вписан в окружность. Тогда $\angle LMN = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. $\triangle LMN$ — равнобедренный, следовательно $\angle MLN = \angle MNL = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$.

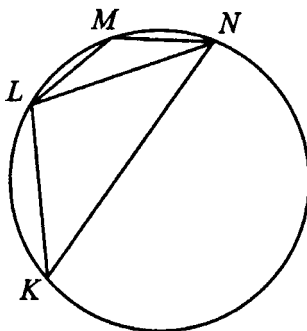


Рис. 61

Ответ: 20°

25. Заметим, что $KB = LC = MA$ (см. рис. 62), так как $KB = AB - AK$, $LC = BC - BL$, $AM = AC - CM$, при этом $AB = BC = AC$ и $AK = BL = CM$ по условию, $\angle KBL = \angle LCM = \angle MAK = 60^\circ$. Очевидно, что $\triangle BKL = \triangle AMK = \triangle CLM$ по первому признаку равенства

треугольников, тогда $KL = LM = KM$ и $\triangle KLM$ — равносторонний, что и требовалось доказать.

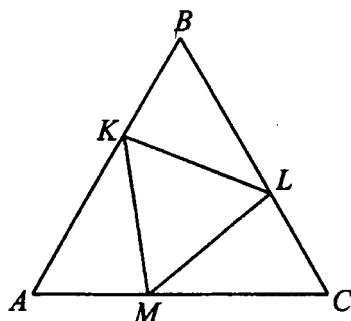


Рис. 62

26. Угол между касательной и секущей равен половине дуги, которую он отсекает, а значит равен углу, опирающемуся на ту же дугу. Таким образом, $\angle KNM = \angle PKM = 29^\circ$, $\angle LMN = \angle QLN = 35^\circ$ (см. рис. 63). В $\triangle MFN$ сумма углов равна 180° , поэтому $\angle MFN = 180^\circ - 29^\circ - 35^\circ = 116^\circ$. Около четырёхугольника $KSLF$ можно описать окружность, следовательно $\angle KSL + \angle KFL = 180^\circ$ (по свойству вписанного четырёхугольника). Отсюда $\angle KSL = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$.

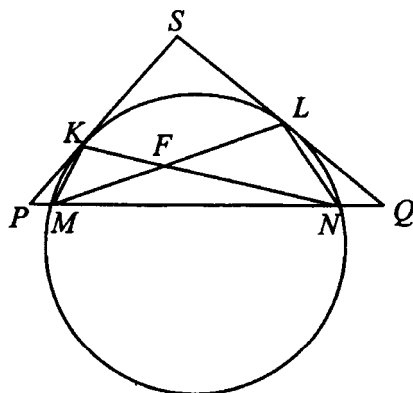


Рис. 63

Ответ: 64° .

Решение варианта № 17

21. Умножим второе равенство на 12 и преобразовав его, учитывая, что

$$16\frac{1}{6} = \frac{97}{6}, \text{ придём к системе}$$

$$\begin{cases} 5x - 6y = 16, \\ 42x + 39y = 194. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 13, а второе — на 2, получим

$$\begin{cases} 65x - 78y = 208, \\ 84x + 78y = 388. \end{cases}$$

Сложим оба уравнения, получим $149x = 596$, откуда $x = 4$. Тогда

$$20 - 6y = 16, y = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $(4; \frac{2}{3})$.

22. Предположим, что 25%-го раствора вещества взяли x л. Тогда в первом растворе $8 \cdot 0,15 = 1,2$ л самого вещества, а во втором $0,25x$ л. В их смеси $(1,2 + 0,25x)$ л самого вещества, а объём смеси равен $(8 + x)$ л.

Составим уравнение $\frac{1,2 + 0,25x}{8 + x} = 0,21$;

$$1,2 + 0,25x = 1,68 + 0,21x;$$

$$0,04x = 0,48;$$

$$x = 12. \text{ Добавили 12 л раствора.}$$

Ответ: 12.

$$23. y = -x^2 + 6x - \frac{10x}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

При $x > 0$ $y = -x^2 + 6x - 10 = -(x - 3)^2 - 1$ — фрагмент параболы с вершиной $(3; -1)$, ветви направлены вниз.

При $x < 0$ имеем $y = -x^2 + 6x + 10$; $y = -(x - 3)^2 + 19$ — фрагмент параболы с вершиной в $(3; 19)$, ветви направлены вниз. Построим график исходной функции (см. рис. 64). Прямая $y = a$ — горизонтальная прямая. Две общих точки с исходным графиком — при $a \in (-\infty; -10]$ и $a = -1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -10]$; $a = -1$.

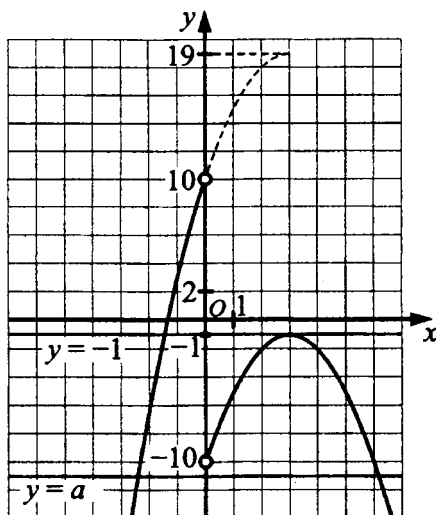


Рис. 64

24. По теореме Пифагора (см. рис. 65)

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3 \cdot 7)^2 + (4 \cdot 7)^2} = 7\sqrt{3^2 + 4^2} = 35.$$

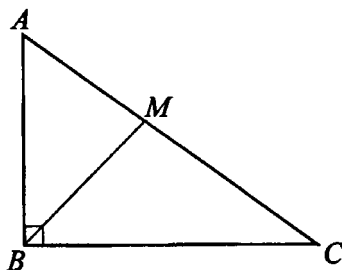


Рис. 65

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{CM}$;

$$\frac{21}{35 - CM} = \frac{28}{CM}; \quad \frac{3}{35 - CM} = \frac{4}{CM}; \quad CM = 20.$$

Ответ: 20.

25. Пусть AB — хорда, K — её середина, O — центр окружности (см. рис. 66). Тогда $\triangle OKA = \triangle OKB$ по трём сторонам ($AK = BK = \frac{1}{2}AB$), $OA = OB$ как радиусы, OK — общая сторона.

Таким образом, $\angle OKA = \angle OKB$, при этом $\angle OKA + \angle OKB = 180^\circ$ как смежные углы, поэтому $\angle OKA = 90^\circ$ и OK — серединный перпендикуляр. Так как серединный перпендикуляр к отрезку единственный, он пройдёт через центр окружности.

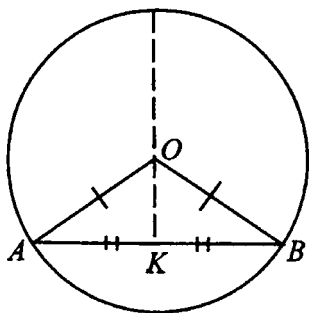


Рис. 66

26. Заметим, что $OB \perp AB$ (OB — радиус, проведённый в точку касания), $\triangle ABO$ — прямоугольный ($\angle B = 90^\circ$) (см. рис. 67).

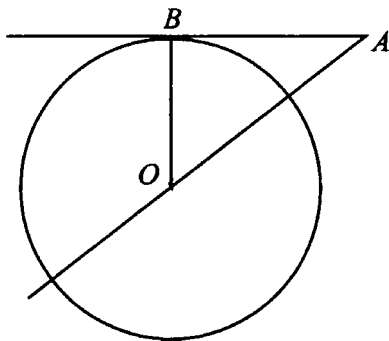


Рис. 67

По теореме Пифагора $AO = \sqrt{OB^2 + BA^2} = 26$.

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}OB \cdot AB = 120.$$

$$P_{\triangle ABO} = 10 + 24 + 26 = 60.$$

Пусть радиус окружности, вписанной в $\triangle ABO$, равен r . Тогда $120 = \frac{1}{2}Pr$; $30r = 120$, $r = 4$.

Ответ: 4.

Решение варианта № 18

21. Домножим первое равенство на 24 и, преобразовав его, придём к системе $\begin{cases} 36x + 10y = -69, \\ 8x + 15y = 0. \end{cases}$ Первое уравнение умножим на 3, второе — на

2, в результате будем иметь систему $\begin{cases} 108x + 30y = -207, \\ 16x + 30y = 0. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $92x = -207$, $x = -\frac{9}{4}$.

Из условия $8x + 15y = 0$ найдём $y = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\left(-\frac{9}{4}; \frac{6}{5}\right)$.

22. Будем считать, что курага и абрикосы состоят из воды и сухого вещества. В кураге — 95% сухого вещества, то есть в 15 кг — $15 \cdot 0,95 = 14,25$ кг сухого вещества. Эти 14,25 кг сухого вещества должны составлять 20% от массы абрикосов. Таким образом, абрикос необходимо взять $\frac{14,25}{0,2} = 71,25$ (кг).

Ответ: 71,25.

23. Построим график $y = x^2 + 4x - \frac{4|x|}{x}$. Ясно, что $x \neq 0$.

При $x > 0$ получим $y = x^2 + 4x - 4 = (x + 2)^2 - 8$ — часть параболы с вершиной $(-2; -8)$, ветви направлены вверх (см. рис. 68).

При $x < 0$ имеем $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ — часть параболы с вершиной в $(-2; 0)$, ветви направлены вверх. Построим график заданной функции (см. рис. 68). Прямая $y = a$ — горизонтальная прямая. Две точки пересечения графиков будет при $a \in \{0\} \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $a = 0$; $a \in [4; +\infty)$.

24. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 10$ (см. рис. 69).

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{KC}$,

$$\frac{26}{BK} = \frac{24}{10 - BK}, \quad 260 - 26BK = 24BK, \quad BK = \frac{26}{5} = 5,2.$$

Ответ: 5,2

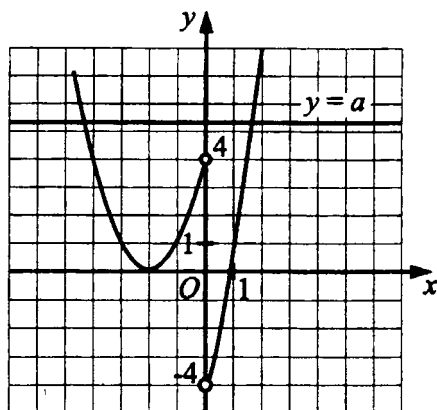


Рис. 68

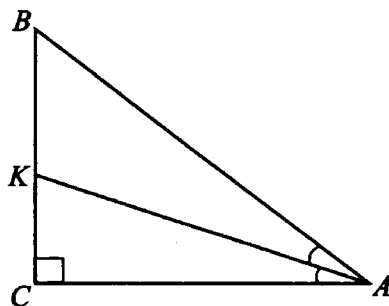


Рис. 69

25. Рассмотрим окружность с центром O , хорду AB и диаметр MN , которые пересекаются в точке K , $MN \perp AB$ (см. рис. 70).

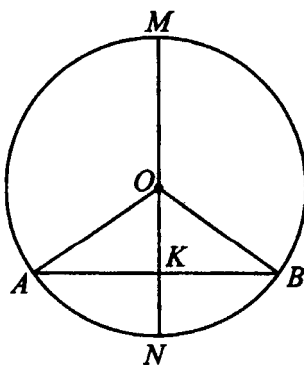


Рис. 70

Заметим, что прямоугольные треугольники OAK и OBK равны по гипотенузе и катету ($OA = OB$ как радиусы, OK — общий катет, $\angle OKA = \angle OKB$, так как $MN \perp AB$). Таким образом, $AK = KB$, что и требовалось доказать.

26. AO пересекает окружность в точках M_1 и M_2 . Выясним, какая из точек M_1 и M_2 совпадает с точкой M (см. рис. 71).

$OB \perp AB$ (OB — радиус, проведённый в точку касания), значит $\triangle OBA$ — прямоугольный с гипотенузой OA . Таким образом, $M_1A > OA > 12$ и, значит, $M_1A \neq 8$. Тогда $M_2A = 8$ и точка M совпадает с точкой M_2 .

По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки, $AB^2 = AM_2 \cdot AM_1$, $144 = 8AM_1$, $AM_1 = 18$, $M_1M_2 = 18 - 8 = 10$, $OM_2 = OM_1 = 5$. $OA = 8 + 5 = 13$, $\cos \angle BOA = \frac{5}{13}$. В $\triangle OBM_2$ по теореме косинусов

$$BM_2^2 = OB^2 + OM_2^2 - 2OB \cdot OM_2 \cdot \cos \angle BOA = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{5}{13} = 50 \left(1 - \frac{5}{13}\right) = \frac{400}{13}, \quad BM_2 = \frac{20}{\sqrt{13}} = \frac{20\sqrt{13}}{13}.$$

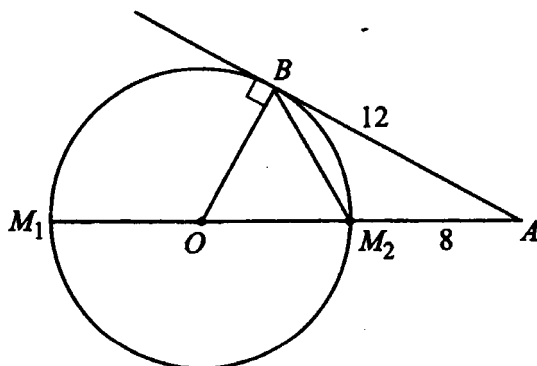


Рис. 71

Ответ: $\frac{20\sqrt{13}}{13}$.

Решение варианта № 19

21. Раскрыв скобки, получим $x^2 - 12x + 20 \leq 0$. Решим уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 10$, откуда $x^2 - 12x + 20 = (x - 2)(x - 10)$. Запишем неравенство, равносильное исходному: $(x - 2)(x - 10) \leq 0$. Следовательно, $x \in [2; 10]$ (см. рис. 72).

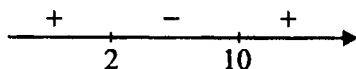


Рис. 72

Ответ: $[2; 10]$.

22. Пусть S — расстояние между пунктами A и B (в километрах), x — собственная скорость катера (в км/ч), y — скорость течения (в км/ч). По условию $\frac{S}{x+y} = 3$, $\frac{S}{x-y} = 5$. Необходимо найти $\frac{S}{y}$.

Числитель и знаменатель первых двух дробей разделим на y , тогда

$$\begin{cases} \frac{\frac{S}{y}}{\frac{x}{y} + 1} = 3, \\ \frac{\frac{S}{y}}{\frac{x}{y} - 1} = 5. \end{cases}$$

Пусть $\frac{S}{y} = t$, $\frac{x}{y} = u$. $\begin{cases} t = 3(u+1), \\ t = 5(u-1); \end{cases} \begin{cases} t - 3u = 3, \\ t - 5u = -5. \end{cases}$

Из первого неравенства вычитаем второе, получим $2u = 8$, $u = 4$.

Тогда $t = 3 + 3u = 15$.

Ответ: 15.

23. 1. Прямая $y = -2x + b$ имеет с параболой $y = x^2 - 6x$ ровно одну общую точку, когда $-2x + b = x^2 - 6x$ и дискриминант этого уравнения равен нулю. $x^2 - 4x - b = 0$. $D = 16 + 4b$, $D = 0$, $b = -4$.

При $b = -4$ общая точка имеет следующие координаты: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$. $y = -2 \cdot 2 - 4 = -8$. $(2; -8)$.

2. Построим прямую $y = -2x - 4$ и параболу $y = x^2 - 6x$ в одной системе координат (см. рис. 73).

а) $y = -2x - 4$

x	0	+2
y	-4	-8

б) $y = x^2 - 6x = x(x - 6)$ — парабола с вершиной $(3; -9)$, ветви направлены вверх.

x	-1	0	1	2	3	6
y	7	0	-5	-8	-9	0

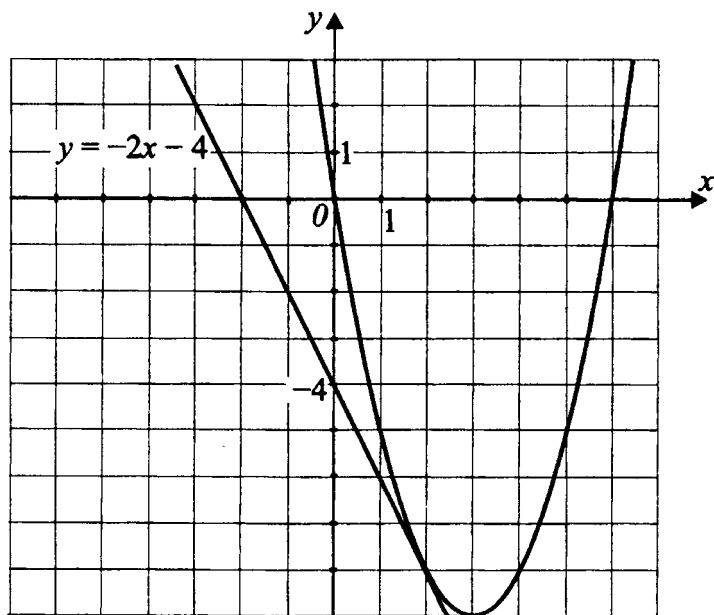


Рис. 73

Ответ: $-4; (2; -8)$.

24. Пусть $ABCD$ — описанная трапеция, BC и AD — основания (см. рис. 74), $AB = CD = 5$ см. $AD = 8$ см. По свойству описанного четырёхугольника $BC + AD = AB + CD$; $BC = 10$ см $- 8$ см $= 2$ см.

Ответ: 2.

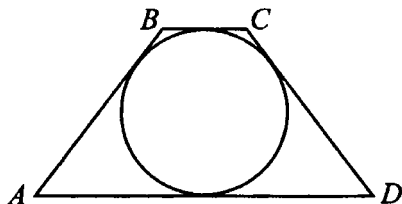


Рис. 74

25. Пусть $\angle ABC = \alpha$ (см. рис. 75). $\triangle ABC$ — равнобедренный, углы при основании равны: $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Внешний угол при вершине A треугольника ABC равен сумме двух несмежных с ним углов, поэтому $\angle KAC = \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha$. NA — биссектриса, следовательно, $\angle KAN = \angle NAC = \alpha$. Но тогда $AN \parallel BC$, так как соответственные углы KAN и ABC равны (при пересечении прямых AN и BC секущей AB).

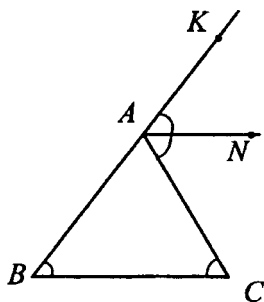


Рис. 75

26. Окружности не пересекаются, так как расстояния между их центрами больше суммы радиусов окружности (см. рис. 76). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, A и B — точки касания с их общей касательной (O_1 — центр большей окружности, на которой ле-

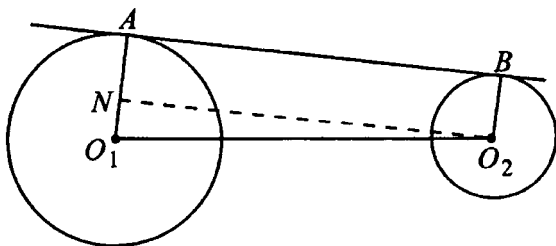


Рис. 76

жит точка A). $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ по свойству радиуса, проведённого в точку касания, откуда $O_1A \parallel O_2B$. Проведём $O_2N \parallel AB$ (точка N лежит на O_1A). Тогда $NABO_2$ — прямоугольник. Отсюда получим, что $AB = NO_2$, $\angle ANO_2 = 90^\circ$, $\angle O_1NO_2 = 90^\circ$ (как смежный с прямым углом). $NA = O_2B = 7$ см, $O_1N = O_1A - NA = 23$ см $- 7$ см $= 16$ см. В $\triangle NO_2O_1$ по теореме Пифагора $NO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1N^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{(34 - 16)(34 + 16)} = 30$. Но тогда и $AB = 30$.

Ответ: 30.

Решение варианта № 20

21. Раскрыв скобки, получим $x^2 - 4x - 45 \geq 0$. Решим уравнение $x^2 - 4x - 45 = 0$, его корни $x_1 = -5$ и $x_2 = 9$, откуда $(x + 5)(x - 9) \geq 0$. Следовательно, $x \in (-\infty; -5] \cup [9; +\infty)$ (см. рис. 77).



Рис. 77

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [9; +\infty)$.

22. Пусть первый рабочий выполнит работу за x дней, а второй — за y дней. Тогда за один день первый рабочий выполнит $\frac{1}{x}$ часть работы, а вто-

рой — $\frac{1}{y}$ часть. Из условия следует, что
$$\begin{cases} 12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1, \\ \frac{2}{x} = \frac{3}{y}. \end{cases}$$

Значит, $\frac{1}{y} = \frac{2}{3x}$. Тогда $12\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}\right) = 1$; $12 \cdot \frac{5}{3x} = 1$; $\frac{20}{x} = 1$, $x = 20$.

Ответ: 20.

23. 1. Прямая $y = 6x - b$ имеет с параболой $y = x^2 + 4x$ ровно одну общую точку, когда $6x - b = x^2 + 4x$ и дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. $x^2 - 2x + b = 0$. $D = 4 - 4b$, $D = 0$, $b = 1$.

При $b = 1$ общая точка имеет следующие координаты: $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$, $x = 1$, $y = 5$. $(1; 5)$.

2. Построим прямую $y = 6x - 1$ и параболу $y = x^2 + 4x$ в одной системе координат (см. рис. 78).

а) $y = 6x - 1$

x	0	1
y	-1	5

б) $y = x^2 + 4x = x(x + 4)$ — парабола с вершиной в точке $(-2; -4)$, ветви направлены вверх.

x	-4	-3	-2	-1	0	1
y	0	-3	-4	-3	0	5

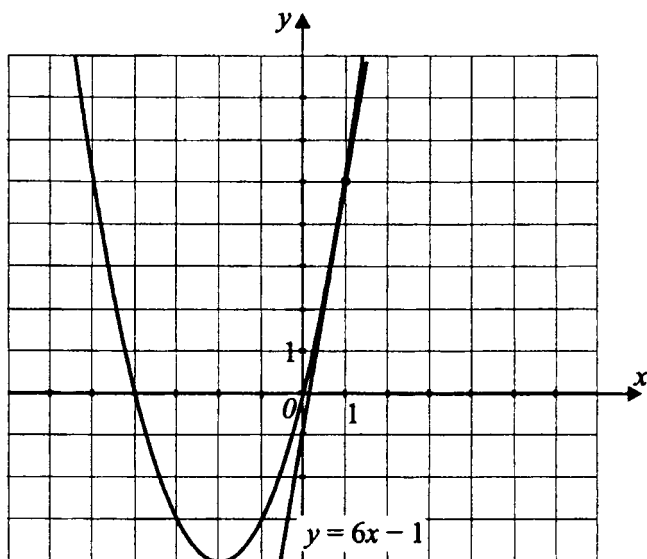


Рис. 78

Ответ: 1; (1; 5).

24. Высота трапеции равна удвоенному радиусу и равна 10 см, так как основания трапеции перпендикулярны радиусам и параллельны между собой (см. рис. 79). Площадь трапеции можно вычислить как произведение высоты на среднюю линию, получим $S = 10 \cdot 12 = 120$ (см²).

Ответ: 120.

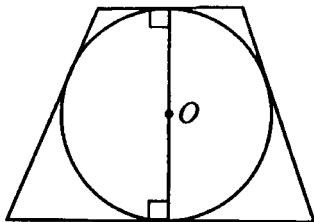


Рис. 79

25. Пусть окружность радиуса r с центром O вписана в $\triangle ABC$ (см. рис. 80). Точки K, L, M — точки касания окружности и прямых AB, BC и AC соответственно. Заметим, что $KO \perp AB$, $LO \perp BC$ и $OM \perp AC$ как радиусы, проведённые в точки касаний. Заметим, что $\triangle ABC$ составлен из треугольников AOB , AOC и BOC . Следовательно, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$; $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot AB$; $S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot AC$; $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot OL \cdot BC$. Учитывая, что $KO = OL = OM = r$, получим, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) = \frac{Pr}{2}$, где P — периметр $\triangle ABC$.

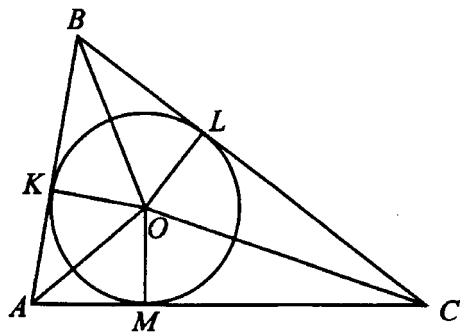


Рис. 80

26. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Пусть ABC — треугольник (см. рис. 81). $\angle C = 90^\circ$, CH — высота, $AC = 15$ см, $HB = 16$ см. Необходимо найти AB . Пусть $AH = x$ см, тогда в $\triangle ACH$ по теореме Пифагора $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 225 - x^2$. По теореме Пифагора в $\triangle CHB$

$CB^2 = CH^2 + HB^2 = 225 - x^2 + 256$. В $\triangle ACB$ по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $(x + 16)^2 = 225 + 225 - x^2 + 256$; $x^2 + 32x + 256 = 450 - x^2 + 256$, $x^2 + 16x - 225 = 0$, $(x + 25)(x - 9) = 0$. Учитывая, что $x > 0$, получим $x = 9$. Тогда $AB = x + 16 = 25$, искомый радиус описанной окружности равен $\frac{AB}{2} = 12,5$ см.

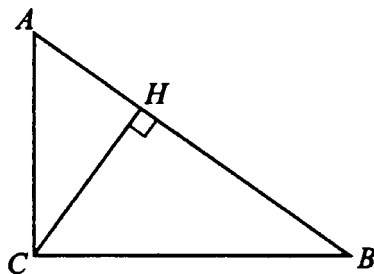


Рис. 81

Ответ: 12,5.

Решение варианта № 21

$$21. \left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot \sqrt[3]{6} = \left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \\ = 2^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 4 - 9 = -5.$$

Ответ: -5.

22. Пусть велосипедист возвращался со скоростью x км/ч, на обратный путь он затратил $\frac{30}{x}$ часов. Тогда из города в посёлок он поехал со скоростью $(x - 2)$ км/ч и затратил $\frac{24}{x - 2}$ часов. Учитывая, что

$$6 \text{ мин} = \frac{1}{10} \text{ часа, из условия задачи получим, что } \frac{30}{x} - \frac{24}{x - 2} = \frac{1}{10};$$

$$\frac{10(30(x - 2) - 24x)}{x(x - 2)} = \frac{x(x - 2)}{x(x - 2)}; 300x - 600 - 240x = x^2 - 2x;$$

$x^2 - 62x + 600 = 0$; $x_{1,2} = 31 \pm \sqrt{961 - 600} = 31 \pm 19$. Значит, $x = 50$ или $x = 12$. По условию $x \leq 30$, поэтому $x = 12$.

Ответ: 12.

23. 1. Прямая $y = b - 2x$ имеет с параболой $y = -x^2 + 2x$ ровно одну общую точку, когда $b - 2x = -x^2 + 2x$ и дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. $x^2 - 4x + b = 0$. $D = 16 - 4b$, $D = 0$, $b = 4$.

При $b = 4$ общая точка имеет следующие координаты: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$. $y = 0$. $(2; 0)$.

2. Построим прямую $y = 4 - 2x$ и параболу $y = -x^2 + 2x$ в одной системе координат (см. рис. 82).

а) $y = 4 - 2x$

x	2	1
y	0	2

б) $y = -x^2 + 2x = -x(x - 2)$ — параболa с вершиной в точке $(1; 1)$, ветви направлены вниз.

x	-1	0	1	2	3
y	-3	0	1	0	-3

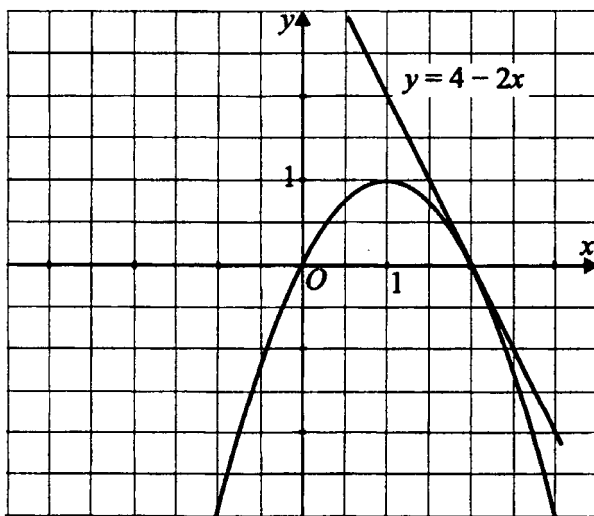


Рис. 82

Ответ: 4; $(2; 0)$.

24. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является медианой, поэтому $AH = HC = 15$ (см. рис. 83).

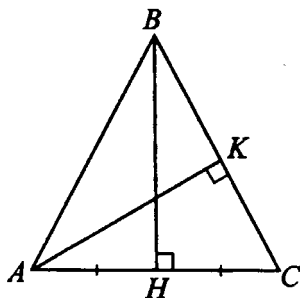


Рис. 83

В $\triangle BCH$ по теореме Пифагора $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 20^2 + 15^2 = 625$,
 $BC = 25$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 300$. С другой стороны
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK$, значит $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot AK = 300$, $AK = \frac{600}{25} = 24$.

Ответ: 24.

25. Пусть $ABCD$ — ромб (см. рис. 84), то есть $AB = BC = CD = AD$.

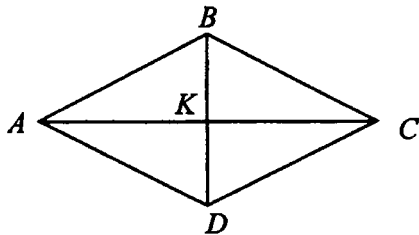


Рис. 84

$\triangle ABC$ — равнобедренный, значит $\angle BAC = \angle BCA$. $\triangle ACD$ — тоже равнобедренный, поэтому $\angle CAD = \angle ACD$. $\triangle ABC = \triangle CDA$ по трём сторонам ($AB = BC = CD = AD$, AC — общая сторона). Значит, $\angle BCA = \angle ACD$ и CA — биссектриса $\angle BCD$. $\triangle BCD$ — равнобедренный, биссектриса его угла при вершине является высотой, то есть $CK \perp BD$, $AC \perp BD$.

26. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями BC и AD , в которую вписана окружность радиуса 2 см (см. рис. 85).

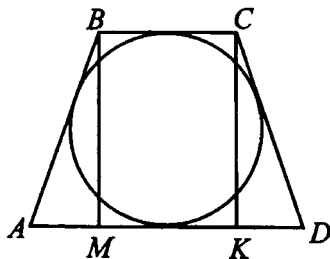


Рис. 85

$S_{ABCD} = 20 \text{ см}^2$. Высота трапеции, очевидно, равна диаметру вписанной окружности и равна 4 см ($h = 4 \text{ см}$). Площадь трапеции $\frac{BC + AD}{2} \cdot h = 20 \text{ см}^2$; значит $BC + AD = 10 \text{ см}$. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = AB + CD = 10 \text{ см}$. Трапеция равнобедренная, следовательно $AB = CD = 5 \text{ см}$. Проведём высоты CK и BM . В $\triangle CDK$ по теореме Пифагора $KD^2 = CD^2 - CK^2 = 25 - 16 = 9$, $KD = 3 \text{ см}$. Аналогично, $AM = 3 \text{ см}$. $BCKM$ — прямоугольник, $BC = MK$. $BC + AD = 2BC + 6 \text{ см} = 10 \text{ см}$; $BC = 2 \text{ см}$, $AD = 10 \text{ см} - 2 \text{ см} = 8 \text{ см}$.

Ответ: 8; 2; 5; 5.

Решение варианта № 22

$$21. \left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}} \right) \cdot \sqrt[4]{1000} = \left(5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \right) \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = \\ = 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 5 - 2 = 3.$$

Ответ: 3.

22. Пусть велосипедист проехал первые 40 км со скоростью x км/ч. Тогда последние 27 км он проехал со скоростью $(x + 2)$ км/ч. Составим и решим уравнение по условию задачи: $\frac{40}{x} + \frac{27}{x+2} = 4$; $40(x+2) + 27x = 4x(x+2)$,

$$4x^2 + 8x = 67x + 80; 4x^2 - 59x - 80 = 0; x_{1,2} = \frac{59 \pm 69}{8}. \text{ Учитывая,}$$

что $x > 0$, получим $x = 16$. Тогда последние 27 км пути велосипедист преодолел за $\frac{27}{18} = 1,5$ (часа).

Ответ: 1,5.

23. 1. Прямая $y = x - b$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку, когда $x^2 - 3x = x - b$ и дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. $x^2 - 4x + b = 0$. $D = 16 - 4b$, $D = 0$, $b = 4$.

При $b = 4$ общая точка имеет следующие координаты: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$. $y = -2$. $(2; -2)$.

2. Построим прямую $y = x - 4$ и параболу $y = x^2 - 3x$ в одной системе координат (см. рис. 86).

а) $y = x - 4$

x	3	2
y	-1	-2

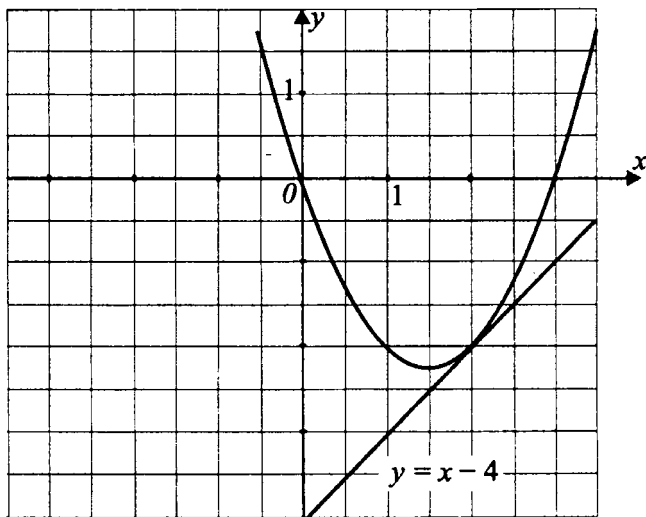


Рис. 86

б) $y = x^2 - 3x = x(x - 3)$ — парабола с вершиной в точке $(1,5; -2,25)$, ветви направлены вверх.

x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	-2	0

Ответ: 4; $(2; -2)$.

24. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 87).

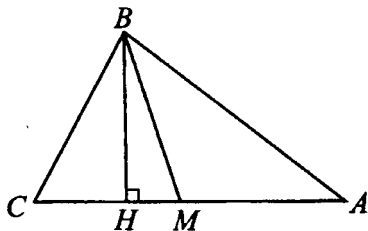


Рис. 87

$BA > BC$, значит $BA^2 > BC^2$. Однако, по теореме Пифагора $BA^2 = BH^2 + HA^2$, $BC^2 = BH^2 + HC^2$, $BH^2 + HA^2 > BH^2 + HC^2$, $HA^2 > HC^2$, $HA > HC$. Таким образом, точка M лежит между точками H и A . В треугольнике BHM по теореме Пифагора $HM^2 = BM^2 - BH^2 = 25$, $HM = 5$. Тогда $AH = AM + MH = \frac{AC}{2} + MH = 30 + 5 = 35$. По теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 1369$, $AB = 37$.

Ответ: 37.

25. Рассмотрим ромб $ABCD$ (см. рис. 88), L, N, M, K — середины сторон AB, BC, CD, AD . Тогда $LN \parallel AC$ и $LN = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия $\triangle ABC$).

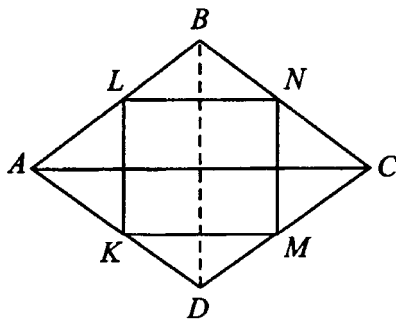


Рис. 88

Аналогично $KM \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия $\triangle ADC$). Таким образом, $LNMK$ — параллелограмм (две стороны равны и па-

параллельны ($LN \parallel KM$, $LN = KM$). Аналогично $LK \parallel BD \parallel NM$. Однако $BD \perp AC$ как диагонали ромба. Значит $LN \perp LK$, $LN \perp NM$, $KM \perp LK$, $KM \perp MN$, $\angle NLK = \angle LKM = \angle KMN = \angle MNL = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

26. Пусть радиус вписанной окружности равен r (см. рис. 89).

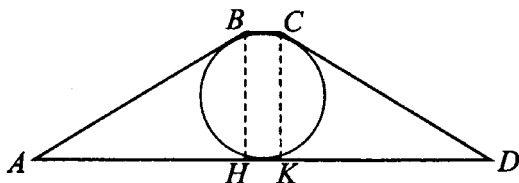


Рис. 89

Очевидно, что высота трапеции равна диаметру окружности и равна $2r$. Проведём высоты BH и CK . В $\triangle ABH$ катет BH лежит против угла 30° , следовательно он равен половине гипотенузы, откуда $AB = 4r$. $AB = CD$, значит $AB + CD = 8r$. $AB + CD = BC + AD$ (так как в $ABCD$ вписана окружность), поэтому периметр $P_{ABCD} = 16r$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}P_{ABCD} \cdot r = 8r^2$, откуда $8r^2 = 18$, $r^2 = \frac{9}{4}$, $r = \frac{3}{2}$. Тогда $AB = 4r = 6$.

Ответ: 6.

Решение варианта № 23

21. Подставим значение $y = 4x + 3$ во второе уравнение системы. Получим $5x^2 + (16x^2 + 24x + 9) + 4x^2 + 3x = 9$, то есть $25x^2 + 27x = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{27}{25}$. При $x = 0$ получим $y = 4 \cdot 0 + 3 = 3$. При $x = -\frac{27}{25}$

получим $y = 4 \cdot \left(-\frac{27}{25}\right) + 3 = -\frac{33}{25}$.

Ответ: $(0; 3)$, $\left(-\frac{27}{25}; -\frac{33}{25}\right)$.

22. Пусть скорость течения реки равна x км, $x > 0$, $x < 6$. Плот пройдёт 12 км за $\frac{12}{x}$ часов. На 27 км по течению лодке потребуется $\frac{27}{x+6}$ часов, на 3 км против течения — $\frac{3}{6-x}$. Таким образом, $\frac{27}{x+6} + \frac{3}{6-x} = \frac{12}{x}$.

$$\frac{9x(6-x) + x(x+6)}{(x+6)(x-6)x} = \frac{4 \cdot 36 - 4x^2}{(x+6)(x-6)x}; \quad 4x^2 - 60x + 144 = 0,$$

$$x^2 - 15x + 36 = 0, \quad (x-3)(x-12) = 0. \text{ Так как } x < 6, \text{ получим } x = 3.$$

Ответ: 3.

$$23. \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2(x-1) - 4(x-1)}{(x^2-4)} = x-1 \text{ при } x \neq \pm 2.$$

График исходной функции — это график $y = x - 1$ с выколотыми точками $(2; 1)$ и $(-2; -3)$ (см. рис. 90).

Прямая $y = a$ не имеет с означенным графиком общих точек при $a = 1$ и $a = -3$.

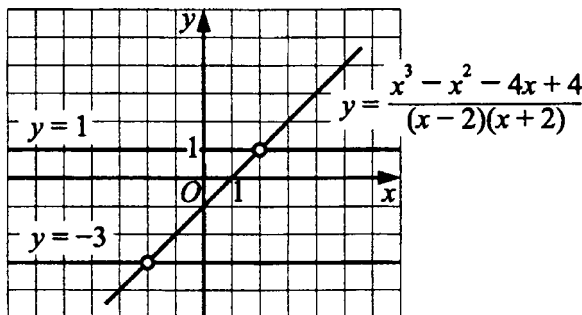


Рис. 90

Ответ: 1; -3.

24. Рассмотрим $\triangle ABH$, $\angle B = 90^\circ$, $BH = 12$, $HC = AH + 7$ (см. рис. 91).

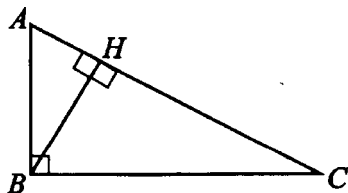


Рис. 91

Обозначим $AH = x$, тогда гипотенуза $AC = 2x + 7$. В $\triangle ABH$ по теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + HB^2 = x^2 + 144$. В $\triangle HCB$ по теореме Пифагора $BC^2 = HC^2 + BH^2 = x^2 + 14x + 193$. $AC^2 = AB^2 + BC^2$, тогда $(2x + 7)^2 = x^2 + 144 + x^2 + 14x + 193$; $4x^2 + 28x + 49 = 2x^2 + 14x + 337$;

$$2x^2 + 14x - 288 = 0; \quad x^2 + 7x - 144 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 25}{2}, \quad x = 9.$$

$$AC = 2 \cdot 9 + 7 = 25.$$

Ответ: 25.

25. В окружности с центром O проведём произвольные диаметры AM и BK (см. рис. 92).

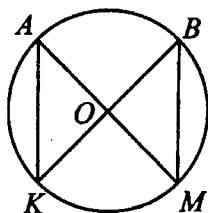


Рис. 92

$\triangle AOK = \triangle BOM$ по первому признаку ($\angle AOK = \angle BOM$ как вертикальные, $AO = OK = OM = OB$ как радиусы исходной окружности), значит $\angle OKA = \angle OBM$. Но эти углы являются накрест лежащими при BM , AK и секущей KB . По признаку параллельности двух прямых $BM \parallel AK$, что и требовалось доказать.

26. Обозначим $\angle BCE = \alpha$ (см. рис. 93).

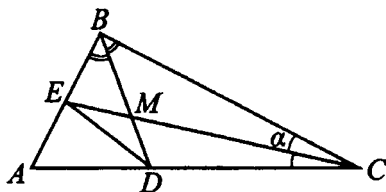


Рис. 93

Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \angle BCD - \angle BAD = 120^\circ - 2\alpha$,
 $\angle MBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ - \alpha$, так как BD — биссектриса.
 $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle MCB = 120^\circ$. $\angle EMD = \angle BMC = 120^\circ$
 (как вертикальные углы).

Ответ: 120.

Решение варианта № 24

21. Подставим значение $x = 7y + 3$ во второе уравнение системы. Получим $y^2 - y(7y + 3) + (49y^2 + 42y + 9) = 9$, то есть $43y^2 + 39y = 0$, откуда $y_1 = 0$ и $y_2 = -\frac{39}{43}$. При $y = 0$ получим $x = 7 \cdot 0 + 3 = 3$. При $y = -\frac{39}{43}$ получим $x = 7 \cdot \left(-\frac{39}{43}\right) + 3 = -\frac{144}{43}$.

Ответ: $(3; 0), \left(-\frac{144}{43}; -\frac{39}{43}\right)$.

22. В 30 кг 5%-го раствора содержится $30 \cdot 0,05 = 1,5$ (кг) соли. Если 1,5 кг составляют 3% раствора, то масса раствора $\frac{1,5 \text{ кг}}{0,03} = 50$ кг. Значит, надо добавить $50 - 30 = 20$ (кг).

Ответ: 20.

23. Построим график заданной функции (см. рис. 94), учитывая, что $y = x - 3$ проходит через точки $(0; -3)$ и $(5; 2)$, прямая $y = x$ через точки $(5; 5)$ и $(7; 7)$, а прямая $y = 9 - x$ через точки $(7; 2)$ и $(9; 0)$. Графической иллюстрацией уравнения $y(x) = a$ является прямая, параллельная оси Ox , поэтому она имеет две точки пересечения с построенным графиком при $a \in (-\infty; 2)$. Уравнение $y(x) = a$ имеет 2 различных корня тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty; 2)$.

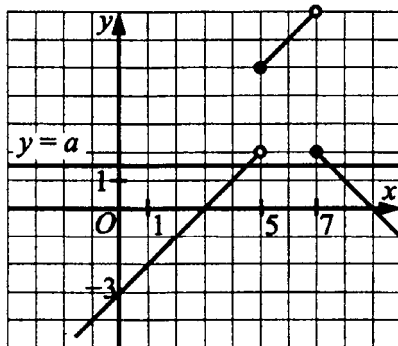


Рис. 94

Ответ: $(-\infty; 2)$.

24. Рассмотрим $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 30^\circ$) (см. рис. 95).

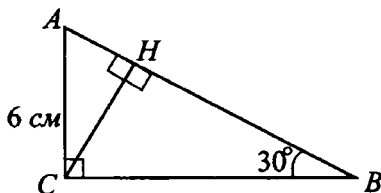


Рис. 95

Гипотенуза $AB = 2AC = 12$ см. $\angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
 $\angle ACH = 30^\circ$. Значит, $AH = \frac{1}{2}AC = 3$ см. $HB = AB - AH = 9$ см.

Ответ: 3; 9.

25. Биссектриса BE является медианой и высотой равнобедренного треугольника ABC (см. рис. 96).

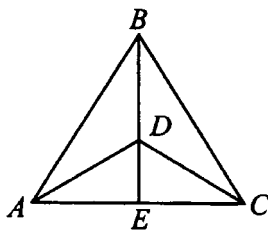


Рис. 96

Таким образом $AE = EC$, $\angle AED = \angle DEC = 90^\circ$. $\triangle AED = \triangle DEC$ по двум катетам, следовательно, $AD = DC$, что и требовалось доказать.

26. Так как O — центр вписанной окружности $\triangle ABD$, значит O — точка пересечения биссектрис $\triangle ABD$ (см. рис. 97).

Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle DAO = \alpha$, так как AO — биссектриса угла DAB . AD — биссектриса $\angle MAB$, значит $\angle MAD = 2\alpha$ и $\angle MAB = 4\alpha$.

$\triangle AOB$ — равнобедренный, следовательно $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$.

OB — биссектриса $\angle MBA$, значит $\angle MBA = 2\alpha$.

$\triangle MOB$ — равнобедренный, отсюда $\angle MBO = \angle OMB = \alpha$.

$\angle OMA = \angle OAM = 3\alpha$, так как $\triangle OMA$ — равнобедренный.

$\angle MAB + \angle MBA + \angle BMA = 180^\circ$, $4\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, $10\alpha = 180^\circ$,
 $\alpha = 18^\circ$.

Ответ: 18° .

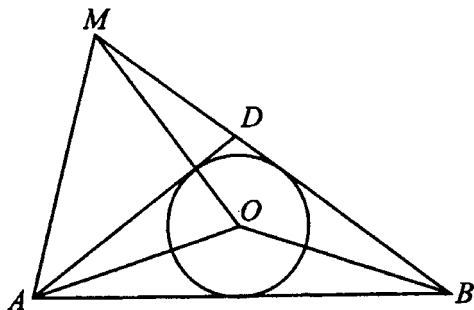


Рис. 97

Решение варианта № 25

21. Подставим значение $y = 5 - 2x$ во второе уравнение системы. Получим $x^2 - (25 - 20x + 4x^2) + (5x - 2x^2) = 5$, $-5x^2 + 25x - 30 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. При $x = 2$ получим $y = 5 - 2 \cdot 2 = 1$. При $x = 3$ получим $y = 5 - 2 \cdot 3 = -1$.

Ответ: (2; 1), (3; -1).

22. Найдём скорость сержанта относительно командира взвода, она равна $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ (м/с). Учитывая, что $6 \text{ км/ч} = \frac{6000}{3600} \text{ м/с} = \frac{5}{3} \text{ м/с}$, получим, что скорость сержанта равна $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$ (м/с).

Ответ: 3.

23. Построим график функции $y = 4x - x^2 + 5$.
 $y = 4x - x^2 + 5 = -(x - 2)^2 + 9$ — парабола с вершиной в точке (2; 9), ветви направлены вниз (см. рис. 98). Горизонтальная прямая $y = 2t$ имеет единственную точку пересечения с этим графиком, когда проходит через вершину параболы, то есть когда $2t = 9$, $t = 4,5$.

Ответ: 4,5.

24. В правильном шестиугольнике все углы равны 120° , а стороны равны радиусу описанной окружности, то есть $CD = 2$, $AO = OD = 2$, $AD = 4$ (см. рис. 99).

$\angle ACD$ опирается на диаметр описанной окружности, значит $\angle ACD = 90^\circ$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = 2\sqrt{3}$.
 $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD = 2\sqrt{3}$. $P_{ACD} = 6 + 2\sqrt{3}$. Пусть в $\triangle ACD$ вписан

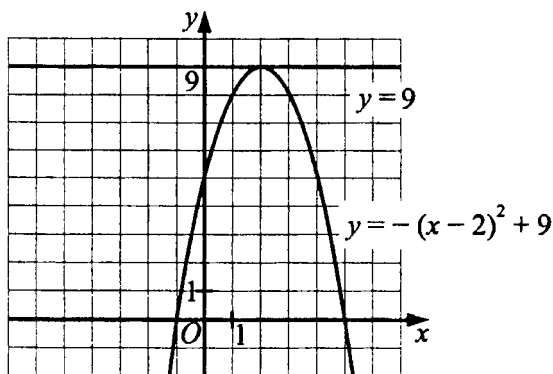


Рис. 98

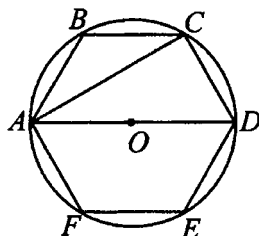


Рис. 99

круг радиуса r . Тогда $S_{ACD} = \frac{P_{ACD}}{2} \cdot r$ и $(3 + \sqrt{3})r = 2\sqrt{3}$, откуда

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \sqrt{3} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{3} - 1$.

25. Заметим, что $AC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + BC^2$ (см. рис. 100).

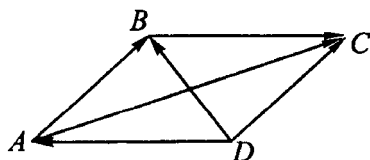


Рис. 100

$$\begin{aligned} \text{Аналогично } DB^2 &= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \\ &= \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = DA^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2 = \end{aligned}$$

$= BC^2 - 2\vec{BC} \cdot \vec{AB} + AB^2$. Тогда $AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, что и требовалось доказать.

26. Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD , $BC = 5$, $AD = 15$, NL — искомый отрезок.

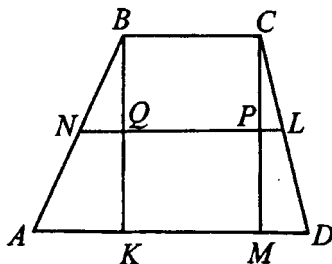


Рис. 101

Проведём высоты BK и CM . Рассмотрим 2 возможных случая.

I. $AD = BC + AK + MD$ (см. рис. 101). $AK + MD = 10$. $\triangle BNQ \sim \triangle BAK$ по двум углам ($\angle BNQ = \angle BAK$, $\angle BQN = \angle BKA$, так как $NL \parallel AD$). $\frac{NQ}{AK} = \frac{BQ}{BK} = \frac{2}{5}$; $NQ = \frac{2}{5}AK$. Аналогично $PL = \frac{2}{5}MD$, тогда $NQ + PL = \frac{2}{5}(AK + MD) = 4$, $NL = 4 + QP = 9$.

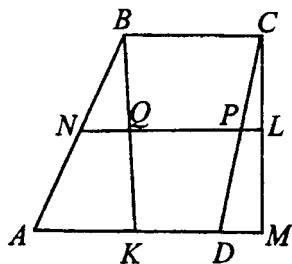


Рис. 102

II. $AD = BC + AK - MD$, (см. рис. 102). $AK - MD = 10$. Аналогично I случаю получим, что $\triangle BNQ \sim \triangle BAK$, $NQ = \frac{2}{5}AK$.

$\triangle CPL \sim \triangle CDM$, $PL = \frac{2}{5}MD$.

$$NQ - PL = \frac{2}{5}(AK - MD) = 4, \quad NP = QL + NQ - PL = 9.$$

Ответ: 9.

Решение варианта № 26

21. Подставим значение $y = 2 - x$ во второе уравнение системы. Получим $(4 - 4x + x^2) + 2x - x^2 - 3x^2 = 3$, то есть $4 - 2x - 3x^2 = 3$, $3x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. При $x = -1$ получим $y = 3$. При $x = \frac{1}{3}$ получим

$$y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $(-1; 3), \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

22. Заметим, что $18 \text{ км/ч} = \frac{18000}{3600} \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}$. Скорость велосипедиста относительно баржи равна $10 - 5 = 5 \text{ (м/с)}$. Велосипедист обгонит баржу за $\frac{50}{5} = 10 \text{ (с)}$.

Ответ: 10.

23. Построим график функции $y = 4 - x^2 + 2x$.
 $y = 4 - x^2 + 2x = 4 - (x - 1)^2 + 1 = 5 - (x - 1)^2$ — это парабола с вершиной в точке $(1; 5)$, ветви направлены вниз (см. рис. 103). Горизонтальная прямая $y = 3t$ имеет не более одной общей точки с графиком данной функции при $3t \geq 5$, $t \geq \frac{5}{3}$.

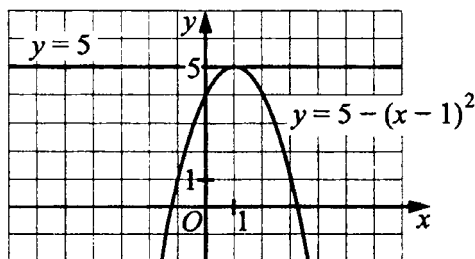


Рис. 103

Ответ: $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

24. Сторона шестиугольника равна радиусу описанной окружности и равна 4 (см. рис. 104).

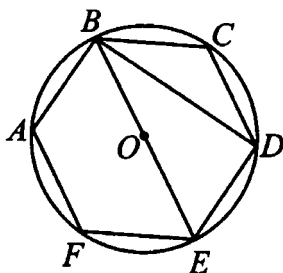


Рис. 104

$\angle BDE = 90^\circ$, так как BE — диаметр. $BE = 2 \cdot 4 = 8$, $DE = 4$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{BE^2 - ED^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$.

$S_{BDE} = \frac{1}{2}BD \cdot DE = 8\sqrt{3}$. $P_{BDE} = 12 + 4\sqrt{3}$. Пусть искомый радиус круга равен r . Тогда $S_{BDE} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{2}r = (6 + 2\sqrt{3})r = 8\sqrt{3}$.

Тогда $S_{BDE} = \frac{12 + 4\sqrt{3}}{2}r = (6 + 2\sqrt{3})r = 8\sqrt{3}$.

$$r = \frac{8\sqrt{3}}{6 + 2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{4(3 - \sqrt{3})\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3\sqrt{3} - 3)}{3} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Ответ: $2\sqrt{3} - 2$.

25. Заметим, что $\triangle ABD = \triangle DCA$ (см. рис. 105) по первому признаку ($\angle BAD = \angle ADC$, $CD = BA$, AD — общая сторона), значит $\angle CAD = \angle BDA$ и $\triangle AOD$ — равнобедренный; $AO = OD$, но $AO^2 + OD^2 = AD^2$, значит $AO = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. Тогда $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OD = \frac{AD^2}{4}$.

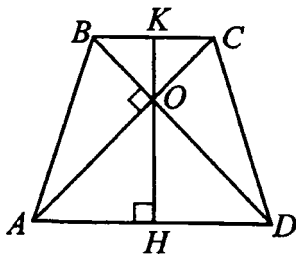


Рис. 105

Но $S_{AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot OH$, откуда $OH = \frac{AD}{2}$. Аналогично $OK = \frac{BC}{2}$, тогда $KH = \frac{AD + BC}{2}$, что и требовалось доказать.

26. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания окружностей с прямой l (см. рис. 106).

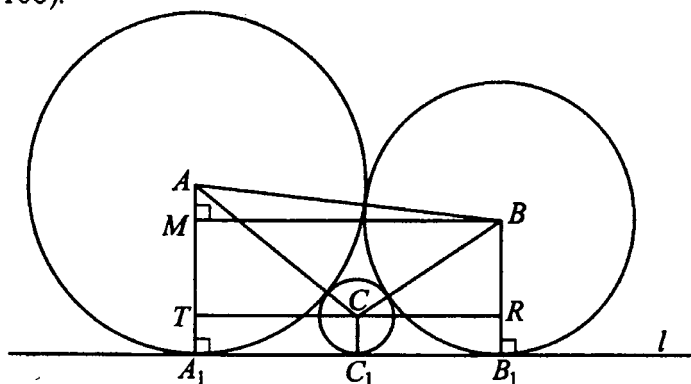


Рис. 106

Проведём $BM \parallel l$, точка M лежит на AA_1 . A_1B_1BM — прямоугольник, $A_1M = BB_1 = 16$, $MB = A_1B_1$. $AB = 36 + 16 = 52$. $AM = 36 - 16 = 20$. В $\triangle AMB$ по теореме Пифагора $MB^2 = AB^2 - AM^2 = 48^2$, $MB = 48$. Проведём $CT \parallel l$, T лежит на AA_1 . $CT^2 = (c + 36)^2 - (36 - c)^2 = 144c$, $CT = 12\sqrt{c}$. Проведём $CR \parallel l$, $CR^2 = (c + 16)^2 - (16 - c)^2 = 64c$, $CR = 8\sqrt{c}$. Но тогда $TR = 20\sqrt{c}$, $TR = MB$, $20\sqrt{c} = 48$, $\sqrt{c} = \frac{12}{5}$, $c = \frac{144}{25} = 5,76$.

Ответ: 5,76.

Решение варианта № 27

21. Раскроем скобки и приведём подобные, получим неравенство $x^2 - 9x + 18 > 0$. Разложив левую часть на множители, получаем $(x - 3)(x - 6) > 0$, откуда $x \in (-\infty; 3) \cup (6; +\infty)$ (см. рис. 107).

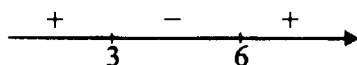


Рис. 107

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (6; +\infty)$.

22. Пусть первая бригада выполнит работу за x дней, вторая — за y дней. Тогда за 1 день первая бригада выполнит $\frac{1}{x}$ всей работы, вторая — $\frac{1}{y}$ всей

работы. По условию $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$, $y - x = 6$. Значит, $y = x + 6$ и

$$4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}\right) = 1, \frac{8x+24}{x(x+6)} = \frac{x^2+6x}{x(x+6)}, x^2 - 2x - 24 = 0, x_{1,2} = 1 \pm 5.$$

Учитывая, что $x > 0$, получим $x = 6$.

Ответ: 6.

23. Построим график функции y .

1. $y = 2x^2$, $|x| \leq 1$. Графиком $y = 2x^2$ является часть параболы, так как она определена на множестве $[-1; 1]$, принимает значения — $[0; 2]$. Ветви направлены вверх, вершина в точке $(0; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 108).

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	2	0,5	0	0,5	2

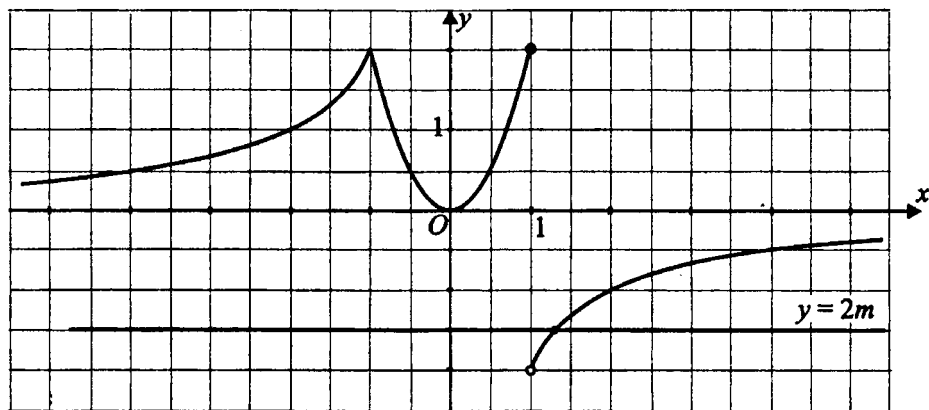


Рис. 108

2. $y = -\frac{2}{x}$, $|x| > 1$. Графиком $y = -\frac{2}{x}$ является часть гиперболы, так как она определена на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, находится во 2-ой и 4-ой четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 108).

x	-4	-2	2	4
y	0,5	1	-1	-0,5

3. Прямая $y = 2t$ имеет с графиком единственную точку при $-2 < 2t \leq 0$, откуда $t \in (-1; 0]$.

Ответ: $(-1; 0]$.

24. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 15$, $BC = 20$ (см. рис. 109).

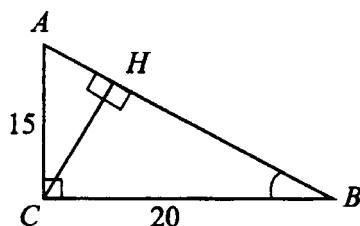


Рис. 109

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB = 150. \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH, \quad \frac{1}{2}AB \cdot CH = 150;$$

$$CH = \frac{300}{25} = 12. \quad \text{В } \triangle ACH \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 9 \text{ (см)}. \quad BH = AB - AH = 16 \text{ (см)}.$$

Ответ: 9 см и 16 см.

25. $\triangle BOE \sim \triangle FOD$ (см. рис. 110) по двум углам ($\angle BOE = \angle FOD$ как вертикальные, $\angle BEO = \angle OFD$ как накрест лежащие углы при $BE \parallel FD$ и секущей EF). $\frac{BE}{FD} = \frac{BO}{OD} = 1$, значит $BE = FD$, что и требовалось доказать.

