

АЛГЕБРА

11



Джон Стевен (1550—1617)

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_3 x$$

Свойства корней n -й степени ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)

| n — нечетное число | n — четное число |
|--|---|
| $(\sqrt[n]{a})^n = a$ при любом a | $(\sqrt[n]{a})^n = a$ при $a \geq 0$ |
| $\sqrt[n]{a^n} = a$ при любом a | $\sqrt[n]{a^n} = a $ при любом a |
| $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ при любом a | $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ при $a = 0$ |
| $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при любых a и b | $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{ a } \cdot \sqrt[n]{ b }$, если a и b одного знака |
| $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ при любых a и b | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ |
| $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ при любых a и b | $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ |
| | $a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$ при $a < 0$ и $b \geq 0$ |
| $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ при любых a и b | $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$ при любом a и $b \geq 0$ |
| $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ при любых a и $b \neq 0$ | $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ a }}{\sqrt[n]{ b }}$ при значениях a и b одного знака и $b \neq 0$ |
| $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ при любых a и $b \neq 0$ | $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ при $a \geq 0$ и $b > 0$ |

При любых натуральных значениях $n \geq 2$ и $k \geq 2$
для любых $a \geq 0$ имеют место тождества:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Квадраты чисел от 20 до 99

| Единицы Десятки | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| 3 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| n^2 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| n^3 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

Степени чисел 2, 3, 5

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|----|-----|-----|------|-------|-------|--------|---------|---------|
| 2^n | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| 3^n | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 |
| 5^n | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 | 1953125 | 9765625 |

АЛГЕБРА

**Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 11-летним сроком обучения**

Под редакцией профессора
Л. Б. Шнепермана

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

2-е издание, переработанное

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Яшин

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (доктор пед. наук, проф. К. О. Ананченко); учитель математики высшей категории СШ № 153 г. Минска А. И. Абрамович

Алгебра: учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 11-летним сроком обучения /Е. П. Кузнецова [и др.]; под ред. Л. Б. Шнепермана. — 2-е изд., перераб. — Минск: Нар. света, 2008. — 271 с.: ил.

ISBN 978-985-12-2023-2.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-12-2023-2


© Оформление. УП «Народная света», 2008


ОТ АВТОРОВ


В 11-м классе мы снова встретимся с иррациональными числами, научимся преобразовывать выражения с корнями n -й степени, обобщим знания о степенях с разными показателями и о степенных функциях, познакомимся с показательной и логарифмической функциями и их свойствами, продолжим решение уравнений и неравенств и их систем.


Упражнения в учебном пособии нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 2.47 — это 47-е упражнение из 2-й главы. Аналогично нумеруются и пункты с теоретическим материалом. Пункт 1.6 обозначает 6-й пункт из 1-й главы.

Среди упражнений встречаются номера с кружочком (например, 1.36°), номера со звездочкой (например, 1.173*) и номера без всяких обозначений (например, 2.54). Кружочком выделены упражнения, которые должен уметь решать каждый ученик, претендующий на отметки от 3 до 6 баллов в 10-балльной системе отметок. Все остальные номера адресованы желающим углубить свои знания и достигнуть более высоких результатов. Наиболее трудные из них отмечены звездочкой.


Светлый квадрат с диагоналями  обозначает конец доказательства теоретического утверждения.


Материал, отмеченный треугольником , предназначен тем, кто серьезно интересуется математикой, он не является обязательным для изучения.


Особенности теории, на которые надо обратить внимание, отмечены восклицательным знаком .

Весы  нарисованы там, где есть возможность сравнить варианты решения или доказательства.

Пояснения к преобразованиям заключаются между двумя вертикальными стрелками $\uparrow \dots \uparrow$ или $\downarrow \dots \downarrow$; направление стрелок показывает, какое именно преобразование поясняется. При записи решения в тетради эти пояснения записывать не нужно.

Материал для повторения отмечен знаком .

Исторические сведения, которые встречаются в книге, выделены знаком .

После каждого пункта теории предложены вопросы и задания под знаком . Они помогут повторить новый материал и выделить в нем главное.

Степень с рациональным показателем. Степенная функция



1.1. Степень с целым показателем

Напомним определение и основные свойства степени с целым показателем.

Для любого действительного числа a полагаем

$$a^1 = a; \quad a^n = \underbrace{aa \dots a}_n \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N}).$$

Для любого действительного числа $a \neq 0$ полагаем

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Свойства действий над степенями с целыми показателями сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. Для любых значений $a \neq 0$ и $b \neq 0$ при любых целых l и m верны равенства:

$$a^l \cdot a^m = a^{l+m}; \quad (1)$$

$$\frac{a^l}{a^m} = a^{l-m}; \quad (2)$$

$$(a^l)^m = a^{lm} \quad (3)$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Сформулируем также теорему о возведении в степень обеих частей неравенства.

Теорема 2. Пусть a и b — неотрицательные числа, n — натуральное число. Тогда:

1) если $a < b$, то $a^n < b^n$;

2) если $a^n < b^n$, то $a < b$.

Доказательство. 1) Это свойство было доказано в учебном пособии 8-го класса.

2) Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что неравенство $a < b$ неверное. Тогда верно одно из двух соотношений: $a = b$ или $a > b$.

Если $a = b$, то $a^n = b^n$. Это противоречит условию.

Если $a > b$, то согласно первой части этой теоремы $a^n > b^n$. Опять получили противоречие с условием.

Значит, $a < b$. \square

Пример 1. Сравнить числа $\sqrt{79}$ и 9.

Решение. Поскольку $9 = \sqrt{81}$ и верно неравенство $79 < \sqrt{81}$, то по теореме 2 будет верным и неравенство $\sqrt{79} < \sqrt{81}$, т. е. $\sqrt{79} < 9$.

Ответ: $\sqrt{79} < 9$.

Пример 2. Известно, что $m^2 > k$. Верно ли неравенство

$$m^4 > k^2?$$

Решение. Если $k \geq 0$, то из верного неравенства $m^2 > k$ следует, что верно и неравенство $m^4 > k^2$.

Если $k < 0$, то гарантировать, что, когда верно неравенство $m^2 > k$, будет верным и неравенство $m^4 > k^2$, нельзя. Например, неравенство $2^2 > -5$ — верное, а неравенство $2^4 > (-5)^2$ — неверное.

Следствие. Пусть a и b — числа одного знака, n — натуральное число. Тогда, если $a^n = b^n$, то $a = b$.

Доказательство. Проведем его методом от противного. Допустим, что $a \neq b$, например, $a < b$.

Если a и b — положительные числа, то согласно теореме 2 верно неравенство $a^n < b^n$. Получили противоречие с условием. Значит, $a = b$. Если a и b — отрицательные числа, то $-a$ и $-b$ — положительные числа, и если $(-a)^n = (-b)^n$, то, как только что было доказано, $-a = -b$, а значит, $a = b$. \square



Заметим, что при использовании этого следствия необходимо проверять совпадение знаков a и b при четном n , а при нечетном n такой необходимости нет.

Пример 3. Верно ли, что $a = b$, если:

а) $a^4 = b^4$; б) $a^5 = b^5$?

Решение. а) Верно, если a и b — числа одного знака, и неверно, если они разных знаков. Например, $2^4 = (-2)^4$ — верное числовое равенство, но равенство $2 = -2$ — неверное.

б) Поскольку число и его нечетная степень всегда имеют один и тот же знак, то из того, что $a^5 = b^5$ — верное числовое равенство, следует равенство чисел a и b .

Пример 4. Выполнить действия:

а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9}$; б) $(2x^3 \cdot x^{-5}y)^4$.

Решение.

а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9} = 2^{8m+(m+1)-(2m-9)} = 2^{8m+m+1-2m+9} = 2^{7m+10}$.

б) $(2x^3 \cdot x^{-5}y)^4 = (2x^{3+(-5)}y)^4 = (2x^{-2}y)^4 = 16x^{-8}y^4$.



1. Как определяется n -я степень числа a , если:

а) $n = 1$; б) $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$?

2. Как определяется степень:

а) a^{-n} ($a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$);

б) a^0 ($a \neq 0$)?

3. Сформулируйте теорему о свойствах действий над степенями с целыми показателями:

а) об умножении степеней с одинаковыми основаниями;

б) о делении степеней с одинаковыми основаниями;

в) о возведении степеней в степень;

г) о возведении в степень произведения;

д) о возведении в степень дроби.

Упражнения

1.1°. Вычислите:

1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^7$;

2) $(-7)^2 - 3^4 - (-4)^3 - (-1)^2$;

3) $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^3 - (-2)^3 - 5(-2)^3 + 6(-2)^3$;

4) $8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3^2 - (-3)^2 + 6(-3)^4 + 5(-3)^3$.

1.2°. Сравните число с нулем:

1) 21^0 ; 2) $(-\frac{1}{5})^0$; 3) $-(-16)^0$; 4) -10^0 ;

5) $(-8)^0$; 6) -13^0 ; 7) $\frac{1}{(-2)^0}$; 8) $\frac{1}{2^0}$.

Представьте в виде степени произведение (**1.3—1.4**).

1.3°. 1) $6 \cdot 6^2 \cdot 6^5$; 2) $0,4^3 \cdot 0,4^5 \cdot 0,4$;

3) $(-5)^4(-5)^{16}(-5)$; 4) $(-3)^8(-3)^6(-3)^2$;

5) $2^{3n} \cdot 2^{6n} \cdot 2^n \cdot 16$; 6) $3^{8m} \cdot 3^{5m} \cdot 81$.

1.4°. 1) $a^8 a^4 a$;

2) $a^4 a a^5$;

3) $(-m)^2(-m)^3(-m)^4$;

4) $(-m)^9(-m)^2(-m)^{11}$;

5) $(4y)^8(4y)^3(4y)^5$;

6) $(6t)^2(6t)^3(6t)^4(6t)^5$.

1.5°. Представьте степень в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями:

1) 4^8 ;

2) 15^7 ;

3) a^5 ;

4) b^6 ;

5) 4^{3+b} ;

6) 7^{b+1} ;

7) 13^{3a} ;

8) 10^{2a} ;

9) $(7p)^{19}$;

10) $(3p)^{13}$;

11) $(-p)^{20}$;

12) $(-t)^{11}$.

1.6°. Представьте в виде степени частное:

1) $12^6 : 12^4$;

2) $3^8 : 3^5$;

3) $x^{40} : x^{21}$;

4) $x^{10} : x^2$;

5) $a^8 : a$;

6) $a^5 : a$;

7) $19^{4m} : 19^{3m}$;

8) $17^{5n-1} : 17^{3n}$;

9) $(-1,5)^{4t+2} : (-1,5)^{2t-1}$;

10) $(-0,8)^{3t-5} : (-0,8)^{2t+1}$.

1.7. Представьте степень в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями:

1) 4^6 ;

2) 3^4 ;

3) $(-\frac{1}{2})^{15}$;

4) $(\frac{5}{7})^2$;

5) a^t ;

6) $(-x)^{14}$;

7) $(\frac{2}{7}b)^3$;

8) $(-0,1c)^9$.

1.8°. Возведите степень в степень:

1) $((-3)^7)^4$;

2) $(5^2)^3$;

3) $((\frac{1}{4})^2)^{-5}$;

4) $((\frac{2}{3})^{-5})^2$;

5) $((-8)^{-6})^{-7}$;

6) $((-5)^{-8})^{-2}$;

7) $((-2)^3)^6$;

8) $((-3)^4)^9$.

1.9. Определите, верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $((-3)^4)^5 = (-3^4)^5$; 2) $((-2)^8)^{11} = (-2^8)^{11}$.

Выполните действия (1.10—1.11).

1.10°. 1) $(3x)^4$; 2) $\left(\frac{1}{2}y\right)^5$; 3) $(-7b)^4$;
4) $(-8a)^3$; 5) $(4x^3y^4)^2$; 6) $(10x^2y^5)^3$.

1.11. 1) $\left(\frac{x}{y}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{a}{b}\right)^3$; 3) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2$;
4) $\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^2$; 5) $\left(\frac{a^2b^7}{5c^4}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3a^8}{b^3c^6}\right)^5$.

1.12°. Замените степень дробью:

1) 10^{-2} ; 2) 6^{-5} ; 3) $(-4)^{-6}$;
4) $(-8)^{-13}$; 5) x^{-20} ; 6) y^{-12} ;
7) $(-2x)^{-9}$; 8) $(-4y)^{-16}$; 9) $(-5b)^{-8}$.

1.13°. Вычислите:

1) 2^{-3} ; 2) 12^{-2} ; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; 5) $(-4)^{-3}$; 6) $(-5)^{-2}$;
7) $-(-15)^{-1}$; 8) $-(-10)^{-2}$; 9) $(-6)^0$;
10) -6^0 ; 11) $((-14)^2)^0$; 12) $((-14)^0)^2$.

1.14°. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{4^3}$; 2) $\frac{1}{21^{12}}$; 3) $\frac{1}{x^{10}}$; 4) $\frac{1}{(-a)^{27}}$;
5) $\frac{1}{13}$; 6) $\frac{1}{19}$; 7) $\frac{1}{1000}$; 8) $\frac{1}{64}$.

Упростите выражение (1.15—1.16).

1.15. 1) $\left(2\frac{2}{3}x^6y^{12} : (xy)^4\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^7y^{10} : x^6y^8\right)^4$;
2) $\left(3\frac{3}{7}(xy)^9 : x^4y^3\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}x^{12}y^4 : x^7y^3\right)^2$;
3) $\left(-\frac{2}{5}a^2xy \cdot (axy^2)^2\right) : \left(-\frac{1}{2}ax^5y^7 : (xy^2)^2\right)$;
4) $\left(-1\frac{1}{2}a^8b^5c^8 : (a^2bc^3)^2\right) : \left(-\frac{2}{3}(abc)^2 \cdot a(bc)^0\right)$.

1.16. 1) $(-5,1a^{k-2}b^{3-k}c^k) : (1,7a^2b^kc^{2-k})$;
2) $(8,4a^{k-3}b^{4-k}c^k) : (-2,1a^3b^{k-4}c^{3-k})$;
3) $\left(\frac{4a^{-3-2k}b^{3+2k}}{(a^{1+k}b^{1-k})^{-2}}\right)^{-2}$; 4) $\left(\frac{2x^{-2+4k}y^{2-4k}}{(x^{1-k}y^{k+1})^{-4}}\right)^{-3}$.

1.17. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^{-2}}{a^{-2}-2}\right)^{-2} - \left(\frac{a^{-2}}{a^{-2}+2}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a = (-0,25)^{-2}$;
2) $\left(\frac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2} - \left(\frac{2a^{-2}}{a^{-2}+5}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a = (-0,5)^{-4}$.

1.18. Упростите выражение:

1) $\frac{a^{-2}-2b^{-2}}{3a^{-2}-2b^{-2}}$ и найдите его значение, если $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1} = 15^{-1}$;
2) $\frac{a^{-2}+3b^{-2}}{2a^{-2}+3b^{-2}}$ и найдите его значение, если $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1} = 8^{-1}$.

1.19. Сравните числа:

1) $\sqrt{103}$ и 10; 2) $\sqrt{200}$ и 15;
3) -17 и $-\sqrt{290}$; 4) -28 и $-\sqrt{780}$;
5) $5\sqrt{3}$ и $\sqrt{74}$; 6) $4\sqrt{7}$ и $\sqrt{97}$;
7) $\frac{1}{4}\sqrt{80}$ и $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 8) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ и $\frac{2}{5}\sqrt{50}$.

1.20. Известно, что $a^3 < b^2$. Верно ли неравенство:

1) $a^9 < b^6$; 2) $a^{21} < b^{14}$;
3) $a^{-3} > b^{-2}$; 4) $a^{-15} > b^{-10}$;
5) $\frac{a^2 \cdot (a^3)^2}{a^{-3} \cdot (a^{-2})^2} < \frac{(b^4)^2 \cdot (b^3)^2}{(b^2)^3 \cdot b^{-2}}$;
6) $\frac{(a^5)^3 \cdot (a^7)^2}{(a^6)^2 \cdot a^4} < \frac{(b^3)^3 \cdot (b^2)^5}{(b^5)^4 \cdot (b^6)^{-2} \cdot b^{-3}}$?

1.21. Известно, что $a^4 > b$. Верно ли неравенство:

1) $(a^2)^3 \cdot a^2 > (b^3)^2 : (b^2)^2$;
2) $(a^2 \cdot a^3)^2 \cdot (a \cdot a^2)^2 > (b \cdot b^5)^3 : (b^3 \cdot b^4)^2$;
3) $\frac{1}{a^8} < \frac{1}{b^2}$;
4) $a : (a^3)^7 < ((b^2)^5 : b^5)^{-1}$?

1.22. Верно ли, что $m = n$, если:

1) $m^7 = n^7$; 2) $m^{26} = n^{26}$;
3) $\frac{m^{-3}(-m)^2m^{-1}}{m^{-5}} = \frac{n^{10}n^{-2}n^{-3}}{(-n)^2}$; 4) $\frac{(-m)^{-3} \cdot m^{-4}}{(-m)^{-6}} = \frac{(-n^2)^3 \cdot n^5}{(-n^3)^4}$;
5) $m^{-2} \cdot \frac{1-m}{1-m^{-1}} = n^{-3} \cdot \frac{2-n}{1-2n^{-1}}$; 6) $m^5 \cdot \frac{4+m}{1+4m^{-1}} = n^7 \cdot \frac{8n^{-2}+1}{8+n^2}$?

1.23. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{(ab^{-3} - a^{-3}b)^{-1} \cdot (a^{-2} + b^{-2})}{(b^{-2} - a^{-2})^{-1}} \text{ при } a=2, b=10;$$

$$2) \frac{a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}{a^{-3} + b^{-3}} \cdot \left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-2} \text{ при } a=6, b=2.$$

1.2. Корень n -й степени

В 8-м классе мы познакомились с понятием квадратного корня из действительного числа (его называют также корнем 2-й степени). Напомним его определение.

Определение. *Квадратным корнем из числа a называется число t , квадрат которого равен a .*

Определим понятие корня степени n для произвольного натурального $n \geq 2$.

Определение. *Корнем n -й степени из числа a называется такое число t , n -я степень которого равна a .*

Таким образом, утверждение « t — корень n -й степени из a » означает, что $t^n = a$.

Корень 3-й степени называется также **кубическим**.

Например, кубический корень из числа 125 — это число 5, так как $5^3 = 125$. Кубический корень из числа -125 — это число -5, так как $(-5)^3 = -125$.

Корень 7-й степени из числа 128 — это число 2, так как $2^7 = 128$. Корень 7-й степени из числа -128 — это число -2, так как $(-2)^7 = -128$. Корень 7-й степени из числа 0 — это 0, так как $0^7 = 0$.



Во множестве действительных чисел существует единственный корень нечетной степени n из любого числа a . Этот корень обозначается

$$\sqrt[n]{a}.$$

$$\text{Например, } \sqrt[3]{125} = 5, \sqrt[7]{-128} = -2, \sqrt[7]{0} = 0.$$



Утверждение о существовании корня нечетной степени из любого числа мы принимаем без доказательства.

Согласно определению, *когда n нечетное, то при любом значении a верно равенство*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$\text{Например, } (\sqrt[7]{92})^7 = 92, (\sqrt[7]{123})^7 = 123, (\sqrt[7]{-123})^7 = -123.$$

Заметим, что 0 — это единственное число, n -я степень которого равна 0. Поэтому



при любом натуральном $n \geq 2$ существует единственный корень n -й степени из 0 — это число 0, т. е. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Примерами корней четной степени могут служить квадратные корни, которые изучались в 8-м классе. Рассмотрим еще несколько примеров. Корни 4-й степени из числа 81 — это числа 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Корни 6-й степени из числа 64 — это числа 2 и -2, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$.



Во множестве действительных чисел существует ровно два корня четной степени n из любого положительного числа a , их модули равны, а знаки противоположны. Положительный корень обозначается

$$\sqrt[n]{a}.$$

$$\text{Например, } \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[3]{64} = 2.$$



Утверждение о существовании корня четной степени из любого положительного числа мы примем без доказательства. Согласно определению, *когда n четное, то при любом положительном значении a верно равенство*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$\text{Например, } (\sqrt[4]{51})^4 = 51, (\sqrt[4]{87})^4 = 87.$$

Не существует такого числа, 4-я степень которого равна -81. Поэтому корень 4-й степени из числа -81 не существует. И вообще, поскольку не существует такого числа, четная степень которого была бы отрицательной, то



не существует корня четной степени из отрицательного числа.

Определение. Неотрицательный корень n -й степени из числа a называется **арифметическим корнем n -й степени из a** .



При четном n символом $\sqrt[n]{a}$ обозначается только арифметический корень n -й степени из числа a (при чтении записи $\sqrt[n]{a}$ слово «арифметический» обычно пропускают).

Выражение, стоящее под знаком корня, называется **подкоренным выражением**.

Извлечь корень n -й степени из числа a — это значит найти значение выражения $\sqrt[n]{a}$.

Так как корень четной степени из отрицательного числа не существует, то выражение $\sqrt[n]{a}$ при четном n и отрицательном a не имеет смысла.

Например, не имеют смысла выражения $\sqrt[4]{-81}$ и $\sqrt[5]{-64}$.



Как мы установили, при любом значении a , при котором выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \quad (1)$$

Поэтому равенство (1) является тождеством.



В конце XV в. бакалавр Парижского университета Н. Шюке внес усовершенствования в алгебраическую символику. В частности, знаком корня служил символ R_x (от латинского слова *radix* — корень). Так выражение $\sqrt[4]{24 + \sqrt{37}}$ в символике Шюке имело вид $\bar{R}_x^4 24 \bar{p} \bar{R}_x^2 37$.

Знак корня $\sqrt{}$ в современном виде был предложен в 1525 г. чешским математиком К. Рудольфом. Его учебник алгебры переиздавался до 1615 г., и по нему учился знаменитый математик Л. Эйлер.

Знак $\sqrt{}$ еще называют **радикалом**.

Пример 1. Верно ли, что:

а) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$; б) $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$?

Решение. а) По определению арифметический корень n -й степени из неотрицательного числа a (n — четное число) является неотрицательным числом, n -я степень которого равна подкоренному выражению a .

Поскольку $-2 < 0$, то равенство $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ неверное. Верно равенство $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$.

б) По определению корень n -й степени из числа a (n — нечетное число) является числом, n -я степень которого равна подкоренному выражению a .

Поскольку $(-2)^7 = -2^7$ — верное равенство, то равенство $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$ верное.

Пример 2. Решить уравнение:

а) $x^3 = 7$; б) $x^4 = 5$.

Решение. а) Решением этого уравнения является такое значение x , третья степень которого равна 7, т. е. по определению кубического корня имеем:

$$x = \sqrt[3]{7}.$$

б) Решением этого уравнения является такое значение x , 4-я степень которого равна 5, т. е. (по определению) x — это корень 4-й степени из числа 5. Но из положительного числа 5 существует два корня четвертой степени, которые равны по модулю и имеют противоположные знаки. Поскольку положительный корень обозначают $\sqrt[4]{5}$, то второй корень равен $-\sqrt[4]{5}$, т. е. $x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{7}$; б) $\pm\sqrt[4]{5}$.

В тетради решение уравнения б) (аналогично и а)) можно записать так:

Решение: $x^4 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{5}$.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $(\sqrt[8]{x})^8 = x$; б) $(\sqrt[13]{x})^{13} = x$.

Решение. а) Поскольку данное равенство является тождеством при $x \geq 0$, то каждое неотрицательное значение x является решением (корнем) уравнения $(\sqrt[8]{x})^8 = x$.

б) Поскольку данное равенство является тождеством при любом значении x , то решением уравнения $(\sqrt[13]{x})^{13} = x$ является любое действительное число, а R — множество всех его корней.

Ответ: а) $[0; +\infty)$; б) R .

Пример 4. Решить уравнение

$$x^{12} - 63x^6 - 64 = 0.$$

Решение. Обозначим $x^6 = t$, тогда получим уравнение

$$t^2 - 63t - 64 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$t_1 = 64, t_2 = -1.$$

Таким образом, имеем

$$x^6 = 64 \text{ или } x^6 = -1,$$

откуда $x = \pm 2$ (поясните, почему уравнение $x^6 = -1$ не имеет корней).

Ответ: ± 2 .



1. Как число называется корнем n -й степени из числа a ?
2. Сколько корней четной степени n существует из положительного числа a ?
3. Корень какой степени существует из любого числа a ?
4. Какой корень n -й степени из числа a называется арифметическим?
5. При каких значениях a верно равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$, если:
а) n — нечетное число; б) n — четное число?

Упражнения

1.24°. Используя определение арифметического корня n -й степени, докажите, что:

- 1) $\sqrt[4]{256} = 4$; 2) $\sqrt[10]{1024} = 2$;
- 3) $\sqrt[5]{729} = 3$; 4) $\sqrt[8]{6561} = 3$;
- 5) $\sqrt[12]{4096} = 2$; 6) $\sqrt[4]{14\,641} = 11$.

1.25°. Верно ли, что:

- 1) число -4 является корнем четвертой степени из числа 256;
- 2) число $-0,3$ является корнем четвертой степени из числа $-0,0081$?

1.26°. Верно ли, что:

- 1) $\sqrt[3]{-1728} = -12$; 2) $\sqrt[3]{-3375} = 15$;
- 3) $\sqrt[5]{-16\,807} = 7$; 4) $\sqrt[5]{-7776} = -6$?

1.27°. Найдите арифметический квадратный корень из числа:

- 1) 16; 2) 49; 3) 0; 4) 1;
- 5) 0,81; 6) 0,25; 7) 2,25; 8) 1,21;
- 9) $\frac{36}{169}$; 10) $\frac{144}{289}$; 11) $\frac{169}{100}$; 12) $\frac{81}{256}$.

1.28°. Найдите кубический корень из числа:

- 1) 1; 2) 0; 3) 343; 4) 8;
- 5) $\frac{1}{27}$; 6) 0,027; 7) 0,001; 8) $\frac{64}{125}$.

1.29°. Найдите арифметический корень четвертой степени из числа:

- 1) 0; 2) 1; 3) 16; 4) 0,0016;
- 5) $\frac{16}{81}$; 6) $\frac{256}{625}$; 7) 0,0001; 8) 0,1296.

Вычислите (1.30—1.42).

- 1.30°. 1) $\sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{49}, \sqrt{81}, \sqrt{100}$;
- 2) $\sqrt{0,16}, \sqrt{0,09}, \sqrt{0,01}, \sqrt{0,04}, \sqrt{0,0025}, \sqrt{0,0001}$;
- 3) $\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64}, \sqrt[3]{-125}, \sqrt[3]{0,008}, \sqrt[3]{0,000216}, \sqrt[3]{-1\,000\,000}$;
- 4) $\sqrt[4]{16}, \sqrt[4]{625}, \sqrt[4]{10\,000}, \sqrt[4]{0,0081}, \sqrt[4]{0,00000016}, \sqrt[4]{2401}$;
- 5) $\sqrt[5]{32}, \sqrt[5]{1024}, \sqrt[5]{243}, \sqrt[5]{0,03125}, \sqrt[5]{100\,000}, \sqrt[5]{0,00001}$;
- 6) $\sqrt[6]{64}, \sqrt[6]{729}, \sqrt[6]{15\,625}, \sqrt[6]{4096}, \sqrt[6]{0,046656}, \sqrt[6]{1\,000\,000}$.

- 1.31°. 1) $\sqrt[3]{-1000}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$;
- 4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 6) $\sqrt[3]{-343}$;
- 7) $\sqrt[3]{-\frac{27}{216}}$; 8) $\sqrt[5]{-3125}$; 9) $\sqrt[5]{-0,00032}$.

1.32. 1) $(\sqrt[3]{-3})^3$; 2) $(\sqrt[5]{-14})^5$; 3) $(\sqrt[7]{-30})^7$;
4) $(\sqrt[11]{-15})^{11}$; 5) $(-\sqrt[9]{6})^9$; 6) $(-\sqrt[15]{99})^{15}$.

1.33. 1) $(\sqrt[3]{-2\frac{2}{11}})^3 \cdot (-\sqrt[5]{6\frac{1}{9}})^5 \cdot (-\sqrt[13]{\frac{9}{5}})^{13} \cdot (\sqrt[17]{-1\frac{13}{40}})^{17}$;
2) $(\sqrt[9]{-3\frac{4}{15}})^9 \cdot (\sqrt[7]{-1\frac{5}{8}})^7 \cdot (\sqrt[5]{-1\frac{1}{14}})^5 \cdot (-\sqrt[3]{1\frac{25}{39}})^3$.

1.34. 1) $(\sqrt[3]{5})^6$; 2) $(\sqrt[4]{0,1})^{12}$; 3) $(\sqrt[5]{1\frac{1}{2}})^{10}$;
4) $(\sqrt[6]{2\frac{1}{3}})^{18}$; 5) $(\sqrt[7]{\frac{5}{6}})^{21}$; 6) $(\sqrt[9]{\frac{2}{3}})^{36}$.

1.35. 1) $(\sqrt[5]{\sqrt{3}})^{10}$; 2) $(\sqrt[4]{\sqrt{3}})^{48}$; 3) $(\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}})^{120}$;
4) $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}})^{12}$; 5) $(\sqrt[8]{\sqrt{10}})^{16}$; 6) $(\sqrt[4]{\sqrt[9]{12}})^{36}$.

