



# ГИА-9



Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,  
С.Ю. Кулабухова

# МАТЕМАТИКА

## БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

## ГИА-9

## ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»

## Часть 1



# 9

## КЛАСС

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА-9»

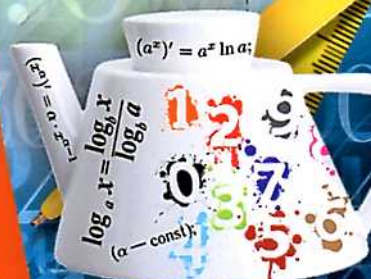
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$



**Учебно-методический комплекс  
«Математика. Подготовка к ГИА-9»**

**Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

**МАТЕМАТИКА**

**БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-9**

**ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»**

**Часть 1**



**ЛЕГИОН**  
**Ростов-на-Дону**  
**2012**

ББК 22.1

М 34

Рецензент:

*Евич Л. Н.* — кандидат физико-математических наук, доцент

**Авторский коллектив:**

Иванов С. О., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Нужа Г. Л.

**М 34 Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников».**

**Часть 1** / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. —  
Ростов-на-Дону: Легион, 2012. — 128 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0239-1

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня** на ГИА-9 по математике. Воспользовавшись пособием, можно развить навыки безошибочного решения заданий первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 5 глав, каждая из которых включает в себя необходимую теоретическую информацию, разбор решений типовых задач, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, в пособии приведено **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем темам экзамена, рассмотренным в книге.

Предлагаемое издание адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА»**, состоящего из шести пособий («Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013», «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“. Часть 2», «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2013» и др.)

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0239-1

© ООО «Легион», 2012

# Оглавление

От авторов .....	4
Глава 1. Числа и вычисления .....	7
Глава 2. Алгебраические выражения .....	46
Глава 3. Уравнения и неравенства .....	63
Глава 4. Теория вероятностей .....	86
Глава 5. Числовые последовательности .....	93
Тренировочные тесты .....	105
Ответы .....	119

# От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“. Часть 1» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки девятиклассников к ГИА (государственной итоговой аттестации) и будет полезно в течение всего учебного года. Оно адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков в решении задач базового уровня**. Воспользовавшись этой книгой, школьник научится безошибочно выполнять наиболее простые задания экзамена по математике, чем экономит время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 5 глав, каждая из которых включает в себя

- краткий теоретический материал;
- разбор решений типовых задач, подобных тем, которые будут представлены в экзаменационной работе;
- варианты для самостоятельного решения.

Каждый вариант для самостоятельного решения в главах 1 – 3 (числа и вычисления, алгебраические выражения, уравнения и неравенства) рассчитан на выполнение в течение 45 минут, в главах 4 и 5 (теория вероятностей и числовые последовательности) — в течение 15 минут.

Книгу завершают **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем главам книги. Каждый тест рекомендуем выполнять в течение 60 – 70 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия.

Если ответы не совпадут, следует ещё раз решить задачу, а при необходимости найти подобную среди разобранных примеров.

Настоящее пособие составлено в соответствии со спецификацией и демонстрационным вариантом<sup>1</sup> ГИА 2012 года. Согласно спецификации, на рассмотренные в данной книге темы приходится 10 заданий первой части экзаменационной работы. Отметим, что для удовлетворительной сдачи экзамена необходимо правильно решить любые 8 заданий.

Темы, не вошедшие в данное пособие, будут представлены в книге «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“. Часть 2».

Обсудить пособия издательства «Легион», оставить свои замечания и предложения можно на официальном форуме издательства <http://legionr.rossite.org>

### **Комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»**

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013.

*Основная книга для подготовки к ГИА, включающая необходимый теоретический минимум, сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА, а также сборник задач.*

- Решебник. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013.

*Решебник содержит решения всех тестовых заданий повышенного уровня сложности и всех задач из раздела «Задачник» пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013»*

---

<sup>1</sup> Находятся на сайте Федерального института педагогических измерений <http://www.fipi.ru>

- Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2013. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика.  
*Сборник тестов, каждый из которых предназначен для проверки уровня усвоения определённого раздела программы по математике. Сборник охватывает все темы, отражённые в спецификации ГИА.*
- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013. Учебно-тренировочные тесты.  
*Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА. Дополняет книгу «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013».*
- Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников». Часть 1.
- Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников». Часть 2.  
*Пособие посвящено решению задач базового уровня сложности, не вошедших в первую часть. Содержит темы «Функции и графики», «Планиметрия», «Статистика».*

*Желаем успехов на экзамене!*

# Глава 1. Числа и вычисления

## Сложение и вычитание чисел

### ❶ Немного полезной информации

При сложении (вычитании) натуральных чисел столбиком надо

- подписать одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т.д.
- сложить (вычесть) числа поразрядно, начиная с разряда единиц.

### ⚡ Задачи с решениями

1. Выполните действие: а)  $346 + 458$ ; б)  $2463 - 378$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} 346 \\ + 458 \\ \hline 804 \end{array} \quad \text{б) } \begin{array}{r} 2463 \\ - 378 \\ \hline 2085 \end{array} \end{array}$$

*Ответ:* а) 804; б) 2085.

### ❶ Немного полезной информации

При сложении (вычитании) десятичных дробей надо

- уравнивать в этих дробях количество знаков после запятой;



- записать числа друг под другом так, чтобы запятая была под запятой;
- выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

### 8 — Задачи с решениями

2. Выполните действие: а)  $13,28 + 5,145$ ; б)  $3,6 - 1,551$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} 13,280 \\ + 5,145 \\ \hline 18,425 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,600 \\ - 1,551 \\ \hline 2,049 \end{array}$$

*Ответ:* а) 18,425; б) 2,049.

3. Выполните действие: а)  $24,2 + 0,867$ ; б)  $448,32 - 51,435$ ; в)  $451 - 2,553$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} 24,200 \\ + 0,867 \\ \hline 25,067 \end{array} \quad \begin{array}{r} 448,320 \\ - 51,435 \\ \hline 396,885 \end{array} \quad \begin{array}{r} 451,000 \\ - 2,553 \\ \hline 448,447 \end{array}$$

*Ответ:* а) 25,067; б) 396,885; в) 448,447.

### ① Немного полезной информации

При сложении (вычитании) обыкновенных дробей надо

- привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
- сложить (вычесть) числители, результат записать в числитель;

- в знаменатель записать найденный наименьший общий знаменатель.

### 8 ➔ Задачи с решениями

4. Выполните действие: а)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ ; б)  $\frac{11}{30} - \frac{7}{20}$ .

*Решение.*

а) Приведём дроби  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{3}{5}$  к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 5 и 3 соответственно:

$$\frac{2 \cdot 5}{3} + \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10 + 9}{15} = \frac{19}{15} = 1 \frac{4}{15};$$

б) Приведём дроби  $\frac{11}{30}$  и  $\frac{7}{20}$  к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 2 и 3 соответственно:

$$\frac{11 \cdot 2}{30} - \frac{7 \cdot 3}{20} = \frac{22}{60} - \frac{21}{60} = \frac{22 - 21}{60} = \frac{1}{60}.$$

*Ответ:* а)  $1 \frac{4}{15}$ ; б)  $\frac{1}{60}$ .

5. Выполните действие  $\frac{13}{18} + \frac{11}{24}$ .

*Решение.*

Для приведения исходных дробей к наименьшему общему знаменателю найдём НОК (наименьшее общее кратное чисел 18 и 24). Разложим 18 и 24 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 
 \end{array}$$

Отсюда  $\text{НОК}(24; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ .

$$\frac{13^4}{18} + \frac{11^3}{24} = \frac{13 \cdot 4}{72} + \frac{11 \cdot 3}{72} = \frac{52 + 33}{72} = \frac{85}{72} = 1 \frac{13}{72}.$$

Ответ:  $1 \frac{13}{72}$ .

6. Выполните действия  $\left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15}$ .

Решение.

Для упрощения вычислений поменяем местами  $\frac{1}{4}$  и  $\left(-\frac{2}{15}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15} &= \left(\frac{7}{15} - \frac{2}{15}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{15} + \frac{1}{4} = \frac{1^4}{3} + \frac{1^3}{4} = \\
 &= \frac{4 + 3}{12} = \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{7}{12}$ .

7. Выполните действие  $5\frac{8}{9} - 2\frac{1}{6}$ .

$$5\frac{8^2}{9} - 2\frac{1^3}{6} = 5\frac{16}{18} - 2\frac{3}{18} = 3\frac{13}{18}.$$

Ответ:  $3\frac{13}{18}$ .

**① Немного полезной информации**

Модуль числа  $a$ :

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0.$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Например:  $|10| = 10$ ;  $|0| = 0$ ;  $|-1,5| = 1,5$ .

**8 ➔ Задачи с решениями**

8. Вычислите: а)  $|-7| + |-4|$ ; б)  $|12| - |-3|$ .

*Решение.*

$$\text{а) } |-7| + |-4| = 7 + 4 = 11;$$

$$\text{б) } |12| - |-3| = 12 - 3 = 9.$$

*Ответ:* а) 11; б) 9.

**① Немного полезной информации**

При сложении отрицательных чисел надо

- поставить перед полученным числом знак минус;
- сложить их модули.

**8 ➔ Задачи с решениями**

9. Выполните сложение: а)  $-10 + (-13)$ ;

$$\text{б) } -2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right); \text{ в) } -0,75 + (-1,25).$$

*Решение.*

$$\text{а) } -10 + (-13) = -(10 + 13) = -23.$$

$$\text{б) } -2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{3}{15} + 3\frac{1}{15}\right) = -5\frac{4}{15}.$$

$$\text{в) } -0,75 + (-1,25) = -(0,75 + 1,25) = -2.$$

*Ответ:* а)  $-23$ ; б)  $-5\frac{4}{15}$ ; в)  $-2$ .

### ❶ Немного полезной информации

При сложении чисел с разными знаками надо

- поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше;
- из большего модуля слагаемых вычесть меньший.

### 🔑 Задачи с решениями

10. Выполните сложение: а)  $28 + (-14)$ ; б)  $-2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7}$ ;

в)  $2,4 + (-5,8)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } 28 + (-14) = 28 - 14 = 14.$$

$$\text{б) } -2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7} = 4\frac{5}{7} - 2\frac{2}{7} = 2\frac{3}{7}.$$

$$\text{в) } 2,4 + (-5,8) = -(5,8 - 2,4) = -3,4.$$

*Ответ:* а) 14; б)  $2\frac{3}{7}$ ; в) -3,4.

### ❶ Немного полезной информации

При вычитании чисел надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

### 🔑 Задачи с решениями

11. Выполните вычитание: а)  $-18 - 12$ ; б)  $17 - 48$ ;

в)  $10 - (-2)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } -18 - 12 = -18 + (-12) = -(18 + 12) = -30.$$

$$\text{б) } 17 - 48 = 17 + (-48) = -(48 - 17) = -31.$$

$$\text{в) } 10 - (-2) = 10 + 2 = 12.$$

Ответ: а)  $-30$ ; б)  $-31$ ; в)  $12$ .

12. Выполните вычитание  $7 - 2\frac{5}{13}$ .

*Решение.*

Заметим, что уменьшаемое — целое число. Чтобы выполнить вычитание, надо

- занять единицу в целой части уменьшаемого ( $7 = 6 + 1$ );
- представить эту единицу в виде неправильной дроби, знаменатель которой равен знаменателю дробной части вычитаемого ( $6 + \frac{13}{13} = 6\frac{13}{13}$ );
- отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных частей.

$$6\frac{13}{13} - 2\frac{5}{13} = (6 - 2) + \left(\frac{13}{13} - \frac{5}{13}\right) = 4\frac{8}{13}.$$

Ответ:  $4\frac{8}{13}$ .

13. Выполните вычитание  $6\frac{7}{15} - \frac{13}{20}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} 6\frac{7}{15} - \frac{13}{20} &= 6\frac{28}{60} - \frac{39}{60} = \left(5 + 1 + \frac{28}{60}\right) - \frac{39}{60} = \\ &= \left(5 + \frac{60}{60} + \frac{28}{60}\right) - \frac{39}{60} = 5\frac{88}{60} - \frac{39}{60} = 5\frac{49}{60}. \end{aligned}$$

Ответ:  $5\frac{49}{60}$ .

## Умножение и деление чисел

### ① Немного полезной информации

Объясним умножение столбиком на примере: найдём произведение чисел 481 и 26 (рис. 1).

			×	4	8	1	
					2	6	
		+	2	8	8	6	
			9	6	2		
	1	2	5	0	6		

Рис. 1.

*Пояснение.*

1. Подпишем одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками.
2. Находим первое неполное произведение:  
 $481 \cdot 6 = 2886$ .
3. Находим второе неполное произведение:  
 $481 \cdot 2 = 962$ .  
 Пишем второе неполное произведение под первым неполным произведением, сдвинув второе на один знак влево. (Разряд единиц второго неполного произведения должен находиться под разрядом десятков первого.)
4. Сложим неполные произведения.
5. Читаем ответ (см. рис. 1): произведение чисел 481 и 26 равно 12 506.

**Умножение чисел, оканчивающихся нулями**

Найдём произведение чисел 4650 и 3700 (рис. 2).

			×	4	6	5	0					
					3	7	0	0				
				3	2	5	5					
	+		1	3	9	5						
			1	7	2	0	5	0	0	0		

Рис. 2.

*Пояснение.*

1. Подпишем одно число под другим так, чтобы сотни числа 3700 были под десятками числа 4650 (то есть нули остаются «в стороне»).
2. Выполняем умножение, не обращая внимания на нули (то есть умножаем 465 и 37).
3. Сложим неполные произведения.
4. В обоих множителях считаем число нулей на конце числа: в числе 4650 — 1 ноль, в числе 3700 — 2 нуля. Всего 3 нуля, приписываем их к 17 205 (найденной сумме неполных произведений), получаем число 17 205 000.
5. Читаем ответ (см. рис. 2): произведение чисел 4650 и 3700 равно 17 205 000.

**8 — Задачи с решениями**

14. Найдите значение выражения: а)  $45 \cdot 83$ ; б)  $1730 \cdot 8200$ ; в)  $185 \cdot 203$ .



*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \quad \times \quad 45 \\ \quad \times \quad 83 \\ \hline \quad 135 \\ + \quad 360 \\ \hline 3735 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \times \quad 1730 \\ \quad \times \quad 8200 \\ \hline \quad 346 \\ + \quad 1384 \\ \hline 14186000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \quad \times \quad 185 \\ \quad \times \quad 203 \\ \hline \quad 555 \\ + \quad 370 \\ \hline 37555 \end{array}$$

*Ответ:* а) 3735; б) 14 186 000; в) 37 555.

### ❶ Немного полезной информации

#### Умножение десятичных дробей

При умножении десятичных дробей надо

- выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
- отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. (Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут нуль или несколько нулей.)

### 🔑 Задачи с решениями

15. Выполните умножение: а)  $0,143 \cdot 0,02$ ; б)  $23 \cdot 0,004$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \quad \times \quad 0,143 \\ \quad \times \quad 0,02 \\ \hline 0,00286 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \times \quad 23 \\ \quad \times \quad 0,004 \\ \hline 0,092 \end{array}$$

*Ответ:* а) 0,00286; б) 0,092.

### ❶ Немного полезной информации

При умножении десятичной дроби на 0,1, 0,01, 0,001, ... надо перенести запятую влево на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе.

**8 — Задачи с решениями**

16. Выполните умножение: а)  $31,2 \cdot 0,001$ ; б)  $0,001 \cdot 0,01$ .

*Решение.*

$$\text{а) } 31,2 \cdot 0,001 = 0,0312.$$

$$\text{б) } 0,001 \cdot 0,01 = 0,00001.$$

*Ответ:* а) 0,0312; б) 0,00001.

**① Немного полезной информации**

При умножении обыкновенных дробей надо

- найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- первое произведение записать числителем; второе — знаменателем.

**8 — Задачи с решениями**

17. Выполните умножение: а)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{25}$ ; б)  $\frac{5}{16} \cdot 4$ ; в)  $9\frac{3}{5} \cdot 1\frac{7}{12}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{25} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 25} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$\text{б) } \frac{5}{16} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{16} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

$$\text{в) } 9\frac{3}{5} \cdot 1\frac{7}{12} = \frac{48}{5} \cdot \frac{19}{12} = \frac{48 \cdot 19}{5 \cdot 12} = \frac{76}{5} = 15\frac{1}{5}.$$

*Ответ:* а) 0,1; б)  $1\frac{1}{4}$ ; в)  $15\frac{1}{5}$ .