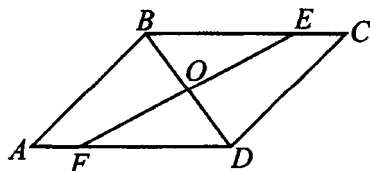


Рис. 110

26. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, тогда $\angle B = 105^\circ$. Построим точку B_1 симметрично точке B относительно прямой AC (см. рис. 111).

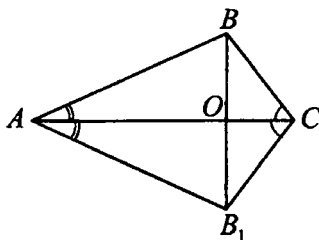


Рис. 111

В $\triangle ABC$ по теореме синусов $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = 2R$, откуда

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\sqrt{3}. \text{ Тогда}$$

$$S_{ABB_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB_1 \cdot \sin \angle BAB_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

$$\triangle AOB = \triangle AOB_1, \text{ поэтому } S_{AOB} = \frac{3}{2}.$$

Пусть $OC = x$. Из прямоугольного $\triangle OBC$ $OB = x \operatorname{tg} 60^\circ = x\sqrt{3}$. Заметим, что $S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB$, откуда $AO = \frac{2S_{AOB}}{OB} = \frac{3}{x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$.

В $\triangle AOB$ $\angle B > \angle A$, поэтому $AO > OB$, $\frac{\sqrt{3}}{x} > x\sqrt{3}$, $x^2 < 1$.

В $\triangle AOB$ по теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + OB^2$, $\frac{3}{x^2} + 3x^2 = 12$,

$$\frac{1}{x^2} + x^2 = 4, \quad x^4 - 4x^2 + 1 = 0, \quad x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Так как } x^2 < 1,$$

$$\text{то } x^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{AC}{AO}$ (треугольники с общей высотой OB). Тогда

$$S_{ABC} = \frac{AC}{AO} \cdot S_{ABO} = \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{x}}{\frac{\sqrt{3}}{x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{x^2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Решение варианта № 28

21. Раскроем скобки и приведём подобные, получим неравенство $x^2 - 4x - 5 < 0$. Разложив левую часть неравенства на множители, получим $(x + 1)(x - 5) < 0$, откуда $x \in (-1; 5)$ (см. рис. 112).

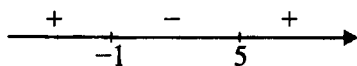


Рис. 112

Ответ: $(-1; 5)$.

22. Пусть собственная скорость катера равна x км/ч, скорость течения реки — y км/ч, $x > y > 0$. По условию $\frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14$ и

$$\frac{96}{x+y} + \frac{96-24}{x-y} = \frac{24}{y}. \text{ Решим систему } \begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{3}{x-y} = \frac{1}{y}, \\ \frac{48}{x+y} + \frac{48}{x-y} = 7. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\frac{4(x-y) + 3(x+y)}{x^2 - y^2} = \frac{1}{y}, \frac{7xy - y^2}{(x^2 - y^2)y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)y}; 7xy = x^2, x = 7y.$$

Подставим $x = 7y$ во второе уравнение системы, получим $\frac{48}{8y} + \frac{48}{6y} = 7$;

$$\frac{6}{y} + \frac{8}{y} = 7; \frac{14}{y} = 7; y = 2. \text{ Скорость течения реки — } 2 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 2 км/ч.

23. Построим график функции y .

1. $y = -2x^2$, $|x| \leq 1$. Графиком $y = -2x^2$ является часть параболы, определённая на множестве $[-1; 1]$, принимающая значения на множестве $[-2; 0]$. Ветви направлены вниз, вершина в точке $(0; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 113).

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	-2	-0,5	0	-0,5	-2

2. $y = -\frac{2}{x}$, $|x| > 1$. Графиком $y = -\frac{2}{x}$ является часть гиперболы, определённая на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, находится во 2-ой и 4-ой четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 113).

x	-4	-2	2	4
y	0,5	1	-1	-0,5

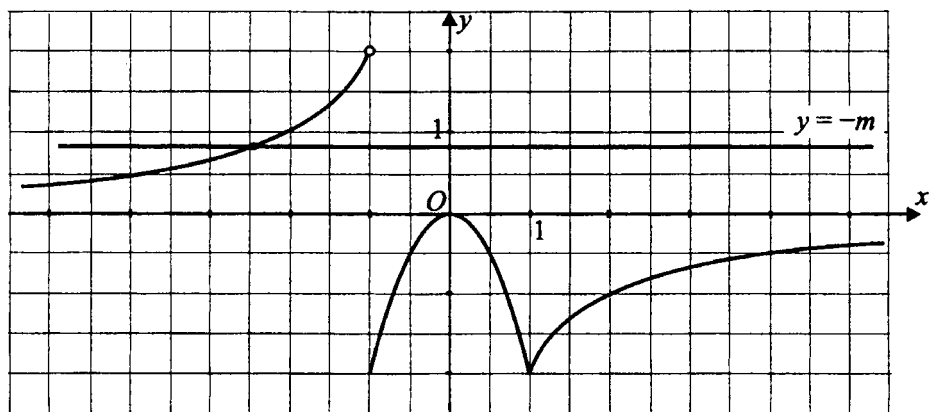


Рис. 113

3. Прямая $y = -m$ имеет с графиком единственную общую точку при $0 \leq -m < 2$, откуда $m \in (-2; 0]$.

Ответ: $(-2; 0]$.

24. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $\angle C = 90^\circ$, $AC = 15$, $CB = 20$ (см. рис. 114).

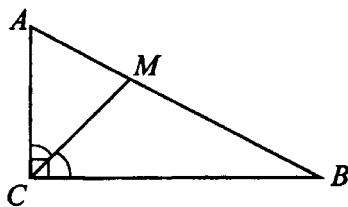


Рис. 114

По теореме Пифагора $AB^2 = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 25$. Пусть CM — биссектриса, обозначим AM через x . Тогда $\frac{AM}{AC} = \frac{BM}{CB}$; $\frac{x}{15} = \frac{25-x}{20}$;

$$20x = 25 \cdot 15 - 15x, \quad x = \frac{25 \cdot 15}{35} = \frac{75}{7}. \quad BM = 25 - \frac{75}{7} = \frac{100}{7}.$$

Ответ: $\frac{75}{7}$ см; $\frac{100}{7}$ см.

25. $\triangle EOC = \triangle AOF$ (см. рис. 115) по второму признаку ($\angle EOC = \angle AOF$ как вертикальные, $\angle ECO = \angle FAO$ как накрест лежащие при $EC \parallel AF$ и секущей AC , $EO = FO$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам). Значит $EC = AF$, что и требовалось доказать.

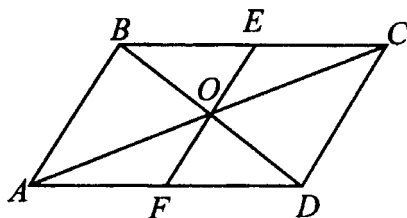


Рис. 115

26. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle B = 105^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, тогда $\angle A = 15^\circ$. Построим точку B_1 симметрично точке B относительно прямой AC (см. рис. 116).

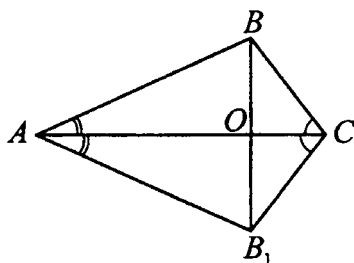


Рис. 116

Пусть искомый радиус окружности равен R . В $\triangle ABC$ по теореме синусов $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = 2R$, откуда $AB = R\sqrt{3}$. По теореме косинусов для $\triangle ABB_1$ имеем $BB_1^2 = AB^2 + AB_1^2 - 2 \cdot AB \cdot AB_1 \cdot \cos \angle BAB_1$; $BB_1^2 = 3R^2 + 3R^2 - 6R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3R^2(2 - \sqrt{3})$.

Пусть $OC = x$. Из прямоугольного $\triangle OBC$ $\frac{OB}{OC} = \tan 60^\circ$, $OB = x\sqrt{3}$, $BB_1 = 2x\sqrt{3}$. $BB_1^2 = 12x^2$, значит, $12x^2 = 3R^2(2 - \sqrt{3})$, $S_{BCB_1} = \sqrt{3}x^2$. Тогда $S_{BCB_1} = \frac{R^2(2\sqrt{3} - 3)}{4}$.

$$S_{ABB_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB_1 \cdot \sin \angle BAB_1 = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3R^2}{4}.$$

$$\text{Тогда } S_{ABCB_1} = S_{ABB_1} + S_{BCB_1} = \frac{3R^2}{4} + \frac{R^2(2\sqrt{3}-3)}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}, \text{ откуда, используя условие } S_{ABC} = 4\sqrt{3}, \text{ имеем}$$

$$\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}, \quad R^2 = 16, \quad R = 4.$$

Ответ: 4.

Решение варианта № 29

21. Приведём к общему знаменателю, получим неравенство $5x^2 - 21x - 54 \leq 0$. Разложив левую часть на множители, получим $5(x + 1,8)(x - 6) \leq 0$, откуда $x \in [-1,8; 6]$.

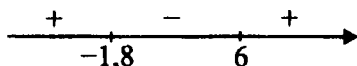


Рис. 117

Ответ: $[-1,8; 6]$.

22. Обозначим скорость пешехода x км/ч, а скорость велосипедиста — y км/ч, $x, y > 0$. Заметим, что 1 ч 24 мин = $\frac{7}{5}$ ч. К моменту выезда велосипедиста пешеход прошёл $\frac{7}{5}x$ км. Ещё через час у пешехода за спиной было $\frac{7}{5}x + x = \frac{12}{5}x$ (км), а у велосипедиста — y км. По условию

$\frac{12}{5}x - y = 1$. Спустя час у пешехода было пройдено $\frac{17}{5}x$ км, у велосипедиста — $2y$ км. Таким образом, пешеходу до пункта B оставалось $(27 - \frac{17}{5}x)$ км, велосипедисту — $(27 - 2y)$ км. Из условия следует, что $\frac{17}{5}x < 27$ и $2y < 27$, а также $2(27 - 2y) = (27 - \frac{17}{5}x)$. Составим и решим

систему:
$$\begin{cases} \frac{12}{5}x - y = 1, \\ 54 - 4y = 27 - \frac{17}{5}x. \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = \frac{12}{5}x - 1$, тогда $54 - \frac{48}{5}x + 4 = 27 - \frac{17}{5}x$;

$\frac{31}{5}x = 31$; $x = 5$, $y = \frac{12}{5} \cdot 5 - 1 = 11$. При $x = 5$ и $y = 11$ выполняется

$\frac{17}{5}x < 27$ и $2y < 27$. То есть скорость велосипедиста 11 км/ч.

Ответ: 11 км/ч.

23. Построим график функции y .

1. $y = 2x^2$, если $|x| \leq 1$. Графиком $y = 2x^2$ является часть параболы, определённая на множестве $[-1; 1]$ и принимающая значения на множестве $[0; 2]$. Ветви направлены вверх, вершина в точке $(0; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 118).

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	2	0,5	0	0,5	2

2. $y = \frac{2}{x}$, $|x| > 1$. Графиком $y = \frac{2}{x}$ является часть гиперболы, определённая на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, находится в 1-ой и 3-ей четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 118).

x	-4	-2	2	4
y	-0,5	-1	1	0,5

3. Прямая $y = 3t$ имеет с графиком единственную общую точку при $-2 < 3t \leq 0$, откуда $t \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right]$.

24. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ (см. рис. 119) с диагональю $AC = 10$ и $\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ$ (это накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей AC , поэтому если один из них равен 60° , то второй также имеет величину 60°). Проведём высоту CM . В прямоугольном треугольнике CAM $\angle ACM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, а потому $AM = \frac{1}{2}AC = 5$.

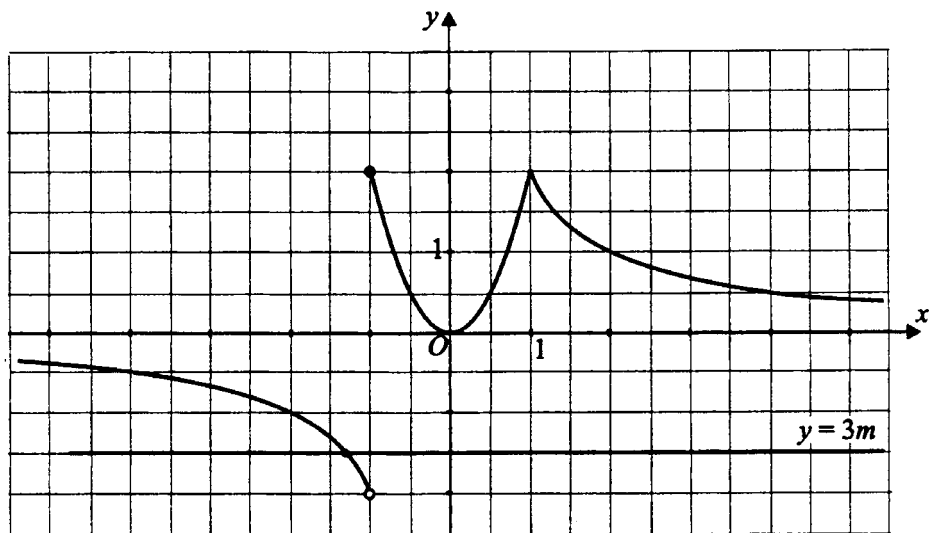


Рис. 118

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 5\sqrt{3}$. Проведём высоту BK . $BKMC$ — прямоугольник, поэтому $KM = BC$. $\triangle AKB = \triangle DMC$, а значит $AK = DM$.

Тогда $\frac{BC + AD}{2} = \frac{KM + (KM + 2AK)}{2} = KM + AK = AM = 5$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CM = 25\sqrt{3}.$$

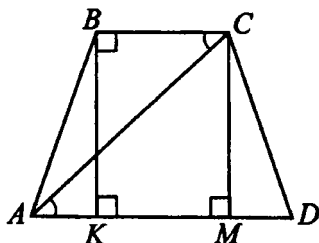


Рис. 119

Ответ: $25\sqrt{3}$.

25. Заметим, что \overrightarrow{AB} имеет координаты $(4; 4)$, равно как и \overrightarrow{DC} . Значит $|AB| = |CD|$ и, либо $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, либо все точки лежат на одной прямой. Найдём вектор \overrightarrow{AC} , его координаты $(6; 2)$, он не коллинеарен вектору \overrightarrow{AB} и значит точки A, B и C не лежат на одной прямой. Но тогда точки A, B, C ,

D — вершины параллелограмма, так как две противоположные стороны (AB и CD) равны и параллельны.

26. $OABC$ — ромб (см. рис. 120), значит $\angle AOC = \angle ABC$ (противоположные углы). Пусть $\angle AOC = \alpha$. Тогда градусная мера дуги AC (не содержащей B) равна $360^\circ - \alpha$. $\angle ABC$ — вписанный угол, $\angle ABC = \frac{1}{2}(360^\circ - \alpha) = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Но тогда $\alpha = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 120^\circ$. $\angle OAB = \angle OCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

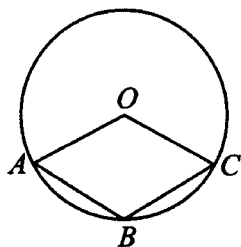


Рис. 120

Ответ: 60° и 120° .

Решение варианта № 30

21. Приведём к общему знаменателю и получим неравенство $7x^2 - 10x - 600 \geq 0$. Разложив левую часть на множители, получим $(x + \frac{60}{7})(x - 10) \geq 0$, откуда $x \in (-\infty; -\frac{60}{7}] \cup [10; +\infty)$ (см. рис. 121).

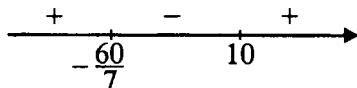


Рис. 121

Ответ: $(-\infty; -\frac{60}{7}] \cup [10; +\infty)$.

22. Пусть изначально поезд шёл с запланированной скоростью x км/ч, $x > 0$. Если бы не случилось остановки, то он потратил бы $\frac{1680}{x}$ часов.

В действительности, он был в пути $\left(\frac{840}{x} + \frac{840}{x+4} + 1\right)$ часов. Из условия следует, что $\frac{1680}{x} = \frac{840}{x} + \frac{840}{x+4} + 1$. Решим это уравнение.

$$\frac{840}{x} - \frac{840}{x+4} = 1, \quad \frac{840(x+4) - 840x}{x(x+4)} = \frac{x(x+4)}{x(x+4)}; \quad x^2 + 4x - 3360 = 0;$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3364}. \text{ Учитывая, что } x > 0, \text{ получим } x = 56. \text{ Тогда время в}$$

пути равно $\frac{1680}{56} = 30$ (часов).

Ответ: 30.

23. Построим график функции y .

1. $y = -2x^2$, если $|x| \leq 1$. Графиком $y = -2x^2$ является часть параболы, определённая на множестве $[-1; 1]$ и принимающая значения на множестве $[-2; 0]$. Ветви направлены вниз, вершина в точке $(0; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 122).

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	-2	-0,5	0	-0,5	-2

2. $y = \frac{2}{x}$, $|x| > 1$. Графиком $y = \frac{2}{x}$ является часть гиперболы, определённая на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, находится в 1-ой и 3-ей четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 122).

x	-4	-2	2	4
y	-0,5	-1	1	0,5

3. Прямая $y = 4t$ имеет с графиком единственную общую точку при $0 \leq 4t < 2$, откуда $t \in [0; 0,5)$.

Ответ: $[0; 0,5)$.

24. Площадь равностороннего треугольника со стороной 11 равна $\frac{11^2\sqrt{3}}{4} = \frac{121\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции с высотой h и средней линией $\frac{\sqrt{3}}{3}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{3}h$. Тогда $\frac{121\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$ и $h = \frac{363}{4} = 90,75$.

Ответ: 90,75.

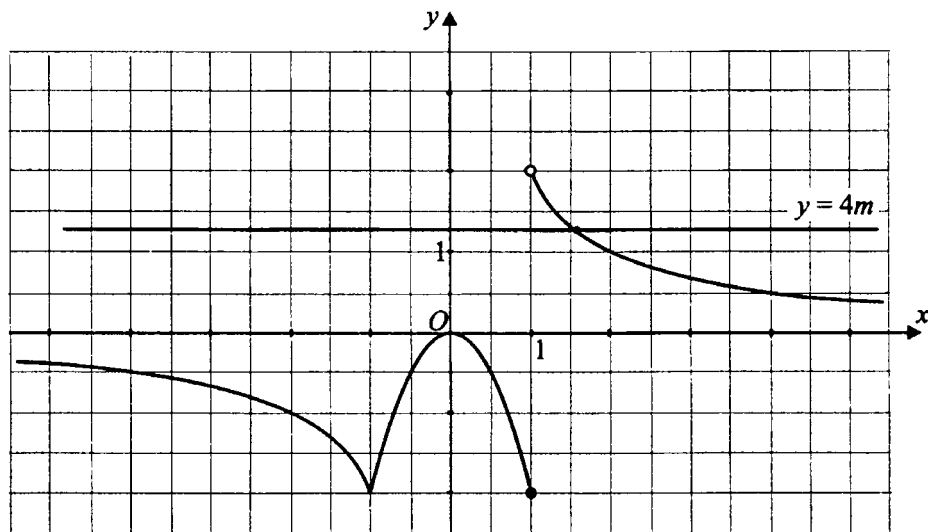


Рис. 122

25. Заметим, что \overrightarrow{AB} имеет координаты $\{6; 2\}$; \overrightarrow{BC} имеет координаты $\{-3; -1\}$, то есть $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BC}$. Следовательно, вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} коллинеарные, то есть точки A , B и C лежат на одной прямой.

26. Биссектриса CK треугольника ACD является медианой этого треугольника (см. рис. 123). По свойству биссектрисы $\frac{AK}{AC} = \frac{KD}{CD}$, откуда $AC = CD$. Но $CD = AD$, так как $ABCD$ — ромб. Таким образом $\triangle ACD$ — равносторонний и $\angle ADC = 60^\circ$. $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$, $\angle BAD = \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

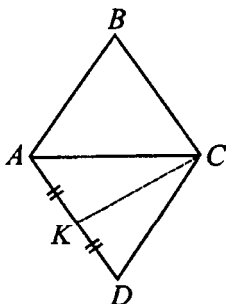


Рис. 123

Ответ: 60° и 120° .

Глава II. Решения задач из сборника

1. По условию задачи рост Томи больше среднего на 8%, значит, на $150 \cdot 0,08 = 12$ (см). Так как средний рост девочек возраста Томи равен 150 см, то рост Томи равен $150 + 12 = 162$ (см).

Ответ: 162.

2. На второй день цена розы снизилась на 15% от цены первого дня, то есть на $80 \cdot 0,15 = 12$ (руб.), и составила $80 - 12 = 68$ (руб.). Тогда на третий день цена снизилась на 15% от цены второго дня, то есть на $68 \cdot 0,15 = 10,2$ (руб.), и составила $68 - 10,2 = 57,8$ (руб.).

Ответ: 57,8.

3. По условию задачи 1,44 м составляет 75%. Пусть x м — высота прыжка взрослого кенгуру. Тогда x составляет 100%. Следовательно,

$$x = \frac{1,44 \cdot 100}{75} = 1,92 \text{ (м)} = 192 \text{ (см)}.$$

Ответ: 192.

4. По условию в первом магазине число порций мороженого уменьшилось на 50%; это означает, что порций мороженого стало меньше в 2 раза. Таким образом, во втором магазине осталось больше порций мороженого.

Ответ: во втором.

5. Пусть x шт. — первоначальное количество книг в каждой из библиотек. Тогда в первой библиотеке количество книг увеличилось на $x \cdot 0,8$ (шт.) и стало равно $x + 0,8x = 1,8x$. Значит, количество книг в первой библиотеке увеличилось в 1,8 раза. Так как во второй библиотеке количество книг увеличилось в 1,7 раза, то в первой библиотеке книг стало больше.

Ответ: в первой библиотеке.

6. Увеличение количества хомячков во втором аквариуме в 1,6 раза означает, что количество хомячков в нём составило $1,6 \cdot 100\% = 160\%$, то есть увеличилось на 60% от первоначального количества. Так как в первом аквариуме количество хомячков увеличилось на столько же процентов, то хомячков осталось поровну.

Ответ: хомячков осталось поровну.

7. Так как через неделю на обоих складах комплектов мебели стало поровну и количество готовой продукции на первом складе не изменилось, то количество комплектов мебели на втором складе увеличилось в 2 раза, то есть составило $2 \cdot 100\% = 200\%$. Следовательно, количество продукции на этом складе увеличилось на 100%.

Ответ: 100.

8. Пусть в маленьком аквариуме было x рыб, тогда в большом аквариуме было $2x$ рыб. Через два года в большом аквариуме количество рыб уменьшилось на 25%, то есть составило $2x - 2x \cdot 0,25 = 1,5x$, а в маленьком — составило $1,5x$. Следовательно, рыб стало поровну.

Ответ: рыб стало поровну.

9. Пусть во втором спичечном коробке было x спичек. Тогда в первом коробке было $3x$ спичек. Через день в первом коробке число спичек стало $\frac{3x}{4} = 0,75x$, во втором $x - 0,3x = 0,7x$. Следовательно, в первом коробке спичек осталось больше.

Ответ: в первом коробке.

10. Пусть на складе B было x продукции. Тогда на складе A было $x + x \cdot 0,5 = 1,5x$ продукции. Через месяц количество продукции на складе A уменьшилось в 1,25 раза, то есть составило $\frac{1,5x}{1,25} = 1,2x$. На складе B через месяц количество продукции увеличилось на 25%, то есть составило $x + x \cdot 0,25 = 1,25x$. Значит, на складе B продукции стало больше.

Ответ: B .

11. Пусть в 9-х классах обучается x человек. По условию число неуспевающих в 8 раз меньше числа успевающих, значит, отношение числа неуспевающих учащихся к числу успевающих равно $1 : 8$. Следовательно, $\frac{x}{9}$ — неуспевающих учащихся, $\frac{8x}{9}$ — успевающих.

Так как отличники составляют 15% от числа всех учащихся 9-х классов, то их количество $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ человек.

Приведём дроби $\frac{x}{9}$, $\frac{8x}{9}$, $\frac{3x}{20}$ к общему знаменателю: $\frac{20x}{180}$, $\frac{160x}{180}$, $\frac{27x}{180}$. Следовательно, наименьшее число учащихся 9-х классов, удовлетворяющих условию задачи, равно 180.

Ответ: 180.

12. Пусть в школе x девочек и x мальчиков. Тогда блондинок — $0,15 \cdot x$, а блондинов — $\frac{1}{7} \cdot x$ (мальчиков с иным цветом волос $\frac{6}{7} \cdot x$).

$$0,15x = \frac{15}{100}x = \frac{3}{20}x = \frac{21}{140}x; \frac{1}{7}x = \frac{20}{140}x.$$

Так как $\frac{21}{140} > \frac{20}{140}$, то $0,15x > \frac{1}{7}x$. Следовательно, в школе блондинок больше.

Ответ: блондинок.

13. Переведём десятичную дробь 0,25 в проценты: $0,25 \cdot 100\% = 25\%$. Следовательно, спортсмен улучшил свой результат на 25%.

Ответ: 25.

14. Температура воздуха понизилась на 30%, то есть на $20^\circ \cdot 0,30 = 6^\circ$. Следовательно, температура составила $20^\circ - 6^\circ = 14^\circ$.

Ответ: 14.

15. Пусть нужно взять x кг воды. Тогда получим $(x + 0,2)$ кг раствора, что составляет 100%. По условию 0,2 кг соли в этом растворе должно составлять 5%. Следовательно, $\frac{x + 0,2}{0,2} = \frac{100}{5}$; $x + 0,2 = \frac{0,2 \cdot 100}{5}$; $x = 4 - 0,2 = 3,8$.

Ответ: 3,8.

16. Расстояние S км за 10,5 ч мотоциклист преодолевает со скоростью $\frac{S}{10,5}$ км/ч, а это же расстояние за 8 ч 24 мин $= 8\frac{24}{60}$ ч $= 8,4$ ч он преодолевает со скоростью $\frac{S}{8,4}$ км/ч.

Пусть скорость мотоциклиста повысилась на $x\%$ от первоначальной, то есть на $\frac{S}{10,5} + \frac{S}{10,5} \cdot \frac{x}{100} = \frac{S}{8,4}$; $\left(\frac{x}{100} + 1\right) \cdot \frac{1}{10,5} = \frac{1}{8,4}$; $\frac{x}{100} = 0,25$; $x = 25\%$.

Ответ: 25.

17. Всего в походе участвовало $20 + 60 = 80$ детей, что составляет 100%. Следовательно, 60 мальчиков от общего числа ребят составляет $\frac{60 \cdot 100\%}{80} = 75\%$.

Ответ: 75.

18. Увеличение зарплаты на 20% от 4000 рублей составляет $4000 \cdot 0,2 = 800$ (руб.). Следовательно, рабочий стал получать $4000 + 800 = 4800$ (руб.).

Ответ: 4800.

19. Увеличение цены товара на 15% от 600 рублей составляет $600 \cdot 0,15 = 90$ (руб.). Следовательно, товар будет стоить $600 + 90 = 690$ (руб.).

Ответ: 690.

20. По расчётам первой группы физиков масса барионной материи составляет $\frac{1}{25}$ массы Вселенной, что составляет $\frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%$ от массы Вселенной. Следовательно, вторая группа физиков отводит массе барионной материи бо́льшую долю — 4,5%.

Ответ: вторая.

21. Пусть в прошлом году в каждом филиале было по x клиентов. Тогда в этом году в первом филиале стало $x + x \frac{150\%}{100\%} = 2,5x$ клиентов, что совпадает с числом клиентов во втором филиале, которое возросло в этом году в 2,5 раза.

Ответ: количество клиентов в обоих филиалах осталось одинаковым.

$$\begin{aligned} 22. & \frac{25x^2 - 9}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{x + 4}{5x + 3} + \frac{2x}{3 - x} = \\ & = \frac{(5x - 3)(5x + 3)(x + 4)}{(x - 3)(x + 4)(5x + 3)} + \frac{2x}{3 - x} = \frac{5x - 3}{x - 3} - \frac{2x}{x - 3} = \\ & = \frac{5x - 3 - 2x}{x - 3} = \frac{3(x - 1)}{x - 3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3(x - 1)}{x - 3}$.

$$\begin{aligned} 23. & \frac{9x^2 - 49}{2x^2 + 15x - 8} \cdot \frac{x + 8}{3x + 7} - \frac{1}{1 - 2x} = \\ & = \frac{(3x - 7)(3x + 7)}{2x^2 + 16x - x - 8} \cdot \frac{x + 8}{3x + 7} + \frac{1}{2x - 1} = \\ & = \frac{(3x - 7)(x + 8)}{(x + 8)(2x - 1)} + \frac{1}{2x - 1} = \frac{3x - 7}{2x - 1} + \frac{1}{2x - 1} = \frac{3x - 6}{2x - 1}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3(x - 2)}{2x - 1}$.

$$\begin{aligned}
 24. & \left(\frac{(x+3y)^2 + 3y(x-3y)}{xy(x-3y)(x+3y)} \right) \cdot \frac{y(9y^2 - x^2)}{(9y+x)^2} = \\
 & = \frac{x^2 + 6xy + 9y^2 + 3xy - 9y^2}{xy(x^2 - 9y^2)} \cdot \frac{y(9y^2 - x^2)}{(9y+x)^2} = \\
 & = -\frac{x^2 + 9xy}{xy} \cdot \frac{y}{(9y+x)^2} = -\frac{1}{x+9y}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{x+9y}$.

$$\begin{aligned}
 25. & \left(\frac{2x+y}{2x^2y - xy^2} - \frac{2}{y^2 + 2xy} \right) : \frac{(6x+y)^2}{4x^3 - y^2x} = \\
 & = \left(\frac{2x+y}{xy(2x-y)} - \frac{2}{y(2x+y)} \right) \cdot \frac{x(2x-y)(2x+y)}{(6x+y)^2} = \\
 & = \frac{(2x+y)x(2x-y)(2x+y)}{xy(2x-y)(6x+y)^2} - \frac{2x(2x-y)(2x+y)}{y(2x+y)(6x+y)^2} = \\
 & = \frac{4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 2xy}{y(6x+y)^2} = \frac{6xy + y^2}{y(6x+y)^2} = \frac{y(6x+y)}{y(6x+y)^2} = \frac{1}{6x+y}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{6x+y}$.

$$\begin{aligned}
 26. & \left(\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 + ab - 6b^2} - \frac{a^2 - 9b^2}{a^2 + 6ab + 9b^2} \right) \cdot \frac{a+3b}{b} = \\
 & = \left(\frac{(a-2b)(a+2b)}{(a-2b)(a+3b)} - \frac{(a-3b)(a+3b)}{(a+3b)^2} \right) \cdot \frac{a+3b}{b} = \\
 & = \left(\frac{a+2b}{a+3b} - \frac{a-3b}{a+3b} \right) \cdot \frac{a+3b}{b} = \frac{a+2b-a+3b}{a+3b} \cdot \frac{a+3b}{b} = \frac{5b}{b} = 5.
 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$\begin{aligned}
 27. & \left(\frac{6a+1}{a^2-6a} + \frac{6a-1}{a^2+6a} \right) \cdot \frac{a^4 - 35a^2 - 36}{a^4 + 2a^2 + 1} = \\
 & = \frac{6a^2 + a + 36a + 6 + 6a^2 - 36a - a + 6}{a(a-6)(a+6)} \cdot \frac{a^4 - 36a^2 + a^2 - 36}{(a^2+1)^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{12a^2 + 12}{a(a-6)(a+6)} \cdot \frac{(a^2 - 36)a^2 + (a^2 - 36)}{(a^2 + 1)^2} = \\
 &= \frac{12(a^2 + 1)(a^2 - 36)(a^2 + 1)}{a(a^2 - 36)(a^2 + 1)^2} = \frac{12}{a}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{12}{a}$.

$$\begin{aligned}
 28. \left(\frac{x+7a}{7ax-x^2} + \frac{x-7a}{7ax+x^2} \right) : \frac{28a}{x^2-49a^2} &= \\
 &= \left(\frac{x+7a}{x(7a-x)} + \frac{x-7a}{x(7a+x)} \right) \cdot \frac{(x-7a)(x+7a)}{28a} = \\
 &= \frac{(x+7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a-x) \cdot 28a} + \frac{(x-7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a+x) \cdot 28a} = \\
 &= \frac{-x^2 - 14ax - 49a^2 + x^2 - 14ax + 49a^2}{28ax} = \frac{-28ax}{28ax} = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

$$\begin{aligned}
 29. \left(\frac{x-4a}{4ax-x^2} + \frac{4a+x}{4xa+x^2} \right) : \frac{16a}{x^2-16a^2} &= \\
 &= \left(\frac{x-4a}{x(4a-x)} + \frac{4a+x}{x(4a+x)} \right) : \frac{16a}{(x-4a)(x+4a)} = \\
 &= \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) \frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0 \cdot \frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0 .

$$\begin{aligned}
 30. \left(\frac{x^2-2ax+4a^2}{x-2a} + \frac{x^2+2ax+4a^2}{2a+x} \right) \cdot \frac{4a^2-x^2}{2x^3} &= \\
 &= \frac{x^3+8a^3+x^3-8a^3}{(x-2a)(x+2a)} \cdot \frac{(2a-x)(2a+x)}{2x^3} = -\frac{2x^3(2a-x)(2a+x)}{(2a-x)(2a+x) \cdot 2x^3} = \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

$$\begin{aligned}
 31. \left(\frac{x+4a}{x-a} - \frac{3-ax}{x+a} - \frac{5a-3-a^2}{x^2-a^2} : \frac{1}{x} \right) (x^2-a^2) &= \\
 &= \left(\frac{x+4a}{x-a} - \frac{3-ax}{x+a} - \frac{(5a-3-a^2)x}{(x-a)(x+a)} \right) (x^2-a^2) = \\
 &= (x+4a)(x+a) - (3-ax)(x-a) - x(5a-3-a^2) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 4ax + ax + 4a^2 - 3x + 3a + ax^2 - a^2x - 5ax + 3x + a^2x = \\
 &= x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a.
 \end{aligned}$$

Ответ: $x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a$.

$$\begin{aligned}
 32. \quad &\frac{b^2}{a-b} : \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{ab + b^2} - \frac{a^2 - ab + b^2}{ab - b^2} \right) = \\
 &= \frac{b^2}{a-b} : \frac{a^3 - b^3 - a^3 - b^3}{b(a-b)(a+b)} = \frac{b^2 \cdot b(a-b)(a+b)}{(a-b)(-2b^3)} = -\frac{a+b}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned}
 33. \quad &\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) \cdot \frac{ab^3 - a^4}{b^5 - 4a^4b} = \\
 &= \frac{(a+b)(a^2 + ab + b^2) - (a-b)(a^2 - ab + b^2)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{a(b^3 - a^3)}{b(b^4 - 4a^4)} = \\
 &= \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + b^3 - (a^3 - a^2b + ab^2 - a^2b + ab^2 - b^3)}{a^3 - b^3} \times \\
 &\times \frac{a(a^3 - b^3)}{b(4a^4 - b^4)} = \frac{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 - a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + b^3}{1} \times \\
 &\times \frac{a}{b(4a^4 - b^4)} = \frac{2b^3 + 4a^2b}{1} \cdot \frac{a}{b(4a^4 - b^4)} = \frac{2b(b^2 + 2a^2) \cdot a}{b(2a^2 - b^2)(2a^2 + b^2)} = \\
 &= \frac{2a}{2a^2 - b^2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2a}{2a^2 - b^2}$.

$$\begin{aligned}
 34. \quad &\left(\frac{2a - 4b}{b^2 + 4ab} - \frac{3a + b}{b^2 - 4ab} \right) (b^2 - 4ab) + \frac{21a^2 + 6b^2 - 9ab}{4a + b} = \\
 &= \frac{(2ab - 4b^2 - 8a^2 + 16ab - 3ab - b^2 - 12a^2 - 4ab)b(b - 4a)}{b(b + 4a)(b - 4a)} + \\
 &+ \frac{21a^2 + 6b^2 - 9ab}{4a + b} = \frac{11ab - 5b^2 - 20a^2 + 21a^2 + 6b^2 - 9ab}{4a + b} = \\
 &= \frac{2ab + b^2 + a^2}{4a + b} = \frac{(a+b)^2}{4a+b}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{4a+b}$.

$$\begin{aligned}
 35. & \left(\frac{a+b}{a^2-b} - \frac{a-b}{a^2+b} \right) : \frac{a+1}{a^2-b} = \\
 & = \frac{(a^3+ab+a^2b+b^2-a^3+ab+a^2b-b^2)(a^2-b)}{(a^2-b)(a^2+b)(a+1)} = \\
 & = \frac{2ab+2a^2b}{(a^2+b)(a+1)} = \frac{2ab(a+1)}{(a^2+b)(a+1)} = \frac{2ab}{a^2+b}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2ab}{a^2+b}$.

$$\begin{aligned}
 36. & \frac{16}{a+5} - \frac{3-2a}{72a^2+24a+8} \cdot \frac{-8+216a^3}{2a^2+7a-15} = \\
 & = \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8(9a^2+3a+1)} \cdot \frac{-8(1-27a^3)}{2a^2-3a+10a-15} = \\
 & = \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8(9a^2+3a+1)} \cdot \frac{-8(1-3a)(1+3a+9a^2)}{a(2a-3)+5(2a-3)} = \\
 & = \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8(9a^2+3a+1)} \cdot \frac{-8(1-3a)(9a^2+3a+1)}{(2a-3)(a+5)} = \\
 & = \frac{16}{a+5} + \frac{-(1-3a)}{a+5} = \frac{16-1+3a}{a+5} = \frac{3(a+5)}{a+5} = 3.
 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

$$37. \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a-1;$$

$$\frac{1}{a-1} - \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{1}{a-1} - (a-1) = \frac{1-(a-1)^2}{a-1} = \frac{-a^2+2a}{a-1} = \frac{a^2-2a}{1-a}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Итак, } & \left(\frac{1}{a-1} - \frac{a^2-1}{a+1} \right)^{-1} + \frac{a^2-a-1}{a^2-2a} = \frac{1-a}{a^2-2a} + \frac{a^2-a-1}{a^2-2a} = \\
 & = \frac{a^2-2a}{a^2-2a} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned}
 38. & \left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a-1} \right)^{-1} + \frac{2}{a^2+1} = \left(\frac{a^2-a+a+1}{a^2-1} \right)^{-1} + \frac{2}{a^2+1} = \\
 & = \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{a^2+1} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned}
 39. \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \\
 &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b + a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b = 2(a + b)
 \end{aligned}$$

Ответ: $2(a + b)$.

$$\begin{aligned}
 40. \frac{(a + b)^3}{a^2 - ab + b^2} &= \frac{a^3 + 3ab(a + b) + b^3}{a^2 - ab + b^2}, \\
 \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{a + b} &= \frac{b(a + b) + a(a + b) - 3ab}{ab(a + b)} = \frac{a^2 - ab + b^2}{ab(a + b)}, \\
 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{a + b}\right)^{-1} &= \frac{3ab(a + b)}{a^2 - ab + b^2}, \\
 \frac{(a + b)^3}{a^2 - ab + b^2} - 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{a + b}\right)^{-1} &= \\
 &= \frac{a^3 + 3ab(a + b) + b^3}{a^2 - ab + b^2} - \frac{3ab(a + b)}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \\
 &= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} = a + b.
 \end{aligned}$$

Ответ: $a + b$.

$$\begin{aligned}
 41. \left(a + \frac{b - a}{1 + ab}\right) : \left(1 - \frac{a(b - a)}{1 + ab}\right) &= \frac{(a + a^2b + b - a)(1 + ab)}{(1 + ab)(1 + ab - ab + a^2)} = \\
 &= \frac{b(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = b.
 \end{aligned}$$

Ответ: b .

$$\begin{aligned}
 42. \left(a - \frac{4a - 9}{a - 2}\right) : \left(2a - \frac{2a}{a - 2}\right) &= \frac{a^2 - 2a - 4a + 9}{a - 2} : \frac{2a^2 - 4a - 2a}{a - 2} = \\
 &= \frac{(a^2 - 6a + 9)(a - 2)}{(a - 2)(2a^2 - 6a)} = \frac{(a - 3)^2}{2a(a - 3)} = \frac{a - 3}{2a}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a - 3}{2a}$.

$$\begin{aligned}
 43. & \left(x + 1 - \frac{12x - 13}{x + 3}\right) : \left(x - 3 - \frac{7}{x + 3}\right) = \\
 & = \frac{x^2 + 4x + 3 - 12x + 13}{x + 3} : \frac{x^2 - 9 - 7}{x + 3} = \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \\
 & = \frac{(x - 4)^2}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{x - 4}{x + 4}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x - 4}{x + 4}$.

$$\begin{aligned}
 44. & \frac{x}{\frac{2}{x+1} - 1} - \frac{2 + \frac{4x}{1-x}}{x+1} + 3 = \frac{x(x+1)}{1-x} - \frac{2+2x}{(1-x)(1+x)} + 3 = \\
 & = \frac{x(x+1)^2 - 2 - 2x + 3(1-x^2)}{1-x^2} = \\
 & = \frac{x(x^2 + 2x + 1) - 2 - 2x + 3 - 3x^2}{1-x^2} = \\
 & = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2x - 3x^2 + 1}{1-x^2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1-x^2} = \\
 & = -\frac{x^2(x-1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = \\
 & = -\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 1 - x.
 \end{aligned}$$

Ответ: $1 - x$.

$$\begin{aligned}
 45. & \frac{18 \cdot 12^{3n-1}}{9^{2n+1} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{3^2 \cdot 2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{3n-1}}{3^{2 \cdot (2n+1)} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{3^{2+3n-1} \cdot 2^{1+6n-2}}{3^{4n+2} \cdot 2^{4n-3}} = \\
 & = \frac{3^{3n+1} \cdot 2^{6n-1}}{3^{4n+2} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{2^{2n+2}}{3^{n+1}} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 46. & \left(\frac{3}{4a-b} - \frac{2}{4a+b} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2-b^2} = \\
 & = \left(\frac{12a+3b-8a+2b}{(4a-b)(4a+b)} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2-b^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4a+5b}{16a^2-b^2} - \frac{1}{4a-5b} \right) : \frac{b^2}{16a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(16a^2-25b^2-16a^2+b^2)(16a^2-b^2)}{(16a^2-b^2)(4a-5b) \cdot b^2} = \frac{-24}{4a-5b} = \frac{24}{5b-4a}.$$

Ответ: $\frac{24}{5b-4a}$.

$$47. \left(\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2+5x+6} \right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+2)} \right) : \frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+3-x-1)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3) \cdot 2} = \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\frac{1}{x+2}$.

$$48. \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \frac{13}{4-\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{3+3\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} + \frac{13(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{3+3\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2+4+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{3+3\sqrt{3}} = (3+3\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{3+3\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

49. Обозначим заданное выражение через A . Представим выражение под корнем в виде полных квадратов и получим

$$A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

При извлечении корня учитываем, что арифметический квадратный корень — величина неотрицательная:

$$A = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

$$50. \left(\frac{2m}{m-7} + \frac{4m}{m^2-14m+49} \right) \cdot \frac{m^2-9m+14}{m-5} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \left(\frac{2m}{m-7} + \frac{4m}{(m-7)^2} \right) \cdot \frac{(m-7)(m-2)}{m-5} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \frac{(2m(m-7)+4m)(m-7)(m-2)}{(m-7)^2(m-5)} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2m^2 - 14m + 4m)(m - 2)}{(m - 7)(m - 5)} + \frac{10m}{7 - m} = \frac{2m(m - 5)(m - 2)}{(m - 7)(m - 5)} - \frac{10m}{m - 7} = \\
 &= \frac{2m^2 - 4m - 10m}{m - 7} = \frac{2m(m - 7)}{m - 7} = 2m.
 \end{aligned}$$

Ответ: $2m$.

$$\begin{aligned}
 51. &\left(\frac{m}{m - 5} + \frac{3m}{2m^2 - 11m + 5} \right) \cdot \frac{m^2 + m - 30}{m + 1} - \frac{4m}{2m - 1} = \\
 &= \left(\frac{m}{m - 5} + \frac{3m}{(m - 5)(2m - 1)} \right) \cdot \frac{(m + 6)(m - 5)}{m + 1} - \frac{4m}{2m - 1} = \\
 &= \frac{(2m^2 - m + 3m)(m + 6)(m - 5)}{(m - 5)(2m - 1)(m + 1)} - \frac{4m}{2m - 1} = \\
 &= \frac{2m(m + 1)(m + 6)}{(2m - 1)(m + 1)} - \frac{4m}{2m - 1} = \frac{2m(m + 6) - 4m}{2m - 1} = \\
 &= \frac{2m^2 + 8m}{2m - 1} = \frac{2m(m + 4)}{2m - 1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2m(m + 4)}{2m - 1}$.

$$52. A = \sqrt{(2 - \sqrt[3]{20})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt[3]{20})^2} = |2 - \sqrt[3]{20}| + |3 - \sqrt[3]{20}|.$$

Так как $2 < \sqrt[3]{20} < 3$, то $A = \sqrt[3]{20} - 2 + 3 - \sqrt[3]{20} = 1$.

Ответ: 1.

$$53. A = \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 3)^2} = |\sqrt[5]{240} - 2| + |\sqrt[5]{240} - 3|.$$

Так как $2 < \sqrt[5]{240} < 3$, то получим $A = \sqrt[5]{240} - 2 + 3 - \sqrt[5]{240} = 1$.

Ответ: 1.

$$\begin{aligned}
 54. &\left(\left(\frac{b^2 - 2b + 2}{b^4 + 4} \right)^{-1} - 1 \right) \cdot (b + 1)^{-1} = \left(\frac{b^4 + 4}{b^2 - 2b + 2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{b + 1} = \\
 &= \frac{b^4 + 4 - b^2 + 2b - 2}{(b^2 - 2b + 2)(b + 1)} = \frac{b^4 - b^2 + 2b + 2}{(b^2 - 2b + 2)(b + 1)} = \\
 &= \frac{b^2(b^2 - 1) + 2(b + 1)}{(b^2 - 2b + 2)(b + 1)} = \frac{b^2(b - 1) + 2}{b^2 - 2b + 2} = \frac{b^3 - b^2 + 2}{b^2 - 2b + 2} = \\
 &= \frac{(b + 1)(b^2 - 2b + 2)}{b^2 - 2b + 2} = b + 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $b + 1$.

$$\begin{aligned}
 55. & x^{-8} \cdot \left(\frac{1}{x-1} + (x+1)(x^2+1)(x^4+1) \right) = \\
 & = x^{-8} \cdot \left(\frac{1 + (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x-1} \right) = x^{-8} \cdot \frac{1 + (x^4-1)(x^4+1)}{x-1} = \\
 & = x^{-8} \cdot \frac{1 + x^8 - 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{x-1}$.

$$56. \frac{4 \cdot 36^n}{2^{2n+2} \cdot 3^{2n-3}} = \frac{4 \cdot 6^{2n}}{2^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 3^{-3}} = \frac{6^{2n} \cdot 3^3}{6^{2n}} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

$$57. \frac{8 \cdot 100^n}{5^{2n-2} \cdot 2^{2n+1}} = \frac{8 \cdot 10^{2n}}{5^{2n} \cdot 5^{-2} \cdot 2^{2n} \cdot 2} = \frac{4 \cdot 10^{2n} \cdot 5^2}{10^{2n}} = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Ответ: 100.

$$\begin{aligned}
 58. & \frac{(5^{1-5n})^2 \cdot (4^{2n+1})^3 \cdot (2,5)^{11n}}{160} = \frac{5^2 \cdot 4^{6n} \cdot 4^3 \cdot 5^{11n}}{5^{10n} \cdot 160 \cdot 2^{11n}} = \\
 & = \frac{5^2 \cdot 2^{12n} \cdot 4^2 \cdot 2^2 \cdot 5^n}{4^2 \cdot 10 \cdot 2^{11n}} = 10 \cdot 2^n \cdot 5^n = 10 \cdot 10^n = 10^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 10^{n+1} .

$$\begin{aligned}
 59. & 81 \cdot \frac{(3 \cdot 3^n)^{3n}}{(9^n)^2} : 27^{n^2-n} = \frac{3^4 \cdot 3^{3n} \cdot 3^{3n^2}}{(3^{2n})^2} : 3^{3(n^2-n)} = \\
 & = \frac{3^{3n^2+3n+4}}{3^{4n}} : 3^{3n^2-3n} = 3^{3n^2+3n+4-4n-3n^2+3n} = 3^{2n+4} = 3^{2(n+2)} = \\
 & = 9^{n+2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 9^{n+2} .

$$\begin{aligned}
 62. & \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \\
 & = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + 2+\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.
 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

$$\begin{aligned}
 64. & \frac{1}{\sqrt{4+1}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{22}} = \\
 & = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{5-\sqrt{22}}{3} = \\
 & = \frac{1}{3} \cdot (1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - 2 + \sqrt{8} - \sqrt{5} + \dots +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{22} - \sqrt{19} + \sqrt{23} - \sqrt{20} + \sqrt{24} - \sqrt{21} + 5 - \sqrt{22} = \\
 & = \frac{1}{3} \cdot (-1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{23} + \sqrt{24} + 5) = \frac{1}{3} \cdot (4 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{23} + \sqrt{24}).
 \end{aligned}$$

С избытком:

$$\frac{1}{3} \cdot (4 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{23} + \sqrt{24}) \approx \frac{1}{3} \cdot (4 - 1,4 - 1,7 + 4,8 + 4,9) \approx 3,53.$$

С недостатком:

$$\frac{1}{3} \cdot (4 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{23} + \sqrt{24}) \approx \frac{1}{3} \cdot (4 - 1,5 - 1,8 + 4,7 + 4,8) = \frac{1}{3} \cdot 10,2 = 3,4.$$

Искомое число обозначим A . $3,4 < A < 3,5$, то есть оно лежит между 3 и 4.

Ответ: 3; 4.

$$\begin{aligned}
 65. & \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{15} + \sqrt{13})} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{13})} = \\
 & = \left(\frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)} \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})} + \frac{1}{\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})} \right) + \dots + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{15} + \sqrt{13})} + \frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{13})} \right) = \\
 & = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + \dots + \\
 & + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{13}}{2\sqrt{15}} = 1 + 1 + \dots + 1 = 7.
 \end{aligned}$$

Ответ: 7.

66. Данное выражение имеет смысл при $a < 0$, $b \leq 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(-a)^2} &= |a| = -a \text{ при } a < 0. \text{ Поэтому } \frac{\sqrt{ab} - a}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{(-a)^2}}{\sqrt{-a}} = \\
 &= \frac{\sqrt{-a} \cdot (\sqrt{-b} + \sqrt{-a})}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-a} + \sqrt{-b}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{-a} + \sqrt{-b}$.

67. Заметим, что при $a < 0$ имеем $\sqrt{(-a)^2} = |a| = -a$. Поэтому

$$\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{-\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}}{-\sqrt{(-b)^2} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot (-\sqrt{-a} + \sqrt{-b})}{\sqrt{-b} \cdot (-\sqrt{-b} + \sqrt{-a})} = -\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

$$68. \frac{2ab - 10a + 5 - b}{2a^2 - 7a + 3} = \frac{2a(b-5) - (b-5)}{2(a-3)\left(a - \frac{1}{2}\right)} = \frac{(b-5)(2a-1)}{(a-3)(2a-1)} = \frac{b-5}{a-3}.$$

Ответ: $\frac{b-5}{a-3}$.

$$69. \frac{6 - 9n + 6mn - 4m}{3n^2 + n - 2} = \frac{3(2 - 3n) + 2m(3n - 2)}{3\left(n - \frac{2}{3}\right)(n+1)} =$$

$$= \frac{(3n-2)(2m-3)}{(3n-2)(n+1)} = \frac{2m-3}{n+1}.$$

Ответ: $\frac{2m-3}{n+1}$.

$$70. \frac{3ab + 21a + 2b + 14}{9a^2 + 9a + 2} = \frac{3a(b+7) + 2(b+7)}{9a^2 + 6a + 1 + 3a + 1} =$$

$$= \frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)^2 + 3a + 1} = \frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)(3a+2)} = \frac{b+7}{3a+1}.$$

Ответ: $\frac{b+7}{3a+1}$.

$$71. \frac{4ab - 16a + b - 4}{16a^2 - 8a - 3} = \frac{4a(b-4) + b-4}{16a^2 - 8a + 1 - 4} = \frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-1)^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-3)(4a+1)} = \frac{b-4}{4a-3}.$$

Ответ: $\frac{b-4}{4a-3}$.

$$72. \left(\frac{n+1}{n^2+4n+4} - \frac{n-1}{n^2-4} \right) : \frac{2n}{(n+2)^2} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{(n+2)^2} - \frac{n-1}{(n-2)(n+2)} \right) \cdot \frac{(n+2)^2}{2n} = \left(n+1 - \frac{(n-1)(n+2)}{n-2} \right) \cdot \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-2) - (n-1)(n+2)}{n-2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{(n^2 - n - 2) - (n^2 + n - 2)}{2n(n-2)} =$$

$$= \frac{-2n}{2n(n-2)} = \frac{-1}{n-2} = \frac{1}{2-n}.$$

Ответ: $\frac{1}{2-n}$.

$$73. \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x-1} \right) : \frac{5}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{5} =$$

$$= \frac{x - (x-1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{5} = \frac{x - x + 1}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

$$74. \left(\frac{a(1-a)}{2} + \frac{a^2 - 4a + 3}{2a^2 - 6a} \right) : (a-1)^2 =$$

$$= \frac{a(1-a) \cdot a(a-3) + (a-3)(a-1)}{2a(a-3)} \cdot \frac{1}{(a-1)^2} =$$

$$= \frac{(a-1)(a-3)(1-a^2)}{2a(a-3)(a-1)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{2a(a-1)} = -\frac{1+a}{2a}.$$

Ответ: $-\frac{1+a}{2a}$.

$$75. \left(\frac{(b^2 - 3b + 2)(b-1)}{b^2} - \frac{b^2 - 4b + 3}{b} \right) : (b-1)^2 =$$

$$= \frac{(b^2 - 3b + 2)(b-1) - b(b^2 - 4b + 3)}{b^2(b-1)^2} =$$

$$= \frac{(b-1)(b-2)(b-1) - b(b-1)(b-3)}{b^2(b-1)^2} =$$

$$= \frac{(b-1)(b-2) - b(b-3)}{b^2(b-1)} = \frac{b^2 - 3b + 2 - b^2 + 3b}{b^2(b-1)} = \frac{2}{b^2(b-1)}.$$

Ответ: $\frac{2}{b^2(b-1)}$.

$$76. \left(\frac{k+2}{k^2 + 3k - 4} - \frac{k-8}{k^2 + 8k + 16} \right) : \frac{5}{(k+4)^2} =$$

$$= \left(\frac{k+2}{(k+4)(k-1)} - \frac{k-8}{(k+4)^2} \right) \cdot \frac{(k+4)^2}{5} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(k+2)(k+4) - (k-8)(k-1)}{(k+4)^2(k-1)} \cdot \frac{(k+4)^2}{5} = \\
 &= \frac{(k^2 + 6k + 8) - (k^2 - 9k + 8)}{5(k-1)} = \frac{15k}{5(k-1)} = \frac{3k}{k-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3k}{k-1}$.

$$\begin{aligned}
 77. & \left(\frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2+t-6} \right) : \frac{1}{t^2+5t+6} = \\
 &= \left(\frac{1}{(t-2)(t+2)} - \frac{1}{(t+3)(t-2)} \right) \cdot \frac{(t+3)(t+2)}{1} = \\
 &= \frac{(t+3) - (t+2)}{(t-2)(t+2)(t+3)} \cdot (t+3)(t+2) = \frac{1}{t-2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{t-2}$.

$$\begin{aligned}
 78. & \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \\
 &= \frac{(b-c) + (c-a) + (a-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{0}{(a-c)(a-b)(b-c)} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned}
 79. & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \\
 &= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\
 &= \frac{a^2b - a^2c - b^2a + b^2c + c^2a - c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\
 &= \frac{b(a-c)(a+c) - b^2(a-c) - ac(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\
 &= \frac{(a-c)[b(a+c) - b^2 - ac]}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\
 &= \frac{(a-c)[b(a-b) - c(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \\
 &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned}
 80. & \left(\frac{m-3}{m^2-4m+3} - \frac{2m}{m^2-1} \right) : \frac{1}{5m+5} = \\
 & = \left(\frac{m-3}{(m-3)(m-1)} - \frac{2m}{(m-1)(m+1)} \right) \cdot 5(m+1) = \\
 & = \frac{m+1-2m}{(m-1)(m+1)} \cdot 5(m+1) = \frac{1-m}{m-1} \cdot 5 = -5.
 \end{aligned}$$

Ответ: -5.

$$\begin{aligned}
 81. & \left(\frac{m+3}{m^2+4m+4} - \frac{2m+6}{m^2+5m+6} \right) \cdot \frac{m^2-4}{m+1} = \\
 & = \left(\frac{m+3}{(m+2)^2} - \frac{2(m+3)}{(m+2)(m+3)} \right) \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} = \\
 & = \frac{m+3-2(m+2)}{(m+2)^2} \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} = \frac{-m-1}{m+2} \cdot \frac{m-2}{m+1} = \frac{2-m}{m+2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2-m}{m+2}$.

$$\begin{aligned}
 82. & \left(\frac{x-1}{x^2-6x+8} - \frac{3}{x^2-16} \right) : \frac{2x^2+4}{x^2+2x-8} + \frac{1}{8-2x} = \\
 & = \left(\frac{x-1}{(x-4)(x-2)} - \frac{3}{(x-4)(x+4)} \right) : \frac{2x^2+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1}{8-2x} = \\
 & = \frac{(x-1)(x+4)-3(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+4)} \cdot \frac{(x+4)(x-2)}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} = \\
 & = \frac{x^2+3x-4-3x+6}{2(x-4)(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} = \frac{x^2+2}{2(x-4)(x^2+2)} - \frac{1}{2(x-4)} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned}
 83. & \left(\frac{x+6}{x^2-6x} + \frac{x-6}{x^2+6x} \right) : \frac{x^2+36}{x^2-36} - \frac{2}{x} = \\
 & = \left(\frac{x+6}{x(x-6)} + \frac{x-6}{x(x+6)} \right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+36} - \frac{2}{x} = \\
 & = \frac{(x+6)^2+(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)} \cdot \frac{(x-6)(x+6)}{x^2+36} - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2+36)}{x(x^2+36)} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$\begin{aligned}
 84. & \left(\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^2}{a + b} \right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2} \right) = \\
 & = \left(\frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^2}{a + b} \right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2} \right) = \\
 & = \frac{(a^2 - b^2) - a^2}{a + b} \cdot \left(\frac{-1}{b^2} \right) = \frac{1}{a + b}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{a + b}$.

$$\begin{aligned}
 85. & \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{b}{a + b} \right) \cdot \frac{a + b}{3b} = \left(\frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)^2} + \frac{b}{a + b} \right) \cdot \frac{a + b}{3b} = \\
 & = \frac{(a - b) + b}{a + b} \cdot \frac{a + b}{3b} = \frac{a}{3b}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a}{3b}$.

$$\begin{aligned}
 86. & \left(\frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1} \right) \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{4a^2} \right) = \\
 & = \frac{(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2}{(2a - 1)(2a + 1)} \cdot \frac{4a^2 - 4a + 1}{4a^2} = \\
 & = \frac{(4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 4a - 1)(2a - 1)^2}{(2a - 1)(2a + 1)4a^2} = \\
 & = \frac{8a(2a - 1)}{(2a + 1) \cdot 4a^2} = \frac{2(2a - 1)}{a(2a + 1)} = \frac{4a - 2}{2a^2 + a}, \text{ что и требовалось доказать.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 87. & \left(a - b + \frac{4ab}{a - b} \right) : \left(\frac{a}{a + b} - \frac{2ab}{b^2 - a^2} \right) = \\
 & = \frac{(a - b)^2 + 4ab}{a - b} : \frac{a(a - b) + 2ab}{a^2 - b^2} = \\
 & = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{a - b} : \frac{a^2 - ab + 2ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2(a - b)(a + b)}{(a - b)a(a + b)} = \\
 & = \frac{(a + b)^2}{a}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{(a + b)^2}{a}$.

$$\begin{aligned}
 88. & \frac{1}{3b-1} - \frac{27b^3-3b}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2-6b+1} - \frac{1}{9b^2-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b(9b^2-1)}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{(3b-1)^2} - \frac{1}{(3b-1)(3b+1)} \right) = \\
 &= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b(3b-1)(3b+1)}{9b^2+1} \cdot \frac{3b(3b+1)-(3b-1)}{(3b-1)^2(3b+1)} = \\
 &= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b}{9b^2+1} \cdot \frac{9b^2+3b-3b+1}{3b-1} = \frac{1}{3b-1} - \frac{3b}{3b-1} = \frac{1-3b}{3b-1} = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

$$\begin{aligned}
 89. & \frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9} \right) = \\
 &= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(4a^2-9)}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{(2a-3)^2} - \frac{3}{(2a-3)(2a+3)} \right) = \\
 &= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(2a-3)(2a+3)}{4a^2+9} \cdot \frac{2a(2a+3)-3(2a-3)}{(2a-3)^2(2a+3)} = \\
 &= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(4a^2+6a-6a+9)}{(4a^2+9)(2a-3)} = \frac{3}{2a-3} - \frac{2a}{2a-3} = \frac{3-2a}{2a-3} = -1.
 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

$$\begin{aligned}
 90. & \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{3}{x-4} - \frac{6-4x}{x^2-3x-4} \right) : \frac{2x-3}{x} = \\
 &= \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{3}{x-4} - \frac{6-4x}{(x+1)(x-4)} \right) \cdot \frac{x}{2x-3} = \\
 &= \frac{2x(x-4)+3(x+1)-(6-4x)}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{x}{2x-3} = \frac{2x^2-x-3}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{x}{2x-3} = \\
 &= \frac{(x+1)(2x-3)x}{(x+1)(x-4)(2x-3)} = \frac{x}{x-4}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x}{x-4}$.

$$\begin{aligned}
 91. & \frac{2x-5}{x} : \left(\frac{2x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{21-3x}{(x+3)(x-2)} \right) = \\
 &= \frac{(2x-5)}{x} : \frac{(2x(x-2)+2(x+3)-(21-3x))}{(x+3)(x-2)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x-5}{x} : \frac{2x^2+x-15}{(x+3)(x-2)} = \\
 &= \frac{2x-5}{x} \cdot \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-5)(x+3)} = \frac{x-2}{x}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x-2}{x}$.

$$\begin{aligned}
 92. & \left(\frac{1}{a+2} + \frac{5}{(a+2)(a-3)} + \frac{2a}{a-3} \right) \cdot \frac{a}{2a+1} = \\
 &= \frac{a-3+5+2a^2+4a}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} = \frac{2a^2+5a+2}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} = \\
 &= \frac{(2a+1)(a+2)}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{(2a+1)} = \frac{a}{a-3}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a}{a-3}$.

$$\begin{aligned}
 93. & \left(\frac{2}{b+1} + \frac{10}{(b+1)(b-4)} + \frac{3b}{b-4} \right) : \frac{3b+2}{3} = \\
 &= \frac{2b-8+10+3b^2+3b}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \frac{3b^2+5b+2}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \\
 &= \frac{(3b+2)(b+1)}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \frac{3}{b-4}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{b-4}$.

$$\begin{aligned}
 94. & \left(\frac{m^2+3m}{m^2+3m+2} - \frac{m^2-2m}{m^2-2m-3} \right) : \frac{1}{m^2-m-6} - \frac{5}{m+1} = \\
 &= \left(\frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)}{(m-3)(m+1)} \right) \cdot (m-3)(m+2) - \frac{5}{m+1} = \\
 &= \frac{m(m+3)(m-3)(m+2)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)(m-3)(m+2)}{(m-3)(m+1)} - \frac{5}{m+1} = \\
 &= \frac{m^3-9m-m^3+4m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -\frac{5m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -5.
 \end{aligned}$$

Ответ: -5 .

$$\begin{aligned}
 95. & \left(\frac{m(m+3)}{(m-1)(m+4)} - \frac{m(m-4)}{(m-1)(m-3)} \right) \cdot \frac{(m-3)(m+4)}{m} = \\
 &= \frac{m(m+3)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m+4) \cdot m} - \frac{m(m-4)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m-3) \cdot m} = \\
 &= \frac{m^2-9}{m-1} - \frac{m^2-16}{m-1} = \frac{7}{m-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7}{m-1}$.

$$97. \frac{3x^2+7x-6}{x^2-9} = \frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3x-2}{x-3}.$$

Ответ: $\frac{3x-2}{x-3}$.

$$\begin{aligned}
 98. & \frac{1}{xy} \cdot (x^3y - 2xy^3 - x^2y^2) = \frac{1}{xy} \cdot xy(x^2 - xy - 2y^2) = x^2 - xy - 2y^2 = \\
 &= x^2 - 2xy + xy - 2y^2 = x(x-2y) + y(x-2y) = (x+y)(x-2y).
 \end{aligned}$$

Ответ: $(x+y)(x-2y)$.