1.36°. 1) $(\sqrt{10})^2$; 2) $(\sqrt[3]{5})^3$; 3) $(-\sqrt[4]{12})^4$;
4) $-\sqrt[4]{12^4}$; 5) $(-\sqrt[5]{3})^5$; 6) $(3\sqrt[3]{2})^3$;
7) $(-4\sqrt[4]{4})^4$; 8) $(-\sqrt[7]{15})^7$; 9) $-5\sqrt[5]{5^5}$;
10) $(-\sqrt[6]{3})^6$; 11) $(-2\sqrt[9]{2})^9$; 12) $-\sqrt[8]{4^8}$.

1.37°. 1) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$;
3) $12 - 6\sqrt[3]{0,125}$; 4) $1 + 10\sqrt[4]{0,0081}$;
5) $3\sqrt[4]{16} - 4\sqrt[3]{27}$; 6) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{2,25}$;
7) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{64}$; 8) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{64}$.

1.38°. 1) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$; 2) $\sqrt{36} - \sqrt[4]{16}$;
3) $\sqrt{0,81} + \sqrt[3]{0,001}$; 4) $\sqrt[3]{0,027} - \sqrt{0,04}$;
5) $5 - \sqrt[4]{256}$; 6) $7 + \sqrt[3]{8}$;
7) $\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{16}$; 8) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{81}$.

1.39°. 1) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$;
3) $(2\sqrt{3} + 4)(2\sqrt{3} - 4)$; 4) $(3\sqrt{5} - 2)(3\sqrt{5} + 2)$;
5) $(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{10})$; 6) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

1.40. 1) $\sqrt[3]{\frac{12}{25} \sqrt{\frac{244 \cdot 15^{-1}}{38^2 - 23^2}}}$; 2) $\sqrt{58 + \sqrt{\frac{44^2 - 26^2}{35}}}$;
3) $\sqrt{90 + \sqrt{\frac{31(57^2 - 26^2)}{83}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{23}{64} + \sqrt{\left(\frac{48^2 - 32^2}{5}\right)^{-1}}}$.

1.41. 1) $\left(\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{-3} - \left(\sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}}\right)^5\right)^{-1} \cdot (\sqrt[7]{-27})^7$;
2) $\left(\left(\sqrt[5]{\frac{1}{7}}\right)^{-10} + (-\sqrt[9]{40})^9 \cdot \left(\sqrt[7]{\frac{5}{3}}\right)^0\right)^{-1} : (\sqrt[5]{9})^{-10}$;
3) $\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\right)^6 + (\sqrt[7]{-4^{-2}})^7\right) : \left(\left(\sqrt[5]{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^0}}\right)^{10} - \left(-\sqrt[9]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}\right)^9\right)$;
4) $\left(\left(\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{5}\right)}\right)^3\right)^0 - (-\sqrt[11]{\sqrt{0,1}})^{-22}\right) : \left(\sqrt[5]{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[7]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)^7 + \left(\sqrt[9]{-\frac{1}{3}}\right)^{-9}$.

1.42. 1) $\frac{(\sqrt[7]{a^7})^7}{(\sqrt[5]{a^5})^5}$; 2) $\frac{(\sqrt[3]{a^3})^3}{(\sqrt[9]{a^9})^9}$;
3) $\left(2\frac{1}{3}(\sqrt[3]{a^3})^3 \cdot (\sqrt[7]{b^7})^7\right)^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}(\sqrt[5]{a^5})^5 \cdot (\sqrt[11]{b^{11}})^{11}\right)$;
4) $3\frac{3}{7}(\sqrt[5]{a^5})^5 \cdot (\sqrt[9]{b^9})^9 \cdot \left(-2\frac{1}{3}(\sqrt[7]{a^7})^7 \cdot (\sqrt[13]{b^{13}})^{13}\right)^2$.

Найдите естественную область определения выражения (1.43—1.44).

1.43. 1) $\sqrt{x+4}$; 2) $\sqrt[4]{-9+2x}$;
3) $\sqrt[10]{5x^2-6x}$; 4) $\sqrt[12]{8x-4x^2}$;
5) $\sqrt[3]{x+3}$; 6) $\sqrt[5]{x-7}$;
7) $\sqrt[7]{x^2-4}$; 8) $\sqrt[9]{2x^2-32}$.

1.44. 1) $\sqrt[12]{\frac{3}{4x-1}}$; 2) $\sqrt[14]{\frac{-4}{8x-3}}$;
3) $\sqrt[8]{\frac{2-\sqrt{5}}{9-5x}}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{3-\sqrt{10}}{16-7x}}$;
5) $\frac{2+x}{\sqrt[3]{4-2(8-6x)}}$; 6) $\frac{12-6x}{\sqrt[5]{2-7x+(3x-1) \cdot 2}}$;
7) $\sqrt[4]{\frac{x^2}{2(x-2)-5(1-3x)-2}}$; 8) $\sqrt[28]{\frac{3(x+4)-6(2-x)+9}{x^4}}$.

1.45. Найдите ребро куба, если его объем равен:

- 1) 27 см³; 2) 64 мм³;
3) 0,125 дм³; 4) 0,216 м³.

Решите уравнение (1.46—1.54).

- 1.46°. 1) $x^2 = 0,49$; 2) $x^2 = 121$;
3) $x^3 = 0,008$; 4) $x^3 = 1000$;
5) $x^3 = -64\,000$; 6) $x^3 = 256$;
7) $x^4 = 0,0625$; 8) $x^4 = -16$.

- 1.47. 1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $x^7 = -1$;
4) $x^9 = -512$; 5) $x^3 = -0,027$; 6) $x^{11} = 0$.

- 1.48°. 1) $x^2 = 11$; 2) $x^4 = 19$; 3) $x^8 = 27$;
4) $x^3 = 25$; 5) $x^7 = 38$; 6) $x^9 = -2$;
7) $x^{15} = -6$; 8) $x^{17} = 4$; 9) $x^{13} = -13$.

- 1.49. 1) $x^2 = 25\,600$; 2) $x^2 = 0,0196$;
3) $x^2 + 1 = 1,0016$; 4) $5x^3 - 20 = 0$;
5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $x^2 + 1\frac{7}{9} = 0$;
7) $x^2 \cdot 4 = 0$; 8) $-6x^2 = 0$;
9) $1\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$; 10) $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$.

- 1.50. 1) $4x^3 + \frac{4}{125} = 0$; 2) $8x^3 + 27 = 0$;
3) $-0,1x^4 = -0,00001$; 4) $16x^4 - 81 = 0$;
5) $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0$; 6) $\frac{1}{32}x^6 - 2 = 0$.

- 1.51. 1) $x^4 + \sqrt{2} = 7$; 2) $x^5 - \sqrt{3} = 30$;
3) $x^6 - \sqrt{7} = 19$; 4) $x^3 + \sqrt{5} = 5$.

- 1.52. 1) $(x+1)^4 = 16$; 2) $(x-2)^6 = 64$;
3) $(2x+1)^3 = 27$; 4) $(3x-1)^5 = 32$.

- 1.53. 1) $x^{10} 31x^5 - 32 = 0$; 2) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$;
3) $x^4 - 10x^2 + 27 = 0$; 4) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;
5) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$; 6) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$.

- 1.54. 1)° $(\sqrt[6]{x})^6 = x$; 2)° $(\sqrt[10]{x})^{10} = x$;
3)° $(\sqrt[3]{x})^3 = x$; 4)° $(\sqrt[5]{x})^5 = x$;
5) $(\sqrt[4]{x-1})^4 = x-1$; 6) $(\sqrt[12]{x+2})^{12} = x+2$;
7) $(\sqrt[7]{\frac{1}{x}})^7 = \frac{1}{x}$; 8) $(\sqrt[11]{\frac{1}{x-2}})^{11} = \frac{1}{x-2}$.

1.3. Тождества с корнями, содержащие одну переменную

Корни n -й степени определяются только для натурального числа $n \geq 2$. Поэтому в формулировках теорем о свойствах корня n -й степени это условие обычно опускается.

Теорема 1. Пусть n — нечетное число. Тогда при любом значении a верны равенства:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}. \quad (2)$$

Доказательство. Равенства (1) и (2), как и другие равенства в теоремах этого пункта, очевидно, верны при $a = 0$. Поэтому доказательства проводятся для $a \neq 0$.

Рассмотрим равенство (1). Возведя его левую и правую части в n -ю степень, получим

$$(\sqrt[n]{a^n})^n = a^n.$$

Согласно тождеству (1) из п. 1.2 — это верное числовое равенство при любом значении $a \neq 0$. По следствию из п. 1.1 верно и равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = a^n. \quad \square$$

Равенство (2) доказывается аналогично: устанавливается, что n -е степени его левой и правой частей равны, и на основании следствия из п. 1.1 делается вывод об истинности равенства (2) при любом значении a .

Аналогичными рассуждениями можно обосновать и остальные равенства в теоремах этого пункта.

Заметим, что каждое из этих равенств является тождеством, поскольку оно превращается в верное числовое равенство при любом значении переменной, при котором входящие в это равенство выражения имеют смысл.

Теорема 2. Пусть n — четное число. Тогда при любом значении a верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|. \quad (3)$$

Теорема 3. Пусть n и k — натуральные числа. Тогда при любом неотрицательном значении a верны равенства:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \quad (4)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \quad (5)$$

Заметим, что, когда оба числа n и k — нечетные, равенства (4) и (5) верны для любых значений a , а не только для неотрицательных.



Равенство (5) означает, что *при извлечении корня из корня подкоренное выражение остается прежним, а показатели корней перемножаются.*

Теорема 4. Пусть k — целое число. Тогда при любом положительном значении a верно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \quad (6)$$

Пример 1. Найти значение $\sqrt[4]{b^{12}}$ при:

а) $b = -1$; б) $b = 2$.

Решение. а) $\sqrt[4]{b^{12}} = |b^3| = |(-1)^3| = |-1| = 1$.

б) $\sqrt[4]{b^{12}} = |b^3| = |2^3| = 8$.

Ответ: а) 1; б) 8.

Пример 2. Сравнить числа $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$ и $\sqrt[4]{2}$.

Решение. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\sqrt{3} \cdot 4} = \sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$.

Поскольку верно неравенство $12 > 8$, то будет верным и неравенство $\sqrt[12]{12} > \sqrt[12]{8}$. Следовательно, $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{2}$.

Ответ: $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{2}$.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = -2$; б) $\sqrt[5]{x+7} = 3$.

Решение. а) По определению корня n -й степени имеем, что данное уравнение равносильно уравнению $x = (-2)^3$, т. е. $x = -8$.

б) $x + 7 = 3^5$, откуда $x = 243 - 7$, т. е. $x = 236$.

Ответ: а) -8 ; б) 236 .

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} - 9\sqrt[6]{x} + 14 = 0$.

Решение. Обозначим $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x})^2 = t^2$ и получим уравнение

$$t^2 - 9t + 14 = 0.$$

Корни этого уравнения $t_1 = 2$, $t_2 = 7$.

Таким образом, имеем $\sqrt[6]{x} = 2$ или $\sqrt[6]{x} = 7$.

Решив эти уравнения, найдем:

$$x = 2^6 \text{ или } x = 7^6, \text{ т. е. } x = 64 \text{ или } x = 117\,649.$$

Ответ: 64 ; $117\,649$.



1. Сформулируйте теорему о тождествах с корнями нечетной степени.
2. Сформулируйте теорему о тождествах с корнями четной степени.
3. Сформулируйте теорему:
 - а) об умножении показателя корня на натуральное число $k > 1$;
 - б) об извлечении корня из корня;
 - в) о возведении корня в степень k .
- 4*. Докажите каждое из тождеств (1)–(6).

Упражнения

Извлеките корень (1.55—1.58).

- 1.55°. 1) $\sqrt{m^2}$, $m > 0$; 2) $\sqrt{y^2}$, $y \leq 0$;
 3) $\sqrt{m^2}$, $m < 0$; 4) $\sqrt{y^2}$, $y > 0$;
 5) $\sqrt{t^2}$, $t > 0$; 6) $\frac{1}{4}\sqrt{h^2}$, $h \geq 0$;
 7) $-5\sqrt{\frac{t^2}{25}}$, $t \leq 0$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{9h^2}$, $h < 0$.

- 1.56°. 1) $\sqrt[3]{a^3}$; 2) $\sqrt[7]{p^7}$; 3) $\sqrt[5]{32t^5}$;
 4) $\sqrt[9]{-k^9}$; 5) $\sqrt[13]{-n^{13}}$; 6) $\sqrt[21]{-b^{21}}$.

1.57°. 1) $\sqrt[4]{a^4}$, $a \leq 0$; 2) $\sqrt[6]{a^6}$, $a \geq 0$;
3) $\sqrt[8]{b^8}$, $b > 0$; 4) $\sqrt[12]{b^{12}}$, $b < 0$.

1.58°. 1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{16a^2}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$;
4) $\sqrt{0,36a^2}$; 5) $\sqrt[4]{a^4}$; 6) $\sqrt[6]{a^6}$;
7) $\sqrt{(a-b)^2}$; 8) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$.

1.59. Пусть $t \in \left\{-25; -9; -5\frac{2}{3}; 0; 5\frac{2}{3}; 9; 25\right\}$. Для каждого значения t найдите значение выражения:

1) $4\sqrt[4]{t^4}$; 2) $2 - \sqrt[6]{6t^6}$; 3) $-6 \cdot \sqrt[3]{t^3}$; 4) $\sqrt[5]{t^5} - 1$.

1.60. Вычислите:

1) $\sqrt{(-2)^2} - \sqrt{(-3)^2}$; 2) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{4^2}$;
3) $\sqrt[4]{(-8)^4} + \sqrt[3]{11^3} - \sqrt{(-2)^6}$; 4) $\sqrt[8]{(-3)^8} + \sqrt{6^2} - \sqrt[7]{4^7}$.

1.61. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[7]{(-4\frac{2}{7})^7} : \sqrt[5]{(-\frac{5}{14})^{-5}} : (\sqrt{0,2} + \sqrt[6]{(-0,2)^6} \cdot \sqrt[9]{(-1,4)^9})$;
2) $\sqrt[12]{(-10\frac{2}{5})^{12}} : \sqrt[8]{(\frac{13}{18})^8} : (\sqrt[9]{0,3^9} + \sqrt[7]{(-0,3)^7} \cdot \sqrt[10]{(1,6)^{10}})$.

1.62. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a^2 + 2ax + x^2}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$;
3) $\sqrt{9 + m^2 - 6m}$; 4) $\sqrt{p^2 + 25 + 10p}$.

1.63. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, если а) $x \leq -1$; б) $x > -1$;
2) $\sqrt[8]{(x-2)^8}$, если а) $x \geq 2$; б) $x < 2$.

1.64. Верно ли, что:

1) $t + 5 - \sqrt[10]{(t-5)^{10}} = 2t$ при $t \leq 5$;
2) $6t - 3 - \sqrt[12]{(3-6t)^{12}} = 0$ при $t > \frac{1}{2}$?

1.65. Решите уравнение:

1) $\sqrt[5]{x^5} = 5$; 2) $\sqrt[4]{x^4} = 1,5$;

3) $\sqrt{x^2} = -3$; 4) $\sqrt{x^2} = -7$;
5) $\sqrt[5]{(x-4)^5} = -1$; 6) $\sqrt[3]{(2+x)^3} = 6$;
7) $\sqrt[4]{x^4} + 6 = 0$; 8) $\sqrt[6]{x^6} + 1 = 0$.

1.66°. Вычислите:

1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{(\frac{1}{25})^2}$;
4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[10]{2^5}$; 6) $\sqrt[4]{(-3)^{12}}$;
7) $\sqrt[4]{(\frac{36}{81})^{16}}$; 8) $\sqrt[4]{3^{12}}$.

Упростите выражение (1.67—1.68).

1.67°. 1) $\sqrt[4]{x^2}$; 2) $\sqrt[16]{a^8}$; 3) $\sqrt[8]{a^4}$;
4) $\sqrt[9]{n^3}$; 5) $\sqrt[6]{4m^2n^4}$; 6) $\sqrt[6]{27x^3y^{12}}$;
7) $\sqrt[4]{625m^8n^4}$; 8) $\sqrt[5]{\frac{243a^{15}b^{10}}{32m^5}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^{12}}{125c^{21}}}$.

1.68. 1) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; 2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$;
3) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$; 4) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$;
5) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$; 6) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2}$.

1.69°. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[3]{(-4)^{24}}$;
4) $\sqrt[6]{(-2,5)^{12}}$; 5) $\sqrt[4]{(-0,5)^{12}}$; 6) $\sqrt[4]{(-0,8)^{16}}$;
7) $\sqrt[3]{(\frac{1}{2})^9}$; 8) $\sqrt[4]{(-\frac{1}{3})^{16}}$; 9) $\sqrt[7]{(-\frac{2}{3})^{34}}$.

1.70. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{6}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$; 3) $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$;
4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-3)}}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-243}}$;
7) $\sqrt[7]{\sqrt{7}}$; 8) $\sqrt[9]{\sqrt{9}}$; 9) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$;
10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$; 11) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 12) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{13}}}}$.

1.71. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$; 3) $\sqrt{\sqrt{256}}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{1024}}$.

1.72. Сравните числа:

- 1) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[6]{24}$; 2) $\sqrt[6]{2}$ и $\sqrt[18]{10}$;
 3) $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[6]{4}$ и $\sqrt[9]{8}$;
 5) $\sqrt[10]{6}$ и $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$ и $\sqrt[4]{3}$.

1.73. Как надо изменить ребро куба объемом 3 м^3 , чтобы получился куб объемом, равным:

- 1) 6 м^3 ; 2) 9 м^3 ; 3) 15 м^3 ; 4) 27 м^3 ?

Решите уравнение (1.74—1.75).

- 1.74°. 1) $\sqrt[5]{x} = -2$; 2) $\sqrt[3]{x} = 2$; 3) $\sqrt[4]{x} = 3$;
 4) $\sqrt[3]{x} + 4 = 0$; 5) $\sqrt[5]{y} - 1 = -2$; 6) $\sqrt[9]{y} + 3 = 4$;

- 1.75. 1) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 0$; 2) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} = 0$;
 3) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$; 4) $\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$;
 5) $\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[10]{x} + 2 = 0$; 6) $\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0$.

1.4 Действия с корнями нечетной степени

Теорема. Пусть n — нечетное число. Тогда:

1) при любых значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad (1)$$

2) при любых значениях a и $b \neq 0$ верно равенство

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad (2)$$

3) при любых значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}. \quad (3)$$

▲ **Доказательство.** Легко убедиться, что выражения, входящие в равенства (1) — (3), имеют смысл. Эти равенства, очевидно, верны при $a = 0$, а равенства (1) и (3) и при $b = 0$. Поэтому доказательства проводятся при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Докажем утверждение 1). Возведем левую и правую части равенства (1) в n -ю степень:

$$(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab;$$

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab$$

(поясните каждое равенство).

Тогда $(\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{ab})^n$ и согласно следствию из п. 1.1 имеем

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \quad \square$$

Тождества (2) и (3) из утверждений 2), 3) теоремы доказываются аналогично (докажите их самостоятельно). ▲

Утверждение 1) теоремы можно сформулировать и так:

! Пусть n — нечетное число. Корень n -й степени из произведения двух чисел равен произведению корней n -й степени из этих чисел.

Такая же теорема верна при любом числе перемножаемых корней (доказывается она совершенно аналогично).

Пусть $n > 1$ — нечетное число. Корень n -й степени из произведения нескольких чисел равен произведению корней n -й степени из этих чисел.

Таким образом, при любых значениях a_1, a_2, \dots, a_k верно равенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}. \quad (4)$$

В частности, полагая в этом равенстве $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$, получим

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \quad (5)$$

Утверждение 2) теоремы можно сформулировать так:

! Пусть n — нечетное число. Корень n -й степени из дроби равен частному от деления корня n -й степени из числителя на корень n -й степени из знаменателя.

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^n b}$ к виду $a \sqrt[n]{b}$ (в утверждении 3) теоремы) называется **вынесением множителя из-под знака корня нечетной степени**.

Преобразование выражения $a \sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^n b}$ называется **внесением множителя под знак корня нечетной степени**.

Заметим, что каждое из равенств (1) — (5) является тождеством.

Пример 1. Найти значение выражения

$$\sqrt[7]{13 + \sqrt{41}} \cdot \sqrt[7]{13 - \sqrt{41}}.$$

Решение. $\sqrt[7]{13 + \sqrt{41}} \cdot \sqrt[7]{13 - \sqrt{41}} = \sqrt[7]{(13 + \sqrt{41})(13 - \sqrt{41})} =$
 $= \sqrt[7]{13^2 - (\sqrt{41})^2} = \sqrt[7]{169 - 41} = \sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2.$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{y^{11}z}$; б) $\sqrt[7]{\frac{b}{y^8} - \frac{a}{y^{14}}}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{y^{11}z} = \sqrt[5]{y^{11}}yz = y^2\sqrt[5]{yz}.$

б) $\sqrt[7]{\frac{b}{y^8} - \frac{a}{y^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{by^6}{y^8y^6} - \frac{a}{y^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{by^6 - a}{y^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{by^6 - a}{y^2}}.$

Пример 3. Внести множитель под знак корня:

а) $5y\sqrt[7]{\frac{2ay}{625}}$; б) $-\frac{2x}{y}\sqrt[5]{-\frac{7y^3}{8x^9}}.$

Решение.

а) $5y\sqrt[7]{\frac{2ay}{625}} = \sqrt[7]{\frac{5^7y^7 \cdot 2ay}{5^4}} = \sqrt[7]{5^3 \cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{125 \cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{250ay^8}.$

б) $-\frac{2x}{y}\sqrt[5]{-\frac{7y^3}{8x^9}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{2x}{y}\right)^5 \left(-\frac{7y^3}{8x^9}\right)} = \sqrt[5]{\frac{-2^5x^5(-7)y^3}{y^52^3x^9}} = \sqrt[5]{\frac{2^2 \cdot 7}{x^4y^2}} =$
 $= \sqrt[5]{\frac{28}{x^4y^2}}.$

▲ **Пример 4.** Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{13}{\sqrt[5]{81}}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}.$

Решение.

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$

б) $\frac{13}{\sqrt[5]{81}} = \frac{13}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{13 \cdot \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3}} = \frac{13\sqrt[5]{3}}{3}.$

в) $\frac{5}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} =$

используем формулу $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; домножим числитель и знаменатель на неполный квадрат разности выражений $\sqrt[3]{6}$ и $\sqrt[3]{4}$, т. е. на $(\sqrt[3]{6})^2 - \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2$:

$$= \frac{5(\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16})}{(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{6 \cdot 4} + \sqrt[3]{4^2})} =$$

$$= \frac{5\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{10} = \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{2}. \blacktriangle$$



1. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени из произведения двух чисел.
2. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени n из произведения $a^n b$.
3. Сформулируйте теорему о корне нечетной степени из дроби.
4. Какое преобразование называется:
 - а) вынесением множителя из-под знака корня нечетной степени;
 - б) внесением множителя под знак корня нечетной степени?
- 5*. Докажите каждое из тождеств (1) — (5).

Упражнения

1.76. Вычислите:

- 1) $\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[5]{4} \sqrt[5]{8}$;
- 3) $\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9}$; 4) $\sqrt[3]{-84} \sqrt[3]{56} \sqrt[3]{-126}$;
- 5) $3\sqrt[3]{36} \sqrt[3]{-6}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{9}} \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$;
- 7) $\sqrt[3]{108} \sqrt[3]{50} \sqrt[3]{40}$; 8) $\sqrt[5]{497} \sqrt[5]{98} \sqrt[5]{16}$;
- 9) $\sqrt[5]{27} \sqrt[5]{36} \sqrt[5]{256}.$

Упростите выражение (1.77—1.78).

1.77. 1) $\sqrt[5]{10 + 2\sqrt{17}} \sqrt[5]{10 - 2\sqrt{17}};$

2) $\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}};$

3) $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}};$

4) $\sqrt[5]{17 - \sqrt{46}} \sqrt[5]{17 + \sqrt{46}}.$

- 1.78. 1) $\frac{1}{2}(2\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{40})\sqrt[3]{25}$;
 2) $4(\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{1125})\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$;
 3) $\frac{4}{3}(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - 5\sqrt[3]{18} + 9\sqrt[3]{\frac{16}{81}})\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$;
 4) $\frac{1}{3}(6\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{32} + 1,8\sqrt[3]{\frac{500}{27}})\sqrt[3]{2}$.

Найдите значение выражения (1.79—1.80).

- 1.79. 1) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-0,1} \cdot \sqrt[3]{0,08}$;
 3) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}}$;
 5) $2\sqrt[3]{\frac{4}{5}} : \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{32}{625}}$; 6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{96} : 3\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$.
- 1.80. 1) $(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$; 2) $(\sqrt[5]{729} + \sqrt[5]{-\frac{1}{81}}) : \sqrt[5]{3}$;
 3) $(3\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{-32} - 15\sqrt[3]{-108}) : 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;
 4) $(3\sqrt[3]{144} - 7\sqrt[3]{-18} + 4\sqrt[3]{-\frac{16}{3}}) : 2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Упростите выражение (1.81—1.83).

- 1.81. 1) $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} \cdot \frac{1}{4}a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}$;
 2) $5\sqrt[3]{\frac{2a^4}{25x^5}} \sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}$;
 3) $\frac{x^2}{a^2}\sqrt[3]{\frac{3a}{x^2} \cdot \frac{1}{a^2x^3}} \sqrt[3]{\frac{x^3}{a^4}}$;
 4) $\frac{b^3}{a}\sqrt[5]{\frac{b^9}{a}} \cdot 4\frac{a^3}{b^3}\sqrt[5]{a^3b} \cdot \frac{1}{8}\frac{a^4}{b}\sqrt[5]{\frac{b^4}{a^3}}$;
 5) $\sqrt[3]{\frac{3x^{-2}y^5}{5x^4y^{-2}}} \sqrt[3]{\left(\frac{6x^{-2}}{5y^3}\right)^{-2}} \sqrt[3]{-120x^5y^2}$;
 6) $\sqrt[3]{\left(\frac{2m^{-3}n}{9m^5n^{-1}}\right)^{-2}} \sqrt[3]{\left(\frac{-3n^{-4}}{4m^{-5}}\right)^{-1}} \sqrt[3]{72m^4n^6}$;
 7) $a\sqrt[5]{a^4b^3}ab^2\sqrt[3]{ab^2}\sqrt[5]{ab^4}a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$;
 8) $b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}}a^2\sqrt[7]{a^5b^2}ab\sqrt[4]{a^4b^7}\sqrt[7]{a^2b^7}$.

- 1.82. 1) $\sqrt[3]{3a^2} : \sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[3]{4a^8} : \sqrt[3]{2a^2}$;
 3) $\sqrt[5]{64a^3} : \sqrt[5]{-2a^{-2}}$; 4) $\sqrt[5]{-27a^4} : \sqrt[5]{-\frac{1}{9}a^3}$;
 5) $\sqrt[5]{-\frac{3a^2}{4}} : \sqrt[5]{\frac{8}{81a^3}}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{25}{a^2}} : \sqrt[3]{\frac{8a}{5}}$.

- 1.83. 1) $(2ab\sqrt[3]{-m^2} - m\sqrt[3]{-b}) : \sqrt[3]{-bm}$;
 2) $(n^2m\sqrt[5]{-n^4m^2} + m\sqrt[5]{-\frac{n^4}{m^3}}) : \sqrt[5]{-\frac{m^2}{n}}$;
 3) $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$;
 4) $(\sqrt[3]{a^2b} - 2\sqrt[3]{2ab^2} + b\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b})$.

1.84. Выполните действия:

- 1) $(\sqrt[3]{a^2})^2$; 2) $(\sqrt[5]{a^2})^3$;
 3) $(-2\sqrt[3]{-2})^5$; 4) $(-2\sqrt[3]{-2})^4$;
 5) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$; 6) $(-a\sqrt[5]{a^3x})^4$;
 7) $(ax^2\sqrt[3]{2ax^2})^4$; 8) $(-\frac{3}{a^2}\sqrt[5]{\frac{2}{a^4}})^3$.

1.85. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) найдите длину высоты CD , если:

- 1) $AD = \sqrt[3]{4}$, $BD = \sqrt[3]{16}$;
 2) $AD = \sqrt[7]{8}$, $BD = \sqrt[7]{16}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (1.86—1.87).

- 1.86. 1) $\sqrt[3]{375}$; 2) $\sqrt[3]{24}$; 3) $\sqrt[3]{-54}$;
 4) $\sqrt[3]{-686}$; 5) $\sqrt[5]{-96}$; 6) $\sqrt[5]{300\,000}$;
 7) $\sqrt[5]{-972}$; 8) $\sqrt[7]{-384}$.

- 1.87. 1) $\sqrt[3]{x^7b}$; 2) $\sqrt[3]{16x^2y^6a^8}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{x^5a^6}{y^{12}b^7}}$;
 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54x^4a^5}$; 5) $\frac{3x}{8}\sqrt[3]{64x^5y^9}$; 6) $\frac{a}{x}\sqrt[5]{\frac{243x^{10}y^7}{1024a^{15}}}$;
 7) $\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^3}-1}$; 8) $\sqrt[5]{-\frac{a}{x^6}+\frac{b}{x^{10}}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^5}-\frac{y}{x^5}}$.