**❶ Немного полезной информации**

При умножении двух отрицательных чисел надо перемножить их модули.

**8 ➔ Задачи с решениями**

18. Выполните умножение: а)  $-2,1 \cdot (-3)$ ; б)  $-3\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{4}{5}\right)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } -2,1 \cdot (-3) = 2,1 \cdot 3 = 6,3;$$

$$\text{б) } -3\frac{1}{2} \cdot \left(-2\frac{4}{5}\right) = \frac{7 \cdot 14}{2 \cdot 5} = \frac{98}{10} = 9,8.$$

*Ответ:* а) 6,3; б) 9,8.

**❶ Немного полезной информации**

При умножении двух чисел с разными знаками надо

- поставить знак минус;
- перемножить модули этих чисел.

**8 ➔ Задачи с решениями**

19. Выполните умножение: а)  $-2 \cdot 7$ ; б)  $4,7 \cdot (-0,5)$ .

*Решение.*

$$\text{а) } -2 \cdot 7 = -(2 \cdot 7) = -14.$$

$$\text{б) } 4,7 \cdot (-0,5) = -(4,7 \cdot 0,5) = -2,35.$$

*Ответ:* а)  $-14$ ; б)  $-2,35$ .

**Деление чисел «уголком»****❶ Немного полезной информации**

Объясним деление «уголком» на примере: найдём частное чисел 2736 и 4 (рис. 3).

	2	7	3	6	4				
	2	4			6	8	4		
		3	3						
		3	2						
			1	6					
			1	6					
				0					

Рис. 3.

*Пояснение.*

1. Пишем делимое 2736, ставим «уголок» и пишем делитель 4.
2. Определяем первое неполное делимое. 2 на 4 разделить нельзя, берём 27.
3. Разделим первое неполное делимое 27 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 24.  
 $24 : 4 = 6$ . Пишем 6 в частное. Далее из 27 вычитаем 24. Получаем остаток 3.
4. Проверяем остаток. Он должен быть меньше делителя:  $3 < 4$ , верно.
5. Сносим следующую цифру — 3, получаем 33. Разделим второе неполное делимое 33 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 32.  
 $32 : 4 = 8$ . Пишем 8 в частное. Далее из 33 вычитаем 32. Получаем остаток 1.

6. Проверяем остаток:  $1 < 4$ , верно.
7. Сносим следующую цифру — 6, получаем 16. Разделим третье неполное делимое 16 на 4,  $16 : 4 = 4$ . Пишем в частном 4. Из 16 вычитаем 16, получаем 0.
8. Читаем ответ: частное чисел 2736 и 4 равно 684 (см. рис. 3).

### 8 — Задачи с решениями

20. Вычислите: а)  $4857 : 3$ ; б)  $20\,150 : 5$ ; в)  $63\,810 : 9$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} \underline{4857} \big| 3 \\ \underline{3} \phantom{00} \big| 1619 \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 18 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{r} \underline{20150} \big| 5 \\ \underline{20} \phantom{00} \big| 4030 \\ \underline{15} \phantom{00} \\ 15 \phantom{00} \\ \underline{15} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \begin{array}{r} \underline{63810} \big| 9 \\ \underline{63} \phantom{00} \big| 7090 \\ \underline{81} \phantom{00} \\ 81 \phantom{00} \\ \underline{81} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \end{array} \end{array}$$

Ответ: а) 1619; б) 4030; в) 7090.

### ① Немного полезной информации

При делении десятичной дроби на натуральное число надо

- разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;

- поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части. Если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых.

### 8 — Задачи с решениями

21. Вычислите: а)  $3,28 : 2$ ; б)  $81,27 : 90$ .

*Решение.*

а) $\begin{array}{r} \underline{3,28} \quad   \quad 2 \\ \underline{2} \phantom{00} \quad   \quad 1,64 \\ \underline{1\phantom{0}2} \phantom{00} \quad   \\ \underline{1\phantom{0}2} \phantom{00} \quad   \\ \underline{\phantom{0}8} \phantom{00} \quad   \\ \phantom{0}8 \phantom{00} \quad   \\ \underline{\phantom{0}0} \phantom{00} \quad   \end{array}$	б) $\begin{array}{r} \underline{81,27} \quad   \quad 90 \\ \phantom{00}0 \phantom{00} \quad   \quad 0,903 \\ \underline{\phantom{00}81\phantom{0}2} \phantom{00} \quad   \\ \phantom{00}81\phantom{0}0 \phantom{00} \quad   \\ \underline{\phantom{00}270} \phantom{00} \quad   \\ \phantom{00}270 \phantom{00} \quad   \\ \underline{\phantom{00}0} \phantom{00} \quad   \end{array}$
--	--

Ответ: а) 1,64; б) 0,903.

### ① Немного полезной информации

При делении десятичной дроби на 10, 100, 1000, ... надо перенести запятую в этой дроби на столько цифр влево, сколько нулей стоит после единицы в делителе.

При этом иногда необходимо написать перед целой частью ноль или несколько нулей.

### 8 — Задачи с решениями

22. Выполните деление: а)  $53,7 : 10$ ; б)  $23,41 : 1000$ .

*Решение.*

а)  $53,7 : 10 = 5,37$ .

б)  $23,41 : 1000 = 0,02341$ .

*Ответ:* а) 5,37; б) 0,02341.

### ❗ Немного полезной информации

При делении чисел на десятичную дробь надо

- в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- после этого выполнить деление на натуральное число.

### 🔑 Задачи с решениями

23. Выполните деление: а)  $10,5 : 3,5$ ; б)  $0,125 : 0,5$ ;

в)  $4,5 : 0,009$ .

*Решение.*

а)  $10,5 : 3,5 = 105 : 35 = 3$ .

б)  $0,125 : 0,5 = 1,25 : 5 = 0,25$ .

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r|l}
 1,25 & 5 \\
 \hline
 0 & 0,25 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 12 \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 25 \\
 \hline
 25 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

в)  $4,5 : 0,009 = 4500 : 9 = 500$ .

*Ответ:* а) 3; б) 0,25; в) 500.

24. Найдите значение выражения: а)  $93,15 : 23$ ;

б)  $46,08 : 0,384$ ; в)  $29,029 : 20,02$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{r} \text{а) } \underline{93,15} \overline{) 23} \\ \underline{92} \phantom{00} \\ 1 \phantom{15} \\ \underline{1 \phantom{15}} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{б) } \underline{46080} \overline{) 384} \\ \underline{384} \phantom{00} \\ 768 \phantom{00} \\ \underline{768} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \underline{2902,9} \overline{) 2002} \\ \underline{2002} \phantom{00} \\ 900 \phantom{9} \\ \underline{900 \phantom{9}} \\ 800 \phantom{8} \\ \underline{800 \phantom{8}} \\ 100 \phantom{10} \\ \underline{100 \phantom{10}} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: а) 4,05; б) 120; в) 1,45.

### ① Немного полезной информации

При делении обыкновенных дробей надо делимое умножить на число, обратное делителю. (Два числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.)

### 8 — Задачи с решениями

25. Выполните деление: а)  $\frac{3}{7} : \frac{6}{13}$ ; б)  $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15}$ ; в)  $0 : 5\frac{1}{17}$ ;

г)  $\frac{2}{3} : 4$ ; д)  $7 : \frac{2}{5}$ .

*Решение.*

$$\text{а) } \frac{3}{7} : \frac{6}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{6} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 6} = \frac{13}{14}.$$

$$\text{б) } 2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15} = \frac{12}{5} : \frac{16}{15} = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 16} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

$$\text{в) } 0 : 5\frac{1}{17} = 0.$$

$$\text{г) } \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$



$$\text{д) } 7 : \frac{2}{5} = 7 \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}.$$

Ответ: а)  $\frac{13}{14}$ ; б)  $2\frac{1}{4}$ ; в) 0; г)  $\frac{1}{6}$ ; д)  $17\frac{1}{2}$ .

### **❶ Немного полезной информации**

При делении отрицательного числа на отрицательное надо разделить модуль делимого на модуль делителя.

### **⚡ Задачи с решениями**

26. Выполните деление: а)  $-4,2 : (-6)$ ; б)  $-56 : (-8)$ ;  
в)  $-2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right)$ .

Решение.

$$\text{а) } -4,2 : (-6) = 4,2 : 6 = 0,7.$$

$$\text{б) } -56 : (-8) = 56 : 8 = 7.$$

$$\text{в) } -2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right) = \frac{11 \cdot 15}{5 \cdot 11} = 3.$$

Ответ: а) 0,7; б) 7; в) 3.

### **❶ Немного полезной информации**

При делении чисел с разными знаками надо

- поставить знак минус;
- разделить модуль делимого на модуль делителя.

### **⚡ Задачи с решениями**

27. Выполните деление: а)  $45 : (-15)$ ; б)  $-2,8 : 0,04$ ;  
в)  $-3\frac{1}{6} : \frac{19}{36}$ .

*Решение.*

а)  $45 : (-15) = -(45 : 15) = -3;$

б)  $-2,8 : 0,04 = -(2,8 : 0,04) = -(280 : 4) = -70;$

в)  $-3\frac{1}{6} : \frac{19}{36} = -\frac{19 \cdot 36}{6 \cdot 19} = -6.$

*Ответ:* а)  $-3$ ; б)  $-70$ ; в)  $-6$ .

## Величины

### ❶ Немного полезной информации

Вспомним соотношение некоторых величин.

*Единицы массы*

$$1 \text{ т} = 1000 \text{ кг}$$

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг}$$

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г}$$

$$1 \text{ г} = 1000 \text{ мг}$$

*Единицы длины*

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$$

$$1 \text{ м} = 100 \text{ см}$$

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$$

*Единицы времени*

$$1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}$$

$$1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$$

$$1 \text{ сут.} = 24 \text{ ч}$$

*Единицы площади*

$$1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ га} = 10\,000 \text{ м}^2$$

$$1 \text{ га} = 100 \text{ а}$$

$$1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$$

**8 — Задачи с решениями**

**28.** Переведите в граммы: а) 2 кг 230 г; б) 9 кг 17 г;  
в) 2 г 300 мг.

*Решение.*

$$\text{а) } 2 \text{ кг } 230 \text{ г} = (2 \cdot 1000 + 230) \text{ г} = (2000 + 230) \text{ г} = 2230 \text{ г.}$$

$$\text{б) } 9 \text{ кг } 17 \text{ г} = (9 \cdot 1000 + 17) \text{ г} = (9000 + 17) \text{ г} = 9017 \text{ г.}$$

$$\text{в) } 2 \text{ г } 300 \text{ мг} = 2 \frac{300}{1000} \text{ г} = 2,3 \text{ г.}$$

*Ответ:* а) 2230 г; б) 9017 г; в) 2,3 г.

**29.** Переведите в метры: а) 12 км 48 м; б) 2 км 300 м;  
в) 3 м 5 см.

*Решение.*

$$\text{а) } 12 \text{ км } 48 \text{ м} = (12 \cdot 1000 + 48) \text{ м} = (12\,000 + 48) \text{ м} = 12\,048 \text{ м.}$$

$$\text{б) } 2 \text{ км } 300 \text{ м} = (2 \cdot 1000 + 300) \text{ м} = (2000 + 300) \text{ м} = 2300 \text{ м.}$$

$$\text{в) } 3 \text{ м } 5 \text{ см} = 3 \frac{5}{100} \text{ м} = 3,05 \text{ м.}$$

*Ответ:* а) 12 048 м; б) 2300 м; в) 3,05 м.

**30.** Переведите в минуты: а) 2 ч 30 мин; б) 4 ч 5 мин;  
в) 5 мин 30 с.

*Решение.*

$$\text{а) } 2 \text{ ч } 30 \text{ мин} = (2 \cdot 60 + 30) \text{ мин} = (120 + 30) \text{ мин} = 150 \text{ мин.}$$

$$\text{б) } 4 \text{ ч } 5 \text{ мин} = (4 \cdot 60 + 5) \text{ мин} = (240 + 5) \text{ мин} = 245 \text{ мин.}$$

$$\text{в) } 5 \text{ мин } 30 \text{ с} = 5 \frac{30}{60} \text{ мин} = 5,5 \text{ мин.}$$

*Ответ:* а) 150 мин; б) 245 мин; в) 5,5 мин.

**31.** Выполните действия. Ответ запишите в кг.

$$\text{а) } 3 \text{ кг } 528 \text{ г} + 472 \text{ г} - 2 \text{ кг } 32 \text{ г;}$$

$$\text{б) } 57 \text{ кг } 40 \text{ г} + 48 \text{ кг } 200 \text{ г} - 42 \text{ кг } 5 \text{ г.}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } 3 \text{ кг } 528 \text{ г} + 472 \text{ г} - 2 \text{ кг } 32 \text{ г} &= 3 \frac{528}{1000} \text{ кг} + \frac{472}{1000} \text{ кг} - \\ &- 2 \frac{32}{1000} \text{ кг} = 3,528 \text{ кг} + 0,472 \text{ кг} - 2,032 \text{ кг} = 1,968 \text{ кг}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 57 \text{ кг } 40 \text{ г} + 48 \text{ кг } 200 \text{ г} - 42 \text{ кг } 5 \text{ г} &= 57,04 \text{ кг} + 48,2 \text{ кг} - \\ &- 42,005 \text{ кг} = 63,235 \text{ кг}. \end{aligned}$$

*Ответ:* а) 1,968 кг; б) 63,235 кг.

## Стандартный вид числа

### ❶ Немного полезной информации

Каждое число, большее 10, можно записать в виде  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$  и  $n$  — натуральное число. Такая запись числа называется **стандартным видом числа**.

### 8— Задачи с решениями

**32.** Запишите в стандартном виде число: а) 358; б) 87 370; в) 5 200 000.

*Решение.*

$$\text{а) } 358 = 3,58 \cdot 10^2;$$

$$\text{б) } 87\,370 = 8,737 \cdot 10^4;$$

$$\text{в) } 5\,200\,000 = 5,2 \cdot 10^6.$$

*Ответ:* а)  $3,58 \cdot 10^2$ ; б)  $8,737 \cdot 10^4$ ; в)  $5,2 \cdot 10^6$ .

**33.** Выполните действия: а)  $(2,4 \cdot 10^6) : (1,2 \cdot 10^5)$ ;

$$\text{б) } (2,3 \cdot 10^3) \cdot (1,1 \cdot 10^4).$$

*Решение.*

$$\text{а) } (2,4 \cdot 10^6) : (1,2 \cdot 10^5) = (2,4 : 1,2) \cdot 10^{6-5} = 2 \cdot 10 = 20;$$

$$\text{б) } (2,3 \cdot 10^3) \cdot (1,1 \cdot 10^4) = (2,3 \cdot 1,1) \cdot 10^{3+4} = 2,53 \cdot 10^7.$$

*Ответ:* а) 20; б)  $2,53 \cdot 10^7$ .

## Отношения

### ① Немного полезной информации

**Отношение двух чисел** — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Например,  $\frac{15}{5} = 3$  показывает, что число 15 в 3 раза больше числа 5;  $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$  показывает, что число 7 составляет  $\frac{1}{9}$  часть от числа 63.

Отношение  $\frac{b}{a}$  называют обратным отношением  $\frac{a}{b}$ .

### 8 — Задачи с решениями

**34.** Масса холодильника 45 кг, а масса упаковки 3 кг 600 г. Найдите отношение массы холодильника к массе упаковки.

*Решение.*

3 кг 600 г = 3,6 кг. Отношение массы холодильника к массе упаковки равно  $\frac{45}{3.6} = \frac{450}{36} = \frac{50}{4} = 12.5$ .

*Ответ:* 12.5.

**35.** В стоимость путёвки входит проезд и проживание. Стоимость проезда — 5400 руб., а стоимость проживания — 30600 руб. Какую часть от всей стоимости путёвки составляет проживание?

*Решение.*

Общая стоимость путёвки равна  $30600 + 5400 = 36000$  (руб.). Чтобы определить, какую часть от всей стоимости путёвки составляет проживание, найдём отношение стоимости проживания к общей стоимости:

$$\frac{30600}{36000} = 0,85.$$

*Ответ:* 0,85.

**36.** Провод длиной 286 м разрезан на 5 кусков, длины которых относятся как  $3 : 4 : 5 : 6 : 8$ . Найдите длину меньшего из полученных кусков.