100. Так как $(2x^2 + 3y + x + 5)^2 \geq 0$ и $(y + 3 - 2x)^2 \geq 0$, то наименьшее значение выражения $(2x + 3y + x + 5) + (y + 3 - 2x)^2$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 2x^2 + 3y + x + 5 = 0, \\ y + 3 - 2x = 0. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y + x + 5 = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + 3(2x-3) + x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0.$$

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0,5; x_2 = -4. y_1 = -2; y_2 = -11.$$

Ответ: 0; $x_1 = 0,5$; $y_1 = -2$; $x_2 = -4$; $y_2 = -11$.

101. При любых значениях x и y $(7x - 3y + 11)^2 + (2x + 6y - 14)^2 \geq 0$. Значит, наименьшее значение выражения $(7x - 3y + 11)^2 + (2x + 6y - 14)^2 - 5$ равно -5 . Оно достигается только в том случае, когда $7x - 3y + 11$ и $2x + 6y - 14$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x - 3y + 11 = 0, \\ 2x + 6y - 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = -0,5, y = 2,5.$$

Таким образом, наименьшее значение выражения равно -5 , оно достигается при $x = -0,5$ и $y = 2,5$.

Ответ: -5 ; $x = -0,5$, $y = 2,5$.

102. Так как $(17 - 4x - 5y)^2 \geq 0$ и $(3x - y - 4,2)^2 \geq 0$, то наименьшее значение выражения $(17 - 4x - 5y)^2 + (3x - y - 4,2)^2 + 3$ будет равно 3 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 17 - 4x - 5y = 0, \\ 3x - y - 4,2 = 0. \end{cases}$ Надо найти x и y , удовлетворяющие системе $\begin{cases} 4x + 5y = 17, \\ 3x - y = 4,2. \end{cases}$

Умножим второе уравнение этой системы на 5 и прибавим к первому. Получим $19x = 38$; $x = 2$.

Из второго уравнения системы $y = 3x - 4,2 = 3 \cdot 2 - 4,2 = 1,8$.

Ответ: 3; $x = 2$; $y = 1,8$.

103. Так как каждое слагаемое суммы — неотрицательное число, то сумма равна нулю только в том случае, когда $3x - 5y - 1$ и $x + 4y - 6$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0, \\ x + 4y - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = 1.$$

Пара чисел $(2; 1)$ — единственная, удовлетворяющая равенству $\sqrt{3x - 5y - 1} + \sqrt{x + 4y - 6} = 0$.

Ответ: $(2; 1)$.

104. Запишем условие задачи в виде равенства

$$2 + \sqrt{2a - 3b - 1} = \sqrt{4 - (a - 2b)^2}.$$

Поскольку $\sqrt{2a - 3b - 1} \geq 0$ и $(a - 2b)^2 \geq 0$, то левая часть этого равенства не меньше двух, а правая — не больше 2. Равенство верно, когда обе его части равны 2, то есть при $\begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0, \\ a = 2b; \end{cases} \Leftrightarrow b = 1, a = 2$.

Ответ: $(2; 1)$.

$$106. \frac{3}{x^2 + 4x - 5} - \frac{5}{x^2 - 8x + 7} = \frac{2}{x - 1},$$

$$\frac{3}{(x - 1)(x + 5)} - \frac{5}{(x - 1)(x - 7)} = \frac{2}{x - 1}.$$

ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq -5$; $x \neq 7$.

$3x - 21 - 5x - 25 = 2x^2 - 4x - 70$; $2x^2 - 2x - 24 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $-3; 4$.

$$107. \frac{3}{x^2 + x - 6} - \frac{2}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{x}{2x^2 + 5x - 3} = 0.$$

Разложив знаменатели дробей на множители, запишем уравнение в виде

$$\frac{3}{(x+3)(x-2)} - \frac{2}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)} = 0,$$

$$\frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right) - 2(x+3) - x(x-2)}{2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 0; \quad x+3 \neq 0; \quad x-2 \neq 0; \quad x-\frac{1}{2} \neq 0.$$

Умножив обе части уравнения на $2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, получим

$$-x^2 + 6x - 9 = 0; \quad x^2 - 6x + 9 = 0; \quad (x-3)^2 = 0; \quad x = 3.$$

При $x = 3$ знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение, не равны нулю, поэтому $x = 3$ — корень данного уравнения.

Ответ: 3.

$$108. \text{ Запишем уравнение в виде } \frac{x}{2+3x} + \frac{5}{2-3x} = \frac{15x+10}{(2-3x)(2+3x)}.$$

$$\text{ОДЗ: } 2-3x \neq 0; \quad 2+3x \neq 0, \text{ то есть } x \neq \pm \frac{2}{3}.$$

Умножим обе части уравнения на $(2-3x)(2+3x) \neq 0$:

$$x(2-3x) + 5(2+3x) = 15x+10; \quad 2x-3x^2+10+15x = 15x+10;$$

$$3x^2-2x=0; \quad x(3x-2)=0; \quad x_1=0, \quad x_2=\frac{2}{3}.$$

Так как $x \neq \pm \frac{2}{3}$, то $x = \frac{2}{3}$ — посторонний корень. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

$$110. 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x = 0; \quad x(2x^3 + 3x^2 - 8x - 12) = 0; \quad x_1 = 0; \\ 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0; \quad x^2(2x+3) - 4(2x+3) = 0; \quad (x^2-4)(2x+3) = 0; \\ x^2-4 = 0; \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2; \quad 2x+3 = 0; \quad 2x = -3; \quad x_4 = -1,5.$$

Ответ: 0; 2; -2; -1,5.

$$111. 10x^4 - 45x = 30x^2 - 15x^3; \quad 10x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 45x = 0; \\ 5x^3(2x+3) - 15x(2x+3) = 0; \quad (2x+3)(5x^3-15x) = 0; \quad 2x+3 = 0; \\ x_1 = -1,5;$$

$$5x^3 - 15x = 0; \quad 5x(x^2 - 3) = 0; \quad x_2 = 0; \quad x^2 - 3 = 0; \quad x^2 = 3; \quad x_3 = -\sqrt{3}, \\ x_4 = \sqrt{3}.$$

Ответ: $-1,5; 0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}$.

$$112. (x^2 + 3)^2 + 3 = 7x^3 - 7x^2 + 7x; \quad x^4 + 6x^2 + 9 + 3 - 7x^3 + 7x^2 - 7x = 0; \\ x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 12 = 0; \quad (x^4 - 7x^3 + 12x^2) + (x^2 - 7x + 12) = 0; \\ x^2(x^2 - 7x + 12) + (x^2 - 7x + 12) = 0; \quad (x^2 + 1)(x^2 - 7x + 12) = 0, \\ x^2 + 1 > 0; \quad x^2 - 7x + 12 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Ответ: 3; 4.

$$113. 5x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = 0; \quad (5x^3 + 3x^2) - (5x + 3) = 0; \\ x^2(5x + 3) - (5x + 3) = 0; \quad (5x + 3)(x^2 - 1) = 0; \quad 5x + 3 = 0; \quad x_1 = -0,6; \\ x^2 - 1 = 0; \quad (x - 1)(x + 1) = 0; \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$

Ответ: $-0,6; 1; -1$.

$$114. x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0; \quad (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1) = 0; \\ x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) = 0; \quad (x^2 + 1)(x + 1)^2 = 0, \quad x^2 + 1 > 0; \\ (x + 1)^2 = 0; \quad x + 1 = 0; \quad x = -1.$$

Ответ: -1 .

$$115. x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0; \\ (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^3 + 2x^2 + x) + (2x + 2) = 0; \\ x^2(x^2 + 2x + 1) + x(x^2 + 2x + 1) + 2(x + 1) = 0; \\ x^2(x + 1)^2 + x(x + 1)^2 + 2(x + 1) = 0; \quad (x + 1)(x^2(x + 1) + x(x + 1) + 2) = 0; \\ x + 1 = 0, \quad x_1 = -1; \\ x^3 + x^2 + x^2 + x + 2 = 0; \quad (x^3 + 2x^2) + (x + 2) = 0; \quad x^2(x + 2) + (x + 2) = 0; \\ (x + 2)(x^2 + 1) = 0, \quad x^2 + 1 > 0; \quad x + 2 = 0; \quad x_2 = -2.$$

Ответ: $-1; -2$.

$$116. x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8 = 0.$$

Замена $x^2 = t; t \geq 0$. Получим

$$t^3 - 2t^2 + 4t - 8 = 0; \quad t(t^2 + 4) - 2(t^2 + 4) = 0; \quad (t^2 + 4)(t - 2) = 0.$$

$t^2 + 4 = 0$ — действительных корней нет; $t - 2 = 0; t = 2$.

Вернёмся к замене: $x^2 = 2, x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

$$117. x^6 - 14x^4 + 56x^2 - 64 = 0. \text{ Замена } x^2 = t, t \geq 0.$$

$$t^3 - 14t^2 + 56t - 64 = 0,$$

$$t^3 - 64 - 14t \cdot (t - 4) = 0, \quad (t - 4) \cdot (t^2 + 4t + 16) - 14t \cdot (t - 4) = 0,$$

$$(t - 4) \cdot (t^2 + 4t + 16 - 14t) = 0, \quad (t - 4) \cdot (t^2 - 10t + 16) = 0,$$

$$(t - 4) \cdot (t - 8) \cdot (t - 2) = 0, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 8, \quad t_3 = 2.$$

Вернёмся к замене:

$$x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2; x^2 = 8, x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}; x^2 = 2, x_{5,6} = \pm \sqrt{2}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2}; \pm 2; \pm 2\sqrt{2}$.

118. $(x^2 + 8x + 17)(x^2 - 4x + 7) = 3$. Рассмотрим

а) $y = x^2 + 8x + 17; x^2 + 8x + 17 = 0; D = 64 - 68 = -4; -4 < 0$.

$$x_0 = -\frac{8}{2} = -4; y_0 = 16 - 32 + 17 = 1; E(y) = [1; +\infty).$$

б) $y = x^2 - 4x + 7; x^2 - 4x + 7 = 0; D = 16 - 28 = -12; -12 < 0$.

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2; y_0 = 4 - 8 + 7 = 3; E(y) = [3; +\infty).$$

в) Запишем $x^2 + 8x + 17 = \frac{3}{x^2 - 4x + 7}; E(x^2 + 8x + 17) = [1; +\infty),$

$$E\left(\frac{3}{x^2 - 4x + 7}\right) = (0; 1].$$

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = -4$, а правая — при $x = 2$, то есть корней уравнение не имеет, следовательно, исходное уравнение корней не имеет, что и требовалось доказать.

119. $(x^2 - 6x + 10)(x^2 - 10x + 32) = 7$.

а) Рассмотрим $y = x^2 - 6x + 10; x^2 - 6x + 10 = 0; D = 36 - 40 = -4; -4 < 0; x_0 = 3; y_0 = 9 - 18 + 10 = 1; E(y) = [1; +\infty).$

б) $y = x^2 - 10x + 32; x^2 - 10x + 32 = 0; D = 100 - 128 = -28; -28 < 0; x_0 = 5; y_0 = 25 - 50 + 32 = 7; E(y) = [7; +\infty).$

в) Запишем в виде $x^2 - 6x + 10 = \frac{7}{x^2 - 10x + 32};$

$$E(x^2 - 6x + 10) = [1; +\infty); E\left(\frac{7}{x^2 - 10x + 32}\right) = (0; 1].$$

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = 3$, а правая — при $x = 5$. Следовательно, корней нет, что и требовалось доказать.

120. Преобразуем уравнение $\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{x+1}.$

ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Умножив обе части уравнения на $(x-1)^2(x+1)$, получим $3(x+1) - 2(x-1) = x^2 - 2x + 1; x^2 - 3x - 4 = 0; x_1 = -1, x_2 = 4$. Число $x_1 = -1$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 4.

121. Преобразуем уравнение к виду $\frac{4}{(x+3)^2} - \frac{6}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{x-3}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 3$. Умножив обе части уравнения на $(x+3)^2(x-3)$, получим $4(x-3) + 6(x+3) = x^2 + 6x + 9$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Число $x_2 = 3$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 1.

122. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = 2x - 5$. Точка $(x; y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 2x - 5$.

Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 3 и применив теорему Виета: $x^2 - 6x + 12 = 6x - 15$; $x^2 - 12x + 27 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x - 5$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 1$, $y_2 = 13$.

Ответ: (3; 1), (9; 13).

123. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Точка $(x; y)$ является точкой пересечения данных в условии

прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 7 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 2 и применив теорему Виета: $x^2 - 5x - 14 = -3x + 1$; $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 5$, $y_2 = -7$.

Ответ: (-3; 5), (5; -7).

124. Легко видеть, что число 0 не входит в область определения уравнения. Умножив обе части уравнения на x^2 , получим уравнение, равносильное данному, при условии $x^2 \neq 0$: $x^4 + 2 = 3x^2$. Обозначив $t = x^2$, получаем уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases}$$

и его целыми корнями являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Ответ: -1; 1.

125. Уравнение параболы с вершиной в точке (3; 3) и старшим коэффициентом 1 может быть записано в виде $y = (x-3)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12$.

Чтобы найти абсциссы точек пересечения этой параболы с прямой $y = 2x$, решим уравнение: $x^2 - 6x + 12 = 2x$; $x^2 - 8x + 12 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Подставляя полученные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 4$, $y_2 = 12$.

Ответ: (2; 4), (6; 12).

126. Так как выражение $x^2 + 2$ не обращается в нуль, то, домножив на него обе части исходного уравнения, получим уравнение, равносильное данному: $x^2 - 10 + (x^2 - 2)(x^2 + 2) = x^2 + 2$; $x^4 - 4 = 12$; $x^4 - 16 = 0$; $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$; $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0$; $x^2 + 4 > 0$, $x = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

127. Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, нужно решить систему $\begin{cases} y - x - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Подставив $y = x + 3$ во второе уравнение, получаем $x^2 + (x + 3)^2 = 9$, $2x^2 + 6x + 9 = 9$, $2x^2 + 6x = 0$, $x(x + 3) = 0$. То есть абсциссы точек пересечения равны $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, а ординаты равны $y_1 = -3 + 3 = 0$, $y_2 = 0 + 3 = 3$.

Ответ: (-3; 0), (0; 3).

128. Преобразуем исходное уравнение: $(x - 3)^4 + 2(x - 3)^2 = 3$. Пусть $(x - 3)^2 = t \geq 0$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1, \end{cases} \quad x_1 = 2, \\ x_2 = 4.$

Ответ: 2; 4.

129. Заметим, что $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Пусть $(x + 2)^2 = t \geq 0$, тогда имеем $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -1, \\ x + 2 = 1, \end{cases} \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1.$

Ответ: -3; -1.

130. Сделаем замену $\frac{(x^2 - 5)^2}{4} = t$; $t \geq 0$. Тогда $(t - 3)(t + 2) - 6 = 0$, $t^2 - t - 12 = 0$. Решение этого уравнения: $t_1 = 4$; $t_2 = -3$. Второе значение $t = -3$ не подходит, так как $t \geq 0$. Поэтому $t = 4$. Возвращаясь к неизвестной x , имеем $\frac{(x^2 - 5)^2}{4} = 4$; $(x^2 - 5)^2 = 16$. Отсюда $x^2 - 5 = 4$

или $x^2 - 5 = -4$. Решим первое уравнение: $x^2 = 9$, $x_{1,2} = \pm 3$. Решим второе уравнение: $x^2 = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: $\pm 1; \pm 3$.

131. Пусть $\frac{(x^2 - 1)^2}{3} = t$, $t \geq 0$. Тогда $\left(t - \frac{21}{8}\right)\left(t + 5\right) - 3 = 0$;

$8t^2 + 19t - 129 = 0$. Решая это уравнение, получим $t_1 = -\frac{43}{8}$, $t_2 = 3$.

Значение $t = -\frac{43}{8}$ не подходит, так как $t \geq 0$. Подставим значение $t = 3$ в

равенство $\frac{(x^2 - 1)^2}{3} = t$. Получим $\frac{(x^2 - 1)^2}{3} = 3$, $(x^2 - 1)^2 = 9$. Отсюда $x^2 - 1 = \pm 3$.

Значит, $x^2 = 4$ или $x^2 = -2$. Второе уравнение решений не имеет, а первое имеет два решения $x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: ± 2 .

132. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(x - y)(x + y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ x = y; \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0, D < 0$$

\Rightarrow действительных корней нет \Rightarrow система не имеет решений;

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0; x_1 = -1, x_2 = -2.$$

Из второго уравнения системы получим $y_1 = 1, y_2 = 2$.

$(-1; 1)$ и $(-2; 2)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(-1; 1), (-2; 2)$.

133. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(2x - y)(2x + y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases} \quad x^2 - 4x + 2x + 8 = 0; x^2 - 2x + 8 = 0. D < 0,$$

действительных корней нет \Rightarrow система не имеет решений;

$$2) \begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases} \quad x^2 - 4x - 2x + 8 = 0; x^2 - 6x + 8 = 0; x_1 = 2,$$

$x_2 = 4$. Из второго уравнения системы получим $y_1 = -4$, $y_2 = -8$. Таким образом, $(2; -4)$ и $(4; -8)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(2; -4)$, $(4; -8)$.

134. Запишем уравнение в виде $x^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)x + 2 + \sqrt{2} = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = 4(2\sqrt{2} - 1)^2 - 4(2 + \sqrt{2}) = 4(7 - 5\sqrt{2})$. Так как $49 < 50$, то $7 < 5\sqrt{2}$. Поэтому $D = 4(7 - 5\sqrt{2}) < 0$ и уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.

135. Представим данное уравнение в виде $x^2 + 2(1 - 2\sqrt{3})x + 7 = 0$. Определим знак дискриминанта:

$\frac{D}{4} = (1 - 2\sqrt{3})^2 - 7 = 1 - 4\sqrt{3} + 12 - 7 = 6 - 4\sqrt{3} = \sqrt{36} - \sqrt{48} < 0$, то $D < 0$. Уравнение $4x\sqrt{3} - x^2 = 7 + 2x$ не имеет действительных корней.

Ответ: не имеет.

136. Запишем уравнение в виде $x^2 + (3 + 2\sqrt{2})x + 8,4 = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = (3 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 8,4 = 17 + 12\sqrt{2} - 33,6 = 12\sqrt{2} - 16,6$. Так как $144 \cdot 2 > (16,6)^2 \Leftrightarrow 12\sqrt{2} > 16,6 \Leftrightarrow D = 12\sqrt{2} - 16,6 > 0$, то исходное уравнение имеет действительные корни.

Ответ: корни есть.

138. 1) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + 1 \approx 2,4$ (поскольку $\sqrt{2} \approx 1,4$).

2) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} \approx 2,8$.

3) Запишем наше уравнение в виде $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} \approx 1,4$.

Наименьшую сумму корней имеет третье уравнение.

Ответ: 3.

$$139. \begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Решим систему способом подстановки:

$$y = 1 - 2x, x^2 - (1 - 2x)^2 = -5, x^2 - 1 + 4x - 4x^2 + 5 = 0, -3x^2 + 4x + 4 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16, D > 0.$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{-3} = -\frac{2}{3}, y_1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}; x_2 = \frac{-2-4}{-3} = 2, y_2 = 1 - 4 = -3.$$

Ответ: $(2; -3), \left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

$$140. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 3x - 7y = -29. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы x через y и подставим в первое уравнение:

$$x = \frac{7y - 29}{3}; \frac{49y^2 - 406y + 841 + 9y^2}{9} = 29; 58y^2 - 406y + 841 = 29 \cdot 9;$$

$$2y^2 - 14y + 29 - 9 = 0; y^2 - 7y + 10 = 0; y_1 = 5, y_2 = 2; x_1 = \frac{35 - 29}{3} = \frac{6}{3} = 2, x_2 = \frac{14 - 29}{3} = -\frac{15}{3} = -5.$$

Ответ: $(-5; 2), (2; 5)$.

$$142. \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Заметим, что если $x = 0$ или $y = 0$, то $xy = 0$, что противоречит условию $xy = 2$, значит, $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3, \\ y = \frac{2}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$.

Обозначим $x^2 = t, t > 0$. Уравнение примет вид

$$t - \frac{4}{t} = 3; t^2 - 3t - 4 = 0; t_1 = 4, t_2 = -1. \text{ Значение } t = -1 \text{ не удовлетворяет условию } t > 0.$$

Вернёмся к исходной переменной: $x^2 = 4; x_1 = 2; x_2 = -2$.

Так как $y = \frac{2}{x}$, то $y_1 = 1, y_2 = -1$.

Ответ: $(2; 1), (-2; -1)$.

$$\begin{aligned}
 143. \quad & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x} = 5, \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}, \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно, $x = \frac{2}{5}, y = 2$.

Ответ: $(0,4; 2)$.

144. Выразим из второго уравнения системы $y = x - 2$ и подставим в первое, получим уравнение

$$\frac{x+3}{x} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{25}{2}.$$

Его ОДЗ: $x \neq 0$ и $x - 1 \neq 0$, то есть $x \neq 0, x \neq 1$. Умножив обе части полученного уравнения на $2x(x-1)$, будем иметь

$$2(x+3)(x-1) - 2x(x+2) = 25x(x-1),$$

$$2x^2 + 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 25x^2 - 25x, \quad 25x^2 - 25x + 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{50} = \frac{25 \pm 5}{50}, \quad x_1 = \frac{2}{5} = 0,4, \quad x_2 = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Найденные корни удовлетворяют ОДЗ.

Далее находим $y_1 = x_1 - 2 = -1,6$ и $y_2 = x_2 - 2 = -1,4$. Таким образом, решением исходной системы будут две пары чисел $(0,4; -1,6)$ и $(0,6; -1,4)$.

Ответ: $(0,4; -1,6), (0,6; -1,4)$.

$$\begin{aligned}
 145. \quad & \begin{cases} y^2 - x^2 = 9, \\ 2x - y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 9, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2 - x^2 = 9, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 9 = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \cdot (x-4) = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = 0, \\ x = 4, \end{bmatrix} \\ y = 2x - 3; \end{cases} \quad x_1 = 0, y_1 = -3; x_2 = 4, y_2 = 5.$$

Ответ: $(0; -3), (4; 5)$.

146. Сделаем замену в первом уравнении $t = \frac{x}{y}$ и получим $t + \frac{1}{t} = \frac{25}{12}$.

Решаем это уравнение и находим корни $t_1 = \frac{3}{4}$; $t_2 = \frac{4}{3}$. Выражаем y через x , подставляем во второе уравнение и получаем ответ.

Ответ: (3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3).

147. $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 4; x_2 = -3, y_2 = 9.$

Ответ: (2; 4), (-3; 9).

148. $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 6x - x^2, \\ y = 9 + \sqrt{x-3}; \end{cases}$
 $2 + 6x - x^2 = 9 + \sqrt{x-3}, 6x - x^2 = 7 + \sqrt{x-3}. \quad (1)$

Очевидно, что $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 6x - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 6$. Подбором находим, что $x = 4$ является корнем уравнения (1).

Функция $y = 7 + \sqrt{x-3}$ возрастает при $x \geq 3$. $y = 6x - x^2$ — график параболы с вершиной (3; 9). При $x \geq 3$ $y = 6x - x^2$ убывает. Следовательно, на промежутке $3 \leq x < 6$ уравнение (1) имеет только один корень $x = 4$. Подставим $x = 4$ во второе уравнение системы и найдём $y: y = 10$.

Ответ: (4; 10).

149. Пусть искомые числа x и y , $x < y$. Тогда $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ \frac{x+y}{2} = y - 24. \end{cases}$ Выразим y из второго уравнения: $y = x + 48$, и подставим его в первое. Получим $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$

1) $\sqrt{x^2 + 48x} = x + 12$. Перейдём к равносильной системе.

$$\begin{cases} x + 12 \geq 0, \\ x^2 + 48x = x^2 + 24x + 144; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -12, \\ x = 6; \end{cases} \quad x = 6.$$

2) Находим значение второй переменной системы $y = 6 + 48 = 54$.

Итак, $\begin{cases} x = 6, \\ y = 54. \end{cases}$

Ответ: 6; 54.

$$150. \begin{cases} 2x - \frac{12x+y}{8} = 3, \\ \frac{x-y}{2} + \frac{1}{16} = \frac{y}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{12x}{8} - \frac{y}{8} = 3, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y}{3} + \frac{1}{16} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{8} + 3, \\ \frac{x}{2} - \frac{5y}{6} + \frac{1}{16} = 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\frac{x}{2}$ из первого уравнения системы во второе, получим

$$\frac{y}{8} + 3 - \frac{5y}{6} + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow -\frac{17y}{24} + \frac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{49}{16} \cdot \frac{24}{17} = \frac{147}{34}.$$

Найденное значение y подставим в первое уравнение системы

$$x = \frac{y}{4} + 6, x = \frac{147}{34 \cdot 4} + 6 = \frac{963}{136}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{963}{136}, y = \frac{147}{34}.$$

$$151. \begin{cases} \frac{x+y}{5} + 2x = 11, \\ \frac{3y}{5} + \frac{y-x}{15} = \frac{x}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2 + \frac{1}{5}\right)x + \frac{y}{5} = 11, \\ \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{15}\right)y - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5}\right)x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{y}{11} + 5, \\ y = \frac{2x}{5}. \end{cases}$$

Подставим значение y из второго уравнения системы в первое:

$$x = -\frac{2x}{55} + 5; x = \frac{275}{57}. \text{ Тогда } y = \frac{2x}{5} = \frac{110}{57}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{275}{57}, y = \frac{110}{57}.$$

$$152. \begin{cases} \frac{x-2y}{3} + \frac{11}{3} = 2x, \\ 2 + \frac{y-x}{4} = \frac{y}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - 2\right)x - \frac{2y}{3} = -\frac{11}{3}, \\ -\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)y = -2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11-2y}{5}, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3y}{28} = -2. \end{cases}$$

Подставим полученное значение x из первого уравнения системы во второе:

$$\text{реш: } \frac{1}{4} \cdot \frac{2y-11}{5} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{20} + \frac{y}{10} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow \frac{29y}{140} =$$

$$= -2 + \frac{11}{20} \Rightarrow y = -7.$$

Так как $x = \frac{11-2y}{5}$, то $x = \frac{11+14}{5} = 5$.

Ответ: $x = 5, y = -7$.

$$153. \begin{cases} \frac{x+3y}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{x}{2}, \\ \frac{5y}{2} + 3 = -\frac{x+y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{3y}{4} = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{5}x + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right)y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{15}{2} - \frac{3}{4}y, \\ x + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y, \\ 10 - y + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $x = 12, y = -2$.

154. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 7, \\ x+y+5xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{7}{12}, \\ xy = \frac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{12} - x, \\ 12x^2 - 7x + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{12} - x, \\ \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ x = \frac{1}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{4}, \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$.

155. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 6, \\ x+y+10xy = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6xy, \\ 16xy = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{4}, \\ xy = \frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} - x, \\ 8x^2 - 6x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0,75 - 0,25 = 0,5$ и $y_2 = 0,75 - 0,5 = 0,25$.

Ответ: $(0,25; 0,5), (0,5; 0,25)$.

$$156. \begin{cases} 2x - 6 - 4y - 28 = 1, \\ 6 - 3x + 7y - 7 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 35, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 39, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3y + 39, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3y + 39, \\ -9y + 117 + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 39, \\ y = \frac{113}{2} = 56,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 130,5, \\ y = 56,5. \end{cases}$$

Ответ: $(130,5; 56,5)$.

$$157. \begin{cases} 5x + 4y - 2x = 6, \\ x - 2y + 4x = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ 5x - 2y = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = -26, \\ 2y = 5x + 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 3)$.

158. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим в первое:

$$1) 2x + y = -2 \Rightarrow y = -2 - 2x.$$

$$2) x^2 - y = x^2 + 2x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0.$$

3) Решениями уравнения $x^2 + 2x = 0$ являются $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, которым соответствуют $y_1 = 2$; $y_2 = -2$.

Ответ: $(0; -2), (-2; 2)$.

159. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = x^2$ и $y = y^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x^2, \\ y = y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ y(y-1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ y = 0, \\ y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ y = 1, \\ x = 1, \\ y = 0, \\ x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$.

160. По теореме, обратной теореме Виета, x и y^2 удовлетворяют квадратному уравнению $z^2 - 7z + 12 = 0$. Откуда $x = 3$, $y^2 = 4$ или $x = 4$, $y^2 = 3$. Значит, решением системы являются пары $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(4; \sqrt{3})$, $(4; -\sqrt{3})$.

Ответ: $(3; 2), (3; -2), (4; \sqrt{3}), (4; -\sqrt{3})$.

161. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = |x|$ и $y = |y|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = |x|, \\ y = |y|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \geq 0, y \geq 0$.

162. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ ($x \neq \pm y$), тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 9b + 2a = 3, \\ 18b - 5a = -3. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-9a = -9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{9}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 1, \\ x+y = 9. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 4$.

Ответ: (5; 4).

163. Пусть $\frac{1}{x+y} = b, \frac{1}{x-y} = a$ ($x \neq \pm y$), тогда имеем систему уравне-

ний
$$\begin{cases} 6b + 5a = 7, \\ 3b - 2a = -1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $9a = 9; a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{3}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 1, \\ x+y = 3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 2, y = 1$.

Ответ: (2; 1).

164. Пусть $\frac{1}{x+y} = b, \frac{1}{x-y} = a$ ($x \neq \pm y$), тогда имеем систему уравне-

ний
$$\begin{cases} 4a + 12b = 3, \\ 8a - 18b = -1. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-42b = -7; b = \frac{1}{6}$. Подставляя $b = \frac{1}{6}$ в любое из уравнений

последней системы, находим, что $a = \frac{1}{4}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 4, \\ x+y = 6. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 1$.

Ответ: (5; 1).

165. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ ($x \neq \pm y$), тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 6a - 8b = -2, \\ 9a + 10b = 8. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3 и вычитая из полученного уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $-44b = -22$; $b = \frac{1}{2}$. Подстав-

ляя $b = \frac{1}{2}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \frac{1}{3}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 3, \\ x+y = 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 2,5$, $y = -0,5$.

Ответ: $(2,5; -0,5)$.

166. Из второго уравнения системы выразим y через x : $y = x - 7$ (1). Подставив выражение (1) в первое уравнение системы, получим $(3x - 7)^2 = 3x - 5$; $9x^2 - 42x + 49 = 3x - 5$; $9x^2 - 45x + 54 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Из уравнения (1) находим, что значениям $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ соответствуют значения $y_1 = -5$, $y_2 = -4$.

Ответ: $(2; -5)$, $(3; -4)$.

$$\begin{aligned} 167. & \begin{cases} (3x - y)^2 = 12 - 3x + y, \\ x + y = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 5 + x)^2 = 12 - 3x + 5 - x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} (4x - 5)^2 = 17 - 4x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 36x + 8 = 0, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} 4x^2 - 9x + 2 = 0 \\ y = 5 - x. \end{cases} \end{aligned}$$

Решением первого уравнения этой системы являются числа $x_1 = 0,25$; $x_2 = 2$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы, получаем $y_1 = 4,75$, $y_2 = 3$.

Ответ: $(0,25; 4,75)$, $(2; 3)$.

$$\begin{aligned} 168. & \begin{cases} \frac{x}{y} + 1 = \frac{6y}{x}, \\ x + y = 3. \end{cases} \text{ Обозначим } \frac{x}{y} = t \ (x \neq 0, y \neq 0). \text{ Тогда } t^2 + t - 6 = 0; \\ & t_1 = 2, t_2 = -3. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{cases} x = 2y, \\ y = 3 - x, \\ x = -3y, \\ y = 3 - x; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ x = 4, 5, \\ y = -1, 5. \end{cases} \right]$$

Ответ: (2; 1), (4, 5; -1, 5).

$$169. \begin{cases} \frac{x}{y} + 3 = \frac{4y}{x}, \\ y - x = 5. \end{cases} \text{ Обозначим } \frac{x}{y} = t \ (x \neq 0, y \neq 0).$$

Тогда $t^2 + 3t - 4 = 0$; $t_1 = -4, t_2 = 1$.

$$\left[\begin{cases} x = -4y, \\ y = 5 + x, \\ x = y, \\ y = 5 + x; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (-4; 1).

170. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y-x}{xy} = 1, \\ y-x+11xy = 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y-x = xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = \frac{1}{12}, \\ xy = \frac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{12} + x, \\ 12x^2 + x - 1 = 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{12} + x, \\ \begin{bmatrix} x = -\frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{4}; \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}, \\ x = -\frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}), (\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$.

171. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y-x}{xy} = 2, \\ y-x-10xy = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = 2xy, \\ 8xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = \frac{1}{4}, \\ xy = \frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} + x, \\ 8x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,25$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0,25 - 0,5 = -0,25$; $y_2 = 0,25 + 0,25 = 0,5$.

Ответ: $(-0,5; 0,25)$, $(0,25; 0,5)$.

172. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = 5, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x(5 - 2x) = 9, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x(-5 - 2x) = 9, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 9 = 0, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = -13, \\ x = -9, \\ y = 13, \\ x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-9; 13)$, $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(9; -13)$.

173. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6. \end{cases} \\ 1) \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 5 = 0, \\ x = 6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5, \\ x = 1, \\ y = 1, \\ x = 7; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y - 5 = 0, \\ x = -6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -7, \\ y = 5, \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-7; -1)$, $(-1; 5)$, $(1; -5)$, $(7; 1)$.

174. Пусть $t = \frac{x}{y}$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$). Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид $t + \frac{6}{t} - 5 = 0$; $t^2 - 5t + 6 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Следовательно, $x = 2y$ или $x = 3y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + 8y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}, \\ x = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + 12y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \\ y = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -1), (3; 1), (2\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

175. Пусть $t = \frac{x}{y}$ ($x \neq 0, y \neq 0$). Тогда первое уравнение исходной системы

принимает вид $t - \frac{2}{t} - 1 = 0$; $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Следовательно, $x = -y$ или $x = 2y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 5y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \\ y = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 10y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = -8. \end{cases} \quad \text{Эта система не имеет решений.}$$

Ответ: $(2; -2), (-2; 2)$.

$$176. \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)(9x^2 - y^2) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)^2(3x - y) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)^2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = 4, \\ y = 3x - 8, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 12, \\ y = 3x - 8, \\ 6x = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \\ y = -6, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -2), (\frac{2}{3}; -6)$.

$$177. \begin{cases} (x^2 - 4y^2)(x - 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2(x + 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2 = 64, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 10 - 2y - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} 10 - 2y - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ x = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4\frac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(9; 0,5), (1; 4,5)$.

$$178. \begin{cases} (x^2 - y^2)(x - y) = 81, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x - y)^2 = 81, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 9, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = -3, \\ x = 9 - y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 3, \\ x = 9 - y; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 9 - y - y = -3, \\ x = 9 - y, \end{cases} \\ \begin{cases} 9 - y - y = 3, \\ x = 9 - y; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 6, \\ x = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3, \\ x = 6. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(6; 3), (3; 6)$.

$$179. \begin{cases} (y^2 - x^2)(y - x) = 75, \\ x - y = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x)^2(y + x) = 75, \\ y - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y + x = 3, \\ y - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 4)$.

180. Первое уравнение системы выполняется только в том случае, когда $x - 2 = 0$ или $y + 1 = 0$. Получаем:

$$1) \begin{cases} x - 2 = 0, \\ 6y^2 + x - y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 6y^2 - y - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения $x_1 = 2$; $y_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$;

$$y_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$2) \begin{cases} y + 1 = 0, \\ 6y^2 + x - y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ 7 + x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -4. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы являются значения

$$x_1 = 2, y_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2, y_2 = -\frac{1}{3}; x_3 = -4, y_3 = -1.$$

$$\text{Ответ: } \left(2; \frac{1}{2}\right), \left(2; -\frac{1}{3}\right), (-4; -1).$$

$$181. \begin{cases} x(x+y) = 15, \\ y(x+y) = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

Суммируя уравнения системы, получим $x^2 + 2xy + y^2 = 25$, $(x+y)^2 = 25$. Тогда $x+y = 5$ или $x+y = -5$.

1) $x+y = 5$, $x = 5-y$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(5-y)(5-y+y) = 15$, $5-y = 3$, $y = 2$. Тогда $x = 5-2 = 3$.

2) $x+y = -5$, $x = -y-5$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(-y-5)(-y-5+y) = 15$, $-y-5 = -3$, $y = -2$. Тогда $x = -(-2)-5 = -3$.

$$\text{Ответ: } (3; 2), (-3; -2).$$

$$183. x - 2 + \frac{2,25}{x+1} \leq 0; \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 2,25}{x+1} \leq 0; \frac{(x-0,5)^2}{x+1} \leq 0;$$

$$\begin{cases} x = 0,5, \\ x < -1. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \{0,5\}.$$

$$184. \frac{\sqrt{x^2 + x - 20}}{4x + 1} \geq \frac{\sqrt{x^2 + x - 20}}{2x + 3}. \text{ ОДЗ: } x \neq -\frac{1}{4}; x \neq -\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $x^2 + x - 20 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 4$, $x_2 = -5$. Числа -5 и 4 являются решениями данного неравенства.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + x - 20 > 0, \\ \frac{1}{4x+1} - \frac{1}{2x+3} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-4) > 0 \text{ (см. рис. 124),} \\ \frac{1-x}{(4x+1)(2x+3)} \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -5, \\ x > 4, \end{cases} \\ \frac{1-x}{8\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)} \leq 0 \text{ (см. рис. 125);} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -5, \\ x > 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{4} < x \leq 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -5.$$

Объединим решения, полученные в а) и б):

$$x \in (-\infty; -5] \cup \{4\}.$$

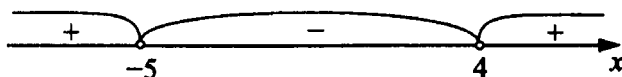


Рис. 124

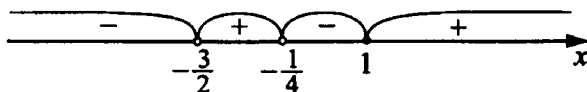


Рис. 125

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{4\}$.

$$185. \frac{2x-1}{\sqrt{-x^2-0,5x+0,5}} \geq \frac{5x+1}{\sqrt{-x^2-0,5x+0,5}}.$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 5x+1, \\ -x^2-0,5x+0,5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3}, \\ x^2+0,5x-0,5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3}, \\ (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq -\frac{2}{3} \text{ (см. рис. 126).}$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{2}{3}\right]$.

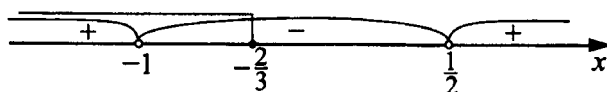


Рис. 126

186. $x^2 + \frac{1}{x^2} > 7$; $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > 9$; $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 > 9$; $\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3$. Получим

$$x + \frac{1}{x} > 3 \text{ или } x + \frac{1}{x} < -3.$$

$$1) x + \frac{1}{x} - 3 > 0; \frac{x^2 - 3x + 1}{x} > 0; \frac{\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)}{x} > 0;$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \end{cases} \quad (\text{см. рис. 127}).$$

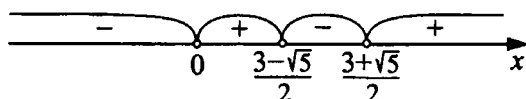


Рис. 127

$$2) x + \frac{1}{x} + 3 < 0; \frac{x^2 + 3x + 1}{x} < 0; \frac{\left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)}{x} < 0;$$

$$\begin{cases} x < \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \\ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < x < 0; \end{cases} \quad (\text{см. рис. 128}).$$

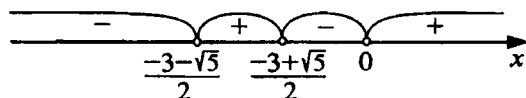


Рис. 128

Объединяя решения 1 и 2, имеем

$$\left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0) \cup (0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

187. Преобразуем данное неравенство: $x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} < 9$; $(x + \frac{2}{x})^2 < 3^2$.

Рассмотрим отдельно два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

1) Так как при $x > 0$ выполняется неравенство $x + \frac{2}{x} > 0$, то

$$0 < x + \frac{2}{x} < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0; x \in (1; 2).$$

2) При рассмотрении случая $x < 0$ достаточно заметить, что функция $y = x + \frac{2}{x}$ нечётна, и, значит, решением неравенства $(x + \frac{2}{x})^2 < 3^2$ на отрицательной полуоси будет множество $(-2; -1)$, симметричное множеству $(1; 2)$ относительно нуля.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

$$188. (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 1 \leq 0; (x^2 - 2x)^2 \leq 1; |x^2 - 2x| \leq 1; \\ \begin{cases} x^2 - 2x \geq -1, \\ x^2 - 2x \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 1 \leq 0; \end{cases} \quad 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \leq 0, (x^4 - 1) - 4x^2(x-1) \leq 0, \\ (x^2+1)(x-1)(x+1) - 4x^2(x-1) \leq 0, (x-1)((x^2+1)(x+1) - 4x^2) \leq 0, \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1 - 4x^2) \leq 0, (x-1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) \leq 0, \\ (x-1)(x^3 - x^2 - x^2 + x - x^2 + 1) \leq 0, \\ (x-1)(x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1)(x+1)) \leq 0, \\ (x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 1) \leq 0, (x-1)^2(x^2 - 2x - 1) \leq 0; \\ x^2 - 2x - 1 = 0, x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}; \\ (x-1)^2(x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2})) \leq 0; 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \\ (\text{см. рис. 129}).$$



Рис. 129

Ответ: $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

$$190. \begin{cases} \frac{6-x}{x+3} \geq 0, \\ \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы.

$$1) \frac{6-x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow -3 < x \leq 6 \text{ (см. рис. 130).}$$

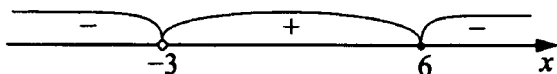


Рис. 130

$$2) \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}; \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq 0; \frac{x+2}{2x} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \text{ (см. рис. 131).}$$

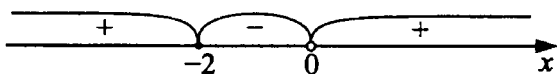


Рис. 131

$$3) \text{ Следовательно } \begin{cases} -3 < x \leq 6, \\ -2 \leq x < 0. \end{cases} \text{ Откуда } -2 \leq x < 0 \text{ (см. рис. 132).}$$



Рис. 132

Ответ: $[-2; 0)$.

191. Решим сначала первое неравенство, потом — второе и найдём общее решение.

$$1) x^2 - 4x - 5 < 0; (x+1)(x-5) < 0; -1 < x < 5.$$

$$2) \frac{1}{x} \geq \frac{1}{4}; \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \geq 0; \frac{4-x}{4x} \geq 0; \frac{x-4}{x} \leq 0; 0 < x \leq 4.$$

Следовательно, $0 < x \leq 4$ (см. рис. 133).

Ответ: $(0; 4]$.



Рис. 133

$$192. \begin{cases} 2 - \frac{3+2x}{3} > 1 - \frac{x+6}{2}, \\ 3 - \frac{x}{4} < x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 6 - 4x > 6 - 3x - 18, \\ 12 - x < 4x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 18, \\ x > 2,4; \end{cases} \Leftrightarrow 2,4 < x < 18.$$

Ответ: (2,4; 18).

$$193. \begin{cases} 1 - \frac{1-x}{2} < 4 - \frac{5+5x}{3}, \\ 2 - \frac{x+8}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3 + 3x < 24 - 10 - 10x, \\ 8 - x - 8 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x < 11, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{11}{13}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

195. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2 - 20x - 7 \geq 0, \\ 2x^2 + 5x \neq 0, \\ 3x - 21 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-7)\left(x + \frac{1}{3}\right) \geq 0, \\ x(2x+5) \neq 0, \\ x \neq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3}, \\ x \geq 7 \text{ (см. рис. 134)}, \\ x \neq 0, x \neq -2,5, \\ x \neq 7. \end{cases}$$

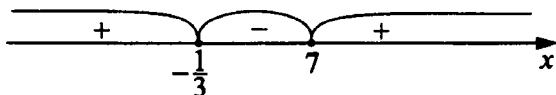


Рис. 134

Таким образом, $x \in (-\infty; -2,5) \cup \left(-2,5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2,5) \cup \left(-2,5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

196. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0, \\ x^2 - 25 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-7) \geq 0, \\ x^2 \neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq 7, \\ x \neq 5, x \neq -5. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [7; +\infty)$ (см. рис. 135).



Рис. 135

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [7; +\infty)$.

197. Исходное выражение имеет смысл при x , удовлетворяющих условию $x^2 - 3x + 2 > 0$; $(x-1)(x-2) > 0$ (см. рис. 136). Следовательно, $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.



Рис. 136

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

198. Исходное выражение имеет смысл при x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0, \\ 14 - 3x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geq 0, \\ x \neq \frac{14}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{14}{3}.$$

Таким образом, область определения: $(-\infty; \frac{14}{3}) \cup (\frac{14}{3}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; \frac{14}{3}) \cup (\frac{14}{3}; +\infty)$.

199. Исходное выражение имеет смысл при x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x + 12 - x^2 \geq 0, \\ 4 - x^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4) \leq 0, \\ x^2 \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 4, \\ x \neq 2, x \neq -2; \end{cases}$$

(см. рис. 137). Таким образом, $x \in [-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

Ответ: $[-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

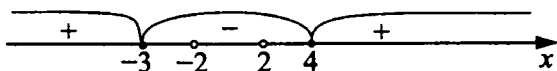


Рис. 137

200. Выражение имеет смысл при x , удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0, \\ x^2 - 36 \geq 0, \\ x^2 - 49 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ \begin{cases} x \leq -6, \\ x \geq 6, \end{cases} \\ x \neq 7, x \neq -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \leq x < 7, \\ x > 7. \end{cases}$$

Ответ: $[6; 7) \cup (7; +\infty)$.

202. Выражение $\sqrt{2x^2 + 9x - 35}$ не имеет смысла, если $2x^2 + 9x - 35 < 0$; $2(x + 7)(x - 2,5) < 0$ (см. рис. 138); $-7 < x < 2,5$.

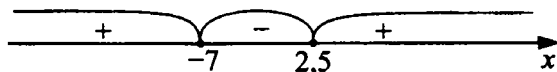


Рис. 138

Ответ: $(-7; 2,5)$.

203. Выражение $\sqrt{16 - 2x - 3x^2}$ имеет смысл, если $16 - 2x - 3x^2 \geq 0$; $3x^2 + 2x - 16 \leq 0$; $3(x - 2)\left(x + 2\frac{2}{3}\right) \leq 0$; $-2\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ (см. рис. 139).

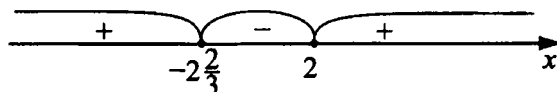


Рис. 139

Ответ: $\left[-2\frac{2}{3}; 2\right]$.

204. Выражение имеет смысл при x , удовлетворяющих условию

$$\frac{20x - 11x^2 - 3x^3}{x} \geq 0; \frac{3x\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 5)}{x} \leq 0; x \in [-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$$

(см. рис. 140).

Ответ: $[-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$.

205. Выражение имеет смысл при s , удовлетворяющих условию $11s - 6 - 3s^2 > 0$, $3s^2 - 11s + 6 < 0$.

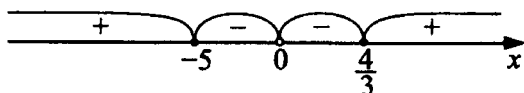


Рис. 140

Найдём корни уравнения

$$3s^2 - 11s + 6 = 0, D = 121 - 72 = 49, D > 0, s_1 = \frac{11+7}{6} = 3,$$

$$s_2 = \frac{11-7}{6} = \frac{2}{3}, 3 \cdot \left(s - \frac{2}{3}\right) \cdot (s - 3) < 0, \frac{2}{3} < s < 3 \text{ (см. рис. 141)}.$$

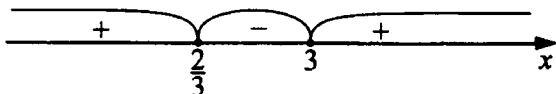


Рис. 141

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

206. Выражение не определено, если выполняются условия:

$$\begin{cases} x + 3 = 0, \\ 2x^2 - 11x + 12 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ 2(x - 4)(x - 1,5) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ 1,5 \leq x \leq 4; \end{cases}$$

(см. рис. 142).

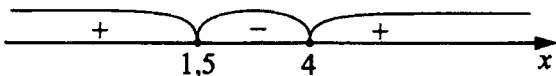


Рис. 142

Ответ: $\{-3\} \cup [1,5; 4]$.

207. Множеством значений x , при которых не определено данное в усло-

вии выражение, является решение совокупности

$$\begin{cases} 4x^2 - 11x - 3 < 0, \\ x + 1 = 0, \\ 1 - \frac{6}{x+1} = 0. \end{cases}$$

$$4x^2 - 11x - 3 = 0, x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8}, x_1 = -0,25, x_2 = 3. \text{ Таким образом,}$$

полученная совокупность записывается в виде

$$\begin{cases} (x + 0,25)(x - 3) < 0, \\ x = -1, \\ \frac{x - 5}{x + 1} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-0,25; 3), \\ x = -1, \\ x = 5; \end{cases}$$

$$x \in \{-1\} \cup (-0,25; 3) \cup \{5\}.$$

Ответ: $\{-1\} \cup (-0,25; 3) \cup \{5\}$.

208. Умножив третье неравенство системы на 2 и прибавив результат ко второму неравенству, получим $3y > 10$, $y > \frac{10}{3}$. Поскольку y должно быть целым, то $y \geq 4$. Аналогично из 1-го неравенства системы следует условие $y \leq 6$. То есть достаточно рассмотреть случаи $y = 4$, $y = 5$, $y = 6$.

1) При $y = 4$ из неравенства $x + y > 5 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \geq 2$. Но тогда $y - 2x \leq 4 - 2 \cdot 2 = 0$, то есть не выполнено второе неравенство системы. Следовательно, решений $(x; y)$ с ординатой $y = 4$ не существует.

2) При $y = 5$ из неравенства $x + y > 5 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \geq 1$. При $x = 1$ и $x = 2$ неравенство $y - 2x > 0$ выполнено, то есть точки $(1, 5)$, $(2, 5)$ являются решениями данной системы. При $x \geq 3$ неравенство $y - 2x > 0$ перестаёт выполняться, решений $(x; y)$ с ординатой $y = 5$ и абсциссой $x \geq 3$ не существует.

3) Случай $y = 6$ рассматривается аналогично:
 $x + y > 5 \Rightarrow x \geq 0$, неравенство $y - 2x > 0$ выполнено при $x = 0, 1, 2$ и перестаёт выполняться при $x \geq 3$. То есть все решения системы с ординатой $y = 6$ — это точки $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$.

Поскольку все возможные случаи были рассмотрены, то других решений, кроме найденных, не существует.

Замечание. Для решения данной задачи можно было воспользоваться графическим методом, а именно, выполнив чертёж, содержащий в одной координатной плоскости прямые $y = 7$, $y - 2x = 0$, $x + y = 5$, отметить ту часть плоскости, точки которой удовлетворяют всем трём неравенствам системы (каждое из неравенств задаёт часть плоскости, расположенную по одну сторону от соответствующей прямой). При этом получится ограниченная область (треугольник), и все целочисленные решения (узлы координатной решётки) можно перечислить.

Во всяком случае, геометрические соображения будут полезны для нахождения ограничений на переменные x, y в случае более сложной системы такого типа.

Ответ: $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$.

$$209. \begin{cases} y < 1, \\ y > x - 5, \\ y > 3 - 3x. \end{cases}$$

Построим графики функций $y = 1$, $y = x - 5$, $y = -3x + 3$ (см. рис. 143). Решением системы неравенств является внутренняя область $\triangle ABC$. Целочисленные решения отмечены точками. Это $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

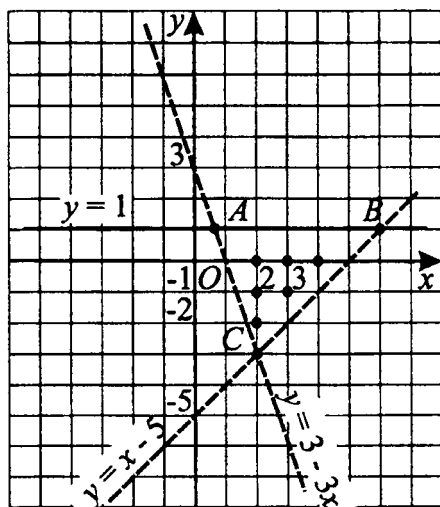


Рис. 143

Ответ: $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

$$210. \begin{cases} \frac{6-x}{2} - 4 < \frac{2+3x}{5} - 1, \\ x - \frac{6-x}{2} < \frac{x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 5x - 40 < 4 + 6x - 10, \\ 6x - 18 + 3x < 2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11x < 4, \\ 7x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{11}, \\ x < \frac{18}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{11} < x < 2\frac{4}{7}.$$

0, 1, 2 — целые числа, удовлетворяющие системе неравенств.

Ответ: 0; 1; 2.

$$\begin{aligned}
 211. \quad & \begin{cases} \frac{6x+1}{3} - \frac{5x-1}{2} \leq \frac{10-x}{5}, \\ 3 - \frac{2x}{3} \geq 1 - \frac{x}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 10 - 75x + 15 \leq 60 - 6x, \\ 18 - 4x \geq 6 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 60x - 75x + 6x \leq 60 - 10 - 15, \\ -4x + x \geq 6 - 18; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -9x \leq 35, \\ -3x \geq -12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{35}{9}, \\ x \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow -3\frac{8}{9} \leq x \leq 4.
 \end{aligned}$$

Целые числа, удовлетворяющие системе неравенств: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

Ответ: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

212. $(x^2 - 3x + 2)^4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 1, x_2 = 2$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 2.

213. $(x^2 - 13x + 42)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0; x_1 = 6, x_2 = 7$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 6.

214. $(x^2 - 16x + 63)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 63 = 0; x_1 = 7, x_2 = 9$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 7.

215. $(x^2 - 4x + 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1, x_2 = 3$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 3.

216. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 1} + 2x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду $\frac{2}{x^2 - 2x - 1} + 2(x^2 - 2x - 1) - 5 = 0$ и сделаем замену $t = x^2 - 2x - 1, t \neq 0$. Тогда уравнение примет вид: $\frac{2}{t} + 2t - 5 = 0; 2t^2 - 5t + 2 = 0; t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2$.

Если $t = \frac{1}{2}$, то $x^2 - 2x - 1 = \frac{1}{2}$; $x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Если $t = 2$, то $x^2 - 2x - 1 = 2$; $x_3 = -1$, $x_4 = 3$.

$$2) x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

3) Учитывая, что $2 < \sqrt{10} < 4$, получаем, что $1 < \frac{1}{2}\sqrt{10} < 2$. Таким

образом, $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$, следовательно, $x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$,

$x_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ не являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы. Очевидно, что $x_3 = -1$, $x_4 = 3$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: $-1; 3$.

217. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$2x^2 - 10x + 9 - \frac{2}{x^2 - 5x + 6} = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду $2(x^2 - 5x + 6) - \frac{2}{x^2 - 5x + 6} - 3 = 0$

и сделаем замену $t = x^2 - 5x + 6$, $t \neq 0$. Тогда уравнение примет вид

$$2t - \frac{2}{t} - 3 = 0; 2t^2 - 3t - 2 = 0; t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 2.$$

Если $t = -\frac{1}{2}$, то $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{2}$, решений нет.

Если $t = 2$, то $x^2 - 5x + 6 = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

2) Решим неравенство $x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$.

3) Очевидно, что $x_1 = 1$ не является решением второго неравенства, а значит, и решением системы; $x_2 = 4$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 4.

$$218. \begin{cases} (x^2 + 5x)^2 - 12(x^2 + 5x) + 36 \leq 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x - 6)^2 \leq 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \\ x = -6, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leq 900; \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

$$\begin{aligned} 219. & \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 3x - 5)^2 - (10x^2 + 30x - 50) + 25 \geq 0, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 3x - 5)^2 - 10(x^2 + 3x - 5) + 25 \geq 0, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 3x - 10)^2 \geq 0, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ x = -5, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625; \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625, \\ x = -5, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leq 625; \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

220. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна. Значит, неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда $(x - 2)^2(x^2 + 2x - 1)^2 = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Таким образом, решением первого неравенства системы являются корни уравнений $x - 2 = 0$ и $x^2 + 2x - 1 = 0$: $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, $x_3 = -1 - \sqrt{2}$. Из них только $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1 + \sqrt{2}$.

221. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна, так как $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Следовательно, x является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда

$$(2x - 1)^2(x^2 + 2x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 4 = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0,5, \\ x = -1 + \sqrt{5}, \\ x = -1 - \sqrt{5}. \end{array} \right.$$

Подстановкой убеждаемся, что из чисел $0,5$; $-1 + \sqrt{5}$; $-1 - \sqrt{5}$ лишь последнее удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1 - \sqrt{5}$.