1.88. Внесите множитель под знак корня:

$$\begin{array}{lll} 1) 2x\sqrt[3]{3ax}; & 2) 4xy\sqrt[5]{x}; & 3) \frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}; \\ 4) 2m^2n\sqrt[3]{-\frac{3}{2mn}}; & 5) -\frac{3n}{4m}\sqrt[3]{2mn}; & 6) -\frac{a}{b}\sqrt[5]{-\frac{b^7}{a^8}}; \\ 7) \frac{\sqrt[3]{a^3-a^4}}{a}; & 8) \frac{\sqrt[3]{m^5+1}}{m}. \end{array}$$

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (1.89—1.91).

$$\begin{array}{llll} 1.89^*. 1) \frac{1}{\sqrt[3]{5}}; & 2) \frac{1}{\sqrt[5]{2}}; & 3) \frac{1}{\sqrt[3]{-3}}; & 4) \frac{1}{\sqrt[4]{-2}}; \\ 5) \frac{3}{\sqrt[3]{9}}; & 6) \frac{18}{\sqrt[3]{36}}; & 7) \frac{12}{\sqrt[5]{16}}; & 8) \frac{24}{\sqrt[5]{81}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.90^*. 1) \frac{a}{\sqrt[3]{b}}; & 2) \frac{m}{n\sqrt[3]{m^2}}; & 3) \frac{t^2-1}{\sqrt[3]{t-1}}; \\ 4) \frac{t^4-1}{\sqrt[3]{t^2+1}}; & 5) \frac{2-x}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}; & 6) \frac{4+x}{\sqrt[5]{(4+x)^4}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.91^*. 1) \frac{k}{\sqrt[3]{k^2+\sqrt[3]{k}+1}}; & 2) \frac{k}{\sqrt[3]{k^2-2\sqrt[3]{k}+4}}; \\ 3) \frac{m}{\sqrt[3]{m^2-3}}; & 4) \frac{m}{\sqrt[3]{m+5}}; \\ 5) \frac{15}{\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}}; & 6) \frac{18}{\sqrt[3]{25-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}}; \\ 7) \frac{1}{4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2}+16}; & 8) \frac{1}{9\sqrt[3]{9}+3^3\cdot\sqrt[3]{3}+81}. \end{array}$$

Решите уравнение (1.92—1.93).

$$\begin{array}{ll} 1.92^\circ. 1) \sqrt[3]{4x+1} = -4; & 2) \sqrt[3]{2x+3} = -3; \\ 3) \sqrt[5]{3-3x} = 1; & 4) \sqrt[7]{2x+13} = 2; \\ 5) \sqrt[6]{6+x} = -2; & 6) \sqrt[8]{3x-2} = -1; \\ 7) \sqrt[3]{x^2+14x-16} = -4; & 8) \sqrt[3]{4x-50+x^2} = 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.93. 1) \sqrt[5]{5x+1} = \sqrt[5]{2x+10}; & 2) \sqrt[7]{4+x} = \sqrt[7]{2x+12}; \\ 3) 3\sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x-5}; & 4) \sqrt[3]{7x+1} = 2\sqrt[3]{x+4}; \\ 5) \sqrt[3]{3x+8} = \sqrt[3]{x^2-2}; & 6) \sqrt[7]{x+2} \cdot \sqrt[7]{4x-5} = \sqrt[7]{-3}. \end{array}$$

1.5. Действия с корнями четной степени

Теорема. Пусть n — четное число. Тогда:

1) при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \quad (1)$$

2) при любых неотрицательных значениях a и положительных значениях b верно равенство

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad (2)$$

3) при любых значениях a и неотрицательных значениях b верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b}. \quad (3)$$

Доказательство. Легко убедиться, что выражения, входящие в равенство (1) — (3), имеют смысл. Эти равенства, очевидно, верны при $a=0$, а равенства (1) и (3) и при $b=0$. Поэтому доказательства проводятся при $a>0$ и $b>0$.

Докажем утверждение 3). При любых значениях a и $b \geq 0$ числа $\sqrt[n]{a^n b}$ и $|a| \sqrt[n]{b}$ неотрицательные (объясните почему).

Возведя левую и правую части равенства (3) в n -ю степень, получим

$$a^n b = |a|^n b.$$

Это верное числовое равенство, поскольку n — четное число, и поэтому $a^n = |a|^n$. Согласно следствию из п.1.1 верно и равенство

$$\sqrt[n]{a^n b} = |a| \sqrt[n]{b}. \quad \square$$

Утверждения 1), 2) доказываются аналогично. Докажите равенства (1) и (2) самостоятельно.

Утверждение 1) теоремы можно сформулировать и так:



Пусть n — четное число. Корень n -й степени из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n -й степени из этих чисел.

Такая же теорема верна при любом числе перемножаемых корней.

Пусть $n \geq 2$ — четное число. Корень n -й степени из произведения нескольких неотрицательных чисел равен произведению корней n -й степени из этих чисел.

Таким образом, для любых неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_k верно равенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}. \quad (4)$$

В частности, полагая в этом тождестве $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$, получим

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \quad (5)$$

Утверждение 2) теоремы можно сформулировать и так:



Пусть n — четное число. Корень n -й степени из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления корня n -й степени из числителя на корень n -й степени из знаменателя.

Доказывается эта теорема аналогично доказательству равенства (3).

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^n b}$ к виду $|a| \sqrt[n]{b}$ (в утверждении 3) теоремы) называется **вынесением множителя из-под знака корня четной степени**.

Преобразование выражения $|a| \sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^n b}$ называется **внесением множителя под знак корня четной степени**.

Заметим, что каждое из равенств (1) — (5), рассматриваемых в этом пункте, является тождеством.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\text{а) } \sqrt{mx^{14}}; \quad \text{б) } \sqrt[6]{\frac{256}{y^{13}}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{\frac{64n^8}{x^{12}}}.$$

Решение.

$$\text{а) } \sqrt{mx^{14}} = |x^7| \sqrt{m}.$$

$$\text{б) } \sqrt[6]{\frac{256}{y^{13}}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{y^{12}y}} = \left| \frac{2}{y^2} \right| \sqrt[6]{\frac{4}{y}} = \frac{2}{y^2} \sqrt[6]{\frac{4}{y}}.$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{\frac{64n^8}{x^{12}}} = \sqrt[4]{\frac{2^6 n^8}{x^{12}}} = \left| \frac{2n^2}{x^3} \right| \sqrt[4]{2^2} = \frac{2n^2}{|x^3|} \sqrt[4]{4}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение корней выражение \sqrt{ab} при $a < 0$ и $b < 0$.

Решение. $\sqrt{ab} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{-a} \sqrt{-b}$.



Можно было бы, например, записать и так:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(-2a)\left(-\frac{b}{2}\right)} = \sqrt{-2a} \sqrt{-\frac{b}{2}}.$$

Или так:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}a\right)\left(-\frac{7}{3}b\right)} = \sqrt{-\frac{3}{7}a} \sqrt{-\frac{7}{3}b} \text{ и т. д.}$$

Пример 3. Внести множитель под знак корня:

$$\text{а) } p\sqrt[6]{7} \text{ при } p < 0; \quad \text{б) } p\sqrt[6]{7} \text{ при } p > 0.$$

Решение.

$$\text{а) Так как } p < 0, \text{ то } p\sqrt[6]{7} < 0, \text{ значит,}$$

$$p\sqrt[6]{7} = -(-p)\sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{(-p)^6 \cdot 7} = -\sqrt[6]{7p^6}.$$

$$\text{б) Так как } p > 0, \text{ то } p\sqrt[6]{7} > 0, \text{ значит,}$$

$$p\sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{7p^6}.$$

Пример 4. Упростить выражение:

$$\text{а) } \sqrt[4]{7 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{33}}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}.$$

$$\text{Решение. а) } \sqrt[4]{7 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7 + \sqrt{33}} = \sqrt[4]{(7 - \sqrt{33})(7 + \sqrt{33})} = \sqrt[4]{7^2 - (\sqrt{33})^2} = \sqrt[4]{49 - 33} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3 - 2\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{((1 - \sqrt{2})^2)^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1.$$

Пример 5. Упростить выражение

$$\sqrt[10]{(\sqrt{2} - 3)^2} \cdot \sqrt[10]{(\sqrt{2} - 3)^8}.$$

Решение.

$$\sqrt[10]{(\sqrt{2} - 3)^2} \cdot \sqrt[10]{(\sqrt{2} - 3)^8} = \sqrt[10]{(\sqrt{2} - 3)^{10}} = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}.$$

▲ **Пример 6.** Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$; б) $\frac{8}{\sqrt[6]{500}-\sqrt[3]{2}}$.

Решение. а) $\frac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{4}} =$
 $= \frac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}}{2}.$

б) $\frac{8}{\sqrt[6]{500}-\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[6]{5 \cdot 100}-\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[6]{10^2}-\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[6]{5^2-1})} =$
 $= \frac{8(\sqrt{5}+1)}{\sqrt[3]{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+1) \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[3]{4}(\sqrt{5}+1). \blacktriangle$

Пример 7. Решить уравнение:

а) $\sqrt[8]{2x-7} = -1$; б) $\sqrt[4]{4x+19} = 2$.

Решение. а) Уравнение $\sqrt[8]{2x-7} = -1$ не имеет решений, так как арифметический корень четной степени не может быть отрицательным числом.

б) По определению арифметического корня четвертой степени получим, что уравнение $\sqrt[4]{4x+19} = 2$ равносильно уравнению $4x+19=2^4$, откуда $x = -0,75$.

Ответ: а) решений нет; б) $-0,75$.



1. Сформулируйте теорему о корне четной степени из произведения двух неотрицательных чисел (нескольких неотрицательных чисел).
2. Сформулируйте теорему о корне четной степени n из произведения $a^n b$.
3. Сформулируйте теорему о корне четной степени из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем.
4. Какое преобразование называется:
 - а) вынесением множителя из-под знака корня четной степени;
 - б) внесением множителя под знак корня четной степени?

5*. Докажите каждое из тождеств (1) — (5).

Упражнения

Найдите значение выражения (1.94—1.95).

1.94°. 1) $\sqrt{4 \cdot 81}$; 2) $\sqrt{36 \cdot 625}$; 3) $\sqrt{75 \cdot 27}$;
 4) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 5) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; 6) $\sqrt[4]{16 \cdot 0,0001}$;
 7) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; 8) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}}$.

1.95°. 1) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 100}$; 2) $\sqrt{64 \cdot 81 \cdot 225}$;
 3) $\sqrt{256 \cdot 0,0016 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^8}$;
 5) $\sqrt[4]{1,5^4 \cdot 4^8 \cdot 0,01^4}$; 6) $\sqrt[10]{(\frac{2}{3})^{10} (\frac{3}{8})^{10} 4^{10}}$.

1.96°. Упростите выражение:

1) $\sqrt{3^6}$; 2) $\sqrt{7^4}$; 3) $\sqrt[4]{5^{12}}$;
 4) $\sqrt[4]{6^8}$; 5) $\sqrt{25a^2}$; 6) $\sqrt{49x^4}$;
 7) $\sqrt[4]{1296b^4}$; 8) $\sqrt[6]{64c^{12}}$; 9) $\sqrt[4]{a^8 b^{12}}$;
 10) $\sqrt[4]{a^{16} c^4}$; 11) $\sqrt[4]{81x^8 y^{12}}$; 12) $\sqrt[6]{729x^6 y^{12}}$.

1.97. Упростите выражение ($m \in \mathbb{Z}$):

1) $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6 c^{4m}}$; 2) $\sqrt{1\frac{11}{25}a^4 b^{10m}}$;
 3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8m} b^{16}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{625}a^{12} b^{8m}}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (1.98—1.99).

1.98°. 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{175}$;
 4) $\sqrt{128}$; 5) $\sqrt[4]{243}$; 6) $\sqrt[4]{1250}$;
 7) $\sqrt[6]{1458}$; 8) $\sqrt[6]{320}$; 9) $\sqrt{\frac{50}{49}}$;
 10) $\sqrt{\frac{7}{48}}$; 11) $\sqrt{11\frac{11}{120}}$; 12) $\sqrt[4]{1\frac{47}{81}}$.

1.99°. 1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt{ax^6}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{a^5}{81}}$;
 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{x^9}}$; 5) $14\sqrt{\frac{5a^3}{98}}$; 6) $\frac{3x}{8}\sqrt[4]{32x^5 y^8}$;
 7) $\frac{3}{4a}\sqrt[4]{\frac{32a^3 b^6}{243x^4 y^7}}$; 8) $\frac{2c}{3}\sqrt[4]{81c^6 m^5}$.

1.100°. Внесите множитель под знак корня:

- 1) $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{6}$;
 5) $2a\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$, где $a > 0$; 6) $2xy\sqrt[6]{\frac{x}{y^2}}$, где $y > 0$;
 7) $n^2\sqrt[10]{\frac{2}{n^5}}$; 8) $\frac{ab}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3b^2}}$, где $b > 0$.

1.101. Вынесите множитель из-под знака корня:

- 1) $\sqrt{-t^3}$; 2) $\sqrt[4]{-t^{11}}$; 3) $\sqrt{m^4n^5}$; 4) $\sqrt{m^5n^{10}}$;
 5) $\sqrt{16m^2n}$, где $m < 0$; 6) $\sqrt{64m^2n^3}$, где $m > 0$;
 7) $\sqrt{m^5n^{10}}$, где $m > 0$; 8) $\sqrt[4]{81m^5n^4}$, где $n < 0$;
 9) $\sqrt{m^3n^3}$; 10) $\sqrt[4]{m^5n^5}$;
 11) $\sqrt[4]{m^6n^8}$, где $m < 0$;
 12) $\sqrt{m^2n^2t}$, где $m > 0, n < 0$;

1.102*. Внесите множитель под знак корня:

- 1) $m\sqrt{5}$, где $m < 0$; 2) $m\sqrt{-m}$;
 3) $m\sqrt[4]{m-2}$; 4) $m\sqrt[4]{n}$, где $m < 0$;
 5) $m\sqrt[4]{5}$, где $m < 0$; 6) $m\sqrt[6]{3}$;
 7) $(m+4)\sqrt[4]{\frac{1}{m+4}}$; 8) $(m-4)\sqrt{\frac{2}{1-m}}$.

1.103°. Вычислите:

- 1) $\sqrt[8]{9^4}$; 2) $\sqrt[12]{27^4}$; 3) $\sqrt[6]{16^3}$;
 4) $\sqrt[8]{1,69^4}$; 5) $\sqrt[16]{1296^4}$; 6) $\sqrt[6]{\left(\frac{49}{16}\right)^3}$;
 7) $\sqrt[12]{\left(\frac{125}{81}\right)^4}$; 8) $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{121}\right)^2}$; 9) $\sqrt[8]{\left(\frac{10000}{256}\right)^2}$.

1.104. Выполните действия:

- 1) $\left(\sqrt[12]{\frac{m^5}{n^4}}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[4]{\frac{11}{x^2y^4}}\right)^8$;
 3) $\left(\sqrt[16]{\frac{a^5}{b^6}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt[8]{\frac{16}{a^2b^3}}\right)^4$.

1.105*. Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$;

- 3) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;
 5) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; 6) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (1.106—1.109).

- 1.106*. 1) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$;
 4) $\frac{5}{\sqrt[6]{125}}$; 5) $-\frac{4}{\sqrt{12}}$; 6) $-\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$;
 7) $\frac{6}{5\sqrt[4]{32}}$; 8) $\frac{9}{4\sqrt[8]{64}}$; 9) $\frac{3}{7\sqrt[6]{81}}$.

- 1.107*. 1) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; 2) $\frac{a+b}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[4]{a-b}}$;
 4) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[6]{(a+b)^5}}$; 5) $\frac{a^2+b^2}{\sqrt[8]{a^4+2a^2b^2+b^4}}$; 6) $\frac{a^4-b^4}{\sqrt[8]{(a^2-2ab+b^2)^3}}$.

- 1.108*. 1) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{1-\sqrt{6}}$;
 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{7}-7}$;
 5) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 6) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;
 7) $\frac{243}{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^4}$; 8) $\frac{16}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})^4}$;
 9) $\frac{26}{2-\sqrt[4]{3}}$; 10) $\frac{9}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$.

- 1.109*. 1) $\frac{33}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$;
 3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$;
 5) $\frac{4}{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{10}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$;
 7) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}$; 8) $\frac{1}{2+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}$.

1.110*. 1) При каких значениях t верно равенство:

- 1) $\sqrt[6]{t^6} = -t$; 2) $\sqrt[4]{t^4} = t$;
 3) $\sqrt[4]{t^4} = |t|$; 4) $t\sqrt[8]{5} = \sqrt[8]{5t^8}$;
 5) $t\sqrt[4]{16 \cdot 0,0001} = -0,2\sqrt[4]{t^4}$; 6) $t\sqrt[4]{4} = -\sqrt[4]{4t^4}$?

1.111*. При каких значениях k верно равенство:

- 1) $\sqrt[10]{(k-4)^2} = \sqrt[5]{k-4}$;
- 2) $\sqrt[8]{(2-3k)^4} = \sqrt{2-3k}$;
- 3) $\sqrt{k-2} \cdot \sqrt{k+1} = \sqrt{(k-2)(k+1)}$;
- 4) $\sqrt[4]{\frac{k+4}{k-2}} = \frac{\sqrt[4]{-k-4}}{\sqrt[4]{2-k}}$?

Решите уравнение (1.112—1.115).

- 1.112°. 1) $\sqrt{4x+1} = 0$; 2) $\sqrt[4]{2x+3} = 0$;
 3) $\sqrt[4]{4x+1} = -4$; 4) $\sqrt{2x+3} = -3$;
 5) $\sqrt{4x+1} = 4$; 6) $\sqrt{2x+3} = 3$;
 7) $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$; 8) $\sqrt{3x-5x^2+23} = 3$.
- 1.113. 1) $\sqrt[4]{x^2-36} = \sqrt[4]{2x-1}$; 2) $\sqrt[8]{8-5x} = \sqrt[8]{x^2-16}$;
 3) $\sqrt{4x+1} = \sqrt{x^2+3x-1}$; 4) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x^2+x-1}$;
 5) $\sqrt{1+\sqrt{x+38}} = 3$; 6) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2$.
- 1.114. 1) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} = 10$;
 2) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} = 5$;
 3) $\sqrt{2x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{2x-3}$;
 4) $\sqrt[4]{3x+4} - \sqrt[8]{3x+4} - 2 = 0$.
- 1.115. 1) $\sqrt{x+2+\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}-2x} = \sqrt[4]{5}$;
 3) $\sqrt[6]{2x-1+6\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{x-1-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$;
 5) $\sqrt{x-5-2\sqrt{10}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$;
 6) $\sqrt{2\sqrt{14}-3x} = \sqrt{7}+\sqrt{2}$.

1.6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Определение. Геометрическая прогрессия со знаменателем q , удовлетворяющим условию $|q| < 1$, называется **бесконечно убывающей**.

Приведем примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий.

Пример 1. Последовательность

$$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \dots, \frac{2}{3^{n-1}}, \dots$$

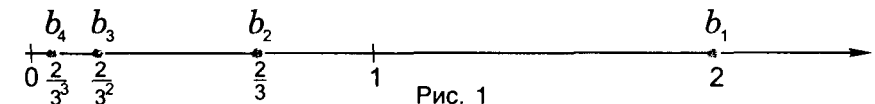
является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 2$ и знаменателем $q = \frac{1}{3}$.

Пример 2. Последовательность

$$-4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{(-2)^{n-2}}, \dots$$

является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = -4$ и знаменателем $q = -\frac{1}{2}$ (здесь $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$).

Изобразим четыре первых члена геометрической прогрессии из примера 1 на координатной прямой (рис. 1).

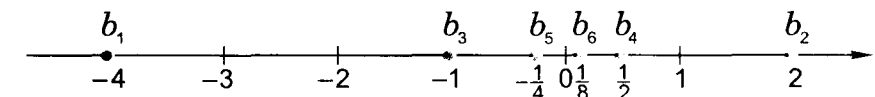


Мы видим, что, чем больше номер члена прогрессии, тем ближе этот член к нулю, т. е. тем меньше его модуль, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.

Например, если мы зададим число 0,01, то

$$\left|\frac{2}{3^n}\right| = \left|\frac{2}{243}\right| < 0,01 \text{ и } \left|\frac{2}{3^{n-1}}\right| \leq 0,01 \text{ при любом } n \geq 6.$$

Изобразим 6 первых членов геометрической прогрессии из примера 2 на координатной прямой (рис. 2).



И в этом примере мы видим, что, чем больше номер члена прогрессии, тем ближе этот член к нулю, т. е. тем меньше его модуль, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.

Например, если мы зададим число 0,001, то

$$\left| \frac{1}{(-2)^{10}} \right| = \frac{1}{1024} < 0,001 \text{ и } \left| \frac{1}{(-2)^{n-2}} \right| < 0,01 \text{ при любом } n \geq 12.$$



Такую же картину, как и в этих двух примерах, мы наблюдаем в любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n): чем больше номер n члена прогрессии (b_n), тем меньше $|b^n|$, и с увеличением n этот модуль становится меньше любого заданного положительного числа.

Это утверждение формулируется еще и так:



b_n стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

Заметим, что если $|q| < 1$, то $|q^n|$ стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q .

Запишем по формуле сумму первых n членов этой прогрессии и преобразуем это выражение:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Обозначим

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Тогда получим

$$|S - S_n| = \left| \frac{b_1}{1-q} - \left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n \right) \right| = \left| \frac{b_1}{1-q} \right| \cdot |q|^n.$$

Так как $|q| < 1$, то $\left| \frac{b_1}{1-q} \right| \cdot |q|^n$ стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности. Значит, $|S - S_n|$ стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности, т. е. чем больше число n (чем больше слагаемых в сумме S_n), тем меньше разница между S и S_n . Поэтому число S называют **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии**.

Пример 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \dots, \frac{2}{3^{n-1}}, \dots$;

б) $-4, 2, -1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{(-2)^{n-2}}, \dots$.

Решение.

а) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$

б) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = \frac{-4 \cdot 2}{1} = \frac{-8}{1} = -8.$

Ответ: а) $S = 3$; б) $S = -8$.



1. Какая геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей?
2. Как понимать утверждение « b_n стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности»?
3. Как найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

Упражнения

1.116. Докажите, что данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$;

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;

3) $-81, -27, -9, \dots$;

4) $-125, -25, -5, \dots$;

5) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$;

6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots$.

1.117. Является ли геометрическая прогрессия (b_n) бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:

1) $b_1 = 80$ и $b_{10} = -40$;

2) $b_7 = 24$ и $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_5 = 30$ и $b_4 = 15$;

4) $b_6 = -9$ и $b_{12} = \frac{1}{27}$;

5) $b_3 = 0,01$ и $b_8 = -10$;

6) $b_9 = -0,04$ и $b_{13} = -0,64$;

7) $b_{20} = \frac{1}{9}$ и $b_{19} = \frac{1}{3}$;

8) $b_{22} = -\frac{1}{16}$ и $b_{21} = \frac{1}{8}$?

Найдите сумму S бесконечно убывающей геометрической прогрессии (1.118—1.119).

- 1.118. 1) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \dots$; 2) $5; 1; \frac{1}{5}; \dots$;
 3) $-49; -7; -1; \dots$; 4) $-8; -1; -\frac{1}{8}; \dots$;
 5) $\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$; 6) $-1; \frac{1}{6}; -\frac{1}{36}; \dots$.

- 1.119. 1) $3\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}; \dots$;
 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}; \dots$;
 3) $\sqrt{5}; \sqrt{\frac{1}{5}}; \frac{1}{25}\sqrt{5}; \dots$;
 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}; 1; \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}; \dots$.

1.120. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , если:

- 1) $b_3 = \frac{1}{8}, q = \frac{1}{2}$; 2) $b_5 = \frac{1}{9}, q = \frac{1}{3}$;
 3) $b_7 = \frac{1}{81}, q = \frac{1}{3}$; 4) $b_6 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$;
 5) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, q = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $b_1 = \sqrt{2}, q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.121. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , если:

- 1) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; 2) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;
 3) $b_n = \frac{6}{2^{n-1}}$; 4) $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$.

1.122. Число 150 является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) . Задайте прогрессию формулой n -го члена, если:

- 1) $q = \frac{1}{5}$; 2) $q = -\frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 75$; 4) $b_1 = 50$.

1.123*. Числовая последовательность (b_n) задана рекуррентной формулой. Верно ли, что (b_n) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если:

- 1) $b_{n+1} = \frac{7}{2}b_n$; 2) $b_n = \frac{3}{4}b_{n-1}$;
 3) $b_n = 3^{-1}b_{n-1}$; 4) $b_n = 7b_{n-3}$.

1.124*. Найдите сумму:

1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \dots$; 2) $\frac{3}{7} + 1 + \frac{9}{49} - \frac{1}{3} + \frac{27}{243} + \frac{1}{9} + \dots$.

1.125. 1) Дан квадрат с диагональю, равной a . Сторона квадрата является диагональю второго квадрата, сторона второго квадрата — диагональю нового квадрата и т. д. Найдите сумму площадей всех квадратов.

2) В круг, радиус которого равен R , вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. Найдите сумму площадей всех кругов и сумму площадей всех квадратов.

1.7. Периодические дроби

Каждое рациональное число является действительным числом, а поэтому может быть записано в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной. Хорошо известно, как это делается, когда $\frac{k}{n}$ — несократимая дробь ($k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$), знаменатель которой не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5; в этом случае числитель делят на знаменатель и получают конечную десятичную дробь. Например,

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{371}{125} = 2,968; \quad \frac{7}{80} = 0,0875.$$

Применим теперь этот метод обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{19}{11}$. Для этого разделим 19,000... на 11:

$$\begin{array}{r} 19 | 11 \\ 11 | 1,7272... \\ \hline 80 \\ 77 \\ \hline 30 \\ 22 \\ \hline 80 \\ 77 \\ \hline 30 \\ 22 \\ \hline 8 \end{array}$$

Таким образом, $\frac{19}{11} = 1,7272\dots$

Бесконечная дробь, стоящая в правой части этого равенства, содержит периодически повторяющуюся группу цифр 72. Эта группа цифр называется **периодом дроби**, а сама дробь — **периодической**. При записи таких дробей период заключают в скобки и пишут один раз:

$$\frac{19}{11} = 1,(72).$$

(Читается: «Одна целая, семьдесят два в периоде».)

Еще один пример: $\frac{19}{22} = 0,86363\dots = 0,8(63)$.

(Читается: «Ноль целых, восемь десятых, шестьдесят три в периоде».)

Приписывая к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы получаем бесконечную десятичную дробь. Поэтому конечные десятичные дроби тоже считаются периодическими с периодом 0. (При делении двух натуральных чисел не могут получиться дроби с числом 9 в периоде, поэтому их не рассматривают.)

Приведенные примеры дают возможность догадаться, что



каждое рациональное число записывается в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Чтобы в этом убедиться, заметим, что для обращения обыкновенной дроби $\frac{19}{11}$ в десятичную мы на каждом шаге остаток от деления (он был равен либо 8, либо 3) умножали на 10 и делили на 11. Но при делении на 11 вообще возможны лишь 11 различных остатков. Значит, на каком-то шаге остаток **обязательно** повторится (в нашем примере это случилось на третьем шаге), и поэтому в результате деления должна получиться периодическая дробь.



Наоборот, каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Каждую периодическую десятичную дробь можно рассматривать либо как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, либо как сумму конечной десятичной дроби и сумму бес-

конечно убывающей геометрической прогрессии. Это позволяет представлять периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей.

Пример 1. Обратить в обыкновенную дробь число:

а) $0,(7)$; б) $3,4(12)$.

Решение. а) $0,(7) = 0,7777\dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots = 0,7 + 0,7 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,01 + 0,7 \cdot 0,001 + \dots = 0,7 + 0,7 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1^2 + 0,7 \cdot 0,1^3 + \dots$

Таким образом, число $0,(7)$ есть S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) , где $b_1 = 0,7$, $q = 0,1$ ($|q| < 1$).

$$\text{Значит, } 0,(7) = S = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}.$$

б) $3,4(12) = 3,412121212\dots = 3,4 + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + 0,000000012 + \dots = 3,4 + (0,012 + 0,012 \cdot 0,01 + 0,012 \cdot 0,01^2 + 0,012 \cdot 0,01^3 + \dots)$.

Сумму, стоящую в скобках, обозначим буквой S . Тогда $S = 0,0(12)$ — есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 0,012$ и знаменателем $q = 0,01$.

Найдем S :

$$S = 0,0(12) = \frac{0,012}{1-0,01} = \frac{0,012}{0,99} = \frac{12}{990} = \frac{4}{330} = \frac{2}{165}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} 3,4(12) &= 3,4 + 0,0(12) = 3,4 + \frac{2}{165} = 3 + \frac{2}{5} + \frac{2}{165} = \\ &= 3 + \frac{2 \cdot 33 + 2 \cdot 1}{165} = 3 + \frac{68}{165} = 3 \frac{68}{165}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $0,(7) = \frac{7}{9}$; б) $3,4(12) = 3 \frac{68}{165}$.



Изучением периодических дробей занимался великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855). Уже в детстве он делил единицу на все подряд простые числа p из первой тысячи. При этом Гаусс подметил, что, начиная с какого-то места, десятичные знаки начинают повторяться, т. е. получаются периодические десятичные дроби. А периоды некоторых дробей достигали нескольких сотен

десятичных знаков. Рассматривая эти примеры, Гаусс установил, что число цифр в периоде всегда является делителем числа $p - 1$.

Пример 2. Найти значение выражения:

а) $3,(7) + 4,(3)$;

б) $\frac{3,4(12) - 3,4(11)}{1,(12)}$.

Решение. Используем результаты примера 1 (или правило обращения периодической дроби в обыкновенную):

а) $3,(7) + 4,(3) = 3\frac{7}{9} + 4\frac{3}{9} = 7\frac{10}{9} = 8\frac{1}{9}$.