*Решение.*

Пусть  $x$  м — длина одной части. Тогда длины полученных кусков провода соответственно равны  $3x, 4x, 5x, 6x$  и  $8x$ . Следовательно,  $3x + 4x + 5x + 6x + 8x = 286$ ;  $26x = 286$ ;  $x = 11$ ; 11 м приходится на одну часть. Следовательно, длина меньшего из полученных кусков проволоки равна  $3 \cdot 11 = 33$  (м).

*Ответ:* 33.

## Пропорции

### ❶ Немного полезной информации

- Равенство двух отношений называют пропорцией.
- В пропорции  $a : b = c : d$ , или  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , числа  $a$  и  $d$  называются **крайними членами**, а числа  $b$  и  $c$  — **средними членами** пропорции.
- В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов, т. е.  $a \cdot d = b \cdot c$ .

- Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, делённому на известный крайний член.

Например,  $x : 5 = 8 : 4$ ,  $x = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$ .

- Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, делённому на известный средний.

Например,  $9 : 3 = x : 2$ ,  $x = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$ .

### 🔑 Задачи с решениями

37. За 5 кг фруктов заплатили 820 рублей. Сколько следует заплатить за 3 кг таких фруктов?

*Решение.*

Пусть 3 кг фруктов стоят  $x$  рублей. Тогда, согласно условию,

5 кг — 820 рублей

3 кг —  $x$  рублей.

Так как стоимость товара **прямо пропорциональна** количеству товара, то справедливо равенство

$5 : 3 = 820 : x$ . По правилу нахождения крайнего члена пропорции

$$x = \frac{3 \cdot 820}{5} = 492.$$

3 кг фруктов стоят 492 рубля.

*Ответ:* 492.

**38.** С помощью 5 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 48 минут. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

*Решение.*

Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за  $x$  минут. Тогда, согласно условию,

5 труб — 48 мин

8 труб —  $x$  мин.

Так как время заполнения бассейна **обратно пропорционально** количеству труб, то справедливо равенство  $5 : 8 = x : 48$ . По правилу нахождения среднего члена про-

порции  $x = \frac{5 \cdot 48}{8} = 30$ .

8 труб заполняют бассейн за 30 минут.

*Ответ:* 30.

## Проценты

### ① Немного полезной информации

- 1% — это  $\frac{1}{100}$  часть от целого, 25% — это  $\frac{25}{100} = 0,25$  от целого.

- Процент от числа находится действием умножения.  
Например, надо найти 20% от числа 250.

Делаем так:  $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$ .

- Число по его проценту находится действием деления.  
Например, надо найти число, если 25% его составляет 35.



Делаем так:  $35 : \frac{25}{100} = \frac{35 \cdot 100}{25} = 140$ .

- Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, надо найти отношение этих чисел и результат умножить на 100%.

Например, надо найти, сколько процентов число 4 составляет от числа 8.

Делаем так:  $\frac{4}{8} \cdot 100\% = 50\%$ .

### Задачи с решениями

39. Найдите 15% от числа 130.

*Решение.*

$$15\% = 0,15.$$

Следовательно, 15% от числа 130 равны  $130 \cdot 0,15 = 19,5$ .

*Ответ:* 19,5.

40. Саша прочитала 40 страниц книги, что составило 20% от всех страниц этой книги. Сколько страниц в книге?

*Решение.*

В задаче необходимо найти число всех страниц, значит,

$$\text{надо } 40 : \frac{20}{100} = \frac{40 \cdot 100}{20} = 200 (\text{с.}).$$

*Ответ:* 200.

41. Диск с компьютерной игрой стоит 1500 рублей. Скидка в день распродажи равна 15%. Сколько стоит этот диск со скидкой в день распродажи?

*Решение.*

Стоимость данного диска без скидки составляет 100%, скидка равна 15%. Значит, стоимость диска со скидкой составляет  $100\% - 15\% = 85\%$  от цены без скидки. 85% — это 0,85 от 1500 рублей.

$$1500 \cdot 0,85 = 1275 \text{ рублей.}$$

*Ответ:* 1275.

**42.** В аквариуме 30 мальков и 20 взрослых рыбок. Сколько процентов от всех обитателей аквариума составляют мальки?

*Решение.*

Всего в аквариуме  $30 + 20 = 50$  обитателей. Мальки составляют  $\frac{30}{50} \cdot 100\% = 60\%$  от всех обитателей аквариума.

*Ответ:* 60.

**43.** Билет на экскурсию для взрослого стоит 160 рублей. Стоимость билета для ребёнка до 10 лет составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 детей до 10 лет и 4-х взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

*Решение.*

Стоимость билета для ребёнка составляет 50% от 160 рублей, то есть  $160 \cdot 0,5 = 80$  рублей. 16 детских билетов по 80 рублей стоят  $80 \cdot 16 = 1280$  рублей. 4 взрослых билета по 160 рублей стоят  $160 \cdot 4 = 640$  рублей. Билеты на всю группу стоят  $1280 + 640 = 1920$  рублей.

*Ответ:* 1920.

**44.** За один день дорожная бригада в среднем ремонтирует 2% от всей протяжённости дороги. Сколько дней потребуется этой бригаде для ремонта всей дороги?

*Решение.*

Протяжённость всей дороги составляет 100%. За один день рабочие ремонтируют 2% от всей протяжённости дороги, значит, на ремонт всей дороги им потребуется  $\frac{100}{2} = 50$  дней.

*Ответ:* 50.

Иногда **задачи на проценты** удобно решать, составив пропорцию.

### **Задачи с решениями**

**45.** Найдите, сколько процентов составляет число 91 от 260.

*Решение.*

Пусть число 91 от 260 составляет  $x$  процентов. Тогда

$$91 \quad \text{—} \quad x\%$$

$$260 \quad \text{—} \quad 100\%.$$

Из пропорции  $91 : 260 = x : 100$  находим

$$x = \frac{91 \cdot 100}{260} = 35. \text{ Число 91 от числа 260 составляет } 35\%.$$

*Ответ:* 35.

**46.** Когда туристы прошли 35 километров, то оказалось, что пройденный путь составляет 20% от всего пути. Сколько километров составляет весь путь туристов?

*Решение.*

Пусть весь путь составляет  $x$  километров. Тогда

$$35 \text{ км} \quad \text{—} \quad 20\%$$

$$x \text{ км} \quad \text{—} \quad 100\%.$$

Из пропорции  $35 : x = 20 : 100$  находим

$$x = \frac{35 \cdot 100}{20} = 175. \text{ Весь путь туристов — 175 километров.}$$

*Ответ:* 175.

### **Задача на расчёт дохода по вкладу**

**47.** Клиент открыл в банке счёт и положил на срочный вклад 2000 рублей. Определите сумму вклада через 2 года, если банк начисляет ежегодно проценты по ставке 12% годовых и дополнительных вложений не поступало.

*Решение.*

Сумма в 2000 рублей, положенная на банковский счёт под 12% годовых, через год возрастёт до величины  $2000 \cdot 1,12 = 2240$  (рублей). Так как банк начисляет ежегодно проценты на имеющуюся сумму, то за второй год 12% будет начисляться на сумму 2240 рублей, и, следовательно, сумма возрастёт до  $2240 \cdot 1,12 = 2508,8$  (рублей).

*Ответ:* 2508,8.

### **Концентрация вещества**

#### **① Немного полезной информации**

Если  $m$  — масса раствора,  $p$  — концентрация вещества по массе, выраженная в процентах,  $x$  — масса чистого вещества,

$$\text{то } x = \frac{p}{100} \cdot m, \quad m = \frac{100x}{p}.$$

Например, если имеется 20 г раствора, содержащего 7% сахара, то сахара в растворе  $20 \cdot \frac{7}{100} = 1,4$  (г). Если имеется 50 г раствора, в котором 15 г чистого вещества, то концентрация чистого вещества в растворе равна  $\frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\%$ .

### Задачи с решениями

48. Смешали два раствора уксуса: первый массой 200 г, второй — 300 г. Концентрация первого раствора 9%, второго — 12%. Какова концентрация полученного раствора?

*Решение.*

Концентрация первого раствора уксуса массой 200 г составляет 9%. То есть уксусной кислоты в этом растворе  $\frac{200 \cdot 9}{100} = 18$  (г).

Концентрация второго раствора уксуса массой 300 г составляет 12%. Это означает, что уксусной кислоты в этом растворе  $\frac{300 \cdot 12}{100} = 36$  (г).

После того как смешали два раствора, масса нового раствора стала  $200 + 300 = 500$  (г), а уксусной кислоты в этом растворе стало  $36 + 18 = 54$  (г). Концентрация составляет  $\frac{54}{500} \cdot 100\% = 10,8\%$ .

*Ответ:* 10,8.

## Иррациональные числа

### ① Немного полезной информации

**Арифметическим квадратным корнем** из числа  $a$  называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .

При любом  $a \geq 0$  выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл. Если  $a < 0$ , то выражение  $\sqrt{a}$  не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл, то  $\sqrt{a} \geq 0$  и  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

### Свойства арифметического квадратного корня

1) Если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

2) Если  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

3)  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

### 8 — Задачи с решениями

**49.** Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{2500}$ ;   б)  $-\sqrt{0,0004}$ ;   в)  $2\sqrt{\frac{81}{16}}$ ;   г)  $\frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$ ;

б)  $-\sqrt{0,0004} = -\sqrt{\frac{4}{10000}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10000}} = -\frac{2}{100} = -0,02$ ;

в)  $2\sqrt{\frac{81}{16}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$ ;

г)  $\frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21} = \frac{7}{22} \cdot \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{7 \cdot 11}{22 \cdot 10} = 0,35$ .

*Ответ:* а) 50;   б) -0,02;   в) 4,5;   г) 0,35.

50. Внесите множитель под знак корня:

а)  $5\sqrt{3}$ ; б)  $-3\sqrt{7}$ .

*Решение.*

а)  $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$ ;

б)  $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -\sqrt{9 \cdot 7} = -\sqrt{63}$ .

*Ответ:* а)  $\sqrt{75}$ ; б)  $-\sqrt{63}$ .

51. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{27} - \sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt{125} - 2\sqrt{5}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3}$ ; г)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7}$ .

*Решение.*

а)  $\sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ;

б)  $\sqrt{125} - 2\sqrt{5} = \sqrt{25 \cdot 5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} =$   
 $= \frac{6\sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$ ;

г)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 7} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{7} = 0$ .

*Ответ:* а)  $2\sqrt{3}$ ; б)  $3\sqrt{5}$ ; в)  $\sqrt{6}$ ; г) 0.

52. Вычислите  $\sqrt{3\frac{1}{16}} - 2\sqrt{0,25}$ .

*Решение.*

$$\sqrt{3\frac{1}{16}} - 2\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{49}{16}} - 2 \cdot 0,5 = \frac{7}{4} - 1 = 1,75 - 1 = 0,75.$$

*Ответ:* 0,75.

53. Вычислите  $\frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 75} + 4 \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{1}{20}}$ .

*Решение.*

$$\frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 75} + 4 \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{1}{20}} = \frac{1}{5}\sqrt{225} + 4\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \cdot 15 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 + 2 = 5.$$

*Ответ:* 5.

54. Найдите значение выражения  $\sqrt{b^2} - \sqrt{11}$  при  $b = \sqrt{11}$ .

*Решение.*

Подставим  $b = \sqrt{11}$  в выражение  $\sqrt{b^2} - \sqrt{11}$ . Получим  $\sqrt{(\sqrt{11})^2} - \sqrt{11} = \sqrt{11} - \sqrt{11} = 0$ .

*Ответ:* 0.

55. Упростите выражение  $(7\sqrt{3} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3})$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} & (7\sqrt{3} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3}) = \\ & = (\sqrt{147} + 17\sqrt{48} - \sqrt{147}) : (2\sqrt{3}) = \\ & = \frac{17\sqrt{48}}{2\sqrt{3}} = \frac{17}{2} \sqrt{\frac{48}{3}} = \frac{17}{2} \sqrt{16} = \frac{17 \cdot 4}{2} = 34. \end{aligned}$$

*Ответ:* 34.

56. Сократите дробь  $\frac{25 - y}{5 - \sqrt{y}}$ , если  $\sqrt{y} \neq 5$ .

*Решение.*

$$\frac{25 - y}{5 - \sqrt{y}} = \frac{(5 - \sqrt{y})(5 + \sqrt{y})}{5 - \sqrt{y}} = 5 + \sqrt{y}.$$

*Ответ:*  $5 + \sqrt{y}$ .

57. Исключите иррациональность из знаменателя

а)  $\frac{3}{\sqrt{7}}$ ;



$$б) \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

*Решение.*

$$а) \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7};$$

$$\begin{aligned} б) \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

*Ответ:* а)  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ; б)  $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ .

**58.** Найдите значение выражения  $2x^2 - 4\sqrt{3}x - 1$ , если  $x = \sqrt{3} - 1$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} &\text{Подставляя в заданное выражение значение } x, \text{ получим} \\ &2(\sqrt{3} - 1)^2 - 4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) - 1 = \\ &= 2(3 - 2\sqrt{3} + 1) - 4\sqrt{3}\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 1 = \\ &= 6 - 4\sqrt{3} + 2 - 12 + 4\sqrt{3} - 1 = -5. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-5$ .

**59.** При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение  $\frac{1}{\sqrt{4a-1}}$ ?

*Решение.*

Учитывая, что квадратный корень определён на множестве неотрицательных чисел, а знаменатель дроби отличен от

нуля, выражение  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  имеет смысл при  $t > 0$ . Значит, выраже-

ние  $\frac{1}{\sqrt{4a-1}}$  имеет смысл, если  $4a - 1 > 0$ . Отсюда  $a > 0,25$ .

Ответ:  $(0,25; +\infty)$ .

**60.** Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения  $\frac{\sqrt{5x-17}}{x-4}$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x - 17 \geq 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3,4, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

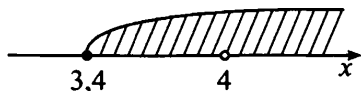


Рис. 4.

Следовательно, наименьшим целым числом, входящим в область допустимых значений исходного выражения, является 5.

Ответ: 5.

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Выполните действия  $3,5 - (-13,12) + (-5,173)$ .

2. Найдите значение выражения  $|-3 : 2,5| - 1\frac{2}{3}$ .

3. Сколько целых чисел принадлежит промежутку  $[\sqrt{23}; \sqrt{195}]$ ?

4. Запишите число 737,7 тыс. в стандартном виде.
5. Выполните действие  $57 \text{ м } 40 \text{ см} - 19 \text{ м } 3 \text{ дм}$ . Ответ запишите в метрах.
6. Найдите значение выражения  $3\frac{1}{2} + (13.12 - 5.17) \cdot \frac{1}{5}$ .
7. Земельный участок площадью 420 га засеян семенами кукурузы и пшеницы. Площади под посев относятся как 3 : 5 соответственно. Найдите, сколько гектаров площади отведено под кукурузу.
8. Стоимость билета в музей составляет 230 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50%. Найдите, сколько рублей стоит посещение музея для группы из 18 школьников.

### Вариант 2

1. Выполните действия  $4\frac{1}{19} \cdot \frac{38}{77} \cdot 0,05$ .
2. Найдите значения выражения  $-1\frac{7}{12} + |2 : (-1,5)|$ .
3. Выберите наименьшее из чисел  $\sqrt{17}$ , 4,  $3\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{3}$ .
4. Запишите число 142 600 в стандартном виде.
5. Выполните действие  $75 \text{ кг } 300 \text{ г} - 5 \text{ кг } 15 \text{ г}$ . Ответ запишите в килограммах.
6. Найдите значения выражения  $\left(12.1 : \frac{11}{3} - 1.2\right) \cdot 1\frac{1}{7}$ .
7. Для получения мельхиора берут медь и никель в отношении 4 : 1. Найдите, сколько понадобится меди для получения 30 кг мельхиора.

8. Во время тестирования ученик из 24-х задач решил 18. Определите, сколько процентов составляют решённые задачи от общего числа задач теста.

### Вариант 3

1. Выполните действия  $3,75 + (-10,5) - (-17,003)$ .
2. Найдите значение выражения  $-3,27 : |-0,3| + 1\frac{5}{7}$ .
3. Вычислите  $\sqrt{4\frac{1}{18}} : \sqrt{1\frac{1}{72}}$ .
4. Выполните деление  $54\,000 : 1,8$ . В ответе запишите число в стандартном виде.
5. Выполните действие  $32\text{ м } 13\text{ см} - 12\text{ дм } 5\text{ см}$ . Ответ запишите в метрах.
6. Найдите значение выражения  $5\frac{1}{2} + (12,17 - 25,82) : 3$ .
7. Для пайки изделий из жести применяют сплав олова и свинца в отношении  $5 : 2$ . Сколько надо взять свинца, если весь сплав будет весить 294 г?
8. Найдите число, если 15% этого числа равны 195.