222. Проведём следующие преобразования данного неравенства

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 \geq 4; \quad x^2(x^2 - 4x + 4) \geq 4; \quad x^2(x - 2)^2 \geq 4.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x(x-2) \geq 2, \\ x(x-2) \leq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 2x + 2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - (1 - \sqrt{3}))(x - 1 - \sqrt{3}) \geq 0, \\ (x-1)^2 + 1 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{3}, \\ x \geq 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty).$$

223. Проведём следующие преобразования данного неравенства

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 \geq 81; \quad x^2(x^2 - 12x + 36) \geq 81; \quad x^2(x - 6)^2 \geq 81.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} x(x-6) \geq 9, \\ x(x-6) \leq -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 9 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 9 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 - 3\sqrt{2}, \\ x \geq 3 + 3\sqrt{2}, \\ (x-3)^2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 - 3\sqrt{2}, \\ x \geq 3 + 3\sqrt{2}, \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 3 - 3\sqrt{2}] \cup [3 + 3\sqrt{2}; +\infty) \cup \{3\}.$$

$$\begin{aligned} 224. (2x^2 - x)^2 < 1 &\Leftrightarrow |2x^2 - x| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x < 1, \\ 2x^2 - x > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 < 0, \\ 2x^2 - x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -0,5 < x < 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-0,5; 1).$$

225. $|x + 1| \geq 0$, $|x| \geq 0$, поэтому равенство $|x + 1| + |x| = 0$ невозможно ($|x + 1|$ и $|x|$ не обращаются в нуль одновременно). Следовательно, $|x + 1| + |x| > 0$ при всех x . Умножив обе части исходного неравенства на $|x + 1| + |x|$, получим $(|x + 1| - |x|)^2(|x + 1| + |x|)^2 < 1$; $(|x + 1|^2 - |x|^2)^2 < 1$;

$$\begin{aligned} ((x + 1)^2 - x^2)^2 < 1; \quad (2x + 1)^2 < 1 &\Leftrightarrow |2x + 1| < 1; \quad \begin{cases} 2x + 1 < 1, \\ 2x + 1 > -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x > -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0).$$

$$\begin{aligned}
 226. \quad & \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 3} \geq 0, \\ \sqrt{(x^2 - 5x + 5)^2} \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0, \\ |x^2 - 5x + 5| \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 5 \geq -1, \\ x^2 - 5x + 5 \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3) \geq 0, \\ (x-2)(x-3) \geq 0, \\ (x-1)(x-4) \leq 0; \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -1, \\ 1 \leq x \leq 2, \\ 3 \leq x \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 3 \leq x \leq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 4]$.

$$\begin{aligned}
 227. \quad & \begin{cases} \sqrt{5x + 6 - x^2} \geq 0, \\ \sqrt{(x^2 - 8x + 11)^2} \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6 - x^2 \geq 0, \\ |x^2 - 8x + 11| \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 8x + 11 \geq -4, \\ x^2 - 8x + 11 \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+1) \leq 0, \\ (x-5)(x-3) \geq 0, \\ (x-1)(x-7) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 5, \\ 1 \leq x \leq 7; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ 5 \leq x \leq 7; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ 5 \leq x \leq 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[1; 3] \cup [5; 6]$.

$$\begin{aligned}
 228. \quad & \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 3,5x + 4,5} \geq 0, \\ \sqrt{(x^2 - 7x + 11)^2} \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 3,5x + 4,5} \geq 0, \\ |x^2 - 7x + 11| \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4,5)(x+1) \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 7x + 11 \leq -1, \\ x^2 - 7x + 11 \geq 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4,5)(x+1) \leq 0, \\ \begin{cases} (x-4)(x-3) \leq 0, \\ (x-2)(x-5) \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4,5, \\ \begin{cases} 3 \leq x \leq 4, \\ \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 5; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ 3 \leq x \leq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 4]$.

$$\begin{aligned}
 229. \quad & \begin{cases} \sqrt{-x^2 - 4,5x + 5,5} \geq 0, \\ \sqrt{(x^2 + 6x + 6,5)^2} \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 4,5x + 5,5 \geq 0, \\ |x^2 + 6x + 6,5| \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+5,5)(x-1) \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 + 6x + 6,5 \leq -1,5, \\ x^2 + 6x + 6,5 \geq 1,5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5,5)(x-1) \leq 0, \\ \begin{cases} (x+4)(x+2) \leq 0, \\ (x+1)(x+5) \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5,5 \leq x \leq 1, \\ -4 \leq x \leq -2, \\ x \leq -5, \\ x \geq -1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5,5 \leq x \leq -5 \\ -1 \leq x \leq 1, \\ -4 \leq x \leq -2. \end{array} \right.$$

Ответ: $[-5,5; -5] \cup [-4; -2] \cup [-1; 1]$.

230. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 4x - 3$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 8 + \frac{16}{t^2} \leq 0$; $\left(t - \frac{4}{t}\right)^2 \leq 0$.

Следовательно, $t - \frac{4}{t} = 0$; $t^2 - 4 = 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = 2$.

Если $t = -2$, то $x^2 - 4x - 3 = -2$; $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

Если $t = 2$, то $x^2 - 4x - 3 = 2$; $x_3 = -1$, $x_4 = 5$.

$$2) x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 5. \end{array} \right.$$

3) Учитывая, что $2 < \sqrt{5} < 3$, получаем $-1 < x_1 < x_2 < 5$, следовательно, $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$ не являются решениями системы. Очевидно, что $x_3 = -1$, $x_4 = 5$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: -1 ; 5 .

231. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 3x + 5$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 18 + \frac{81}{t^2} \leq 0$; $\left(t - \frac{9}{t}\right)^2 \leq 0$.

Следовательно, $t - \frac{9}{t} = 0$; $t^2 - 9 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 3$.

Если $t = -3$, то $x^2 - 3x + 5 = -3$; решений нет.

Если $t = 3$, то $x^2 - 3x + 5 = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

$$2) x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

3) Очевидно $x_2 = 2$ не является решением второго неравенства, а $x_1 = 1$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 1 .

232. 1) При $x^2 - 4 \neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 > 0, \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-2)(x+2) > 0, \\ (x-3)(x+5) \geq 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ x > 2, \\ x \leq -5, \\ x \geq 3; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 3. \end{array} \right.$$

2) При $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{-2; 2\} \cup [3; +\infty)$.

233. 1) При $9 - x^2 \neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x^2 + x - 2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x) > 0, \\ (x+2)(x-1) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3, \\ -2 \leq x \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

2) При $9 - x^2 = 0$ $x = \pm 3$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $[-2; 1] \cup \{-3; 3\}$.

$$234. \frac{x^2}{16} \leq \frac{3-2x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leq 48 - 32x \Leftrightarrow 3x^2 + 32x - 48 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 12) \leq 0 \Leftrightarrow -12 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-12; \frac{4}{3}\right]$.

$$235. \frac{x^2}{8} \leq \frac{2-x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leq 16 - 8x \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+4)\left(x - \frac{4}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-4; \frac{4}{3}\right]$.

$$236. \frac{x^2}{3} \leq \frac{5x-3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 \leq 15x - 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[0,75; 3]$.

$$237. \frac{x^2}{3} \geq \frac{x+14}{12} \Leftrightarrow 12x^2 \geq 3x + 42 \Leftrightarrow 12x^2 - 3x - 42 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 14 \geq 0 \Leftrightarrow 4(x + 1,75)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1,75, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1,75] \cup [2; +\infty)$.

238. Условие, что разность дробей $\frac{58-5x}{3}$ и $\frac{2x+12}{2}$ неотрицательна,

$$\text{означает } \frac{58-5x}{3} - \frac{2x+12}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 116 - 10x - 6x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 80 - 16x \geq 0 \Leftrightarrow 16x \leq 80 \Leftrightarrow x \leq 5. \text{ Наибольшее целое значение } x, \text{ удовлетворяющее исходному условию, равно } 5.$$

Ответ: 5.

239. Условие, что разность дробей $\frac{23-2x}{5}$ и $\frac{3x-11}{4}$ неположительна,

означает $\frac{23-2x}{5} - \frac{3x-11}{4} \leq 0 \Leftrightarrow 92 - 8x - 15x + 55 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 147 - 23x \leq 0 \Leftrightarrow 23x \geq 147 \Leftrightarrow x \geq 6\frac{9}{23}$.

Наименьшее целое значение x , удовлетворяющее условию, равно 7.

Ответ: 7.

240. Данное выражение определено, когда одновременно определены выражения $\sqrt{-15 + 13x - 2x^2}$ и $\frac{1}{x^2 - 4}$.

Обозначим $-15 + 13x - 2x^2 = t$. Так как \sqrt{t} имеет смысл при $t \geq 0$, то $-15 + 13x - 2x^2 \geq 0$; $-2(x - 1,5)(x - 5) \geq 0$; $(x - 1,5)(x - 5) \leq 0$; $x \in [1,5; 5]$.

Дробь $\frac{1}{x^2 - 4}$ определена, если $x^2 - 4 \neq 0$. $x^2 \neq 4$; $x \neq -2$; $x \neq 2$. Следовательно, областью определения исходного выражения являются все значения $x \in [1,5; 2) \cup (2; 5]$.

Ответ: $[1,5; 2) \cup (2; 5]$.

243. 49,5; 47,7; ... Найти ближайший к нулю положительный член прогрессии.

$a_1 = 49,5$, $d = -1,8$.

1) Пусть n — номер искомого члена прогрессии. Тогда $a_n = a_1 + d(n-1)$; $49,5 - 1,8 \cdot (n-1) = 0$; $1,8 \cdot (n-1) = 49,5$; $n-1 = 27,5$; $n = 28,5$. Так как $n \in N$, то $n = 28$.

2) $a_{28} = 49,5 - 27 \cdot 1,8 = 0,9$.

Ответ: 0,9.

244. Определим разность прогрессии: $d = -40,2 + 41,4 = 1,2$. Возьмём $a_1 = -41,4$. Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член

прогрессии. Тогда $\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n+1} \geq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + d(n-1) < 0, \\ a_1 + dn \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -41,4 + 1,2n - 1,2 < 0, \\ -41,4 + 1,2n \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1,2n < 42,6, \\ 1,2n \geq 41,4; \end{cases}$

$\begin{cases} n < 35,5, \\ n \geq 34,5. \end{cases}$

Так как n — натуральное число, то $n = 35$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ находим $a_{35} = -41,4 + 1,2 \cdot 34 = -0,6$.

Ответ: $-0,6$.

245. Определим разность арифметической прогрессии $101,1; 97,2; 93,3; \dots$
 $d = 97,2 - 101,1 = -3,9$. Возьмём $a_1 = 101,1$.

Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член прогрессии, тогда, если $a_{n-1} \geq 0$, то $a_n < 0$ (учитывая, что арифметическая прогрессия убывающая).

$$a_n = a_1 + d(n-1); a_n = 101,1 + 3,9 - 3,9n = 105 - 3,9n;$$

$$a_{n-1} = a_1 + d(n-2); a_{n-1} = 101,1 + 7,8 - 3,9n = 108,9 - 3,9n.$$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n-1} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105 - 3,9n < 0, \\ 108,9 - 3,9n \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3,9n > 105, \\ 3,9n \leq 108,9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 26\frac{12}{13}, \\ n \leq 27\frac{12}{13}. \end{cases}$$

Так как n — натуральное число, то $n = 27$.

$$a_{27} = 105 - 3,9 \cdot 27 = 105 - 105,3 = -0,3.$$

Ответ: $-0,3$.

246. Высоты, на которые поднимался турист каждый час, образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 580, и разностью -40 . Пусть n — количество часов, через которое он достигнет высоты 2500 м, тогда по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии получаем $\frac{(2 \cdot 580 - 40(n-1))n}{2} = 2500$. В результате получаем квадратное

уравнение $20n^2 - 600n + 2500 = 0$. Решаем уравнение и находим корни $n = 5$ и $n = 25$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как $a_{25} = 580 - 40 \cdot 24 < 0$.

Замечание. Отметим, что эту задачу можно легко решить прикидкой.

Ответ: 5 ч.

247. По условию имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 0,75$; $d = 0,5$. Пусть n — количество выстрелов, при которых произошло попадание в мишень. Так как стрелок набрал 99,75 баллов, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = 99,75; \quad \frac{2 \cdot 0,75 + 0,5(n-1)}{2} = 99,75;$$

$$n^2 + 2n - 399 = 0; \quad n_1 = 19, \quad n_2 = -21.$$

Второй корень очевидно не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, 19 выстрелов увенчались попаданиями. Так как всего было 30 выстрелов, то неудачными оказались $30 - 19 = 11$ из них.

Ответ: 11.

248. По условию $a_n = 6n$, $a_n \leq 170$, следовательно, $6n \leq 170$; $n \leq \frac{170}{6}$;
 $n \leq 28\frac{1}{3}$.

Найдём сумму натуральных чисел, которые делятся на 6:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ где } a_1 = 6; a_{28} = 6 \cdot 28, n = 28.$$

$$S_{28} = \frac{6 + 6 \cdot 28}{2} \cdot 28 = (3 + 3 \cdot 28) \cdot 28 = 2436.$$

Ответ: 2436.

250. Из условия следует, что за 1 мин скорость увеличивается на $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Следовательно, получаем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 40 + 15 = 55$, $d = 15$. Тогда $a_7 = a_1 + 6d = 55 + 6 \cdot 15 = 145$.

Ответ: 145 км/ч.

251. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 2$. Найдём n , при котором $S_n = 140$.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \frac{10 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 140; n(4+n) = 140;$$

$n^2 + 4n - 140 = 0$; $n_1 = 10$, $n_2 = -14$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, $n = 10$.

Ответ: 10 дней.

252. Согласно условию, имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 7$, $d = 7$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leq 370$:

$$a_n = a_1 + d(n-1); 7 + 7(n-1) \leq 370; 7n \leq 370; n \leq \frac{370}{7}; n \leq 52\frac{6}{7}.$$

Так как $n \in N$, то $n = 52$. Тогда сумма искомых чисел

$$S_{52} = \frac{2a_1 + d(52-1)}{2} \cdot 52 = (2 \cdot 7 + 7 \cdot 51) \cdot 26 = (14 + 357) \cdot 26 = 371 \cdot 26 = 9646.$$

Ответ: 9646.

253. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 9$, $d = 9$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leq 400$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $9 + 9(n-1) \leq 400$; $9n \leq 400$; $n \leq \frac{400}{9}$; $n \leq 44\frac{4}{9}$. Так

как $n \in N$, то $n = 44$. Следовательно, сумма искомых чисел

$$S_{44} = \frac{2a_1 + d(44-1)}{2} \cdot 44 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 43) \cdot 22 = 9 \cdot 45 \cdot 22 = 8910.$$

Ответ: 8910.

254. Числа, делящиеся на 2 и 3, то есть на 6, это 6; 12; 18; 24; ...

Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$; $d = 6$.

Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leq 170$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $6 + 6n - 6 \leq 170$; $n \leq 28\frac{1}{3}$. Так как $n \in N$, то

$n = 28$. Тогда сумма искомых чисел

$$S_{28} = \frac{2a_1 + d(28-1)}{2} \cdot 28 = (2 \cdot 6 + 6 \cdot 27) \cdot 14 = 2436.$$

Ответ: 2436.

255. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, и вычтем из неё сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые делятся на 7. Так как все натуральные числа от 1 по 160 представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 1, то сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 160, равна

$$S_1 = \frac{1+160}{2} \cdot 160 = 12880. \text{ Натуральные числа, делящиеся на 7, об-}$$

разуют арифметическую прогрессию с разностью 7. Первый член этой прогрессии равен 7, а последний, не превосходящий 160, равен 154. Таким

образом, среди первых 160 натуральных чисел $\frac{154}{7} = 22$ числа, делящихся на 7. Поэтому сумма таких чисел равна

$$S_2 = \frac{7+154}{2} \cdot 22 = 161 \cdot 11 = 1771. \text{ Искомая сумма равна}$$

$$S_1 - S_2 = 12880 - 1771 = 11109.$$

Ответ: 11109.

256. Определим разность прогрессии: $d = 78,3 - 84,1 = -5,8$. По условию $a_1 = 84,1$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n > 0$:

$$a_n = a_1 + d(n-1); \quad 84,1 - 5,8(n-1) > 0; \quad 84,1 - 5,8n + 5,8 > 0; \\ 5,8n < 89,9; \quad n < 15,5. \text{ Следовательно, искомое количество равно 15.}$$

Ответ: 15.

257. Пусть a — первое из чисел, образующих данную арифметическую прогрессию. Тогда $a + d$, $a + 2d$ — второе и третье из этих чисел. По

условию, числа a^2 , $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, знаменатель этой прогрессии $q = \frac{(a+d)^2}{a^2} = \frac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}$;

$((a+d)^2)^2 = a^2(a+2d)^2$; $(a+d)^2 = |a \cdot (a+2d)|$. Учитывая, что $a > 0$, $a+2d > 0$, имеем

$$a^2 + 2ad + d^2 = a(a+2d); \quad a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2ad; \quad d^2 = 0; \quad d = 0.$$

Ответ: 0.

258. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 27$. Так как $a_1 - 1; a_2 - 3, a_3 - 2$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 3)^2 = (a_1 - 1)(a_3 - 2)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда числа $a_2 = a_1 + d$ и $a_3 = a_1 + 2d$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27, \\ (a_1 + d - 3)^2 = (a_1 - 1) \cdot (a_1 + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ (9 - d + d - 3)^2 = (8 - d)(9 - d + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ 36 = (8 - d)(d + 7); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ \begin{cases} d = -4, \\ d = 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1 = 13, \\ d = -4, \\ a_1 = 4, \\ d = 5. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 13, 9, 5 и 2) 4, 9, 14.

Ответ: $\{4, 9, 14\}; \{13, 9, 5\}$.

259. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$. Так как $a_1 + 1; a_2 + 2; a_3 + 11$ — геометрическая прогрессия, то её знаменатель $q = \frac{a_2 + 2}{a_1 + 1} = \frac{a_3 + 11}{a_2 + 2}$; $(a_2 + 2)^2 = (a_1 + 1)(a_3 + 11)$.

Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12, \\ (a_1 + d + 2)^2 = (a_1 + 1) \cdot (a_1 + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ (4 - d + d + 2)^2 = (4 - d + 1)(4 - d + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ 36 = (5 - d)(15 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ d^2 + 10d - 39 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ \begin{cases} d = -13, \\ d = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1 = 17, \\ d = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 17, 4, -9 и 2) 1, 4, 7.

Ответ: {1, 4, 7}; {17, 4, -9}.

260. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Так как $a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 + 1)^2 = (a_1 + 1)(a_3 + 4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d$. Значения a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = (a_1 + 1)(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ (5 - d + d + 1)^2 = (5 - d + 1)(5 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ 36 = (6 - d)(9 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ d^2 + 3d - 18 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ \begin{cases} d = -6, \\ d = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1 = 11, \\ d = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3. \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 11, 5, -1 и 2) 2, 5, 8.

Ответ: {11, 5, -1} и {2, 5, 8}.

261. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Так как $a_1, a_2 - 4, a_3 - 5$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 4)^2 = a_1(a_3 - 5)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30, \\ (a_1 + d - 4)^2 = a_1(a_1 + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ (10 - d + d - 4)^2 = (10 - d)(10 - d + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ 36 = (10 - d)(d + 5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ d^2 - 5d - 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ \begin{cases} d = -2, \\ d = 7; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -2, \\ a_1 = 3, \\ d = 7. \end{cases}$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 3, 10, 17 и 2) 12, 10, 8.

Ответ: {3, 10, 17} и {12, 10, 8}.

262. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии, d — её разность, b — первый член геометрической прогрессии. Так как по условию знаменатель геометрической прогрессии совпадает с её первым членом, то она имеет вид b, b^2, b^3 .

Из условия имеем $a_1 = b, a_2 = b^2 + 1, a_3 = b^3$. Поскольку $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2; a_1 + a_3 = 2a_2$, то $b + b^3 = 2(b^2 + 1); b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0; (b - 2)(b^2 + 1) = 0; b = 2$. Итак, $b = 2, a_1 = b = 2, a_2 = b^2 + 1 = 5$. Следовательно, $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Ответ: 3.

263. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии, b — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда согласно условию числа $a_1, a_2 - 1,5, a_3$ образуют геометрическую прогрессию, и $a_1 = 1,5b; a_2 = 1,5b^2 + 1,5; a_3 = 1,5b^3$. По свойству арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$, то есть $2(1,5b^2 + 1,5) = 1,5b^3 + 1,5b; b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0; (b - 2)(b^2 + 1) = 0; b = 2$. Итак, $a_1 = 1,5b = 3; a_2 = 1,5b^2 + 1,5 = 7,5; d = a_2 - a_1 = 7,5 - 3 = 4,5$.

Ответ: 4,5.

264. Пусть a_1, a_2, \dots, a_5 — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1 = b; a_2 = bq; a_5 = bq^4$. Так как $a_2 = a_1 + d, a_5 = a_1 + 4d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_5 - a_1 = 4(a_2 - a_1)$, то есть $bq^4 - b = 4(bq - b), b(q - 1)(q + 1) = 4b(q - 1); b(q - 1)(q - 3) = 0$. Заметим, что $b \neq 0; q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 3$. Итак, $a_1 = b; a_2 = bq = 3b = 3a_1; d = a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1; a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 6a_1 = 7a_1;$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{7a_1}{a_1} = 7.$$

Ответ: 7.

265. Пусть a_1, a_2, \dots, a_7 — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда

$a_1 = b$; $a_2 = bq$; $a_7 = bq^2$. Так как $a_2 = a_1 + d$; $a_7 = a_1 + 6d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_7 - a_1 = 6(a_2 - a_1)$, то есть $bq^2 - b = 6(bq - b)$; $b(q - 1)(q + 1) = 6b(q - 1)$; $b(q - 1)(q - 5) = 0$. Заметим, что $b \neq 0$, $q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 5$. Итак, $q = 5$; $a_2 = bq = 5b = 5a_1$; $d = a_2 - a_1 = 5a_1 - a_1 = 4a_1$; $a_5 = a_1 + 4d = a_1 + 16a_1 = 17a_1$;
 $\frac{a_5}{a_1} = \frac{17a_1}{a_1} = 17$.

Ответ: 17.

266. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_6 = 5d + a_1$. Так как по условию $a_3 = 7$; $a_6 = 13$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = 7, \\ 5d + a_1 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3d = 6, \\ a_1 = 7 - 2d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Тогда $a_8 = 7d + a_1 = 7 \cdot 2 + 3 = 17$, что соответствует условию. Следовательно, указанная в условии прогрессия существует.

Ответ: да.

267. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_4 = 3d + a_1$; $a_9 = 8d + a_1$. Так как по условию $a_4 = 8$; $a_9 = -7$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 3d + a_1 = 8, \\ 8d + a_1 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -15, \\ a_1 = 8 - 3d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3, \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{12} = 11d + a_1 = 11 \cdot (-3) + 17 = -16$. По условию $a_{12} = -17$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

268. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_8 = 7d + a_1$. Так как по условию $a_3 = -5$; $a_8 = 5$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = -5, \\ 7d + a_1 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = 10, \\ a_1 = 5 - 7d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -9. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{11} = 10d + a_1 = 10 \cdot 2 - 9 = 11$. По условию $a_{11} = 12$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

269. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Так как $a_1, a_2 - 2, a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 2)^2 = a_1(a_3 + 4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24, \\ (a_1 + d - 2)^2 = a_1(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ (8 - d + d - 2)^2 = (8 - d)(8 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ 36 = (8 - d)(12 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ d^2 + 4d - 60 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ \begin{bmatrix} d = -10, \\ d = 6; \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 = 18, \\ d = -10, \\ a_1 = 2, \\ d = 6. \end{bmatrix} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Так как по условию $a_1 > 3$, то искомые числа: 18, 8, -2.

Ответ: 18; 8; -2.

270. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. Так как $a_1 + 2, a_2, a_3 + 1$ — геометрическая прогрессия, то $a_2^2 = (a_1 + 2)(a_3 + 1)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d; a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 18, \\ (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2)(a_1 + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ (6 - d + d)^2 = (6 - d + 2)(6 - d + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ 36 = (8 - d)(7 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ \begin{bmatrix} d = -4, \\ d = 5; \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 = 10, \\ d = -4, \\ a_1 = 1, \\ d = 5. \end{bmatrix} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Так как по условию $a_3 < 3$, то искомые числа: 10; 6; 2.

Ответ: 10; 6; 2.

271. Предположим, что числа $\sqrt{3}, 2, \sqrt{8}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{8}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Ограничимся первым случаем (второй аналогичен).

Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{3}; a_n = 2; a_m = \sqrt{8}$ ($n, m \in \mathbb{N}; n < m; n, m \neq 1$).

$$\text{Тогда } 2 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{3} + (n-1)d; d = \frac{2-\sqrt{3}}{n-1};$$

$$\sqrt{8} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{3} + (m-1)d; d = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{m-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{3}}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{m-1} &\Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = (\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3. \end{aligned}$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\frac{m-1}{n-1} \in Q$, и, значит, число

$4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 \in Q$. Покажем, что это неверно.

Если $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 \in Q$, то $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in Z$,

$q_1 \in N$. Следовательно, $2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{q_1} + 3 \right) \in Q$.

Обозначим $\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{q_1} + 3 \right) = \frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Тогда $2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6} = \frac{p}{q}$;

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}+\sqrt{6} &= \frac{p}{q} + \sqrt{3}; (2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = \left(\frac{p}{q} + \sqrt{3} \right)^2; 8+4\sqrt{12}+6 = \\ &= \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{q} \cdot \sqrt{3} + 3; 8\sqrt{3}+11 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{q}\sqrt{3}; \sqrt{3}\left(8-\frac{2p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2}-11; \end{aligned}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{p^2}{q^2}-11}{8-\frac{2p}{q}} \in Q. \text{ Пусть } \sqrt{3} = \frac{r}{t}, r \in Z, t \in N \text{ и } \frac{r}{t} \text{ — несократимая}$$

дробь, тогда $(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{r}{t}\right)^2$; $3t^2 = r^2$. Следовательно, $r^2 : 3 \Rightarrow r : 3 \Rightarrow$

$r^2 : 9 \Rightarrow t^2 : 3 \Rightarrow t : 3 \Rightarrow \frac{r}{t}$ — сократимая дробь. Пришли к противоречию.

Следовательно, число $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 \notin Q$, а значит, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

272. Предположим, что числа $\sqrt{2}$, 3 , $\sqrt{12}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{2} < 3 < \sqrt{12}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = 3$; $a_m = \sqrt{12}$ ($n, m \in \mathbb{N}$; $n < m$; $n, m \neq 1$). Тогда $3 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{2} + (n-1)d$; $d = \frac{3-\sqrt{2}}{n-1}$.

$$\sqrt{12} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{2} + (m-1)d; d = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{3-\sqrt{2}}{n-1} &= \frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{3\sqrt{12}-3\sqrt{2}+\sqrt{12}\cdot 2-\sqrt{2}\cdot \sqrt{2}}{9-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2}{7}. \end{aligned}$$

Так как $m, n \in \mathbb{N}$; $m, n > 1$, то дробь $\frac{m-1}{n-1} \in \mathbb{Q}$, значит, число

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2}{7} \in \mathbb{Q}. \text{ Однако это неверно (покажите самостоятельно).}$$

Следовательно, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

273. Пусть a_n ($n \in \mathbb{N}$) — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 4d = 13. \end{cases}$$

Отсюда $d = 3$, $a_1 = 1$. Следовательно, $a_2 = 4$; $a_6 = 16$. Легко увидеть, что числа 1, 4 и 16 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 4$.

Ответ: да.

274. Пусть a_n ($n \in \mathbb{N}$) — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 8, \\ a_1 + 7d = 33. \end{cases}$$

Отсюда $5d = 25$; $d = 5$; $a_1 = -2$. Следовательно, $a_2 = 3$; $a_4 = 13$; $a_6 = 23$. Предположим, что эти числа образуют геометрическую прогрессию. Обозначим $b_1 = a_2 = 3$; $b_2 = a_4 = 13$; $b_3 = a_6 = 23$ — члены этой прогрессии. Тогда должно выполняться равенство $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1}$. Однако

$\frac{23}{13} \neq \frac{13}{3}$. Следовательно, предположение о том, что второй, четвёртый и шестой члены заданной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, неверно.

Ответ: нет.

275. Пусть a_1, a_2, \dots, a_6 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_2 + a_4 + a_6 = 18$; $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$. Тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_6 = a_1 + 5d$. Значение чисел a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 18, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d)(a_1 + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 3d + d)(6 - 3d + 3d)(6 - 3d + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 2d)(6 + 2d) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ 36 - 4d^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ \begin{cases} d = 2, \\ d = -2. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, $a_1 = 0$ или $a_1 = 12$.

Ответ: 0; 12.

276. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — члены заданной арифметической прогрессии. По условию $a_1 = -8$, $a_2 = -5$. Следовательно, разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = -5 + 8 = 3$.

Пусть найдётся такое натуральное число n , что $a_n = 4$ есть n -й член данной прогрессии. Так как $a_n = (n - 1)d + a_1$, то должно выполняться $4 = (n - 1) \cdot 3 - 8$; $(n - 1) \cdot 3 = 12$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. Следовательно, число 4 является пятым членом заданной прогрессии.

Ответ: да.

277. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{10} — члены данной арифметической прогрессии. По условию $3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$.

Пусть d — разность данной прогрессии, тогда

$$3(a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d) = a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d + a_1 + 9d;$$

$$3(5a_1 + 10d) = 35d + 5a_1; \quad d = 2a_1.$$

Так как по условию $a_7 = 26$, то $a_1 + 6d = 6(2a_1) + a_1 = 13a_1 = 26$; $a_1 = 2$; $d = 2a_1 = 4$.

Следовательно, $a_3 = 2d + a_1 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$.

Ответ: 10.

278. Пусть a_1, a_2, \dots, a_7 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_5 + a_6 + a_7$.

Пусть d — разность данной прогрессии, тогда

$$2(a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1) = 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1;$$

$$2(6d + 4a_1) = 15d + 3a_1; \quad d = \frac{5}{3}a_1.$$

Так как по условию $a_8 = 38$, то $7d + a_1 =$

$$= 7 \cdot \frac{5}{3}a_1 + a_1 = \frac{38}{3}a_1 = 38; a_1 = 3; d = \frac{5}{3}a_1 = 5.$$

Следовательно, $a_2 = d + a_1 = 5 + 3 = 8$.

Ответ: 8.

279. Для решения задачи найдём сумму натуральных чисел от 100 до 150 включительно, затем сумму чисел в этом же диапазоне, делящихся на 6. Затем из первой суммы вычтем вторую.

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 100$; $d = 1$. Число членов этой прогрессии равно $150 - 100 + 1 = 51$. Сумма первых

$$51 \text{ членов этой прогрессии } S_1 = \frac{(100 + 150) \cdot 51}{2} = 6375.$$

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно, которые делятся на 6, представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 102$; $d = 6$, $a_n = 150$. Определим число членов этой прогрессии:

$$n - 1 = \frac{150 - 102}{6} = 8; n = 9. \text{ Сумма первых 9 членов рассматриваемой}$$

$$\text{прогрессии } S_2 = \frac{(102 + 150) \cdot 9}{2} = 1134. \text{ Разность сумм прогрессий равна } 6375 - 1134 = 5241.$$

Ответ: 5241.

282. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию число отжиманий в первый день $a_1 = 10$, разность прогрессии $d = 2$. Наша задача найти сумму членов этой прогрессии с 19-го по 31-й, то есть $S_{31} - S_{18}$.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Имеем

$$S_{31} = \frac{(2 \cdot 10 + 2(31-1)) \cdot 31}{2} = 1240; S_{18} = \frac{(20 + 2 \cdot 17) \cdot 18}{2} = 486.$$

Искомая величина $S_{31} - S_{18} = 1240 - 486 = 754$.

Ответ: 754.

283. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию количество единиц продукции, произведённой в первом году $a_1 = 50$, разность прогрессии $d = 15$. Необходимо найти сумму членов прогрессии с 8-го по 20-й включительно, то есть $S_{20} - S_7$. Воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}. \text{ Имеем } S_{20} = \frac{(2 \cdot 50 + 15(20-1)) \cdot 20}{2} = 3850;$$

$$S_7 = \frac{(2 \cdot 50 + 15 \cdot 6) \cdot 7}{2} = 665.$$

Искомая величина $S_{20} - S_7 = 3850 - 665 = 3185$.

Ответ: 3185.

284. По условию имеем арифметическую прогрессию $a_n = 3n + 2$; $a_1 = 5$, $d = 3$.

Составим новую арифметическую прогрессию из членов прогрессии a_n с нечётными номерами. Для новой прогрессии получим, $b_1 = a_1 = 5$, $d_b = 6$. Сумма членов исходной прогрессии с нечётными номерами, меньшими 50, равна сумме первых 25 членов полученной прогрессии.

Сумма 25 членов новой прогрессии

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 5 + 6 \cdot 24) \cdot 25}{2} = 1925.$$

Ответ: 1925.

286. Пусть a_1 — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первую минуту, a_2 — за вторую и т. д. Тогда числа a_1, a_2, \dots образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 39$ и $d = -2$.

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первые n минут. Требуется найти число n , при котором

$S_n = 400$ см. Воспользуемся формулой $S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Полу-

$$\text{чим } 400 = \frac{(2 \cdot 39 - 2(n-1))n}{2}; \quad n^2 - 40n + 400 = 0;$$

$$(n - 20)^2 = 0; \quad n = 20.$$

Ответ: 20.

287. Пусть a_1 — количество очков, которое начислили стрелку за первое попадание, a_2 — за второе, и т. д. Числа a_1, a_2, \dots образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 4$ и $d = 2$. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — количество начисленных очков за n попаданий. По условию $S_n = 180$, $n \leq 20$. Требуется найти $20 - n$.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Получим

$$180 = \frac{(2 \cdot 4 + 2(n-1))n}{2}; \quad n^2 + 3n - 180 = 0; \quad n_{1,2} = \frac{-3 \pm 27}{2}, \quad n \in N,$$

$$n = 12; \quad 20 - n = 20 - 12 = 8.$$

Ответ: 8.

288. Запишем сначала сумму первых 17 членов нашей арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью $3d$:

$$S_{17} = \frac{(2a_1 + 3d(17-1)) \cdot 17}{2} = 17 \cdot (a_1 + 24d) = 17a_1 + 408d.$$

Затем запишем сумму первых 23 членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d :

$$S_{23} = \frac{(2a_1 + d(23-1)) \cdot 23}{2} = 23 \cdot (a_1 + 11d) = 23a_1 + 253d.$$

Запишем сумму первых 6 членов:

$$S_6 = \frac{(2a_1 + d(6-1)) \cdot 6}{2} = 6 \cdot \left(a_1 + \frac{5}{2}d\right) = 6a_1 + 15d.$$

Запишем их разность, то есть сумму членов с 7 по 23:

$$S_{7-23} = S_{23} - S_6 = 17a_1 + 238d.$$

По условию задачи $S_{17} - S_{7-23} = 153$. То есть $17a_1 + 408d - 17a_1 - 238d = 153$; $170d = 153$; $d = \frac{153}{170} = \frac{9}{10} = 0,9$.

Ответ: 0,9.

289. Пусть S — искомая сумма, S_1 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые не превосходят 241, S_2 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые делятся на 10 и не превосходят 241, тогда $S = S_1 - S_2$.

Найдём S_1 : $S_1 = \frac{2+240}{2} \cdot 120 = 14520$. Последовательность чисел, кратных 10 и не превосходящих 241, представляет арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10$, $a_n = 240$. Найдём число членов этой прогрессии. Так как она задаётся формулой $a_n = 10n$, то $10n = 240$, $n = 24$.

$$\text{Итак, } S_2 = \frac{10+240}{2} \cdot 24 = 3000.$$

$$\text{Получаем } S = 14520 - 3000 = 11520.$$

Ответ: 11520.

290. Найдём количество натуральных чисел, не превосходящих 130, которые делятся на 17: $\frac{130}{17} = 7,64$. Значит, таких чисел 7. Нечётными из них будут $17 \cdot 1$, $17 \cdot 3$, $17 \cdot 5$, $17 \cdot 7$, то есть, 4 числа. Найдём их сумму: $17 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 17 \cdot 16 = 272$.

Найдём количество нечётных чисел, не превосходящих 130: $\frac{130}{2} = 65$. Это числа 1, 3, 5, ..., 129. Найдём их сумму: $S = \frac{(2 + 2 \cdot (65 - 1)) \cdot 65}{2} = 65^2 = 4225$.

Осталось отнять сумму тех нечётных чисел, которые делятся на 17:
 $4225 - 272 = 3953$.

Ответ: 3953.

292. После вычёркивания всех членов последовательности $b_n = 16 \cdot (-0,5)^n$, имеющих чётные номера, получилась бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_{2n-1} = 16(-0,5)^{2n-1}$. Её знаменатель

$$q = \frac{b_{2(n+1)-1}}{b_{2n-1}} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \frac{16(-0,5)^{2n+1}}{16(-0,5)^{2n-1}} = (-0,5)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{а сумма } S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{16(-0,5)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-8}{\frac{3}{4}} = \frac{-32}{3} = -10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-10\frac{2}{3}$.

$$293. \begin{cases} b_1 + b_3 + b_4 = 279, \\ b_3 + b_5 + b_6 = 31, \\ q > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 = 279, \\ b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = 31, \\ q > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot (1 + q^2 + q^3) = 279, \\ b_1 \cdot q^2(1 + q^2 + q^3) = 31, \\ q > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} q^2 = \frac{1}{9}, \\ q > 0; \end{cases} \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$b_1 = \frac{279}{1 + q^2 + q^3}, b_1 = \frac{279 \cdot 27}{31}, b_1 = 3^5. b_8 = b_1 \cdot q^7, b_8 = 3^5 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

294. Пусть b_1, b_2, \dots, b_6 — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_1 + b_2 + b_3 = 9$; $b_4 + b_5 + b_6 = -72$.

Найдём b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 9, \\ b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = -72; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (1 + q + q^2) = 9, \\ b_1 \cdot q^3 \cdot (1 + q + q^2) = -72; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{9}{1 + q + q^2}, \\ q^3 = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = -2. \end{cases}$$

Следовательно, $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 3 \cdot (-2)^7 = 3 \cdot (-128) = -384$.

Ответ: -384.

295. Пусть b_1, b_2, \dots, b_5 — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_3 = b_2 + 6$, $b_5 = b_3 + 36$, $q > 1$.

Найдём значения b_1 и q из системы

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q + 6, \\ b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^2 + 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q \cdot (q - 1) = 6, \\ b_1 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1) = 36. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое ($q \neq 0, b_1 \neq 0, q \neq \pm 1$), получим $q \cdot (q + 1) = 6, q^2 + q - 6 = 0, q_1 = 2, q_2 = -3$ — не удовлетворяет условию $q > 1$. Таким образом, $q = 2$.

$$b_1 q (q - 1) = 6; 2b_1 = 6; b_1 = 3.$$

$$S_{10} = \frac{b_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 1023 = 3069.$$

Ответ: 3069.

296. Пусть b_1, b_2, \dots, b_9 — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_5 = b_3 + 8; b_9 = b_3 + 728$.

Найдём значения b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^2 + 8, \\ b_1 \cdot q^8 = b_1 \cdot q^2 + 728; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1) = 8, \\ b_1 \cdot q^2 \cdot (q^6 - 1) = 728; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{q^2(q^2 - 1)}, \\ \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{q^2(q^2 - 1)}, \\ \frac{(q^2 - 1)(q^4 + q^2 + 1)}{q^2 - 1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{8}{q^2(q^2 - 1)}, \\ q \neq \pm 1, \\ q^4 + q^2 - 90 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{9}, \\ \begin{cases} q = 3, \\ q = -3. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{9} \cdot 3^6 = 3^4 = 81.$$

Ответ: 81.

297. Так как по условию x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 12x + a = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем

$$x_1 + x_2 = 12, x_1 \cdot x_2 = a.$$

Так как по условию x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 3x + b = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_3 + x_4 = 3, x_3 \cdot x_4 = b$.

$$\text{Решим систему уравнений } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12, \\ x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Учитывая условие, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 положительные и образуют геометрическую прогрессию ($x_1 > 0; q > 0$), получим

$$\begin{cases} x_1 + x_1 \cdot q = 12, \\ x_1 \cdot q^2 + x_1 \cdot q^3 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot (1 + q) = 12, \\ x_1 \cdot q^2 \cdot (1 + q) = 3. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое, получим

$q^2 = \frac{1}{4}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$ — не удовлетворяет условию $q > 0$, значит,

$q = \frac{1}{2}$, тогда из 1-го уравнения системы получим

$$x_1 = \frac{12}{1 + \frac{1}{2}} = 8, x_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, a = x_1 \cdot x_2 = 8 \cdot 4 = 32,$$

$$b = x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot q^2 \cdot x_1 \cdot q^3 = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} = 2.$$

Ответ: $a = 32$, $b = 2$.

298. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x . Пусть b — разность арифметической прогрессии $x, 2qx, 3q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = 2qx, \\ x + 2b = 3q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (2q - 1)x, \\ b = \frac{1}{2} \cdot (3q^2 - 1)x; \end{cases} \Rightarrow 2q - 1 = \frac{1}{2} \cdot (3q^2 - 1);$$

$3q^2 - 4q + 1 = 0$; $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = 1$. Поскольку заданная геометрическая

прогрессия убывает, то $0 < q < 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

299. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x . Пусть b — разность арифметической прогрессии $x, 5qx, 2q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = 5qx, \\ x + 2b = 2q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (5q - 1)x, \\ b = \frac{1}{2} \cdot (2q^2 - 1)x; \end{cases} \Rightarrow 5q - 1 = \frac{1}{2} \cdot (2q^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2q^2 - 10q + 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет лишь значение $q = \frac{5 - \sqrt{23}}{2}$.

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{23}}{2}$.

300. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x . Пусть b — разность арифметической прогрессии $x, qx, \frac{q^2x}{3}$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = qx, \\ x + 2b = \frac{q^2x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (q - 1)x, \\ b = \left(\frac{q^2}{6} - \frac{1}{2}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q - 1 = \frac{q^2}{6} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q^2 - 6q + 3 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 3 + \sqrt{6}$.

Ответ: $3 + \sqrt{6}$.

301. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x . Пусть b — разность арифметической прогрессии $\frac{x}{3}, qx, \frac{q^2x}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + b = qx, \\ \frac{x}{3} + 2b = \frac{q^2x}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \left(q - \frac{1}{3}\right)x, \\ b = \left(\frac{q^2}{4} - \frac{1}{6}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q - \frac{1}{3} = \frac{q^2}{4} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3q^2 - 12q + 2 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Ответ: $2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

302. Обозначим искомые числа через x, y, z . По условию, $x + y + z = 18$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1, y + 2, z + 7$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, $(x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 18, \\ x + z = 2y, \\ (x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнение, получим

систему

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 12, \\ (x + 1)(z + 7) = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 12 - x, \\ (x + 1)(19 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $(x + 1)(19 - x) = 64$, $x^2 - 18x + 45 = 0$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 12 - 3 = 9$, $z_2 = 12 - 15 = -3$. Итак, имеем два набора чисел:

$$1) x = 3, y = 6, z = 9, \quad 2) x = 15, y = 6, z = -3.$$

Второй набор не удовлетворяет условию задачи, так как образует убывающую прогрессию.

Ответ: 3; 6; 9.

303. Обозначим искомые числа через x, y, z . По условию, $x + y + z = 33$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа $x, y - 3, z - 2$ образуют геометрическую прогрессию, следовательно, $x(z - 2) = (y - 3)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 33, \\ x + z = 2y, \\ x(z - 2) = (y - 3)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 33 - 2y$, откуда $y = 11$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 11, \\ x + z = 22, \\ x(z - 2) = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11, \\ z = 22 - x, \\ x(20 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x(20 - x) = 64$, $x^2 - 20x + 64 = 0$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 22 - 4 = 18$, $z_2 = 22 - 16 = 6$.

Итак, имеем два набора чисел: 1) $x = 4, y = 11, z = 18$;
2) $x = 16, y = 11, z = 6$.

Первый набор не удовлетворяет условию, так как образует возрастающую прогрессию.

Ответ: 16; 11; 6.

304. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия ($a \neq 0$), тогда $\frac{2}{3}a, aq, aq^2$ — арифметическая прогрессия, то есть существует число d ,

такое, что $\frac{2}{3}a + d = aq$ и $\frac{2}{3}a + 2d = aq^2$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + d = aq, \\ \frac{2}{3}a + 2d = aq^2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $-\frac{2}{3}a = -2aq + aq^2$; $q^2 - 2q + \frac{2}{3} = 0$; $q = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как по условию геометрическая прогрессия должна убывать, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

305. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия, тогда $a, \frac{3}{2}aq, aq^2$ — арифметическая прогрессия, то есть существует число d , такое, что $\frac{3}{2}aq = a + d$ и $aq^2 = a + 2d$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}aq = a + d, \\ aq^2 = a + 2d. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $aq^2 - 3aq = -a$; $q^2 - 3q + 1 = 0$; $q = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как по условию геометрическая прогрессия должна возрастать, то $q > 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

306. Отличные от нуля числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Поэтому, если x удовлетворяет условию задачи, то $x(5x - 2) = (x + 2)^2$, $5x^2 - 2x = x^2 + 4x + 4$; $4x^2 - 6x - 4 = 0$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Последнее урав-

нение имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 2.

307. Так как числа b_1 , b_2 , b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, то $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Следовательно, искомое значение x удовлетворяет уравнению

$$-x(x-5) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1, 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1$.

Значение x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 1.

308. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d — разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$;

$$a + b + d = b + c; b + c + d = c + a \Rightarrow a + d = c; b + d = a. \text{ Имеем систему}$$

из двух уравнений
$$\begin{cases} a + d = aq^2, \\ aq + d = a. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $a - aq = aq^2 - a$. Поскольку числа a , b , c — различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $q^2 + q - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -2$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a , b , c должны быть различны. Следовательно, $q = -2$.

Ответ: -2 .

309. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d — разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$;

$$c + a + d = a + b; a + b + d = b + c \Rightarrow c + d = b; a + d = c.$$

Имеем систему из двух уравнений
$$\begin{cases} aq^2 + d = aq, \\ a + d = aq^2. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $aq^2 - a = aq - aq^2$. Поскольку числа a , b , c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $2q^2 - q - 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -0,5$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a , b , c должны быть различны. Следовательно, $q = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

310. Пусть b — первое из чисел, образующих данную геометрическую прогрессию. Тогда bq , bq^2 — второе и третье из этих чисел. По условию, числа b^2 , $(bq)^2$, $(bq^2)^2$ образуют арифметическую прогрессию, а значит, $2(bq)^2 = b^2 + (bq^2)^2$. Сокращая на b^2 (из условия положительности b следует, что $b \neq 0$), получаем уравнение $2q^2 = 1 + q^4$; $(q^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$q^2 - 1 = 0$; $q_1 = -1$, $q_2 = 1$. Так как по условию все члены прогрессии положительны, то $q > 0$, поэтому $q = 1$ — единственное значение знаменателя прогрессии, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

Ответ: 1.

311. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a , $a + d$, $a + 3d$ образуют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической прогрессии имеем $(a + d)^2 = a(a + 3d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 3ad$; $d^2 = ad$. Сократив на d ($d \neq 0$), получим $d = a$.

То есть числа a , $a + d$ и $a + 3d$ равны соответственно числам a , $2a$ и $4a$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Ответ: 2.

312. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a^2 , $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ образуют геометрическую прогрессию. Согласно свойству геометрической прогрессии имеем

$(a + d)^4 = a^2(a + 4d)^2$; $(a + d)^2 = |a(a + 4d)|$. Так как $a > 0$, $d > 0$, то $(a + d)^2 = a(a + 4d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$; $d^2 = 2ad$ (сокращаем на $d \neq 0$), $d = 2a$. То есть числа a^2 , $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ равны соответственно числам a^2 , $9a^2$ и $81a^2$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 9.

Ответ: 9.

313. Обозначим искомые числа через x , y , z . По условию $x + y + z = 28$. Так как x , y , z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 2$, $z - 1$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x + 1) + (z - 1) = 2(y + 2)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ x + z = 2y + 4, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 24 - 2y$, откуда $y = 8$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 8, \\ x + z = 20, \\ xz = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8, \\ z = 20 - x, \\ x(20 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(20 - x) = 64$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 20 - 4 = 16$, $z_2 = 20 - 16 = 4$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 4$, $y = 8$, $z = 16$; 2) $x = 16$, $y = 8$, $z = 4$.

Первый набор удовлетворяет условию, а второй — нет, так как числа $16 + 1 = 17$, $8 + 2 = 10$, $4 - 1 = 3$ образуют убывающую прогрессию.

Ответ: 4; 8; 16.

314. Обозначим искомые числа через x, y, z . По условию, $x + y + z = 21$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1, y + 1, z - 2$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x + 1) + (z - 2) = 2(y + 1)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 21, \\ x + z = 2y + 3, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 15, \\ xz = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 15 - x, \\ x(15 - x) = 36. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(15 - x) = 36$, находим $x_1 = 3, x_2 = 12$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 15 - 3 = 12, z_2 = 15 - 12 = 3$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 3, y = 6, z = 12$; 2) $x = 12, y = 6, z = 3$.

Второй набор удовлетворяет условию, а первый — нет, так как числа $3 + 1 = 4, 6 + 1 = 7, 12 - 2 = 10$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: 12; 6; 3.

315. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1 q; b_3 = b_1 q^2$. По условию числа $b_1, b_2, \frac{b_3}{5}$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно,

$$2b_2 = b_1 + \frac{b_3}{5}; \quad 2b_1 q = b_1 + \frac{1}{5} b_1 q^2. \text{ Заметим, что } b_1 \neq 0, q > 1,$$

иначе прогрессия b_1, b_2, b_3 не является возрастающей. Следовательно,

$$2q = 1 + \frac{1}{5} q^2; \quad q^2 - 10q + 5 = 0; \quad q_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{5}. \text{ Значение } q = 5 - 2\sqrt{5}$$

не удовлетворяет условию $q > 1$, а значение $q = 5 + 2\sqrt{5}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $5 + 2\sqrt{5}$.

316. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2$. По условию, числа $b_1, b_2, 0,8b_3$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + 0,8b_3$; $2b_1q = b_1 + 0,8b_1q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0, 0 < q < 1$. Следовательно, $2q = 1 + 0,8q^2$; $4q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Значение $q = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$ не удовлетворяет условию $0 < q < 1$, а значение $q = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{5}}{4}$.

317. Предположим, что такая прогрессия существует. Обозначим её знаменатель через q . Тогда $\frac{b_m}{b_n} = q^{m-n} (m, n \in N, m > n)$. То есть

$\frac{b_5}{b_2} = \frac{12}{4} = 3 = q^3$; $\frac{b_8}{b_5} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = q^3$. Отсюда $3 = \frac{8}{3}$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверно и геометрической прогрессии с указанными членами не существует.

Ответ: нет.

318. Покажем, что данная прогрессия существует. По данным задачи находим

$$\begin{aligned} 1) \frac{b_6}{b_1} &= \frac{8 - 4\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} = \frac{4(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = -4\sqrt{2} = \\ &= (-\sqrt{2})^5; \\ 2) \frac{b_4}{b_1} &= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} = -2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3; \\ 3) \frac{b_6}{b_4} &= \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2(4 - 2\sqrt{2})}{4 - 2\sqrt{2}} = 2 = (-\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{2}$.

Ответ: да.

319. Покажем, что указанная прогрессия существует. По данным задачи находим

$$1) \frac{b_6}{b_1} = \frac{63\sqrt{3}}{-7} = -9\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^5;$$

$$2) \frac{b_4}{b_1} = \frac{21\sqrt{3}}{-7} = -3\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^3;$$

$$3) \frac{b_6}{b_4} = \frac{63\sqrt{3}}{21\sqrt{3}} = 3 = (-\sqrt{3})^2.$$

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{3}$.

Ответ: да.

320. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию

$$\begin{cases} b_2 - b_4 = 3, \\ b_1 - b_3 = 6, \end{cases} \text{ то } \begin{cases} b_1 q - b_1 q^3 = 3, \\ b_1 - b_1 q^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(1 - q^2) = 3; \\ b_1(1 - q^2) = 6. \end{cases}$$

Разделим первое равенство на второе ($b_1 \neq 0, q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 8$. Сумма данной

$$\text{прогрессии } S = \frac{b_1}{1 - q}; \quad S = \frac{8}{1 - 0,5} = 16.$$

Ответ: 16.

321. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию задачи

$$\begin{cases} b_2 + b_4 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_3 = 20, \end{cases} \text{ то } \begin{cases} b_1 q + b_1 q^3 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_1 q^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(1 + q^2) = \frac{20}{3}, \\ b_1(1 + q^2) = 20. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе ($b_1 \neq 0, q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{3}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 18$. Сумма данной

$$\text{прогрессии } S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27.$$

Ответ: 27.

322. Пусть b_1 — первый член прогрессии, q — её знаменатель. Согласно

$$\text{условию } q \neq 0 \text{ и } \begin{cases} b_1 \cdot q^2 = -18, \\ b_1 \cdot q^5 = 486; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = -27, \\ b_1 = -\frac{18}{q^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3, \\ b_1 = -2. \end{cases}$$

Следовательно, сумма первых трёх членов данной прогрессии

$$S_3 = \frac{b_1(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{-2 \cdot (-28)}{-4} = -14.$$

Ответ: -14.

323. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию, $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 q^3 = -32, \\ b_1 q^8 = 1024; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^5 = -32, \\ b_1 = -\frac{32}{q^3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 4. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых четырёх членов данной прогрессии

$$S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{4 \cdot 15}{-3} = -20.$$

Ответ: -20 .

324. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 3$; $q = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{81} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = b_1 q^5$, то число $\frac{1}{81}$ является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

325. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 0,5$; $q = \frac{1}{0,5} = 2$. Так как $64 = 0,5 \cdot 2^7 = b_1 q^7$, то число 64 является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

326. Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{7}{12}; \end{cases} \text{ где } b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0.$$

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$; $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \frac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 21, \\ \frac{q}{b_2} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2 q} = \frac{7}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \frac{7b_2 q}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7b_2^2 q}{12} = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \frac{7b_2 q}{12}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 36$; $b_2 = -6$ или $b_2 = 6$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 6$.

Ответ: 6.

327. Согласно условию, имеем систему уравнений
$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14, \\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{7}{8}; \end{cases}$$
 где $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$.

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1; b_1 = \frac{b_2}{q}, b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \frac{b_2}{q} + b_2 + b_2q = 14, \\ \frac{q}{b_2} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_2q} = \frac{7}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \frac{7b_2q}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7b_2^2q}{8} = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \frac{7b_2q}{8}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 16; b_2 = -4$ или $b_2 = 4$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 4$.

$$\text{Тогда } b_1 b_2 b_3 = \frac{b_2}{q} \cdot b_2 \cdot qb_2 = b_2^3 = 64.$$

Ответ: 64.

328. $y = -\frac{9x + x^3}{3x}.$

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$

$$\text{имеем } -\frac{x \cdot (9 + x^2)}{3x} = -\frac{9 + x^2}{3} = -\frac{1}{3}x^2 - 3.$$

Графиком функции $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; -3)$, не принадлежащей ей, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-3	-1	1	3
y	-6	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	-6

График функции изображён на рисунке 144.

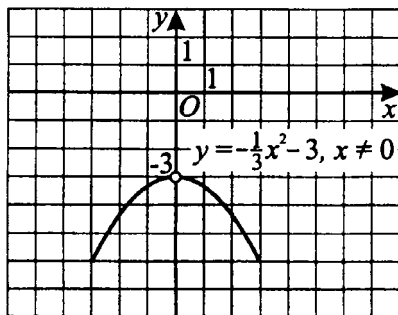


Рис. 144

$$329. y = \frac{8x - x^3}{4x}.$$

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем $\frac{8x - x^3}{4x} = \frac{x \cdot (8 - x^2)}{4x} = \frac{8 - x^2}{4} = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

Графиком функции $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; 2)$, не принадлежащей графику, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	1

График заданной функции изображён на рисунке 145.

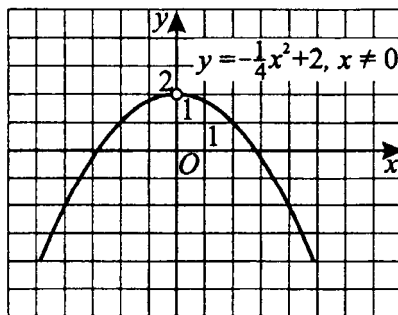


Рис. 145

330. $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{2x + 6}$. Найдём область определения функции,

зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля:

$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. На $D(y)$ имеем

$$y = \frac{x^2 \cdot (x+3) - 4 \cdot (x+3)}{2 \cdot (x+3)} = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x+3)}{2 \cdot (x+3)} = \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

Графиком функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ при $x \neq -3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(0; -2)$.

Так как $x \neq -3$, то точка с координатами $(-3; 2,5)$ не принадлежит графику.

Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	0	-1,5	-1,5	0

График заданной функции изображён на рисунке 146.

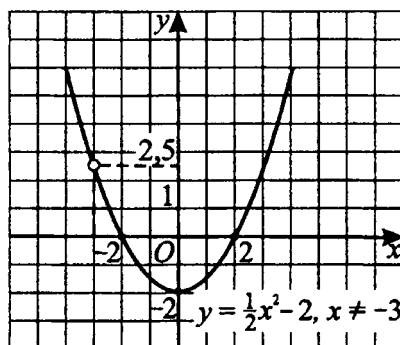


Рис. 146

$$331. y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1, \\ -(x-1)^2 + 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

1) $y = \frac{1}{x}$, если $x \geq 1$. Составим таблицу:

x	1	2	4
y	1	0,5	0,25

2) $y = -(x - 1)^2 + 1$, если $x < 1$. График есть ветвь параболы (ветви направлены вниз, вершина $(1; 1)$).

Составим таблицу:

x	0	-1
y	0	-3

График заданной функции изображён на рисунке. 147.

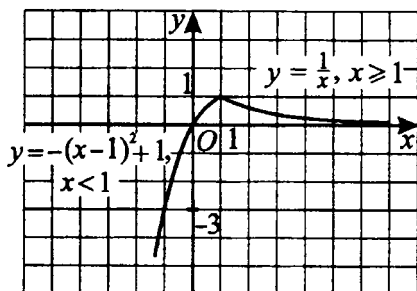


Рис. 147

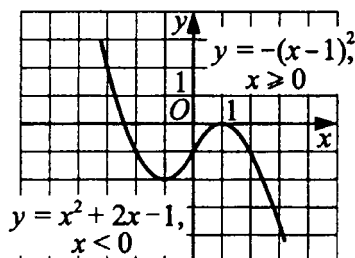


Рис. 148

332. График функции состоит из двух частей:

1) для неотрицательных x — это график функции $y = -(x - 1)^2$ — парабола, ветви направлены вниз, вершина $(1; 0)$;

2) для отрицательных x — это график функции $y = x^2 + 2x - 1$ — парабола, ветви направлены вверх, вершина $(-1; -2)$.

График заданной функции изображён на рис. 148.

333. 1) Графиком функции $y = (x - 3)^2 - 2$, $x \geq 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(3; -2)$.

Дополнительные точки:

x	1	2	3	4	5
y	2	-1	-2	-1	2

2) Графиком функции $y = -2x^2 + 4$, $x < 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(0; 4)$.

Дополнительные точки:

x	-1	-2
y	2	-4

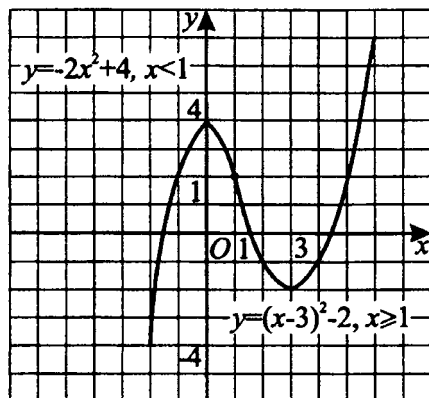


Рис. 149

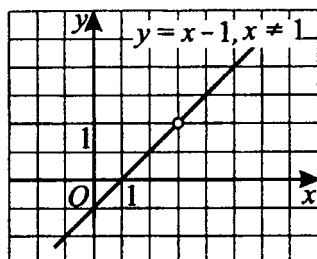


Рис. 150

График заданной функции изображён на рис. 149.

$$334. y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$$

Разложим на множители числитель дроби: $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = x - 1$. Графиком функции является прямая без точки $(3; 2)$.

Составим таблицу:

x	0	1
y	-1	0

График заданной функции изображён на рисунке 150.

$$335. y = \frac{x-4}{x^2-4x}.$$

Разложим на множители знаменатель дроби: $y = \frac{x-4}{x(x-4)}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель не равен нулю.

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty).$$

На найденной области определения функция примет вид $y = \frac{1}{x}$. Так как

$$x \neq 4, \text{ то } y \neq \frac{1}{4}.$$

Графиком функции является гипербола без точки $(4; \frac{1}{4})$.

Составим таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

График заданной функции изображён на рисунке 151.

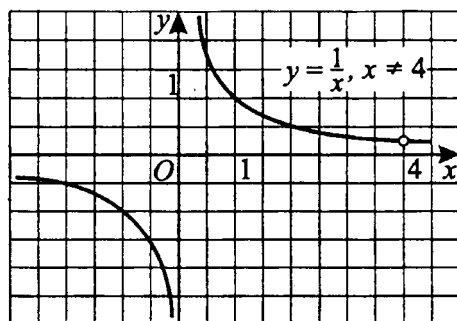


Рис. 151

$$336. y = x + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9 - 12x + 4x^2},$$

$$y = x + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}, y = x + |x-3| + |2x-3|.$$

1) Найдём, при каких значениях x выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю.

$$x - 3 = 0, x = 3; 2x - 3 = 0, x = 1,5.$$

2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 152):

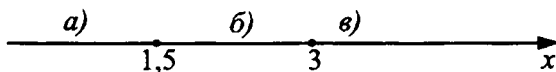


Рис. 152

а) $x < 1,5$. $y = x + 3 - x + 3 - 2x$, $y = -2x + 6$.

x	0	1
y	6	4

б) $1,5 \leq x < 3$. $y = x + 3 - x + 2x - 3$, $y = 2x$.

x	1,5	2
y	3	4

$$в) x \geq 3. x + x - 3 + 2x - 3, y = 4x - 6.$$

x	3	4
y	6	10

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} -2x + 6, & \text{если } x < 1,5, \\ 2x, & \text{если } 1,5 \leq x < 3, \\ 4x - 6, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

График заданной функции изображён на рисунке 153.