б) $\frac{3,4(12) - 3,4(11)}{1,(12)} = \frac{3,4 + \frac{12}{990} - 3,4 - \frac{11}{990}}{1 + \frac{12}{99}} = \frac{1}{990} : \frac{111}{99} = \frac{1 \cdot 99}{990 \cdot 111} = \frac{1}{1110}$.

Ответ: а) $8\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{1110}$.



1. Какое число называют рациональным?
2. Как обыкновенную дробь переводят в десятичную?
3. Что называется периодом в записи периодической десятичной дроби?
4. Как связаны периодическая десятичная дробь и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия?

Упражнения

1.126°. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа:

- 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$;
4) $\frac{3}{7}$; 5) $\frac{5}{13}$; 6) $\frac{9}{23}$.

1.127°. Разделите «уголком» число 1 на:

- 1) 9; 2) 99; 3) 999;
4) 9999; 5) 99 999; 6) 999 999.

1.128*. Докажите, что:

$$\frac{1}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ раз}}} = \frac{0,(00\dots 01)}{n-1 \text{ раз}}$$

1.129°. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной:

- 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{44}{99}$;
4) $\frac{77}{99}$; 5) $\frac{55555}{99999}$; 6) $\frac{444444}{999999}$.

1.130. Представьте число в виде обыкновенной дроби:

- 1) 6,(11); 7) 0,(423);
2) 3,(24); 5) 8,23(41);
3) 17,4(7); 6) 9,12(47);
4) 31,5(4); 8) 0,(451).

Выполните действия (**1.131—1.132**).

- 1.131.** 1) $0,(23) + 0,(43)$;
2) $2,2(7) - 0,47(2)$;
3) $5,0(8) - 4,1(6)$;
4) $0,42(6) + 0,12(3)$.

- 1.132.** 1) $\frac{0,8(3) - 0,4(6)}{1,8(3)}$;
2) $(10,(6) - 5,(3)) : 3,(3)$;
3) $\frac{(0,(6) + 0,(3)) : 0,25}{0,12(3) : 0,0925}$;
4) $\frac{(1,25 : 0,(18) - 1,25 : 0,(8)) : 0,3(8)}{5,(3) + 0,291(6)}$.

1.133*. Докажите, что сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей также является периодической десятичной дробью.

1.8. Степень с рациональным показателем

Напомним, что каждое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{k}{n}$, где знаменатель n — натуральное число, а числитель k — целое число.

Определение. Пусть k — целое число, n — натуральное число, не равное 1. Степенью положительного числа a с рациональным показателем $\frac{k}{n}$ (обозначается $a^{\frac{k}{n}}$) называется положительный корень n -й степени из числа a^k .

Таким образом,

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Степень с рациональным показателем определяется и для основания, равного нулю ($a=0$), но только тогда, когда показатель положительный.

Для $\frac{k}{n} > 0$ полагаем $0^{\frac{k}{n}} = 0$.

Приведем несколько примеров преобразования степеней с рациональными показателями:

$$\text{а) } 243^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{243^3} = \sqrt[5]{(3^5)^3} = \sqrt[5]{3^{15}} = 3^3 = 27;$$

$$\text{б) } 243^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{243^3} = \sqrt[7]{3^{15}} = \sqrt[7]{(3^2)^7 \cdot 3} = 9\sqrt[7]{3};$$

$$\text{в) } 243^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{243^{-3}} = \sqrt[4]{3^{-15}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^{15}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{3^{16}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{(3^4)^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3^4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{81}.$$



Выражения $(-2)^{\frac{1}{3}}$, $(-243)^{\frac{3}{5}}$, $(-16)^{\frac{2}{3}}$ не имеют смысла, так как по определению основание степени с рациональным показателем может быть только неотрицательным.

Поскольку рациональное число представимо в виде дроби неоднозначно, то возникает вопрос: не зависит ли определение степени с рациональным показателем от вида этой дроби? Например, верно ли равенство

$$5^{-\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{14}{21}}?$$

На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 1. Для любого положительного значения a при любом натуральном l верно равенство

$$a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{kl}{nl}}.$$

Доказательство. Преобразуем правую часть этого равенства, используя определение степени с рациональным показателем, а также свойства степеней и корней:

$$a^{\frac{kl}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{kl}} = \sqrt[nl]{(a^k)^l} = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}. \quad \square$$

Возникает вопрос: если, например, вычислить 2^5 , пользуясь определением степени с целым показателем, и вычислить $2^{\frac{15}{3}}$, пользуясь определением степени с рациональным показателем, то получим ли мы одно и то же число?

На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. Для любого положительного значения a при любом натуральном $p > 1$ и целом k верно равенство

$$a^{\frac{kp}{p}} = a^k.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть этого равенства, пользуясь определением степени с рациональным показателем, а также свойствами степеней и корней:

$$a^{\frac{kp}{p}} = \sqrt[p]{a^{kp}} = \sqrt[p]{(a^k)^p} = a^k. \quad \square$$



1. Сформулируйте определение степени с рациональным показателем.
- 2*. Почему нельзя определить степень с рациональным показателем для отрицательного основания?

Упражнения

1.134°. Запишите корни в виде степени с рациональным показателем:

$$1) \sqrt{x^5}; \quad 2) \sqrt[3]{x^4}; \quad 3) \sqrt[3]{b^2}; \quad 4) \sqrt[7]{c^{-3}};$$

- 5) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; 6) $\sqrt[4]{xy^3}$; 7) $\sqrt[4]{a^3b^{-2}}$;
 8) $\sqrt[5]{a^{-3}b^4}$; 9) $\sqrt{(a+b)^{-1}}$; 10) $\sqrt[3]{(m-n)^{-2}}$;
 11) $\sqrt{a^2+b^2}$; 12) $\sqrt[7]{a^4-b^3}$.

1.135°. Замените степень с рациональным показателем корнем:

- 1) $x^{\frac{1}{6}}$, $y^{\frac{2}{7}}$, $(3a)^{\frac{2}{3}}$, $(2b)^{\frac{5}{4}}$, $5t^{-\frac{1}{2}}$, $8d^{-\frac{2}{9}}$;
 2) $2a^{20,2}$, $4a^{3,5}$, $a^{-0,3}$, $a^{-0,6}$, $(9a)^{-20,3}$, $(5a)^{-1,5}$;
 3) $(m+n)^{\frac{1}{5}}$, $(m^2+n^2)^{\frac{3}{4}}$, $(m^3+n^3)^{-\frac{5}{4}}$, $(m+2n)^{-\frac{2}{3}}$,
 $-(m+n)^{-\frac{1}{2}}$, $6(m+n)^{-\frac{4}{5}}$;
 4) $(c^2-d^2)^{4,7}$, $(c^2+d^2)^{5,4}$, $(c-d)^{-0,7}$, $(c^3-d^3)^{-0,9}$,
 $-(c+3d)^{-6,2}$, $-(c-2d)^{-7,3}$.

1.136°. Вычислите:

- 1) $4^{\frac{1}{2}}$, $64^{\frac{3}{2}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{\frac{5}{4}}$, $-27^{\frac{1}{3}}$, $-125^{\frac{4}{3}}$;
 2) $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$, $(1\frac{61}{64})^{\frac{2}{3}}$, $-(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}$, $-(2\frac{10}{27})^{\frac{1}{3}}$, $(6\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$, $(7\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}$;
 3) $1,44^{-\frac{1}{2}}$, $0,81^{-\frac{1}{2}}$, $0,00001^{-\frac{1}{5}}$, $0,0016^{-\frac{1}{4}}$, $-0,027^{\frac{2}{3}}$,
 $-0,0625^{-\frac{1}{4}}$;
 4) $16^{-0,25}$, $10\,000^{-0,75}$, $169^{-0,5}$, $9^{-1,5}$, $1024^{0,6}$, $625^{0,75}$.

1.137°. Имеет ли смысл выражение:

- 1) $7^{\frac{3}{4}}$; 2) $(-27)^{\frac{2}{3}}$; 3) $21^{\frac{3}{2}}$;
 4) $0^{\frac{3}{4}}$; 5) $0^{\frac{4}{5}}$; 6) $(-16)^{-\frac{1}{4}}$;
 7) $(-64)^{-\frac{4}{3}}$; 8) $(-81)^{-\frac{3}{4}}$; 9) $-625^{\frac{3}{4}}$?

Вычислите (1.138—1.141).

- 1.138°. 1) $(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{27}{8})^{-\frac{1}{3}}$; 2) $(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}} - (1\frac{61}{64})^{-\frac{2}{3}}$;
 3) $0,64^{0,5} \cdot 0,027^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{-0,75} : 1024^{-0,6}$;

- 5) $8^{\frac{1}{3}} : 2^{-1}$; 6) $4^{-1} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$;
 7) $(-3)^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; 8) $(-64)^{-\frac{2}{3}} \cdot (\frac{4}{9})^{-0,5}$.

- 1.139°. 1) $\frac{3}{4} - (\frac{2}{3})^{-1}$; 2) $27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1}$;
 3) $(\frac{64}{81})^{-\frac{1}{2}} : (\frac{1}{5})^{-1}$; 4) $(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}} \cdot (\frac{9}{16})^{-0,5}$;
 5) $(125^{-1} \cdot \frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}$; 6) $0,01^{-1} : 100^{-\frac{1}{2}}$.

- 1.140°. 1) $8^{\frac{2}{3}} - 256^{\frac{1}{8}} + 27^{\frac{1}{3}}$;
 2) $25^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{4}} + 81^{\frac{3}{4}}$;
 3) $16^{0,5} + (\frac{1}{16})^{-0,75} - (-\frac{1}{2})^{-6}$;
 4) $9^{-0,5} - 8^{-\frac{1}{3}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$;
 5) $0,0625^{-0,75} - (1\frac{61}{64})^{\frac{2}{3}} + 0,027^{\frac{1}{3}}$;
 6) $16^{0,5} - (\frac{1}{16})^{-0,75} + (-\frac{1}{2})^{-4}$.

1.141°. 1) $2m + 3m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$ при $m=49$, $n=16$;

- 2) $(m^2 - \frac{7}{25})^{-\frac{1}{2}}$ при $m = -\frac{4}{5}$;
 3) $t^{-0,5} + p^{0,4}$ при $p=32$, $t=49$;
 4) $2(t^2 - p^{-1})^{\frac{2}{3}}$ при $p = \frac{1}{8}$, $t=4$.

1.142°. Верно ли, что:

- 1) $3,87^{\frac{13}{17}} = 3,87^{\frac{65}{85}}$; 2) $19,24^{\frac{29}{36}} = 19,24^{\frac{174}{216}}$;
 3) $9,56^{-1,45} = 9,56^{-13,05}$; 4) $20,08^{7,8} = 20,08^{85,8}$;
 5) $7,32^{\frac{1353}{11}} = 7,32^{123}$; 6) $5,01^{\frac{360}{5}} = 5,01^{72}$;
 7) $4,16^{\frac{396}{33}} = 4,16^{12}$; 8) $11,44^{\frac{406}{29}} = 11,44^{-14}$?

Найдите естественную область определения выражения (1.143—1.147).

1.143°. 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) \sqrt{a} ; 3) $a^{-\frac{1}{2}}$; 4) $a^{\frac{1}{3}}$;
 5) $\sqrt[3]{a}$; 6) $a^{-\frac{2}{5}}$; 7) $a^{-\frac{5}{2}}$; 8) a^2 ;
 9) a^3 ; 10) a^{-4} ; 11) $a^{\frac{4}{7}}$; 12) $\sqrt[9]{a^8}$.

1.144°. 1) $(a+1)^{\frac{1}{4}}$; 2) $(a+3)^{\frac{1}{3}}$; 3) $(6a)^{\frac{3}{5}}$;
 4) $(3a)^{-\frac{3}{4}}$; 5) $(a-10)^0$; 6) $(2a+1)^{-\frac{3}{2}}$;
 7) $(1-3a)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $(2a+6)^{\frac{3}{5}}$; 9) $(4-8a)^{-\frac{2}{7}}$;
 10) $(a+2)^{\frac{1}{5}}$; 11) $(a-3)^{\frac{1}{8}}$; 12) $(3a-15)^{-\frac{2}{7}}$.

1.145. 1) $(a^2-4)^{\frac{4}{16}}$; 2) $(9-a^2)^{\frac{15}{20}}$;
 3) $(a^2-5a)^{\frac{21}{24}}$; 4) $(a^2+2a)^{-\frac{6}{48}}$;
 5) $(a^2-6a+8)^{-\frac{15}{40}}$; 6) $(a^2-3a-10)^{-\frac{4}{24}}$;
 7) $(3a^2+4a-4)^{-\frac{5}{15}}$; 8) $(3a^2-5a-3)^{-\frac{16}{8}}$;
 9) $(6-a-7a^2)^{-\frac{30}{10}}$; 10) $(3-2a-5a^2)^{-\frac{21}{6}}$.

1.146*. 1) $\left(\frac{6-7a+a^2}{a-1}\right)^{\frac{1}{10}}$;
 2) $\left(\frac{3-2a-a^2}{a+3}\right)^{-\frac{1}{20}}$;
 3) $\left(\frac{a^2-7a-8}{5-a} \cdot \frac{(a-8)^3}{(a+2)^2}\right)^{\frac{7}{22}}$;
 4) $\left(\frac{2}{2a^2+a+3} + \frac{1}{a-1} - \frac{2}{2a+3} + 1\right)^{-\frac{3}{4}}$.

1.147*. 1) $(\sin x - 1)^{\frac{1}{4}}$; 2) $(\operatorname{ctg} x - 1)^{\frac{1}{3}}$;
 3) $(1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $(-1 - \cos x)^{\frac{1}{6}}$;
 5) $(-2 - \cos x)^{\frac{1}{8}}$; 6) $(\sin x - 2)^{\frac{1}{10}}$;

7) $(-1 - \sin x)^{\frac{1}{6}}$; 8) $(\cos x - 1)^{\frac{1}{4}}$;
 9) $\left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$; 10) $\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$.

1.148*. Сравните с единицей число:

1) $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$; 3) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

1.9. Действия со степенями с рациональными показателями

Для положительных оснований все действия со степенями с рациональными показателями обладают теми же свойствами, что и действия со степенями с целыми показателями.

Теорема. Для любых положительных значений a и b при любых рациональных s и t верны равенства:

$$a^s a^t = a^{s+t}; \quad (1)$$

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}; \quad (2)$$

$$(a^s)^t = a^{st}; \quad (3)$$

$$(ab)^s = a^s b^s; \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}. \quad (5)$$

▲ Доказательство. Пусть $s = \frac{p}{q}$, $t = \frac{k}{n}$, где $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Докажем равенство (1). Преобразуем его левую часть:

$$a^s a^t = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{k}{n}} =$$

↓ по теореме 1 из п. 1.8 получим ↓

$$= a^{\frac{np}{nq}} \cdot a^{\frac{kq}{nq}} =$$

↓ по определению степени с рациональным показателем имеем ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np}} \cdot \sqrt[nq]{a^{kq}} =$$

↓ по теоремам из п. 1.4, 1.5 имеем ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np} \cdot a^{kq}} =$$

↓ по свойству степеней с целыми показателями получим ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np+kq}} =$$

↓ по определению степени с рациональным показателем имеем ↓

$$= a^{\frac{np+kq}{nq}} = a^{\frac{np}{nq} + \frac{kq}{nq}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{k}{n}} = a^{s+t}.$$

Доказательство остальных равенств аналогично доказательству равенства (1). $\square \blacktriangle$



Замечание 1. Согласно теореме 2 из п. 1.8 доказанные в этом пункте утверждения верны и в случае, когда одно из чисел s или t целое.



Замечание 2. Равенства (1)–(5) являются тождествами, поскольку каждое из них превращается в верное числовое равенство при любом значении переменных, при которых входящие в это равенство выражения имеют смысл.

Следствие. Для любых положительных значений a и b при любом рациональном t верны равенства:

$$a^{-t} = \frac{1}{a^t}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-t} = \left(\frac{b}{a}\right)^t.$$

\blacktriangle Докажите эти равенства самостоятельно, используя равенства (2) и (5). \blacktriangle

Пример 1. Найти значение выражения

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{2.5}}{\left(\frac{3}{a^{14}}\right)^7} \right)^{-1} \text{ при } a = 2,25.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{2.5}}{\left(\frac{3}{a^{14}}\right)^7} \right)^{-1} = \frac{a^{\frac{3 \cdot 7}{14}}}{a^{0.5+2.5}} = \frac{a^{\frac{21}{2}}}{a^3} = a^{1.5-3} = a^{-1.5}.$$

При $a = 2,25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$ получим

$$a^{-1.5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-1.5} = \left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Пример 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Разложить выражение $a - b$ на множители как разность:

а) квадратов; б)* кубов; в) четвертых степеней.

Решение.

$$\text{а) } a - b = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right).$$

$$\blacktriangle \text{б) } a - b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right) = \\ = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right). \blacktriangle$$

$$\text{в) } a - b = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \left(\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right)\left(\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right) = \\ = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right).$$

\blacktriangle **Пример 3.** Сократить дробь

$$\frac{25 + 5m^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{2}{3}}}{125 - m}.$$

Решение.

$$\frac{25 + 5m^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{2}{3}}}{125 - m} = \frac{25 + 5m^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{2}{3}}}{5^3 - \left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \\ = \frac{25 + 5m^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{2}{3}}}{\left(5 - m^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^2 + 5m^{\frac{1}{3}} + \left(m^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)} = \frac{1}{5 - m^{\frac{1}{3}}}.$$

Ответ: $\frac{1}{5 - m^{\frac{1}{3}}}$. \blacktriangle

Пример 4. Найти значение выражения

$$\left(3 - 14^{\frac{1}{4}}\right)\left(3 + 14^{\frac{1}{4}}\right) : \left(9 + \left(7^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2\right).$$

Решение.

$$\frac{(3-14^{\frac{1}{4}})(3+14^{\frac{1}{4}})}{9+(\frac{1}{7^2}-2^2)^2} = \frac{3^2-(14^{\frac{1}{4}})^2}{9+(\frac{1}{7^2})^2+(\frac{1}{2^2})^2-2\cdot\frac{1}{7^2}\cdot\frac{1}{2^2}} =$$

$$= \frac{9-14^{\frac{1}{2}}}{9+7+2-2\cdot14^{\frac{1}{2}}} = \frac{9-14^{\frac{1}{2}}}{18-2\cdot14^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1. Сформулируйте теорему о действиях над степенями с рациональными показателями.
2. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
3. Чему равно частное двух степеней с одинаковыми основаниями?
4. Как возвести степень с рациональным показателем в рациональную степень?
5. Как возвести в рациональную степень произведение положительных чисел?
6. Как возвести в рациональную степень положительную дробь?

Упражнения.

Представьте в виде степени с рациональным показателем (1.149—1.154).

1.149°. 1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 2) $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{9}}$;
 4) $a^5a^{\frac{1}{3}}$; 5) $a^{0,2}a^{-1}a^{0,6}$; 6) $a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{2}}$;
 7) $a^{\frac{3}{8}}a^{\frac{5}{24}}a^{-\frac{1}{3}}$; 8) $a^{0,8}a^{-5}a^{7,2}$; 9) $a^{\frac{5}{9}}a^{-\frac{1}{18}}a^{\frac{1}{4}}$.

1.150°. 1) $b^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{3}{2}}$; 2) $b^{\frac{5}{6}}:b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{\frac{1}{5}}:b^{-\frac{1}{2}}$;
 4) $b^{\frac{2}{5}}:b^{\frac{1}{10}}$; 5) $b^{-\frac{1}{3}}:b^2$; 6) $b^{0,6}:b^{\frac{1}{15}}$;
 7) $b^{-0,4}:b^{-0,8}$; 8) $b^{\frac{3}{4}}:b^5:b^{-\frac{1}{6}}$; 9) $b^{\frac{5}{6}}:b^{-\frac{5}{12}}:b^{\frac{1}{2}}$.

1.151°. 1) $(t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; 2) $(t^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{9}}$; 3) $(t^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$;
 4) $(t^4)^{-\frac{5}{12}}$; 5) $(t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{8}}$; 6) $(t^{0,4})^{-2,5}$.

1.152°. 1) $(t^4)^{\frac{3}{4}}\cdot(t^{-6})^{\frac{1}{9}}$; 2) $(t^{\frac{4}{7}})^{-3,5}\cdot(t^{-1,25})^{\frac{3}{5}}$;
 3) $(t^{\frac{2}{4}})^{\frac{3}{2}}\cdot(t^{\frac{6}{2}})^{\frac{2}{4}}:t^{17\frac{1}{2}}$; 4) $(t^{\frac{2}{6}})^{\frac{3}{13}}\cdot(t^{\frac{5}{18}})^{\frac{2}{7}}\cdot(t^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{7}}$.

1.153. 1) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}})(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})$; 2) $(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{5}})(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}})$;
 3) $(a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{5}{6}}):(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}})$; 4) $(a^{\frac{11}{15}}b^{\frac{2}{3}}):(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{5}{6}})$.

1.154. 1) $(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{18}})^3\cdot(a^{-1,5}b^{\frac{5}{6}})$; 2) $(a^{\frac{1}{3}}b^{0,625})^4\cdot(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}})$;
 3) $(a^{\frac{5}{7}}b^{-\frac{5}{14}})^{1,4}\cdot(a^{0,4}b^{0,2})^{-2,5}$; 4) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})^{-1,5}\cdot(a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{5}{12}})^{\frac{6}{5}}$.

Вычислите (1.155—1.158).

1.155°. 1) $3^{\frac{4}{5}}\cdot3^{\frac{11}{5}}$; 2) $2^{\frac{2}{7}}\cdot2^{\frac{5}{7}}$;
 3) $3^{-\frac{1}{3}}:9^{-\frac{2}{3}}$; 4) $5^{-1,3}:5^{-0,7}:25^{-2}$;
 5) $10^{\frac{1}{2}}\cdot10^{0,1}\cdot10^{\frac{2}{5}}$; 6) $25^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot125^{-\frac{1}{9}}$;
 7) $2\cdot4^{0,4}\cdot\sqrt[5]{2}$; 8) $125^{-\frac{1}{3}}\cdot25^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{5}$;
 9) $\sqrt[4]{9}\cdot3^{-2}\cdot3^{0,5}$; 10) $\sqrt[5]{16}\cdot2^{-0,6}\cdot2^{1,2}$.

1.156°. 1) $(8\cdot27)^{\frac{1}{3}}$; 2) $(\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}}$; 3) $(\frac{49}{144})^{-\frac{1}{2}}$;
 4) $(\frac{64}{81})^{\frac{1}{4}}$; 5) $(\frac{36^3}{125^2})^{\frac{1}{6}}$; 6) $(\frac{3^8}{64^4})^{-\frac{1}{8}}$.

1.157. 1) $(\frac{32}{243})^{\frac{1}{2}}:(\frac{32}{243})^{0,1}$; 2) $(\frac{1}{64})^{-\frac{1}{6}}\cdot(\frac{1}{64})^{-\frac{2}{3}}$;
 3) $((\frac{4}{5})^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 4) $4^{-\frac{3}{2}}\cdot(\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}}$;
 5) $(\frac{16}{25})^{-0,5}-(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}$; 6) $125^{\frac{1}{3}}+(\frac{1}{27})^{-\frac{2}{3}}$;
 7) $64^{-\frac{2}{3}}\cdot(\frac{4}{9})^{-0,5}$; 8) $\frac{15^{\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$.

$$9) \frac{10^{0,6} \cdot 2^{-\frac{3}{5}}}{5^{-1,4}};$$

$$10) \frac{7^{-0,8} \cdot 14^{\frac{4}{5}}}{2^{-2,3}}.$$

$$1.158. \quad 1) \frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{9}}{\frac{5}{8^3} \cdot \sqrt[3]{3^{-1}}};$$

$$2) \frac{81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{49}}{7^{-1,6} \cdot \sqrt[3]{3}};$$

$$3) \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}};$$

$$4) \frac{\left(\frac{49}{121}\right)^{-\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}} : 3^{-5}}{\left(\frac{64^{-1}}{11^{-0,5}}\right)^{-\frac{7}{2}} : \left(\frac{2^{-16}}{7^{1,25}}\right)^{-1}}.$$

1.159. Найдите x , если:

$$1) \frac{x}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{2^{\frac{5}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{64}};$$

$$2) \frac{9^{-\frac{1}{3}} \cdot 243^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{9} \cdot x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{243}};$$

$$3) \frac{4^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[6]{16})^2 \cdot \sqrt{4} \cdot x} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^2};$$

$$4) \frac{125^{\frac{1}{2}} \cdot 0,2^3}{(\sqrt[4]{25})^3 \cdot (x-1)} = \frac{(\sqrt[6]{25})^3}{25^2}.$$

1.160. Представьте в виде суммы:

$$1) x^{\frac{1}{3}} \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right); \quad 2) x^{\frac{1}{2}} \left(2 + x^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$3) a^{\frac{1}{2}} b^{2,5} \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right); \quad 4) a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}\right).$$

Вынесите общий множитель за скобки (1.161—1.162).

$$1.161^{\circ}. \quad 1) a^{\frac{1}{2}} + a; \quad 2) a - a^{\frac{1}{3}}; \quad 3) a + a^{\frac{5}{6}};$$

$$4) a^{\frac{7}{9}} - a; \quad 5) a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}; \quad 6) a^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{3}{5}};$$

$$7) a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{6}}; \quad 8) a^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{2}{3}} + a; \quad 9) a - a^{\frac{2}{9}} + a^{\frac{15}{6}}.$$

$$1.162^{\circ}. \quad 1) (ab)^{\frac{1}{3}} + (ac)^{\frac{1}{3}};$$

$$2) (ab)^{\frac{3}{4}} - (ac)^{\frac{5}{8}};$$

$$3) 12ab^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{1}{2}}b;$$

$$4) 5a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}} + 15a^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}};$$

$$5) 24a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}};$$

$$6) 2^{\frac{1}{6}}a^{\frac{2}{5}}b - 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{3}}.$$

1.163. Докажите тождество:

$$1) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = a - b;$$

$$2) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a + b;$$

$$3) \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b.$$

1.164^{\circ}. Возведите в квадрат выражение:

$$1) 2^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{3}};$$

$$2) 3^{-\frac{1}{2}} + 9^{-\frac{1}{3}};$$

$$3) a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}};$$

$$4) m^{\frac{5}{2}} - n^{-\frac{1}{4}};$$

$$5) 2m^{\frac{1}{2}} - 3n^{\frac{1}{2}};$$

$$6) 4t^{\frac{3}{2}} + 5d^{\frac{5}{3}}.$$

1.165. Упростите выражение:

$$1)^{\circ} \left(a - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + b^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$2)^{\circ} \left(c + t^{\frac{3}{4}}\right)\left(c - t^{\frac{3}{4}}\right);$$

$$3)^{\circ} \left(a^{\frac{1}{2}} - c^{-1}\right)\left(c^{-1} + a^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$4)^{\circ} \left(b^{\frac{1}{4}} - d^{-3}\right)\left(d^{-3} + b^{\frac{1}{4}}\right);$$

$$5) \left(4a^{\frac{2}{5}} + t^{-\frac{1}{4}}\right)\left(4a^{\frac{2}{5}} - t^{-\frac{1}{4}}\right);$$

$$6) \left(3t^{\frac{2}{3}} + d^{-\frac{5}{6}}\right)\left(3t^{\frac{2}{3}} - d^{-\frac{5}{6}}\right);$$

$$7) 4a^{\frac{2}{3}} - \left(2a^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{2}}\right);$$

$$8) 9b^{\frac{2}{5}} - \left(3b^{\frac{1}{5}} - 2a^{\frac{1}{3}}\right)\left(3b^{\frac{1}{5}} + 2a^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$9) 25b^{\frac{2}{5}} + 16c - \left(5b^{\frac{1}{5}} + 4c^{\frac{1}{2}}\right)^2;$$

$$10) 9a^{\frac{2}{3}} - 25b - \left(3a^{\frac{1}{3}} - 5b^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

1.166. Вычислите:

- 1) $\left(16^{-\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{2}}\right) \left((3\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}} + 16^{-0,25}\right)$;
- 2) $\left(81^{-\frac{1}{4}} + 7^{-\frac{1}{2}}\right) \left((7\sqrt{7})^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{81}\right)^{0,25}\right)$;
- 3) $\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 : \left(\left(2 + 15^{\frac{1}{4}}\right) \left(2 - 15^{\frac{1}{4}}\right)\right)$;
- 4) $\left(\left(5^{\frac{1}{2}} - 21^{\frac{1}{4}}\right) \left(5^{\frac{1}{2}} + 21^{\frac{1}{4}}\right)\right) : (\sqrt{3} - \sqrt{7})^2$.

Разложите на множители, используя формулу разности квадратов (1.167—1.168).

- 1.167°. 1) $a - 121$; 2) $49 - m$; 3) $n^2 - 13$;
 4) $5 - t^2$; 5) $7 - b^4$; 6) $d^6 - 10$.
- 1.168. 1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}} - 1$;
 4) $4 - n^{\frac{1}{2}}$; 5) $4a^{\frac{1}{2}} - 25b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0,01m^{\frac{1}{6}} - 0,09n^{\frac{1}{2}}$;
 7) $x^{\frac{2}{3}} - 3$; 8) $6 - x^{\frac{2}{5}}$; 9) $x^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{4}}$;
 10) $x^{-3} - a^{-\frac{1}{4}}$; 11) $m^4 - n^{-\frac{1}{2}}$; 12) $m^{-5} - n^{\frac{1}{5}}$.

Сократите дробь (1.169—1.170).