### Вариант 4

1. Выполните действия  $(-2,81) + 12,009 - (-5,4)$ .
2. Найдите значение выражения  $|-8,72| : 0,08 + 1\frac{2}{25}$ .
3. Вычислите  $\frac{\sqrt{72} + \sqrt{18}}{\sqrt{72}}$ .

4. Выполните деление  $108,8 : 0,00064$ . В ответе запишите число в стандартном виде.
5. Выполните действие  $5 \text{ кг } 200 \text{ г} - 3 \text{ кг } 15 \text{ г}$ . Ответ запишите в килограммах.
6. Найдите значение выражения  $3\frac{4}{5} + (8,52 - 13,2) : 0,2$ .
7. Найдите массу малины в джеме весом  $5 \text{ кг}$ , если массовые доли ягод малины и смородины в джеме соответственно относятся как  $3 : 1$ .
8. Клиент открыл в банке счёт и положил  $20\,000$  рублей. Какая сумма будет у него на счёте через год, если банк начисляет  $12\%$  годовых?

### Вариант 5

1. Выполните действия  $-2,86 - (-7,004) + (-4,144)$ .
2. Найдите значение выражения  $-6,036 : |-0,503| + 12\frac{2}{3}$ .
3. Сколько целых чисел принадлежит промежутку  $[\sqrt{15}; \sqrt{150}]$ ?
4. Выполните умножение  $2300 \cdot 1,1$  и в ответе запишите число в стандартном виде.
5. Выполните действие  $75 \text{ кг } 300 \text{ г} - 5 \text{ кг } 15 \text{ г}$ . Ответ запишите в килограммах.
6. Найдите значение выражения  $3\frac{1}{2} + (15,16 - 10,3) : 0,3$ .
7. В классе  $28$  учеников, из них количество мальчиков относится к количеству девочек как  $3 : 4$ . Сколько мальчиков в классе?

8. Найдите, сколько страниц в книге, если Петя прочитал 30 страниц, что составляет 6% от их общего числа.

### Вариант 6

1. Выполните действия  $-5,64 - (-10,006) + 15,634$ .

2. Найдите значение выражения  $|-12,004| : 30,01 + \left| -5\frac{2}{5} \right|$ .

3. Вычислите  $\sqrt{1\frac{3}{65}} \cdot \sqrt{3\frac{28}{34}}$ .

4. Выполните деление  $24 : 0,00012$  и в ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие  $15 \text{ мин } 30 \text{ с} + 2 \text{ мин } 45 \text{ с}$ . Ответ запишите в минутах.

6. Найдите значение выражения  $2\frac{3}{5} + (10,31 - 5,21) : 0,3$ .

7. В корзине было 18 яблок двух видов: красных и зелёных. Количество красных яблок относится к количеству зелёных яблок как 4 : 5 соответственно. Найдите количество красных яблок.

8. В ювелирном изделии содержание золота составляет 75% от общей массы изделия. Найдите, сколько граммов золота содержится в изделии, если его общая масса 4 г.

## Глава 2. Алгебраические выражения

### ① Немного полезной информации

**Алгебраическое выражение** — это запись из чисел и букв, соединённых знаками действий и скобками.

Приведём примеры алгебраических выражений:

$$3(a + b); \quad 7x + 1; \quad y; \quad 2yz; \quad \frac{2a + c}{x}.$$

**Значение выражения** мы получаем при замене каждой буквы некоторым числом и выполнении алгебраических действий.

Например, найдём значение выражения  $7a - 3ab + 1$  при  $a = 4$ ,  $b = 2$ . Подставив вместо букв указанные числа, получим  $7 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 = 28 - 24 + 1 = 5$ .

Слагаемые, имеющие одинаковые буквенные множители, называют **подобными**.

Например, слагаемые  $3ab$  и  $-5ab$  являются подобными. Также являются подобными слагаемые  $4x$  и  $10x$ . А слагаемые  $3x$  и  $3y$  подобными не являются.

При упрощении выражения следует находить суммы подобных слагаемых, то есть выполнять **приведение подобных слагаемых**.

### 8 Задачи с решениями

1. Упростите выражение  $5xy + x + y - 2xy - 3xy$  и найдите его значение при  $x = 2 + \sqrt{2}$ ,  $y = 3 - \sqrt{2}$ .

*Решение.*

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые:  $\underline{5xy} + x + y - \underline{2xy} - \underline{3xy}$ . Найдём сумму подчёркнутых слагаемых:  $\underline{5xy} - \underline{2xy} - \underline{3xy} = (5 - 2 - 3)xy = 0xy = 0$ . Таким образом,  $5xy + x + y - 2xy - 3xy = x + y$ . Подставляя вместо  $x$  и  $y$  указанные в условии числа, получаем  $x + y = 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 5$ .

*Ответ:* 5.

2. Упростите выражение  $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7}$  и найдите его значение при  $a = 2 + \sqrt{7}$ .

*Решение.*

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые:  $\underline{5a} + \underline{3\sqrt{7}} - \underline{4a} - \underline{4\sqrt{7}}$ . Найдём сумму слагаемых, подчёркнутых одной чертой:  $\underline{5a} - \underline{4a} = a$ . Теперь найдём сумму слагаемых, подчёркнутых двумя чертами:  $\underline{3\sqrt{7}} - \underline{4\sqrt{7}} = -\sqrt{7}$ . Таким образом,  $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7} = a - \sqrt{7}$ . Подставляя вместо  $a$  указанное в условии число, получаем  $a - \sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 2$ .

*Ответ:* 2.



## Правила раскрытия скобок

### ① Немного полезной информации

- Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок все слагаемые остаются без изменений.  
Например,  $2a + (3b - c + 4) = 2a + 3b - c + 4$ .
- Если перед скобками стоит знак «-», то при раскрытии скобок каждое слагаемое меняет знак на противоположный. Например,  $4x - (y - 6z - 5) = 4x - y + 6z + 5$ .
- Если перед скобками (или после скобок) стоит множитель, то при раскрытии скобок каждое слагаемое умножается на этот множитель. При подсчёте этих произведений следует учитывать как знак множителя за скобками, так и знаки слагаемых внутри скобок.

Рассмотрим два примера:

$$(5a - b - 8) \cdot 4c = 5a \cdot 4c + (-b) \cdot 4c + (-8) \cdot 4c = \\ = 20ac - 4bc - 32c;$$

$$-2x(3y - z + 4) = (-2x) \cdot 3y + (-2x) \cdot (-z) + (-2x) \cdot 4 = \\ = -6xy + 2xz - 8x.$$

### 8 ➔ Задачи с решениями

3. Упростите выражение  $(b - c) \cdot 4a + 4ac$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ ,  $c = 3\sqrt{2}$ .

*Решение.*

$(b - c) \cdot 4a + 4ac = 4ba - 4ca + 4ac = 4ba$ . Подставляя вместо  $a$  и  $b$  указанные в условии числа, получаем  $4ba = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ .

*Ответ:* 16.

4. Упростите выражение  $3ac - a(c - 3b) - 3ab$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 5\sqrt{3}$ ,  $c = 3\sqrt{3}$ .

*Решение.*

$3ac - a(c - 3b) - 3ab = 3ac - a \cdot c - a \cdot (-3b) - 3ab =$   
 $= 3ac - ac + 3ab - 3ab = 2ac$ . Подставляя вместо  $a$  и  $c$  указанные в условии числа, получаем  $2ac = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ .

*Ответ:* 18.

### ① Немного полезной информации

Если требуется раскрыть произведение, состоящее из нескольких скобок, то скобки следует раскрывать поочередно. Например:

$$\begin{aligned}(3a - 2b)(4x - 5y) &= 3a(4x - 5y) - 2b(4x - 5y) = \\ &= 3a \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot 4x + (-2b) \cdot (-5y) = \\ &= 12ax - 15ay - 8bx + 10by.\end{aligned}$$

В этом примере мы сначала раскрыли первые скобки  $(3a - 2b)$ , а затем вторые скобки  $(4x - 5y)$ . Но можно было сделать и по-другому, начав с раскрытия вторых скобок:

$$\begin{aligned}(3a - 2b)(4x - 5y) &= (3a - 2b) \cdot 4x + (3a - 2b) \cdot (-5y) = \\ &= 3a \cdot 4x + (-2b) \cdot 4x + 3a \cdot (-5y) + (-2b) \cdot (-5y) = \\ &= 12ax - 8bx - 15ay + 10by.\end{aligned}$$

### 8 — Задачи с решениями

5. Упростите выражение  $(a - 6)(b + 5) - ab + 6b$  и найдите его значение при  $a = 7$ ,  $b = 3 + 4\sqrt{7}$ .

*Решение.*

$(a - 6)(b + 5) - ab + 6b = a(b + 5) - 6(b + 5) - ab + 6b =$   
 $= ab + 5a - 6b - 30 - ab + 6b = 5a - 30$ . Подставляя  $a = 7$ , получаем  $5a - 30 = 5 \cdot 7 - 30 = 35 - 30 = 5$ .

*Ответ:* 5.

## Формулы сокращённого умножения

### ① Немного полезной информации

Следует запомнить три формулы сокращённого умножения.

- Квадрат суммы:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
- Квадрат разности:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
- Разность квадратов:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Например:

$$(2c + 3)^2 = (2c)^2 + 2 \cdot 2c \cdot 3 + 3^2 = 4c^2 + 12c + 9;$$

$$(3k - 1)^2 = (3k)^2 - 2 \cdot 3k + 1 = 9k^2 - 6k + 1;$$

$$t^2 - 25 = t^2 - 5^2 = (t - 5)(t + 5).$$

### 8 ➔ Задачи с решениями

6. Сократите дробь  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ ,  $x \neq -1$ .

*Решение.*

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1.$$

*Ответ:*  $x + 1$ .

7. Сократите дробь  $\frac{a^2 - 9}{a + 3}$ ,  $a \neq -3$ .

*Решение.*

$$\frac{a^2 - 9}{a + 3} = \frac{a^2 - 3^2}{a + 3} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{a + 3} = a - 3.$$

*Ответ:*  $a - 3$ .

## Допустимые значения переменных

### ① Немного полезной информации

- Допустимые значения переменных — это значения, при которых алгебраическое выражение **имеет смысл**.
- Если в выражении есть дробь, то **знаменатель дроби** должен быть **отличен от нуля**.

Например, для выражения  $\frac{b}{a-2}$  допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию  $a-2 \neq 0$ , то есть  $a \neq 2$ .

- Если в алгебраическом выражении есть квадратный корень, то **подкоренное выражение** должно быть **неотрицательно**.

Например, для выражения  $\sqrt{y+3}$  допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию  $y+3 \geq 0$ , то есть  $y \geq -3$ .

### 8 — Задачи с решениями

8. Найдите допустимые значения переменной  $b$  в выражении

$$\frac{b}{\sqrt{b-5}}.$$

*Решение.*

Выражение под корнем должно быть неотрицательным, поэтому  $b-5 \geq 0$ ,  $b \geq 5$ . Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому  $\sqrt{b-5} \neq 0$ ,  $b-5 \neq 0$ ,  $b \neq 5$ . Таким образом, одновременно должно выполняться  $b \geq 5$  и  $b \neq 5$ , следовательно,  $b > 5$ .

*Ответ:*  $b > 5$ .

9. Найдите количество целых чисел, входящих в область допустимых значений переменной  $x$  в выражении  $\frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sqrt{x - 3}}$ .

*Решение.*

*1-й способ.*

В числителе под корнем стоит выражение  $10 - x$ , поэтому  $10 - x \geq 0$ ,  $x \leq 10$ . В знаменателе под корнем стоит выражение  $x - 3$ , поэтому  $x - 3 \geq 0$ . Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому последнее неравенство должно быть строгим:  $x - 3 > 0$ ,  $x > 3$ . Мы нашли область допустимых значений:  $3 < x \leq 10$ . В неё входят целые числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — всего 7 чисел.

*2-й способ.*

Покажем запись решения, если рассуждения выполнять устно.

$$\begin{cases} 10 - x \geq 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 10, \\ x > 3. \end{cases} \quad \text{Неравенство } 3 < x \leq 10$$

имеет 7 целых решений: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

*Ответ:* 7.

## Алгебраические дроби

### ① Немного полезной информации

**Алгебраическая дробь** — это дробь, в числителе и знаменателе которой стоят алгебраические выражения. Все действия с алгебраическими дробями производятся по тем же правилам, что и с числовыми дробями.

### 8 Задачи с решениями

10. Упростите выражение  $\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2 - n^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) : \frac{m}{m^2 - n^2} &= \frac{m+n+m-n}{(m-n)(m+n)} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m} = \\ &= \frac{2m}{m^2 - n^2} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m} = \frac{2m \cdot (m^2 - n^2)}{(m^2 - n^2) \cdot m} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

### Степень с целым показателем

#### ① Немного полезной информации

Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда по определению

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

$n$  множителей

Например,  $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ ;  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ ;  
 $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ ;  $7^1 = 7$ ;  $0^8 = 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$ .

Пусть  $n = 0$ ,  $a \neq 0$ , тогда  $a^0 = 1$ .

Например,  $5^0 = 1$ ,  $(-45)^0 = 1$ ,  $(0,7)^0 = 1$ .

Запись  $0^0$  считается **не имеющей смысла**.

Пусть  $n$  — натуральное число,  $a \neq 0$ , тогда

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например,  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$ ;

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

Запись  $0^{-n}$  считается **не имеющей смысла**.

**Свойства степени с целым показателем:**

- $a^m a^n = a^{m+n}$ ;
- $(ab)^n = a^n b^n$ ;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ;
- $(a^m)^n = a^{mn}$ ;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ , если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

**8 — Задачи с решениями**

11. Упростите выражение  $(2a)^{-5} \cdot (4a)^5$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} (2a)^{-5} \cdot (4a)^5 &= 2^{-5} \cdot a^{-5} \cdot 4^5 \cdot a^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 4^5 \cdot a^{-5+5} = \\ &= \left(\frac{4}{2}\right)^5 \cdot a^0 = 2^5 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32. \end{aligned}$$

*Ответ:* 32.

12. Упростите выражение  $\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}}$  и найдите его значение при  $a = 15$ .

*Решение.*

$$\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}} = 60a^{-6+3-(-2)} = 60a^{-1} = \frac{60}{a}. \text{ При } a = 15 \text{ по-}$$

$$\text{лучаем } \frac{60}{a} = \frac{60}{15} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**13.** Упростите выражение  $\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4}$  и найдите его значение при  $x = 21$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4} &= \left(\frac{3}{x}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{3}{x}\right)^{-10+8} = \\ &= \left(\frac{3}{x}\right)^{-2} = \left(\frac{x}{3}\right)^2. \text{ При } x = 21 \text{ получаем } \left(\frac{21}{3}\right)^2 = 7^2 = 49. \end{aligned}$$

*Ответ:* 49.

## Тождества

### ❶ Немного полезной информации

**Тождество** — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него переменных.

Например, тождествами являются равенства

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2); \quad \frac{a + b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{1}{a + b}.$$

С тождеством можно выполнять равносильные преобразования: прибавлять или отнимать одно и то же число (или выражение) к обеим частям, умножать или делить обе части на одно и то же ненулевое число (или выражение).

Например, из формулы площади параллелограмма  $S = ah$  (где  $a$  — основание,  $h$  — высота) можно выразить высоту  $h$ , разделив обе части равенства на длину основания  $a$ :  $h = \frac{S}{a}$ .

Пусть величины в обеих частях равенства неотрицательны. Тогда равносильными будут ещё два преобразования:



возведение в квадрат обеих частей равенства и извлечение квадратного корня из обеих частей равенства.

Например, из формулы площади квадрата  $S = a^2$  можно выразить длину  $a$  его стороны:  $\sqrt{S} = \sqrt{a^2}$ , откуда  $a = \sqrt{S}$ .

При применении равносильных преобразований к тождественному равенству мы снова получаем тождественное равенство.

### 8 — Задачи с решениями

14. Определите, какое из приведённых ниже выражений тождественно равно выражению  $(a - b)(2 - c)$ .

1)  $-(b - a)(c - 2)$

2)  $(2 - c)(b - a)$

3)  $(c - 2)(b - a)$

4)  $-(a + b)(2 + c)$

*Решение.*

Определим, какие из указанных выражений можно преобразовать к виду  $(a - b)(2 - c)$ .