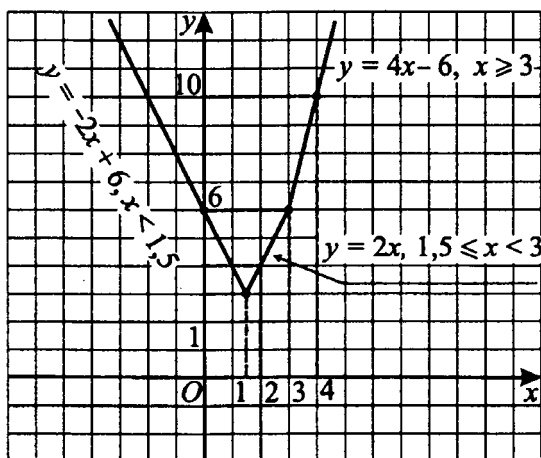


Рис. 153

$$337. y = \sqrt{16x^2 + 56x + 49} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 5x, \\ y = \sqrt{(4x + 7)^2} + \sqrt{(x - 2)^2} - 5x, y = |4x + 7| + |x - 2| - 5x.$$

1) Найдём нули выражений, стоящих в модульных скобках:

$$4x + 7 = 0, x = -1,75; x - 2 = 0, x = 2.$$

2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 154):

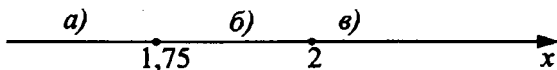


Рис. 154

$$а) x < -1,75. y = -4x - 7 + 2 - x - 5x, y = -10x - 5.$$

x	-2	-2,5
y	15	20

$$6) -1,75 \leq x < 2. y = 4x + 7 + 2 - x - 5x, y = -2x + 9.$$

x	0	1
y	9	7

$$в) x \geq 2. y = 4x + 7 + x - 2 - 5x, y = 5.$$

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} -10x - 5, & \text{если } x < -1,75, \\ -2x + 9, & \text{если } -1,75 \leq x < 2, \\ 5, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

График заданной функции изображён на рисунке 155.

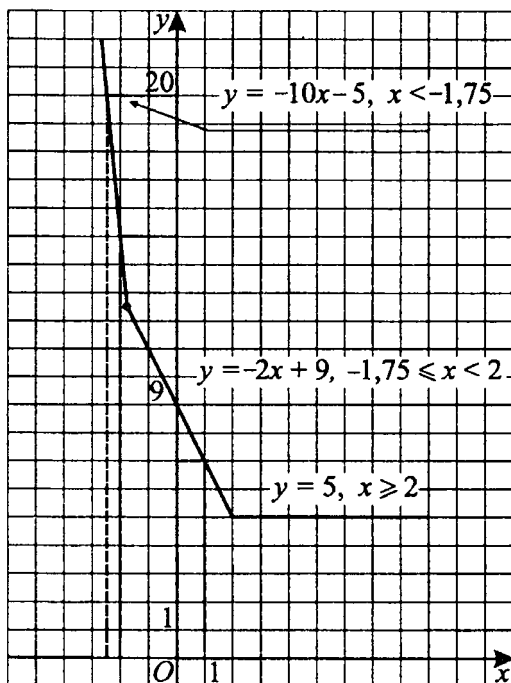


Рис. 155

$$338. y = \frac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4)}{(x - 4)(2 - x)}.$$

Разложим на множители квадратные трёхчлены, стоящие в числителе:

$$y = -\frac{(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)}{(x - 4) \cdot (x - 2)}.$$

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = -(x-3) \cdot (x-1)$ или $y = -x^2 + 4x - 3$.

Графиком функции является парабола с вершиной $(2; 1)$, ветви которой направлены вниз. Точки $(2; 1)$ и $(4; -3)$ не принадлежат параболе.

Дополнительные точки:

x	0	1	3
y	-3	0	0

График заданной функции изображён на рисунке 156.

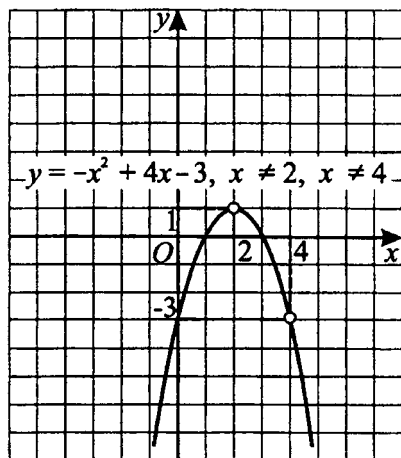


Рис. 156

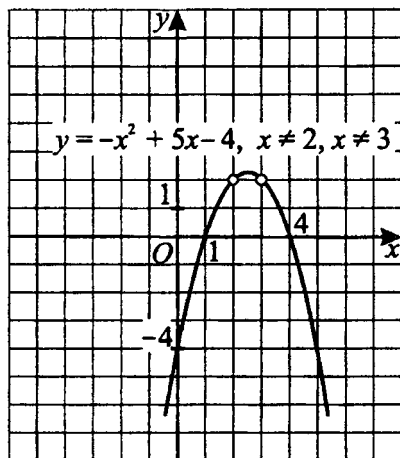


Рис. 157

339. Область определения $D(y)$: $x \neq 2, x \neq 3$.

$$y = -\frac{(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = -(x-1)(x-4).$$

$y = -(x^2 - 5x + 4) = -x^2 + 5x - 4$. Графиком функции является парабола, ветви направлены вверх, вершина в точке с координатами $(2,5; 2,25)$. Точки $(2; 2)$ и $(3; 2)$ не принадлежат параболе.

График заданной функции изображён на рисунке 157.

341. По условию $a > 0$, поэтому данную функцию можно представить в виде $y = a \left| x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right|$. Из рисунка 158 следует, что квадратный трёх-

член $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ имеет корни $x_1 = -1, x_2 = 5$. Отсюда, согласно теореме Виета, получаем $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -4, \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = -5$, то есть $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - 4x - 5$. Вершина параболы $y = x^2 - 4x - 5$ имеет абс-

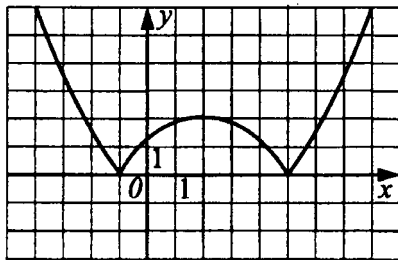


Рис. 158

числу $x = \frac{-(-4)}{2} = 2$ и ординату $y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$. С другой стороны,

из рисунка 158 следует, что вершина параболы $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

имеет ординату, равную -2 . Следовательно, $a \cdot (-9) = -2$, $a = \frac{2}{9} \Rightarrow$

$$b = \frac{b}{a} \cdot a = (-4) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{8}{9}, c = \frac{c}{a} \cdot a = (-5) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{10}{9}.$$

Ответ: $a = \frac{2}{9}, b = -\frac{8}{9}, c = -\frac{10}{9}$.

342. Угловые коэффициенты k_1 и k_2 , отличные от нуля, перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению $k_1 \cdot k_2 = -1$. Поэтому множество прямых, перпендикулярных прямой $y = 0,125x$, имеет вид $y = -8x + b$, где b — произвольное действительное число. Для того чтобы прямая $y = -8x + b$ касалась параболы $y = x^2 - 1$, уравнение $x^2 - 1 = -8x + b$ должно иметь единственное решение. Тогда трёхчлен $x^2 + 8x - 1 - b$ должен быть полным квадратом. Следовательно, абсцисса точки касания $x = -4$, тогда ордината $y = (-4)^2 - 1 = 15$.

Ответ: $(-4; 15)$.

343. Так как по условию прямая $y = 0,25x$ перпендикулярна прямой

$y = kx + b$, то $k = -\frac{1}{0,25} = -4$, значит, $y = -4x + b$. Найдём b из условия,

что эта прямая касается параболы $y = 4x^2 + 8x + 7$, то есть уравнение $4x^2 + 8x + 7 = -4x + b$ имеет один корень (два равных).

Имеем $4x^2 + 12x + 7 - b = 0$, $D = 0$. $D = 144 - 112 + 16b = 0$, $b = -2$.

Уравнение прямой примет вид $y = -4x - 2$.

Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 4x^2 + 8x + 7, & 4x^2 + 8x + 7 = -4x - 2, & 4x^2 + 12x + 9 = 0, \\ y = -4x - 2, \end{cases}$$

$$(2x + 3)^2 = 0, x = -\frac{3}{2}, y = 4.$$

Ответ: $(-\frac{3}{2}; 4)$.

344. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 3x - 2$, имеет вид $y = 3x + b$.

б) Вычислим b , зная, что прямая $y = 3x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 5$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 3x + b$ имело один корень (два равных).

$$2x^2 - 6x + 5 - b = 0, D = 0, D = 36 - 8 \cdot 5 + 8b = 8b - 4, 8b - 4 = 0, b = \frac{1}{2}.$$

$y = 3x + \frac{1}{2}$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x + \frac{1}{2}, & 2x^2 - 3x + 5 = 3x + \frac{1}{2}, & 2x^2 - 6x + 4,5 = 0, \\ y = 2x^2 - 3x + 5, \end{cases}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0, (2x - 3)^2 = 0, x = \frac{3}{2} = 1,5, y = 3 \cdot 1,5 + 0,5 = 5.$$

$(1,5; 5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1,5; 5)$.

345. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = x + 3$, имеет вид $y = x + b$.

б) Вычислим b , зная, что прямая $y = x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 6 = x + b$ имело один корень (два равных).

$$2x^2 - 4x + 6 - b = 0, D = 0, D = 16 - 48 + 8b = -32 + 8b, -32 + 8b = 0, b = 4.$$

$y = x + 4$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 4, & 2x^2 - 3x + 6 = x + 4, & 2x^2 - 4x + 2 = 0, & x^2 - 2x + 1 = 0, \\ y = 2x^2 - 3x + 6; \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 = 0, x = 1, y = 5.$$

$(1; 5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1; 5)$.

346. По условию прямая $y = 6x$ параллельна прямой $y = kx + b$. Тогда $k = 6$, и прямая имеет вид $y = 6x + b$. Она касается параболы $y = x^2 + 5$. Значит, уравнение $x^2 + 5 = 6x + b$ имеет один корень (два равных).
 $x^2 - 6x + 5 - b = 0$, $D = 0$, $D = 36 - 4 \cdot (5 - b)$, $36 - 20 + 4b = 0$, $4b = -16$,
 $b = -4$.

Уравнение касательной — $y = 6x - 4$.

Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y = 6x - 4. \end{cases} \quad x^2 + 5 = 6x - 4, x^2 - 6x + 9 = 0, (x - 3)^2 = 0,$$

$$x = 3, y = 14.$$

Ответ: (3; 14).

347. 1) Так как касательная параллельна прямой $y = 14x$, то её уравнение $y = 14x + b$.

Вычислим b , зная, что прямая $y = 14x + b$ касается параболы $y = x^2 + 9$, то есть уравнение $x^2 - 14x + 9 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 196 - 4 \cdot (9 - b)$, $196 - 36 + 4b = 0$, $4b = -160$, $b = -40$.

Уравнение касательной — $y = 14x - 40$.

2) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 9, \\ y = 14x - 40. \end{cases} \quad x^2 + 9 = 14x - 40, x^2 - 14x + 49 = 0, (x - 7)^2 = 0,$$

$$x = 7, y = 58.$$

Ответ: (7; 58).

348. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 4x$, имеет вид $y = 4x + b$.

б) Вычислим b , зная, что прямая $y = 4x + b$ касается параболы $y = x^2 + 3$, то есть уравнение $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 16 - 4 \cdot (3 - b)$, $16 - 12 + 4b = 0$, $4 + 4b = 0$,
 $b = -1$.

Уравнение касательной — $y = 4x - 1$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 3, \\ y = 4x - 1, \end{cases} \quad x^2 + 3 = 4x - 1, x^2 - 4x + 4 = 0, (x - 2)^2 = 0, x = 2, y = 7.$$

Ответ: (2; 7).

349. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 2x$, имеет вид $y = 2x + b$.

б) Вычислим b , зная, что прямая $y = 2x + b$ касается параболы $y = x^2 - 14$, то есть уравнение $x^2 - 2x - 14 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 4 + 4 \cdot (14 + b) = 60 + 4b$, $60 + 4b = 0$, $b = -15$.

Уравнение касательной — $y = 2x - 15$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 14, \\ y = 2x - 15. \end{cases} \quad x^2 - 14 = 2x - 15, x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0,$$

$$x = 1, y = -13.$$

Ответ: $(1; -13)$.

350. Запишем уравнение параболы со старшим коэффициентом, равным 1: $y = x^2 + bx + c$.

По условию парабола касается прямых $y = x$ и $y = 1 - x$, тогда уравнения $x^2 + bx + c = x$ и $x^2 + bx + c = 1 - x$ имеют по одному решению:

$$\begin{cases} x^2 + (b - 1)x + c = 0, \\ x^2 + (b + 1)x + c = 1. \end{cases}$$

Значит, дискриминант каждого квадратного уравнения равен 0.

$$1) D = (b - 1)^2 - 4c = 0; \quad 2) D = (b + 1)^2 - 4(c - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} (b - 1)^2 = 4c, \\ (b + 1)^2 + 4 = 4c, \end{cases} \quad (b - 1)^2 = (b + 1)^2 + 4, b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1 + 4,$$

$$b = -1, \text{ тогда } c = 1.$$

Таким образом, $y = x^2 - x + 1$.

Ответ: $y = x^2 - x + 1$.

351. Найдём b и c , используя данные задачи. Так как парабола касается прямых $y = x + 1$, $y = 5 - 3x$, то каждое из уравнений $-x^2 + bx + c = x + 1$ и $-x^2 + bx + c = 5 - 3x$ имеет единственный корень (два равных).

Следовательно, дискриминанты уравнений $x^2 + (1 - b)x + 1 - c = 0$, $x^2 - (3 + b)x + 5 - c = 0$ равны нулю. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} (1 - b)^2 - 4(1 - c) = 0, \\ (3 + b)^2 - 4(5 - c) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b + b^2 - 4 + 4c = 0, \\ 9 + 6b + b^2 - 20 + 4c = 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 4c = 3, \\ b^2 + 6b + 4c = 11. \end{cases} \quad \text{Вычитая из нижнего уравнения верхнее, приходим к уравнению } 8b = 8 \Rightarrow b = 1.$$

Подставляя найденное значение b в первое уравнение последней системы, находим $1 - 2 + 4c = 3 \Rightarrow c = 1$.

Поэтому искомое уравнение параболы — $y = -x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = -x^2 + x + 1$.

352. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2|x| + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1. \end{cases}$$

$$1) x \geq 0; \begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1; \end{cases} \quad 2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1; 4x^2 - 2 = 0; \\ x^2 - \frac{1}{2} = 0; \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Условию $x \geq 0$ удовлетворяет $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1,$

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} + 1\right).$$

$$2) x < 0, \begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1, \end{cases} \quad -2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 2x - 1 = 0, \\ D = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2,$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \text{ (не удовлетворяет условию } x < 0),$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \text{ (удовлетворяет условию } x < 0), y_3 = 1 + \sqrt{3} + 1 = 2 + \sqrt{3},$$

$$B\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; 2 + \sqrt{3}\right).$$

2. Найдём координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{4} = \\ = \frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4},$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}; \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right).$$

353. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = 1 - |x|, \\ y = 2x^2 + x - 1. \end{cases}$$

$$1) x \geq 0, \begin{cases} y = 1 - x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases} \quad 2x^2 + x - 1 = 1 - x, 2x^2 + 2x - 2 = 0,$$

$x^2 + x - 1 = 0, D = 1 + 4 = 5, x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ не удовлетворяет условию $x \geq 0;$

$$y_1 = \frac{2 + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = 1 + x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases} \quad 2x^2 + x - 1 = 1 + x, \quad 2x^2 - 2 = 0, \quad x^2 - 1 = 0,$
 $(x - 1) \cdot (x + 1) = 0, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1$ не удовлетворяет условию $x < 0$;
 $y_3 = 1 - 1 = 0, \quad B(-1; 0).$

2. Найдём координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} - 2}{4} = \frac{\sqrt{5} - 3}{4}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{5} - 3}{4}, \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \right).$

354. Запишем уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа и $a \neq 0$.

По условию известно, что точки с координатами $(-1; -5)$, $(0; -4)$ и $(1; 1)$ лежат на этой параболе, значит, $y(-1) = -5$, $y(0) = -4$, $y(1) = 1$.

Найдём числа a, b, c , решив систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -5, \\ c = -4, \\ a + b + c = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 4 = -5, \\ c = -4, \\ a + b - 4 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1, \\ c = -4, \\ a + b = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -4. \end{cases}$$

Уравнение параболы примет вид $y = 2x^2 + 3x - 4$.

Найдём координаты вершины.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad x_0 = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4},$$

$$y_0 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{9 - 18 - 32}{8} = -\frac{41}{8}.$$

$\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$ — искомые координаты вершины параболы.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right).$

356. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2$.

1) С осью Ox :

$-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$; $-x^2(x + 2) + (x + 2) = 0$; $(x + 2)(1 - x^2) = 0$;
 $x + 2 = 0, \quad x_1 = -2$; $1 - x^2 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$. Таким образом, $(-2; 0)$,
 $(-1; 0)$, $(1; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции
 $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Ox .

2) С осью Oy : $y(0) = 2$, поэтому $(0; 2)$ — координаты точки пересечения графика данной функции с осью Oy .

Ответ: $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 2)$.

357. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 16x^2 + 12x - 2$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Ox , имеет координаты $(x; -y)$ и лежит на прямой $y = 2x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = y, \\ 2x + 5 = -y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = -2x - 5, \\ y = -2x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 14x + 3 = 0, \\ y = -2x - 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$16x^2 + 14x + 3 = 0, \quad \frac{D}{4} = 49 - 48 = 1;$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} = -0,375, \quad x_2 = \frac{-7-1}{16} = -0,5;$$

$$y_1 = -2 \cdot (-0,375) - 5 = -4,25, \quad y_2 = -2 \cdot (-0,5) - 5 = -4.$$

$(-0,375; -4,25)$ и $(-0,375; 4,25)$, $(-0,5; -4)$ и $(-0,5; 4)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $(-0,375; -4,25)$, $(-0,375; 4,25)$; 2) $(-0,5; -4)$, $(-0,5; 4)$.

358. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 18x^2 - 33x$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Oy , имеет координаты $(-x; y)$ и лежит на прямой $y = 6x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 18x^2 - 33x = y, \\ -6x + 5 = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 33x = -6x + 5, \\ y = -6x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 27x - 5 = 0, \\ y = -6x + 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$18x^2 - 27x - 5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 + 360}}{36}; \quad x_{1,2} = \frac{27 \pm 33}{36}; \quad x_1 = \frac{5}{3},$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}; y_1 = -6 \cdot \frac{5}{3} + 5 = -5, y_2 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 5 = 6.$$

$\left(\frac{5}{3}; -5\right)$ и $\left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; $\left(-\frac{1}{6}; 6\right)$ и $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $\left(\frac{5}{3}; -5\right), \left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{6}; 6\right), \left(\frac{1}{6}; 6\right)$.

359. Обозначим $f(x) = -4x^4 + 10x^2 - 3$. Точка B является одной из точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и оси Ox . Значит, $y_B = 0$. Для нахождения x_B решим уравнение $f(x) = 0$. Сделаем замену $t = x^2 \geq 0$, тогда уравнение $f(x) = 0$ примет вид

$$-4t^2 + 10t - 3 = 0, 4t^2 - 10t + 3 = 0, t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{4},$$

$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \geq 0, t_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{4} \geq 0.$$

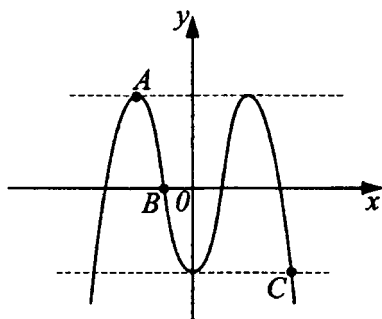


Рис. 159

Поэтому $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5 + \sqrt{13}}}{2}$, $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{5 - \sqrt{13}}}{2}$. В силу расположения точки B следует, что x_B — наибольшее отрицательное число среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4 . Значит, $x_B = -\frac{\sqrt{5 - \sqrt{13}}}{2}$.

Заметим, что y_A соответствует наибольшему значению функции $y = f(x)$. Для нахождения этого значения выделим полный квадрат в представлении функции:

$$-4x^4 + 10x^2 - 3 = -4 \left(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{5}{4} \right) - 3 =$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \left(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} \right) + 4 \cdot \frac{25}{16} - 3 = \\
 & = -4 \left(x^2 - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{13}{4}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) = -4 \left(x^2 - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{13}{4}$. Из полученного представления вытекает, что наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно $\frac{13}{4}$, так как для всех действительных x справедливо неравенство

$-4 \left(x^2 - \frac{5}{4} \right)^2 \leq 0$. Причём это наибольшее значение достигается в том случае, когда $x^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда из расположения точки A в

левой полуплоскости следует, что $x_A = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ и соответственно $y_A = \frac{13}{4}$.

Определим координаты точки C . Из рисунка 159 следует, что $y_C = f(0) = -3$. Тогда опять же из рисунка 159 вытекает, что x_C равняется положительному корню уравнения $f(x) = -3$. Решим его.

$$\begin{aligned}
 & -4x^4 + 10x^2 - 3 = -3, \quad -4x^4 + 10x^2 = 0, \quad x^2(4x^2 - 10) = 0, \quad x_1 = 0, \\
 & x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ Значит, } x_C = \frac{\sqrt{10}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{13}{4} \right), B \left(-\frac{\sqrt{5 - \sqrt{13}}}{2}; 0 \right), C \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; -3 \right).$$

360. Построим график функции $y = ||x + 1| - 2|$ в несколько этапов.

1. Графиком функции $y = x + 1$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

2. График функции $y = |x + 1|$ получается из графика функции $y = x + 1$ симметричным отражением части прямой, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

3. График функции $y = |x + 1| - 2$ может быть получен из графика функции $y = |x + 1|$ сдвигом оси абсцисс на две единицы вверх.

4. График функции $y = ||x + 1| - 2|$ получается из графика функции $y = |x + 1| - 2$ симметричным отражением части графика, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

График заданной функции изображён на рис. 160.

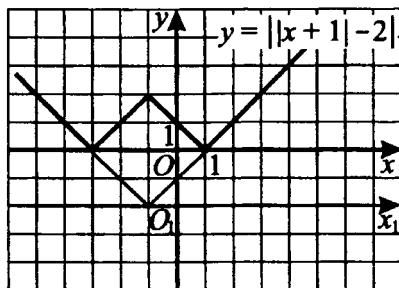


Рис. 160

361. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = 4$, то $x_0 = -\frac{b}{2a} = 0$, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек, через которые проходит парабола, получим систему $\begin{cases} c = 4, \\ 9a + c = -14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, \\ 9a = -14 - c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, \\ a = -2. \end{cases}$

Следовательно, $y = -2x^2 + 4$. Найдём теперь абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox : $-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$.

362. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = -12$, то $x_0 = -\frac{b}{2a} = 0$, следовательно, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек $(0; -12)$ и $(-1; -9)$, через которые проходит парабола, получим систему $\begin{cases} c = -12, \\ a + c = -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -12, \\ a = 3; \end{cases}$ следовательно, $y = 3x^2 - 12$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox : $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: $(2; 0)$, $(-2; 0)$.

363. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 4$, $y_0 = -28$, то $x_0 = -\frac{b}{2a} = 4$; $b = -8a$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 - 8ax + c$. Подставив координаты точек $(0; 4)$ и $(4; -28)$, через которые проходит парабола, получим $c = 4$; $16a - 32a + c = -28$;

$a = \frac{28+c}{16} = 2$, следовательно, $y = 2x^2 - 16x + 4$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox : $2x^2 - 16x + 4 = 0$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$.

Ответ: $(4 + \sqrt{14}; 0)$, $(4 - \sqrt{14}; 0)$.

364. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 6$, $y_0 = 33$, то

$x_0 = -\frac{b}{2a} = 6$; $b = -12a$. Итак, уравнение параболы имеет вид

$y = ax^2 - 12ax + c$. Подставив координаты точек $(0; -3)$ и $(6; 3)$, через которые проходит парабола, получим $c = -3$; $36a - 72a + c = 33$;

$a = \frac{c-33}{36} = -1$, следовательно, $y = -x^2 + 12x - 3$. Найдём абсциссы

точек пересечения параболы с осью Ox : $-x^2 + 12x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{33}$.

Ответ: $(6 + \sqrt{33}; 0)$, $(6 - \sqrt{33}; 0)$.

365. Ключевые идеи решения. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2 , является графиком функции

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. 2. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox , касается этой параболы в её вершине.

1. Парабола, указанная в условии, является графиком функции $y = a(x - 2)(x + 6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = 24$, таким образом, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид $y = -2x^2 - 8x + 24$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \frac{8}{-4} = -2$ и ординатой $y_0 = y(-2) = 32$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x , является прямая $y = 32$.

Ответ: $y = 32$.

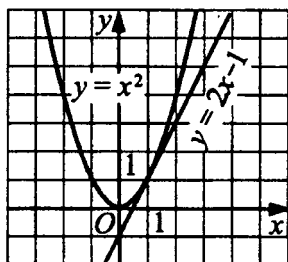
366. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$, является графиком функции $y = a(x + 2)(x - 6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = -9$, таким образом, $a = 0,75$, и уравнение параболы имеет вид $y = 0,75x^2 - 3x - 9$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \frac{3}{1,5} = 2$ и ординатой $y_0 = y(2) = -12$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x , является прямая $y = -12$.

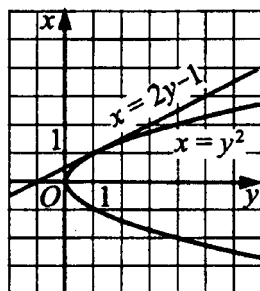
Ответ: $y = -12$.

367. По условию прямая $y = 2x - 1$ касается параболы $y = x^2$ (см. рис. 161 а). Заметим, что если в уравнениях, задающих эти функции, поменять местами переменные (что соответствует симметричному отражению исходного графика относительно прямой $y = x$), то получим искомую касательную к кривой $x = y^2$ в точке с координатами $(1; 1)$ (см. рис. 161 б).

Значит, она задаётся уравнением $x = 2y - 1$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



а)



б)

Рис. 161

Ответ: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

368. Пусть прямая $x = ky + b$ касается параболы $x = y^2$ в точке с координатами $x = 1, y = -1$. Это означает, что $-k + b = 1$ и уравнение $y^2 = ky + b$ имеет ровно одно решение, то есть $D = 0$; $D = k^2 + 4b = 0$. Учитывая равенство $-k + b = 1$, получим $D = k^2 + 4(1 + k) = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 = 0$. Отсюда $k = -2, b = -1$, то есть $x = -2y - 1$ является искомой прямой.

Запишем уравнение этой прямой — $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$.

369. По формуле расстояния между двумя точками имеем

$OA = \sqrt{(8 - 4)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен 5, и она определяется уравнением $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox : $(x - 4)^2 + 9 = 25$. Решим последнее уравнение: $(x - 4)^2 = 16$, $\begin{cases} x - 4 = -4, \\ x - 4 = 4; \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = 8.$

Аналогично ординаты точек пересечения окружности с осью Oy удовлетворяют уравнению $16 + (y - 3)^2 = 25$ (в уравнении окружности полагаем $x = 0$). Имеем $(y - 3)^2 = 9$, $\begin{cases} y - 3 = -3, \\ y - 3 = 3; \end{cases} \quad y_1 = 0, y_2 = 6$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(0; 0)$ и $(8; 0)$, а ось Oy в точках $(0; 0)$ и $(0; 6)$.

Ответ: $(0; 0), (8; 0), (0; 6)$.

370. По формуле расстояния между двумя точками имеем

$OA = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен $\sqrt{5}$, и она определяется уравнением

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox :

$(x - 2)^2 + 4 = 5$. Решим последнее уравнение: $(x - 2)^2 = 1$, $\begin{cases} x - 2 = -1, \\ x - 2 = 1; \end{cases}$

$x_1 = 1, x_2 = 3$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(1; 0)$ и $(3; 0)$. Поскольку уравнение данной окружности симметрично относительно x и y , то точками пересечения этой окружности с осью Oy являются точки $(0; 1)$ и $(0; 3)$.

Ответ: $(1; 0), (3; 0), (0; 1), (0; 3)$.

371. $y = \frac{x^2 - 25}{10 - 2x}$. Областью определения данной функции являются все

x , при которых $10 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При $x \neq 5$

имеем $\frac{x^2 - 25}{10 - 2x} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{2(5 - x)} = -0,5 \cdot (x + 5)$.

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0,5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что

$y \neq -0,5(5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

372. $y = \frac{25 - x^2}{2x - 10}$. Областью определения данной функции являются все

x , при которых $2x - 10 \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При

$x \neq 5$ имеем $\frac{25 - x^2}{2x - 10} = \frac{(5 - x)(5 + x)}{2(x - 5)} = -0,5 \cdot (x + 5)$. Таким образом,

множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0,5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что $y \neq -0,5 \cdot (5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

373. Ключевые идеи решения.

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2 , является графиком функции $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox , касается этой параболы в её вершине.

2. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, является графиком функции $y = a(x + 2)(x - 4) = ax^2 - 2ax - 8a$, где $a \neq 0$.

3. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_B = \frac{2a}{2a} = 1$ и ординатой $y_B = y(1) = -9a$. Значит, касательной к параболе, параллельной оси Ox , является прямая $y = -9a$. По условию, парабола касается прямой $y = -18$, следовательно, $-9a = -18$, $a = 2$, и уравнение параболы имеет вид $y = 2x^2 - 4x - 16$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = -16$.

Ответ: $(0; -16)$.

374. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$, является графиком функции $y = a(x + 5)(x - 3) = ax^2 + 2ax - 15a$, где $a \neq 0$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \frac{-2a}{2a} = -1$ и ординатой $y_0 = y(-1) = -16a$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси Ox , является прямая $y = -16a$. По условию, парабола касается прямой $y = 32$, значит, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид $y = -2x^2 - 4x + 30$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = 30$.

Ответ: $(0; 30)$.

375. Графиком функции $y = 6 - 3x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	0	2
y	6	0

Построим прямую (см. рис. 162).

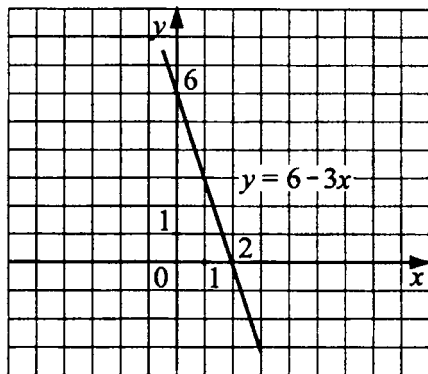


Рис. 162

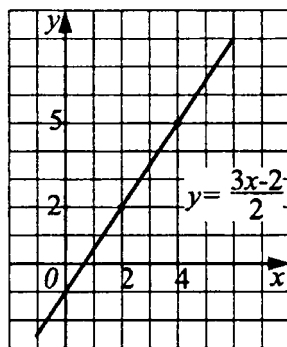


Рис. 163

Решим неравенство: $1,5 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 1,5 \leq 6 - 3x \leq 9 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -4,5 \leq -3x \leq 3 \Leftrightarrow 1,5 \geq x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1,5.$

Ответ: $-1 \leq x \leq 1,5.$

376. Графиком функции $y = \frac{3x - 2}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	2	4
y	2	5

Построим прямую (см. рис. 163).

Решим неравенство: $-1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{3x - 2}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$

Ответ: $0 \leq x \leq 2.$

377. Для построения графика функции $y = \left| \frac{2 - x}{4} \right|$ рассмотрим отдельно случаи, когда $2 - x \geq 0$ и $2 - x < 0$.

1) Если $2 - x \geq 0$ ($x \leq 2$), то $y = \frac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами (0; 0,5) и (2; 0).

2) Если $2 - x < 0$ ($x > 2$), то $y = -\frac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами (2; 0) и (4; 0,5).

График заданной функции изображён на рисунке 164.

Решим неравенство $0 \leq y < 1$. Получаем $0 \leq \left| \frac{2 - x}{4} \right| < 1;$
 $0 \leq |2 - x| < 4$. Так как неравенство $|2 - x| \geq 0$ выполняется для всех x , то

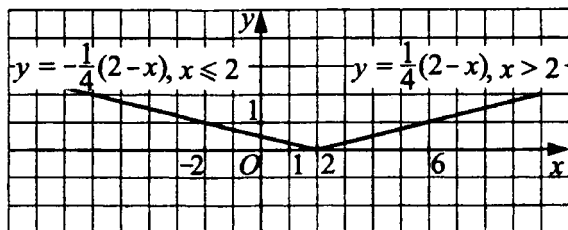


Рис. 164

остаётся решить неравенство $|2 - x| < 4$; $-4 < 2 - x < 4$; $-6 < -x < 2$; $-2 < x < 6$.

Ответ: $-2 < x < 6$.

378. Построим график функции $y = \left| \frac{3+x}{6} \right|$. Отдельно рассмотрим случаи:

1) $3 + x \geq 0$, тогда $y = \frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами $(0; 0,5)$, $(9; 2)$ (рис. 165).

2) $3 + x < 0$, тогда $y = -\frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами $(-3; 0)$, $(-6; 0,5)$.

Решим неравенство $-1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \left| \frac{3+x}{6} \right| \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq |3+x| \leq 12$.

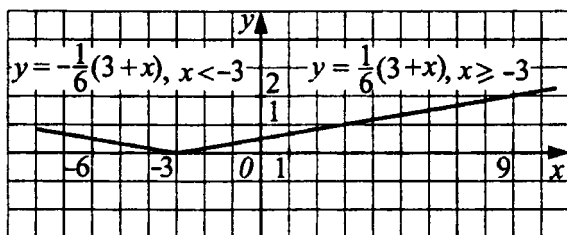


Рис. 165

Так как неравенство $|3 + x| \geq -6$ выполняется для всех x , то остаётся неравенство $|3 + x| \leq 12 \Leftrightarrow -12 \leq 3 + x \leq 12 \Leftrightarrow -15 \leq x \leq 9$.

Ответ: $-15 \leq x \leq 9$.

379. Графиком функции $y = 3 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	1	-1

Построим прямую (см. рис. 166).

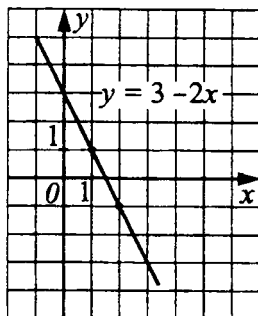


Рис. 166

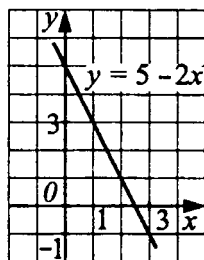


Рис. 167

Так как функция $y = 3 - 2x$ — непрерывная и убывающая, то $y(5) < y < y(-2) \Leftrightarrow -7 < y < 7$.

Ответ: $-7 < y < 7$.

380. Графиком функции $y = 5 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	3
y	3	-1

Построим прямую (см. рис. 167).

Так как $y(x)$ — непрерывная и убывающая функция, то из $-1 < x < 3$ следует $y(3) < y(x) < y(-1)$. Значит, $-1 < y < 7$.

Ответ: $-1 < y < 7$.

381. Графиком функции $y = \frac{5-x}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$ является прямая. Найдём

две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	5	0
y	0	1,25

Построим прямую (см. рис. 168).

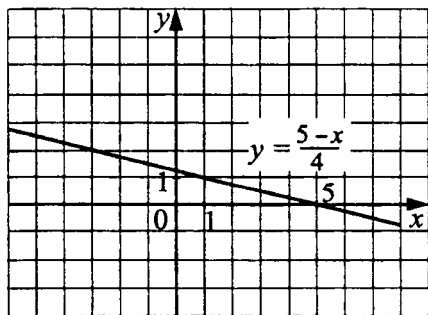


Рис. 168

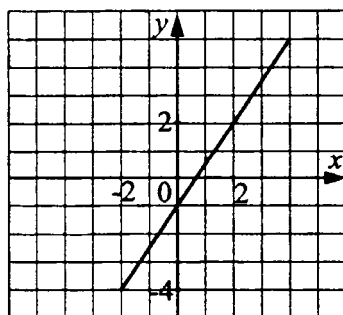


Рис. 169

Так как $0 \leq y \leq 0,25 = \frac{1}{4}$, то $0 \leq \frac{5-x}{4} \leq \frac{1}{4}$, $0 \leq 5-x \leq 1$,
 $-5 \leq -x \leq -4$; $4 \leq x \leq 5$.

Ответ: $4 \leq x \leq 5$.

382. Графиком функции $y = \frac{3x-2}{2}$ является прямая, изображённая на рисунке 169. По графику определяем, что неравенство $-1 < y < 2$ выполняется при $0 < x < 2$.

Ответ: $0 < x < 2$.

383. Графиком функции $y = \frac{x+2}{2}$ является прямая (см. рис. 170). По графику определяем, что неравенство $1,5 \leq y \leq 3$ выполняется при $1 \leq x \leq 4$.

Ответ: $1 \leq x \leq 4$.

384. Графиком функции $y = \frac{x+5}{2}$ является прямая (см. рис. 171).

Решим неравенство $-4 < y < -1,5$. Получаем $-4 < \frac{x+5}{2} < -1,5$;
 $-8 < x+5 < -3$; $-13 < x < -8$.

Ответ: $-13 < x < -8$.

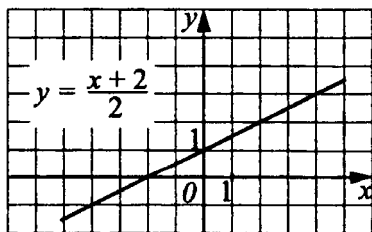


Рис. 170

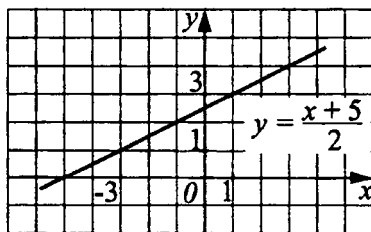


Рис. 171

385. Графиком функции $y = 2x + 3 - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(1; 4)$ (см. рис. 172). По графику определяем, что $3 \leq y \leq 4$ при $0 \leq x \leq 2$.

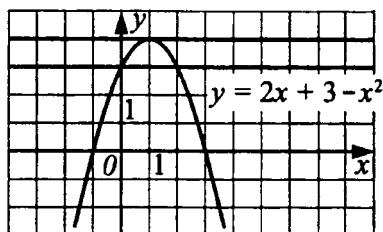


Рис. 172

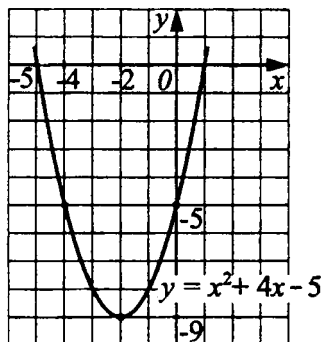


Рис. 173

Ответ: $0 \leq x \leq 2$.

386. Чтобы построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, найдём координаты вершины:

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$; $y_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх и не подвержены сжатию или растяжению (рис. 173). По графику функции определяем, что $-9 \leq y \leq -5$ при $-4 \leq x \leq 0$.

Ответ: $-4 \leq x \leq 0$.

387. 1. Функцию $y = \frac{5-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Графиком функции $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(1; 1)$ и $(\frac{5}{2}; 0)$ (см. рис. 174).

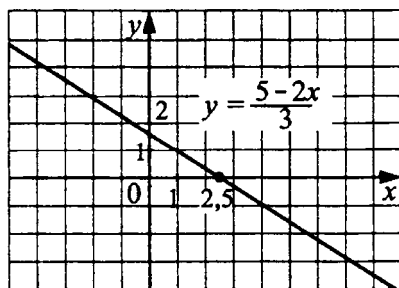


Рис. 174

2. Найдём аналитически, при каких значениях y выполняется неравенство $2 < x \leq 3\frac{2}{3}$.

В силу того, что заданная функция непрерывная и убывающая на всей числовой прямой, неравенство $2 < x \leq 3\frac{2}{3}$ выполняется при

$$y\left(3\frac{2}{3}\right) \leq y < y(2), \text{ то есть } -\frac{7}{9} \leq y < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{7}{9} \leq y < \frac{1}{3}$.

388. Функцию $y = 3x^{-1}$ запишем в виде $y = \frac{3}{x}$. $D(y)$: $x \neq 0$. Графиком

функции $y = \frac{3}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.

x	-0,5	1	1,5	2	3	6
y	-6	3	2	1,5	1	0,5

График функции изображён на рисунке 175.

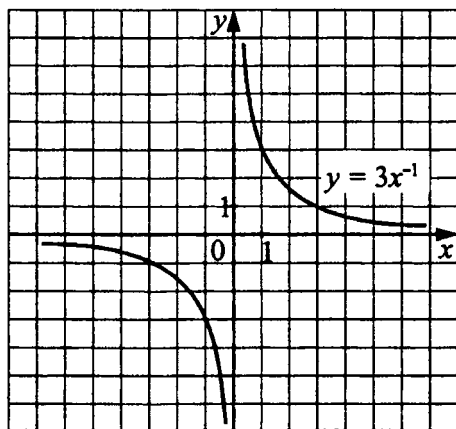


Рис. 175

2. Найдём, при каких значениях x выполняется неравенство $y \geq 3,3$, решив неравенство $\frac{3}{x} \geq 3,3$, $\frac{3,3x-3}{x} \leq 0$, $\frac{x-\frac{10}{11}}{x} \leq 0$, $0 < x \leq \frac{10}{11}$

(см. рис. 176).

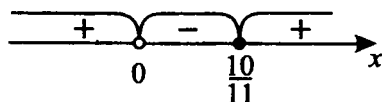


Рис. 176

Ответ: $0 < x \leq \frac{10}{11}$.

389. Графиком функции $y = 7x - 5$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	2	9

Построим прямую (см. рис. 177).

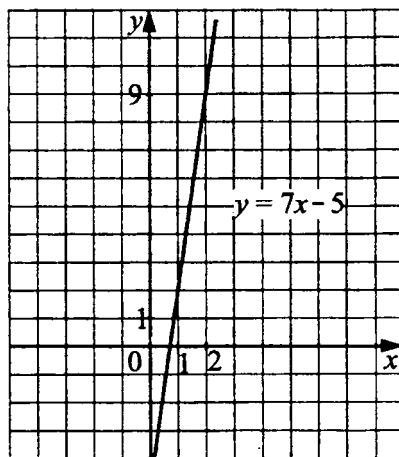


Рис. 177

Так как по условию $y \geq -40$, то $7x - 5 \geq -40$; $x \geq -5$.

Ответ: $x \geq -5$.

390. Графиком функции $y = 6x - 7$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	-1	5

Построим прямую (см. рис. 178).

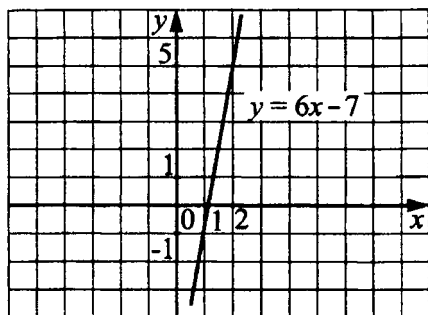


Рис. 178

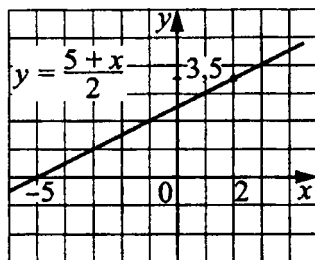


Рис. 179

Так как по условию $y \geq -49$, то $6x - 7 \geq -49$, $x \geq -7$.

Ответ: $x \geq -7$.

391. Графиком функции $y = \frac{5+x}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	-1
y	3	2

Построим прямую (см. рис. 179). По графику определяем, что неравенство $0 \leq y \leq 3,5$ выполняется при $-5 \leq x \leq 2$.

Ответ: $-5 \leq x \leq 2$.

392. Функцию $y = \frac{6-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Графиком функции

$y = 2 - \frac{2}{3}x$ является прямая, проходящая через точки (0; 2) и (3; 0)

(см. рис. 180). По графику видно, что $-2 \leq y \leq 4$ при $-3 \leq x \leq 6$.

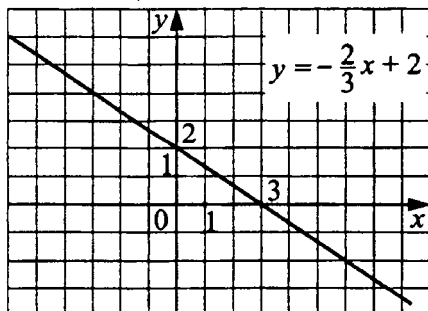


Рис. 180

Ответ: $-3 \leq x \leq 6$.

393. Графиком функции $y = 3,5 - 0,5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 3,5)$ и $(7; 0)$ (см. рис. 181). По графику видно, что $0 \leq y \leq 3,5$ при $0 \leq x \leq 7$.

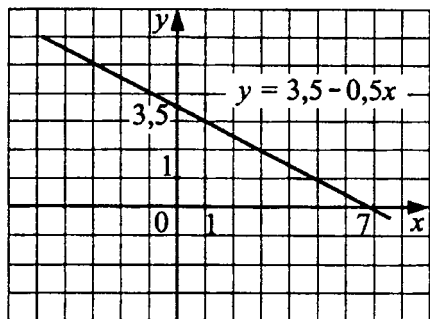


Рис. 181

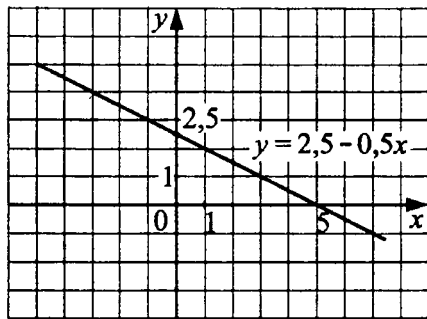


Рис. 182

Ответ: $0 \leq x \leq 7$.

394. Графиком функции $y = 2,5 - 0,5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2,5)$ и $(5; 0)$ (см. рис. 182). По графику видно, что $0 \leq y \leq 2,5$ при $0 \leq x \leq 5$.

Ответ: $0 \leq x \leq 5$.

395. $y = -\frac{x+3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; $-5 \leq x \leq 4$ (см. рис. 183). Функция

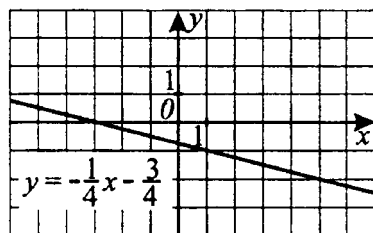


Рис. 183

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ — непрерывная и убывающая. $y(-5) = -\frac{1}{4}(-5) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

$y(4) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$. Если $-5 \leq x \leq 4$, то $-\frac{7}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ принимает на отрезке $[-5; 4]$ два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

Ответ: 2.

396. Графиком функции $y = \frac{7-x}{3}$; $y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2\frac{1}{3})$ и $(7; 0)$ (см. рис. 184). По графику видно, что на промежутке $-4 \leq x \leq 6$ функция принимает три целых значения: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

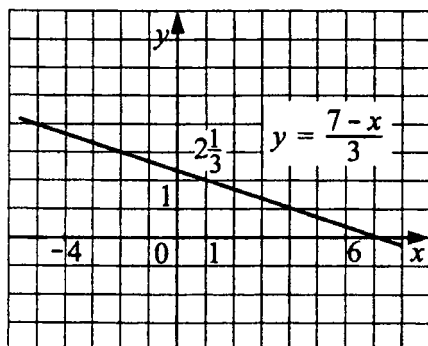


Рис. 184

Ответ: 3.

397. Функция $y = \frac{\sqrt{2x-x^3}}{x^4-3x^2+1}$ определена при x , удовлетворяющих

условию $\begin{cases} 2x-x^3 \geq 0, \\ x^4-3x^2+1 \neq 0. \end{cases}$

1) $x(x^2-2) \leq 0$; $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$; $x \leq -\sqrt{2}$; $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ (см. рис. 185).

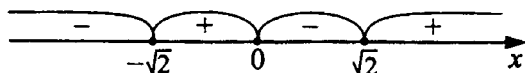


Рис. 185

2) $x^4-3x^2+1 \neq 0$. Обозначим $x^2 = t$; $t \geq 0$, тогда $t^2-3t+1 \neq 0$;
 $t_1 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $t_2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $x^2 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, $x^2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$
 $= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$; $x_1 \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,
 $x_4 \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Имеем (см. рис. 186)

$$\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right].$$

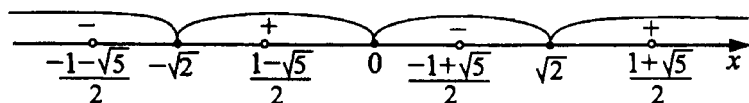


Рис. 186

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right].$

398. Функция $y = \frac{\sqrt{x^3 - 7x}}{x^4 - 5x^2 + 4}$ определена при x , удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} x^3 - 7x \geq 0, \\ x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \geq 0, \\ (x^2 - 4)(x^2 - 1) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) \neq 0. \end{cases}$$

$$[-\sqrt{7}; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup [\sqrt{7}; +\infty) \text{ (см. рис. 187).}$$

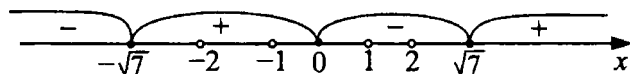


Рис. 187

Ответ: $[-\sqrt{7}; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup [\sqrt{7}; +\infty).$

399. $y = \sqrt{x^2 - 9x - 22} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$

Найдём область определения функции, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x - 22 \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 11)(x + 2) \geq 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 11, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 11.$$

Ответ: $[11; +\infty).$

400. Функция $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{x}$ определена при x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 4, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Ответ: $[4; +\infty)$.

401. Функция $y = \sqrt{7x - x^2 - 10} + \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 20x + 25}}$ определена при x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 10 \geq 0, \\ 4x^2 - 20x + 25 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \leq 0, \\ (2x-5)^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 5, \\ x \neq 2,5. \end{cases}$$

Ответ: $[2; 2,5) \cup (2,5; 5]$.

402. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Обозначим $\sqrt{-x} = t$; $t \geq 0$, тогда $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$.

Графиком функции $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(-\frac{1}{5}; 1\frac{3}{5})$. При $t \geq -\frac{1}{5}$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 2$.

Ответ: 2.

403. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geq 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = t^2 + 2t + 1$; $y(t) = (t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y(t) = (t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$.

При $t \geq -1$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 1$.

Ответ: 1.

404. Функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ определена при $x \leq 0$.

Функция $y = 3x + 5$ — монотонно возрастающая, функция $-3\sqrt[4]{-x}$ также монотонно возрастающая, поэтому функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ — мо-

нотонно возрастающая. Наибольшее значение функция примет при $x = 0$, то есть $y = 5$ — наибольшее значение.

Ответ: 5.

405. Функция $y = x - 2\sqrt{-x} - 1$ определена при $x \leq 0$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geq 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = -t^2 - 2t - 1$; $y(t) = -(t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y = -(t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$. При $t \geq -1$ функция убывает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наибольшее значение функции $y_{\text{наиб.}} = y(0) = -1$.

Ответ: -1.

406. Областью определения данной функции являются все x , при которых $6 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем

$$\frac{x^2 - 9}{6 - 2x} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(3-x)} = -0,5 \cdot (x+3).$$

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0,5 \cdot (x+3)$ за исключением значения $y(3) = -0,5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

407. Областью определения данной функции являются все x , при которых $2x - 6 \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем

$$\frac{9 - x^2}{2x - 6} = \frac{(3-x)(3+x)}{2(x-3)} = -0,5 \cdot (x+3).$$

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0,5 \cdot (x+3)$, за исключением значения $y(3) = -0,5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

408. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции $x_0 = \frac{3}{2} = 1,5$.

$$y_0 = (1,5)^2 - 3 \cdot 1,5 - 10 = 2,25 - 4,5 - 10 = -12,25.$$

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	-10	-6	0

Построим график (см. рис. 188).

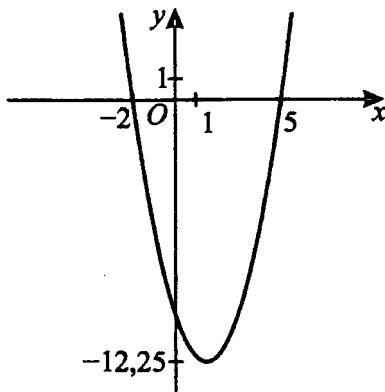


Рис. 188

Ответ: $-12,25$.

$$409. y = \frac{4x - 2x^2}{3} + 2; y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2.$$

График функции $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ — парабола, ветви которой направлены вниз.

Найдём координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, x_0 = -\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot (-2)} = 1, y_0 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.$$

$(1; 2\frac{2}{3})$ — координаты вершины параболы.

Найдём нули функции, решив уравнение $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$. $(-1; 0)$ и $(3; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox .

Дополнительные точки:

x	0	2	4	-2
y	2	2	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$

Наибольшее значение функции $y = \frac{4x - 2x^2}{3} + 2$ достигается в вершине параболы и равно $2\frac{2}{3}$ (см. рис. 189).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

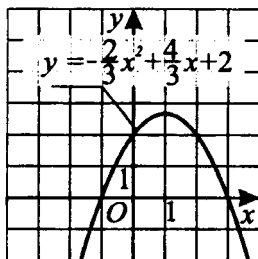


Рис. 189

410. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$y_0 = \frac{4}{9}(0,75)^2 - \frac{2}{3} \cdot 0,75 + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Так как $D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{4-16}{9} < 0$, то график лежит всюду выше оси Ox . Для построения графика найдём значение y функции в дополни-

тельных точках:

x	0	-1	-2
y	1	$2\frac{1}{9}$	$4\frac{1}{9}$

Построим график (см. рис. 190).

Ответ: $\frac{3}{4}$.

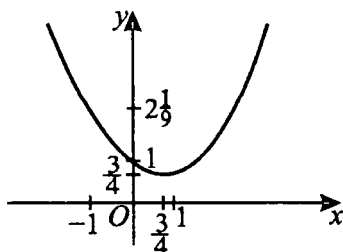


Рис. 190

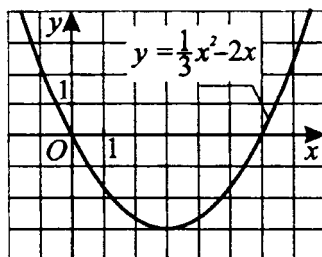


Рис. 191

411. График функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 191). Найдём координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, $y_0 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = -3$. $(3; -3)$ — координаты вершины параболы. Нули функции: $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, следовательно, $(0; 0)$ и $(6; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox .

Дополнительные точки:

x	1	5	-1	7
y	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$

Функция возрастает на промежутке $[3; +\infty)$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

412. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём нули этой функции, то есть точки, где $-0,5x^2 - x + 4 = 0$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. То есть у нас есть ответ на второй вопрос задачи: $-4 \leq x \leq 2$. Для построения графика найдём наибольшее значение этой функции: $x_0 = \frac{+1}{-1} = -1$, $y_0 = -0,5 + 1 + 4 = 4,5$.

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных

точках:

x	0	1	2	4
y	4	2,5	0	-8

Построим график (см. рис. 192).

Ответ: $-4 \leq x \leq 2$.

413. Пусть x — длина всего забора, тогда $0,3(x - 2)$ — длина части забора, которую покрасил мальчик, красивший сразу за Томом, а из следующих трёх мальчиков первый и второй покрасили $\frac{1}{5}x$ и $\frac{1}{6}x$ метров.

Пусть y — длина части забора, оставшейся неокрашенной после этого. Из условия следует, что 1 метр (который в конце красил Том) составляет $100\% - 85\% = 15\%$ от y . То есть $0,15y = 1$, $y = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$. Так как сумма всех окрашенных частей равна длине всего забора, получаем уравнение:

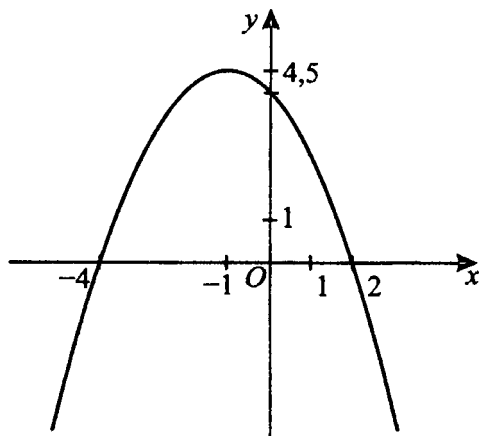


Рис. 192

$$2 + 0,3(x - 2) + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + y = x; \quad 2 + \frac{3}{10}x - 0,6 + \frac{11}{30}x + \frac{20}{3} = x;$$

$$\frac{20}{30}x + 1,4 + \frac{20}{3} = x; \quad \frac{24,2}{3} = \frac{1}{3}x; \quad x = 24,2 \text{ (м)}.$$

Ответ: 24,2.

414. Пусть первоначально у Кролика было x кг мёда. Винни-Пух за первые 3 часа съел $0,4x$ кг, а Пятачок и Кролик съели 300 г мёда. У Кролика осталось $x - 0,4x - 0,3 = 0,6x - 0,3$ (кг).

За следующие 3 часа Винни-Пух съел $\frac{2}{3} \cdot (0,6x - 0,3) = 0,4x - 0,2$ (кг), а Пятачок и Кролик — 100 г. У Кролика осталось $0,6x - 0,3 - 0,4x + 0,2 - 0,1 = 0,2x - 0,2$ (кг).

Зная, что осталось 1,6 кг, составим уравнение: $0,2x - 0,2 = 1,6$; $x - 1 = 8$; $x = 9$ (кг). Первоначально у Кролика было 9 кг мёда.

Ответ: 9 кг.

416. Пусть скорость II -го автомобиля — x км/ч, тогда скорость I -го — $(x + 10)$ км/ч.

Первый случай: первый автомобиль прошёл $4(x + 10)$ км до встречи, а второй — $3x$ км. Весь путь — $(4(x + 10) + 3x)$ км.

Второй случай: первый до встречи шёл $4,5 - 1\frac{5}{6} = 2\frac{2}{3}$ (ч) и прошёл

$2\frac{2}{3}(x + 10)$ км. Второй прошёл $4\frac{1}{2}x$ км. Весь путь — $(2\frac{2}{3}(x + 10) + 4\frac{1}{2}x)$ км.

Зная, что в обоих случаях автомобили проехали один и тот же путь, соста-

вим уравнение:

$$4(x + 10) + 3x = \frac{8}{3}(x + 10) + 4\frac{1}{2}x; 4x + 40 + 3x = \frac{8}{3}x + \frac{80}{3} + 4\frac{1}{2}x;$$

$$7x - \frac{8}{3}x - 4\frac{1}{2}x = \frac{80}{3} - 40; -\frac{1}{6}x = -\frac{40}{3}; x = 80.$$

Скорость II-го автомобиля — 80 км/ч. Расстояние между пунктами

$$4(80 + 10) + 3 \cdot 80 = 600 \text{ (км)}.$$

Ответ: 600 км.

417. Пусть x км/ч — скорость I-го велосипедиста, а y км/ч — скорость II-го велосипедиста.

Если I-й велосипедист выедет на 5 ч раньше второго и они встретятся через 5 ч после выезда второго, то к моменту встречи I-й велосипедист проедет $10x$ км, а второй — $5y$ км.

Если II-й велосипедист выедет на 2 ч раньше первого и они встретятся через 6 ч после выезда первого, то к моменту встречи I-й велосипедист проедет $6x$ км, а второй — $8y$ км.

Зная, что расстояние между пунктами 400 км, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 400, \\ 6x + 8y = 400, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 80, \\ 3x + 4y = 200. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Выразим из уравнения (1) y и подставим его во второе уравнение. Получим $y = 80 - 2x$, $3x + 4(80 - 2x) = 200$, $3x + 320 - 8x = 200$, $-5x = -120$, $x = 24$, $y = 80 - 2 \cdot 24 = 32$.

Таким образом, скорость I-го велосипедиста — 24 км/ч, скорость II-го велосипедиста — 32 км/ч.

Ответ: 24 км/ч; 32 км/ч.

418. Пусть скорость движения первой черепахи x м/ч, а второй — y м/ч.

Если бы первая ползла на 40 м/ч быстрее, то через t_1 часов они бы встретились на полпути.

$$\text{Получаем: } (x + 40) \cdot t_1 = y \cdot t_1 \text{ или } x + 40 = y.$$

Если бы вторая ползла на 50 м/ч быстрее, то она проползла бы до встречи за t_2 часов в два раза большее расстояние, чем первая.

$$\text{Получаем } 2xt_2 = (y + 50) \cdot t_2 \text{ или } 2x = y + 50.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 40 = y, \\ 2x = y + 50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 40, \\ 2x = x + 40 + 50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 40, \\ x = 90; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90, \\ y = 130. \end{cases}$$

Итак, 90 м/ч — скорость первой черепахи, 130 м/ч — скорость второй черепахи.