- 1.169. 1) $\frac{m-n}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}$; 2) $\frac{p^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}}{p-t}$; 3) $\frac{a^{\frac{4}{5}} - b^{\frac{4}{5}}}{\frac{2}{a^{\frac{5}{5}}} - \frac{2}{b^{\frac{5}{5}}}}$;
 4) $\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4}}$; 5) $\frac{a^{\frac{2}{7}} - 25b^{\frac{4}{7}}}{\frac{1}{2a^{\frac{7}{7}}} - 10b^{\frac{2}{7}}}$; 6) $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 9b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4a^{\frac{3}{3}}} + 12b^{\frac{1}{4}}}$;
 7)* $\frac{a - \sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{b}}$; 8)* $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; 9)* $\frac{27-a}{9+3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$.

- 1.170. 1) $\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$; 2)* $\frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b}{a + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$;
 3)* $\frac{a^{1,5}b^{0,5} + b^2}{ab^{0,5} - a^{0,5}b + b^{1,5}}$; 4) $\frac{a^{-0,5} - 2a^{-0,25}b^{-0,25} + b^{-0,5}}{a^{-0,5} - b^{-0,5}}$;

$$5)* \frac{a + a^{0,25}b^{0,75}}{a^{0,5} + a^{0,25}b^{0,25}}; \quad 6) \frac{b - a^{0,5}b^{0,5}}{b^{0,75} + a^{0,25}b^{0,5}}.$$

Упростите выражение (1.171—1.174).

1.171. 1) $\sqrt{a^2b^{-2} - 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}$;
 2) $\sqrt{a^{-2\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}a^4b^{\frac{1}{3}}}$.

1.172. 1) $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$; 2) $\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4}} - \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4}}$;
 3) $\frac{4x^{0,5} - 16}{x - 16} - \frac{x^{0,5}}{x^{0,5} + 4}$; 4) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a-b}$;
 5) $\frac{a-b}{\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}$; 6) $\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$;
 7) $\left(\frac{a^2 + b^2}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}} - \frac{a+b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}\right)ab^{-1}$;
 8) $\left(\frac{a^2 - b^2}{\frac{3}{a^2} + \frac{1}{ab^2}} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^2}}\right) : \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

1.173*. 1) $\frac{8a+1}{\frac{2}{1+4a^{\frac{1}{3}}} - 2 \cdot \sqrt[3]{a}}$; 2) $\frac{a-27}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}} + 9 + 3 \cdot \sqrt[3]{a}}}$;
 3) $\frac{1+a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{a-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 1} - 2 \cdot \sqrt[3]{a}\right)$;
 4) $\frac{1-a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{4}{3}}} \left(1 - \frac{a+a^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} + 1} + 2 \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)$.

1.174*. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}}\right) : \left(\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a} - \frac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)$;
 2) $\left(\frac{2}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{2a^{0,5}}{a^{1,5} + b^{1,5}} \cdot \frac{a - a^{0,5}b^{0,5} + b}{a^{0,5} - b^{0,5}}\right) : 4a^{0,5}b^{0,5}$;

$$3) \left(\frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5} b^{0,5} \right); (a - b) + \frac{2b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}};$$

$$4) \left(\frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} \right)^2 \cdot \left(\frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5} - 1} + \frac{a^{0,5} - 1}{a^{0,5} + 1} - \frac{4}{a - 1} \right)^{-2}.$$

1.10. Сравнение степеней с рациональными показателями

Теорема 1. Пусть $a > 1$. Тогда:

- 1) если r — положительное рациональное число, то $a^r > 1$;
- 2) если s и r — рациональные числа и $s > r$, то $a^s > a^r$.

Доказательство. 1) Положительное рациональное число r можно представить в виде $r = \frac{k}{l}$, где k и l — натуральные числа.

По условию $a > 1$, значит, согласно свойству степеней с натуральными показателями получим $a^k > 1^k$, т. е. $a^k > 1$. Последнее неравенство можно переписать так:

$$\left(a^{\frac{k}{l}} \right)^l > 1^l.$$

Еще раз воспользовавшись свойством степеней с натуральными показателями, получим

$$a^{\frac{k}{l}} > 1, \text{ т. е. } a^r > 1.$$

2) Доказательство аналогично 1). \square

Теорема 2. Пусть $0 < a < 1$. Тогда:

- 1) если r — положительное рациональное число, то $a^r < 1$;
- 2) если s и r — рациональные числа и $s > r$, то $a^s < a^r$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Пример 1. Сравнить значения выражений:

- а) $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}}$ и $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}$;
- б) $0,8^{-10}$ и $0,8^{-6,9}$;
- в) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-11}$ и $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3,7}$.

Решение. а) Основание степеней $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}}$ и $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}$ — число $\frac{7}{9}$ — положительно и меньше 1, при этом показатель $\frac{5}{4}$ больше показателя $\frac{4}{5}$. В этом случае большему значению показателя соответствует меньшее значение степени. Поэтому имеем

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

б) Для основания степеней и их показателей соответственно верны неравенства

$$0 < 0,8 < 1 \text{ и } -10 < -6,9.$$

В этом случае большему значению показателя соответствует меньшее значение степени. Поэтому имеем

$$0,8^{-10} > 0,8^{-6,9}.$$

в) Для основания степеней и их показателей соответственно верны неравенства

$$\frac{5}{3} > 1 \text{ и } -11 < -3,7.$$

В этом случае большему значению показателя соответствует большее значение степени. Поэтому имеем

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-11} < \left(\frac{5}{3}\right)^{-3,7}.$$

Пример 2. Сравнить k ($k > 0$) с единицей, если известно, что верно неравенство:

$$\text{а) } k^{\frac{2}{7}} < k^{\frac{1}{7}}; \quad \text{б) } k^{-3,4} > k^{-2,1}; \quad \text{в) } k^0 < k^{5,7}.$$

Решение. а) Поскольку для показателей степеней верно неравенство $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ и по условию большему значению показателя степени соответствует меньшее значение степени, то основание степени k удовлетворяет неравенству $0 < k < 1$.

б) Поскольку для показателей степени верно неравенство $-3,4 < -2,1$ и по условию большему значению показателя соответствует меньшее значение степени, то основание степени k удовлетворяет неравенству $0 < k < 1$.

в) Поскольку для показателей степеней верно неравенство $0 < 5,7$ и по условию большему значению показателя соответствует

большее значение степени, то основание степени k удовлетворяет неравенству $k > 1$.

Ответ: а) $0 < k < 1$; б) $0 < k < 1$; в) $k > 1$.



1. Сформулируйте теорему о сравнении степеней с основанием больше единицы.
2. Сформулируйте теорему о сравнении степеней с положительным основанием меньше единицы.

Упражнения

Сравните числа (1.175—1.180).

- 1.175°. 1) $2^{\frac{1}{2}}$ и $2^{\frac{1}{4}}$; 2) $23^{\frac{5}{8}}$ и $23^{\frac{3}{8}}$;
 3) $(\frac{5}{4})^{\frac{2}{7}}$ и $(\frac{5}{4})^{0.7}$; 4) $(\frac{7}{3})^{\frac{5}{8}}$ и $(\frac{7}{3})^{0.6}$;
 5) $0,001^{-1.3}$ и $0,001^{-1.5}$; 6) $0,999^{-2.1}$ и $0,999^{-1.8}$;
 7) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}$ и $(\frac{1}{2})^{0.251}$; 8) $(\frac{2}{5})^{0.32}$ и $(\frac{2}{5})^{0.3}$;
 9) $(\frac{8}{9})^{\frac{8}{3}}$ и $(\frac{8}{9})^{\frac{3}{8}}$; 10) $(\frac{9}{10})^{0.8}$ и $0,9^{\frac{2}{7}}$.
- 1.176°. 1) $0,2^{-7.8}$ и $5^{6.4}$; 2) $8^{\frac{13}{6}}$ и $0,125^{-2.5}$;
 3) $1,2^{\frac{2}{3}}$ и $1,2^0$; 4) $1,6^0$ и $1,6^{\frac{3}{2}}$;
 5) 1 и $0,7^{\frac{5}{4}}$; 6) $0,81^{\frac{4}{5}}$ и 1 ;
 7) $(\sqrt{3})^{3.5}$ и 1 ; 8) 1 и $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;
 9) $2,5\sqrt[3]{0,4}$ и $0,4\sqrt[3]{2,5}$; 10) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{3}}$ и $\frac{5}{3}\cdot\sqrt[8]{0,6}$.

- 1.177. 1) $\frac{3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{0.5}}{\sqrt[6]{3}}$ и $\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{0.5}}{\sqrt[6]{3^5}}$;
 2) $(\frac{1}{6})^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{6^{-2}}$ и $(\frac{1}{6})^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{6^{-3}}$;
 3) $(\frac{27}{125})^{-\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt{3})^4$ и $(\frac{81}{25})^{-\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{3})^9$;
 4) $(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{81}})^{-\frac{3}{2}} \cdot (\sqrt{2})^{10}$ и $(\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{216}})^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[4]{5})^8$.

- 1.178. 1) $(\frac{3}{7})^{\frac{6}{11}}$ и $(\frac{3}{8})^{\frac{6}{11}}$; 2) $0,357^{-\frac{1}{3}}$ и $0,3571^{-\frac{1}{3}}$;
 3) $(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$ и $(3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$; 4) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}$ и $(2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$.

- 1.179. 1) $\sqrt[7]{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2}$ и $\sqrt[7]{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})^2}$;
 2) $\sqrt[5]{(1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4})^{\frac{3}{4}}}$ и $\sqrt[5]{(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7})^{\frac{3}{4}}}$;
 3) $\sqrt[8]{(1 - (1\frac{1}{6} - \frac{5}{6}))^{\frac{9}{16}}}$ и $\sqrt[12]{(1 - (1\frac{1}{6} - \frac{5}{6}))^{\frac{7}{24}}}$;
 4) $\sqrt[5]{(1 + (5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2}))^{\frac{9}{25}}}$ и $\sqrt[7]{(1 + (5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2}))^{\frac{8}{21}}}$.

- 1.180. 1) $2\sqrt{5} - 1$ и $6 - \sqrt{5}$;
 2) $\sqrt{7} - 1$ и $9 - 3\sqrt{7}$;
 3) $(3\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}})^2$ и $(3\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}})^2$;
 4) $(2\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}})^2$ и $(2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}})^2$.

1.181. Расположите числа в порядке убывания:

- 1) $(\frac{9}{4})^{-0.1}$; $(\frac{9}{4})^{0.2}$; $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{6}}$; 2) $(\frac{4}{7})^{-\frac{2}{3}}$; $(\frac{49}{16})^{\frac{4}{3}}$; $(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{4}}$;
 3) $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{5}}$; $(\frac{125}{27})^{-\frac{1}{8}}$; $(\frac{9}{25})^{-4}$; 4) $(\frac{4}{3})^{\frac{2}{5}}$; $(\frac{16}{9})^{-\frac{3}{8}}$; $(\frac{256}{81})^{-\frac{1}{6}}$;
 5) $\sqrt{0,3}$; $0,3$; $(\sqrt{5} - 1)^2$; 6) $\sqrt{1,7}$; $1,7$; $(3 - \sqrt{7})^2$.

1.182. Сравните с единицей число:

- 1) 3^{-5} ; 2) $(\frac{1}{3})^{-5}$; 3) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$;
 4) $(\frac{3}{5})^{\frac{2}{3}}$; 5) $(\frac{2}{3})^{\frac{4}{3}}$; 6) $(\frac{7}{3})^{-\frac{7}{3}}$;
 7) $(\frac{\pi}{2})^{\frac{13}{4}}$; 8) $(\pi - 1)^{\frac{1}{3}}$; 9) $(\frac{\pi - 1}{4})^{\frac{8}{3}}$;
 10) $(\frac{\pi - 3}{3})^{\frac{1}{3}}$; 11) $(\sqrt{3} - 1)^{\frac{9}{2}}$; 12) $(\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{8}}$.

1.183. Зная, что $0 < m < 1$, сравните:

- 1) $m^{7,1}$ и $m^{9,3}$; 2) $m^{0,13}$ и $m^{0,16}$;
- 3) $m^{-23,5}$ и m^{-30} ; 4) m^{-40} и $m^{-51,4}$;
- 5) $m^{0,74}$ и $m^{0,9}$; 6) $m^{0,63}$ и $m^{0,62}$;
- 7) $m^{\frac{3}{2}}$ и $m^{\frac{2}{3}}$; 8) $m^{-\frac{3}{4}}$ и $m^{-\frac{4}{3}}$;
- 9) $m^{-2,8}$ и $m^{-0,28}$; 10) $m^{-4,14}$ и $m^{-4,04}$.

1.184. Зная, что $a > 1$, сравните:

- 1) $a^{-9,3}$ и a^{-9} ; 2) a^{-18} и $a^{-17,99}$;
- 3) $a^{0,235}$ и $a^{0,401}$; 4) $a^{1,63}$ и $a^{1,82}$;
- 5) $a^{-\frac{1}{3}}$ и $a^{-\frac{2}{5}}$; 6) $a^{-\frac{7}{10}}$ и $a^{-\frac{8}{9}}$;
- 7) $a^{\frac{5}{2}}$ и $a^{\frac{2}{5}}$; 8) $a^{-\frac{4}{5}}$ и $a^{-\frac{5}{4}}$;
- 9) $a^{0,36}$ и $a^{3,6}$; 10) $a^{5,3}$ и $a^{5,001}$.

Сравните числа a и b , если известно, что верно неравенство (1.185—1.186).

- 1.185. 1) $3^a > 3^b$; 2) $1,4^a < 1,4^b$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$;
- 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^a > \left(\frac{2}{9}\right)^b$; 5) $\left(\frac{7}{6}\right)^a > \left(\frac{7}{6}\right)^b$; 6) $\left(\frac{13}{12}\right)^a < \left(\frac{13}{12}\right)^b$.

- 1.186. 1) $(\sqrt{5})^a < (\sqrt{5})^b$; 2) $(\sqrt{3})^a > (\sqrt{3})^b$;
- 3) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^a > \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^b$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^a < \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^b$;
- 5) $\pi^a < \pi^b$; 6) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^a > \left(\frac{1}{\pi}\right)^b$;
- 7) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^a > \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^b$; 8) $\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^a > \left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^b$.

Сравните число m ($m > 0$) с единицей, если известно, что верно неравенство (1.187—1.188).

- 1.187. 1) $m^2 > m^3$; 2) $m^4 < m^5$; 3) $m^{\frac{2}{5}} < m^{\frac{3}{5}}$;
- 4) $m^{\frac{1}{3}} > m^{\frac{2}{3}}$; 5) $m^{-2} > m^2$; 6) $m^{-8,1} < m^{-10}$;
- 7) $m^{\frac{4}{9}} < m^{0,6}$; 8) $m^{-0,5} > m^{\frac{1}{4}}$.

- 1.188. 1) $\left(m^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{m^2} < \left(m^{\frac{5}{6}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{m^3}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}} > \frac{(m^{0,25})^{0,75}}{\sqrt{m^3}}$;
- 3) $\frac{m^{10} \sqrt[3]{m^2}}{m^{\frac{7}{6}}} > \frac{\sqrt[6]{m^3 m^{-1}}}{m^{-\frac{17}{9}}}$;
- 4) $\frac{\sqrt[5]{m^2} \cdot \sqrt[4]{m^{-3}}}{m^{-\frac{1}{4}}} < \frac{m^{\sqrt[5]{m^2} \cdot \sqrt{m}}}{m^{-0,7}}$;
- 5) $\frac{\sqrt[3]{4} \sqrt[4]{m^5} \cdot \sqrt[6]{m^7}}{\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{m^7}} > \frac{\sqrt[5]{3} \sqrt[3]{\frac{1}{m^{-1}} \cdot \sqrt{m^3}}}{\sqrt[15]{m} \cdot \sqrt[5]{m^{-1}}}$;
- 6) $\frac{\sqrt[5]{m^5} \cdot \sqrt[6]{m^{18}}}{m^2 \cdot \sqrt[6]{m^{-12}}} < \frac{\sqrt[9]{3} \sqrt[3]{\frac{1}{m^{-3}} \cdot \sqrt{m^7}}}{\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[6]{m^{-5}}}$.

1.11. Степенная функция (показатель положительный)

В предыдущих классах мы изучали функции $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Каждая из них является частным случаем функции $y = x^r$,

где $r > 0$ — постоянная.

Такая функция называется **степенной**.

Рассмотрим степенные функции с различными положительными показателями.

1. Функция $y = x^{2k}$, где k — натуральное число

Естественная область определения выражения x^{2k} — множество \mathbf{R} всех действительных чисел. Оно и является областью определения функции

$$y = x^{2k}.$$

Назовем свойства функции $y = x^{2k}$, $k \in \mathbf{N}$. Они те же, что и у функции $y = x^2$, и устанавливаются так же, как свойства этой функции. Для сравнения графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$ изображены на рисунке 3.

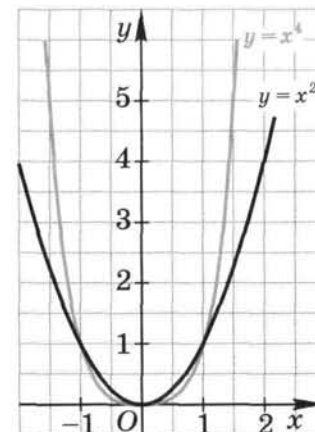


Рис. 3

Теорема (о свойствах функции $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$)

1. Областью определения функции является множество \mathbb{R} всех действительных чисел.

2. Множеством (областью) значений функции является промежуток $[0; +\infty)$.

3. Значение функции, равное нулю ($y = 0$), является наименьшим, а наибольшего значения функция не имеет.

4. График функции имеет с осями координат единственную общую точку $(0; 0)$ — начало координат.

5. Значение аргумента, равное нулю ($x = 0$), является нулем функции.

6. Функция принимает положительные значения ($y > 0$) на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т. е. все точки графика, кроме начала координат, лежат выше оси Ox , в I и II координатных углах.

7. Функция четная; график функции симметричен относительно оси ординат.

8. Функция убывающая на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающая на промежутке $[0; +\infty)$.

9. Функция не является периодической.

Убедитесь в справедливости этих свойств, используя схематичное изображение графика функции $y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) на рисунке 4.

Замечание. Если $r = 0$, то функция $y = x^r$ имеет вид $y = x^0$.

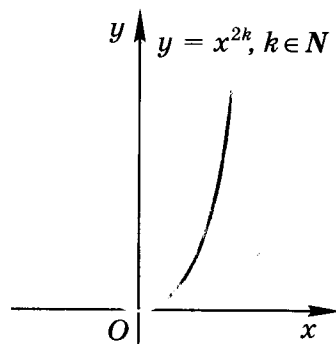


Рис. 4

Естественная область определения выражения x^0 — множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т. е. все значения переменной x , кроме нуля ($x \neq 0$). На этой области определения функция $y = x^0$ имеет постоянное значение, равное 1. Изображение графика этой функции дано на рисунке 5.

2. Функция $y = x^{2k+1}$, где k — натуральное число

Естественная область определения выражения x^{2k+1} — множество \mathbb{R}

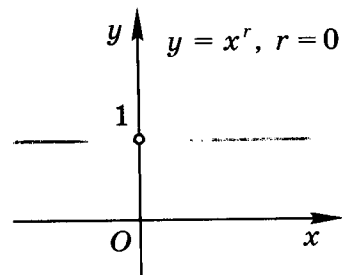


Рис. 5

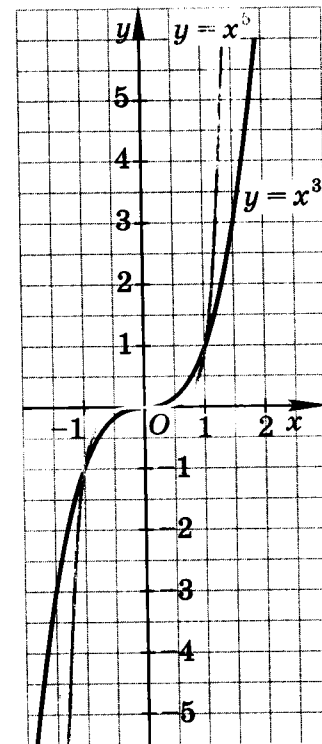


Рис. 6

всех действительных чисел. Это и будет область определения функции

$$y = x^{2k+1}.$$

Назовем свойства функции $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Они те же, что и у функции $y = x^3$, и устанавливаются так же, как свойства этой функции. Для удобства сравнения свойств функций $y = x^3$ и $y = x^5$ их графики изображены на одном рисунке (рис. 6).

Теорема (о свойствах функции $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$)

1. Областью определения функции является множество \mathbb{R} всех действительных чисел.

2. Множеством (областью) значений функции является множество \mathbb{R} всех действительных чисел.

3. Функция наименьшего и наибольшего значений не имеет.

4. График функции пересекает оси координат в единственной точке $(0; 0)$ — начале координат.

5. Значение аргумента, равное нулю ($x = 0$), является нулем функции.

6. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) на промежутке $(-\infty; 0)$ и положительные значения ($y > 0$) на про-

межутке $(0; +\infty)$; график функции расположен в I и III координатных углах.

7. Функция нечетная; график функции симметричен относительно начала координат.

8. Функция возрастающая на области определения.

9. Функция не является периодической.

Убедитесь в справедливости этих свойств, используя схематичное изображение графика функции $y = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) на рисунке 7.

Пример 1. Сравнив схематичные изображения графиков функций $y = x^{2k}$ и $y = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ (см. рис. 4, 7), указать, на каком из множеств обе функции:

- а) возрастают;
- б) имеют значения разных знаков;
- в) убывают;
- г) принимают неотрицательные значения;
- д) принимают положительные значения;
- е) принимают равные значения.

Ответ: а) $[0; +\infty)$;
 б) $(-\infty; 0)$;
 в) нет такого промежутка;
 г) $[0; +\infty)$;
 д) $(0; +\infty)$;
 е) $\{0; 1\}$.

Замечание. Если $r = 1$, то функция $y = x^r$ совпадает с функцией $y = x$, график которой изображен на рисунке 8.

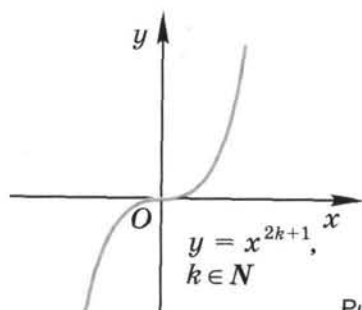


Рис. 7

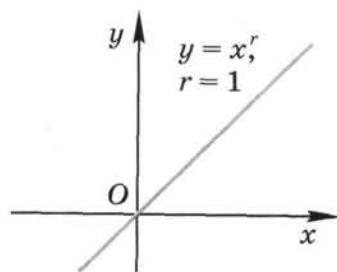


Рис. 8

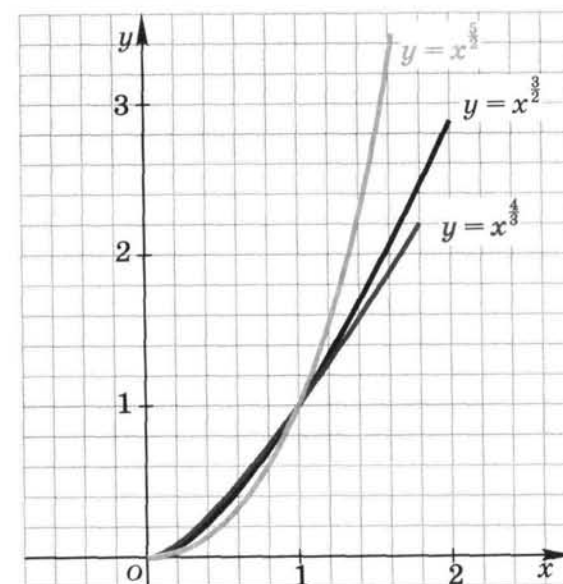


Рис. 9

3. Функция $y = x^r$, где r — рациональное нецелое число больше 1

Область определения этой функции — промежуток $[0; +\infty)$, т. е. эта функция рассматривается только на множестве всех неотрицательных действительных чисел.

Для сравнения графики функций $y = x^{4/3}$, $y = x^{3/2}$ и $y = x^{5/2}$ изображены на рисунке 9.

Свойства функции $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Z}$, $r > 1$) те же, что и свойства функции $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), рассматриваемой на промежутке $[0; +\infty)$. (Сформулируйте эти свойства.)

4. Функция $y = x^r$, где r — положительное рациональное число меньше 1

Область определения этой функции — промежуток $[0; +\infty)$, т. е. эта функция рассматривается только на множестве всех неотрицательных действительных чисел.

Назовем свойства функции $y = x^r$, где $r \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Z}$, $0 < r < 1$ (они те же, что и у функции $y = x^{1/2}$, и устанавливаются так же, как свойства этой функции).

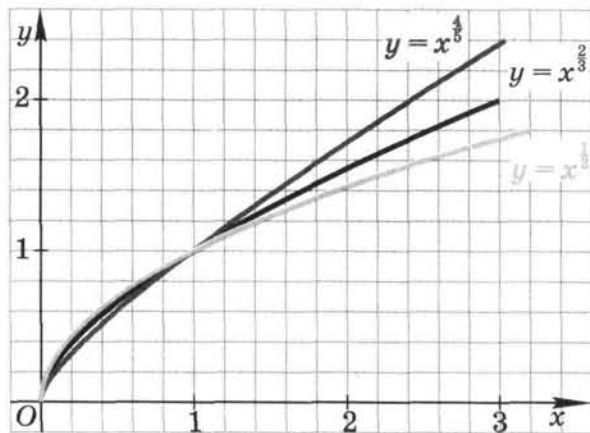


Рис. 10

Для удобства сравнения свойств функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{5}}$ их графики изображены на одном рисунке (рис. 10).

Теорема (о свойствах функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$)

1. Областью определения функции является множество $[0; +\infty)$.
2. Множеством (областью) значений функции является множество $[0; +\infty)$.
3. Значение функции, равное нулю ($y = 0$), является наименьшим, а наибольшего значения функция не имеет.
4. График функции имеет с осями координат единственную общую точку $(0; 0)$ — начало координат.
5. Значение аргумента, равное нулю ($x = 0$), является нулем функции.
6. Функция принимает положительные значения ($y > 0$) на промежутке $(0; +\infty)$; график функции расположен в I координатном угле.
7. Функция не является ни четной, ни нечетной.
8. Функция возрастающая на области определения.
9. Функция не является периодической.

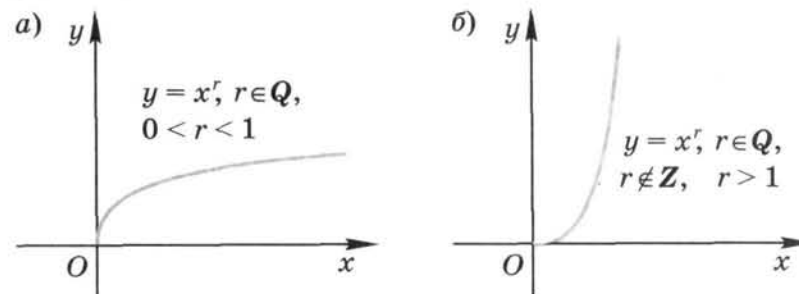


Рис. 11

Убедитесь в справедливости этих свойств, используя схематичные изображения графиков функций $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Z}$) при различных значениях r на рисунке 11, а, б.



Подчеркнем, функция $y = x^r$, где r — положительное рациональное, но не натуральное число, рассматривается только на множестве всех неотрицательных действительных чисел.

Пример 2. Изобразить (схематично) график функции:

- а) $y = x^{\frac{13}{4}}$;
- б) $y = x^{0,374} - 1,5$.

Решение. а) На рисунке 12, а схематично изображен график функции $y = x^{\frac{13}{4}}$.

б) На рисунке 12, б схематично изображен график функции $y = x^{0,374} - 1,5$.

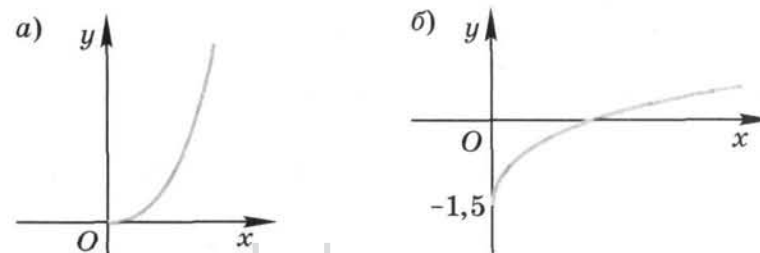


Рис. 12



- Сформулируйте свойства функции $y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$).
- Сформулируйте свойства функции $y = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$).
- Сформулируйте свойства функции $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), если:
 - $r > 1$, $r \notin \mathbb{Z}$;
 - $0 < r < 1$.
- Изобразите схематично график функции $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), если:
 - $r > 1$, $r \notin \mathbb{Z}$;
 - $0 < r < 1$.
- Что вы можете сказать о графике:
 - четной функции;
 - нечетной функции;
 - периодической функции?
- Что вы можете сказать об области определения:
 - четной функции;
 - нечетной функции;
 - периодической функции?

Упражнения

1.189°. Является ли степенной функция:

- $y = 3^x$;
- $y = (\sin x)^x$;
- $y = x^6$;
- $y = (x+3)^2$;
- $y = x^{-3}$;
- $y = \pi^{5.4}$;
- $y = x^{\sin 0.5\pi}$;
- $y = \left(\frac{2}{x}\right)^2$;
- $y = \left(-\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{\pi}}$?