1)  $-(b - a)(c - 2) = (a - b)(c - 2) \neq (a - b)(2 - c)$ ;

2)  $(2 - c)(b - a) = (b - a)(2 - c) \neq (a - b)(2 - c)$ ;

3)  $(c - 2)(b - a) = (2 - c)(a - b) = (a - b)(2 - c)$ ;

4)  $-(a + b)(2 + c) = (-a - b)(2 + c) \neq (a - b)(2 - c)$ .

Таким образом, только выражение №3 тождественно равно выражению  $(a - b)(2 - c)$ .

*Ответ:* 3.

15. Путь, пройденный телом при свободном падении, вычисляется по формуле  $s = \frac{gt^2}{2}$ . Выразите из этой формулы время  $t$ .

*Решение.*

Умножив обе части данного равенства на 2 и разделив на  $g$ , получим  $\frac{2s}{g} = t^2$ . Далее извлечём из обеих частей равенства квадратный корень, получим  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ .

*Ответ:*  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ .

16. Из формулы площади трапеции  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$  выразите длину основания  $a$ .

*Решение.*

Умножив обе части данного равенства на 2 и разделив на  $h$ , получим  $\frac{2S}{h} = a + b$ . Далее вычтем  $b$  из обеих частей равенства, получим  $a = \frac{2S}{h} - b$ .

*Ответ:*  $a = \frac{2S}{h} - b$ .

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Упростите выражение  $1 + (a + 3)(b - 2) + 2a - 3b$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{32}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .
2. Сократите дробь  $\frac{4a^2c^3}{8ac^2}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении  $\sqrt{x-2}$ .

4. Упростите выражение  $\frac{1}{x} + \frac{x-2y}{2xy}$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{2} + 1$ ,  $y = \frac{1}{4}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(x-3y)(2a+b)$ .

1)  $(3y-x)(2a+b)$

2)  $(3y-x)(-2a+b)$

3)  $(x-3y)(b+2a)$

4)  $(x-3y)(2a-b)$

6. Из формулы площади трапеции  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$  выразите высоту  $h$ .

7. Из формулы площади круга  $S = \frac{1}{4}\pi d^2$  выразите диаметр  $d$ .

## Вариант 2

1. Упростите выражение  $b^2 - 4b + 4 - (4 - b^2)$  и найдите его значение при  $b = \sqrt{3} + 1$ .

2. Сократите дробь  $\frac{5n^3m^2}{25n^2m^3}$ .

3. При каких значениях  $m$  выражение  $\frac{m^2-4}{m-2}$  имеет смысл?

4. Упростите выражение  $\left(1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) \cdot (a^2+b^2)$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению

$$\frac{a-2}{a^2-4} \text{ при } a \neq 2.$$

1)  $\frac{1}{2-a}$

2)  $\frac{a-2}{2}$

3)  $\frac{1}{a+2}$

4)  $\frac{1}{a-2}$

6. Из формулы площади ромба  $S = \frac{1}{2}d_1d_2$  выразите диагональ  $d_1$ .

7. Из формулы кинетической энергии  $E = \frac{mv^2}{2}$  выразите скорость  $v$ .

### Вариант 3

1. Упростите выражение  $b^2 - b\sqrt{5} + 9 - (9 + b^2)$  и найдите его значение при  $b = \sqrt{20}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{27a^3b^2}{3ab^2}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении  $\sqrt{x-4}$ .

4. Упростите выражение  $\frac{9x^2 + y^2}{3} + 2xy$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(x-2y)(5a-7b)$ .

1)  $(x-2y)(5a+7b)$

2)  $(2y-x)(7b-5a)$

3)  $(x-2y)(7b-5a)$

4)  $(x-2y)(5b-7a)$

6. Из формулы  $\frac{a}{\sin \angle A} = 2R$  выразите  $a$ .

7. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2 R t$  выразите силу тока  $I$ .

### Вариант 4

1. Упростите выражение  $(a - b)(b + a) - a^2$  и найдите его значение при  $a = 1 + \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{11}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{12y^7b^5}{4(yb^2)^7}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x}$ .

4. Упростите выражение  $\left(\frac{a^2+b^2}{a} + 2b\right) : \frac{a+b}{b}$  и найдите его значение при  $b = \frac{5}{2}$ ,  $a = \frac{1}{4}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $64 - a^2$ .

1)  $(8 - a)(8 + a)$

2)  $(a + 8)(a - 8)$

3)  $(a + 32)(a - 32)$

4)  $(32 - a)(32 + a)$

6. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \angle C$  выразите  $\sin \angle C$ .

7. Из формулы периода колебаний математического маятника  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  выразите длину маятника  $l$ .

**Вариант 5**

1. Упростите выражение  $(x + y)x - x^2 - 2xy$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{12}$ ,  $y = \sqrt{3}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{8a^3ab^5}{12a^2b^3}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $a$  в выражении  $\sqrt{3 - a}$ .

4. Упростите выражение  $\left(1 - \frac{4a}{a^2 + 4}\right) \cdot (a^2 + 4)$  и найдите его значение при  $a = 2 - \sqrt{11}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $\frac{2x - 7}{5 - 3x}$ .

1)  $\frac{2x - 7}{5 + 3x}$

2)  $\frac{7 - 2x}{5 + 3x}$

3)  $\frac{7 - 2x}{3x - 5}$

4)  $\frac{2x - 7}{3x - 5}$

6. Из формулы длины окружности  $l = 2\pi R$  выразите длину радиуса  $R$ .

7. Выразите радиус  $r$  внутренней окружности из формулы площади кольца  $S = \pi(R^2 - r^2)$ .

**Вариант 6**

1. Упростите выражение  $x^2 + x\sqrt{10} - 25 - (x^2 - 25)$  и найдите его значение при  $x = \sqrt{40}$ .

2. Сократите дробь  $\frac{12x^3y^2}{(2xy)^3}$ .

3. Найдите допустимые значения переменной  $x$  в выражении

$$\frac{1}{\sqrt{x+5}}.$$

4. Упростите выражение  $\frac{(a^2 + 8ab + 16b^2)}{a + 4b} \cdot (a - 4b)$  и найдите его значение при  $a = \sqrt{37}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению

$$\frac{9 - 5x}{2x - 3}.$$

1)  $\frac{5x - 9}{3 - 2x}$

2)  $\frac{9 + 5x}{2x + 3}$

3)  $-\frac{9 + 5x}{2x + 3}$

4)  $-\frac{5x - 9}{3 - 2x}$

6. Из формулы давления столба жидкости  $p = \rho gh$  выразите плотность жидкости  $\rho$ .

7. Из формулы первой космической скорости  $v = \sqrt{gR}$  выразите радиус Земли  $R$ .

# Глава 3. Уравнения и неравенства

## ❶ Немного полезной информации

**Уравнение** — это равенство, содержащее неизвестное, значение которого надо найти.

**Корень уравнения** — это значение неизвестной, при котором данное уравнение обращается в верное равенство.

**Решить уравнение** — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Так, уравнение  $3 \cdot x = 6$  имеет корень  $x = 2$ , поскольку  $3 \cdot 2 = 6$  — верное равенство, причём других корней нет.

**Основные правила**, с помощью которых можно решить уравнение:

- к обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же число или выражение;
- из обеих частей уравнения можно вычитать одно и то же число или выражение;
- можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, при этом данное слагаемое меняет свой знак на противоположный;



- обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

### 8 Задачи с решениями

1. Решите уравнение  $4 \cdot (x + 5) = -16$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на 4.

$$x + 5 = -16 : 4,$$

$$x + 5 = -4,$$

$$x = -4 - 5,$$

$$x = -9.$$

*Ответ:*  $-9$ .

2. Решите уравнение  $6x - 12 = 5x + 4$ .

*Решение.*

Перенесём  $5x$  из правой части в левую, изменив знак на противоположный:

$$6x - 5x - 12 = 4,$$

$$x - 12 = 4.$$

Перенесём  $(-12)$  из левой части уравнения в правую, изменив знак на противоположный:

$$x = 4 + 12,$$

$$x = 16.$$

*Ответ:*  $16$ .

3. Решите уравнение  $\frac{x+7}{3} = \frac{2x-3}{5}$ .

*Решение.*

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних, поэтому

$$5(x + 7) = 3(2x - 3),$$

$$5x + 35 = 6x - 9,$$

$$5x - 6x = -35 - 9,$$

$$-x = -44,$$

$$x = 44.$$

Ответ: 44.

### ① Немного полезной информации

**Равенство произведения нулю.** Произведение равно нулю, если

- хотя бы один из сомножителей равен нулю;
- все другие множители при этом имеют смысл.

Например, произведение  $(x-3)^2 \cdot \frac{x}{x-3}$  равно нулю только

при  $x = 0$ , т. к. при  $x = 3$  множитель  $\frac{x}{x-3}$  не имеет смысла.

4. Найдите корни уравнения  $(x - 7)(x + 8) = 0$ .

*Решение.*

$$(x - 7)(x + 8) = 0,$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{или} \quad x + 8 = 0,$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -8.$$

Ответ:  $-8; 7$ .

5. Найдите корни уравнения  $\sqrt{x-8}(x+11) = 0$ .

*Решение.*

$$\sqrt{x-8}(x+11) = 0.$$

$$\sqrt{x-8} = 0 \quad \text{или} \quad x + 11 = 0,$$

$$x - 8 = 0, \quad x_2 = -11.$$

$$x_1 = 8,$$

При  $x_2 = -11$  множитель  $\sqrt{x-8}$  не имеет смысла, так как подкоренное выражение  $-11 - 8 = -19 < 0$ . Поэтому заданное уравнение имеет один корень  $x = 8$ .

*Ответ:* 8.

## Уравнения линейные и сводящиеся к линейным

**Линейные уравнения** — это уравнения вида  $ax = b$ , где  $x$  — неизвестное,  $a$  и  $b$  — заданные числа.

- если  $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то уравнение имеет вид  $0 \cdot x = b$ , решений нет
- если  $a = 0$  и  $b = 0$ , то уравнение имеет вид  $0 \cdot x = 0$ ,  $x$  — любое число
- если  $a \neq 0$  и  $b$  — любое число, то делим обе части уравнения на  $a$ , находя неизвестное:  $x = \frac{b}{a}$

## 8 — Задачи с решениями

6. Найдите корень уравнения  $-7x = 35$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном  $(-7)$ .

$$x = 35 : (-7),$$

$$x = -5.$$

*Ответ:*  $-5$ .

7. Решите уравнение  $7x = 28 + 3x$ .

*Решение.*

Перенесём  $3x$  в левую часть и приведём подобные:

$$7x - 3x = 28,$$

$$4x = 28,$$

$$x = 28 : 4,$$

$$x = 7.$$

*Ответ:* 7.

8. Решите уравнение  $-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x)$ .

*Решение.*

$$-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x),$$

$$-27x + 36 = 168 - 27x,$$

$$-27x + 27x = 168 - 36,$$

$$0x = 132, \text{ корней нет.}$$

*Ответ:* корней нет.

9. Решите уравнение  $(6 - x) + (12 - x) - (3 - 2x) = 15$ .

*Решение.*

Раскроем скобки:

$$6 - x + 12 - x - 3 + 2x = 15.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$(-1 - 1 + 2)x + (6 + 12 - 3) = 15,$$

$$0x + 15 = 15,$$

$$0x = 15 - 15,$$

$$0x = 0, x \text{ — любое число.}$$

*Ответ:*  $x$  — любое число.

10. Решите уравнение

$$\frac{x+3}{4} - \frac{2x+1}{3} = -5.$$

*Решение.*

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей  $\frac{x+3}{4}$  и  $\frac{2x+1}{3}$ , то есть на 12.

$$12 \cdot \left( \frac{x+3}{4} - \frac{2x+1}{3} \right) = 12 \cdot (-5),$$

$$12 \cdot \frac{x+3}{4} - 12 \cdot \frac{2x+1}{3} = -60,$$

$$3 \cdot (x+3) - 4 \cdot (2x+1) = -60,$$

$$3x + 9 - 8x - 4 = -60,$$

$$3x - 8x = -60 - 9 + 4,$$

$$-5x = -65,$$

$$x = 13.$$

*Ответ:* 13.

## Квадратные уравнения

### ① Немного полезной информации

**Квадратные уравнения** — это уравнения вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

**Неполные квадратные уравнения** — квадратные уравнения, в которых  $b = 0$  и/или  $c = 0$ . Решение неполных квадратных уравнений рассмотрим на примерах.

### 8 — Задачи с решениями

11. Решите уравнение  $4x^2 + x = 0$ .

*Решение.*

В левой части вынесем общий множитель  $x$  за скобки:

$$x(4x + 1) = 0,$$

$$x = 0, \text{ или } 4x + 1 = 0,$$

$$4x = -1,$$

$$x = -0,25.$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -0,25 \text{ — корни исходного уравнения.}$$

Ответ: 0; -0,25.

12. Решите уравнение  $3x^2 = 81$ .

*Решение.*

$$x^2 = 27,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{27},$$

$$x_1 = -3\sqrt{3}, \quad x_2 = 3\sqrt{3}.$$

Ответ:  $-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ .

13. Решите уравнение  $5x^2 - 20 = 0$ .

*Решение.*

*1-й способ.*

Разделим обе части уравнения на 5, получим  $x^2 - 4 = 0$ .  
Замечаем, что в левой части уравнения стоит разность квадратов, поэтому уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - 2^2 = 0,$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0,$$

$$x + 2 = 0 \text{ или } x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

*2-й способ.*

$$5x^2 = 20,$$

$$x^2 = 20 : 5,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{4},$$

$$x_{1,2} = \pm 2.$$

*Ответ:*  $-2; 2$ .

14. Решите уравнение  $3x^2 + 8 = 0$ .

*Решение.*

$$3x^2 + 8 = 0,$$

$$3x^2 = -8,$$

$$x^2 = -\frac{8}{3}.$$

Квадрат числа не может быть отрицательным, поэтому данное уравнение корней не имеет.

*Ответ:* корней нет.

15. Решите уравнение  $-1,7x^2 = 0$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на  $-1,7$ , получим уравнение  $x^2 = 0$ . Его корнем является только число 0.

*Ответ:* 0.

## Решение квадратных уравнений общего вида

### ① Немного полезной информации

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида, то есть  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ . Такие уравнения решаем по алгоритму:

- найти дискриминант  $D$ , вычисляемый по формуле  $D = b^2 - 4ac$ ;
- по знаку дискриминанта определить число корней уравнения:

— если  $D < 0$ , то уравнение корней не имеет (что уже можно писать в ответ, дальнейшие вычисления не требуются);

— если  $D = 0$ , то уравнение имеет один корень  $x = -\frac{b}{2a}$ ;

— если  $D > 0$ , то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ то есть}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

- найти корни;
- записать ответ.

### 8 **Задачи с решениями**

16. Решите уравнение  $6x^2 - 13x + 2 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 6 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -13 & D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121, D > 0, \\ c = 2 & \text{поэтому исходное уравнение имеет два корня:} \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 11}{12}, \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{13 - 11}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{13 + 11}{12} = 2.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{6}; 2$ .



17. Решите уравнение  $9x^2 - 6x + 1 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 9 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -6 & D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0. D = 0, \\ c = 1 & \text{поэтому исходное уравнение имеет один корень:} \end{array}$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

$$x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{3}$ .

18. Решите уравнение  $3x^2 - 4x + 3 = 0$ .

*Решение.*

$$\begin{array}{l|l} a = 3 & \text{Вычислим дискриминант } D = b^2 - 4ac. \\ b = -4 & D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16 - 36 = -20. D < 0, \\ c = 3 & \text{поэтому исходное уравнение корней не имеет.} \end{array}$$

*Ответ:* корней нет.

## Приведённое квадратное уравнение

### ① Немного полезной информации

Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  называется **приведённым**, если  $a = 1$ .

Пусть  $x^2 + px + q = 0$  — приведённое квадратное уравнение, где  $p$  и  $q$  — некоторые числа. Если  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения, то справедливы формулы (теорема Виета)

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

### 8 Задачи с решениями

19. Известно, что уравнение  $x^2 + 9x - 10 = 0$  имеет корни. Найдите сумму и произведение корней этого уравнения.

*Решение.*

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -9,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -10.$$

*Ответ:*  $-9; -10$ .

20. Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа 3 и  $-5$ .

*Решение.*

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -15.$$

Напишем приведённое квадратное уравнение, в котором второй коэффициент  $p = 2$ , а свободный член  $q = -15$ :  
 $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

По теореме, обратной теореме Виета, числа 3 и  $-5$  являются корнями составленного уравнения.