Ответ: 90; 130.

419. Пусть производительность третьего токаря — x деталей в час, а догоняет он второго по числу деталей через y часов. Тогда второй работал $(1 + y)$ часов и сделал $5 \cdot (1 + y)$ деталей, а третий сделал xy деталей. Первое уравнение — $5 \cdot (1 + y) = xy$.

Третий токарь, чтобы догнать первого, работал $(2 + y)$ часов и сделал $x(2 + y)$ деталей, а первый работал $(4 + y)$ часов и сделал $6 \cdot (4 + y)$ деталей.

Второе уравнение — $6 \cdot (4 + y) = x \cdot (2 + y)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot (1 + y) = xy, \\ 6 \cdot (4 + y) = x \cdot (2 + y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 5y = xy, \\ 24 + 6y - 2x = xy; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1 + y) = xy, \\ 5 + 5y = 24 + 6y - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1 + y) = xy, \\ y = 2x - 19. \end{cases}$$

Подставим $y = 2x - 19$ в первое уравнение системы:

$$5 \cdot (1 + 2x - 19) = x(2x - 19); 2x^2 - 29x + 90 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 720}}{4} = \frac{29 \pm 11}{4}; x_1 = 10, x_2 = 4,5.$$

Так как производительность третьего токаря больше, чем первого и второго, производительность третьего токаря равна 10 деталей в час.

Ответ: 10 деталей в час.

420. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а t ч — время после выезда первого велосипедиста до встречи второго велосипедиста с мотоциклистом. Расстояние, которое проехал второй велосипедист до встречи с мотоциклистом, равно $20(t - 2)$ км, а мотоциклист проехал $x(t - 4)$ км. К моменту встречи мотоциклиста с первым велосипедистом мотоциклист проехал $x(t - 1)$ км, а первый велосипедист — $30(t + 3)$ км. По условию $20(t - 2) = x(t - 4)$ и $x(t - 1) = 30(t + 3)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 20(t - 2) = x(t - 4), \\ x(t - 1) = 30(t + 3); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{20(t - 2)}{t - 4}, \\ x = \frac{30(t + 3)}{t - 1}; \end{cases}$$

$$\frac{20(t - 2)}{t - 4} = \frac{30(t + 3)}{t - 1}, \quad 2(t - 2)(t - 1) = 3(t + 3)(t - 4),$$

$$2(t^2 - 3t + 2) = 3(t^2 - t - 12), \quad 2t^2 - 6t + 4 = 3t^2 - 3t - 36,$$

$$t^2 + 3t - 40 = 0, \quad t = -8 \text{ или } t = 5.$$

Время не может быть отрицательно, поэтому подходит только $t = 5$. Отсюда $x = \frac{20 \cdot (5 - 2)}{5 - 4} = 20 \cdot 3 = 60$; скорость мотоциклиста равна 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

422. Пусть выпуск продукции составлял x , отпускная цена — y . Себестоимость — $\frac{3}{4}y$. Прибыль составляла $y - \frac{3}{4}y = \frac{1}{4}y$ (на отпускной цене). Вся прибыль была $\frac{xy}{4}$.

После изменений выпуск продукции составил $1,5x$, отпускная цена — $1,1y$, себестоимость — $\frac{3}{4} \cdot 1,2y = 0,9y$. Прибыль на отпускной цене — $1,1y - 0,9y = 0,2y$. Вся прибыль составила $1,5x \cdot 0,2y = 0,3xy$.

Прибыль увеличилась на $0,3xy - 0,25xy = 0,05xy$, что в процентах составило $\frac{0,05xy \cdot 4}{xy} \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

423. Пусть v — первоначальный ежесуточный объём переработки, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а $\tilde{v}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — те же величины после произошедших изменений. Тогда первоначально прибыль завода составляла $s = v(c_2 - c_1)$ у.е./сут., а прибыль завода после произошедших изменений равна $\tilde{s} = \tilde{v} \cdot (\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1)$ у.е./сут.

По условию $\tilde{v} = 1,3v$; $\tilde{c}_2 = 1,25c_2$; $\tilde{c}_1 = c_1 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{4}{3}c_1$; $\tilde{c}_1 = 0,8\tilde{c}_2$.

Отсюда имеем $\tilde{c}_1 = 0,8\tilde{c}_2 = 0,8(1,25c_2) = c_2 \Rightarrow \tilde{s} = 1,3v(1,25c_2 - c_2) = \frac{1,3v \cdot c_2}{4}$. Далее, $c_1 = \frac{3}{4}\tilde{c}_1 = \frac{3}{4}c_2 \Rightarrow s = v\left(c_2 - \frac{3}{4}c_2\right) = \frac{v \cdot c_2}{4}$.

Следовательно, $\frac{\tilde{s}}{s} = \frac{(1,3v \cdot c_2)/4}{(v \cdot c_2)/4} = 1,3$, то есть прибыль завода увеличилась на 30%.

Ответ: 30.

424. Примем весь объём работ за 1. Пусть v_1, v_2, v_3 и v_4 — объём работы, выполняемой за час первой, второй, третьей и четвёртой бригадой соответственно. Тогда из первого условия задачи получаем $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{8}$, из второго — $v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{20}$, из третьего — $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{1}{5}$. Умно-

жим обе части третьего уравнения на 2 и вычтем из него первое и второе уравнения. В результате получим $v_1 + v_4 = \frac{1}{8}$, следовательно, первая и четвёртая бригады вместе справятся с работой за 8 часов.

Ответ: 8 ч.

425. Пусть производительность I -й бригады — x , II -й бригады — y , III -й бригады — z , IV -й бригады — t . Найти $\frac{1}{z+t}$.

$$\text{По условию } \begin{cases} y + z + t = 4x, \\ x + z + t = 3y, \\ x + y = \frac{1}{11}. \end{cases}$$

Найдём $z+t$ — производительность III -й и IV -й бригад —

$$\begin{cases} z + t = 4x - y, \\ z + t = 3y - x, \\ x + y = \frac{1}{11}; \end{cases} \quad 4x - y = 3y - x; 5x = 4y; x = \frac{4}{5}y. \text{ Подставим в третье}$$

уравнение: $\frac{4}{5}y + y = \frac{1}{11}, \frac{9}{5}y = \frac{1}{11}, y = \frac{5}{99}, x = \frac{4}{99}$. Тогда $z+t = 4 \cdot \frac{4}{99} - \frac{5}{99}$,

$z+t = \frac{1}{9}$. Тогда III -ей и IV -ой бригадам понадобится $1 : \frac{1}{9} = 9$ (дней).

Ответ: 9 дней.

426. Пусть производительность классов следующая A — a , B — b , C — c , Γ — d .

Необходимо найти время, за которое могут покрасить забор все четыре класса, то есть $\frac{1}{a+b+c+d}$.

$$\text{По условию } b + c + d = \frac{1}{3}, a + c + d = \frac{1}{2}, a + b = \frac{1}{5};$$

$$\text{сложим } 2a + 2b + 2c + 2d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, a + b + c + d = \frac{31}{60}, \frac{1}{a+b+c+d} = \frac{60}{31}.$$

Все четыре класса могут покрасить забор за $1\frac{29}{31}$ часа.

Ответ: за $1\frac{29}{31}$ ч.

427. Примем весь объём работ за 1. Пусть производительность комбайнов следующая I — a , II — b , III — c , IV — d .

Необходимо найти, за какое время будет выполнена работа, если будут работать все четыре комбайна, то есть $\frac{1}{a+b+c+d}$.

По условию $a+b+c = \frac{1}{1\frac{1}{3}}$; $a+b+d = \frac{1}{2}$; $c+d = \frac{1}{1\frac{1}{3}}$.

Получаем $2a+2b+2c+2d = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; $a+b+c+d = 1$; $\frac{1}{a+b+c+d} = 1$.

Ответ: 1 ч.

428. Пусть производительность первого студента — x , производительность второго студента — y , производительность первого школьника — z , производительность второго школьника — t .

Необходимо найти $\frac{10}{x+y+z+t}$.

По условию $\begin{cases} x+z+t = \frac{10}{7}, \\ y+z+t = \frac{10}{10}, \\ x+y = \frac{10}{12}. \end{cases}$

Тогда $2(x+y) + 2(z+t) = \frac{10}{7} + \frac{10}{10} + \frac{10}{12}$, $x+y+z+t = \frac{1370}{840}$;

$\frac{10}{x+y+z+t} = \frac{840}{137}$.

Тогда все вместе они решат 10 задач за $\frac{840}{137}$ минут.

Ответ: $\frac{840}{137}$ мин.

429. Пусть производительность I-го садовника — x , производительность II-го садовника — y , производительность III-го садовника — z , производительность IV-го садовника — t .

По условию $\begin{cases} x+y = \frac{7}{120}, \\ y+z+t = \frac{9}{200}, \\ z+x+t = \frac{4}{75}. \end{cases}$

Найти $\frac{1}{x+y+z+t}$.

Сложим уравнения системы: $2x + 2y + 2z + 2t = \frac{7}{120} + \frac{9}{200} + \frac{4}{75}$,

$$2(x+y+z+t) = \frac{94}{600}, x+y+z+t = \frac{47}{600}, \frac{1}{x+y+z+t} = \frac{600}{47} \text{ часа.}$$

Ответ: $\frac{600}{47}$ часа.

430. Пусть первоначальная скорость такси $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда на путь из A

в B было потрачено $\frac{200}{x}$ часов, а обратный путь водитель прошёл за

$1 + \frac{200-x}{x-20}$ часов. Зная, что обратный путь занял на $\frac{1}{4}$ часа больше, составим уравнение:

$$1 + \frac{200-x}{x-20} = \frac{200}{x} + \frac{1}{4}, \frac{200-x}{x-20} - \frac{200}{x} = -\frac{3}{4},$$

$$\frac{200x - x^2 - 200x + 4000}{x(x-20)} = -\frac{3}{4}, x \neq 0, x \neq 20.$$

$4(-x^2 + 4000) = -3(x^2 - 20x)$, $-4x^2 + 16000 = -3x^2 + 60x$,
 $x^2 + 60x - 16000 = 0$, по теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 100$,
 $x_2 = -160$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: 100 км/ч.

431. Пусть расстояние AB равно x км, тогда на этот путь затрачено $\frac{x}{80}$

часов, а на обратный — $\frac{30}{40} + \frac{x-30}{90} = \frac{3}{4} + \frac{x-30}{90}$ часа. Зная, что на

обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше, составим уравнение:

$$\frac{x}{80} - \frac{3}{4} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18}; \frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18} + \frac{3}{4}; \frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{37}{36},$$

$$\frac{9x - 8x + 240}{720} = \frac{37}{36}; x + 240 = 37 \cdot 20; x = 500.$$

Расстояние между пунктами — 500 км.

Ответ: 500 км.

432. Обозначим через D место встречи поездов. Пусть расстояние $AD = x$ км, а $BD = y$ км (см. рис. 193), тогда $v_I = \frac{y}{50} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а $v_{II} = \frac{x}{8} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Первый поезд прошёл путь AD за $\frac{50x}{y}$ часов, второй поезд прошёл путь BD за $\frac{8y}{x}$ часов. Зная, что до встречи они шли одно и то же время, составим уравнение: $\frac{50x}{y} = \frac{8y}{x}$.

Обозначим $\frac{x}{y} = u$; $50u = \frac{8}{u}$; $50u^2 = 8$; $u^2 = \frac{8}{50}$, $u > 0$; $u = \frac{2}{5}$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$
или $\frac{y}{x} = 2,5$.

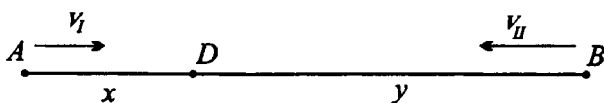


Рис. 193

Первый поезд прошёл до встречи в 2,5 раза меньший путь, чем ему осталось пройти, значит, он потратил на него в 2,5 раза меньше времени, то есть $50 : 2,5 = 20$ часов.

Ответ: 20.

433. Пусть C — место встречи двух велосипедистов. Тогда первый велосипедист проехал расстояние $S_2 = CB$ за 48 минут, а второй проехал расстояние $S_1 = AC$ за 27 минут. Так как скорости велосипедистов постоянны, то скорость первого велосипедиста равна $v_1 = \frac{S_2}{48}$, а скорость

второго — $v_2 = \frac{S_1}{27}$. Тогда первый затратил на дорогу до встречи $\frac{S_1}{v_1}$ минут,

а второй — $\frac{S_2}{v_2}$ минут. Однако каждый из велосипедистов доехал до места встречи от пункта своего отправления за одно и то же время. Поэтому

$$\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2}, \text{ откуда } \frac{S_1}{\frac{S_2}{48}} = \frac{S_2}{\frac{S_1}{27}} \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{27}{48}, \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{9}{16}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, время от начала движения велосипедистов до их встречи равно $\frac{S_1}{v_1} = 48 \cdot \frac{S_1}{S_2} = 48 \cdot \frac{3}{4} = 36$ минут.

Ответ: 36.

434. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда согласно условию следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x ; $x + 8 - 2 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 4 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 6 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 8 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 10 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 12 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 14 = x$; $x + 8 - 16 = x - 8$. Так как по условию на последней остановке было 25 человек, то $x - 8 = 25$; $x = 33$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 12 = 33 + 12 = 45$ (чел.).

Ответ: 45.

435. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда согласно условию, следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x ; $x + 10 - 6 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 8 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 10 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 12 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 14 = x$; $x + 10 - 16 = x - 6$; $x - 6 + 10 - 18 = x - 14$; $x - 14 + 10 - 20 = x - 24$. Так как по условию на последней остановке было 10 человек, то $x - 24 = 10$; $x = 34$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 6 = 34 + 6 = 40$ (чел.).

Ответ: 40.

436. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 1:

1) 10 раз, обозначая десятки часов, 2 раза, обозначая единицы часов, всего в течение 12 часов;

2) 10 раз, обозначая десятки минут, 5 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 12 часов:

$$15 \text{ мин} \cdot 12 = 180 \text{ мин} = 3 \text{ часа.}$$

Итого: $12\text{ч} + 3\text{ч} = 15 \text{ ч.}$

Ответ: 15.

437. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 3:

1) 3 раза, обозначая единицы часов в течение 3-х часов;

2) 9 раз, обозначая десятки минут;

3) 6 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 21 час:

$$15 \text{ мин} \cdot 21 = 315 \text{ мин} = 5,25 \text{ часа.}$$

$$\text{Итого: } 3\text{ч} + 5,25\text{ч} = 8,25\text{ч.}$$

Ответ: 8,25.

438. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, по условию $x > 3$.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
по течению	$x + 3$	$\frac{39}{x + 3}$	39
против течения	$x - 3$	$\frac{28}{x - 3}$	28
в озере	x	$\frac{70}{x}$	70

Зная, что моторная лодка прошла путь по течению реки и против течения реки за то же время, за которое она могла пройти путь по озеру, составим и решим уравнение:

$$\frac{39}{x+3} + \frac{28}{x-3} = \frac{70}{x}, \quad 39x \cdot (x-3) + 28x \cdot (x+3) = 70 \cdot (x^2 - 9),$$

$$39x^2 - 117x + 28x^2 + 84x = 70x^2 - 630, \quad 3x^2 + 33x - 630 = 0,$$

$$x^2 + 11x - 210 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 10$, $x_2 = -21$ не удовлетворяет условию $x > 3$. 10 км/ч — скорость лодки в стоячей воде.

Ответ: 10 км/ч.

439. Пусть x км/ч — скорость байдарки в стоячей воде, тогда $(x+2)$ км/ч составит скорость байдарки по течению, а $(x-2)$ км/ч — скорость против течения реки. $\frac{25}{x}$ ч — время, которое затратил турист, плывя по озеру,

$\frac{9}{x-2}$ ч — время движения против течения реки, $\frac{56}{x+2}$ ч — время движения по течению. По условию задачи турист плыл по озеру и против течения реки столько же времени, сколько плыл по течению. Составим и решим уравнение:

$$\frac{25}{x} + \frac{9}{x-2} = \frac{56}{x+2}, \quad x > 2, \quad 25(x^2 - 4) + 9x(x+2) = 56x(x-2),$$

$$25x^2 - 100 + 9x^2 + 18x = 56x^2 - 112x, \quad 22x^2 - 130x + 100 = 0,$$

$$11x^2 - 65x + 50 = 0, \quad D = 65^2 - 4 \cdot 11 \cdot 50 = 4225 - 2200 = 2025, \quad x_{1,2} = \frac{65 \pm 45}{22},$$

$x_1 = \frac{110}{22} = 5$, $x_2 = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$ не удовлетворяет условию $x > 2$.

5 км/ч — скорость байдарки в стоячей воде.

Ответ: 5 км/ч.

440. Пусть x кг — масса меди в сплаве, тогда $(x + 5)$ кг — первоначальная масса сплава; $\frac{x}{x + 5} \cdot 100\%$ — процентное содержание меди в первоначальном сплаве; $(x + 20)$ кг — масса нового сплава; $\frac{x}{x + 20} \cdot 100\%$ —

процентное содержание меди в новом сплаве.

По условию содержание меди понизилось на 30%. Составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{x + 5} \cdot 100 - \frac{x}{x + 20} \cdot 100 = 30, x > 0; \frac{10x}{x + 5} - \frac{10x}{x + 20} = 3;$$

$10x^2 + 200x - 10x^2 - 50x = 3(x + 5)(x + 20)$; $150x = 3(x + 5)(x + 20)$;
 $x^2 + 25x - 50x + 100 = 0$; $x^2 - 25x + 100 = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = 20$. Оба числа удовлетворяют условию $x > 0$. Первоначальная масса сплава могла быть либо 10 кг, либо 25 кг.

Ответ: 10 кг, 25 кг.

441. Пусть x г — масса серебра в сплаве, тогда $(x + 80)$ г — первоначальная масса сплава, $\frac{80}{x + 80} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в первоначальном сплаве, $(x + 180)$ г — масса сплава после добавления

100 г золота, тогда $\frac{180}{x + 180} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в новом сплаве. По условию содержание золота в сплаве по сравнению с первоначальным повысилось на 20%. Составим и решим уравнение:

$$\frac{180}{x + 180} \cdot 100 - \frac{80}{x + 80} \cdot 100 = 20, \frac{900}{x + 180} - \frac{400}{x + 80} = 1,$$

$900x + 72000 - 400x - 72000 = x^2 + 260x + 14400$, $x^2 - 240x + 14400 = 0$,
 $(x - 120)^2 = 0$, $x = 120$. 120 г серебра было в сплаве.

Ответ: 120.

443. Пусть до начала матча x часов.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
пешком	5	$x + 1$	$5(x + 1)$
на велосипеде	10	$x - \frac{1}{2}$	$10\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Зная, что путь от дома болельщика до стадиона один и тот же, составим и решим уравнение:

$$5(x+1) = 10\left(x - \frac{1}{2}\right); x+1 = 2x-1; x=2.$$

2 часа до начала матча.

Ответ: 2.

444. Пусть x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста.

1. Велосипедист отправился в путь на 1 час раньше пешехода, и они встретятся через 2 часа после выезда велосипедиста. Отсюда следует, что пешеход прошёл x км, а велосипедист проехал $2y$ км, значит, $x + 2y = 28$.

2. Пешеход выйдет на 1 час раньше велосипедиста, и через 2 часа после выхода пешехода расстояние между ними сократится в 3,5 раза. Отсюда следует, что пешеход прошёл $2x$ км, а велосипедист проехал y км, значит,

$$2x + y = 28 - \frac{28}{3,5}.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 28, \\ 2x + y = 20. \end{cases} \quad | -2$$

Сложим $-2x - 4y = -56$ и $2x + y = 20$. Получим $-3y = -36; y = 12$.

Подставим $y = 12$ во второе уравнение системы и найдём x :

$$2x + 12 = 20; 2x = 8; x = 4.$$

4 км/ч — скорость пешехода, 12 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 12 км/ч; 4 км/ч.

445. Пусть x г — масса первого раствора, y г — масса второго раствора, тогда $0,3x$ г — масса кислоты в первом растворе, $0,5y$ г — масса кислоты во втором растворе, $(0,3x + 0,5y)$ г — масса кислоты в смеси, что по условию задачи составляет 45% массы раствора. Составим уравнение:

$$0,3x + 0,5y = 0,45(x + y); 0,5y - 0,45y = 0,45x - 0,3x; 0,05y = 0,15x; y = 3x; x : y = 1 : 3.$$

Ответ: 1 : 3.

446. Пусть x г — масса первого сплава, y г — масса второго сплава, тогда $0,4x$ г — масса меди в первом сплаве, $0,6y$ г — масса меди во втором сплаве, $(0,4x + 0,6y)$ г — масса меди после того, как соединили два сплава, что по условию задачи составляет 45% массы вновь полученного сплава: $0,4x + 0,6y = 0,45 \cdot (x + y); 0,6y - 0,45y = 0,45x - 0,4x; 0,15y = 0,05x; 3y = x; x : y = 3 : 1$.

Ответ: 3 : 1.

447. Пусть первоначальная скорость катера — x км/ч. Тогда за 3 часа катер прошёл $3x$ км. Оставшееся расстояние $(87,5 - 3x)$ км он прошёл за $\frac{87,5 - 3x}{x + 2}$ часа. Так как 87,5 км катер должен был проплыть за

$\frac{87,5}{x}$ часа, то получаем уравнение: $3 + \frac{1}{3} + \frac{87,5 - 3x}{x + 2} = \frac{87,5}{x}$; $x > 0$;

$$\frac{87,5 - 3x}{x + 2} = \frac{87,5 \cdot 3 - 10x}{3x}; (87,5 - 3x) \cdot 3x = (87,5 \cdot 3 - 10x)(x + 2);$$

$$87,5 \cdot 3x - 9x^2 = 87,5 \cdot 3x - 10x^2 + 2 \cdot 87,5 \cdot 3 - 20x; x^2 + 20x - 525 = 0;$$

$$x_1 = 15; x_2 = -35.$$

Так как $x > 0$, то первоначальная скорость катера 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

448. Пусть t минут — время до встречи пешеходов; v_A, v_B — скорости пешеходов, вышедших из пунктов A и B соответственно (см. рис. 194), тогда

$$\begin{cases} v_A \cdot t = 12v_B, \\ v_B \cdot t = 27v_A; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_A}{v_B} = \frac{12}{t}, \\ \frac{v_A}{v_B} = \frac{t}{27}; \end{cases}$$

$$t^2 = 27 \cdot 12; t > 0; t = \sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{3^4 \cdot 4} = 2 \cdot 9 = 18.$$

Через 18 минут после выхода пешеходы встретились.

1) $18 + 12 = 30$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта B .

2) $18 + 27 = 45$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта A .

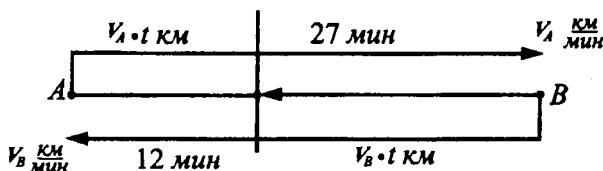


Рис. 194

Ответ: 30 мин, 45 мин.

449. Пусть x г меди и y г цинка находятся в первоначальном куске сплава, тогда $(x + y)$ г — масса сплава. После увеличения количества меди на 40% масса меди в новом сплаве составила $1,4x$ г, а после уменьшения количества цинка в новом сплаве масса цинка составила $0,6y$ г; $(1,4x + 0,6y)$ г — масса нового сплава.

По условию масса куска сплава увеличилась на 20%, значит, составила $1,2(x + y)$ г. Получаем уравнение:

$$1,2(x + y) = 1,4x + 0,6y; 1,2y - 0,6y = 1,4x - 1,2x; 0,6y = 0,2x; 3y = x.$$

Отсюда следует, что $\frac{x}{y} = 3 : 1$, значит, меди было 75%, а цинка — 25% в первоначальном куске сплава.

Ответ: медь — 75%, цинк — 25%.

450. Пусть в прошлом сезоне продали n абонементов, выручка составила $8000n$ рублей. В настоящем сезоне продали $0,75n$ абонементов, стоимость одного абонемента увеличили на x рублей, значит, $(8000 + x) \cdot 0,75n$ рублей — выручка в настоящем сезоне. По условию выручка уменьшилась на 2,5% по сравнению с прошлым сезоном, значит, она составила $8000n \cdot 0,975$ рублей. Составим и решим уравнение:

$$(8000 + x) \cdot 0,75n = 8000n \cdot 0,975, 0,75x = 8000 \cdot 0,225, x = 2400.$$

На 2400 рублей увеличили стоимость абонемента.

Ответ: 2400.

451. Обозначим через $S_{\text{неч.}}$ сумму членов, стоящих на нечётных местах среди первых 12-ти членов арифметической прогрессии, а через $S_{\text{чёт.}}$ сумму членов, стоящих на чётных местах среди первых 12-ти членов арифметической прогрессии. Тогда условие задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} S_{\text{неч.}} + S_{\text{чёт.}} = 354, \\ \frac{S_{\text{чёт.}}}{S_{\text{неч.}}} = \frac{32}{27}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{\text{чёт.}} = \frac{32}{27}S_{\text{неч.}}, \\ S_{\text{неч.}} + \frac{32}{27}S_{\text{неч.}} = 354 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{59}{27}S_{\text{неч.}} = 354 \Rightarrow S_{\text{неч.}} = \frac{354 \cdot 27}{59} = 162. \text{ Тогда } S_{\text{чёт.}} = 354 - S_{\text{неч.}} = 354 - 162 = 192.$$

Если a_k — k -й член арифметической прогрессии, а d — её разность, то $S_{\text{неч.}} = \frac{a_1 + a_1 + 2d \cdot 5}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 30d$, так как числа, стоящие на нечётных местах арифметической прогрессии $\{a_k\}$, также составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $2d$. Аналогично получим, что

$$S_{\text{чёт.}} = \frac{a_2 + a_2 + 2d \cdot 5}{2} \cdot 6 = 6a_2 + 30d.$$

Поэтому $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = (6a_2 + 30d) - (6a_1 + 30d) = 6(a_2 - a_1) = 6d$. Так как $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = 30$, то $6d = 30 \Rightarrow d = 5$.

Ответ: 5.

452. Пусть v_A км/ч ($v_A > 0$) и v_B км/ч ($v_B > 0$) — скорости поездов, которые одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно (см. рис. 195).

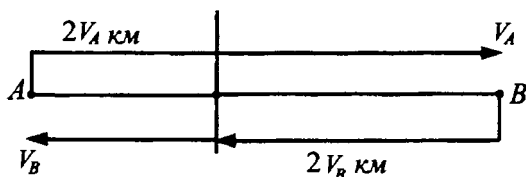


Рис. 195

1) $(v_A + v_B)$ км/ч — скорость сближения, $2(v_A + v_B)$ км — расстояние между пунктами. По условию расстояние составляет 180 км.

$$2(v_A + v_B) = 180.$$

2) $\frac{2v_A}{v_B}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта B .

$\frac{2v_B}{v_A}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта A .

По условию второй поезд прибыл в пункт A на 54 мин раньше, чем первый в пункт B .

$$\frac{2v_B}{v_A} - \frac{2v_A}{v_B} = \frac{54}{60}.$$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \frac{2v_B}{v_A} - \frac{2v_A}{v_B} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдём отношение $\frac{v_B}{v_A}$.

Обозначим $\frac{v_B}{v_A} = t, t > 0$.

$$2t - \frac{2}{t} = \frac{9}{10}; 2t^2 - \frac{9}{10}t - 2 = 0; 20t^2 - 9t - 20 = 0; t_1 = \frac{5}{4}; t_2 = -\frac{4}{5} — не$$

удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $\frac{v_B}{v_A} = \frac{5}{4}$.

Вернёмся к исходной системе:

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \frac{v_B}{v_A} = \frac{5}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ v_A = 0,8v_B; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,8v_B + v_B = 90, \\ v_A = 0,8v_B, \end{cases}$$

$v_B = 50$, $v_A = 40$. 40 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта A , 50 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта B .

Ответ: 40 км/ч; 50 км/ч.

453. v_A км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта A (первый); v_B км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта B (второй).

3 часа 45 минут $= 3\frac{45}{60}$ часа $= 3\frac{3}{4}$ часа $= 3,75$ часа — время до встречи пешеходов. Пусть t часов ($t > 0$) — время в пути второго пешехода; $(t + 4)$ — время в пути первого пешехода (см. рис. 196), тогда

$$\begin{cases} 3,75v_A = v_B(t - 3,75), \\ 3,75v_B = v_A(t + 4 - 3,75); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_A}{v_B} = \frac{t - 3,75}{3,75}, \\ \frac{v_A}{v_B} = \frac{3,75}{t + 0,25}; \end{cases}$$

$$\frac{t - 3,75}{3,75} = \frac{3,75}{t + 0,25}, \quad t > 0. \quad t^2 + 0,25t - 3,75t - 0,9375 = 14,0625;$$

$t^2 - 3,5t - 15 = 0$; $2t^2 - 7t - 30 = 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -\frac{5}{2}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

6 часов был в пути второй пешеход, 10 часов был в пути первый пешеход.

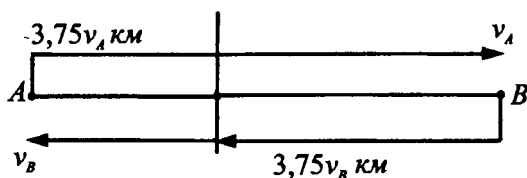


Рис. 196

Ответ: 10 ч; 6 ч.

454. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда после остановки, тогда $(x - 10)$ км/ч — скорость поезда до остановки. Так как 420 км составляют 60% всего пути, то весь путь AB равен $\frac{420}{0,6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\frac{280}{x - 10}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал

его за $\frac{280}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение $\frac{280}{x-10} - \frac{280}{x} = 0,5$; $x_1 = -70$ и $x_2 = 80$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 80 км/ч.

455. Пусть первая швея может выполнить всю работу за x дней ($x > 0$), а вторая — за y дней ($y > 0$). Тогда их производительность — $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ всей работы в день. Можно составить следующие уравнения, приняв всю работу за 1:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{10}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{6}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$$\frac{4}{y} - \frac{1}{10} = 0; \frac{4}{y} = \frac{1}{10}; y = 40.$$

Подставим это значение в первое уравнение системы:

$$\frac{6}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \frac{6}{x} = \frac{1}{4}; x = 24.$$

Итак, первая швея может сделать всю работу за 24 дня, а вторая — за 40 дней.

Ответ: 24, 40.

456. Примем объём работы за 1.

Пусть первая машинистка сможет перепечатать рукопись за x дней ($x > 0$), вторая машинистка — за y дней ($y > 0$), $\frac{1}{x}$ — производительность первой машинистки, а $\frac{1}{y}$ — производительность второй. По условию задачи, работая вместе, они могут перепечатать рукопись за 6 часов; $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Если машинистки будут работать вместе 5 часов, то они напечатают $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть работы, а если вторая машинистка будет работать 3 часа, она напечатает $\frac{3}{y}$ часть работы. По условию задачи работа при этом будет завершена.

$$5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{y} = 1.$$

Учитывая, что $x > 0$, $y > 0$, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1, \\ 5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ \frac{5}{6} + \frac{3}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{y}, \\ \frac{3}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18}, \\ y = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 18. \end{cases}$$

За 9 часов первая машинистка может перепечатать рукопись, за 18 часов перепечатает рукопись вторая машинистка.

Ответ: 9 ч; 18 ч.

457. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого мотоциклиста.

Второй мотоциклист был в пути на 6 минут меньше, поэтому $\left(t - \frac{1}{10}\right)$ часов — время поездки второго мотоциклиста. Скорость второго мотоциклиста — $1,25v$ км/ч. Учитывая, что $t > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt = 30, \\ 1,25v\left(t - \frac{1}{10}\right) = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{t}, \\ 1,25 \cdot \frac{30}{t} \cdot \left(t - \frac{1}{10}\right) = 30. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы имеем:

$1,25 - \frac{0,125}{t} = 1$; $\frac{0,125}{t} = 0,25$; $t = \frac{0,125}{0,25} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 60$ км/ч. Таким образом, 60 км/ч — скорость первого мотоциклиста, а скорость второго равна $v \cdot 1,25 = 75$ км/ч.

Ответ: 60 км/ч; 75 км/ч.

458. Пусть v км/мин — скорость первого пешехода, а t мин — потраченное им на дорогу время. Тогда для второго пешехода время, потраченное им на дорогу, составляет $(t - 20)$ мин, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/мин. Учитывая, что $t > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt = 40, \\ \frac{6}{5}v(t-20) = 40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{40}{t}, \\ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{t} \cdot (t-20) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right)t = 24 \Rightarrow t = 120.$$

Ответ: 120.

459. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого грузовика соответственно. Тогда время поездки второго грузовика $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ч, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt = 150, \\ \frac{6}{5}v(t-0,5) = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{150}{t}, \\ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{t} \cdot (t-0,5) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right)t = \frac{3}{5} \Rightarrow t = 3.$$

Ответ: 3.

460. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки второго автомобиля соответственно. Тогда время поездки первого автомобиля $\left(t - \frac{5}{6}\right)$ ч, а его скорость — $1,5v$ км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt = 250, \\ 1,5v\left(t - \frac{5}{6}\right) = 250; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{250}{t}, \\ 1,5 \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(t - \frac{5}{6}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow (1,5 - 1)t = \frac{5}{6} \cdot 1,5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

461. Пусть x км/ч ($x > 12$) — скорость мотоциклиста после остановки, тогда $(x - 12)$ км/ч — скорость мотоциклиста до остановки. После остановки мотоциклисту осталось проехать 36% пути, то есть $0,36 \cdot 300 = 108$ км. Следовательно, остаток пути мотоциклист должен был проехать за $\frac{108}{x-12}$ ч, но, потеряв 18 мин ($= 0,3$ ч), он проехал его за $\frac{108}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{108}{x-12} - \frac{108}{x} = 0,3; \quad \frac{36}{x-12} - \frac{36}{x} = 0,1; \quad \frac{432}{x^2-12x} = 0,1;$$

$x^2 - 12x - 4320 = 0$; $x_1 = -60$ и $x_2 = 72$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 12$.

Ответ: 72 км/ч.

462. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда до остановки, тогда $(x + 10)$ км/ч — скорость поезда после остановки. Так как 420 км составляет 60% всего пути, то весь путь AB равен $\frac{420}{0,6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\frac{280}{x}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал

его за $\frac{280}{x + 10}$ ч. Таким образом, получаем уравнение: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x + 10} = 0,5$;

$\frac{560}{x} - \frac{560}{x + 10} = 1$; $\frac{5600}{x^2 + 10x} = 1$; $x_1 = -80$ и $x_2 = 70$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 70 км/ч.

463. 1) Автомобиль двигался на $30 + 25 + 25 = 80$ (мин) $= 1\frac{1}{3}$ часа меньше, чем автобус. Пусть t — время движения автомобиля, тогда автобус двигался $t + 1\frac{1}{3}$ часов.

2) Если скорость автомобиля v км/ч, то скорость автобуса $0,6v$ км/ч. Так как автомобиль и автобус проехали одно и то же расстояние, то получаем уравнение $\left(t + \frac{4}{3}\right) \cdot 0,6v = vt$.

Сокращая на v ($v \neq 0$), получаем $(3t + 4) \cdot 0,2 = t$; $3t + 4 = 5t$; $t = 2$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и автобуса:

$$v_{\text{автом.}} = \frac{200}{2} = 100 \text{ км/ч, } v_{\text{автоб.}} = \frac{200}{2 + \frac{4}{3}} = 60 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 100; 60.

464. 1) Автомобиль двигался на $25 + 26 - 3 = 48$ (мин) $= \frac{4}{5}$ часа меньше, чем велосипедист. Пусть t — время движения автомобиля, тогда велосипедист двигался $t + \frac{4}{5}$ часов.

2) Если скорость велосипедиста v км/ч, то скорость автомобиля $2,5v$ км/ч. Так как автомобиль и велосипедист проехали одно и то же рас-

стояние, то получаем уравнение $\left(t + \frac{4}{5}\right) \cdot v = 2,5vt$. Сокращая на v ($v \neq 0$),

$$\text{получаем: } t + \frac{4}{5} = 2,5t; t = \frac{8}{15}.$$

3) Теперь найдём скорость автомобиля и велосипедиста:

$$v_{\text{автом.}} = \frac{64}{\frac{8}{15}} = 120 \text{ (км/ч)}, v_{\text{вел.}} = \frac{64}{\frac{8}{15} + \frac{4}{5}} = 48 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 120; 48.

465. Пусть x — расстояние между городами А и В, а v ($v > 0$) — скорость велосипедиста. Тогда скорость мотоциклиста — $3v$. Время, которое затратит велосипедист на преодоление половины пути, будет равно $\frac{x}{2v}$, а время, которое затратит мотоциклист на преодоление того же расстояния, соответственно равно $\frac{x}{2 \cdot 3v}$. Имеем первое уравнение системы:

$\frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3$. Во втором случае время велосипедиста, затраченное на преодоление расстояния $\left(\frac{x}{2} - 15\right)$, равно $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v}$, а время мотоциклиста, затраченное на преодоление расстояния $\frac{x}{2} + 15$ км, равно $\frac{x}{2 \cdot 3v} + \frac{15}{3v}$. Составляем второе уравнение системы: $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2$.

Учитывая, что $v > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 18v, \\ 3x - 90 = x + 30 + 12v; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 18v, \\ 2x = 12v + 120; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ x = 6v + 60; \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 9v = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 3v = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180, \\ v = 20. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 180 км.

466. Обозначим скорость первого поезда через v_1 км/ч, скорость второго — через v_2 км/ч. Первый поезд проходит расстояние между станциями

за $\frac{96}{v_1}$ часов, второй — за $\frac{96}{v_2}$ часов. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{v_1} + \frac{2}{3} = \frac{96}{v_2}, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(96 + \frac{2v_1}{3}\right) \cdot v_2 = 96v_1, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48v_2 + \frac{1}{3}(v_2 + 12)v_2 = 48(v_2 + 12), \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}v_2^2 + 4v_2 - 576 = 0, \\ v_1 = v_2 + 12. \end{cases}$$

Корнями уравнения $v_2^2 + 12v_2 - 1728 = 0$ являются числа 36 и -48 . Второе из них не подходит по смыслу задачи. Итак, $v_2 = 36$ км/ч, $v_1 = 48$ км/ч.

Ответ: 36 км/ч; 48 км/ч.

467. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго равна v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 720 км, составляет $\frac{720}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{720}{v_2}$ ч. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ \frac{60}{v_1} = \frac{50}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{864}{v_1} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{144}{v_1} = 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 72, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 72 км/ч; 60 км/ч.

468. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго — v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 450 км, составляет $\frac{450}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{450}{v_2}$ ч.

Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{450}{v_1} = \frac{450}{v_2} - 1,5, \\ \frac{250}{v_1} = \frac{200}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{450}{v_1} = \frac{450}{v_2} - 1,5, \\ v_2 = \frac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{450}{v_1} = \frac{562,5}{v_1} - 1,5, \\ v_2 = \frac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{112,5}{v_1} = 1,5, \\ v_2 = \frac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 75, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 75 км/ч; 60 км/ч.

469. Пусть x кг — количество варенья, которое было у Малыша первоначально, а y кг — количество варенья, которое Малыш с Карлсоном взяли с собой на крышу. Тогда в доме Малыша Карлсон съел $0,3x$ кг варенья, и из условия задачи имеем уравнение $0,3x + 0,2 + y + 1,7 = x$, (1). Поскольку из взятого на крышу варенья Малыш съел $0,3$ кг, то Карлсон съел $(y - 0,3)$ кг варенья. Тогда $0,3x + y - 0,3$ (кг) — общее количество съеденного Карлсоном варенья, и по условию $y - 0,3 = \frac{1}{3} \cdot (0,3x + y - 0,3)$ (2). Из уравнения (2) выразим y через x : $y - 0,3 = 0,1x + \frac{1}{3}y - 0,1$; $\frac{2}{3}y = 0,1x + 0,2$;

$y = \frac{3}{2} \cdot (0,1x + 0,2) = 0,15x + 0,3$. Подставим найденное для y выражение в уравнение (1) и решим полученное уравнение: $0,3x + 0,2 + 0,15x + 0,3 + 1,7 = x$; $0,45x + 2,2 = x$; $0,55x = 2,2$; $x = 4$. Таким образом, у Малыша первоначально было 4 кг варенья.

Ответ: 4 кг.

470. Пусть x км — протяжённость всего выбранного туристами маршрута, а y км — протяжённость части маршрута, оставшейся после четырёх дней похода. Тогда из условия задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 20 + 0,3(x - 20) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + y = x, \\ y = 0,8y + 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $0,2y = 2$, $y = 10$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получаем

$$20 + \frac{3x}{10} - 6 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 10 = x; \frac{12x + 10x + 8x}{40} + 24 = x; x - \frac{3}{4}x = 24; x = 96.$$

Итак, протяжённость всего выбранного туристами маршрута составляет 96 км.

Ответ: 96 км.

471. Пусть x литров — объём первого ведра, а y литров — объём второго. Время, необходимое для того, чтобы набрать оба ведра из первого крана, равно $\frac{x+y}{5}$ минут. А время, необходимое для того, чтобы набрать первое

ведро из второго крана, равно $\frac{x}{7}$ минут. Отсюда получаем $\frac{x+y}{5} = 2 \cdot \frac{x}{7}$;

$$7(x+y) = 10x; 7y = 3x.$$

Таким образом, $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

472. Пусть скорость лодки x км/ч ($x > 0$), тогда скорость катера $4x$ км/ч. Тогда время, затрачиваемое катером на прохождение 16 километров, равно $\frac{16}{4x}$ часов, а время, затрачиваемое лодкой, — $\frac{16}{x}$ часов. Отсюда полу-

чаем $\frac{16}{4x} + 3 = \frac{16}{x}$; $\frac{12}{x} = 3$; $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч.

473. Пусть первый рабочий может наклеить обои в комнате за x часов ($x > 0$), тогда второй рабочий наклеит обои за $x+5$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего, $\frac{1}{x+5}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они наклеят обои за 6 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{6}$. Таким образом, имеем

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $\frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{6}$; $x(x+5) = 6(2x+5)$; $x^2 - 7x - 30 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 10$. $x_1 = -3$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 10$. Таким образом, первый рабочий может выполнить работу за 10 ч, второй — за 15 ч.

Ответ: 10 ч, 15 ч.

474. Пусть первая бригада может вспахать поле за x часов ($x > 0$), тогда вторая бригада может вспахать поле за $x+12$ часов. Примем всю

работу за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады, а $\frac{1}{x+12}$ — производительность второй. Так как, работая вместе, они вспахали поле за 8 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{8}$. Таким образом,

имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$; $\frac{2x+12}{x(x+12)} = \frac{1}{8}$; $x(x+12) = 8(2x+12)$; $x^2 - 4x - 96 = 0$; $x_1 = -8$, $x_2 = 12$. $x_1 = -8$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 12$; первая бригада может вспахать поле за 12 ч, вторая — за 24 ч.

Ответ: 12 ч; 24 ч.

475. Пусть первый токарь может выполнить задание за x часов ($x > 0$), тогда второй токарь может выполнить задание за $x+7$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого токаря, $\frac{1}{x+7}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они выполнили задание за 12 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$. Таким образом, имеем

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{12}$; $\frac{2x+7}{x(x+7)} = \frac{1}{12}$; $x(x+7) = 12(2x+7)$; $x^2 - 17x - 84 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 21$. $x_1 = -4$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 21$; первый токарь может выполнить задание за 21 ч, второй — за 28 ч.

Ответ: 21 ч; 28 ч.

476. Пусть x страниц в час печатала первая машинистка, тогда вторая в час печатала $(x-2)$ страницы. Так как вторая машинистка работала на 1 час дольше, то получаем уравнение $\frac{60}{x-2} - \frac{60}{x} = 1$, ($x > 2$). Отсюда

имеем $\frac{60x - 60(x-2)}{(x-2)x} = 1$; $120 = (x-2)x$; $x^2 - 2x - 120 = 0$; $x_1 = -10$, $x_2 = 12$. $x_1 = -10$ не удовлетворяет условию $x > 2$, значит, первая машинистка печатала $x = 12$ страниц в час.

Ответ: 12.

477. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Петя до того момента, когда его догонит Вася. Тогда Вася, до того как догонит Петю,

будет находиться в пути $\left(t - \frac{1}{3}\right)$ часов. Всего Петя пройдёт $4,5t$ км, а Вася проедет $12\left(t - \frac{1}{3}\right)$ км. Решим уравнение:

$$4,5t = 12\left(t - \frac{1}{3}\right); 4,5t = 12t - 4; 7,5t = 4; t = \frac{8}{15}. \text{ Следовательно,}$$

Вася догонит Петю на расстоянии $\frac{4,5 \cdot 8}{15} = 0,3 \cdot 8 = 2,4$ км от школы.

Ответ: 2,4 км.

478. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Нина до того момента, когда её догонит брат. Тогда брат, до того как догонит Нину, будет находиться в пути $(t - 0,1)$ часов. Следовательно, Нина проедет $15t$ км, а брат проедет $40(t - 0,1)$ км. Решим уравнение: $15t = 40(t - 0,1)$;

$$15t = 40t - 4; 25t = 4; t = \frac{4}{25}. \text{ Итак, брат догонит Нину на расстоянии}$$

$$15t = 15 \cdot \frac{4}{25} = 2,4 \text{ км от дома.}$$

Ответ: 2,4.

479. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, а S км — расстояние между городами, тогда $S = 8x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 10)$ км/ч (через 5 ч после начала движения) автобус проехал оставшуюся часть пути за $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$ часа. Таким образом, имеем

$$S = 5x + \frac{10}{3}(x - 10); 5x + \frac{10}{3}x - \frac{100}{3} = 8x; \frac{x}{3} = \frac{100}{3}; x = 100; \text{ то есть}$$

первоначальная скорость автобуса равна 100 км/ч.

Ответ: 100.

480. Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста, а S км — расстояние, проезжаемое велосипедистом, тогда $S = 2x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 3)$ км/ч (через 1,5 ч после начала движения) велосипедист проехал оставшуюся часть пути за 40 мин $= \frac{2}{3}$ часа. Таким образом, имеем

$$S = 1,5x + \frac{2}{3}(x - 3); 1,5x + \frac{2}{3}x - 2 = 2x; \frac{x}{6} = 2; x = 12, \text{ то есть}$$

первоначальная скорость велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

481. Пусть x км/ч ($x > 0$) — первоначальная скорость поезда, тогда $x + 6$ км/ч — скорость поезда после задержки. Так как весь путь AB равен 78 км, а до задержки поезд проехал на 12 км больше, чем после задержки, то длина пути, пройденного до задержки, равна $\frac{78 + 12}{2} = 45$ км. Тогда после задержки поезду осталось проехать $78 - 45 = 33$ км. Следовательно, первую часть пути поезд проехал за $\frac{45}{x}$ ч, а вторую часть — за $\frac{33}{x + 6}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 15 мин ($= 0,25$ ч). Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x} - \frac{33}{x + 6} = 0,25; \frac{180}{x} - \frac{132}{x + 6} = 1; \frac{48x + 1080}{x^2 + 6x} = 1; x^2 - 42x - 1080 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x , и получаем корни $x_1 = -18$ и $x_2 = 60$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 60 км/ч.

482. Пусть x км/ч ($x > 75$) — скорость третьего мотоциклиста, тогда его скорость сближения с первым мотоциклистом равна $(x - 75)$ км/ч, а со вторым — $(x - 60)$ км/ч. За 20 мин ($= \frac{1}{3}$ ч), к моменту, когда третий мото-

циклист выехал из пункта A , первый мотоциклист проехал $\frac{1}{3} \cdot 75 = 25$ (км),

а второй — $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ (км). Следовательно, третий мотоциклист догонит

первого за $\frac{25}{x - 75}$ ч, а второго за $\frac{20}{x - 60}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 1 ч. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{25}{x - 75} - \frac{20}{x - 60} = 1; \frac{5x}{(x - 75)(x - 60)} = 1; x^2 - 140x + 4500 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x , и получаем корни $x_1 = 50$ и $x_2 = 90$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 75$.

Ответ: 90 км/ч.

483. Пусть s — расстояние между A и B . Тогда $\frac{s}{5}$ — скорость движения парохода по течению (собственная скорость парохода плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{7}$ — скорость движения парохода против течения (соб-

ственная скорость парохода минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{5} - \frac{s}{7}\right) : 2 = \frac{s}{35}$. Следовательно, плоты от

А до В плывут $s : \frac{s}{35} = 35$ суток.

Ответ: 35.

484. Пусть s — расстояние между А и В. Тогда $\frac{s}{4}$ — скорость движения моторной лодки по течению (собственная скорость моторной лодки плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{5}$ — скорость движения моторной лодки против течения (собственная скорость моторной лодки минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{4} - \frac{s}{5}\right) : 2 = \frac{s}{40}$. Следовательно, скорость движения моторной лодки по течению больше скорости течения в $\frac{s}{4} : \frac{s}{40} = 10$ раз.

Ответ: 10.

485. Пусть второй насос перекачивает ежедневно x м³ ($x > 10$), тогда он работал $\frac{480}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x - 10)$ м³ в час,

и, значит, он работал $\frac{360}{x - 10}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос работал дольше, чем второй, на 2 часа, то есть имеем уравнение $\frac{360}{x - 10} - \frac{480}{x} = 2$; $\frac{360x - 480(x - 10)}{(x - 10)x} = 2$; $2x^2 - 20x = 4800 - 120x$; $x^2 + 50x - 2400 = 0$; $x_1 = -80$, $x_2 = 30$. $x_1 = -80$ не удовлетворяет условию $x > 10$, то есть второй насос перекачивает за час $x = 30$ м³, при этом первый насос перекачивает 20 м³.

Ответ: 20 и 30.

486. Пусть второй насос перекачивает ежедневно x м³ ($x > 0$), тогда 100 м³ он перекачивает за $\frac{100}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает

$(x + 5)$ м³/ч, значит, 90 м³ он перекачивает за $\frac{90}{x + 5}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос перекачивает 90 м³ на 1 час быстрее, чем второй 100 м³, значит, имеем уравнение $\frac{90}{x + 5} + 1 = \frac{100}{x}$;

$\frac{100(x+5) - 90x}{x(x+5)} = 1$; $x^2 + 5x = 10x + 500$; $x^2 - 5x - 500 = 0$; $x_1 = -20$, $x = 25$. $x_1 = -20$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть второй насос перекачивает $x = 25$ м³/ч; при этом первый насос перекачивает 30 м³.

Ответ: 30 и 25.

487. Обозначим через x и y количество первого и второго растворов соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда, из условия следует уравнение

$$\frac{0,4x + 0,7y}{x + y} = 0,6; \frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

488. Обозначим через x и y количество первого и второго сплавов соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда из условия следует уравнение

$$\frac{0,25x + 0,45y}{x + y} = 0,3; \frac{x}{y} = 3.$$

Ответ: 3 : 1.

489. Пусть x и y — количество первого и второго сплава соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда концентрация железа в новом сплаве составит

$$\frac{0,75x + 0,25y}{x + y} = 0,4 \Leftrightarrow 0,35x = 0,15y; \frac{x}{y} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: 3 : 7.

490. Пусть x и y — количество первого и второго растворов соли соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда концентрация соли в новом растворе составит

$$\frac{0,64x + 0,36y}{x + y} = 0,48 \Leftrightarrow 0,16x = 0,12y; \frac{x}{y} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 3 : 4.

491. Пусть x — скорость парохода по течению, y — скорость против течения. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$, ($k > 1$) (см. рис. 197).

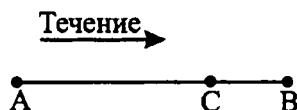


Рис. 197

По условию задачи имеем $\frac{AB}{x} = 2$; $\frac{BC}{y} = 2$. Кроме того,

$$\frac{BC}{x} + \frac{AB}{y} = 5. \text{ Отсюда } AB = 2x, BC = 2y, \frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} = 5. \text{ Составим}$$

уравнение: $\frac{2}{k} + 2k = 5$; $2k^2 - 5k + 2 = 0$. Корни: $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Так как $k > 1$, то $k = 2$. Значит, скорость парохода по течению в два раза больше скорости парохода против течения.

Ответ: 2.

492. Пусть x — скорость грузовика при движении с горы, y — скорость при движении в гору. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$ ($k > 1$). Обозначим, согласно условию задачи: A и B — конечные точки движения и C — нижняя точка (см. рис. 198).



Рис. 198

Тогда имеем $\frac{AC}{x} = 3$; $\frac{CB}{y} = 7$; $\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} = 22$. Откуда $\frac{7y}{x} + \frac{3x}{y} = 22$; $\frac{7}{k} + 3k = 22$; $3k^2 - 22k + 7 = 0$. Корни: $k_1 = 7$, $k_2 = \frac{1}{3}$. Так как $k > 1$, то $k = 7$. Значит, скорость грузовика при движении с горы в семь раз больше скорости грузовика при движении в гору.

Ответ: 7.

493. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса; C — место их встречи. Тогда $\frac{AC}{x}$ (ч) и $\frac{CB}{y}$ (ч) — время, проведённое в пути до встречи автомобилем и автобусом соответственно; $\frac{AC}{y}$ (ч) и $\frac{CB}{x}$ (ч) — время, проведённое в пути после встречи автомобилем и автобусом соответственно. По условию $\frac{AC}{y} = 9$; $\frac{CB}{x} = 4$; $\frac{AC}{x} = \frac{CB}{y}$; $x > 0$;

$y > 0$. Отсюда $\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y}$; $4x^2 = 9y^2$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Так как $x > 0$; $y > 0$, то

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

494. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса, C — место их встречи (см. рис. 199).



Рис. 199

Требуется найти $\frac{AB}{y}$ — время в пути автобуса. Так как они выехали из пунктов A и B одновременно, то до места встречи в пути они были одинаковое время: $\frac{AC}{x} = \frac{BC}{y}$. Из условия задачи следует, что $\frac{AC}{y} = 16$

и $\frac{BC}{x} = 4$, откуда $AC = 16y$; $BC = 4x$. Следовательно, $\frac{16y}{x} = \frac{4x}{y}$;

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4$, ($x > 0$, $y > 0$); $\frac{x}{y} = 2$. Так как $AB = AC + BC$, то

$$\frac{AB}{y} = \frac{AC + BC}{y} = \frac{16y + 4x}{y} = 16 + 4 \cdot \frac{x}{y} = 16 + 4 \cdot 2 = 24 \text{ (часа)}.$$

Ответ: 24.

495. Пусть x , y , z — производительности первого, второго и третьего рабочих (объем работ/день) соответственно ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Весь объем работ примем за 1. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 3, \\ \frac{1}{x+z} = 3, \\ \frac{1}{y+z} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{3}, \\ x+z = \frac{1}{3}, \\ y+z = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения системы:

$$2(x + y + z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}; \quad x + y + z = \frac{5}{12}.$$

Поэтому, работая втроем, рабочие выполняют всю работу за $\frac{1}{x + y + z} = \frac{12}{5} = 2,4$ ч.

Ответ: 2,4.

496. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих соответственно. Весь объём работ примем за 1. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 18, \\ \frac{1}{x+z} = 12, \\ \frac{1}{y+z} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{18}, \\ x+z = \frac{1}{12}, \\ y+z = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Требуется найти $\frac{1}{x+y+z}$. Сложим все три уравнения полученной системы:

$$2(x + y + z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4}. \text{ Значит, } x + y + z = \frac{1}{8}.$$

А искомое значение $\frac{1}{x+y+z} = 8$ (ч).

Ответ: 8.

497. Обозначим через x и y стоимость 1 кг первого и второго продуктов соответственно. Тогда из условия задачи $x + 10y = 200$. Первый продукт подорожал на 15%, то есть его стоимость составила $x + \frac{15}{100}x = 1,15x$.

Второй продукт подешевел на 25%, то есть его стоимость составила

$$y - \frac{25}{100}y = 0,75y. \text{ Поэтому } 1,15x + 10 \cdot 0,75y = 182. \text{ Эти два условия}$$

$$\text{должны выполняться одновременно: } \begin{cases} x + 10y = 200; \\ 1,15x + 7,5y = 182; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 - 10y; \\ 1,15(200 - 10y) + 7,5y = 182. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $230 - 11,5y + 7,5y = 182$; $y = 12$. Тогда из первого уравнения $x = 200 - 120 = 80$. Итак, $x = 80$, $y = 12$.

Ответ: 80 и 12.

498. Пусть в 100 г первого раствора было x г соли ($x\%$ -ный раствор), а в 100 г второго раствора — y г соли ($y\%$ -ный раствор). Тогда до испарения в 1000 г первого раствора содержалось $10x$ г соли, а в 1000 г второго раствора — $10y$ г соли. После испарения такое же количество соли стало содержаться соответственно в 800 г каждого раствора, то есть концентрация соли в каждом растворе увеличилась в $\frac{1000}{800} = \frac{5}{4} = 1,25$ раза. Пусть также до испарения мы брали a г второго раствора (и $2a$ г первого), а после испарения b г второго раствора (и $4b$ г первого). Составим и решим систему уравнений, учитывая, что концентрация соли в смеси будет 10% :

$$\begin{cases} \frac{2a \cdot (x/100) + a \cdot (y/100)}{3a} = 0,1, \\ \frac{4b \cdot (1,25x/100) + b \cdot (1,25y/100)}{5b} = 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 30, \\ 5x + 1,25y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 20. \end{cases}$$

Ответ: 5 и 20.

499. Пусть первый поезд проходит путь от A до B за t_1 ч ($t_1 > 0$), а второй поезд путь от B до A — за t_2 ч ($t_2 > 0$). Если обозначить расстояние от A до B (или от B до A) через s км, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{t_1}{2} - 2 = \frac{t_2}{2}, \\ \left(\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}\right) \cdot 2 = s - \frac{s}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 4, \\ 8(t_1 + t_2) = 3t_1 t_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 4, \\ 3t_2^2 - 4t_2 - 32 = 0. \end{cases}$$

Корнями последнего уравнения являются $t_2 = 4$ и $t_2 = -\frac{8}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t_2 = 4$ ч. Отсюда, $t_1 = 8$ ч.

Ответ: 8 и 4.

500. Пусть скорость велосипедиста равна v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста — v_2 км/ч. По условию велосипедист проезжает каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист. Это соответствует тому, что его скорость

на $\frac{1}{2}$ км
 $\frac{1}{60}$ ч = 30 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Тогда имеем систему

$$\text{уравнений } \begin{cases} v_1 + 30 = v_2, \\ \frac{120}{v_1} - 2 = \frac{120}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 + 30, \\ v_1^2 + 30v_1 - 1800 = 0. \end{cases}$$

Корнями последнего уравнения являются $v_1 = 30$ и $v_1 = -60$. Второй корень очевидно не удовлетворяет условию задачи. Значит, $v_1 = 30$. Из первого уравнения $v_2 = 60$.

Ответ: 30 и 60.

501. Имеется 200 граммов 30%-го раствора. Значит, кислоты в них $\frac{200 \cdot 30}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно долить, чтобы получился 6%-ный раствор. Тогда

$$\frac{60}{200 + x} = \frac{6}{100}. \text{ Отсюда } x = 800 \text{ (г).}$$

Ответ: 800.

502. Имеется 300 граммов 20%-го раствора кислоты с водой. Значит, кислоты в этом растворе $300 \cdot \frac{20}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно добавить в имеющийся раствор, чтобы получился 16%-ный раствор. Тогда $\frac{60}{300 + x} = \frac{16}{100}$. Отсюда $x = 75$ (г).

Ответ: 75.

503. Пусть первый экскаватор, работая один, вырыл яму за x часов, тогда второй вырыл бы её за $3x$ часов. $\frac{49}{x}$ м³/ч — производительность первого экскаватора, а $\frac{49}{3x}$ м³/ч — производительность второго экскаватора. Так как их совместная производительность равна $49 : 1,5 = \frac{98}{3}$ (м³/ч), получим уравнение $\frac{49}{x} + \frac{49}{3x} = \frac{98}{3}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{2}{3}$; $x = 2$.

Первый экскаватор вырыл бы яму за 2 часа, а половину ямы — за 1 час, тогда второй вырыл бы яму за 6 часов, а половину — за 3 часа.

Если бы каждый по очереди вырыл бы половину ямы, то они вырыли бы яму за $1 + 3 = 4$ (ч).

Ответ: 4.

504. Пусть скорость перевозки зерна второго грузовика — x (т/ч), тогда скорость первого — $2,5x$ (т/ч). Имеем $(2,5x + x) \cdot 3 = 31,5$, откуда $x = 3$.

Первый грузовик привёз бы 21 т зерна за $\frac{21}{7,5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ (ч), а второй — $10,5$ т за $\frac{10,5}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ (ч). Общее время равно $3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{5} = 6\frac{3}{10} = 6,3$ (ч).

Ответ: 6,3.

505. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость первого поезда, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго поезда. За $\frac{840}{x}$ часов пройдёт 840 км первый поезд, а за

$\frac{840}{y}$ часов пройдёт это же расстояние второй поезд.

По условию задачи первый поезд затратит времени на 2 часа меньше, чем второй, значит, $\frac{840}{y} - \frac{840}{x} = 2$. За $\frac{63}{x}$ часов пройдёт 63 км первый поезд, за $\frac{54}{y}$ часов пройдёт 54 км второй поезд.

По условию время, затраченное поездами, одинаково, значит, $\frac{63}{x} = \frac{54}{y}$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 63 \cdot \frac{1}{x} = 54 \cdot \frac{1}{y}, \\ 840 \cdot \frac{1}{y} - 840 \cdot \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$$

Замена $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 7a = 6b, \\ 420b - 420a = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{7}b, \\ 60b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{70}, \\ b = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $x = 70$; $y = 60$.