1.190°. Известно, что $0 < r < 1$, $r \in \mathbb{Q}$. Сравните:

- $0,13^r$ и $0,17^r$;
- $0,23^r$ и $0,34^r$;
- $2,78^r$ и $3,1^r$;
- $4,52^r$ и $6,9^r$;
- $\left(2\sin \frac{\pi}{6}\right)^r$ и $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)^r$;
- $\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\right)^r$ и $\left(2\cos \frac{\pi}{3}\right)^r$.

1.191°. Известно, что $r > 1$, $r \in \mathbb{Q}$. Сравните:

- $0,47^r$ и $0,51^r$;
- $0,39^r$ и $0,42^r$;
- $3,14^r$ и $4,73^r$;
- $9,2^r$ и $11,38^r$;
- $\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^r$ и $(\operatorname{tg} 0)^r$;
- $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^r$ и $\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)^r$.

1.192. Найдите значение функции $f(x)$ в точке x_0 :

- $f(x) = 4x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$;
- $f(x) = (16x)^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$;
- $f(x) = \frac{(x^2)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}}$, $x_0 = 32$;
- $f(x) = \frac{(x^5)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $x_0 = 4$;

$$5) f(x) = \frac{(x^2)^{0.5} \cdot (x^3)^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[5]{x}}, \quad x_0 = 3;$$

$$6) f(x) = \frac{(x^5)^{0.25} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{x}}, \quad x_0 = 2.$$

1.193. Найдите наибольшее целое значение x , принадлежащее области определения функции:

- $f(x) = (4-x)^{\frac{9}{20}}$;
- $f(x) = (12-x)^{\frac{15}{4}}$;
- $f(x) = (40-x^2-3x)^{\frac{6}{23}}$;
- $f(x) = (9x-x^2-14)^{\frac{12}{7}}$.

1.194. Укажите естественную область определения выражения:

- $\left(\frac{x-2}{5-2x}\right)^2$;
- $\left(\frac{7-3x}{2+x}\right)^7$;
- $\left(\frac{9x+4}{12-5x}\right)^{\frac{15}{4}}$;
- $\left(\frac{13x-6}{7x+21}\right)^{\frac{2}{23}}$;
- $((9-x^2)(x+2))^{\frac{8}{5}}$;
- $((4-x^2)(2x+8))^{\frac{4}{11}}$;
- $\left(\frac{x+12-x^2}{x^2-9}\right)^{\frac{3}{29}}$;
- $\left(\frac{4-3x-x^2}{x^2+4x}\right)^{\frac{33}{10}}$.

1.195°. Функция задана формулой $y = x^n$. Найдите n , если известно, что график функции проходит через точку:

- $A(7; 49)$;
- $B(13; 169)$;
- $C(144; 12)$;
- $D(81; 9)$;
- $M(-64; -4)$;
- $N(-216; -6)$;
- $K(625; 5)$;
- $P(1024; 4)$;
- $T(-243; -3)$.

1.196°. Укажите промежутки возрастания и убывания функции:

- $y = x^9$;
- $y = x^{2008}$;
- $y = x^{\frac{13}{3}}$;
- $y = x^{\frac{34}{11}}$;
- $y = x^{\frac{9}{14}}$;
- $y = x^{\frac{2}{7}}$.

1.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x - 5x^{\frac{2}{3}} \text{ на промежутке:}$$

- $[0; 8]$;
- $[1; 27]$;
- $[0,001; 125]$;
- $[0,008; 1000]$.

1.198. Укажите координаты точек пересечения графиков функций:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \sqrt[4]{x} \text{ и } y = x^{\frac{3}{4}}; & 2) y = \sqrt[7]{x} \text{ и } y = x^{\frac{4}{7}}; \\ 3) y = \sqrt[9]{x+1} \text{ и } y = (x+1)^{\frac{4}{9}}; & 4) y = \sqrt[3]{x-2} \text{ и } y = x^{\frac{2}{3}}. \end{array}$$

1.199. Докажите, что функция f является нечетной:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^5 + x^7; & 2) f(x) = x^9 - x^3; \\ 3) f(x) = (x^3 - 3x)^{13}; & 4) f(x) = (5x^{11} + 0,1x)^{99}. \end{array}$$

1.200. Докажите, что функция f является четной:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^6 - 13x^{12}; & 2) f(x) = 0,7x^4 + x^2; \\ 3) f(x) = (x^{22} - 4)^{10}; & 4) f(x) = (x^{66} + 8)^{100}; \\ 5) f(x) = (|x| + x^2)^{0,25}; & 6) f(x) = (|x^4 - 1| + x^8)^{8,25}. \end{array}$$

Изобразите (схематично) график функции (1.201—1.205).

$$\begin{array}{lll} 1.201. & 1) y = x^{\frac{1}{3}}; & 2) y = x^{0,3}; & 3) y = x^4; \\ & 4) y = x^{100}; & 5) y = x^{\frac{8}{5}}; & 6) y = x^{\frac{5}{8}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.202. & 1) y = x^{\sin \frac{\pi}{3}}; & 2) y = x^{\cos \frac{\pi}{4}}; & 3) y = x^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}; \\ & 4) y = x^{\cos \frac{5\pi}{3}}; & 5) y = x^{\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}}; & 6) y = x^{\sin \frac{25\pi}{6}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.203. & 1) y = x^{\frac{2}{5}} + 2; & 2) y = x^{\frac{1}{2}} - 1; & 3) y = x^{\frac{15}{2}} - 3; \\ & 4) y = x^{1,2} + 1; & 5) y = x^9 - 2; & 6) y = x^{20} + 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1.204. & 1) y = (x-1)^{\frac{19}{3}}; & 2) y = (x+1)^{\frac{33}{7}}; & 3) y = (x+2)^{17}; \\ & 4) y = (x-2)^{26}; & 5) y = (x+3)^{\frac{5}{14}}; & 6) y = (x-3)^{\frac{22}{23}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.205. & 1) y = (x+2)^{12} - 1; & 2) y = (x-3)^{19} + 1; \\ & 3) y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + 2; & 4) y = (x-2)^{\frac{9}{22}} - 2; \\ & 5) y = (x+3)^{\frac{29}{7}} - 3; & 6) y = (x-1)^{\frac{35}{11}} + 3. \end{array}$$

1.206. Используя изображение графика функции из упражнений 1.201—1.205, укажите для нее:

- а) область определения;
- б) множество (область) значений;
- в) при каких значениях x значения y положительны (отрицательны);
- г) координаты точек пересечения графика с осями координат.

1.207*. Изобразите (схематично) график функции и укажите ее область определения, множество (область) значений функции и промежутки возрастания и убывания:

$$\begin{array}{lll} 1) y = |x|^{\frac{1}{3}}; & 2) y = |x|^{\frac{3}{13}}; & 3) y = |x|^{\frac{5}{4}}; \\ 4) y = |x|^{\frac{18}{7}}; & 5) y = |x-1|^{\frac{12}{17}}; & 6) y = |x+1|^{\frac{24}{29}}; \\ 7) y = |x+2|^{\frac{31}{3}}; & 8) y = |x-2|^{\frac{34}{7}}; & \\ 9) y = |1-x|^{\frac{1}{10}} + 2; & 10) y = |3-x|^{\frac{9}{20}} - 2; & \\ 11) y = |1+x|^{\frac{10}{7}} + 4; & 12) y = |2+x|^{\frac{25}{9}} - 4. & \end{array}$$

Решите уравнение (1.208—1.210).

$$\begin{array}{l} 1.208. \quad 1) x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{9}{5}} - 7x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + 12 = 0; \\ 2) x^{\frac{9}{10}} \cdot x^{\frac{11}{10}} - 11x^{\frac{9}{10}} \cdot x^{\frac{1}{10}} + 30 = 0; \\ 3) x^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{23}{12}} - 5\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{6}{5}} - 24 = 0; \\ 4) x^{\frac{7}{13}} \cdot x^{\frac{19}{13}} + 4\left(x^{\frac{8}{7}}\right)^{\frac{7}{8}} - 5 = 0; \\ 5) \left(x^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{7}{12}} \cdot x^{\frac{5}{12}} + 2 = 0; \\ 6) \left(x^{\frac{4}{9}}\right)^{4,5} + 9x^{\frac{6}{17}} \cdot x^{\frac{11}{17}} + 18 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.209^{\circ}. & 1) x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5; & 2) x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{3}{7}} = 4; \\ & 3) x^{\frac{5}{9}} \cdot x^{\frac{4}{9}} = 0; & 4) x^{\frac{7}{11}} \cdot x^{\frac{4}{11}} = -3; \end{array}$$

5) $\left(x^{\frac{1}{19}}\right)^{57} = 27$;

7) $\left(x^{\frac{1}{17}}\right)^{34} = 9$;

9) $\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^{35} = 243$;

6) $\left(x^{\frac{1}{24}}\right)^{72} = 64$;

8) $\left(x^{\frac{1}{21}}\right)^{42} = 100$;

10) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{18} = 512$.

1.210*. 1) $(x-3)^{\frac{1}{2}} = 4$;

2) $(x+2)^{\frac{1}{3}} = 3$;

3) $(x-1)^{\frac{6}{5}} = -2$;

4) $(x+4)^{\frac{7}{6}} = -4$;

5) $(x^2 - 2x + 1)^{3.5} = 1$;

6) $(x^2 + 6x + 9)^{5.5} = 0$;

7) $(x^2 - 2x + 3)^{0.9} = -1$;

8) $(x^2 - 5x + 6)^{9.7} = -2$.

1.211*. Решите неравенство:

1) $\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^7 < 8$;

2) $\left(x^{\frac{1}{13}}\right)^{13} < 9$;

3) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 9$;

4) $\left(x^{\frac{2}{19}}\right)^{19} > 4$;

5) $\left(x^{\frac{3}{22}}\right)^{22} < 27$;

6) $\left(x^{\frac{3}{34}}\right)^{34} = 64$.

1.12. Степенная функция (показатель отрицательный)

В предыдущих классах мы изучали функцию $y = \frac{1}{x}$ (или $y = x^{-1}$). Эта функция является частным случаем степенной функции $y = x^r$, где $r \in \mathbb{Z}$, $r < 0$.

Рассмотрим еще несколько случаев степенной функции с отрицательным показателем.

1. Функция $y = x^{-2k+1}$, где k — натуральное число

Естественная область определения выражения x^{-2k+1} — множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $x \neq 0$. Другими словами, областью определения функции $y = x^{-2k+1}$ будет множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Назовем свойства функции $y = x^{-2k+1}$ (они те же, что и у функции $y = x^{-1}$, и устанавливаются так же, как свойства этой функции).

Для удобства сравнения свойств функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-3}$ их графики изображены на одном рисунке (рис. 13).

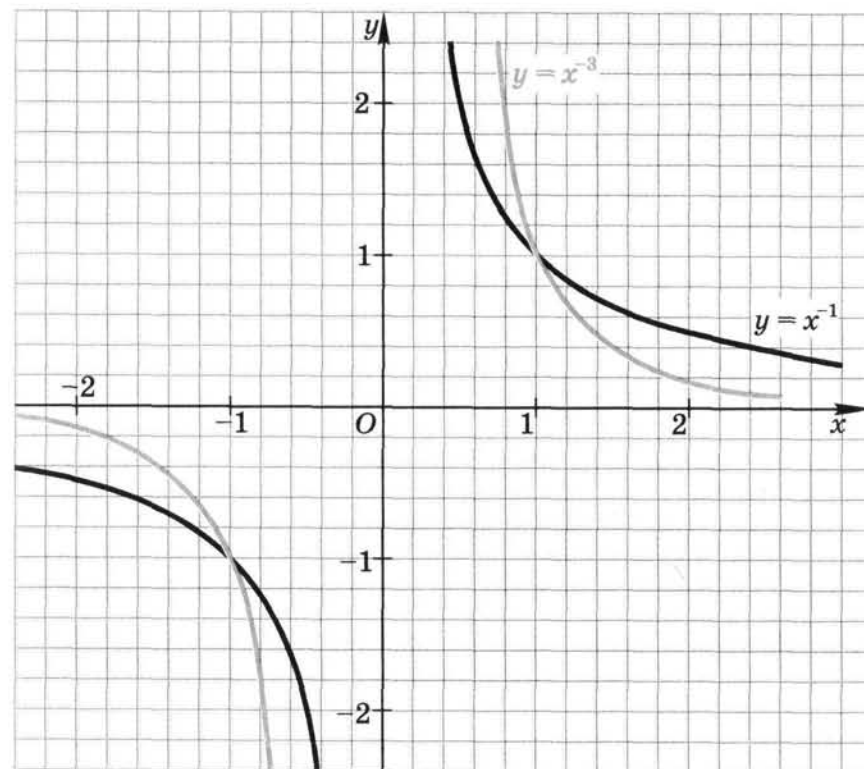


Рис. 13

Теорема (о свойствах функции $y = x^{-2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$).

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $x \neq 0$.
2. Множеством (областью) значений функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $y \neq 0$.
3. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.
4. График функции не пересекает координатных осей.
5. Функция не имеет нулей.
6. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) на промежутке $(-\infty; 0)$ и принимает положительные значения ($y > 0$) на промежутке $(0; +\infty)$; график функции расположен в I и III координатных углах.

7. Функция нечетная; график функции симметричен относительно начала координат.

8. Функция является убывающей на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающей на промежутке $(0; +\infty)$.

9. Функция не является периодической.

Убедитесь в справедливости этих свойств, используя схематичное изображение графика функции $y = x^{-2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) на рисунке 14.

Заметим, что утверждение: функция $y = x^{-2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) убывает на всей области определения — неверно (поясните почему).

2. Функция $y = x^{-2k}$, где k — натуральное число

Естественная область определения выражения x^{-2k} — множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $x \neq 0$. Другими словами, область определения функции $y = x^{-2k}$ — множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Назовем свойства функции $y = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}$ (они устанавливаются так же, как свойства функции $y = x^{-2}$, т. е. $y = \frac{1}{x^2}$). Для сравнения графики функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-4}$ изображены на рисунке 15.

Теорема (о свойствах функции $y = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}$)

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $x \neq 0$.

2. Множеством (областью) значений функции является промежутки $(0; +\infty)$.

3. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

4. График функции не пересекает координатных осей.

5. Функция не имеет нулей.

6. Функция принимает положительные значения ($y > 0$) на всей области определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; график функции расположен в I и II координатных углах.

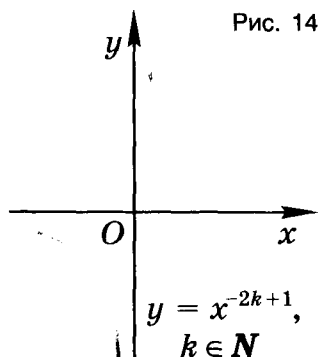


Рис. 14

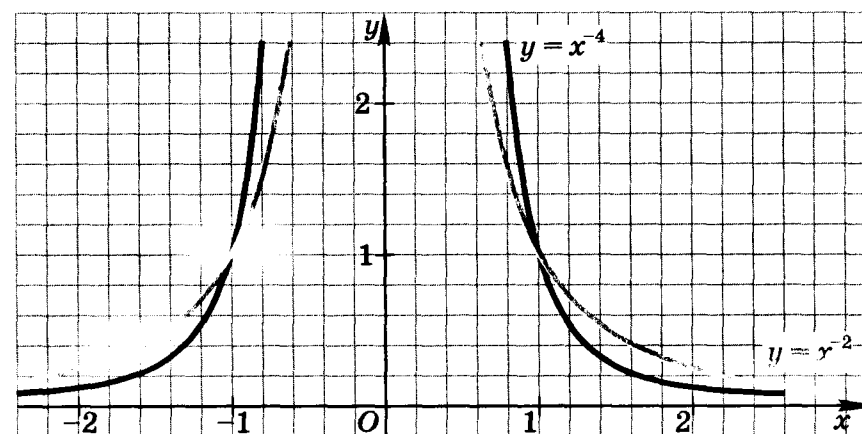


Рис. 15

7. Функция четная; график функции симметричен относительно оси ординат Oy .

8. Функция возрастающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающая на промежутке $(0; +\infty)$.

9. Функция не является периодической.

Убедитесь в справедливости этих свойств, используя схематичное изображение графика функции

$$y = x^{-2k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

на рисунке 16.

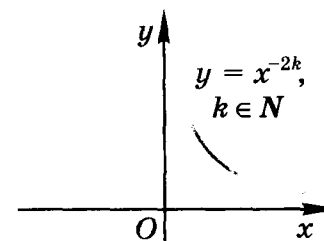


Рис. 16

Сравнив изображения графиков функций $y = x^{-2k+1}$ и $y = x^{-2k}$, $k \in \mathbb{N}$ (см. рис. 14, 16), указать, на каком из множеств обе функции:

- возрастают;
- имеют значения разных знаков;
- убывают;
- принимают положительные значения;
- принимают равные значения.

Ответ: а) нет таких промежутков; б) $(-\infty; 0)$; в) $(0; +\infty)$; г) $(0; +\infty)$; д) $\{1\}$.

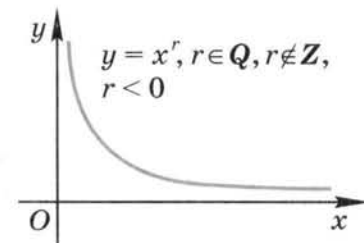
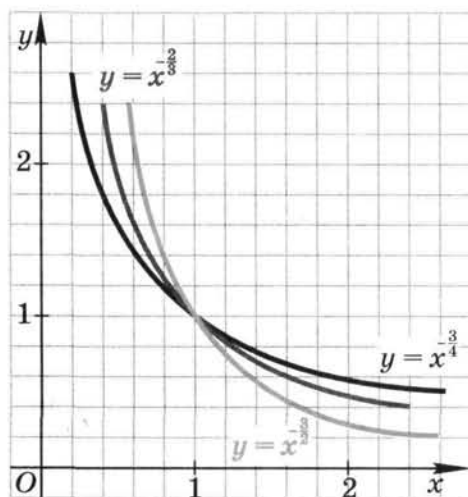


Рис. 18

Рис. 17

3. Функция $y = x^r$, где r — отрицательное нецелое число

Область определения этой функции — промежуток $(0; +\infty)$, т. е. эта функция рассматривается только на множестве всех положительных действительных чисел.

Графики функций

$$y = x^{-\frac{2}{3}}, \quad y = x^{-\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad y = x^{-\frac{3}{2}}$$

изображены на рисунке 17.

Свойства функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Z}$, $r < 0$, те же, что и свойства функции $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, рассматриваемой на промежутке $(0; +\infty)$. (Сформулируйте эти свойства, пользуясь рисунком 18.)



1. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$).
2. Почему нельзя утверждать, что функция $y = x^{-2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) убывает на всей области определения?
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-2k}$ ($k \in \mathbb{N}$).
4. Сформулируйте свойства функции $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Z}$, $r < 0$).
5. Изобразите схематично график функции $y = x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), если:
 - а) $r = -7$; б) $r = -8$;
 - в) $r = -0,7$; г) $r = -5,4$.

Упражнения

1.212°. Известно, что $r < 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Сравните:

- 1) $0,15^r$ и $0,34^r$; 2) $0,17^r$ и $0,23^r$;
- 3) $3,1^r$ и $4,52^r$; 4) $2,78^r$ и $6,9^r$;
- 5) $(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4})^r$ и $(\sin^2 7^\circ + \cos^2 7^\circ)^r$;
- 6) $(\operatorname{tg} \frac{\pi}{13} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{13})^r$ и $(2 \sin \frac{\pi}{3})^r$.

1.213°. Известно, что $0 < x < 1$. Сравните:

- 1) x^{-2} и x^{-8} ; 2) x^{-4} и x^{-8} ;
- 3) $x^{-5,3}$ и $x^{-3,4}$; 4) $x^{-6,7}$ и $x^{-4,1}$;
- 5) $x^{-0,58}$ и $x^{-5,8}$; 6) $x^{-0,49}$ и $x^{-4,9}$;
- 7) $x^{-\frac{2}{3}}$ и $x^{-\frac{3}{2}}$; 8) $x^{-\frac{5}{4}}$ и $x^{-\frac{4}{5}}$.

1.214°. Известно, что $x > 1$. Сравните:

- 1) x^{-3} и x^{-6} ; 2) x^{-12} и x^{-10} ;
- 3) $x^{-4,3}$ и $x^{-3,9}$; 4) $x^{-6,1}$ и $x^{-3,8}$;
- 5) $x^{-0,34}$ и $x^{-3,8}$; 6) $x^{-0,12}$ и $x^{-4,5}$;
- 7) $x^{-\frac{2}{7}}$ и $x^{-\frac{7}{2}}$; 8) $x^{-\frac{9}{4}}$ и $x^{-\frac{4}{9}}$.

1.215. Найдите значение функции $f(x)$ в точке x_0 :

- 1) $f(x) = 32x^{-\frac{7}{2}}$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = (64x)^{-\frac{5}{4}}$, $x_0 = 4$;
- 3) $f(x) = \frac{(x^2)^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}}$, $x_0 = 243$; 4) $f(x) = \frac{(x^7)^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}}$, $x_0 = 27$;
- 5) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^{-1}} \cdot (x^{-0,25})^2}{x^{-\frac{1}{6}}}$, $x_0 = 125$;
- 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^{-1}} \cdot (x^{-\frac{1}{6}})^2}{x^{-\frac{2}{3}}}$, $x_0 = 64$.

1.216. Найдите наименьшее целое значение x , принадлежащее области определения функции:

- 1) $f(x) = (x+5)^{-\frac{7}{3}}$; 2) $f(x) = (x-7)^{-\frac{13}{10}}$;

$$3) f(x) = (10x - x^2 - 9)^{-\frac{6}{23}}; \quad 4) f(x) = (6x - x^2 + 7)^{-\frac{1}{8}}.$$

1.217. Укажите естественную область определения выражения:

$$1) (0, 1x - 4)^{-6}; \quad 2) (2x + 0,4)^{-13};$$

$$3) \left(\frac{x(x-2)(x-6)}{21-3x} \right)^{-\frac{19}{4}}; \quad 4) \left(\frac{x(x-2)(x-5)}{2x-16} \right)^{-\frac{2}{11}};$$

$$5) ((x^2 + x - 6)(x + 2))^{-\frac{8}{21}};$$

$$6) ((x^2 - 4x + 4)(2x - 8))^{-\frac{4}{17}};$$

$$7) \left(\frac{4x - 3 - x^2}{x} \right)^{-\frac{3}{14}};$$

$$8) \left(\frac{10 + 3x - x^2}{x^2 + x} \right)^{-\frac{21}{4}}.$$

1.218°. Функция задана формулой $y = x^n$. Найдите n , если известно, что график функции проходит через точку:

$$1) A(4; 0,5); \quad 2) B(16; 0,25); \quad 3) C(27; \frac{1}{9});$$

$$4) D(81; \frac{1}{9}); \quad 5) M(-64; -\frac{1}{4}); \quad 6) N(216; \frac{1}{6});$$

$$7) K(625; \frac{1}{5}); \quad 8) P(1024; \frac{1}{4}); \quad 9) T(243; \frac{1}{3}).$$

1.219°. Укажите промежутки возрастания и убывания функции:

$$1) y = x^{-7}; \quad 2) y = x^{-24}; \quad 3) y = x^{-\frac{17}{4}};$$

$$4) y = x^{-\frac{30}{7}}; \quad 5) y = x^{-\frac{1}{15}}; \quad 6) y = x^{-\frac{18}{25}}.$$

1.220. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 4x - x^{\frac{3}{4}} \text{ на промежутке:}$$

$$1) [1; 16]; \quad 2) [16; 64];$$

$$3) [0,0016; 10\,000]; \quad 4) [0,0064; 625].$$

1.221. Укажите координаты точек пересечения графиков функций:

$$1) y = \sqrt[4]{x^{-1}} \text{ и } y = x^{-\frac{3}{4}};$$

$$2) y = \sqrt[7]{x^{-1}} \text{ и } y = x^{-\frac{4}{7}};$$

$$3) y = \sqrt[9]{(x-1)^{-2}} \text{ и } y = (x+1)^{-\frac{4}{9}};$$

$$4) y = \sqrt[3]{(x+3)^{-4}} \text{ и } y = x^{-\frac{2}{3}}.$$

1.222. Докажите, что функция f является нечетной:

$$1) f(x) = x^{-9} + 5x^{-13}; \quad 2) f(x) = 3x^{-19} - 8x^{-3};$$

$$3) f(x) = x^{-5} - 6x^{-0,6}; \quad 4) f(x) = 6x^{-11} + 0,3x^{-9,8}.$$

1.223. Докажите, что функция f является четной:

$$1) f(x) = 1,5x^{-6} - 2x^{-12};$$

$$2) f(x) = 12x^{-4} + 8x^{-22};$$

$$3) f(x) = (x^{-26} - 9)^{-100};$$

$$4) f(x) = (16x^{-6} + 81)^{-10};$$

$$5) f(x) = (|5x| + x^{-24})^{0,45};$$

$$6) f(x) = (|9x^{-4} - 10| + x^{-18})^{8,25}.$$

Изобразите (схематично) график функции (1.224—1.228).

$$1.224. \quad 1) y = x^{-2}; \quad 2) y = x^{-8}; \quad 3) y = x^{-5};$$

$$4) y = x^{-13}; \quad 5) y = x^{-\frac{8}{5}}; \quad 6) y = x^{-\frac{5}{8}}.$$

$$1.225. \quad 1) y = x^{\sin \frac{5\pi}{4}}; \quad 2) y = x^{\cos \frac{4\pi}{3}}; \quad 3) y = x^{\lg \frac{7\pi}{4}};$$

$$4) y = x^{\cos \frac{7\pi}{6}}; \quad 5) y = x^{\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}}; \quad 6) y = x^{\sin \frac{13\pi}{2}}.$$

$$1.226. \quad 1) y = x^{-9} - 2; \quad 2) y = x^{-27} + 1; \quad 3) y = x^{-20} + 3;$$

$$4) y = x^{-12} - 1; \quad 5) y = x^{-0,9} + 2; \quad 6) y = x^{-2,5} - 3.$$

$$1.227*. \quad 1) y = (x+1)^{-\frac{25}{3}}; \quad 2) y = (x-1)^{-\frac{22}{7}};$$

$$3) y = (x-2)^{-11}; \quad 4) y = (x+2)^{-31};$$

$$5) y = (x-3)^{-14}; \quad 6) y = (x+3)^{-24}.$$

$$1.228*. \quad 1) y = (x-2)^{-102} + 1; \quad 2) y = (x+3)^{-15} - 1;$$

$$3) y = (x-1)^{-\frac{2}{3}} - 3; \quad 4) y = (x+2)^{-\frac{9}{2}} + 3;$$

$$5) y = (x-3)^{-\frac{2}{7}} - 2; \quad 6) y = (x-1)^{-\frac{5}{7}} + 2.$$

1.229*. Используя изображение графика функции из упражнений 1.224—1.228, укажите для нее:

- а) область определения;
- б) множество (область) значений;
- в) при каких значениях x значения y положительны (отрицательны);
- г) координаты точек пересечения графика с осями координат.

1.230*. Изобразите (схематично) график функции и укажите ее область определения, множество (область) значений и промежутки возрастания и убывания:

- 1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^{\frac{3}{19}}$; 3) $y = |x|^{-3}$;
- 4) $y = |x|^{-23}$; 5) $y = |x-1|^{-12}$; 6) $y = |x+1|^{-62}$;
- 7) $y = |x+2|^{\frac{25}{3}}$; 8) $y = |x-2|^{\frac{21}{5}}$;
- 9) $y = |1-x|^{\frac{7}{10}} + 2$; 10) $y = |3-x|^{\frac{17}{20}} - 2$;
- 11) $y = |1+x|^{\frac{1}{23}} + 4$; 12) $y = |2+x|^{\frac{14}{9}} - 4$.

1.231*. Решите уравнение:

- 1) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 9$; 2) $x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{3}{7}} = -12$;
- 3) $x^{\frac{5}{9}} \cdot x^{\frac{13}{9}} = 4$; 4) $x^{\frac{7}{11}} \cdot x^{\frac{15}{11}} = 25$;
- 5) $\left(x^{\frac{1}{19}}\right)^{57} = -27$; 6) $\left(x^{\frac{1}{15}}\right)^{-45} = -\frac{1}{125}$;
- 7) $\left(x^{\frac{1}{22}}\right)^{88} = \frac{1}{81}$; 8) $\left(x^{\frac{1}{21}}\right)^{105} = -32$; 9) $\left(x^{\frac{1}{9}}\right)^{72} = 256$.

1.232*. Решите неравенство:

- 1) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 < 10$; 2) $\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{12} < 5$; 3) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 > 9$;
- 4) $\left(x^{\frac{2}{7}}\right)^7 > 25$; 5) $\left(x^{\frac{3}{16}}\right)^{16} < 125$; 6) $\left(x^{\frac{1}{14}}\right)^{14} > 27$.

1.13. Иррациональные уравнения

В этом пункте мы будем рассматривать уравнения, содержащие неизвестное (переменную) под знаком корня (радикала), — такие уравнения называют **иррациональными**.

Напомним на примерах два из возможных подходов к решению иррациональных уравнений (другие подходы будут рассмотрены в п. 1.14).

Первый подход состоит в **замене исходного уравнения равносильным ему уравнением (системой или совокупностью уравнений и неравенств)**. Поскольку все равносильные уравнения имеют одни и те же решения, то при этом подходе проверка полученных значений переменной по условию исходного уравнения не является необходимой частью решения.

Например, при решении иррациональных уравнений часто пользуются следующими утверждениями о равносильности:

$$1) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{можно записать } g(x) \geq 0).$$

Второй подход состоит в **замене исходного уравнения его следствием**. Поскольку решений у уравнения-следствия (системы или совокупности) может быть больше, чем у исходного уравнения, то **необходимой частью решения является проверка полученных значений переменной по условию исходного уравнения**.