*Ответ:*  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

## Неравенства

### ① Немного полезной информации

**Линейным неравенством** называется неравенство вида  $ax + b > 0$  или  $ax + b < 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$  и  $b$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

Для решения неравенства  $ax + b > 0$  сначала перенесём слагаемое  $b$  в правую часть:  $ax > -b$ . Далее разделим обе части неравенства на  $a$ . При этом следует учитывать знак  $a$ :

- если  $a > 0$ , то при делении неравенство сохраняет знак:

$$x > -\frac{b}{a}, \text{ то есть } x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right);$$

- если  $a < 0$ , то при делении неравенство меняет знак на про-

$$\text{тивоположный: } x < -\frac{b}{a}, \text{ то есть } x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right).$$

Аналогично решается неравенство  $ax + b < 0$ .

### 8 $\rightarrow$ Задачи с решениями

21. Решите неравенство  $5x - 3 < 7x - 17$ .

*Решение.*

Перенесём в левую часть все слагаемые, содержащие переменную, а в правую — свободные члены:

$$5x - 7x < 3 - 17,$$

$$-2x < -14.$$

Разделим обе части на  $(-2)$ , знак неравенства при этом изменится на противоположный:

$$x > 7 \text{ (см. рис. 5).}$$

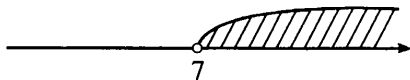


Рис. 5.

*Ответ:*  $(7; +\infty)$ .

### ① Немного полезной информации

**Квадратное неравенство** — это неравенство вида  $ax^2 + bx + c > 0$  или  $ax^2 + bx + c < 0$ , где  $x$  — переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

Покажем решение квадратных неравенств на примерах.

### 8 — Задачи с решениями

22. Решите неравенство  $2x^2 + 11x - 6 > 0$ .

*Решение.*

1. Решим уравнение  $2x^2 + 11x - 6 = 0$ .

$$a = 2 \quad \left| \quad D = b^2 - 4ac.$$

$$b = 11 \quad \left| \quad D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 121 + 48 = 169, D > 0,$$

$$c = -6 \quad \left| \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{-11 \pm 13}{4};$$

$$x_1 = \frac{-11 - 13}{4} = -6; x_2 = \frac{-11 + 13}{4} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

2. Графиком функции  $y = 2x^2 + 11x - 6$  является парабола, ветви которой направлены вверх ( $a = 2 > 0$ ). Парабола пересекает ось  $Ox$  в двух точках, абсциссы которых 0,5 и  $-6$  (см. рис. 6).

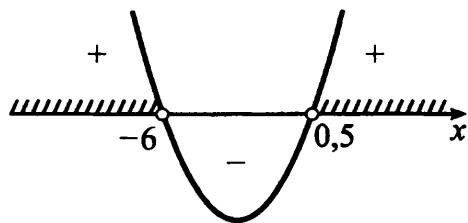


Рис. 6.

3. Вывод: данное неравенство выполняется, если  $x < -6$  и  $x > 0,5$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -6) \cup (0,5; +\infty)$ .

Покажем, как можно записывать решение квадратного неравенства, если вид графика анализировать устно.

23. Решите неравенство  $x^2 - 11x + 24 < 0$ .

*Решение.*

Решим уравнение  $x^2 - 11x + 24 = 0$ .

$p = -11$ $q = 24$	По теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 + x_2 = 11,$ $x_1 \cdot x_2 = 24.$ Следовательно, $x_1 = 3, x_2 = 8.$
-----------------------	---

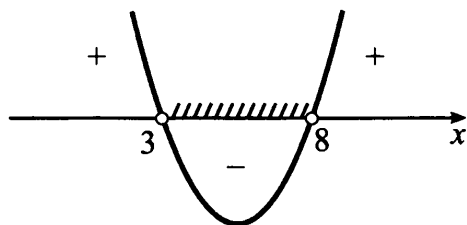


Рис. 7.

Вывод: данное неравенство выполняется, если  $3 < x < 8$  (см. рис. 7).

*Ответ:*  $(3; 8)$ .

24. Решите неравенство  $-3x^2 + 16x - 5 \geq 0$ . В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

*Решение.*

Решим уравнение  $3x^2 - 16x + 5 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l} a = 3 & D = b^2 - 4ac. \\ b = -16 & D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 196, D > 0. \\ c = 5 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm 14}{6}; \\ & x_1 = \frac{16 - 14}{6} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{16 + 14}{6} = 5. \end{array}$$

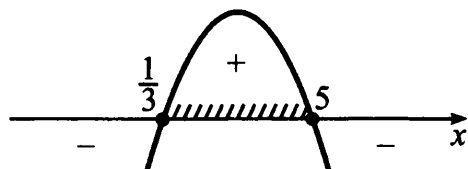


Рис. 8.

$\frac{1}{3} \leq x \leq 5$  (см. рис. 8). Наибольшее целое решение неравенства равно 5.

*Ответ:* 5.

**25.** Решите неравенство  $x^2 - x + 5 > 0$ .

*Решение.*

Решим уравнение  $x^2 - x + 5 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l} a = 1 & D = b^2 - 4ac. \\ b = -1 & D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 1 - 20 = -19, D < 0. \\ c = 5 & \end{array}$$

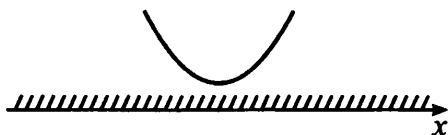


Рис. 9.

Уравнение  $x^2 - x + 5 = 0$  корней не имеет, значит, график функции  $y = x^2 - x + 5$  не пересекает ось  $Ox$  (см. рис. 9).

Учитывая, что  $a = 1 > 0$ , неравенство  $x^2 - x + 5 > 0$  выполняется при любом значении  $x$ .

*Ответ:*  $(-\infty; \infty)$ .

Заметим, что если коэффициент при  $x^2$  отрицательный ( $a < 0$ ), то обе части неравенства можно умножить на  $(-1)$ , изменив знак неравенства на противоположный, и тогда ветви параболы будут направлены вверх.

**26.** Решите неравенство  $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$ .

*Решение.*

$$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 \leq 0.$$

Решим уравнение  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

$$\begin{array}{l|l} a = 4 & D = b^2 - 4ac. \\ b = -12 & D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0, \\ c = 9 & x = -\frac{b}{2a}, x = \frac{12}{2 \cdot 4} = 1,5. \end{array}$$

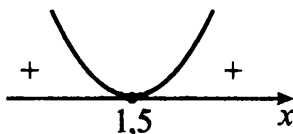


Рис. 10.

Учитывая, что  $a = 4 > 0$ , неравенство  $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$  выполняется только при  $x = 1,5$  (см. рис. 10).

*Ответ:* 1,5.

Покажем решение неравенств **методом интервалов**.

27. Решите неравенство  $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ .

*Решение.*

1) Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого решим уравнение  $x^2 - 4x - 21 = 0$ .  $x = 7$  и  $x = -3$  — корни уравнения. Неравенство примет вид  $(x + 3)(x - 7) \geq 0$ .

2) Нанесём числа  $-3$  и  $7$  на прямую. Учитывая, что неравенство нестрогое, закрасим точки (см. рис. 11).

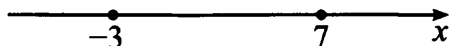


Рис. 11.

3) Так как  $a = 1 > 0$ , то на крайнем правом промежутке поставим знак «+» (можно из любого промежутка взять число и подставить в левую часть неравенства, например, если  $x = 10$ , получим  $100 - 40 - 21 = 39 > 0$ ) (см. рис. 12).

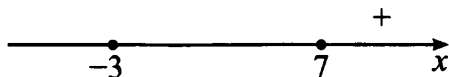


Рис. 12.

4) Так как множители  $(x + 3)$  и  $(x - 7)$  в нечётной степени (в первой), то на остальных промежутках знаки чередуем и рисуем «змейку» (см. рис. 13).



Рис. 13.



5) Левая часть неравенства больше или равна 0, значит, выделяем промежутки со знаком «+» (см. рис. 14).



Рис. 14.

6) Делаем вывод:  $x \leq -3$ ,  $x \geq 7$ .

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ .

28. Решите неравенство  $7x^2 - 12x + 5 < 0$ .

Решение.

$7x^2 - 12x + 5 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{5}{7}$  — корни уравнения.

$$7(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0 \quad | : 7$$

$$(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0.$$



Рис. 15.

$\frac{5}{7} < x < 1$  (см. рис. 15).

Ответ:  $\left(\frac{5}{7}; 1\right)$ .

29. Решите неравенство  $-x^2 - 8x + 9 > 0$ .

Решение.

Умножим обе части неравенства на  $(-1)$ .

$$x^2 + 8x - 9 < 0,$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0, x_1 = 1, x_2 = -9 \text{ — корни уравнения.}$$

$$(x + 9)(x - 1) < 0.$$



Рис. 16.

$$-9 < x < 1 \text{ (см. рис. 16).}$$

Ответ:  $(-9; 1)$ .

30. Решите неравенство  $x^2 - 6x + 9 > 0$ .

Решение.

Заметим, что левая часть неравенства — полный квадрат, то есть  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ . Неравенство примет вид  $(x - 3)^2 > 0$ , отсюда решение этого неравенства — любое число, кроме  $x = 3$ , так как неравенство строгое.

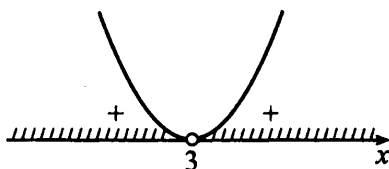


Рис. 17.

$$x < 3 \text{ и } x > 3 \text{ (см. рис. 17).}$$

Ответ:  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ .

31. Решите неравенство  $\frac{3x - 6}{x + 4} \geq 0$ .

Решение.

$$\text{Нули числителя } 3x - 6 = 0, x = 2.$$

$$\text{Нули знаменателя } x + 4 = 0, x = -4.$$



Рис. 18.

$x < -4, x \geq 2$  (см. рис. 18).

Ответ:  $(-\infty; -4) \cup [2; \infty)$ .

## ❓ Варианты для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Найдите корень уравнения  $2 - 3x = 4(1 - x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x+2}(2x-5) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .
4. Решите неравенство  $3(4 + 2x) > 24$ . В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $2(x-4)(x+5) < 0$ , в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.
6. Решите неравенство  $x^2 - 7x + 10 < 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

### Вариант 2

1. Найдите корень уравнения  $7 - x = 2(1 - 3x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x+4}(5x-10) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 4x - 21 = 0$ .
4. Решите неравенство  $14 + 4(3 - x) \leq -2(5 - x)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $3(x + 1)(4 - x) > 0$ , в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.
6. Решите неравенство  $x^2 + x - 6 < 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

### Вариант 3

1. Найдите корень уравнения  $1 - 5x = 3(7 - x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 7}(3x - 6) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $x^2 - 2x - 8 = 0$ .
4. Решите неравенство  $6(2 - 3x) + 5 < 5(1 - 3x)$ . В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $5(x - 6)(x + 7) < 0$ , в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.
6. Решите неравенство  $-3x^2 + x + 2 > 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

### Вариант 4

1. Найдите корень уравнения  $13x - 6 = 2(5 + 7x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{2x - 5}(x - 1) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ .
4. Решите неравенство  $(x - 9)(3 - x) > 0$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $4(5 - x)(4 + x) > 0$ , в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.
6. Решите неравенство  $x^2 - 4 < 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

### Вариант 5

1. Найдите корень уравнения  $5 - 2x = 3(10 + x)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x + 3}(5x - 6) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.
3. Найдите произведение корней уравнения  $3x^2 - 13x + 12 = 0$ .
4. Решите неравенство  $3(x - 2) - 2 > 4 - x$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $(x + 7)(x - 5) < 0$ , в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.
6. Решите неравенство  $x^2 + 3x - 10 \leq 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

### Вариант 6

1. Найдите корень уравнения  $6 + 2x = 7(x + 3)$ .
2. Найдите корень уравнения  $\sqrt{x - 9}(2x - 3) = 0$ . Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .
4. Решите неравенство  $2(x + 3) - 11 < 3(4x + 15)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.
5. Решите неравенство  $(8 - 4x)(x + 2) \geq 0$ , в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.
6. Решите неравенство  $x^2 - 14x + 24 \leq 0$ , в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

# Глава 4. Теория вероятностей

## ① Немного полезной информации

**Случайным** называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.

Пусть при проведении испытания (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т. д.) всегда наступает один из  $n$  равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов  $n$  равно 2, так как кроме выпадения «решки» или «орла» других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию  $A$  благоприятствуют  $m$  исходов.

**Вероятностью события  $A$**  называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

Например, пусть событие  $A$  состоит в выпадении нечётного числа очков при броске кубика. Всего возможны 6 исходов:

выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события  $A$  являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом,  $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$ .

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство  $0 \leq m \leq n$ , поэтому вероятность любого события  $A$  лежит на отрезке  $[0; 1]$ , то есть  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

### Задачи с решениями

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

*Решение.*

При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов; событию  $A$  «выбранный телевизор бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности

$$P(A) = \frac{5}{1000} = 0,005.$$

*Ответ:* 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

*Решение.*

Общее число исходов равно числу шаров:  $9 + 6 + 5 = 20$ . Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна  $\frac{6}{20} = 0,3$ .

*Ответ:* 0,3.



### ❶ Немного полезной информации

События  $A$  и  $B$  называются **противоположными** друг к другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Например, в рассмотренной задаче №1 событие «выбранный телевизор рабочий» является противоположным событию «выбранный телевизор бракованный».

Событие, противоположное событию  $A$ , обозначают  $\bar{A}$ . Из определения противоположных событий следует  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ , значит,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

### 🔗 Задачи с решениями

3. Из 30 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 27. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на наугад выбранный билет?

*1-й способ.*

Обозначим через  $A$  событие «школьник может ответить на билет». Тогда  $P(A) = \frac{27}{30} = 0,9$ . Вероятность противоположного события равна  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$ .

*2-й способ.*

Так как школьник может ответить на 27 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов равна  $\frac{3}{30} = 0,1$ .

*Ответ:* 0,1.

## ❓ *Варианты для самостоятельного решения*

### Вариант 1

1. Из 2000 собранных на заводе вентиляторов 6 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный вентилятор из этих 2000. Найдите вероятность того, что проверяемый вентилятор окажется бракованным.
2. В урне 5 красных, 12 жёлтых и 8 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что все 5 красных шаров остались в урне?
3. В соревнованиях по прыжкам в воду участвуют 50 спортсменов, из них 6 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий третьим, будет из России.

### Вариант 2

1. В тёмном шкафу лежат 50 носков, из них 14 носков зелёного цвета. Какова вероятность того, что вытянутый наощупь носок окажется зелёного цвета?
2. В учебнике 24 задачи по геометрии. Школьник не знает, как решить 6 из них. Учитель наугад выбирает из учебника задачу по геометрии и вызывает школьника к доске, предлагая решить эту задачу. Найдите вероятность того, что школьник знает, как решить предложенную задачу.

3. В концерте участвуют 4 певца из России, 3 — из Польши и 3 — из Финляндии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что последним будет выступать певец из России.

### Вариант 3

1. На детской карусели 20 мест, каждое сделано в виде какого-либо животного. Из этих мест только шесть сделаны в виде лошадки. Мальчик стоит рядом с работающей каруселью, которую остановят в некоторый заранее неизвестный момент. Найдите вероятность того, что после остановки карусели ближайшее к мальчику место будет сделано в виде лошадки.

2. На подносе лежат 40 пирожков, из них только 4 с капустой. Вася наугад берёт с подноса один пирожок. Вася не любит капусту и хочет съесть пирожок с какой-либо другой начинкой. Какова вероятность того, что взятый мальчиком пирожок действительно окажется с другой начинкой?

3. В концерте участвуют 3 певца из России, 5 — из Польши и 2 — из Финляндии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать певец из России.

### Вариант 4

1. В урне 5 красных, 9 жёлтых, 4 синих и 2 зелёных шара. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что достали синий шар?

2. Для проведения лотереи было изготовлено 5000 билетов, из них 4975 билетов не содержат выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

3. В соревнованиях по гимнастике участвуют 40 спортсменов, из них 8 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий шестым, будет из России.

### **Вариант 5**

1. Школьник на экзамене по истории наугад вытягивает один из 30 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 6 содержат вопрос, касающийся событий XIX века. Какова вероятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса по XIX веку?