Тогда 70 км/ч — скорость первого поезда; 60 км/ч — скорость второго поезда, $70 - 60 = 10$ (км/ч).

Ответ: 10.

506. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость лодки по течению, y км/ч ($y > 0$) — скорость лодки против течения. Так как $12 \text{ мин} = \frac{1}{5} \text{ ч}$, $40 \text{ мин} = \frac{2}{3} \text{ ч}$, $52 \text{ мин} = \frac{13}{15} \text{ ч}$, то $\frac{1}{5} \cdot x$ км — путь, пройденный одной лодкой по течению; $\frac{2}{3} \cdot y$ км — путь, пройденный другой лодкой против течения; $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y}$ ч — время, затраченное одной лодкой на обратный путь против течения; $\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x}$ ч — время, затраченное другой лодкой на обратный путь по течению.

Зная, что время, затраченное лодками на обратный путь, в сумме равно $\frac{13}{15}$ часа, составим и решим уравнение: $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{13}{15}$. Обозначим искомое отношение скорости лодки по течению к скорости лодки против течения через t , имеем $\frac{x}{y} = t, t > 1$, тогда уравнение примет вид $\frac{1}{5}t + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{13}{15}$; $3t^2 - 13t + 10 = 0$; $t_1 = \frac{10}{3}$, $t_2 = 1$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

507. Пусть x — концентрация первого раствора в процентах, y — второго. Из условия задачи следует

$$\begin{cases} 2\frac{x}{100} + 6\frac{y}{100} = \frac{36}{100} \cdot (2 + 6), \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{32}{100} \cdot (1 + 1). \end{cases}$$

Во втором уравнении считаем (не нарушая общности), что первого и второго раствора берут по одному килограмму.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 36 \cdot 8, \\ x + y = 32 \cdot 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6(64 - x) = 288, \\ y = 64 - x. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 24$. Зная x , из второго уравнения получаем $y = 40$.

Ответ: 24 и 40.

508. Пусть для получения 30%-го раствора нужно взять x кг 28%-го раствора и y кг 36%-го раствора. Тогда $0,28x + 0,36y = 0,3(x + y)$; $0,02x = 0,06y$; $\frac{x}{y} = 3$. То есть для получения раствора нужной кон-

центрации нужно взять три части 28%-го раствора и одну часть 36%-го раствора. Так как первого раствора имеется всего 2 кг, то, чтобы получить наибольший объём 30%-го раствора, нужно взять 2 кг 28%-го раствора и

$y = \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$ (кг) 36%-го раствора. Тогда общее количество раствора будет

равно $x + y = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ (кг).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

509. Пусть К — красный грузовик, а С — синий, x — время, за которое синий грузовик вывозит груз с первого склада ($x > 0$). Составим таблицу:

	1-й склад	2-й склад
К	3	$x - 7$
С	x	6

Имеем теперь пропорцию:

$\frac{3}{x} = \frac{x-7}{6}$; $x^2 - 7x - 18 = 0$; $x_1 = 9$, $x_2 = -2$. Так как по условию задачи x — число положительное, то $x = 9$. Таким образом, синий грузовик может вывезти груз с первого склада быстрее, чем это сделает красный, в $\frac{9}{3} = 3$ раза.

Ответ: 3.

510. Пусть x — время, за которое второй кран разгрузит баржу ($x > 0$).

Рассмотрим таблицу:

	баржа	сухогруз
I кран	3	$x - 10$
II кран	x	8

Составим пропорцию: $\frac{3}{x} = \frac{x-10}{8}$; $x^2 - 10x - 24 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 12$. Так как x не может быть меньше нуля, то $x = 12$.

Примем всю работу по разгрузке баржи за единицу. Тогда $p_1 = \frac{1}{3}$ — производительность I-го крана, $p_2 = \frac{1}{12}$ — производительность II-го крана. Искомая величина $\frac{p_1}{p_2} = 4$.

Ответ: 4.

511. Пусть V — собственная скорость лодки, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \frac{6}{V+V_T} + \frac{6}{V-V_T} = \frac{35}{60}, \\ \frac{18}{V-V_T} - \frac{18}{V+V_T} = \frac{15}{60}. \end{cases} \quad \text{Обозначим } \frac{1}{V+V_T} = a \text{ и } \frac{1}{V-V_T} = b.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} a+b = \frac{7}{72}, \\ b-a = \frac{1}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{72}, \\ b = \frac{4}{72}. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным V и V_T , получим

$$\begin{cases} \frac{1}{V+V_T} = \frac{3}{72}, \\ \frac{1}{V-V_T} = \frac{4}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V+V_T = 24, \\ V-V_T = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V_T = 6, \\ V = 18 + V_T; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} V_T = 3, \\ V = 21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

512. Пусть V — собственная скорость катера, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \frac{36}{V-V_T} + \frac{36}{V+V_T} = 3\frac{1}{2}, \\ \frac{12}{V-V_T} - \frac{12}{V+V_T} = \frac{10}{60}. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{1}{V-V_T} = a$ и $\frac{1}{V+V_T} = b$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} 36a + 36b = \frac{7}{2}, \\ 12a - 12b = \frac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{18}, \\ b = \frac{1}{24}. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным V и V_T , получим

$$\begin{cases} \frac{1}{V-V_T} = \frac{1}{18}, \\ \frac{1}{V+V_T} = \frac{1}{24}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V-V_T = 18, \\ V+V_T = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_T = V - 18, \\ 2V = 42; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T = 3, \\ V = 21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

513. Пусть x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго туриста. Расстояние, пройденное первым туристом до встречи, равно $3x$ км, а расстояние, пройденное вторым туристом до встречи, равно $2y$ км, ($AC = 3x$; $BC = 2y$) (см. рис. 200).

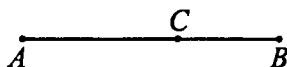


Рис. 200

$\frac{2y}{x}$ ч — время движения первого туриста на участке BC .

$\frac{3x}{y}$ ч — время движения второго туриста на участке AC .

Так как первый турист пришёл в пункт B на 5 часов раньше, чем второй пришёл в пункт A , получим уравнение $\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x} = 5$. Пусть $\frac{x}{y} = t$, $t > 0$, тогда $3t - \frac{2}{t} = 5$; $3t^2 - 5t - 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Скорость первого туриста в два раза больше скорости второго туриста.

Ответ: 2.

514. Пусть x — время, которое затратил автомобиль на путь от места встречи до пункта A . Этот же участок пути велосипедист проехал за 6 часов. Кроме того, участок пути от места встречи до пункта B автомобиль проехал за 2 часа, а велосипедист — за $(x + 11)$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{6} = \frac{2}{x + 11}$; $x^2 + 11x - 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -12$, которое имеет положительный корень $x = 1$. Значит, скорость автомобиля в 6 раз больше скорости велосипедиста.

Ответ: 6.

515. Пусть p_i — производительность i -ой группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_2 = 3p_3, \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2 + p_3} = 6. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $p_1 = \frac{1 - 4p_2 - 4p_3}{4}$. Подставляя в третье уравнение системы выражения для p_1 и p_2 , получим уравнение $\frac{4}{1 - 16p_3} - \frac{1}{4p_3} = 6 \Leftrightarrow \frac{384p_3^2 + 8p_3 - 1}{4p_3(1 - 16p_3)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 384p_3^2 + 8p_3 - 1 = 0, \\ p_3 \neq 0, \\ p_3 \neq \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что по смыслу задачи $p_3 > 0$, получим $p_3 = \frac{1}{24}$. Тогда

$$p_2 = 3 \cdot p_3 = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{24}}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 12, 8 и 24 месяца.

516. Пусть p_i — производительность i -ой группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_1 = 3p_3, \\ p_1 = p_2 + p_3. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы следует, что $4p_1 = 1, p_1 = \frac{1}{4}$.

Подставляя во второе уравнение системы p_1 , получаем $p_3 = \frac{1}{12}$. Тогда,

подставляя p_1 и p_3 в третье уравнение, найдём $p_2 = p_1 - p_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Ответ: 4, 6 и 12 месяцев.

517. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда; v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички.

Согласно условию задачи, $v_2 = \frac{1}{2}v_1; l_2 = \frac{1}{3}l_1$. Зная, что поезд проходит мимо столба за 5 секунд, имеем $\frac{l_1}{v_1} = 5$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что по-

езд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{l_1 + \frac{1}{3}l_1}{v_1 + \frac{1}{2}v_1} = \frac{8l_1}{9v_1} = \frac{8 \cdot 5}{9} = \frac{40}{9} \text{ (с)}.$$

Ответ: $\frac{40}{9}$.

518. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда, v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички. Согласно условию задачи, $v_1 = v_2; l_1 = 1,5l_2$. Зная, что электричка проходит мимо столба за 8 секунд, имеем $\frac{l_2}{v_2} = 8$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что поезд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{1,5l_2 + l_2}{v_2 + v_2} = \frac{2,5l_2}{2v_2} = \frac{2,5 \cdot 8}{2} = 10 \text{ (с)}.$$

Ответ: 10.

520. Пусть x — количество шоколада с содержанием 25% какао-бобов, y — количество шоколада с содержанием 70% какао-бобов, которые нужно взять, чтобы получить шоколад, содержащий 45% какао-бобов. Из условия задачи следует, что $\frac{0,25x + 0,7y}{x + y} = 0,45; 0,25x + 0,7y = 0,45x + 0,45y; 0,2x = 0,25y; \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Ответ: 5 : 4.

521. Пусть за x дней может вспахать всё поле первый трактор. Тогда за $(x + 2)$ дня может вспахать всё поле второй трактор; $\frac{1}{x}$ — производительность первого трактора (часть поля, которую он вспахивает за один день), $\frac{1}{x + 2}$ — производительность второго трактора.

По условию за 4 дня совместной работы было вспахано 0,9 поля. Следовательно, $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2}\right) = 0,9$, где $x > 0$;

$$\frac{2x + 2}{x(x + 2)} = \frac{9}{40}; (2x + 2)40 = 9(x^2 + 2x); 9x^2 - 62x - 80 = 0. \text{ Решением}$$

этого уравнения являются $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{10}{9}$. $x_2 = -\frac{10}{9}$ — не удовлетворяет условию $x > 0$. Следовательно, первый трактор вспашет поле за 8 дней, второй — за 10 дней.

Ответ: 8 и 10 дней.

522. Пусть за x дней может перевезти весь груз первый грузовик. Тогда за $(x - 3)$ дня может перевезти весь груз второй грузовик; $\frac{1}{x}$ — производительность первого грузовика, $\frac{1}{x-3}$ — производительность второго грузовика (часть груза, которую он перевозит за один день). По условию за 5 дней совместной работы грузовики перевезли 0,75 всего груза. Следовательно, $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}\right) = 0,75$, где $x > 3$; $\frac{x-3+x}{x(x-3)} = 0,15$; $0,15x^2 - 2,45x + 3 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 15$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Так как должно выполняться неравенство $x > 3$, то $x_2 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию задачи. Получаем: первый грузовик весь груз может перевезти за 15 дней, второй — за 12 дней.

Ответ: 15 и 12 дней.

523. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ ($a > 0$) и график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x - 3$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_B = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$, а ордината равна $y_B = 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -7$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x - 3$, расположенную ниже оси Ox , симметрично относительно оси Ox , получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$, эскиз которого изображён на рисунке 201. Таким образом, при $0 < a < 7$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x - 3|$ в четырёх точках, при $a = 7$ — в трёх точках и при $a > 7$ — в двух.

Ответ: 4 при $0 < a < 7$; 3 при $a = 7$; 2 при $a > 7$.

524. Построим графики функций $y = |2x^2 + 4x - 7|$; $y = a$ ($a > 0$) и найдём количество точек их пересечения.

1) Построим график $y = 2x^2 + 4x - 7$ (см. рис. 202).

а) Вершина: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$, $y_0 = 2 - 4 - 7 = -9$. $(-1; -9)$ —

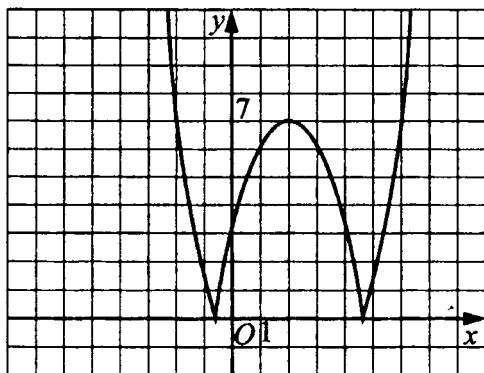


Рис. 201

координаты вершины параболы.

б) Дополнительные точки:

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	9	-1	-7	-7	-1	9

2) Построим график $y = |2x^2 + 4x - 7|$ (см. рис. 202).

Получаем, что графики данных функций пересекаются в 4-х точках при $0 < a < 9$, в 3-х точках при $a = 9$, в 2-х точках при $a > 9$.

Ответ: 4 при $0 < a < 9$; 3 при $a = 9$; 2 при $a > 9$.

525. Построим ломаную, заданную условием

$$y = \begin{cases} -3x - 4, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 3x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases} \quad (\text{см. рис. 203})$$

Проводим прямую MB , проходящую через точки с координатами $(0; 1)$ и $(2; 2)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$ и имеет угловой

коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Проведём прямую ME , проходящую через точку с координатами $(0; 1)$ параллельно прямой $y = 3x - 4$. Очевидно, угловой коэффициент этой прямой $k_2 = 3$. При положительном k прямая $y = kx + 1$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла BME . Следовательно, $k_1 < k < k_2$; $\frac{1}{2} < k < 3$.

Ответ: $(0,5; 3)$.

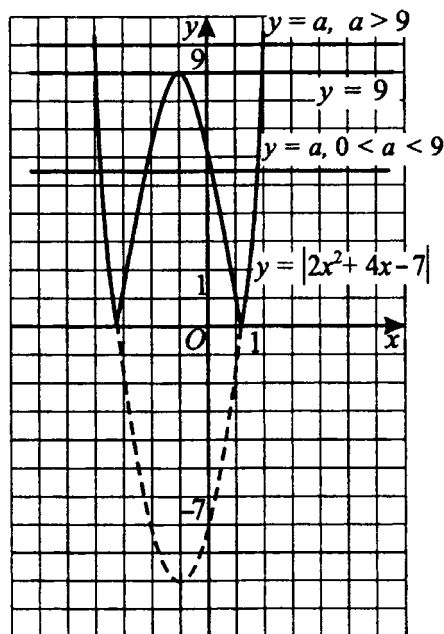


Рис. 202

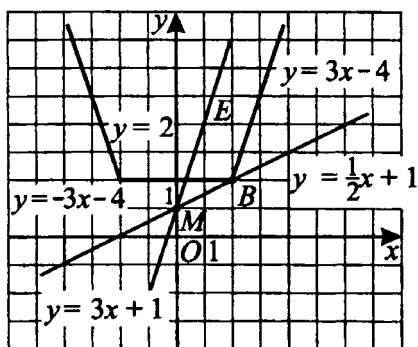


Рис. 203

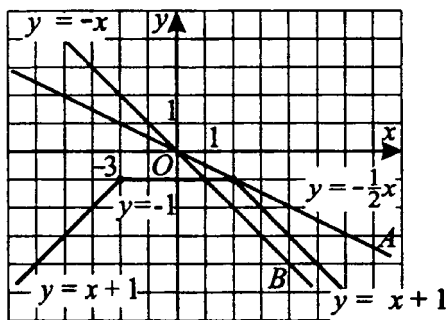


Рис. 204

526. Построим ломаную, заданную условием

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x < -2, \\ -1, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ -x + 1, & \text{если } x > 2. \end{cases} \quad (\text{см. рис. 204})$$

Проводим прямую OA , проходящую через начало координат и точку с координатами $(2; -1)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = -\frac{1}{2}x$ и имеет

угловой коэффициент $k_1 = -\frac{1}{2}$. Проведём прямую OB , проходящую через начало координат параллельно прямой $y = -x + 1$. Угловой коэффициент этой прямой $k_2 = -1$. При отрицательном значении k прямая $y = kx$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла AOB . Следовательно, $k_2 < k < k_1$; $-1 < k < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-1; -0,5)$.

527. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 0,3x + p$ с осями координат.

1) С осью Ox : $y = 0$; $0,3x + p = 0$; $x = -\frac{10p}{3}$; $(-\frac{10p}{3}; 0)$.

2) С осью Oy : $x = 0$; $y = p$; $(0; p)$.

3) Прямая $y = 0,3x + p$ образует с осями координат прямоугольный треугольник (см. рис. 205) с катетами $|\frac{10p}{3}|$ и $|p|$. По условию площадь треугольника равна 60; $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}|p| \cdot |p| = \frac{5}{3}p^2$. Из уравнения $\frac{5}{3}p^2 = 60$ находим $p = \pm 6$.

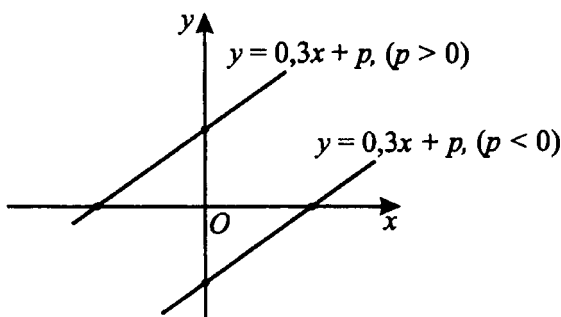


Рис. 205

Ответ: ± 6 .

528. $y = -2x + p$, $S_{\triangle AOB} = 49$, $S_{\triangle AOB} = \frac{|AO| \cdot |BO|}{2}$ (см. рис. 206).

Найдём координаты точек:

а) $A(0; y)$. $y = -2x + p$, $x = 0$, $y = p$, $A(0; p)$.

$$6) B: B(x; 0). y = -2x + p, -2x + p = 0, x = \frac{1}{2}p, B\left(\frac{1}{2}p; 0\right).$$

$$S_{OAB} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{2}, S_{OAB} = \frac{|p| \cdot \frac{1}{2} \cdot |p|}{2}, \frac{1}{4}p^2 = 49, p^2 = 4 \cdot 49, p = \pm 14.$$

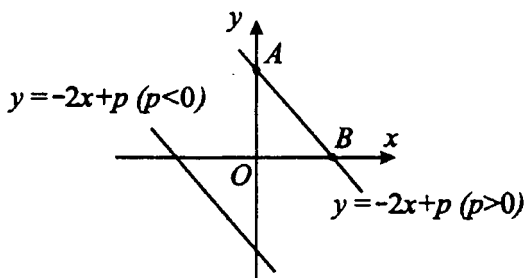


Рис. 206

Ответ: $-14; 14$.

529. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = -1,5x + n$ с осями координат.

С осью Ox : $\left(\frac{2}{3}n; 0\right)$, с осью Oy : $(0; n)$.

Прямая $y = -1,5x + n$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{3}n\right|$ и $|n|$.

По условию площадь треугольника равна 75.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot |n| \cdot |n| = \frac{1}{3} \cdot n^2. \text{ Решим уравнение}$$

$$\frac{1}{3}n^2 = 75, n^2 = 225, n_{1,2} = \pm 15.$$

Ответ: ± 15 .

530. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 7x - 2m$ с осями координат.

С осью Ox : $\left(\frac{2}{7}m; 0\right)$, с осью Oy : $(0; -2m)$.

Прямая $y = 7x - 2m$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{7}m\right|$ и $|-2m|$.

По условию площадь треугольника равна 14.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot |m| \cdot 2 \cdot |m| = 14; m^2 = \frac{14 \cdot 7}{2}; m^2 = 49; m_{1,2} = \pm 7.$$

Ответ: ± 7 .

531. $2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0$. $x_1 < 2 < x_2$, где x_1 и x_2 — корни.

1) Найдём корни уравнения

$$4x^2 - x + 2(k-3)(k+5) = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)}}{8}.$$

2) Тогда по условию

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)}}{8} < 2 < \frac{1 + \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} < 16 < 1 + \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} < 16, \\ 1 + \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} > 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} < 15, \\ \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} > -15, \\ \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)} > 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 32(k-3)(k+5) > 225 \Leftrightarrow 32(k-3)(k+5) < -224 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k - 15 < -7 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 8 < 0 \Leftrightarrow -4 < k < 2.$$

Ответ: $(-4; 2)$.

$$533. 9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3 = 0.$$

Введём обозначение: $f(x) = 9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3$,

$f(x) = 9x^2 - 6x - l^2 + 1$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, можно сделать вывод, что число 2 находится между корнями уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(2) < 0$ (см. рис. 207). Решим неравенство $f(2) < 0$. $9 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - l^2 + 1 < 0$; $25 - l^2 < 0$; $(l-5)(l+5) > 0$; $l < -5$, $l > 5$ (см. рис. 208).

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

534. Обозначим $y = kx^2 - (k-3)x + k$ (1) и

$$y = (2k-1) \cdot x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4} \quad (2).$$

1) Так как по условию прямая $y = kx + 1$ и парабола (1) имеют ровно две общие точки, то уравнение $kx^2 - (k-3)x + k = kx + 1$ имеет 2 различных действительных корня, значит, $D > 0$.

$$kx^2 - 2kx + 3x + k - 1 = 0; kx^2 + (3-2k)x + (k-1) = 0.$$

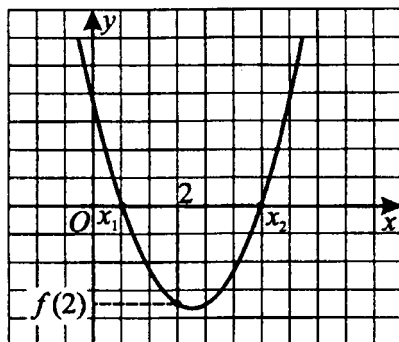


Рис. 207

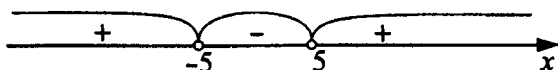


Рис. 208

$$D = (3 - 2k)^2 - 4k(k - 1); 9 - 12k + 4k^2 - 4k^2 + 4k > 0; -8k + 9 > 0; k < \frac{9}{8}.$$

2) Так как прямая $y = kx + 1$ не пересекает параболу (2), уравнение $(2k - 1)x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4} = kx + 1$ не имеет действительных корней, значит, $D < 0$.

$$(2k - 1)x^2 - 3kx + k + \frac{5}{4} = 0.$$

$$D = 9k^2 - 4(2k - 1)\left(k + \frac{5}{4}\right) = 9k^2 - 8k^2 - 10k + 4k + 5 = k^2 - 6k + 5.$$

Решим неравенство $k^2 - 6k + 5 < 0$; $(k - 5)(k - 1) < 0$; $1 < k < 5$ (см. рис. 209).

$$3) \text{ Таким образом, } \begin{cases} k < \frac{9}{8}, \\ 1 < k < 5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k < \frac{9}{8}.$$



Рис. 209

Ответ: $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

535. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:

$$3(4x^2 - 12x + 9 + 2)(x^2 + 22x + 121 + 4) = 24 - a^2;$$

$$3((2x - 3)^2 + 2)((x + 11)^2 + 4) = 24 - a^2;$$

$$3((2x - 3)^2(x + 11)^2 + 4(2x - 3)^2 + 2(x + 11)^2 + 8) = 24 - a^2;$$

$$3(2x - 3)^2(x + 11)^2 + 12(2x - 3)^2 + 6(x + 11)^2 + 24 = 24 - a^2;$$

$$3(2x - 3)^2(x + 11)^2 + 12(2x - 3)^2 + 6(x + 11)^2 = -a^2.$$

Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x , правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней ни при каких значениях параметра a .

536. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:

$$(49x^2 - 112x + 64 + 1)(x^2 + 26x + 169 + 2) = 2 - x^2;$$

$$((7x - 8)^2 + 1)((x + 13)^2 + 2) = 2 - x^2;$$

$$(7x - 8)^2(x + 13)^2 + 2(7x - 8)^2 + (x + 13)^2 + 2 = 2 - x^2;$$

$$(7x - 8)^2(x + 13)^2 + 2(7x - 8)^2 + (x + 13)^2 = -x^2.$$

Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x , правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

537. Касание прямой и параболы означает, что они имеют лишь одну общую точку (для графиков других функций, отличных от квадратичной, это может быть и не так). То есть нужно определить, при каких значениях параметров k и a уравнение $ax^2 = k(x - a)$ имеет единственный корень. $ax^2 - kx + ka = 0$, $D = k^2 - 4ka^2$, квадратное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $D = 0$, то есть $k(k - 4a^2) = 0$. В случае $k = 0$ прямой, данной в условии, является прямая $y = 0$, ордината точки касания никак не может быть равна 4, то есть $k \neq 0$. Тогда из уравнения $k(k - 4a^2) = 0$ получаем, что $k = 4a^2$. Пусть $(x_0; y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки касания является корнем уравнения

$$ax^2 - kx + ka = 0, \text{ и так как } D = 0, \text{ то } x_0 = \frac{k}{2a} = \frac{4a^2}{2a} = 2a.$$

Подставляя x_0 в уравнение прямой, получаем ординату точки касания $y_0 = k(x_0 - a) = 4a^2(2a - a) = 4a^3$. По условию $y_0 = 4$, то есть $4a^3 = 4$; $a = 1$; $k = 4a^2 = 4$.

Ответ: $k = 4$; $a = 1$.

538. По условию прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2 + bx$, абсцисса точки касания $x = 2$.

а) Выразим b через k из уравнения $x^2 + bx = kx + b$, зная, что $x = 2$:
 $4 + 2b = 2k + b$, $b = 2k - 4$.

б) Уравнение $x^2 + bx = kx + b$, $x^2 + (b - k)x - b = 0$ имеет 1 корень, тогда $D = 0$. $D = (b - k)^2 + 4b$, $b^2 - 2bk + k^2 + 4b = 0$.

в) Найдём b и k из условий а) и б):

$$\begin{cases} b = 2k - 4, \\ b^2 - 2bk + k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

$$(2k - 4)^2 - 2k \cdot (2k - 4) + k^2 + 4 \cdot (2k - 4) = 0,$$

$$4k^2 - 16k + 16 - 4k^2 + 8k + k^2 + 8k - 16 = 0, k = 0, \text{ тогда } b = 2 \cdot 0 - 4 = -4.$$

Ответ: $k = 0$; $b = -4$.

539. $x^2 - (a + 4)x + 2a + 5 = 0$, так как уравнение имеет два корня, то $D > 0$, $D = (a + 4)^2 - 4(2a + 5)$; $a^2 + 8a + 16 - 8a - 20 > 0$; $a^2 - 4 > 0$, кроме того

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq -2; \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \geq -2; \frac{a + 4}{2a + 5} \geq -2; \frac{a + 4 + 4a + 10}{2a + 5} \geq 0;$$

$$\frac{5a + 14}{2a + 5} \geq 0, \text{ таким образом,}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ \frac{5a + 14}{2a + 5} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (a - 2)(a + 2) > 0, \\ \frac{5a + 14}{2a + 5} \geq 0. \end{cases}$$

$$(-\infty; -2,8] \cup (-2,5; -2) \cup (2; +\infty) \text{ (см. рис. 210).}$$

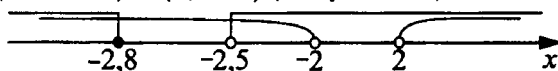


Рис. 210

Ответ: $(-\infty; -2,8] \cup (-2,5; -2) \cup (2; +\infty)$.

540. Данное уравнение может иметь два различных корня лишь тогда, когда оно квадратное (то есть $a \neq 0$) и его дискриминант положителен.

$$D = (2a + 3)^2 - 4a(a + 2) = 4a + 9 > 0 \Rightarrow \text{при } a > -\frac{9}{4}, a \neq 0$$

данное уравнение имеет два различных корня — x_1, x_2 . По условию, нужно выбрать те значения параметра a , при которых $x_1^2 + x_2^2 > 3$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через коэффициенты данного уравнения, воспользовавшись теоремой Виета и тождеством $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(2a + 3)^2}{a^2} - \frac{2(a + 2)}{a} = \frac{2a^2 + 8a + 9}{a^2}. \text{ Решим неравенство}$$

$$\frac{2a^2 + 8a + 9}{a^2} > 3. \text{ С учётом условия } a \neq 0 \text{ оно равносильно неравенству}$$

$2a^2 + 8a + 9 > 3a^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 < 0; a \in (-1; 9)$. Остаётся вспомнить, что условие $a > -\frac{9}{4}$ при $a \in (-1; 9)$ выполнено. Учитывая, что $a \neq 0$, получаем $a \in (-1; 0) \cup (0; 9)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 9)$.

542. Наименьшее трёхзначное число, кратное 15, — это 105, наибольшее — 990. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 105$, $a_n = 990$, $d = 15$.

Найдём число членов этой прогрессии, применив формулу общего члена.

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1), 105 + 15 \cdot (n - 1) = 990, 7 + n - 1 = 66, n = 60.$$

Сумму членов найдём по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, S_{60} = \frac{105 + 990}{2} \cdot 60 = 32\,850.$$

Ответ: 32 850.

543. Наименьшее трёхзначное число, кратное 14, — это 112, наибольшее — 994. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 112$, $a_n = 994$, $d = 14$.

Найдём число элементов этой прогрессии, применив формулу общего члена. $a_n = a_1 + d(n - 1); 112 + 14(n - 1) = 994; 8 + n - 1 = 71; n = 64$.

Сумму членов найдём по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_{64} = \frac{112 + 994}{2} \cdot 64 = 35\,392.$$

Ответ: 35 392.

544. Пусть t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 — заданные числа.

По условию $\sqrt{t_1 \cdot t_2} = 243$, тогда $t_1 \cdot t_2 = 243^2 = 3^{10}$, а $\sqrt[3]{t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = 32$, тогда $t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 32^3 = 2^{15}$. Имеем $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 3^{10} \cdot 2^{15}$, среднее геометрическое всех пяти чисел равно:

$$\sqrt[5]{t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = \sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}} = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72.$$

Ответ: 72.

545. Графиком функции $y = x^2 - (2a - 1)x + 3a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдём координаты вершины параболы:

$$x_0 = \frac{2a - 1}{2} = a - 0,5,$$

$$y_0 = (a - 0,5)^2 - (2a - 1)(a - 0,5) + 3a = a^2 - a + 0,25 - 2a^2 + 2a - 0,5 + 3a = -a^2 + 4a - 0,25.$$

$(a - 0,5; -a^2 + 4a - 0,25)$ — искомые координаты. $E(y) = [y_0; +\infty)$.

По условию задачи необходимо, чтобы $E(y) = [1,5; +\infty)$, значит, $y_0 = 1,5$.

$$-a^2 + 4a - 0,25 = 1,5; a^2 - 4a + 1,75 = 0; a_1 = 0,5, a_2 = 3,5.$$

Ответ: 0,5; 3,5.

546. По условию задачи окружность $x^2 + y^2 = 10$ не имеет общих точек с прямой $mx + y = 10$, значит, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ mx + y = 10 \end{cases}$ должна быть несовместной.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = 10 - mx; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (10 - mx)^2 = 10, \\ y = 10 - mx. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы:

$$x^2 + 100 - 20mx + m^2x^2 - 10 = 0, (1 + m^2)x^2 - 20mx + 90 = 0. \\ 1 + m^2 \neq 0, \text{ поэтому уравнение квадратное. Оно не должно иметь действительных корней, следовательно, } D < 0.$$

$$(20m)^2 - 4 \cdot 90 \cdot (1 + m^2) < 0, 400m^2 - 360m^2 < 360, 40m^2 < 360, m^2 < 9, |m| < 3.$$

Ответ: $(-3; 3)$.

547. Найдём координаты вершины параболы $y = 2x^2 + ax + 1$.

$$x_0 = -\frac{a}{2 \cdot 2} = -\frac{a}{4};$$

$$y_0 = 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) + 1 = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^2 - 2a^2 + 8}{8} = \frac{8 - a^2}{8};$$

$$\left(-\frac{a}{4}; \frac{8 - a^2}{8}\right) \text{ — координаты вершины.}$$

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0 , лежащей на прямой $y = x$,

$$y_1 = -\frac{a}{4}.$$

Поскольку вершина параболы лежит выше прямой, ордината y должна быть больше ординаты y_1 . Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$$\frac{8 - a^2}{8} > -\frac{a}{4}; \frac{8 - a^2}{8} > -\frac{2a}{8}; 8 - a^2 > -2a; a^2 - 2a - 8 < 0;$$

$$(a + 2)(a - 4) < 0; -2 < a < 4.$$

Целые искомые значения параметра a : $-1; 0; 1; 2; 3$.

Ответ: $-1; 0; 1; 2; 3$.

548. Найдём координаты вершины параболы $y = x^2 + ax - 2$.

$$x_0 = -\frac{a}{2}; y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 = -\frac{a^2}{4} - 2.$$

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0 , лежащей на прямой $y = 2x$:

$$y_1 = 2\left(-\frac{a}{2}\right) = -a.$$

Поскольку вершина параболы лежит ниже прямой, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0 . Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$-\frac{a^2}{4} - 2 < -a$; $a^2 - 4a + 8 > 0$; $(a-2)^2 + 4 > 0$. Это неравенство верно при любом действительном значении a . В задаче необходимо найти все целые значения a , следовательно, $a \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $a \in \mathbb{Z}$.

549. $y = x^2 - x + 1$, $x + my - 1 = 0$.

По условию задачи парабола $y = x^2 - x + 1$ имеет с прямой $x + my - 1 = 0$ единственную общую точку, значит, система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 1, & (1) \\ x + my - 1 = 0 & (2) \end{cases} \text{ должна иметь единственное решение.}$$

Из второго уравнения системы выразим x через y и подставим в первое уравнение:

$$x = 1 - my, y = (1 - my)^2 - (1 - my) + 1, 1 - 2my + m^2 y^2 - 1 + my - y + 1 = 0, m^2 y^2 - (m + 1) \cdot y + 1 = 0.$$

1) $m = 0$, $-y + 1 = 0$, $y = 1$, уравнение имеет единственный корень, значит, система имеет единственное решение, что удовлетворяет условию задачи.

2) $m \neq 0$, уравнение квадратное, оно должно иметь единственный корень, следовательно, $D = 0$.

$$(m + 1)^2 - 4m^2 = 0, m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0, 3m^2 - 2m - 1 = 0, m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{3}.$$

При $m_1 = 1$ и $m_2 = -\frac{1}{3}$ система имеет единственное решение.

Ответ: 0, 1, $-\frac{1}{3}$.

550. 1. Отметим, что если $m = 0$, то прямая $-x - 1 = 0$ имеет с параболой единственную общую точку.

2. $m \neq 0$. Система

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ my - x - 1 = 0; \end{cases}$$

должна иметь единственное решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ x = my - 1. \end{cases}$$

Подставив значение x из второго уравнения системы в первое уравнение, получим $y = (my - 1)^2 + (my - 1) + 1$; $y = m^2y^2 - my + 1$; $m^2y^2 - (m + 1)y + 1 = 0$.

Уравнение должно иметь один корень, следовательно, $D = 0$.
 $(m + 1)^2 - 4m^2 = 0$; $m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0$; $3m^2 - 2m - 1 = 0$;

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}; \quad m_1 = 1, \quad m_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: 0; 1; $-\frac{1}{3}$.

551. Найдём абсциссу вершины параболы $y = x^2 - 2ax + 43$:

$$x_0 = \frac{2a}{2} = a.$$

1) Пусть $x_0 < -2$, тогда $a < -2$. Так как ветви параболы направлены вверх, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция возрастает (см. рис. 211).

$y_{\text{наим.}} = y(-2) = 4 - 2a \cdot (-2) + 43 = 7$; $4a = -40$; $a = -10$. $a = -10$ удовлетворяет условию $a < -2$.

2) Пусть $x_0 \geq -2$, тогда $a \geq -2$. Наименьшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 212).

$y_{\text{наим.}} = y(x_0) = y(a) = a^2 - 2a^2 + 43 = 7$; $a^2 = 36$; $a_1 = 6$; $a_2 = -6$ — не удовлетворяет условию $a \geq -2$.

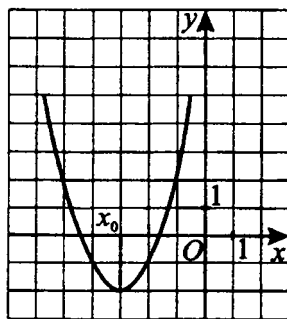


Рис. 211

Ответ: -10; 6.

552. Найдём абсциссу вершины параболы $y = -x^2 + 2ax - 71$ на $[-3; +\infty)$:

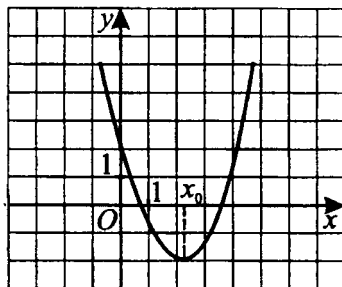


Рис. 212

$$x_0 = \frac{-2a}{-2} = a.$$

1) Пусть $x_0 < -3$, тогда $a < -3$. Так как ветви параболы направлены вниз, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция убывает (см. рис. 213).

$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = -9 + 2a \cdot (-3) - 71 = 10; -6a = 90; a = -15$ — удовлетворяет условию $a < -3$.

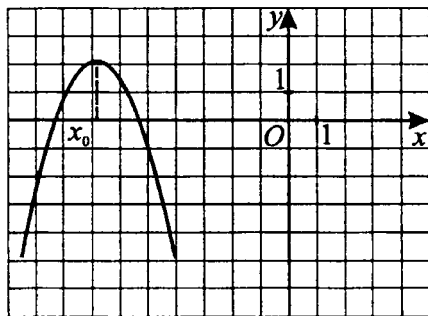


Рис. 213

2) Пусть $x_0 \geq -3$, тогда $a \geq -3$. Наибольшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 214).

$y_{\text{наиб.}} = y(x_0) = y(a) = -a^2 + 2a^2 - 71 = 10; a^2 = 81; a_1 = 9, a_2 = -9$ — не удовлетворяет условию $a \geq -3$.

Ответ: $-15; 9$.

$$553. x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + 1}; x_1 = a - 1, x_2 = a + 1.$$

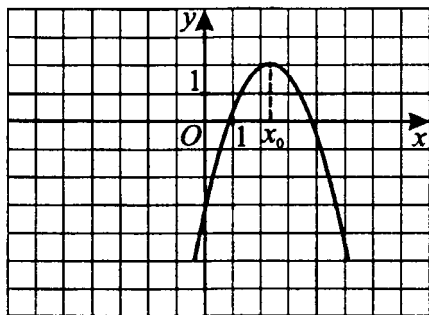


Рис. 214

По условию задачи число 3 заключено между корнями уравнения, то есть

$$a - 1 < 3 < a + 1; \begin{cases} a - 1 < 3, \\ a + 1 > 3; \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a > 2; \end{cases} \quad 2 < a < 4.$$

Ответ: $2 < a < 4$.

$$554. x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0.$$

1) Найдём допустимые значения параметра a . Уравнение имеет действительные корни, если $D \geq 0$.

$$D = (6a)^2 - 4(9a^2 - 2a + 2) = 36a^2 - 36a^2 + 8a - 8 = 8a - 8; \quad 8a - 8 \geq 0;$$

$$a \geq 1. \text{ Абсцисса вершины параболы } x_0 = \frac{6a}{2} = 3a \geq 3.$$

2) Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, значит, на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, где $x_2 \geq x_1$, функция принимает положительные значения. Из условия следует: $3 \in (-\infty; x_1)$ (см. рис. 215), значит, $y(3) > 0$.

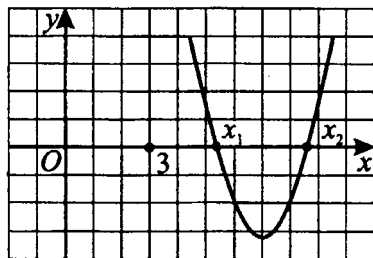


Рис. 215

3) Найдём значения параметра a , решив систему неравенств

$$\begin{cases} 3^2 - 6a \cdot 3 + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9 - 18a + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9(a-1)\left(a - \frac{11}{9}\right) > 0, \\ a \geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 1, \\ a > \frac{11}{9}, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad a > \frac{11}{9} \text{ (см. рис. 216).}$$

Так как $x_0 \geq 3$, то случай, при котором оба корня меньше 3, невозможен.

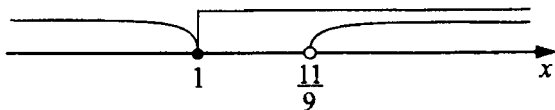


Рис. 216

Ответ: $a > \frac{11}{9}$.

555. Пусть (x_0, y_0) — координаты вершины данной параболы, тогда

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ где } b = -7, a = m, \text{ то есть } x_0 = \frac{7}{2m} \ (m \neq 0).$$

Так как вершина параболы должна лежать во II-ой четверти, то $x_0 < 0$;
 $\frac{7}{2m} < 0$; $m < 0$. Ветви параболы направлены вниз. Так как вершина находится во II-ой четверти, то квадратный трёхчлен имеет 2 различных действительных корня.

$$D > 0; 49 - 16m^2 > 0; -\frac{7}{4} < m < \frac{7}{4}; \text{ учитывая, что } m < 0, \text{ получаем}$$

$$-\frac{7}{4} < m < 0.$$

Ответ: $(-1,75; 0)$.

556. ОДЗ: $x \in [2; 7]$.

Левая часть уравнения $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} = c$ есть сумма двух неотрицательных чисел, следовательно, $c \geq 0$.

Тогда $(\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x})^2 = c^2$; $x-2+7-x+2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2$;
 $2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2 - 5$. Отсюда $c^2 \geq 5$. Так как $c \geq 0$, то $c \geq \sqrt{5}$.

$4(7x - x^2 + 2x - 14) = c^4 - 10c^2 + 25$; $4x^2 - 36x + c^4 - 10c^2 + 81 = 0$. Так как заданное уравнение должно иметь хотя бы один корень, то и полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь хотя бы один корень. Следовательно, $D = 36^2 - 4 \cdot 4(c^4 - 10c^2 + 81) \geq 0$; $c^4 - 10c^2 \leq 0$; $c^2(c^2 - 10) \leq 0$. Учитывая, что $c \geq \sqrt{5}$, получаем $c^2 - 10 \leq 0$, $c \leq \sqrt{10}$.

Таким образом, $\sqrt{5} \leq c \leq \sqrt{10}$. Отрезок $[\sqrt{5}; \sqrt{10}]$ содержит единственное целое число 3.

Подставляя $c = 3$ в заданное уравнение, получаем два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$. Следовательно, $c = 3$ — искомое значение.

Ответ: 3.

$$557. 2\sqrt{x+3} + \sqrt{11-4x} = c. (1)$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных чисел, значит, $c \geq 0$. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ 11-4x \geq 0, \\ c \geq 0, \\ (2\sqrt{x+3} + \sqrt{11-4x})^2 = c^2; \\ x \geq -3, \\ x \leq \frac{11}{4}, \\ c \geq 0, \\ 4x+12+4\sqrt{(x+3)(11-4x)}+11-4x = c^2; \\ -3 \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ c \geq 0, \\ 4\sqrt{11x-4x^2+33-12x} = c^2-23; \\ -3 \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ c \geq 0, \\ c^2-23 \geq 0, \\ 16(33-x-4x^2) = (c^2-23)^2; \\ -3 \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ c \geq 0, \\ |c| \geq \sqrt{23}, \\ 64x^2+16x-528+(c^2-23)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ c \geq \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + (c^2 - 23)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $64x^2 + 16x - (528 - (c^2 - 23)^2) = 0$. (2)

По условию уравнение (1) должно иметь хотя бы один корень, значит, дискриминант уравнения (2) должен быть неотрицательным числом.

$$\begin{aligned} D \geq 0; & 16^2 + 4 \cdot 64 \cdot (528 - (c^2 - 23)^2) \geq 0; \quad 529 - (c^2 - 23)^2 \geq 0; \\ (c^2 - 23)^2 & \leq 529; \quad |c^2 - 23| \leq 23; \quad -23 \leq c^2 - 23 \leq 23; \quad 0 \leq c^2 \leq 46; \\ |c| & \leq \sqrt{46}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $c \geq \sqrt{23}$, имеем

$$\begin{cases} c \geq \sqrt{23}, \\ -\sqrt{46} \leq c \leq \sqrt{46}; \end{cases} \quad \sqrt{23} \leq c \leq \sqrt{46}.$$

Отрезок $[\sqrt{23}; \sqrt{46}]$ содержит два целых числа: 5 и 6.

Проверка показала, что при $c = 5$ уравнение (1) имеет один корень, при $c = 6$ два корня (выполните самостоятельно).

Ответ: 5; 6.

558. Найдём координаты точки пересечения прямых $3x + ay + 1 = 0$ и $2x - 3y - 4 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + ay = -1, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на -3 , а затем сложим полученные уравнения: $(2a + 9)y = -14$; $y = -\frac{14}{2a + 9}$; $a \neq -4,5$.

б) Умножим первое уравнение системы на 3, второе — на a , получим $9x + 3ay = -3$ и $2ax - 3ay = 4a$, сложим полученные уравнения

$$(9 + 2a)x = 4a - 3, \quad x = \frac{4a - 3}{9 + 2a}, \quad a \neq -4,5.$$

$\left(\frac{4a - 3}{9 + 2a}; -\frac{14}{2a + 9}\right)$ — искомые координаты. При $a = -4,5$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи точка находится в третьей координатной четверти, значит, и абсцисса, и ордината — отрицательные числа. Найдём значения параметра a ($a \neq -4,5$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{4a-3}{9+2a} < 0, \\ -\frac{14}{2a+9} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4a-3}{2a+9} < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a-3 < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < \frac{3}{4}, \\ a > -\frac{9}{2}; \end{cases}$$

$$-4,5 < a < 0,75.$$

Ответ: $(-4,5; 0,75)$.

559. Найдём координаты точки пересечения прямых $x + 5y - 3 = 0$ и $ax - 2y - 1 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ ax - 2y = 1. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на $-a$ и сложим со вторым уравнением; получим $(-5a - 2)y = -3a + 1$; $y = \frac{3a-1}{5a+2}$; $a \neq -0,4$.

б) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на 5, и сложим полученные уравнения; получим $(2 + 5a)x = 11$; $x = \frac{11}{5a+2}$; $a \neq -0,4$.

$\left(\frac{11}{5a+2}; \frac{3a-1}{5a+2}\right)$ — координаты точки пересечения заданных прямых.

При $a = -0,4$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи, точка находится в четвёртой координатной четверти, значит, её абсцисса положительная, а ордината отрицательная.

Найдём значения параметра a ($a \neq -0,4$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{11}{5a+2} > 0, \\ \frac{3a-1}{5a+2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+2 > 0, \\ a - \frac{1}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -0,4, \\ a < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$-0,4 < a < \frac{1}{3}$ — решение системы неравенств.

Ответ: $\left(-0,4; \frac{1}{3}\right)$.

560. По определению корнем уравнения является число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. Так как число $2 + \sqrt{5}$ является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$, то $(2 + \sqrt{5})^3 - 5(2 + \sqrt{5})^2 + 3(2 + \sqrt{5}) + b = 0$ — верное числовое равенство, из которого находим, что

$$\begin{aligned} b &= -(2 + \sqrt{5})^3 + 5(2 + \sqrt{5})^2 - 3(2 + \sqrt{5}) = \\ &= -8 - 12\sqrt{5} - 30 - 5\sqrt{5} + 20 + 20\sqrt{5} + 25 - 6 - 3\sqrt{5} = 1. \end{aligned}$$

Итак, $b = 1$.

Ответ: $b = 1$.

561. Точка $M(3; 1)$ лежит вне заданной окружности, следовательно, через неё можно провести две касательные к этой окружности. Подставляя координаты этой точки в общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, получим $1 = 3k + b$; $b = 1 - 3k$. Следовательно, уравнения прямых, проходящих через точку M , имеют вид $y = kx + 1 - 3k$.

Каждая из прямых должна иметь с данной окружностью одну общую точку. Следовательно, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = kx + 1 - 3k \end{cases}$ должна иметь относительно x и y единственное решение. Подставляя значение y из второго уравнения системы в первое, получим

$$x^2 + (kx + 1 - 3k)^2 = 5; (1 + k^2)x^2 + 2(k - 3k^2)x + 9k^2 - 6k - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень, если

$$D = 4(k - 3k^2)^2 - 4(1 + k^2)(9k^2 - 6k - 4) = 0; 2k^2 - 3k - 2 = 0; k_1 = -0,5, k_2 = 2. \text{ Тогда } b_1 = 1 - 3k_1 = 2,5, b_2 = 1 - 3k_2 = -5.$$

Таким образом, искомые уравнения касательных имеют вид $y = -0,5x + 2,5$ и $y = 2x - 5$.

Ответ: $y = -0,5x + 2,5$; $y = 2x - 5$.

562. 1) Пусть $a = 0$, тогда $y = 2x + 2$; графиком этой функции является прямая, пересекающая ось Ox в одной точке, что удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $a \neq 0$, тогда графиком функции $y = ax^2 + 2x - a + 2$ является парабола.

Для того чтобы она пересекала ось Ox только в одной точке, необходимо равенство нулю дискриминанта уравнения $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$.

$$D = 4 - 4a(2 - a) = 0; 4a^2 - 8a + 4 = 0; a^2 - 2a + 1 = 0; (a - 1)^2 = 0; a = 1.$$

Ответ: 0; 1.

563. Найдём координаты точки пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = 2a - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 2a - 3x, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a - 3}{5}, \\ y = \frac{4a + 9}{5}. \end{cases}$$

$\left(\frac{2a - 3}{5}, \frac{4a + 9}{5}\right)$ — искомые координаты.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой $x = \frac{2a-3}{5}$, лежащей на прямой

$$y = x: y_1 = \frac{2a-3}{5}.$$

Поскольку точка пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$ лежит выше прямой $y = x$, то ордината $y_1 = \frac{2a-3}{5} < \frac{4a+9}{5}$.

Найдём значения параметра a , решив неравенство:

$$\frac{4a+9}{5} > \frac{2a-3}{5}; 4a+9 > 2a-3; 2a > -12; a > -6.$$

Ответ: $a \in (-6; +\infty)$.

564. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$.

Точки $A(1; 2)$, $B(3; a+1)$, $C(a; 4)$ лежат на прямой, значит, $y(1) = 2$, $y(3) = a+1$, $y(a) = 4$ и имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} k+b=2, \\ 3k+b=a+1, \\ ak+b=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ 3k+2-k=a+1, \\ ak+2-k=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\frac{a-1}{2}, \\ \frac{(a-1)^2}{2}=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\frac{a-1}{2}, \\ |a-1|=2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\frac{a-1}{2}, \\ \begin{cases} a-1=2, \\ a-1=-2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\frac{a-1}{2}, \\ \begin{cases} a=3, \\ a=-1. \end{cases} \end{cases}$$

При $a = -1$, $k = -1$, $b = 3$, $y = -x + 3$,
при $a = 3$, $k = 1$, $b = 1$, $y = x + 1$.

Ответ: $-1, 3$.

565. Найдём абсциссу x_0 точки пересечения прямых

$y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$, приравняв ординаты y . Получаем

$5x_0 - 3 = a + 1 - 2x_0$, откуда $x_0 = \frac{a+4}{7}$. Тогда ордината точки пересечения

прямых $y_0 = \frac{5a-1}{7}$. Далее находим ординату y_1 точки с абсциссой x_0 ,

лежащей на прямой $y = -x$: $y_1 = -\frac{a+4}{7}$. Поскольку точка пересечения прямых $y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$ лежит ниже прямой $y = -x$, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0 . Следовательно, условие задачи выполняется при всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $-\frac{a+4}{7} > \frac{5a-1}{7}$; $a < -0,5$.

Ответ: $a \in (-\infty; -0,5)$.

566. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$. Графиком функции $y = x^2 - 6x + 4$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_0 = \frac{-(-6)}{2} = 3$, а ордината равна $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$. Отражая часть графика $y = x^2 - 6x + 4$, расположенную ниже оси Ox , симметрично относительно оси Ox , получаем график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, эскиз которого изображён на рисунке 217.

Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 6x + 4|$ в двух точках, при $0 < a < 5$ — в четырёх точках, при $a = 5$ — в трёх точках и при $a > 5$ — в двух точках.

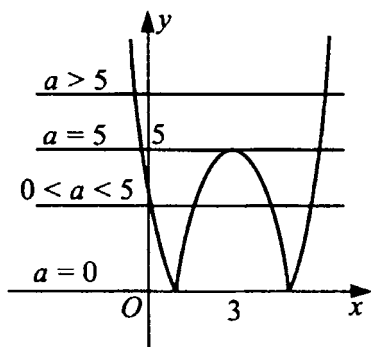


Рис. 217

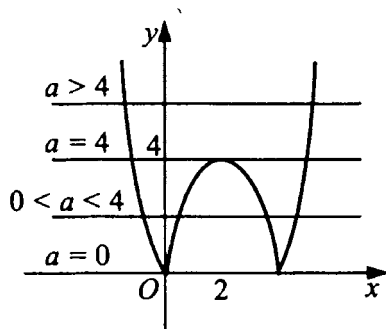


Рис. 218

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 5$; 3 при $a = 5$; 2 при $a > 5$.

567. Определим, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 4x|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, абсцисса вершины которой $x_0 = \frac{-(-4)}{2} = 2$, ордината $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

Отражая часть графика $y = x^2 - 4x$, расположенную ниже оси Ox , симметрично относительно оси Ox , получаем график функции $y = |x^2 - 4x|$,

эскиз которого изображён на рисунке 218. Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x|$ в двух точках, при $0 < a < 4$ — в четырёх точках, при $a = 4$ — в трёх точках и при $a > 4$ — в двух точках.

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.

568. Выразим y из первого уравнения системы $y = nx - 5$ и подставим во второе: $2x + 3n(nx - 5) = 7$. Выразим теперь x через n :

$$2x + 3n(nx - 5) = 7 \Leftrightarrow (3n^2 + 2)x - 15n = 7 \Leftrightarrow x = \frac{15n + 7}{3n^2 + 2}. \text{ Тогда}$$

$$y = nx - 5 = \frac{n(15n + 7)}{3n^2 + 2} - 5 = \frac{7n - 10}{3n^2 + 2}. \text{ Итак, система имеет решение,}$$

зависящее от параметра n : $x = \frac{15n + 7}{3n^2 + 2}, y = \frac{7n - 10}{3n^2 + 2}$. Так как $3n^2 + 2 > 0$, то, для того чтобы выполнялось условие $x > 0, y < 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 15n + 7 > 0, \\ 7n - 10 < 0. \end{cases}$

Решением системы является интервал $-\frac{7}{15} < n < \frac{10}{7}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0$; 1.

Ответ: 0; 1.

569. Выразим y из первого уравнения системы $y = 4 - 2nx$ и подставим во второе: $3x - 2n(4 - 2nx) = 5$. Выразим из этого уравнения x :

$$3x - 2n(4 - 2nx) = 5 \Leftrightarrow (4n^2 + 3)x - 8n = 5 \Leftrightarrow x = \frac{8n + 5}{4n^2 + 3}. \text{ Тогда}$$

$$y = 4 - 2nx = 4 - \frac{2n(8n + 5)}{4n^2 + 3} = \frac{12 - 10n}{4n^2 + 3}. \text{ Итак, система имеет ре-}$$

шение, зависящее от параметра n : $x = \frac{8n + 5}{4n^2 + 3}, y = \frac{12 - 10n}{4n^2 + 3}$. Так как $4n^2 + 3 > 0$, то, для того чтобы $x > 0, y > 0$; необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 8n + 5 > 0, \\ 12 - 10n > 0. \end{cases}$ Решением

системы является интервал $-\frac{5}{8} < n < \frac{6}{5}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0$; 1.

Ответ: 0; 1.

570. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения следующих условий для соответствующего квадратного уравнения: $D < 0$,

$a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 6x + a = 0$ имеем $D = 36 - 4a^2$.
Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 36 - 4a^2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 9 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -3)$ (см. рис. 219).

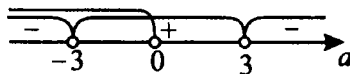


Рис. 219

Ответ: $(-\infty; -3)$.

571. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно для соответствующего квадратного уравнения выполнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 2ax + 3 = 0$ имеем $D = 4a^2 - 12a$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 12a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4a(a - 3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3)$.

572. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 4x + a = 0$ имеем $D = 16 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 16 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4(2 - a)(2 + a) < 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство последней системы методом интервалов и учитывая, что $a > 0$, получим $a \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

573. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 8x + a = 0$ имеем $D = 64 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 64 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 16 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -4)$ (см. рис. 220).

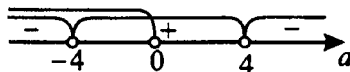


Рис. 220

Ответ: $(-\infty; -4)$.

574. Так как первая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 2$, то $x = 2$ является корнем уравнения $y_1(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_1(x) = 0$, тогда $y_1 = (x - a)(x - 2) = x^2 - x(a + 2) + 2a$; значит, $b = -(a + 2)$, $c = 2a$.

Поскольку $A(1; 2)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система:

$$\begin{cases} y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - (a + 2) + 2a = 2, \\ -1 + k + l = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ k + l = 3. \end{cases}$$

Проекция вершины второй параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = \frac{k}{2}$. Аналогично проекция вершины первой параболы —

точка $x = \frac{a + 2}{2}$. Из условия следует, что $\frac{k}{2} = \frac{a + 2}{2} + 1$. Так как $a = 3$, то

$\frac{k}{2} = \frac{5}{2} + 1 = 3,5$; $k = 7$. Подставив $k = 7$ во второе уравнение последней системы, получим $l = 3 - k = -4$. Таким образом, $k = 7$, $l = -4$.

Ответ: $k = 7$, $l = -4$.

575. Так как вторая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 3$, то $x = 3$ является корнем уравнения $y_2(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_2(x) = 0$, тогда $y_2 = -(x - a)(x - 3) = -x^2 + x(a + 3) - 3a$; значит, $d = a + 3$; $f = -3a$. Поскольку $A(2; 3)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система:

$$\begin{cases} y_1(2) = 3, \\ y_2(2) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 + 2b + c = 3, \\ -4 + 2(a + 3) - 3a = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + c = -1, \\ a = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Проекция вершины первой параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = -\frac{b}{2}$. Аналогично проекция вершины второй параболы

на ось Ox — точка $x = \frac{a + 3}{2}$. Из условия следует, что $\frac{a + 3}{2} = -\frac{b}{2} + 2$.

Так как $a = -1$, то $\frac{b}{2} = 2 - \frac{a+3}{2} = 1$; $b = 2$. Подставив $b = 2$ в уравнение (1), получим $c = -1 - 4 = -5$. Таким образом, $b = 2$, $c = -5$.

Ответ: $b = 2$, $c = -5$.

576. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = -2$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = -2$; $b = 4$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x + 3$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x + 3$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b-2)x + c-3 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c-3) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c-3)$. Подставив $b = 4$, получим: $4 = 4(c-3)$; $c = 4$.

Ответ: $b = 4$; $c = 4$.

577. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = 3$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = 3$; $b = -6$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x - 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x - 5$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b-2)x + c+5 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c+5) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c+5)$. Подставив $b = -6$, получим $64 = 4(c+5)$; $c+5 = 16$; $c = 11$.

Ответ: $b = -6$; $c = 11$.

578. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geq 0$; $4(b-3)(b+2) \geq 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 отрицательны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b < 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -6 < b < 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in (-6; -2]$.

Ответ: $(-6; -2]$.

579. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geq 0$; $4(b-3)(b+2) \geq 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 положительны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow b > 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in [3, +\infty)$.

Ответ: $[3, +\infty)$.

580. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 221), совпадающая при $x < -2$ с графиком гиперболы $y = \frac{4}{x}$, при $-2 \leq x \leq 2$ с графиком прямой $y = \frac{x}{2} - 1$ и при $x > 2$ с графиком параболы $y = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$. Вершина параболы находится в точке $(3; -1)$, ветви направлены вверх. По графику определяем, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две общие точки при $-2 < t < -1$ и при $t = 0$.

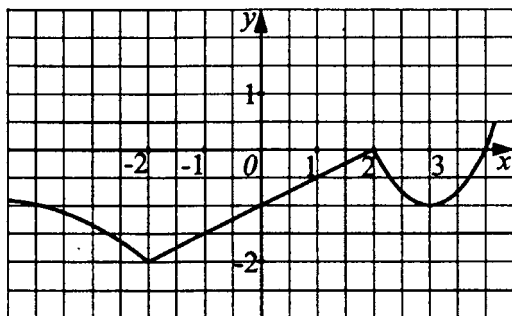


Рис. 221

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup \{0\}$.

581. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 222), совпадающая при $x < -1$ с графиком параболы $y = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2$, вершина которой находится в точке $(-2; 0)$, а ветви направлены вверх; при $-1 \leq x < 0$ с графиком прямой $y = -x + 1$; при $0 \leq x \leq 3$ с графиком прямой $y = x + 1$; при $x > 3$ с графиком гиперболы $y = \frac{12}{x}$. По графику определяем, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $0 < t < 1$ и при $2 < t < 4$.

Ответ: $t \in (0; 1) \cup (2; 4)$.

582. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 223), совпадающая при $x \leq -3$ с графиком гиперболы $y = \frac{6}{x}$, при

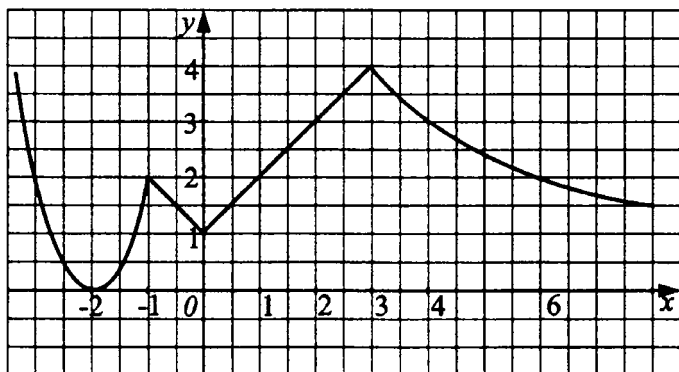


Рис. 222

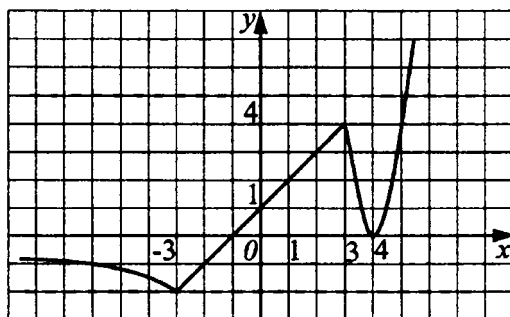


Рис. 223

$-3 < x \leq 3$ с графиком прямой $y = x + 1$ и при $x > 3$ с графиком параболы $y = 4x^2 - 32x + 64 = (2x - 8)^2$.

Вершина параболы находится в точке $(4; 0)$, ветви направлены вверх. По рисунку определяем, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ только одну общую точку при $t = -2$ и при $t > 4$.

Ответ: $\{-2\} \cup (4; +\infty)$.

583. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 224), совпадающая при $x \leq -1$ с графиком гиперболы $y = -\frac{1}{x}$, при $-1 < x \leq 1$ с графиком прямой $y = -x$ и при $x > 1$ с графиком параболы $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$. Вершина параболы находится в точке $(2; 0)$, ветви направлены вниз. По рисунку определяем, что прямая $y = t$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $-1 < t < 0$.

Ответ: $(-1; 0)$.

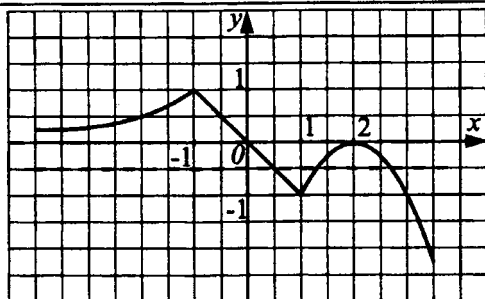


Рис. 224

584. Прямая $y = kx + 4$ не пересекает параболу $y = 3 - 2x - x^2$ тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $3 - 2x - x^2 = kx + 4$ отрицателен.

То есть $D = (k + 2)^2 - 4 = k^2 + 4k + 4 - 4 = k^2 + 4k = k(k + 4) < 0$.

Последнее неравенство имеет решение $-4 < k < 0$. Наибольшее целое значение из этого промежутка $k = -1$.

Ответ: -1 .

585. Прямая $y = kx - 3$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x + 1$ одну общую точку тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 - 2x + 1 = kx - 3$; $x^2 - (2 + k)x + 4 = 0$ равен нулю.

То есть $D = (k + 2)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 + 4k - 12 = 0$. Корни: $k_1 = -6$; $k_2 = 2$. При этих значениях k прямая $y = kx - 3$ и парабола $y = x^2 - 2x + 1$ имеют одну общую точку.

Ответ: -6 ; 2 .

586. Прямая $y = kx - 2$ не пересекает параболу $y = x^2 - x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x - 1 = kx - 2$; $x^2 - (1 + k)x + 1 = 0$ не имеет решений.

То есть $D = (k + 1)^2 - 4 < 0$; $k^2 + 2k - 3 < 0$; $-3 < k < 1$.

Так как по условию $k \geq 0$, то получаем $0 \leq k < 1$.

Ответ: $0 \leq k < 1$.

587. Прямая $y = kx - \frac{41}{4}$ и парабола $y = x^2 + 3x - 4$ имеют не более одной точки пересечения тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4 = kx - \frac{41}{4}$; $x^2 + (3 - k)x + 6,25$ меньше либо равен нулю. $D = (3 - k)^2 - 25 = k^2 - 6k - 16 \leq 0$.

Решениями этого неравенства будут $-2 \leq k \leq 8$. Но так как k — число отрицательное, то $-2 \leq k < 0$.

Ответ: $-2 \leq k < 0$.

588. Прямая $y = kx + 5$ имеет с параболой $y = x^2 - 4x + 14$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 4x + 14 = kx + 5$ имеет один корень.

То есть $D = (k + 4)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 + 8k - 20 = 0$. Корни: $k_1 = -10$, $k_2 = 2$. Но так как по условию k — число отрицательное, то $k = -10$.

Ответ: -10 .

589. Прямая $y = kx - 1$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x + 3$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 2x + 3 = kx - 1$; $x^2 + (2 - k)x + 4 = 0$ имеет один корень.

То есть $D = (2 - k)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 - 4k - 12 = 0$. Решая полученное уравнение, найдём $k_1 = 6$, $k_2 = -2$. Но так как по условию $k < 0$, то выбираем ответ $k = -2$.

Ответ: -2 .

590. Прямая $y = kx - 13$ пересекает параболу $y = x^2 + 3x - 4$ в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 4 = kx - 13$; $x^2 + (3 - k)x + 9 = 0$ имеет два различных решения.

То есть $D = (3 - k)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 - 6k - 27 > 0$. Это неравенство имеет решения: $k < -3$ или $k > 9$. Так как по условию $k > 0$, то получаем ответ $k > 9$.

Ответ: $k > 9$.

591. Графики функций $y = kx - 5$ и $y = x^2 - 2x - 1$ пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x - 1 = kx - 5$; $x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ имеет два различных корня.

То есть $D = (k + 2)^2 - 16 > 0$; $k^2 + 4k - 12 > 0$; $(k + 6)(k - 2) > 0$; $k \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. Так как по условию $k > 0$, то искомые значения $k \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

592. Графики функций $y = kx - 8$ и $y = x^2 + 5x + 1$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x + 1$; $x^2 + (5 - k)x + 9 = 0$ не имеет действительных корней.

То есть $D = (5 - k)^2 - 36 = k^2 - 10k - 11 = (k + 1)(k - 11) < 0$. Решением последнего неравенства является интервал $-1 < k < 11$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 11$.

Ответ: $0 < k < 11$.

593. Графики функций $y = kx - 11$ и $y = x^2 + 6x + 25$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 11 = x^2 + 6x + 25$; $x^2 + (6 - k)x + 36 = 0$ не имеет действительных корней.

То есть $D = (6 - k)^2 - 144 = k^2 - 12k - 108 = (k + 6)(k - 18) < 0$.

Решением последнего неравенства является интервал $-6 < k < 18$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 18$.

Ответ: $0 < k < 18$.

$$594. \begin{cases} 8 - 6x > 4x - 12, \\ 3x + 16 < 5x + 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x < 20, \\ 2x > 16 - 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 8 - 2a. \end{cases}$$

Отметим на числовых осях области, на которых выполняется каждое из неравенств (см. рис. 225).

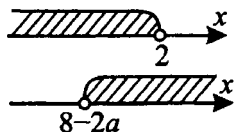


Рис. 225

Так как по условию задачи система имеет только одно целое решение, то $x = 1$, следовательно, $0 \leq 8 - 2a < 1$; $-8 \leq -2a < -7$; $4 \geq a > \frac{7}{2}$; $3,5 < a \leq 4$.

Ответ: $3,5 < a \leq 4$.

$$595. \begin{cases} 12 + 7x < 9x - 6, \\ x - 9 < 6a - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 < 2x, \\ 3x < 6a + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x < 2a + 3. \end{cases}$$

Так как по условию задачи система имеет ровно два целых решения, то $11 < 2a + 3 \leq 12$ (см. рис. 226).

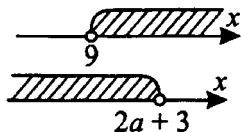


Рис. 226

Из этого неравенства получим $8 < 2a \leq 9$; $4 < a \leq \frac{9}{2}$; $4 < a \leq 4,5$.

Ответ: $4 < a \leq 4,5$.

596. Заданная парабола имеет с осью Ox не менее одной общей точки тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 + 3x - 2c = 0$ неотрицателен. Учитывая, что $c < 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 9 + 8c \geq 0, \\ c < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq -\frac{9}{8}, \\ c < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{9}{8} \leq c < 0$.

597. Для того чтобы парабола $y = px^2 - 4x + 3 = 0$ не имела с осью Ox ни одной общей точки, дискриминант уравнения $px^2 - 4x + 3 = 0$ должен быть меньше нуля.

$$D = 16 - 12p < 0; \quad p > \frac{4}{3}.$$

Ответ: $p > \frac{4}{3}$.

598. Графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках, если уравнение $px^2 - 24x + 1 = 12x^2 - 2px - 1$ имеет два различных действительных корня. Выполнив преобразования, получаем $(12 - p)x^2 - 2(p - 12)x - 2 = 0$. Уравнение $ax^2 + 2mx + c = 0$ имеет два

различных действительных корня, если $\begin{cases} a \neq 0; \\ \frac{D}{4} > 0. \end{cases}$

В данном случае имеем

$$\begin{cases} 12 - p \neq 0, \\ (p - 12)^2 + 2(12 - p) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 12, \\ (p - 12)(p - 14) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 12, \\ p > 14. \end{cases}$$

Ответ: $p \in (-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$.

599. Прямая $y = kx + 10$ и парабола $y = -x^2 - 3x + 6$ не имеют общих точек, если уравнение $kx + 10 = -x^2 - 3x + 6$ не имеет действительных корней, то есть $D < 0$. Получим $x^2 + (3 + k)x + 4 = 0$; $D = (3 + k)^2 - 16 < 0$; $9 + 6k + k^2 - 16 < 0$; $k^2 + 6k - 7 < 0$; $(k - 1)(k + 7) < 0$; $-7 < k < 1$. По условию $k < 0$, следовательно, $-7 < k < 0$.

Ответ: $-7 < k < 0$.

600. Если уравнение $ax^2 - 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня, то $a \neq 0$ и дискриминант $D > 0$. По теореме Виета произведение корней $x_1 x_2$ приведённого квадратного уравнения есть его свободный член. Обозначим корни уравнения $x^2 - \frac{4}{a}x + \frac{2}{a} = 0$ через x_1 и x_2 . Тогда $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{a}$,

и так как корни имеют разные знаки, то $\frac{2}{a} < 0$, $a < 0$. В этом случае

$$D = \frac{16}{a^2} - \frac{8}{a} > 0.$$

Наибольшее целое значение a , удовлетворяющее неравенству $a < 0$, есть $a = -1$.

Ответ: -1 .

601. По условию абсцисса вершины данной параболы $x_0 = -\frac{b}{2} = -4$.

Отсюда $b = 8$. Итак, уравнение параболы $y = x^2 + 8x + c$. Так как вершина параболы находится в точке $K(-4; 7)$, то $7 = (-4)^2 + 8(-4) + c$; $7 = 16 - 32 + c$. Отсюда $c = 23$.

Ответ: $b = 8$; $c = 23$.

602. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 = 2, \\ y = kx + 2. \end{cases}$$

Подставив значение y из второго уравнения системы в первое, получим $x^2 + (kx - 2)^2 = 2$; $(k^2 + 1)x^2 - 4kx + 2 = 0$. Для того чтобы прямая пересекла окружность в двух точках, дискриминант последнего уравнения должен быть больше нуля: $D = 16k^2 - 8k^2 - 8 > 0$; $k^2 > 1$; $|k| > 1$. Так как k — число отрицательное, то $k < -1$.

Ответ: $k < -1$.

603. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений
$$\begin{cases} y = x + k + 1, \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2. \end{cases}$$

Подставив значение y из первого уравнения системы во второе, получим $(x + 1)^2 + (x + k + 1 - 1)^2 = 2$; $2x^2 + 2(1 + k)x - 1 + k^2 = 0$.

Прямая пересечёт окружность в двух точках, если дискриминант полученного уравнения будет больше нуля: $\frac{D}{4} = (1 + k)^2 + 2 - 2k^2 > 0$;

$k^2 - 2k - 3 < 0$; $-1 < k < 3$. Нам нужны неположительные значения k , значит, $-1 < k \leq 0$.

Ответ: $-1 < k \leq 0$.

604. Данная прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $3x^2 - 2ax + 4 = a - 2$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ должен быть меньше нуля.

$\frac{D}{4} = a^2 - 18 + 3a$; $a^2 + 3a - 18 < 0$; $-6 < a < 3$.

Ответ: $-6 < a < 3$.

605. Данная прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $2x^2 + 2kx + 6 = -k - 6$ не имеет решений. В этом случае дискриминант

квадратного уравнения $2x^2 + 2kx + 12 + k = 0$ должен быть меньше нуля.

$$\frac{D}{4} = k^2 - 24 - 2k; k^2 - 2k - 24 < 0; -4 < k < 6.$$

Ответ: $-4 < k < 6$.

606. Прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 3x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 1 = kx - 2$; $x^2 + (3 - k)x + 1 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (3 - k)^2 - 4 < 0$.

Прямая не имеет общих точек с параболой $y = x^2 - x + 2$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x + 2 = kx - 2$; $x^2 - (1 + k)x + 4 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (1 + k)^2 - 16 < 0$. Следовательно, данная прямая не имеет общих точек с обеими параболой, если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} (3 - k)^2 - 4 < 0, \\ (1 + k)^2 - 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 5 < 0, \\ k^2 + 2k - 15 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < 5, \\ -5 < k < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k < 3.$$

Ответ: $1 < k < 3$.

607. Прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек с параболой, если уравнения $kx + 5 = -2x^2 - 2x + 3$ и $kx + 5 = x^2 + 5x + 21$ не имеют решений. В этом случае их дискриминанты отрицательны:

$$\begin{cases} (k + 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0, \\ (5 - k)^2 - 4 \cdot 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4k - 12 < 0, \\ k^2 - 10k - 39 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < k < 2, \\ -3 < k < 13; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < k < 2.$$

Ответ: $-3 < k < 2$.

608. Построим график данной функции (см.рис. 227).

Проведём прямую OA , проходящую через начало координат и точку с координатами $(-4; -4)$, и прямую OB , проходящую через начало координат и параллельную прямым $y = 2x + 4$ и $y = 2x - 12$. Прямая $y = ax$

имеет три общие точки с графиком данной функции тогда и только тогда, когда она лежит внутри угла AOB , следовательно, $1 < a < 2$.

Ответ: $1 < a < 2$.

609. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2 + 2(a + 2)x + a + 6$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a , при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются положительными числами, можно найти из условий

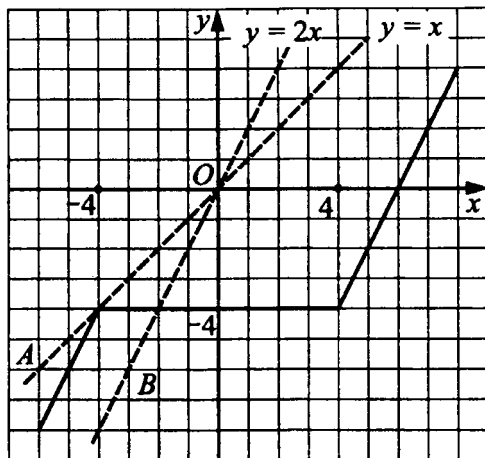


Рис. 227

$$\begin{cases} D < 0, \\ \begin{cases} D \geq 0, \\ y(0) \geq 0, \\ x_0 \geq 0, \end{cases} \end{cases}$$

где D — дискриминант уравнения $y(x) = 0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$.

Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4a^2 + 8a - 32 < 0, \\ \begin{cases} 4a^2 + 8a - 32 \geq 0, \\ a + 6 \geq 0, \\ -\frac{2(a+2)}{4} \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 2, \\ \begin{cases} a \leq -4, \\ a \geq 2, \\ a \geq -6, \\ a \leq -2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 2, \\ -6 \leq a \leq -4; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -6 \leq a < 2. \end{aligned}$$

Ответ: $-6 \leq a < 2$.

Замечание. При $D < 0$ неравенство $y(x) < 0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неположительных чисел, то есть выполняется условие задачи.

610. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2 + 2(a-2)x + 6 - a$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a , при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются отрицательными числами, можно найти из условий

$$\begin{cases} D < 0, \\ \begin{cases} D \geq 0, \\ y(0) \geq 0, \\ x_0 \leq 0, \end{cases} \end{cases}$$

где D — дискриминант уравнения $y(x) = 0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$. Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\begin{cases} 4a^2 - 8a - 32 < 0, \\ \begin{cases} 4a^2 - 8a - 32 \geq 0, \\ 6 - a \geq 0, \\ -\frac{2(a-2)}{4} \leq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 4, \\ \begin{cases} a \geq 4, \\ a \leq -2, \\ a \leq 6, \\ a \geq 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 4, \\ 4 \leq a \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 < a \leq 6. \end{cases}$$

Ответ: $-2 < a \leq 6$.

Замечание. При $D < 0$ неравенство $y(x) < 0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неотрицательных чисел, то есть выполняется условие задачи.

612. Данное неравенство эквивалентно неравенству $x^2 + (4a - 3)x + 1,75 - 3a \leq 0$. Это неравенство не имеет решений, когда дискриминант D соответствующего квадратного уравнения меньше нуля. Вычислим $D = (4a - 3)^2 - 4(1,75 - 3a) = 16a^2 - 12a + 2 = 2(8a^2 - 6a + 1)$. Решим неравенство $8a^2 - 6a + 1 < 0$. Для этого решим уравнение $8a^2 - 6a + 1 = 0$.

Его корни $a_1 = \frac{1}{4}$ и $a_2 = \frac{1}{2}$, а решение неравенства есть $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

613. Неравенство $ax^2 + (a - 3)x + a > 0$ выполняется при любых x , если $a > 0$ и дискриминант уравнения $ax^2 + (a - 3)x + a = 0$

$D = (a - 3)^2 - 4a \cdot a < 0$. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 9 - 4a^2 < 0, \\ a > 0; \\ (a - 1)(a + 3) > 0, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

Решая методом интервалов последнюю систему (см. рис. 228), получим $a > 1$.

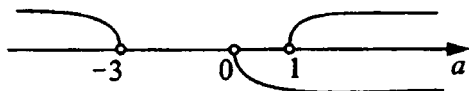


Рис. 228

Ответ: $a > 1$.

615. Построим график функции $y = ||4x - 5| - 1|$ (см. рис. 229).

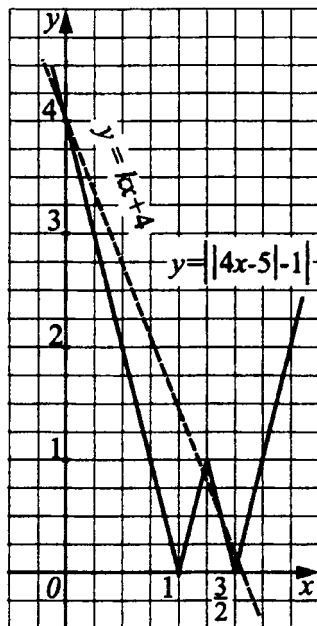


Рис. 229

Прямая $y = kx + 4$ проходит через точку $(0; 4)$ при любом значении параметра k . При $k = -4$ прямая $y = kx + 4$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k \neq -4$ для выполнения условия задачи необходимо, чтобы прямая $y = kx + 4$ лежала «не выше» точки $(\frac{5}{4}; 1)$ и «не ниже» точки $(0; \frac{3}{2})$. Запишем уравнения прямых, проходящих через точки $(0; 4)$, $(\frac{3}{2}; 0)$ и $(0; 4)$, $(\frac{5}{4}; 1)$:

$$1) \begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 0 = \frac{3}{2}k + b; \end{cases} \quad k = -\frac{8}{3}, b = 4; y = -\frac{8}{3}x + 4;$$

$$2) \begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 1 = \frac{5}{4}k + b; \end{cases} \quad k = -\frac{12}{5}, b = 4; y = -\frac{12}{5}x + 4.$$

Из вышесказанного следует, что условие задачи выполняется при $-\frac{12}{5} \leq k \leq -\frac{8}{3}$ и $k = -4$.

Ответ: $k = -4$, $-\frac{12}{5} \leq k \leq -\frac{8}{3}$.

616. Построим график функции $y = ||3x - 2| - 4|$ (см. рис. 230).

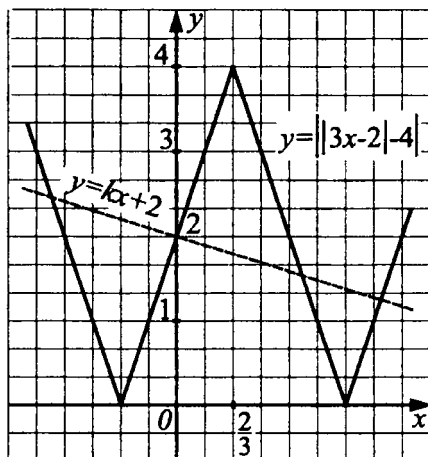


Рис. 230

Прямая $y = kx + 2$ проходит через точку $(0; 2)$ при любом значении параметра k . При $k = 3$ прямая $y = kx + 2$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k > 3$ $y = kx + 2$ имеет единственную общую точку с графиком данной функции, значит, $k \leq 3$. При $k = -1$ $y = kx + 2$ имеет три общие точки с графиком данной функции, а при $k < -1$ графики функций $y = kx + 2$ и $y = ||3x - 2| - 4|$ имеют менее трёх общих точек, значит, $k \geq -1$. При $-1 \leq k \leq 3$ условие задачи выполняется.

Ответ: $-1 \leq k \leq 3$.

617. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = y(x)$, имея в виду, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат, а параметр k есть угловой коэффициент этой прямой. При различных значениях k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения (см. рис. 231).

Прямая $y = kx$ и кривая $y = y(x)$ пересекаются в двух различных точках тогда и только тогда, когда прямая $y = kx$ будет проходить внутри

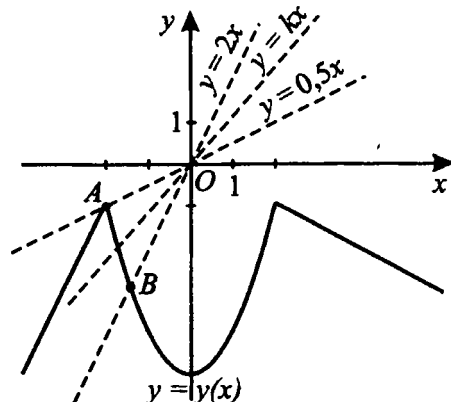


Рис. 231

угла AOB , где прямая OB задана уравнением $y = 2x$, а прямая OA — уравнением $y = 0,5x$.

При любом другом k прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = y(x)$ либо не более, чем в одной точке, либо в бесконечном числе точек при $k = -0,5$.

Таким образом, $0,5 < k < 2$.

Ответ: $0,5 < k < 2$.

618. Построим график данной функции

$$y = \begin{cases} 3x + 5, & \text{если } x < -2, \\ -x + 2, & \text{если } -2 < x \leq 2, \\ x - 2, & \text{если } x > 2 \end{cases} \quad (\text{см. рис. 232}).$$

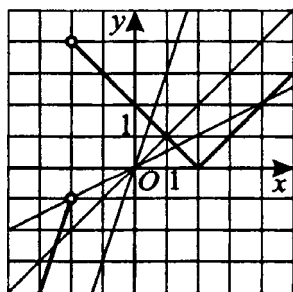


Рис. 232

Прямая $y = kx$ пересекает график функции в двух различных точках, если:

1) угловой коэффициент прямой больше углового коэффициента прямой $y = 0$ и меньше либо равен угловому коэффициенту прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$;

2) угловой коэффициент прямой больше либо равен угловому коэффициенту прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$.

1. Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$: $-1 = -2k$, $k = 0,5$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0$ равен 0. Получаем $0 < k \leq 0,5$.

2. Угловой коэффициент прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, равен 1, а прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$, равен 3. Получаем $1 \leq k < 3$. Прямая $y = kx$ имеет две общие точки с графиком заданной функции, если $0 < k \leq 0,5$ и $1 \leq k < 3$.

Ответ: $(0; 0,5] \cup [1; 3)$.

619. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = \begin{cases} 3x + 3, & x < 0, \\ x - 2, & 0 \leq x < 1, \\ -2x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

Для различных значений k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения.

Из рисунка 233 следует, что $k \in (-\infty; -2]$ или $k = -1$, так как для всех других k прямая $y = kx$ будет иметь с кривой или одну общую точку, или три общие точки, или ни одной.

Ответ: $k \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

621. Построим в одной системе координат данный прямоугольник (с его диагоналями) и прямую $y = kx$ (см. рис. 234).

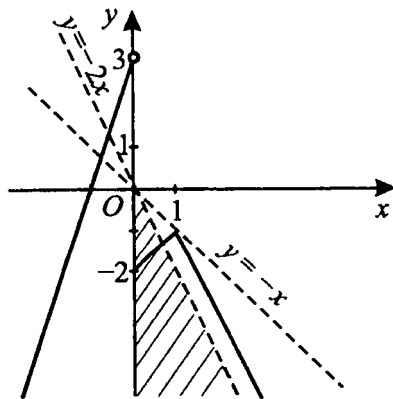


Рис. 233

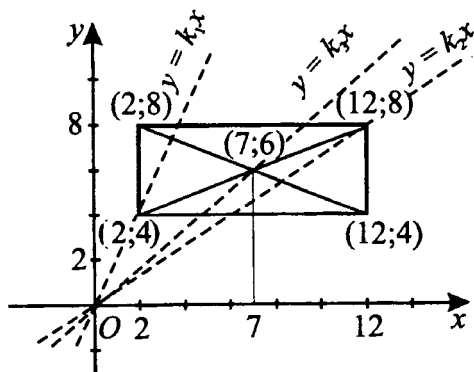


Рис. 234

Пусть $y = k_1x$ — прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(2; 4)$; $y = k_2x$ — прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(12; 8)$; $y = k_3x$ — прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(7; 6)$. Тогда прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с множеством точек, принадлежащих диагоналям этого прямоугольника, тогда и только тогда, когда $k_1 \leq k \leq k_2$ и $k \neq k_3$.

Легко видеть, что $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{2}{3}$, $k_3 = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{3} \leq k < \frac{6}{7}$; $\frac{6}{7} < k \leq 2$.

622. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.

$AB = CD$ как диаметры одной окружности; $\angle BDA = \angle CAD = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры; $\angle ABD = \angle DCA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD .

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по гипотенузе и острому углу.

623. Пусть $AC = a$, тогда $R = \frac{2 \cdot 3 \cdot a}{4S} = \frac{6a}{4 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{15}}$; $R\sqrt{15} = 2a$

(см. рис. 235). По формуле Герона

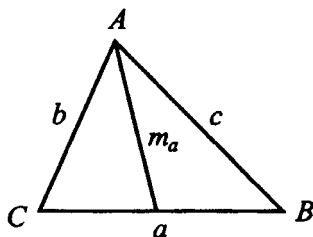


Рис. 235

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+2+3}{2} = \frac{5+a}{2}$ — полупериметр $\triangle ABC$, $b = 2$, $c = 3$ — стороны $\triangle ABC$.

Тогда $S = \sqrt{\frac{5+a}{2} \cdot \frac{5-a}{2} \cdot \frac{a+1}{2} \cdot \frac{a-1}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$;
 $\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$; $9 \cdot 15 = -a^4 + 26a^2 - 25$; $a^4 - 26a^2 + 160 = 0$;
 $a_1 = 4$, $a_2 = \sqrt{10}$.

Учитывая формулу для вычисления медианы

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26 - a^2} \text{ и условие } m_a < \frac{a}{2}, \text{ то есть } \sqrt{26 - a^2} < a, \text{ получаем верное неравенство при } a = 4 \text{ и неверное неравенство при } a = \sqrt{10}.$$

Таким образом, $R\sqrt{15} = 2a = 8$.

Ответ: 8.

$$624. 1. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 36 = 864. \text{ С другой стороны,}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD, \text{ где } AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60. \text{ Тогда}$$

$$CD = \frac{2S_{ABC}}{AB} = 28,8 \text{ (см. рис. 236).}$$

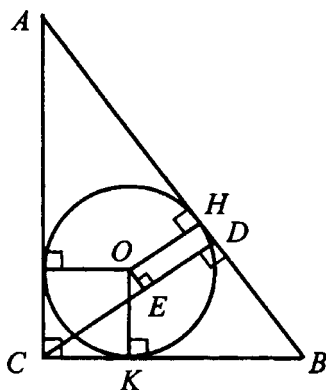


Рис. 236

$$2. S_{ABC} = \frac{Pr}{2}, r = \frac{2S_{ABC}}{P}, \text{ где } P = 36 + 48 + 60 = 144 \text{ — периметр,}$$

$$r = OH \text{ — радиус вписанной окружности } \triangle ABC. \text{ Тогда } r = \frac{2 \cdot 864}{144} = 12.$$

3. Так как $OEDH$ — прямоугольник, то $OE = HD = BH - BD$. Но $BD = \sqrt{CB^2 - CD^2} = \sqrt{36^2 - 28,8^2} = 21,6$; $BH = BK = CB - r = 36 - 12 = 24$. Следовательно, $OE = 24 - 21,6 = 2,4$.

Ответ: 2,4.

625. Треугольники ABC и CBH — прямоугольные, $\angle ACB = \angle CHB = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle CBH$. Следовательно, треугольники ABC и CBH подобны по первому признаку подобия треугольников.

627. Треугольники ABC и MNP подобны по третьему признаку подобия треугольников, так как стороны треугольника ABC пропорциональны сторонам треугольника MNP : $\frac{AB}{PN} = \frac{BC}{MP} = \frac{AC}{MN} = 2$ (MN , MP , PN — средние линии треугольника ABC).

628. Из формулы длины медианы $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ найдём сторону b .

$2 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{15})^2 + 2 \cdot 1^2 - b^2}$, $16 = 30 + 2 - b^2$, $b^2 = 16$, $|b| = 4$. Так как $b > 0$, то $b = 4$.

Тогда периметр треугольника $p = 1 + \sqrt{15} + 4 = 5 + \sqrt{15}$. Следовательно, $(5 - \sqrt{15})p = (5 - \sqrt{15})(5 + \sqrt{15}) = 25 - 15 = 10$.

Ответ: 10.

629. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC , значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 237).

$$AB = BC = \frac{P_{ABC} - AC}{2} = \frac{32 - 12}{2} = 10,$$

$$MB = NB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5, BK = 4.$$

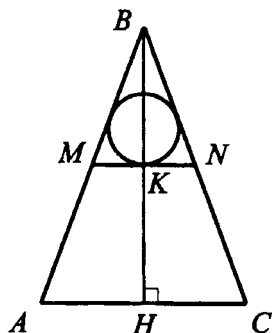


Рис. 237

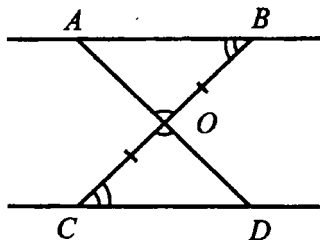


Рис. 238

$$2) P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16.$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48,$$

$$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12.$$

$S_{MBN} = \frac{1}{2}rP_{MBN}$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle MBN$,

$$r = \frac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

630. Доказательство:

1) $\angle AOB = \angle COD$ как противолежащие (см. рис. 238).

2) $\angle ABC = \angle BCD$ как накрест лежащие.

3) $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$, $\angle DOC = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OCD$).

631. Так как AD — медиана треугольника ABC , то $BD = CD = 2$ и $BC = 2CD = 4$ (см. рис. 239).

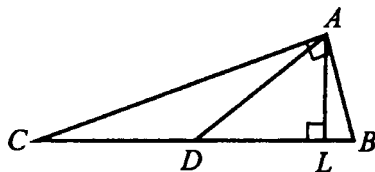


Рис. 239

Так как $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то треугольник ABC — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Следовательно, его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{\sqrt{15}}{2}$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AL$. Тогда

$$AL = \frac{2S}{BC} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Так как ABC — прямоугольный треугольник и AD — его медиана, то $AD = \frac{BC}{2} = 2$. Тогда $DL = \sqrt{AD^2 - AL^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{7}{4}$.

Таким образом, $BL = BD - DL = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

632. Радиус вписанной окружности треугольника MBN $r = \frac{2S}{P}$, где S и P — площадь и периметр этого треугольника соответственно (см. рис. 240).

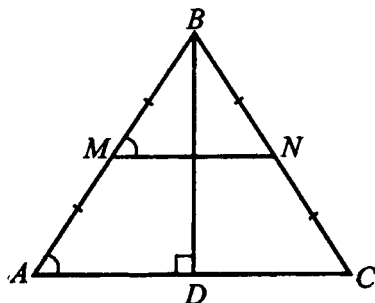


Рис. 240

Так как $\cos \angle BAC = \frac{AD}{AB}$, то $AB = \frac{AD}{\cos \angle BAC} = \frac{AD}{\sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC}} =$
 $= \frac{5}{3}AD = \frac{5}{3}MN = 10$. Значит, $P = 2MB + MN = AB + MN = 16$.

Так как $MN \parallel AC$, то $\angle BAC = \angle BMN$. Тогда
 $S = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot MN \cdot \sin \angle BMN = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12$.

Таким образом, $r = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1,5$.

Ответ: 1,5.

633. Доказательство:

$\triangle ABN = \triangle CBM$ по первому признаку равенства треугольников ($BN = BM$, $BC = BA$, $\angle B$ — общий), значит, $AN = CM$ (см. рис. 241).

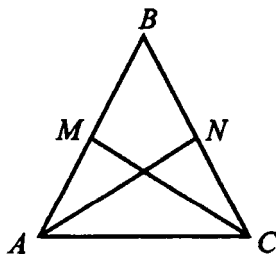


Рис. 241

634. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AB = 2CD = 5$ (см. рис. 242). Тогда $AC = AB - 1 = 4$ и $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3$. Значит, $P_{ABC} = 3 + 4 + 5 = 12$.

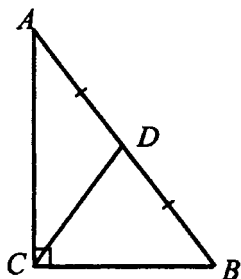


Рис. 242

Ответ: 12.

635. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 243).

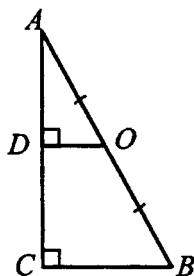


Рис. 243

Тогда $BC = 2OD = 2 \cdot 2,5 = 5$; $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$;
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$; $P_{ABC} = 13 + 12 + 5 = 30$. Итак,
 $r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 30}{30} = 2$ — радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Ответ: 2.

637. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 244). Значит, $BC = 2OD = 5$.

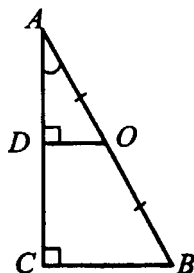


Рис. 244

Так как $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$, то $AC = \frac{12 \cdot 5}{5} = 12$.

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 13 + 5 + 12 = 30.$$

Ответ: 30.

638. По условию $AB = 29$, $AC = 27$, $AD = 26$ (см. рис. 245). Используя формулу для нахождения медианы, получим

$$AD = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}; \quad 2 \cdot 26 = \sqrt{2 \cdot 29^2 + 2 \cdot 27^2 - BC^2};$$

$$BC = 2\sqrt{109}.$$

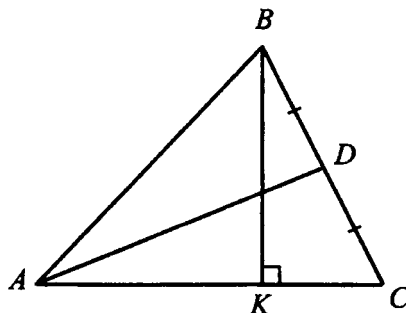


Рис. 245

По теореме косинусов для треугольника ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A; \quad 436 = 29^2 + 27^2 - 2 \cdot 29 \cdot 27 \cdot \cos A;$$

$$\cos A = \frac{21}{29}. \quad \text{Отсюда } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{20}{29}. \quad \text{Так как } \sin A = \frac{BK}{AB}, \text{ то}$$

$$BK = AB \sin A = 29 \cdot \frac{20}{29} = 20.$$

Ответ: 20.

639. Пусть $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{13}$, $BD = AC = x$, $AD = y$ (см. рис. 246).

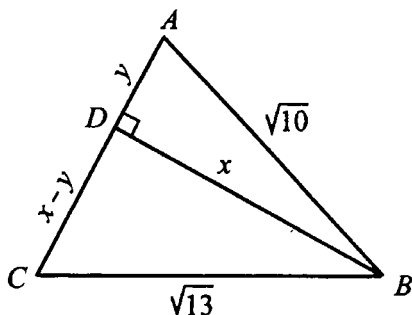


Рис. 246

Используя теорему Пифагора для треугольников ABD и BDC , получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (x - y)^2 = 13, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 3$, $y = 1$, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$, $x > y$.

Ответ: 3.

640. Доказательство:

Заметим, что $\triangle BMK \sim \triangle BAC$, так как $\angle B$ — общий, а $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC}$, значит, $\angle MKB = \angle ACB$, и прямые MK и AC параллельны.

641. Пусть $AB = BC = 4$, $AD = 3$, $AC = x$ (см. рис. 247). Тогда медиану

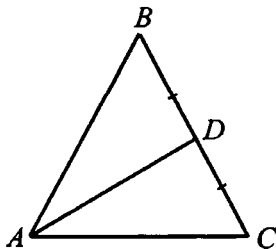


Рис. 247

треугольника можно найти по формуле $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$.

Отсюда, $3 = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 4^2 + 2x^2 - 4^2}$; $x^2 = 10$.

Ответ: 10.

642. Доказательство:

$\triangle MNK \sim \triangle ABC$, так как все его стороны пропорциональны сторонам треугольника ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ как средние линии. Значит, все углы равны.

644. Доказательство:

$\angle BCM = \angle ACM = 45^\circ$ (см. рис. 248). $\triangle BMC$ — равнобедренный, поэтому возможны три варианта:

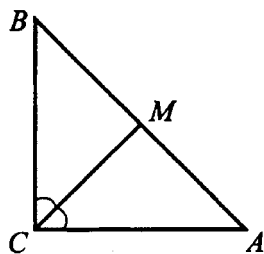


Рис. 248

1) $\angle BMC = \angle BCM = 45^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ$, а это невозможно.

2) $\angle MBC = \angle BMC = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ \Rightarrow \angle AMC = 112,5^\circ \Rightarrow \angle MAC = 180^\circ - 112,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$, и $\triangle CMA$ не равнобедренный.

3) Значит, $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ \Rightarrow \angle AMC = 90^\circ \Rightarrow \angle MAC = 45^\circ$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный.

646. По условию $ON = 5$, $MN = 6$ (см. рис. 249).

$\triangle KNO \sim \triangle NBO$, так как они оба прямоугольные и $\angle NOK = \angle NOB$.

Следовательно, $\frac{BN}{KN} = \frac{ON}{OK}$; $BN = \frac{KN \cdot ON}{OK} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{15}{4}$.

$BK = \sqrt{BN^2 - KN^2} = \frac{9}{4}$.

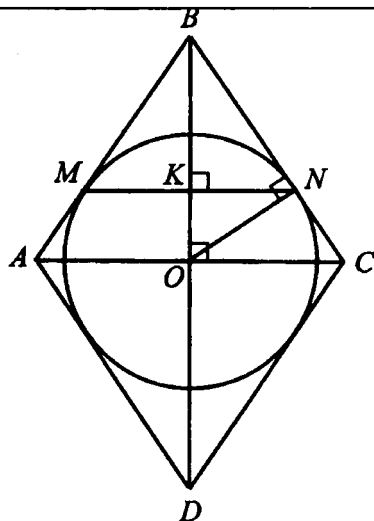


Рис. 249

$\triangle BKN \sim BOC$, так как они оба прямоугольные и $\angle OBC = \angle KBN$.

Следовательно, $\frac{BN}{BC} = \frac{BK}{BO}$; $BC = \frac{BN \cdot BO}{BK} = \frac{\frac{15}{4} \left(\frac{9}{4} + 4 \right)}{\frac{9}{4}} = \frac{125}{12}$.

Ответ: $\frac{125}{12}$.

648. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $BO = OD$. Следовательно, $\triangle BCO = \triangle DOC$ по первому признаку равенства треугольников (OC — общая, $BO = OD$, $\angle BOC = \angle DOC = 90^\circ$). Значит, $BC = CD$ и, так как противоположные стороны параллелограмма попарно равны, то все стороны $ABCD$ равны, то есть $ABCD$ — ромб.

649. $\angle MAD = \angle AMB$ как накрест лежащие, и, так как $\angle BAM = \angle MAD$, то треугольник ABM — равнобедренный, то есть $BM = AB = 4$ (см. рис. 250).

$\angle NMC = \angle AMB$ как вертикальные, и $\angle BAM = \angle MNC$ как накрест лежащие. Следовательно, треугольник MNC — равнобедренный и $MC = CN = 2$. Значит $AD = BC = BM + MC = 4 + 2 = 6$.

Так как треугольник ABK прямоугольный, то $BK = AB \cdot \sin \angle BAK = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, $AK = \frac{AB}{2} = 2$ (катет, лежащий против угла в 30°).

Итак, $KD = AD - AK = 6 - 2 = 4$; $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

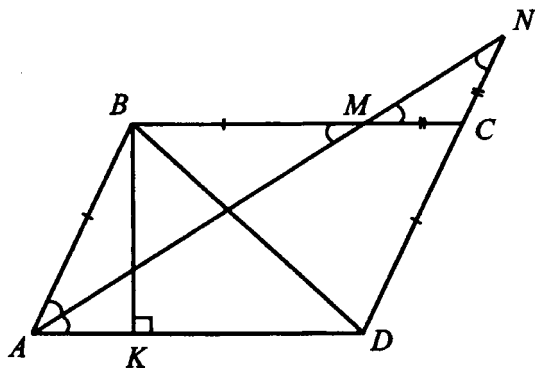


Рис. 250

650. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A (см. рис. 251).
 $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK . Отсюда, $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

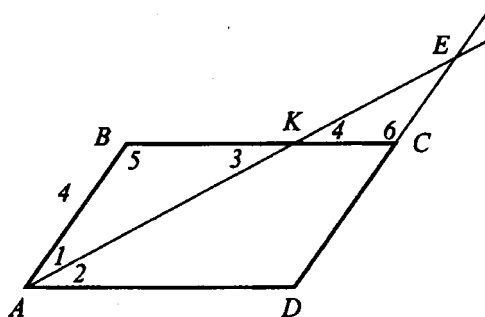


Рис. 251

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).

Из подобия треугольников следует $\frac{AB}{EC} = \frac{BK}{KC}$.

Отсюда, $KC = \frac{EC \cdot BK}{AB} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$.

Ответ: 1.

651. Пусть $AB = 3$, $AC = \sqrt{37}$, $\angle BAK = 60^\circ$ (см. рис. 252). Тогда $AK = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ как катет, лежащий против угла в 30° , и $BK =$
 $= AB \cdot \cos A = 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

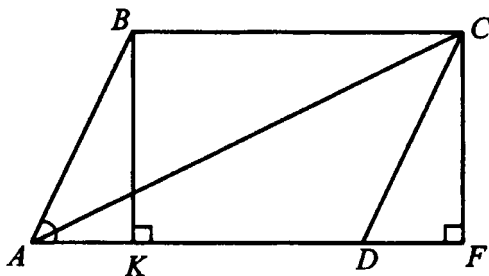


Рис. 252

Пусть $KD = x$. Так как $AK = DF$ ($\triangle ABK = \triangle DCF$ по второму признаку), то $AF = AK + KD + DF = x + 3$. Тогда $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} =$
 $= \sqrt{AC^2 - BK^2} = \sqrt{37 - \frac{27}{2}} = \frac{11}{2}$; $x + 3 = \frac{11}{2}$; $x = \frac{5}{2}$. Следовательно,
 $AD = AK + KD = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$.

Таким образом, $P_{ABCD} = 2AB + 2AD = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

652. Доказательство:

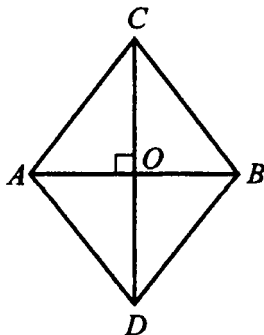


Рис. 253

Известно, что $AB \perp CD$, $AO = OB$, $CO = OD$ (см. рис. 253).
 $\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенства треугольников
 ($AO = OB$, $CO = OD$, $\angle COA = \angle BOD$). Аналогично $\triangle COB = \triangle AOD$.

$\triangle AOC = \triangle COB$ по первому признаку равенства треугольников
 ($\angle AOC = \angle COB$, OC — общая сторона, $AO = OB$).

Значит, $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle AOD = \triangle BOD$, а потому
 $AC = BC = AD = BD$, то есть $ABCD$ — ромб.

653. Пусть $AC = 3x$, $BD = 4x$ (см. рис. 254). По теореме Пифагора для
 треугольника AOB получим $AB^2 = AO^2 + BO^2$; $25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2$; $x = 2$.
 Тогда $BD = 8$, $AC = 6$ и $BD + AC = 14$.

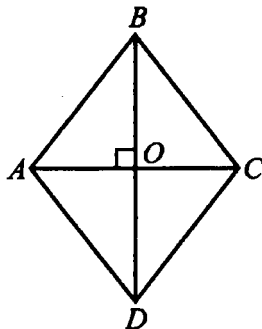


Рис. 254

Ответ: 14.

654. Доказательство:

$\triangle ABM = \triangle MCD$ по первому признаку равенства треугольников
 ($BM = MC$, $CD = AB$, $\angle ABM = \angle MCD$), значит, $AM = MD$.

655. По условию $3\angle CBD = \angle ABD$ (см. рис. 255). При этом $\angle ABC =$
 $= 180^\circ - \angle BAD = 120^\circ$. Тогда $\angle ABC = 3\angle CBD + \angle CBD$;
 $120^\circ = 4\angle CBD$; $\angle CBD = 30^\circ$; $\angle ABD = 90^\circ$.

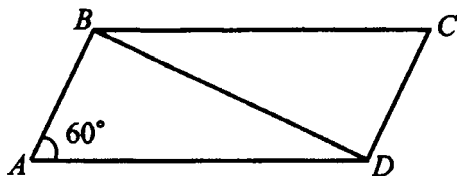


Рис. 255

Пусть $AD = x$. Тогда по условию $2x + 2AB = 90$; $AB = 45 - x$. Кроме того, треугольник ABD — прямоугольный и $\angle ADB = 30^\circ$. Значит, $AB = \frac{1}{2}AD = \frac{x}{2}$ (катет, лежащий против угла в 30°).

Итак, $\frac{x}{2} = 45 - x$; $x = 30$.

Ответ: 30.

656. Так как $\angle CBF = \angle BFA$ как накрест лежащие, то треугольник ABF — равнобедренный, то есть $AF = AB = 12$ (см. рис. 256).

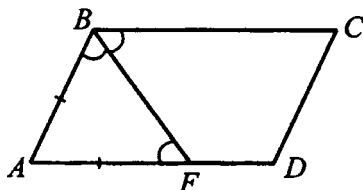


Рис. 256

Пусть $AF = 4x$, тогда $FD = 3x$. Так как $4x = 12$, то $x = 3$ и $AD = AF + FD = 7x = 21$. Следовательно, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(12 + 21) = 66$.

Ответ: 66.

657. Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$. Так как PL — средняя линия $\triangle ADC$, то $PL \parallel AC$. Следовательно, $MN \parallel PL$ (см. рис. 257). Аналогично $MP \parallel NL$. Значит, $MNLP$ — параллелограмм.

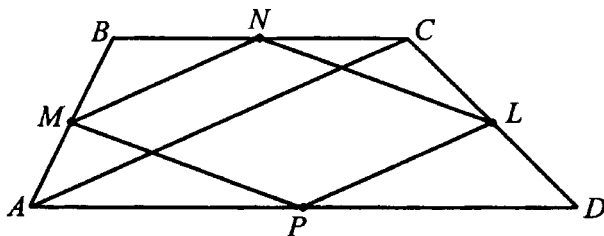


Рис. 257

658. Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$ (см. рис. 258). Отсюда, $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$.

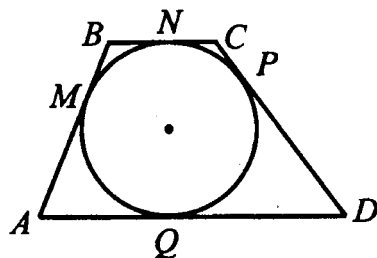


Рис. 258

660. $\angle BCA = \angle BDA$ как опирающиеся на одну и ту же дугу (см. рис. 259).
 $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и

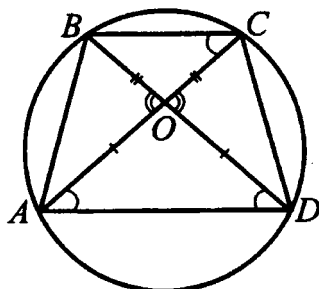


Рис. 259

AD и секущей AC . Значит, $\angle CAD = \angle BDA$, то есть $\triangle AOD$ — равнобедренный и $AO = OD$. Аналогично доказывается, что $BO = OC$. Так как, кроме того, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, то $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $AB = CD$, то есть трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

661. Так как $BO = OD$, $\angle ADO = \angle OBK$ как накрест лежащие, $\angle AOD = \angle BOK$ как вертикальные, то $\triangle AOD = \triangle BOK$ (см. рис. 260). Тогда $CK = BK - BC = 10 - 5 = 5$.

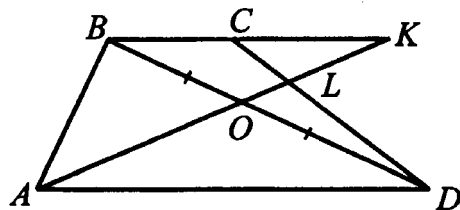


Рис. 260

$\triangle CLK \sim \triangle DLA$ ($\angle ALD = \angle CLK$ как вертикальные и $\angle DCK = \angle CDA$ как накрест лежащие). При этом $\frac{CK}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{CL}{LD} = \frac{1}{2}$, $\frac{LD}{CD} = \frac{2}{3}$, $LD = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$.

Ответ: 6.

663. В треугольнике ABM : $BM = 2r = 2 \cdot 2 = 4$, где r — радиус вписанной окружности; $BM = \frac{1}{2}AB$, $AB = 8$ (см. рис. 261).

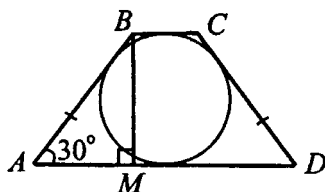


Рис. 261

Так как в $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD = 8 + 8 = 16$. Тогда средняя линия трапеции равна $\frac{1}{2}(AD + BC) = 8$.

Ответ: 8.

664. Так как трапеция описана около окружности, то $AB + CD = BC + AD$ (см. рис. 262). Тогда $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(BC + AD) = 4MN = 4 \cdot 10 = 40$, где MN — средняя линия трапеции.

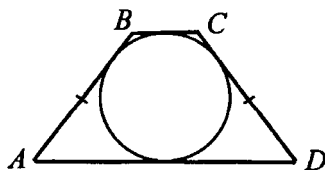


Рис. 262

Ответ: 40.

665. Так как трапеция описана около окружности, то $AB + CD = BC + AD$ (см. рис. 263). Средняя линия трапеции $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) =$
 $= \frac{1}{2}(AB + CD) = AB = 5.$

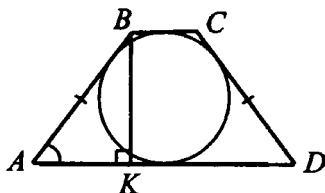


Рис. 263

Так как $\sin \angle BAK = \frac{BK}{AB}$, то $BK = AB \sin \angle BAK = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$. Тогда $S_{ABCD} = MN \cdot BK = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

666. Так как трапеция равнобокая, то вокруг неё можно описать окружность (см. рис. 264). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\triangle AOD$ — равнобедренный ($\angle OAD = \angle ODA$, так как углы при основании равнобокой трапеции равны, и $\angle BAC = \angle BDC$) и, так как он прямоугольный, то $\angle OAD = 45^\circ$. Но треугольник AOK также прямоугольный с острым углом в 45° , следовательно, он равнобедренный и $AK = OK$.

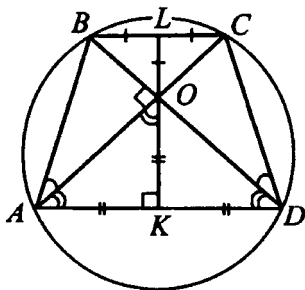


Рис. 264

Аналогично можно доказать, что $OL = BL$. Значит, $KL = KO + OL =$
 $= AK + BL = \frac{1}{2}(AD + BC) = MN$, где MN — средняя линия трапеции.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot KL = MN \cdot KL = KL^2; \quad KL^2 = 4; \quad KL = 2.$$

Ответ: 2.

667. Пусть R , r и a — радиусы описанной и вписанной окружностей и сторона правильного шестиугольника соответственно (см. рис. 265). Тогда по теореме Пифагора $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$. Так как в правильном шестиугольнике

$$R = a \text{ и } r = R - 1 \text{ по условию, то получим уравнение } a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-1)^2;$$

$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Так как из условия следует, что $r = a - 1 > 0$, то есть $a > 1$, то $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

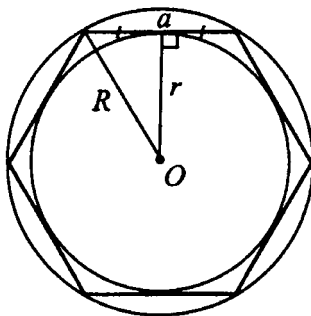


Рис. 265

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

668. $\angle AKB = \angle CKD$ как вертикальные, $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и CDK подобны по первому признаку подобия треугольников.

669. Треугольники AOB и OBC равны по третьему признаку равенства треугольников: $AO = CO$ как радиусы окружности; BO — общая сторона; $AB = CB$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки.

671. Точки M и N — середины хорд AB и AC , значит MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 266).

$$MN = \frac{1}{2}BC, \quad BC = 2MN = 2 \cdot 5 = 10.$$

$$\text{Периметр } P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36,$$

$$\text{полупериметр } p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18.$$

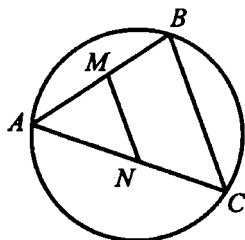


Рис. 266

Следовательно, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
 $= \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36$. Тогда радиус окружности
 $R = \frac{abc}{4S}$, а диаметр $2R = \frac{abc}{2S} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{2 \cdot 36} = 21,25$.

Ответ: 21,25.

672. Так как $AOEB$ — прямоугольник, то $AB = OE$ (см. рис. 267).

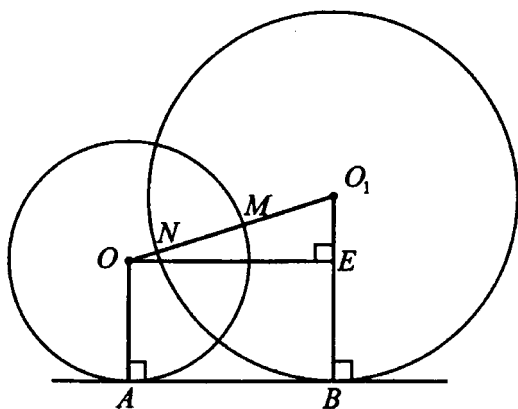


Рис. 267

По теореме Пифагора для треугольника OO_1E получим
 $OE = \sqrt{OO_1^2 - O_1E^2} = \sqrt{OO_1^2 - (O_1B - EB)^2} =$
 $= \sqrt{80 - (8 - 4)^2} = 8$.

Ответ: 8.

673. По теореме о касательной и секущей $AD \cdot AC = AB^2$,

$AD = \frac{AB^2}{AC} = 3$. (см. рис. 268).

Ответ: 3.

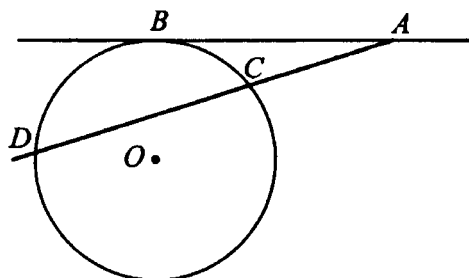


Рис. 268

674. По теореме о касательной и секущей $AN \cdot AM = AB^2$,
 $AN = \frac{AB^2}{AM} = 3$ (см. рис. 269). Тогда $MN = AN - AM = 3 - 1 =$
 $= 2$; $OM = ON = 1$ — радиус окружности; $AO = AM + OM = 2$.

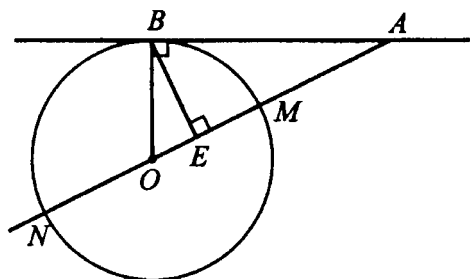


Рис. 269

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} BO \cdot AB = \frac{1}{2} AO \cdot BE; BE = \frac{BO \cdot AB}{AO} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}; BE^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

675. $\triangle ACB \sim \triangle ADC$, так как они прямоугольные и имеют общий острый угол при вершине A (см. рис. 270). Тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD}$; $CB = AB \cdot \frac{CD}{AC}$
и $AB = 2 \cdot 17,5 = 35$.

Пусть $AC = 5x$, $AD = 3x$. Тогда по теореме Пифагора
 $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4x$, то есть $\frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$.

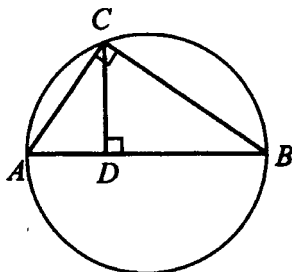


Рис. 270

Таким образом, $CB = 35 \cdot \frac{4}{5} = 28$ и $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$. Итак, $AC + CB = 21 + 28 = 49$.

Ответ: 49.

676. Так как $\angle ACD = 90^\circ$, то AD — диаметр окружности (см. рис. 271). FE — средняя линия треугольника ACD . Следовательно, $AD = 2FE = 12$ и искомый радиус окружности равен 6.

Ответ: 6.

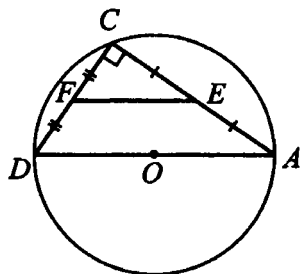


Рис. 271

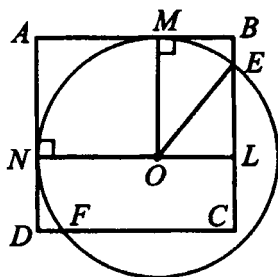


Рис. 272

677. Так как по условию $BE = DF = 2$ и $EC = FC = 23$, то сторона квадрата $ABCD$ равна 25 (см. рис. 272).

Пусть r — радиус окружности. Тогда $OE = r$, $EL = BL - BE = OM - BE = r - 2$, $OL = NL - NO = 25 - r$. Так как EOL — прямоугольный треугольник, то по теореме Пифагора $EL^2 + OL^2 = OE^2$; $(r - 2)^2 + (25 - r)^2 = r^2$; $r^2 - 54r + 629 = 0$; $r = 37$ или $r = 17$, причём значение $r = 37$ не удовлетворяет условию $OL = 25 - r > 0$.

Ответ: 17.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ №1897 от 17.12.2010.
2. Кодификатор требований к уровню подготовки обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы основного общего образования, для проведения государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
3. Кодификатор элементов содержания для проведения в 2013 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
4. Демонстрационный вариант экзаменационной работы для проведения в 2013 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы основного общего образования. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы основного общего образования. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
6. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 304 с.

Учебное издание

Войта Елена Александровна
Иванов Сергей Олегович
Коннова Елена Генриевна
Нужа Галина Леонтьевна
Ольховая Людмила Сергеевна
Резникова Нина Михайловна
Ханин Дмитрий Игоревич

**МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК.
9 КЛАСС. ПОДГОТОВКА К ГИА-2014**

Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 17.07.2013.

Формат 60х84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,6.

Доп. тираж 10 000. Заказ № 233.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Долгомановский, 55.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.

**Рекомендует****ГИА-9**

МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС. ПОДГОТОВКА К ГИА-2014

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

В настоящее время государственная итоговая аттестация в новой форме проводится во всех регионах России, поэтому предлагаемое пособие будет полезным для учащихся, готовящихся к ГИА по математике, а также для учителей, осуществляющих эту подготовку.

Предлагаемое пособие включает 30 авторских учебно-тренировочных тестов, составленных по актуальной спецификации государственной итоговой аттестации за курс основной школы, и сборник, содержащий около 700 задач, которые иллюстрируют основные идеи контрольно-измерительных материалов по математике прошлых лет.

К одному варианту тестов и к некоторым задачам сборника приведены решения, ко всем тестам и задачам – ответы.

Пособие является частью учебно-методического комплекса "Математика. Подготовка к ГИА-2014", включающего такие книги, как "Математика. Решение. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014", "Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014", "Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014. Учебно-тренировочные тесты" и др.