Переход к следствию из данного уравнения при оформлении записи решения можно обозначать символом « \Rightarrow ».

Пример 1. Решить уравнение:

$$а) \sqrt[4]{x^4 + x^2 - x - 6} = x; \quad б) \sqrt[3]{x^2 - x^3 - x - 6} = -x.$$

Решение. *Способ 1.*

$$а) \sqrt[4]{x^4 + x^2 - x - 6} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^4 + x^2 - x - 6 = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (x = -2 \text{ или } x = 3) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$б) \sqrt[3]{x^2 - x^3 - x - 6} = -x \Leftrightarrow x^2 - x^3 - x - 6 = -x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ или } x = 3).$$

Ответ: а) 3; б) -2; 3.



Для уравнения а) покажем решение *способом 2*:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^4 + x^2 - x - 6} &= x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^4 + x^2 - x - 6 &= x^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -2 \text{ или } x = 3).\end{aligned}$$

Проверка: при $x = -2$ получим $\sqrt[4]{16 + 4 + 2 - 6} = -2$, т. е. $\sqrt[4]{16} = -2$ — неверное числовое равенство, значит, число -2 не является корнем уравнения а);

при $x = 3$ получим $\sqrt[4]{81 + 9 - 3 - 6} = 3$, т. е. $\sqrt[4]{81} = 3$ — верное числовое равенство, значит, число 3 — корень уравнения а).

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{6-x} - \sqrt{x-1} = 1$.

Решение. *Способ 1.*

$$\sqrt{6-x} - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow$$

при любых допустимых значениях x обе части уравнения неотрицательны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное уравнение

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow (1 + \sqrt{x-1})^2 &= (\sqrt{6-x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (3-x)^2, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x = 2 \text{ или } x = 5), \\ x \leq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 2.\end{aligned}$$

Ответ: 2.



Способ 2.

$$\begin{aligned}\sqrt{6-x} - \sqrt{x-1} = 1 &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow (1 + \sqrt{x-1})^2 = \\ &= (\sqrt{6-x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 &= (3-x)^2 \Leftrightarrow x-1 = 9+x^2-6x \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x=2 \text{ или } x=5).\end{aligned}$$

Проверка: $x = 2$ удовлетворяет исходному уравнению, а $x = 5$ не удовлетворяет (убедитесь в этом).

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[6]{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5x} = 0$.

Решение. *Способ 1.*

$$\sqrt[6]{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5x} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x - 2 = 0 \text{ или } \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \right).$$

Решив это уравнение и систему, получим $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

Ответ: -1 ; 2 ; 5 .



Способ 2. $\sqrt[6]{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x^2 - x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 5x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ или } x = 2 \text{ или } x = 0 \text{ или } x = 5).$$

Проверка по условию исходного уравнения показывает, что 0 не является его корнем, так как при $x = 0$ выражение $\sqrt[6]{x^2 - x - 2}$ равно $\sqrt[6]{-2}$, т. е. не имеет смысла. А числа -1 ; 2 ; 5 — являются корнями заданного уравнения.

▲ **Пример 4.** Решить уравнение с неизвестным x :

$$\sqrt{a-x} = a-x.$$

Решение. Имеем (объясните почему):

$$\sqrt{a-x} = a-x \Leftrightarrow a-x = (a-x)^2 \Leftrightarrow (x=a \text{ или } x=a-1).$$

Ответ: при любом значении a имеем $x_1 = a-1$, $x_2 = a$.

Пример 5. Решить уравнение относительно x :

$$\sqrt{x} = ax. \quad (1)$$

Решение. Очевидно, что $x = 0$ — корень уравнения (1) при любом значении a .

При $x > 0$ уравнение (1) равносильно уравнению $a\sqrt{x} = 1$.

Если $a \leq 0$, то это уравнение решений не имеет, а если $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$.

Ответ: если $a \leq 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{a^2}$. ▲



1. Что значит решить уравнение с одной переменной?
2. Какие уравнения называются равносильными?
3. Какое уравнение называется следствием данного уравнения?

Упражнения

Решите уравнение (1.233—1.247).

- 1.233°. 1) $\sqrt{12-x}+5=0$; 2) $\sqrt{6+x}+1=0$;
 3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=0$; 4) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x+4}=0$;
 5) $\sqrt{x^2+4}=-1$; 6) $\sqrt{x^4+25}=-4$;
 7) $\sqrt[4]{15+6x}=-6$; 8) $\sqrt[6]{21-3x}=-4$.
- 1.234°. 1) $\sqrt[4]{x^4+x^2+5x-14}=x$;
 2) $\sqrt[4]{x^4+x^2-4x-12}=x$;
 3) $\sqrt[3]{-x^3+x^2+8x-9}=-x$;
 4) $\sqrt[3]{-x^3+x^2+2x-15}=-x$;
 5) $\sqrt[5]{-32x^3-x^2-2x+24}=-2x$;
 6) $\sqrt[5]{-243x^3-x^2+5x+24}=-3x$.
- 1.235°. 1) $\sqrt{5+2x}=3$; 2) $\sqrt{3x+7}=4$;
 3) $\sqrt{x^2+19}=10$; 4) $\sqrt{61-x^2}=5$;
 5) $\sqrt[3]{6x+1}=-5$; 6) $\sqrt[3]{x-3}=-2$;
 7) $\sqrt[5]{x^3-32}=2$; 8) $\sqrt[4]{x^3-44}=3$.
- 1.236°. 1) $\sqrt{4x^2+5x+4}=2$; 2) $\sqrt{11-5x^2+3x}=3$;
 3) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$; 4) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.
- 1.237. 1) $\sqrt{11-\sqrt[3]{x+7}}=3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;
 3) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x^2+5}}=3$; 4) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;
 5) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2+4x+6}}=2$; 6) $\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{x^2+14x-16}}=1$.
- 1.238. 1) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+19}$;
 3) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x^2-5x+1}$; 4) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-4x+5}$;
 5) $\sqrt[8]{x^2-36}=\sqrt[8]{2x-1}$; 6) $\sqrt[10]{x^2-16}=\sqrt[10]{8-5x}$.
- 1.239. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{x+6}=x$;

- 3) $\sqrt{x+6}=-x$; 4) $\sqrt{x+2}=-x$;
 5) $\sqrt{7-x}=x-1$; 6) $\sqrt{5x+1}=1-x$;
 7) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 8) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.
- 1.240. 1) $\sqrt{x^2-x-14}=x+2$;
 2) $\sqrt{4x^2+7x+2}=2x-1$;
 3) $\sqrt[3]{x^3-9x^2+28x-27}=x-3$;
 4) $\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+8}=x+2$.
- 1.241. 1) $\sqrt{x^2+\sqrt{x+2}}=x+1$;
 2) $\sqrt{x^2+\sqrt{5x+19}}=x+3$;
 3) $\sqrt[3]{x^3-6x^2+4\sqrt{x+14}}=x-2$;
 4) $\sqrt[3]{x^3+3x^2-\sqrt{5-10x}}=x+1$.
- 1.242. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$; 2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;
 3) $3\sqrt{x}+\sqrt{11x-2}=6$; 4) $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}=2$;
 5) $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+3$; 6) $\sqrt{x-13}=\sqrt{8+x}-3$.
- 1.243. 1) $(x^2+5x)\sqrt{x-3}=0$;
 2) $(x^2+x)\sqrt{x-1}=0$;
 3) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$;
 4) $(x^2-16)\sqrt{2-x}=0$;
 5) $(x^2-11x+24)\sqrt{x^2-7x+10}=0$;
 6) $(x^2-2x-3)\sqrt{x^2+x-6}=0$.
- 1.244. 1) $\sqrt[4]{x^2-x-8}\cdot\sqrt[9]{x^2+2x}=0$;
 2) $\sqrt[8]{x^2-7x-18}\cdot\sqrt[12]{3x^2+18x}=0$;
 3) $\sqrt[6]{14-x^2-5x}\cdot\sqrt[9]{x^2-2x+1}=0$;
 4) $\sqrt[4]{40-x^2-3x}\cdot\sqrt[13]{x^2-4x+16}=0$;
 5) $\sqrt[3]{x^2-6x-16}\cdot\sqrt[4]{x^2+6x-27}=0$;
 6) $\sqrt[5]{x^2-x-12}\cdot\sqrt[20]{x^2-25}=0$.

1.245. 1) $(x+1)\sqrt{x^2-6x+17} = 3x+3$;

2) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$;

3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6} = 6x-6$;

4) $(x+2)\sqrt{x^2+2x-6} = 3x+6$.

1.246. 1) $\sqrt{x}-3=2\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;

3) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; 4) $9-8\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=0$;

5) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=18$; 6) $2\sqrt[8]{x}=3-\sqrt[4]{x}$.

1.247*. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение:

1) $\sqrt{x+a} = \sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{a-x} = \sqrt{7+2x}$;

3) $\sqrt{x+4} = a-2$; 4) $\sqrt{8-x} = a+1$;

5) $\sqrt{x-a} = 1-x$; 6) $\sqrt{a-x} = 1+x$;

7) $\frac{a}{\sqrt{x+2}} = 2-\sqrt{x}$; 8) $\frac{a}{\sqrt{x-5}} = 5+\sqrt{x}$?

1.248*. Решите уравнение с неизвестным x :

1) $\sqrt{x-4} = a$; 2) $\sqrt{x+1} = -a$;

3) $a\sqrt{x+2} = 0$; 4) $(x-a)\sqrt{x-3} = 0$;

5) $(x+1)\sqrt{x-a} = 0$; 6) $\sqrt{x}\sqrt{x-a} = 0$;

7) $\frac{x-a}{\sqrt{x-2}} = 0$; 8) $\frac{x-2}{\sqrt{x+a}} = 0$.

1.14. Решение иррациональных уравнений с использованием свойств функций

Уточним определение уравнения с одним неизвестным, данное в предыдущих классах.

Пусть f и g — функции от переменной x , D — множество всех значений переменной x , при которых определены обе эти функции. Равенство

$$f(x) = g(x)$$

называется **уравнением с переменной x** , а множество D — **областью определения** этого уравнения (или **областью допустимых значений переменной**).

Переменную в уравнении называют также **неизвестным**.

Корнем или **решением** уравнения называется такое число $c \in D$, что $f(c) = g(c)$ — верное числовое равенство.

Теорема. Уравнение

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

где f — возрастающая функция, g — убывающая функция, имеет не более одного корня, т. е. либо вообще не имеет корней, либо имеет единственный корень.

(Действительно, на рисунке 19, а, б видно, что графики возрастающей функции f и убывающей функции g пересекаются не более чем в одной точке.)

▲ Доказательство. Пусть x_0 — корень уравнения (1), т. е.

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Если $x < x_0$, то по определению возрастающей и убывающей функций имеем

$$f(x) < f(x_0), \quad g(x_0) < g(x).$$

Следовательно, $f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x)$, т. е. $f(x) < g(x)$.

Значит, никакое число $x < x_0$ корнем уравнения (1) не является. Аналогично доказывается, что и никакое число $x > x_0$ не является корнем уравнения (1). ▢ ▲

З а м е ч а н и е. Эта теорема справедлива и тогда, когда одна функция возрастающая (убывающая), а другая постоянная.

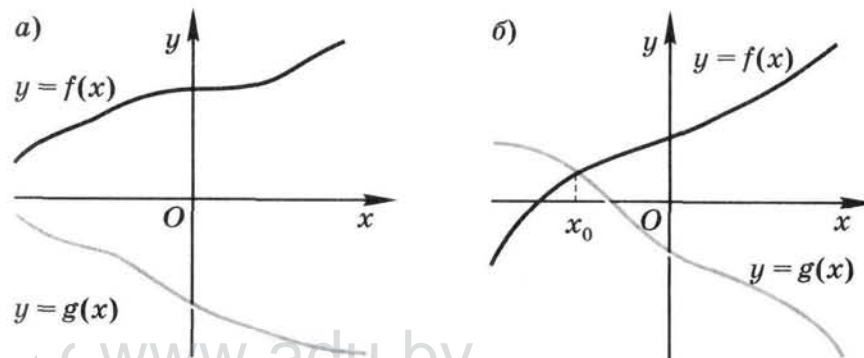


Рис. 19

Приведем несколько примеров, где при решении иррациональных уравнений используются свойства возрастания и убывания функций.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x-1} = 4-3x$.

Решение. *Способ 1.* Подбором находим, что $x=1$ является корнем данного уравнения. Действительно $\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 4 - 3 \cdot 1$ — верное числовое равенство.

Так как функция $f(x) = \sqrt{2x-1}$ возрастающая, а функция $g(x) = 4-3x$ убывающая, то согласно теореме $x=1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 1.



Способ 2. Возможно и другое решение:

$$\sqrt{2x-1} = 4-3x \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + 3x = 1.$$

Так как функция $h(x) = \sqrt{2x-1} + 3x$ возрастающая, то (см. замечание) уравнение $h(x)=1$ имеет не более одного решения. Подбором находим корень $x=1$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[10]{9-4x} = \sqrt[7]{2x-3}$.

Решение. Подбором находим, что число 2 — корень данного уравнения, поскольку $\sqrt[10]{9-4 \cdot 2} = \sqrt[7]{2 \cdot 2 - 3}$, т. е. $1=1$ — верное числовое равенство. Других корней уравнение не имеет, так как функция $f(x) = \sqrt[10]{9-4x}$ является убывающей, а функция $g(x) = \sqrt[7]{2x-3}$ — возрастающей.

Ответ: 2.

▲ Иногда при решении иррациональных (и других) уравнений бывает полезно предварительно найти область определения уравнения.

Пример 3. Решить уравнение:

$$a) (x+7)\sqrt{x+5} = (5-2x)(x+7); \quad (2)$$

$$б) (x+7)\sqrt{5-x} = (9-2x)(x+7). \quad (3)$$

Решение. а) Значение $x=-7$ не принадлежит области определения уравнения (2), поскольку при этом значении выражение $\sqrt{x+5}$ не имеет смысла. Поэтому $x+7 \neq 0$, и уравнение (2) равносильно уравнению

$$\sqrt{x+5} = 5-2x. \quad (4)$$

Решим это уравнение, переходя к уравнению-следствию:

$$x+5 = (5-2x)^2,$$

$$x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = 4.$$

Проверка показывает, что корнем уравнения (4) (а значит, и уравнения (2)) является значение $x = \frac{5}{4}$.

б) Очевидно, что $x=-7$ обращает уравнение (3) в верное числовое равенство и принадлежит области определения уравнения (3) — множеству $D=(-\infty; 5]$. Значит, $x=-7$ — корень уравнения (3).

При $x \neq -7$ уравнение (3) равносильно уравнению

$$\sqrt{5-x} = 9-2x. \quad (5)$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\sqrt{5-x} = 9-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x = (9-2x)^2, \\ 9-2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x=4 \text{ или } x=4\frac{3}{4}), \\ x \leq 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: а) 1,25; б) -7; 4.



Решение уравнения (3) с помощью знаков равносильности можно записать так:

$$\begin{aligned} & (x+7)\sqrt{5-x} = (9-2x)(x+7) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+7=0, \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \sqrt{5-x} = 9-2x \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=-7, \\ x \leq 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5-x = (9-2x)^2, \\ 9-2x \geq 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(x=-7 \text{ или } \begin{cases} (x=4 \text{ или } x=4\frac{3}{4}), \\ x \leq 4,5 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x=-7 \text{ или } x=4). \end{aligned}$$

Пример 4. Решить уравнение:

а) $1 - \sqrt{x^2 - 16} = \sqrt[6]{8x - 2x^2} + 3x$;

б) $12 + \sqrt[4]{x^2 - 16} = \sqrt[10]{8x - 2x^2} + 3x$.

Решение. а) Поскольку функция $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 16}$ определена для значений x , удовлетворяющих неравенству $x^2 - 16 \geq 0$, а функция $g(x) = \sqrt[6]{8x - 2x^2} + 3x$ определена для значений x , удовлетворяющих неравенству $8x - 2x^2 \geq 0$, то область определения данного уравнения совпадает со множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ 8x - 2x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем равносильную ей систему:

$$\begin{cases} x^2 \geq 16, \\ 2x(x - 4) \leq 0, \end{cases}$$

откуда имеем

$$\begin{cases} (x \leq -4 \text{ или } x \geq 4), \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

На рисунке 20 хорошо видно, что решением этой системы является только значение $x = 4$, т. е. $D = \{4\}$.



Рис. 20

Осталось проверить, является ли число 4 корнем данного уравнения. Подставив $x = 4$ в исходное уравнение, получим

$$1 - \sqrt{4^2 - 16} = \sqrt[6]{8 \cdot 4 - 2 \cdot 16} + 3 \cdot 4,$$

т. е. $1 = 12$ — неверное числовое равенство, значит, 4 не является корнем данного уравнения.

б) Решение этого примера аналогично решению примера а). Выполните его самостоятельно.

Ответ: а) нет корней; б) 4.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x-7} - \sqrt[4]{1-2x} = 3x-8.$$

Решение. Область определения данного уравнения совпадает со множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x-7 \geq 0, \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7, \\ x \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Поскольку система не имеет решений, то область определения не содержит ни одного числа. Значит, данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Иногда при решении уравнений бывает полезно обратить внимание на наибольшее или наименьшее значения входящих в них функций.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{36 + \sqrt{4 - x^2}} = 11.$$

Решение. Область определения уравнения совпадает со множеством решений неравенства $4 - x^2 \geq 0$, т. е. $D = [-2; 2]$.

Очевидно, что функция $f(x) = \sqrt{36 + \sqrt{4 - x^2}}$ имеет наибольшее значение $\sqrt{38}$ при $x = 0$. Таким образом, при любых значениях $x \in [-2; 2]$ верно неравенство $f(x) \leq \sqrt{38}$, а $\sqrt{38} < 11$, поэтому данное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений. ▲



1. Какое множество D называют областью определения уравнения $f(x) = g(x)$?
2. В каком случае уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня?
- 3*. Верно ли, что число x_0 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$, определенного на множестве D , если:

| | | |
|---------------------|------------------|------------------------|
| а) $x_0 \notin D$; | б) $x_0 \in D$; | в) $f(x_0) = g(x_0)$? |
|---------------------|------------------|------------------------|

Упражнения

Решите уравнение (1.249—1.257).

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| 1.249. 1) $\sqrt{3x+7} = 7-x$; | 2) $\sqrt{5+2x} = 5-x$; |
| 3) $\sqrt{x+1} = 11-x$; | 4) $\sqrt{x+3} = 15-x$; |
| 5) $\sqrt{2-x} = 4x-3$; | 6) $\sqrt{3-x} = 2x-3$. |

1.250*. 1) $\sqrt[10]{3x-5} = \sqrt[3]{17-8x}$; 2) $\sqrt[6]{9x-17} = \sqrt[5]{7-3x}$;
 3) $\sqrt[4]{13-4x} = \sqrt[7]{4x-11}$; 4) $\sqrt[8]{5x-19} = \sqrt[11]{4-x}$;
 5) $\sqrt[8]{3-x} = \sqrt[7]{-x^2+7x-12}$;
 6) $\sqrt[4]{2x+3} = \sqrt[5]{-2x^2-7x-6}$;
 7) $\sqrt[12]{x^2+3x-10} = \sqrt[7]{4-x^2}$;
 8) $\sqrt[10]{x^2+2x-8} = \sqrt[13]{4-x^2}$.

1.251*. 1) $\sqrt[7]{2x^2-3x-77} \cdot \sqrt{x^3-x} = 0$;
 2) $\sqrt[8]{3x^2-7x-20} \cdot \sqrt[3]{x^2-x-2} = 0$;
 3) $\sqrt[9]{\sqrt{x+2}(x-4)} \cdot \sqrt[4]{x^4-27x} = 0$;
 4) $\sqrt[11]{|x+4|\sqrt{x+5}} \cdot \sqrt[6]{x^6-32x} = 0$;
 5) $\sqrt[5]{x^3-3x^2+3x-1} \cdot \sqrt[6]{x^2-2x-15} = 0$;
 6) $\sqrt[13]{8x^3-36x^2+54x-27} \cdot \sqrt[10]{\sqrt{2-3x} \cdot (x+5)} = 0$.

1.252*. 1) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3-x$; 2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 9-x$;
 3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{7-x}$;
 4) $\sqrt{7+3x} - \sqrt{5-4x} = 1-2\sqrt{x+2}$.

1.253*. 1) $(x+4)\sqrt{2x-4} = (x+4)(x-1)$;
 2) $(3x-36)\sqrt{7-x} = (x-1)(3x-36)$;
 3) $(2x-30)\sqrt{8-x} = (4-2x)(x-15)$;
 4) $(3x+18)\sqrt{x-3} = (x-9)(3x+18)$;
 5) $(x-4)\sqrt{|x-2|+5} = (1-x)(x-4)$;
 6) $(x+4)\sqrt{3-|x+3|} = (x+4)(x+2)$.

1.254*. 1) $(x+3)(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}) = 2x+6$;
 2) $(x-5)(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}) = 3x-15$.

1.255*. 1) $5 - \sqrt{x^2-25} = \sqrt[6]{15x-3x^2} + x$;
 2) $8 - \sqrt[8]{x^2-4} = \sqrt[4]{-2x-x^2} - 4x$;
 3) $\sqrt[8]{x^2-49} + x = \sqrt{7x-x^2} + 7$;

4) $\sqrt{3x-x^2} - 2x + 6 = \sqrt{x^2-9}$;
 5) $6 - \sqrt[4]{49-x^2} = \sqrt[6]{-63-15x-x^2} + 4x$;
 6) $4 - \sqrt{x^2-64} = \sqrt[6]{8+7x-x^2} + 0,5x$.

1.256*. 1) $3 - \sqrt[10]{|x+4|-6} = \sqrt[6]{3-|2x-1|} - x$;
 2) $5 - \sqrt[6]{|x+2|-4} = \sqrt[10]{1-|x-1|} - 3x$;
 3) $8 - \sqrt[4]{|2x-3|-5} = \sqrt[16]{1-|x-5|} + 2x$;
 4) $12 - \sqrt[8]{|3x+1|-8} = \sqrt{6-|x+9|} - 4x$.

1.257*. 1) $\sqrt[6]{x-4} + \sqrt[8]{3-x} = x+9$;
 2) $\sqrt[10]{x-9} - \sqrt[8]{6-2x} = 5x-2$;
 3) $\sqrt{x-6} - \sqrt[6]{3x-x^2} = 4x-16$;
 4) $\sqrt[8]{5x-20} + \sqrt[4]{x-x^2} = 6x+1$.

1.15. Иррациональные неравенства

В этом пункте мы будем рассматривать неравенства, содержащие неизвестное (переменную) под знаком корня. Такие неравенства называются **иррациональными**.

При решении иррациональных неравенств мы часто используем подход, который уже применяли, решая иррациональные уравнения. Он состоит в замене исходного неравенства равносильным ему неравенством (системой или совокупностью неравенств).

Пример 1. Решить неравенство:

а) $\sqrt{2x-5} > -1$; б) $\sqrt[4]{3x+8} \geq -6$.

Решение. а) Учитывая свойства корня нечетной степени, получаем:

$$\sqrt{2x-5} > -1 \Leftrightarrow 2x-5 > (-1)^{-7} \Leftrightarrow x > 2.$$

б) По определению корня четной степени значения выражения $\sqrt[4]{3x+8}$ неотрицательны при всех значениях x , при которых это выражение имеет смысл, т. е. когда значения подкоренного выражения неотрицательны. Таким образом, имеем:

$$\sqrt[4]{3x+8} \geq -6 \Leftrightarrow 3x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2\frac{2}{3}.$$

Ответ: а) $(2; +\infty)$. б) $[-2\frac{2}{3}; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство:

$$\text{а) } \sqrt[10]{11-4x} \leq 0; \quad \text{б) } \sqrt[6]{21-2x} \leq 1.$$

Решение. а) По определению корня четной степени значения выражения $\sqrt[10]{11-4x}$ отрицательными быть не могут. Поэтому имеем:

$$\sqrt[10]{11-4x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt[10]{11-4x} = 0 \Leftrightarrow 11-4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}.$$

б) Поскольку обе части неравенства $\sqrt[6]{21-2x} \leq 1$ неотрицательны при всех значениях x , при которых его левая часть имеет смысл, то имеем:

$$\sqrt[6]{21-2x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 21-2x \geq 0, \\ 21-2x \leq 1^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{21}{2}, \\ x \geq \frac{20}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 10,5.$$

Ответ: а) $x = 2\frac{3}{4}$. б) $[10; 10,5]$.

При решении иррациональных неравенств часто используется также метод интервалов.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \leq 3-2x$.

Решение. Обозначим $f(x) = \sqrt{2x+3} + 2x - 3$. Найдем область определения функции f :

$$2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1,5.$$

Таким образом, $D(f) = [-1,5; +\infty)$.

Найдем нули функции f , т. е. корни уравнения $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 3 - 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+3 = (3-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-0,5 \text{ или } x=3). \end{aligned}$$

Проверка: $f(0,5) = \sqrt{2 \cdot 0,5 + 3} + 2 \cdot 0,5 - 3 = 0$;

$f(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} + 2 \cdot 3 - 3 = 6$. Значит, 0,5 — единственный нуль функции f .

Отметим нуль функции f на области определения $D(f)$ (рис. 21). Определим знаки значений функции f на образовавшихся интервалах, для чего вычислим:

$$f(0) = \sqrt{3} - 3 < 0;$$

$$f(1) = \sqrt{5} - 1 > 0.$$

Используя рисунок 21, запишем решение неравенства

$$f(x) \leq 0: x \in [-1,5; 0,5].$$

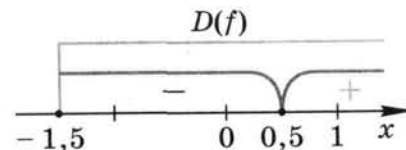


Рис. 21

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{2x+3} > 3-2x$.

Решение. Решение этого примера дословно повторяет решение примера 3.

Используя этот же рисунок, записываем решение неравенства $f(x) > 0: x \in (0,5; +\infty)$.

Ответ: $(0,5; +\infty)$.

▲ При решении иррациональных неравенств часто используются следующие утверждения о равносильности неравенств и систем неравенств:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \right). \quad (2)$$



Решим пример 3, используя равносильность (1):

$$\sqrt{2x+3} \leq 3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \leq (3-2x)^2, \\ 2x+3 \geq 0, \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geq 0, \\ x \geq -1,5, \\ x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-0,5)(x-3) \geq 0, \\ x \geq -1,5, \\ x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0,5 \text{ или } x \geq 3, \\ x \geq -1,5, \\ x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1,5 \leq x \leq 0,5.$$

Ответ: $[-1,5; 0,5]$.



Решим пример 4, используя равносильность (2):

$$\sqrt{2x+3} > 3-2x \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 3-2x \geq 0, \\ 2x+3 > (3-2x)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3-2x < 0, \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leq 1,5, \\ 2x^2 - 7x + 3 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 1,5, \\ x \geq -1,5 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leq 1,5, \\ 0,5 < x < 3 \end{cases} \text{ или } x > 1,5 \right) \Leftrightarrow x > 0,5.$$

Ответ: $(0,5; +\infty)$.

Для решения заданий такого типа, как, например, в 1.265, можно использовать следующие утверждения о равносильности:

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Аналогичные утверждения можно записать и для неравенств $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$. ▲



1. Какие неравенства называются иррациональными?

2. Опишите подходы к решению неравенств вида:

а) $\sqrt[4]{f(x)} > 5$; б) $\sqrt[5]{f(x)} \leq 2$; в) $\sqrt[3]{f(x)} \leq -3$.

3*. Запишите утверждения о равносильности для неравенств:

а) $\sqrt{f(x)} < g(x)$; б) $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$;

в) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$; г) $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$.

Упражнения

Решить неравенство (1.258—1.266).

1.258°. 1) $\sqrt{x-1} > 2$; 2) $\sqrt{x+2} > 3$;
3) $\sqrt{x-1} < 2$; 4) $\sqrt{x+2} < -3$;
5) $\sqrt{x-1} > -2$; 6) $\sqrt{x+2} > -3$;
7) $\sqrt{x-1} < -2$; 8) $\sqrt{x+2} < 3$.

1.259°. 1) $\sqrt{x^2-9} \leq -1$; 2) $\sqrt{x^4-16} < -5$;
3) $\sqrt{x^2-8} \leq 0$; 4) $\sqrt{x^4-32} \leq 0$;
5) $\sqrt{x^2} > 0$; 6) $\sqrt{x^2} < 0$; 7) $\sqrt{x^2} < 4$;
8) $\sqrt{x^2} > 9$; 9) $\sqrt{x^2} \geq 0$; 10) $\sqrt{x^2} \leq 0$.

1.260°. 1) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$; 2) $\sqrt{x^2+3x+1} < 1$;
3) $\sqrt{11+6x-5x^2} > -1$; 4) $\sqrt{-x^2-3x+4} > -2$.

1.261°. 1) $\sqrt{2-\sqrt{x}} > 1$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{x}} > 2$;
3) $\sqrt{4+\sqrt{x}} < 3$; 4) $\sqrt{6+\sqrt{x}} < 1$.

1.262. 1) $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} < 0$; 2) $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1} > 0$; 3) $\frac{4+\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} > 0$;
4) $\frac{2-\sqrt{x}}{7+\sqrt{x}} < 0$; 5) $\frac{\sqrt{x}-10}{2-\sqrt{x}} \leq 0$; 6) $\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} \geq 0$;
7) $\frac{\sqrt{x}}{7-\sqrt{x}} \geq 0$; 8) $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} \leq 0$.