2. Для проведения лотереи было изготовлено 4000 билетов, из них 16 билетов содержат выигрыш. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?

3. В соревнованиях по метанию копья участвуют 10 спортсменов из России, 9 — из США и 6 — из Германии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий восьмым, будет из России.

### **Вариант 6**

1. Из 3000 собранных на заводе холодильников 6 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный холодильник из этих 3000. Найдите вероятность того, что проверяемый холодильник окажется бракованным.

2. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 2 с творогом, 3 с капустой, 4 с картошкой, 1 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с картошкой?

3. В соревнованиях по метанию копья участвуют 50 спортсменов, из них 7 спортсменов из России. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий вторым, будет из России.

# Глава 5. Числовые последовательности

## ① Немного полезной информации

- Любые записанные подряд  $n$  чисел образуют **числовую последовательность**. Её обозначают  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Например:

7, 10, 10, 13 — числовая последовательность, где  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 10$ ,  $a_3 = 10$ ,  $a_4 = 13$ .

- Иногда последовательности задают, указывая её **первый член** и **формулу**, позволяющие найти любой другой член последовательности. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным способом**.

## 8 — Задачи с решениями

- Найдите пятый член последовательности  $c_n$ , если  $c_1 = -6$ ,  $c_{n+1} = c_n + 3$ .

*Решение.*

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3,$$

$$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0,$$

$$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6.$$

Ответ: 6.

## Арифметическая прогрессия

### ① Немного полезной информации

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ . Если равенство  $a_{n+1} = a_n + d$  выполняется для всех натуральных  $n$ , то такая последовательность называется **арифметической прогрессией**.

- Число  $d = a_{n+1} - a_n$  называют **разностью арифметической прогрессии**.

Например, натуральный ряд чисел  $1, 2, 3, \dots$  является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии  $d = 3 - 2 = 1$ .

- $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$  — формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии.

### 🔑 Задачи с решениями

2. Дана арифметическая прогрессия, в которой  $a_3 = 7$ ,  $a_4 = 12$ . Найдите разность этой прогрессии.

Решение.

$$d = a_4 - a_3 = 12 - 7 = 5.$$

Ответ: 5.

3. Найдите десятый член арифметической прогрессии, если известно, что  $a_1 = -2$  и  $d = -3$ .

*Решение.*

По формуле  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  найдём

$$a_{10} = -2 + (-3)(10 - 1) = -29.$$

*Ответ:*  $-29$ .

4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $d = 5$ ,  $a_9 = 12$ .

*Решение.*

$$a_9 = a_1 + 5(9 - 1),$$

$$12 = a_1 + 5 \cdot 8,$$

$$a_1 = 12 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28.$$

*Ответ:*  $-28$ .

5. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, в которой

а)  $a_1 = 3$ ,  $d = 4$ .

б)  $a_1 = 12$ ,  $d = -2$ .

*Решение.*

а)  $a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$ ,

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11,$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15,$$

$$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19.$$

б)  $a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10$ ,

$$a_3 = a_2 + d = 10 + (-2) = 8,$$

$$a_4 = a_3 + d = 8 + (-2) = 6,$$

$$a_5 = a_4 + d = 6 + (-2) = 4.$$

*Ответ:* а) 3, 7, 11, 15, 19;

б) 12, 10, 8, 6, 4.



## Свойство арифметической прогрессии

### ① Немного полезной информации

- Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с

ним членов: 
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

- Сумма  $n$  первых членов арифметической прогрессии ( $S_n$ ):

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

или 
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

### 8 — Задачи с решениями

6. Задана арифметическая прогрессия 49, 2*x*, 51, ... .

Найдите *x*.

*Решение.*

Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то

$$2x = \frac{49 + 51}{2}, \quad 2x = 50, \quad x = 25.$$

*Ответ:* 25.

7. Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, у которой  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 10$ ,  $a_3 = 13$ .

*Решение.*

Найдём разность арифметической прогрессии  $d = a_2 - a_1$ ,  
 $d = 10 - 7 = 3$ .

Найдём  $a_4$  и  $a_5$ :  $a_4 = a_3 + d$ ,  $a_4 = 13 + 3 = 16$ ;

$$a_5 = a_4 + d, a_5 = 16 + 3 = 19.$$

$$S_5 = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65.$$

*Ответ:* 65.

8. Дана арифметическая прогрессия: 5, 11, 17, ... . Найдите сумму семи её первых членов.

*Решение.*

Зная, что  $a_1 = 5$  и  $a_2 = 11$ , найдём разность арифметической прогрессии  $d = a_2 - a_1$ ,  $d = 11 - 5 = 6$ .

По формуле  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  найдём  $a_7$ .

$$a_7 = 5 + 6(7 - 1) = 5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41.$$

Сумму первых семи членов арифметической прогрессии найдём по формуле  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ .

Так как  $a_1 = 5$ ,  $a_7 = 41$ ,  $n = 7$ , то получим

$$S_7 = \frac{5 + 41}{2} \cdot 7 = \frac{46}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$$

*Ответ:* 161.

9. Последовательность задана формулой  $a_{n+1} = a_n + 2$  и условием  $a_1 = 5$ . Найдите сумму шести первых членов этой последовательности.

*Решение.*

По определению числовая последовательность, заданная формулой  $a_{n+1} = a_n + 2$ , является арифметической прогрессией с разностью 2.

Сумму шести первых членов арифметической прогрессии найдём по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Имеем  $a_1 = 5$ ,  $n = 6$  и  $d = 2$ . Следовательно,

$$S_6 = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot (6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{10 + 10}{2} \cdot 6 = 60.$$

Ответ: 60.

## Геометрическая прогрессия

### ① Немного полезной информации

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ . Если выполняется равенство  $b_{n+1} = b_n \cdot q$  для всех натуральных  $n$  и  $q \neq 0$ , то такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

- Число  $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$  называют **знаменателем** геометрической прогрессии.

Например, последовательность чисел 1, 3, 9, 27, 81, ... является геометрической прогрессией. Знаменатель прогрессии  $q = 9 : 3 = 3$ .

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  — формула  $n$ -ого члена геометрической прогрессии.

### 🔑 Задачи с решениями

10. Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ... . Найдите знаменатель прогрессии.

*Решение.*

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 6, \quad q = \frac{b_2}{b_1}, \quad q = \frac{6}{2} = 3.$$

*Ответ:* 3.

11. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если  $b_1 = 128$  и  $q = \frac{1}{2}$ .

*Решение.*

По формуле  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$  найдём

$$b_5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8.$$

*Ответ:* 8.

12. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, если заданы  $b_1$  и  $q$ .

а)  $b_1 = 4, \quad q = 2;$

б)  $b_1 = -4, \quad q = 2;$

в)  $b_1 = 4, \quad q = -2;$

г)  $b_1 = -4, \quad q = \div 2.$

*Решение.*

а) Если  $b_1 = 4, \quad q = 2$ , то  $b_2 = 4 \cdot 2 = 8, \quad b_3 = 4 \cdot 2^2 = 16,$   
 $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32, \quad b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64.$

б) Если  $b_1 = -4, \quad q = 2$ , то  $b_2 = -4 \cdot 2 = -8,$   
 $b_3 = -4 \cdot 2^2 = -16, \quad b_4 = -4 \cdot 2^3 = -32, \quad b_5 = -4 \cdot 2^4 = -64.$

в) Если  $b_1 = 4, \quad q = -2$ , то  $b_2 = 4 \cdot (-2) = -8,$   
 $b_3 = 4 \cdot (-2)^2 = 16, \quad b_4 = 4 \cdot (-2)^3 = -32, \quad b_5 = 4 \cdot (-2)^4 = 64.$

г) Если  $b_1 = -4$ ,  $q = -2$ , то  $b_2 = -4 \cdot (-2) = 8$ ,  
 $b_3 = -4 \cdot (-2)^2 = -16$ ,  $b_4 = -4 \cdot (-2)^3 = 32$ ,  
 $b_5 = -4 \cdot (-2)^4 = -64$ .

Ответ: а) 4, 8, 16, 32, 64;

б) -4, -8, -16, -32, -64;

в) -4, 8, -16, 32, -64;

г) -4, 8, -16, 32, -64.

13. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = 9.$$

Решение.

Так как  $b_4 = b_1 \cdot q^3$ , то  $9 = \frac{1}{3} \cdot q^3$ ,  $q^3 = 27$ ,  $q = 3$ .

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = \frac{1}{3} \cdot 3^4 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27.$$

Ответ: 27.

## ① Немного полезной информации

### Свойство геометрической прогрессии

- Числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого, равен произведению предыдущего и последующего членов.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

- Сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

**8 — Задачи с решениями**

14. Задана геометрическая прогрессия:  $2, x, 18, \dots$ .

Найдите  $x$ .

*Решение.*

Так как последовательность  $2, x, 18, \dots$  по условию является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем

$$x^2 = 2 \cdot 18,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -6.$$

*Ответ:*  $6; -6$ .

15. Дана геометрическая прогрессия  $3, 6, 12, \dots$ . Найдите сумму шести её первых членов.

*Решение.*

По условию  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 6$ , знаменатель геометрической прогрессии  $q = b_2 : b_1$ ,  $q = 6 : 3 = 2$ .

По формуле  $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1}$  находим

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

*Ответ:*  $189$ .

16. Геометрическая прогрессия задана формулой  $n$ -ого члена:  $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ . Найдите сумму пяти её членов.

*Решение.*

В этой прогрессии  $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$ ,  $b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$ ,  
 $q = b_2 : b_1 = 6 : 2 = 3$ ,  $n = 5$ .

По формуле  $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$  находим

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = 242.$$

*Ответ:* 242.

17. В геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$  сумма первых четырёх членов равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

*Решение.*

Воспользуемся формулой  $S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$ :

$$\frac{b_1 \cdot \left( \left( \frac{1}{2} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 60, \quad \frac{b_1 \cdot \left( \frac{1}{16} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = 60, \quad b_1 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{1} = 60,$$

$$b_1 = \frac{60 \cdot 16}{15 \cdot 2} = 32.$$

*Ответ:* 32.

**❓ Варианты для самостоятельного решения****Вариант 1**

1. В арифметической прогрессии найдите  $a_9$ , если  $a_1 = -4$ ,  $d = 5$ .
2. Последовательность задана формулой  $a_{n+1} = a_n - 3$  и условием  $a_1 = 7$ . Найдите сумму первых десяти членов этой последовательности.
3. Дана геометрическая прогрессия 2; 6; 18; ... . Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

**Вариант 2**

1. Дана арифметическая прогрессия 9; 11; 13; ... . Найдите сумму первых шести её членов.
2. В геометрической прогрессии заданы  $b_1 = 48$  и  $q = \frac{1}{2}$ . Найдите пятый член прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой  $n$ -ого члена  $b_n = \frac{2}{3} \cdot 5^n$ .

**Вариант 3**

1. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $d = -4$ ,  $a_7 = -21$ .
2. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии  $-1; 3; -9; \dots$ .
3. Найдите разность арифметической прогрессии, заданной формулой  $n$ -ого члена  $a_n = -2n + 8$ .



**Вариант 4**

1. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, если известно, что  $a_1 = -14$ ,  $a_{10} = -6$ .
2. Дана геометрическая прогрессия  $-3; 6; -12; \dots$ . Найдите шестой член прогрессии.
3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой  $n$ -ого члена  $b_n = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Вариант 5**

1. В арифметической прогрессии найдите  $a_5$ , если  $a_2 = 5$ ,  $d = 3$ .
2. Дана геометрическая прогрессия  $3; -6; 12; \dots$ . Найдите сумму первых семи её членов.
3. Составьте формулу  $n$ -ого члена арифметической прогрессии  $2; 7; 12; 15; \dots$ .

**Вариант 6**

1. Дана арифметическая прогрессия  $18; 14; 10; \dots$ . Какое число стоит в этой последовательности на 25-ом месте?
2. Геометрическая прогрессия задана условиями  $b_1 = 5$ ,  $b_{n+1} = 3b_n$ . Найдите сумму первых пяти её членов.
3. В геометрической прогрессии  $b_5 = 48$ ,  $b_7 = 192$ . Найдите  $b_6$ .

# Тренировочные тесты

## Вариант 1

1. Найдите значение выражения  $\frac{1,2 \cdot 2,8}{4,8}$ .

1) 7

2) 0,7

3) 0,4

4) 4

2. В магазин завезли яблоки. В первый день продали 40% всех яблок, во второй день — остальные 1530 кг. Сколько килограммов яблок завезли в магазин?

3. Найдите область допустимых значений переменной  $x$  в выражении  $\frac{1}{\sqrt{x+7}}$ .

1)  $x > 7$

2)  $x \geq 7$

3)  $x > -7$

4)  $x \geq -7$

4. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число  $\sqrt{37}$ .

5. Найдите корень уравнения  $2(3 - 2x) = x - 4$ .

6. Упростите выражение  $\frac{x}{y} + \frac{y^2 - x^2}{xy}$  и найдите его значение при  $x = 200\sqrt{7}$ ,  $y = 300\sqrt{7}$ .

7. Для проведения лотереи было изготовлено 2000 билетов, из них 1990 билетов не приносят выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш, если приобрести только один билет?
8. Из формулы закона Архимеда  $F = \rho g V$  выразите объём тела  $V$ .
9. Решите неравенство  $(x - 7)(x + 7) < -40$ , в ответе укажите наименьшее целое решение этого неравенства.
10. Дана арифметическая прогрессия 5, 8, 11, ... . Найдите сумму первых шести её членов.

### Вариант 2

1. Найдите значение выражения  $\frac{20,4 \cdot 3,5}{10,5}$ .
- 1) 4,08                      2) 0,68                      3) 68                      4) 6,8
2. В первый день в парке посадили 55% всех кустов роз, а во второй — остальные 90 кустов. Сколько кустов роз посадили в парке за два дня?
3. Найдите область допустимых значений переменной  $a$  в выражении  $\frac{1}{\sqrt{9-a}}$ .
- 1)  $a > 9$                       2)  $a < 9$                       3)  $a \geq 9$                       4)  $a \leq 9$
4. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число  $\sqrt{29}$ .
5. Найдите сумму корней уравнения  $3x^2 - 18x = 0$ .
6. Упростите выражение  $\frac{(a+2b)^2}{ab} - 4 \cdot \frac{a+b}{a}$  и найдите его значение при  $a = 150\sqrt{11}$ ,  $b = 200\sqrt{11}$ .

7. Школьник на экзамене по географии наугад вытягивает один из 40 билетов. Известно, что среди всех этих билетов 6 содержат вопрос про Африку. Какова вероятность того, что в вытянутом билете не будет вопроса про Африку?

8. Из формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $S = \frac{b_1}{1 - q}$  выразите знаменатель прогрессии  $q$ .

9. Решите неравенство  $8x + 12 > 2(11 - x)$ .

10. Найдите четвёртый член последовательности  $a_n$ , если  $a_1 = -3$  и  $a_{n+1} = a_n + 2$ .

### Вариант 3

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А)  $\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7}$

Б)  $-\frac{4}{5} - \frac{5}{4}$

В)  $\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

1) 1

2) 0,16

3) 2,05

4) -2,05

Ответ:

А	Б	В

2. В браслете массой 5 г содержится 58% чистого золота, а в цепочке массой 3,2 г — 75% чистого золота. На сколько граммов меньше золота в цепочке, чем в браслете?

3. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(a - 5)(15 - b)$ .

1)  $(b - 15)(5 - a)$

2)  $(a - 5)(b - 15)$

3)  $-(15 - b)(a - 5)$

4)  $-(a - 15)(5 - b)$

4. Внесите множитель под знак корня  $(-7\sqrt{5})$ .

5. Найдите корни уравнения  $(x + 6)\sqrt{x + 5} = 0$ .

6. Упростите выражение  $\frac{b^2 - c^2}{c - b} + 2b$  и найдите его значение при  $b = 35 + \sqrt{15}$ ,  $c = 27 + \sqrt{15}$ .

7. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 3 с творогом, 3 с капустой, 4 с картошкой, 5 с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый с подноса пирожок окажется с капустой?

8. Из формулы суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии  $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  выразите количество суммируемых членов прогрессии  $n$ .

9. Найдите количество целых решений неравенства  $x^2 - 15x + 50 \leq 0$ .

10. Дана арифметическая прогрессия, в которой  $a_6 = 15$ ,  $a_7 = 21$ . Найдите разность арифметической прогрессии.

### Вариант 4

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А)  $\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{11}$

Б)  $-\frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

В)  $0,2 : 0,04$

1) 1

2) 5

3)  $-0,25$

4) 0,5

Ответ:

А	Б	В

2. Завод в апреле выпустил 750 велосипедов, 24% из которых — горные. В мае из 800 выпущенных велосипедов горные составили 22%. На сколько больше выпустили горных велосипедов в апреле, чем в мае?

3. Укажите выражение, тождественно равное выражению  $(7 - x)(8 - y)$ .

1)  $-(x - 7)(y - 8)$

2)  $-(7 - y)(8 - x)$

3)  $-(y - 8)(7 - x)$

4)  $-(x + 7)(8 - y)$

4. Внесите множитель под знак корня  $(-5\sqrt{7})$ .

5. Решите уравнение  $\frac{2x + 7}{3} = \frac{x + 7}{5}$ .

6. Упростите выражение  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{(a + b)^2 - 2ab}$  и найдите его значение при  $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ,  $b = \frac{\sqrt{8}}{5}$ .

7. Из 6000 собранных на заводе холодильников 9 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный холодильник из этих 6000. Найдите вероятность того, что проверяемый холодильник окажется бракованным.

8. Из формулы силы упругости  $F = -kx$  выразите смещение тела  $x$ .

9. Найдите длину промежутка решений неравенства  $(2 - x)(x + 3) \geq 0$ .

10. Найдите первый член арифметической прогрессии, если  $a_8 = 14$ , разность  $d = 7$ .

## Вариант 5

1. Относительная высота горы Арарат (расстояние от подножия до вершины) составляет 4 км 365 м. Переведите эту величину в метры.

1) 4,365 м

2)  $4,365 \cdot 10^3$  м

3)  $40,365 \cdot 10^3$  м

4) 400,365 м

2. В магазине имеется 1800 пакетов вишнёвого и сливового сока. Вишнёвый сок составляет 42%. Сколько пакетов сливового сока имеется в магазине?

3. Сократите дробь  $\frac{(a^2)^3 \cdot b^6}{b^2}$ .

1)  $a^5b^3$

2)  $a^6b^3$

3)  $a^5b^4$

4)  $a^6b^4$

4. На координатной прямой отмечены точки  $A, B, C, D$  (см. рис. 19). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{115}$ . Какая это точка?

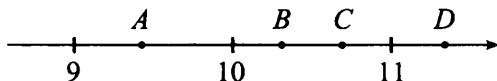


Рис. 19.

1)  $A$

2)  $B$

3)  $C$

4)  $D$

5. Решите уравнение  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . В ответе укажите его наибольший корень.

6. Упростите выражение  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x-y}$  и найдите его значение при  $x = 3 - \sqrt{7}$ ,  $y = 7 + \sqrt{7}$ .

7. В соревнованиях по шахматам участвуют 15 спортсменов из России, 10 — из США и 11 — из Германии. В первый день

соревнований каждый шахматист играет одну партию, соперники определяются жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шахматист из России Василий Кузнецов будет в первый день играть с другим россиянином.

8. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2 R t$  выразите сопротивление  $R$ .

9. Решите неравенство  $11 + 7(3 - x) \leq -3(4 + x)$ , в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

10. Задана арифметическая прогрессия 39,  $3x$ , 69, ... . Найдите  $x$ .

### Вариант 6

1. В таблице приведены объёмы воды в четырёх прудах.

Пруд	1	2	3	4
Объём (л)	$8,7 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^8$	$3,6 \cdot 10^9$	$2,3 \cdot 10^8$

В каком из них количество воды наименьшее?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

2. В учебнике по математике содержится 40 задач на проценты и 28 задач на части. Сколько процентов составляют задачи на части от задач на проценты?

3. Сократите дробь  $\frac{x^{10} \cdot (y^2)^4}{x^2}$ .

- 1)  $x^5 y^6$                       2)  $x^8 y^8$                       3)  $x^5 y^8$                       4)  $x^8 y^6$



4. На координатной прямой отмечены точки  $M, N, K, E$  (см. рис. 20). Одна из них соответствует числу  $\sqrt{610}$ . Какая это точка?

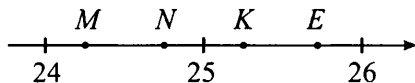


Рис. 20.

1)  $M$ 2)  $N$ 3)  $K$ 4)  $E$ 

5. Решите уравнение  $\frac{2x - 5}{2} = \frac{8 - 5x}{4}$ .

6. Упростите выражение  $\left(\frac{a}{b} + a\right) \cdot \frac{ab^2}{ab + a}$  и найдите его значение при  $a = 3\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{12}$ .

7. В концерте участвуют 9 певцов из России, 4 — из Франции и 2 — из Норвегии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать певец из России.

8. Из формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2}ab \sin \angle C$  выразите длину стороны  $b$ .

9. Решите неравенство  $(x - 7)(x + 6) < 0$ . В ответе укажите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства.

10. Дана геометрическая прогрессия  $2, -6, 18, \dots$ . Найдите пятый член прогрессии.

**Вариант 7**

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1)  $\frac{0,4}{0,2} - 2$

2)  $\frac{23,8 - 5}{0,4}$

3)  $\frac{7,7}{0,9} : \frac{1}{27}$

4)  $-0,1 + 5 : \frac{5}{6}$

2. Для покраски тканей используется смесь двух красителей белого и зелёного цвета в отношении 6 : 7. Какой процент в этой смеси составляет краситель белого цвета? Ответ округлите до целого числа.

3. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1)  $(a + b^2)^2 = a^2 + b^4$

2)  $c^2 - d^4 = (d^2 + c)(c - d^2)$

3)  $(x^2 - y)^2 = x^4 - 2x^2y - y^2$

4)  $p^4 - q^2 = (p^2 + q)(p - q)$

4. Вычислите  $\sqrt{3\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{23}{29}}$ .

5. Найдите корень уравнения  $9 - x = 1 + 2(7 - x)$ .

6. Упростите выражение  $\frac{(2x - y)^2}{x} + 4(y - x)$  и найдите его

значение при  $x = 4$ ,  $y = 6\sqrt{3}$ .

7. На детской карусели 25 мест, каждое сделано в виде какого-либо животного. Из этих мест только три сделаны в виде слонёнка. Мальчик выбирает место наугад. Найдите вероятность того, что он сядет на место, сделанное в виде слонёнка.

8. Из формулы длины вектора  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$  выразите  $y$ , если известно, что  $y \geq 0$ .

9. Решите неравенство  $x^2 - 3x + 4 < 0$ . В ответе укажите количество целочисленных решений этого неравенства.

10. В геометрической прогрессии  $b_1 = -16$ , знаменатель  $q = -\frac{1}{2}$ . Найдите четвёртый член этой прогрессии.

### Вариант 8

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1)  $-4 + 11 : \frac{11}{17}$

2)  $\frac{12.4 - 11}{0.7}$

3)  $-\frac{8.8}{0.3} : \frac{1}{6}$

4)  $\frac{0.3}{0.2} - 11$

2. Коллекция состоит из серебряных и золотых монет, собранных в отношении 8 : 1. Какой процент в этой коллекции составляют серебряные монеты? Ответ округлите до целого числа.

3. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1)  $(a^2 + b)^2 = a^4 + b^2$

2)  $c^2 - d^4 = (d^2 + c)(d^2 - c)$

3)  $(x^2 - y)^2 = y^2 - 2yx^2 + x^4$

4)  $p^4 - q^2 = (p^2 - q)^2$

4. Вычислите  $\sqrt{3\frac{5}{9} \cdot 4.5}$ .

5. Найдите сумму корней уравнения  $x^2 - 7x + 8 = 0$ .
6. Упростите выражение  $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \cdot (y - x)$  и найдите его значение при  $x = 4 + \sqrt{5}$ ,  $y = 6 - \sqrt{5}$ .
7. В урне 6 красных, 8 жёлтых, 3 синих и 3 зелёных шара. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что достали жёлтый шар?
8. Из формулы закона Джоуля-Ленца  $Q = I^2 R t$  выразите время  $t$ .
9. Найдите наименьшее целое решение неравенства  $\frac{x - 3}{x + 5} \geq 2$ .
10. Найдите первый член геометрической прогрессии, если  $b_5 = 162$ ,  $q = 3$ .

### Вариант 9

1. Найдите значение выражения  $\left(4\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) \cdot 2,625 : 9\frac{8}{9}$ .
- 1) 11,25                      2)  $10\frac{1}{8}$                       3)  $\frac{3}{8}$                       4) 1,125
2. Тетради в количестве 126 штук разделили между двумя классами в отношении 10 : 11. Сколько тетрадей составляет большая часть?

3. На координатной прямой отмечено число  $a$  (см. рис. 21).

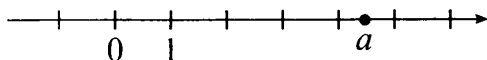


Рис. 21.

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

- 1)  $a - 4 < 0$     2)  $6 - a < 0$     3)  $a - 3 > 0$     4)  $a - 7 > 0$

4. Найдите значение выражения  $\frac{(2\sqrt{10})^2}{25}$ .

5. Решите уравнение  $\frac{2x + 7}{3} = 5$ .

6. Упростите выражение  $\frac{(a + 3b)^2 - (3b - a)^2}{a}$  и найдите его значение при  $a = 14 + \sqrt{3}$ ,  $b = 5$ .

7. В учебнике 30 задач по физике. Школьник не знает, как решить 12 из них. Учитель наугад выбирает из учебника задачу по физике и вызывает школьника к доске, предлагая решить эту задачу. Найдите вероятность того, что школьник знает, как решить предложенную задачу.

8. Из формулы состояния идеального газа  $pV = RT$  выразите молярный объём  $V$ .

9. Решите неравенство  $x^2 + 3x - 4 < 0$ . В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

10. Дана геометрическая прогрессия 5, 15, 45, ... . Найдите сумму первых шести её членов.

# Вариант 10

1. Найдите значение выражения  $(3,2 + 8,4) : 1\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{25}$ .

1) 2,9

2) 7,25

3) 0,29

4) 0,7424

2. В парке посадили клёны и липы, причём на каждые 3 липы приходилось 2 клёна. Сколько процентов от всех посаженных деревьев составили липы?

3. На координатной прямой отмечено число  $b$  (см. рис. 22).

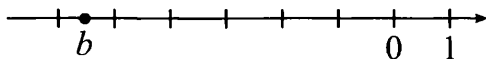


Рис. 22.

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1)  $4 - b > 0$

2)  $b + 5 > 0$

3)  $b + 7 < 0$

4)  $8 - b < 0$

4. Найдите значение выражения  $\frac{42}{(5\sqrt{6})^2}$ .

5. Решите уравнение  $-x^2 - 2x + 3 = 0$ .

6. Упростите выражение  $\frac{1}{c^2 + d^2} \cdot \left( \frac{c + d}{c - d} + \frac{c - d}{c + d} \right)$  и найдите его значение при  $c = \sqrt{17}$ ,  $d = \sqrt{12}$ .

7. В бассейне 8 дорожек, из них крайними являются 1-я и 8-я. В соревнованиях участвуют 8 пловцов, при этом дорожки распределяются жеребьёвкой. Определите вероятность того, что спортсмену Константину, участвующему в заплыве, достанется крайняя дорожка.

8. Из формулы скорости материальной точки при равноускоренном движении  $v = v_0 + at$  выразите время  $t$ .

9. Решите неравенство  $2(7 - 5x) > 12(x + 1) - 7$ . В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

10. В геометрической прогрессии  $b_3 = 3$ ,  $b_5 = \frac{1}{3}$ . Найдите  $b_4$ , если известно, что знаменатель  $q$  положителен.

# Ответы к вариантам для самостоятельного решения

## Глава 1. Числа и вычисления

		Номера заданий							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Номера вариантов	1	11,447	$-\frac{7}{15}$	9	$7,377 \cdot 10^5$	38,1	5,09	157,5	2070
	2	0,1	-0,25	$2\sqrt{3}$	$1,426 \cdot 10^5$	70,285	2,4	24	75
	3	10,253	$-9\frac{13}{70}$	2	$3 \cdot 10^4$	30,88	0,95	84	1300
	4	14,599	110,08	1,5	$1,7 \cdot 10^5$	2,185	-19,6	3,75	22 400
	5	0	$\frac{2}{3}$	9	$2,53 \cdot 10^3$	70,285	19,7	12	500
	6	20	5,8	2	$2 \cdot 10^5$	18,25	19,6	8	3

## Глава 2. Алгебраические выражения

		Номера заданий						
		1	2	3	4	5	6	7
Номера вариантов	1	3	$\frac{ac}{2}$	$x \geq 2$	2	3	$h = \frac{2S}{a+b}$	$d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$
	2	4	$\frac{n}{5m}$	$m \neq 2$	$(a-b)^2$	3	$d_1 = \frac{2S}{d_2}$	$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$
	3	-10	$9a^2$	$x \geq 4$	$\frac{(3x+y)^2}{3}$	2	$a = 2R \sin \angle A$	$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}}$
	4	-11	$\frac{3}{b^9}$	$x \neq 2,$ $x \neq 3$	27,5	1	$\sin \angle C = \frac{2S}{ab}$	$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$
	5	-6	$\frac{2a^2 b^2}{3}$	$a \leq 3$	11	3	$R = \frac{l}{2\pi}$	$r = \sqrt{R^2 - \frac{S}{\pi}}$
	6	20	$\frac{3}{2y}$	$x > -5$	5	1	$\rho = \frac{p}{gh}$	$R = \frac{v^2}{g}$



## Глава 3. Уравнения и неравенства

		Номера заданий					
		1	2	3	4	5	6
Номера вариантов	1	2	0,5	2	3	9	2
	2	-1	-2	4	6	3	4
	3	-10	-5	-8	5	13	1
	4	-16	2,5	1	4	4	3
	5	-5	-1,8	4	4	12	8
	6	-3	9	-15	-4	2	11

## Глава 4. Теория вероятностей

		Номера заданий		
		1	2	3
Номера вариантов	1	0,003	0,8	0,12
	2	0,28	0,75	0,4
	3	0,3	0,9	0,3
	4	0,2	0,005	0,2
	5	0,8	0,004	0,4
	6	0,002	0,4	0,14

## Глава 5. Числовые последовательности

		Номера заданий		
		1	2	3
Номера вариантов	1	36	-65	728
	2	84	3	5
	3	3	-61	-2
	4	-100	96	0,5
	5	14	129	$5n - 3$
	6	-78	605	96

## Ответы к тренировочным тестам

		Номера заданий									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номера вариантов	1	2	2550	3	6 и 7	2	1,5	0,005	$V = \frac{F}{\rho g}$	-2	75
	2	4	200	2	5 и 6	6	0,75	0,85	$q = 1 - \frac{b_1}{S}$	$(1; +\infty)$	3
	3	142	0,5	1	$-\sqrt{245}$	-5	8	0,2	$n = \frac{2S}{a_1 + a_n}$	6	6
	4	132	4	3	$-\sqrt{175}$	-2	7,5	0,0015	$x = -\frac{F}{k}$	5	-35
	5	2	1044	4	3	3	10	0,4	$R = \frac{Q}{I^2 t}$	11	18
	6	1	70	2	2	2	36	0,6	$b = \frac{2S}{a \sin \angle C}$	-5	162
	7	3	46	2	3	6	27	0,12	$y = \sqrt{d^2 - x^2}$	0	2
	8	1	89	3	4	7	-10	0,4	$t = \frac{Q}{I^2 R}$	-13	2
	9	4	66	3	1,6	4	60	0,6	$V = \frac{RT}{p}$	-3	1820
	10	3	60	1	0,28	-3; 1	0,4	0,25	$t = \frac{v - v_0}{a}$	0	1

**ГИА-9**

**Учебное издание**

**Иванов Сергей Олегович  
Ольховая Людмила Сергеевна  
Резникова Нина Михайловна  
Нужа Галина Леонтьевна**

**МАТЕМАТИКА  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-9  
ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»  
ЧАСТЬ 1**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

*Обложка А. Вартанов  
Компьютерная верстка Г. Безуглова  
Корректор М. Федорова*

Подписано в печать с оригинал-макета 14.09.2012.  
Формат 60х84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская.  
Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44.  
Тираж 10000 экз. Заказ № 33343.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

**ООО «ЛЕГИОН»**

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.  
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Долomanовский, 55.  
[www.legionr.ru](http://www.legionr.ru) e-mail: [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com)

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. [www.sarpk.ru](http://www.sarpk.ru)