1.263. 1) $(x-1)\sqrt{x} \leq 0$; 2) $(x-2)\sqrt{x} \leq 0$;
3) $(x-1)\sqrt{x} \geq 0$; 4) $(x-2)\sqrt{x} \geq 0$;
5) $(x-1)\sqrt{x} < 0$; 6) $(x-2)\sqrt{x} < 0$;
7) $(x-1)\sqrt{x} > 0$; 8) $(x-2)\sqrt{x} > 0$.

1.264. 1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leq 0$; 2) $(x+8)\sqrt{x-2} \leq 0$;
3) $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$; 4) $(x-6)\sqrt{x-1} \leq 0$;
5)* $(x^2-4)\sqrt{x-1} \leq 0$; 6)* $(x^2-9)\sqrt{x-3} \leq 0$;
7)* $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0$;
8) $(x+1)\sqrt{(x+4)(x+7)} \leq 0$.

1.265*. 1) $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x-2} > \sqrt{3-x}$;
3) $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-x}$; 4) $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$;
5) $\sqrt{3-7x} \geq \sqrt{6x-8}$; 6) $\sqrt{5-2x} \leq \sqrt{3x-9}$;
7) $\sqrt{5-x} \leq \sqrt{x+1}$; 8) $\sqrt{8-x} \geq \sqrt{x+2}$.

1.266*. 1) $\sqrt{x-3} < x-2$; 2) $\sqrt{x-2} > x$;
3) $\sqrt{5+x} > x$; 4) $\sqrt{x+6} > x$;
5) $\sqrt{5x-x^2} > x-2$; 6) $\sqrt{5x-x^2} < x-2$;
7) $\sqrt{9-x^2} > 3x$; 8) $\sqrt{x^2+5x+7} < 3-x$.

Глава 2

Показательная и логарифмическая функции

2.1. Степень с действительным показателем

Мы уже знаем, что такое степень с рациональным показателем. Теперь определим степень с иррациональным показателем при основании $a > 0$. Сделаем это сначала для основания $a > 1$.

Пусть s — иррациональное число. Возьмем такие рациональные числа r и t , что

$$r < s < t.$$

Тогда по свойству степени с рациональным показателем $a^r < a^t$. Будет естественно определить степень a^s так, чтобы это число удовлетворяло неравенству

$$a^r < a^s < a^t.$$

Именно так мы и поступим.

Определение. Пусть $a > 1$. *Степенью числа a с иррациональным показателем s* называется такое число b , что

$$a^r < b < a^t$$

при любых рациональных значениях r и t , удовлетворяющих неравенству

$$r < s < t.$$

Это число b обозначается a^s .



Утверждение о существовании и единственности такого числа b мы принимаем без доказательства.

Аналогично для положительного числа $a < 1$.

Определение. Пусть $0 < a < 1$. *Степенью числа a с иррациональным показателем s* называется такое число b , что

$$a^t < b < a^r$$

при любых рациональных значениях r и t , удовлетворяющих неравенству

$$r < s < t.$$

Это число b обозначается a^s .



Утверждение о существовании и единственности такого числа b мы принимаем без доказательства.

Наконец определим степень с основанием 1.

Определение. Для любого иррационального числа s

$$1^s = 1.$$

Таким образом, при положительном основании понятие степени определено для любого рационального и для любого иррационального показателя, т. е. для любого действительного показателя. При этом все действия со степенями с произвольными действительными показателями обладают теми же свойствами, что и действия со степенями с рациональными показателями. Эти свойства мы сформулируем в следующей теореме, которую примем без доказательства.

Теорема. Для любых значений $a > 0$ и $b > 0$ при любых действительных s и t верны равенства:

$$a^s a^t = a^{s+t}; \quad (1)$$

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}; \quad (2)$$

$$(a^s)^t = a^{st}; \quad (3)$$

$$(ab)^s = a^s b^s; \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}. \quad (5)$$

Пример 1. Расположить в порядке убывания числа:

$$\text{а) } 0,63^3, 0,63^{3,5}, 0,63^{\sqrt{11}}; \quad \text{б) } 11,7^{1,4}, 11,7^{1,7}, 11,7^{\frac{\pi}{2}}.$$

Решение. а) Сравним числа 3; 3,5 и $\sqrt{11}$. Поскольку $3 = \sqrt{9}$, $3,5 = \sqrt{12,25}$, а $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{12,25}$, то

$$3 < \sqrt{11} < 3,5.$$

Значит, по определению степени с иррациональным показателем при основании 0,63 получим верное неравенство

$$0,63^{3,5} < 0,63^{\sqrt{11}} < 0,63^3.$$

б) Сравним числа $1,4$; $1,7$ и $\frac{\pi}{2}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3,14}{2} = 1,57$, то

$$1,4 < \frac{\pi}{2} < 1,7.$$

Значит, по определению степени с иррациональным показателем при основании $11,7$ получим верное неравенство

$$11,7^{1,4} < 11,7^{\frac{\pi}{2}} < 11,7^{1,7}.$$

Ответ: а) $0,63^3$; $0,63^{\sqrt{11}}$; $0,63^{3,5}$; б) $11,7^{1,7}$; $11,7^{\frac{\pi}{2}}$; $11,7^{1,4}$.

Пример 2. Пользуясь определением степени с иррациональным показателем, записать по три верных двойных неравенства для степени a^s , если:

а) $a = 4$; $s = \sqrt{13}$; б) $a = \frac{5}{7}$; $s = \pi$.

Решение. а) Запишем три верных двойных неравенства сначала для показателя $s = \sqrt{13}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}, \quad \text{т. е.} \quad 3 < \sqrt{13} < 4; \\ \sqrt{12,25} < \sqrt{13} < \sqrt{13,69}, \quad \text{т. е.} \quad 3,5 < \sqrt{13} < 3,7; \\ \sqrt{12,96} < \sqrt{13} < \sqrt{13,69}, \quad \text{т. е.} \quad 3,6 < \sqrt{13} < 3,7. \end{aligned}$$

По определению степени с иррациональным показателем при основании $4 > 1$ будут верны и неравенства

$$\begin{aligned} 4^3 < 4^{\sqrt{13}} < 4^4; \\ 4^{3,5} < 4^{\sqrt{13}} < 4^{3,7}; \\ 4^{3,6} < 4^{\sqrt{13}} < 4^{3,7}. \end{aligned}$$

б) Запишем три верных двойных неравенства сначала для показателя $s = \pi$. Так как $\pi \approx 3,1415$, то имеем

$$\begin{aligned} 3 < \pi < 4; \\ 3,1 < \pi < 3,2; \\ 3,14 < \pi < 3,15. \end{aligned}$$

По определению степени с иррациональным показателем при основании $0 < \frac{5}{7} < 1$ будут верными и неравенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{7}\right)^4 < \left(\frac{5}{7}\right)^{\pi} < \left(\frac{5}{7}\right)^3; \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{3,2} < \left(\frac{5}{7}\right)^{\pi} < \left(\frac{5}{7}\right)^{3,1}; \\ \left(\frac{5}{7}\right)^{3,15} < \left(\frac{5}{7}\right)^{\pi} < \left(\frac{5}{7}\right)^{3,14}. \end{aligned}$$



1. Сформулируйте определение степени числа a , большего 1, с иррациональным показателем s .
2. Сформулируйте определение степени положительного числа a , меньшего 1, с иррациональным показателем s .
3. Сформулируйте определение степени числа 1 с иррациональным показателем s .
4. Сформулируйте определение степени положительного числа a для случаев, когда показатель:
 - а) натуральное число, больше 1;
 - б) 1;
 - в) 0;
 - г) отрицательное число;
 - д) рациональное число вида $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$;
 - е) любое иррациональное число.
5. Сформулируйте теорему о действиях над степенями с произвольными действительными показателями.

Упражнения

2.1°. Расположите в порядке возрастания числа:

- 1) $0,7^{1,5}$; $0,7^2$; $0,7^{\sqrt{2}}$; $0,7^{0,2}$;
- 2) $3,4^{2,7}$; $3,4^{\sqrt{5}}$; $3,4^3$; $3,4^{2,2}$;
- 3) $4,1^{2,2}$; $4,1^{\sqrt{10}}$; $4,1^{3,5}$; $4,1^3$;
- 4) $0,2^{1,7}$; $0,2^{\sqrt{3}}$; $0,2^{3,9}$; $0,2^{1,5}$;
- 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; $2^{-0,5}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $8^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$;
- 6) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $25^{\frac{\sqrt{19}}{6}}$; $\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{0,1}}$.

2.2°. Пользуясь определением степени с иррациональным показателем, запишите по три верных двойных неравенства для a^s , если:

- 1) $a = 3$; $s = \sqrt{2}$; 2) $a = 0,7$; $s = \sqrt{3}$;
- 3) $a = 0,1$; $s = \frac{\pi}{3}$; 4) $a = 5$; $s = \frac{\pi}{2}$;
- 5) $a = \arcsin \frac{1}{2}$; $s = \sqrt{5}$; 6) $a = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; $s = \sqrt{7}$.

2.3. Сравните числа:

- 1) $2^{\sin \frac{\pi}{3}}$ и $2^{\sqrt{3}}$; 2) $4^{\lg \frac{\pi}{3}}$ и $4^{\sqrt{2}}$;

- 3) $3,5^{-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}$ и 1;
 5) $3^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$ и $3^{\sin \frac{\pi}{4}}$;
 7) $0,11^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}}$ и $0,11^{\operatorname{tg} 0}$;
 4) 1 и $0,8^{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$;
 6) $7^{\sin \frac{\pi}{4}}$ и $7^{\cos \frac{\pi}{6}}$;
 8) $0,17^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$ и $0,17^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}}$.

Упростите (2.4—2.9).

- 2.4. 1) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot 9^{-\sqrt{3}}}$;
 3) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$;
 5) $\left((\sqrt{6})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;
 7) $2^{(\sqrt{2}+1)^2} : 4^{\sqrt{2}}$;
 2) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 25^{-\sqrt{5}}}$;
 4) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
 6) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;
 8) $3^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{3}}$;
 2.5. 1) $2^{\sin^2 \frac{\pi}{5}} \cdot 2^{\cos^2 \frac{\pi}{5}}$;
 3) $\left(4^{2\sin \frac{\pi}{12}}\right)^{\cos \frac{\pi}{12}}$;
 5) $5^{\cos^2 \frac{\pi}{6}} : 5^{\sin^2 \frac{\pi}{6}}$;
 7) $0,04 : 0,04^{\cos 120^\circ}$;
 9) $49^{\cos^2 30^\circ} : 49^{\sin^2 30^\circ}$;
 2) $\left(3^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}}\right)^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}}$;
 4) $\left(0,5^{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}\right)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}}$;
 6) $0,09 \cdot 0,09^{\cos \frac{2\pi}{3}}$;
 8) $0,13^{\cos^2 \frac{\pi}{13}} \cdot 0,13^{\sin^2 \frac{\pi}{13}}$;
 10) $\left(16^{2\cos 15^\circ}\right)^{\sin 15^\circ}$.

- 2.6. 1) $4^{\arcsin \frac{1}{2}} \cdot 4^{\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 4^{\operatorname{arctg} 0} : 4^{\arccos (-1)}$;
 2) $7^{\arccos \frac{1}{2}} \cdot 7^{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 7^{\operatorname{arctg} 1} : 7^{\arcsin 1 + \pi}$;
 3) $\left(0,2^{\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{3}{\pi}} + \left(0,96^{\operatorname{arctg} (-1)}\right)^{-\frac{4}{\pi}}$;
 4) $\left(0,64^{\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{-\frac{6}{\pi}} + \left(0,6^{\operatorname{arctg} (-1)}\right)^{\frac{8}{3\pi}}$.

- 2.7*. 1) $\frac{m^{2\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{2}}}{(m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{2}})^2} + 1$;
 3) $\frac{m^{2\sqrt{8}} - m^{\sqrt{8}}}{m^{\sqrt{8}}} - m^{\sqrt{8}}$;
 5) $\frac{m^{2\sqrt{3}} - n^{2\sqrt{3}}}{m^{2\sqrt{3}} + n^{2\sqrt{3}} + 2m^{\sqrt{3}}n^{\sqrt{3}}} \cdot (m^{\sqrt{3}} + n^{\sqrt{3}})^2$;
 2) $1 - \frac{(m^{\sqrt{3}} + n^{\sqrt{3}})^2}{m^{2\sqrt{3}} - n^{2\sqrt{3}}}$;
 4) $\frac{n^{3\sqrt{10}} + n^{2\sqrt{10}}}{n^{2\sqrt{10}}} - n^{\sqrt{10}}$;

$$6) \frac{m^{2\sqrt{5}} - n^{2\sqrt{5}}}{m^{2\sqrt{5}} + n^{2\sqrt{5}} - 2m^{\sqrt{5}}n^{\sqrt{5}}} \cdot (m^{\sqrt{5}} - n^{\sqrt{5}})^2.$$

- 2.8*. 1) $\frac{m^{3\sqrt{6}} - n^{3\sqrt{6}}}{m^{2\sqrt{6}} + m^{\sqrt{6}}n^{\sqrt{6}} + n^{2\sqrt{6}}}$;
 3) $\frac{m^{\sqrt{3}} + n^{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{3}}{m^3} - \frac{\sqrt{3}}{m^3} \frac{\sqrt{3}}{n^3} + \frac{2\sqrt{3}}{n^3}}$;
 5) $\frac{m^{\sqrt{2}}}{1 - m^{3\sqrt{2}}} : \frac{m^{\sqrt{2}} + m^{2\sqrt{2}}}{m^{2\sqrt{2}} + m^{\sqrt{2}} + 1}$;
 2) $\frac{m^{3\sqrt{10}} + n^{3\sqrt{10}}}{m^{2\sqrt{10}} - m^{\sqrt{10}}n^{\sqrt{10}} + n^{2\sqrt{10}}}$;
 4) $\frac{m^{\sqrt{5}} - n^{\sqrt{5}}}{\frac{2\sqrt{5}}{m^3} + \frac{\sqrt{5}}{m^3} \frac{\sqrt{5}}{n^3} + \frac{2\sqrt{5}}{n^3}}$;
 6) $\frac{m^{3\sqrt{7}} + 27}{m^{\sqrt{7}}} : \frac{m^{2\sqrt{7}} - 3m^{\sqrt{7}} + 9}{m^{\sqrt{7}} - m^{2\sqrt{7}}}.$

- 2.9. 1) $\left(\frac{a^{\sqrt{2}} + 2}{a^{\sqrt{2}} - 2} + \frac{a^{\sqrt{2}} - 2}{a^{\sqrt{2}} + 2} - \frac{16}{a^{2\sqrt{2}} - 4}\right)^2$;
 2) $\left(\frac{a^{\sqrt{7}} - 4}{a^{\sqrt{7}} + 4} + \frac{a^{\sqrt{7}} + 4}{a^{\sqrt{7}} - 4} - \frac{64}{a^{2\sqrt{7}} - 16}\right)^2$;
 3) $\left(\frac{2}{(1 - a^{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{a^{2\sqrt{2}} - 1}\right)(a^{\sqrt{2}} - 1)^2 - \frac{3a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} + 1}$;
 4) $\left(\frac{2}{(2a^{\sqrt{5}} + 1)^2} - \frac{1}{1 - 4a^{2\sqrt{5}}}\right) : \frac{1}{(1 + 2a^{\sqrt{5}})^2} - \frac{6a^{\sqrt{5}}}{2a^{\sqrt{5}} - 1}$;
 5) $\left(\frac{a^{\sqrt{3}} + 1}{a^{\sqrt{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt{3}} - 1}{a^{\sqrt{3}} + 1} + 4a^{\sqrt{3}}\right)\left(a^{\sqrt{3}} - \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}\right)$;
 6) $\left(\frac{a^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}} - b^{\sqrt{10}}} - \frac{a^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}} + b^{\sqrt{10}}}\right)\left(\frac{a^{\sqrt{10}}}{b^{\sqrt{10}}} + \frac{b^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}}} - 2\right).$

2.2. Показательная функция

Рассмотрим выражение a^x , где a — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$, а x — переменная. Это выражение имеет смысл при любом действительном значении x , поэтому его естественной областью определения является множество всех действительных чисел.

Определение. *Показательной функцией* называется функция вида $y = a^x$, где a — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$.

Область определения показательной функции — это естественная область определения выражения a^x , т. е. множество всех действительных чисел.

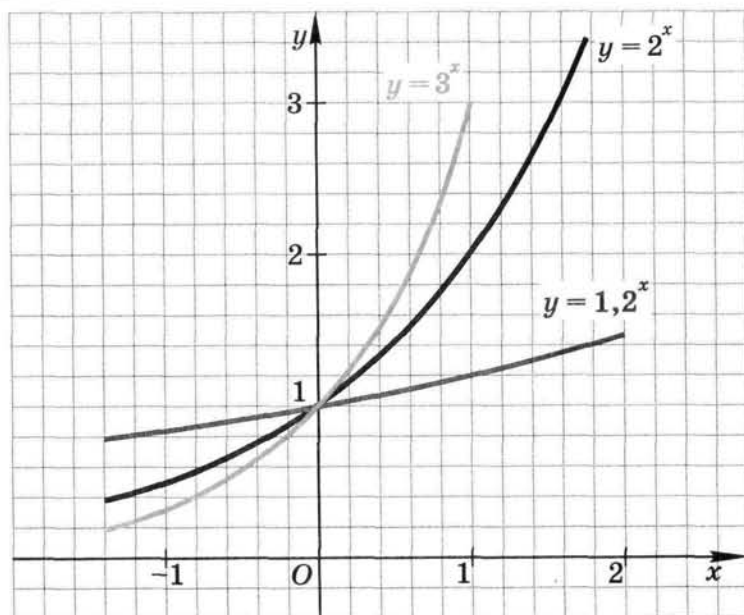


Рис. 22

Графики некоторых показательных функций при $a > 0$ изображены на рисунке 22, при $0 < a < 1$ — на рисунке 23. Как получаются изображения таких графиков?

Например, чтобы изобразить график функции $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, придадим несколько значений аргументу, вычислим соответствующие значения функции и внесем их в таблицу:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|---------------|----------------|-----------------|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | $\frac{16}{81}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{27}{8}$ | $\frac{81}{16}$ |

Вычислив приближенные значения y с точностью до 0,1, получим следующую таблицу:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,7 | 1 | 1,5 | 2,3 | 3,4 | 5 |

Отметим точки $(x; y)$ с указанными координатами на координатной плоскости Oxy (рис. 24) и соединим эти точки плавной непрерывной линией.

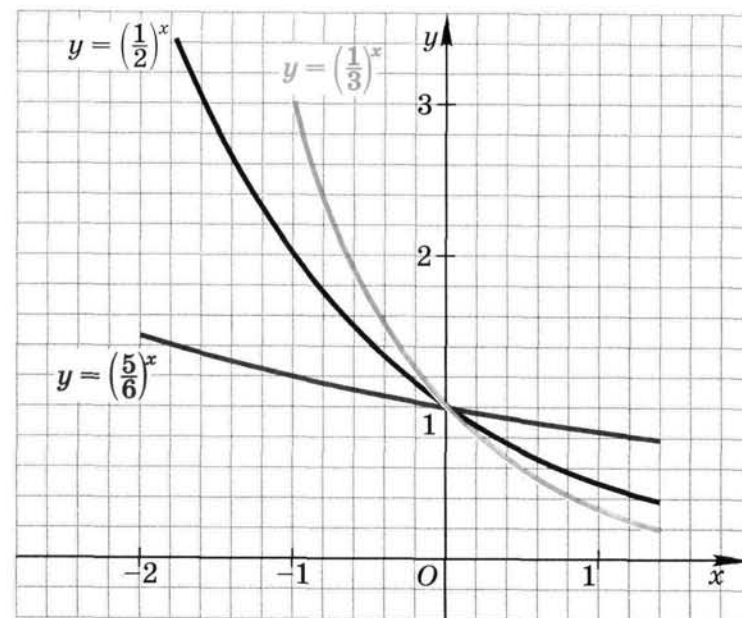


Рис. 23

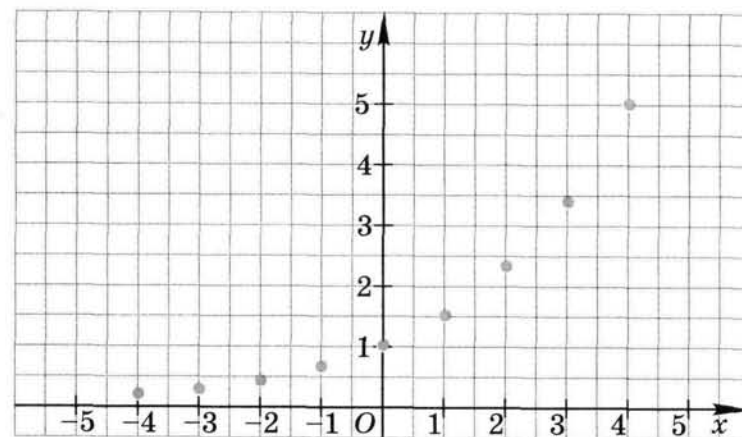


Рис. 24

Полученную кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (рис. 25).

График функции $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ расположен над осью Ox и пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$. Заметим еще, что когда значения аргумента x уменьшаются, то график этой функции «прижимается» к оси Ox , а

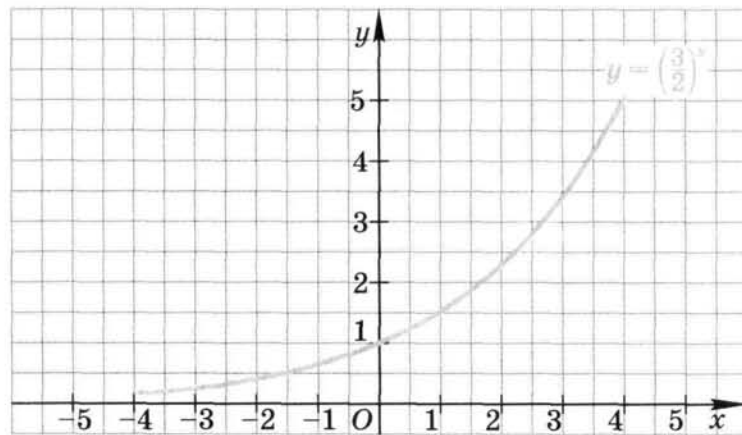


Рис. 25

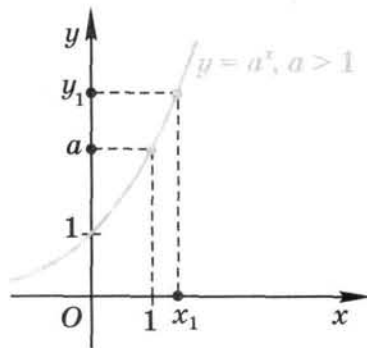


Рис. 26

когда значения аргумента x увеличиваются, то график «круто поднимается» вверх.

Аналогично для любой функции $y = a^x$ при $a > 1$ (рис. 26).

Изобразим теперь график функции $y = (\frac{2}{3})^x$. Для этого придадим несколько значений аргументу, вычислим соответствующие значения функции и внесем их в таблицу:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|---------------|----------------|-----------------|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | $\frac{81}{16}$ | $\frac{27}{8}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{16}{81}$ |

Вычислив приближенные значения y с точностью до 0,1, получим следующую таблицу:

| | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|-----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 3,4 | 2,3 | 1,5 | 1 | 0,7 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

Отметим точки $(x; y)$ с указанными координатами на координатной плоскости Oxy (рис. 27) и соединим эти точки плавной непрерывной линией.

Рис. 27

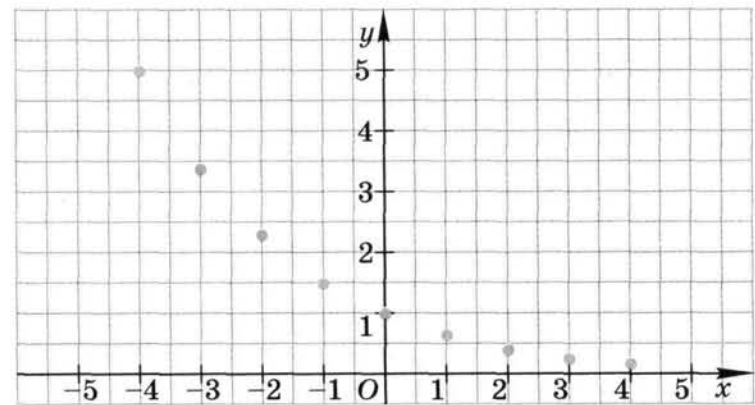
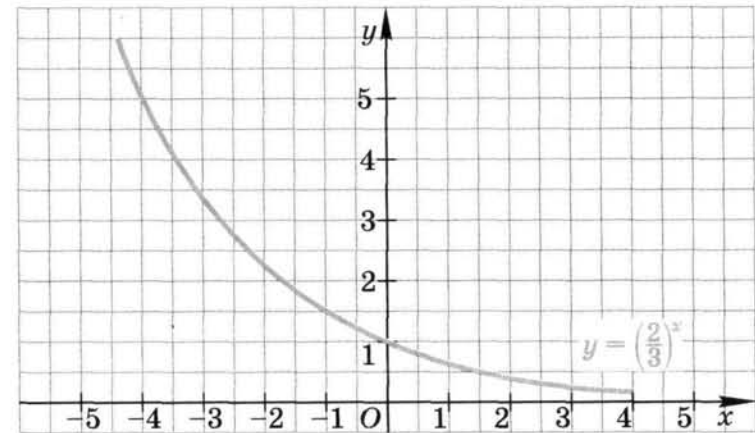


Рис. 28



Полученную кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y = (\frac{2}{3})^x$ (рис. 28).

График функции $y = (\frac{2}{3})^x$ расположен над осью Ox и пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$. Заметим еще, что когда значения аргумента x увеличиваются, то график этой функции «прижимается» к оси Ox , а когда значения аргумента x уменьшаются, то график «круто поднимается» вверх.

Аналогично для любой функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ (рис. 29).

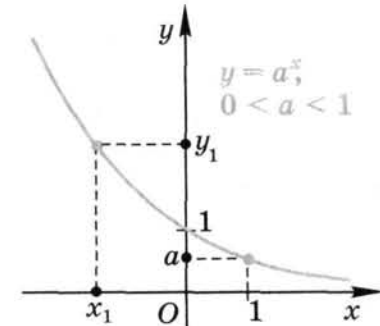


Рис. 29

Теорема (о свойствах показательной функции $y = a^x$; $a > 0, a \neq 1$)

1. Областью определения показательной функции является множество \mathbf{R} всех действительных чисел.
2. Множеством (областью) значений показательной функции является интервал $(0; +\infty)$.
3. Показательная функция наименьшего и наибольшего значений не имеет.
4. График показательной функции пересекается с осью ординат в точке $(0; 1)$ и не пересекается с осью абсцисс.
5. Показательная функция не имеет нулей.
6. Показательная функция принимает положительные значения на всей области определения; все точки ее графика лежат выше оси Ox в I и II координатных углах.
7. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной.
8. При $a > 1$ показательная функция возрастает на всей области определения. При $0 < a < 1$ показательная функция убывает на всей области определения.
9. Показательная функция не является периодической.

Свойства, указанные в этой теореме, мы примем без доказательства.

Изображение графика показательной функции позволяет наглядно представить эти свойства.

Множество (область) значений показательной функции — это проекция ее графика на ось Oy , а на рисунках 26 и 29 видно, что эта проекция есть интервал $(0; +\infty)$ на оси Oy . Это значит, что для любой точки y_1 , принадлежащей этому интервалу, найдется такая точка x_1 на оси Ox , что $y_1 = a^{x_1}$ (свойство 2).

Множество (область) значений показательной функции — это интервал $(0; +\infty)$, а в этом интервале нет ни наименьшего числа, ни наибольшего (свойство 3).

График показательной функции проходит через точку $(0; 1)$ и лежит в верхней полуплоскости (свойства 4, 5, 6).

График показательной функции не симметричен относительно оси ординат, поэтому она не является четной, и не симметричен от-

носительно начала координат, поэтому она не является нечетной (свойство 7).

На рисунке 26 видно, что при $a > 1$ показательная функция возрастает, а на рисунке 29 видно, что при $0 < a < 1$ показательная функция убывает (свойство 8).

На графике периодической функции есть бесконечно много точек с одинаковыми ординатами, а на графике показательной функции нет точек с одинаковыми ординатами (свойство 9).

▲ К графику показательной функции $y = a^x$ можно провести неvertикальную касательную в любой его точке, в том числе и в точке $(0; 1)$ (напомним, что это означает наличие производной функции в этой точке).

Если $a > 1$, то угол α , который образует такая касательная с осью Ox , острый. Например, если $a = 2$, то $\alpha \approx 38^\circ < 45^\circ$ (рис. 30, а), а если $a = 3$, то $\alpha \approx 47^\circ > 45^\circ$ (рис. 30, б).

Существует основание $2 < a < 3$ такой единственной показательной функции, что касательная, проведенная к ее графику в точке $(0; 1)$, образует с осью Ox угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 30, в).

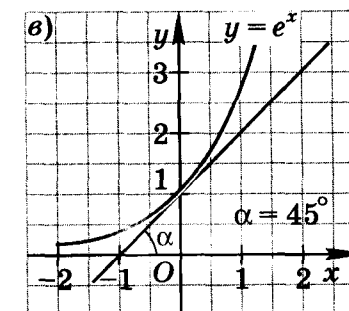
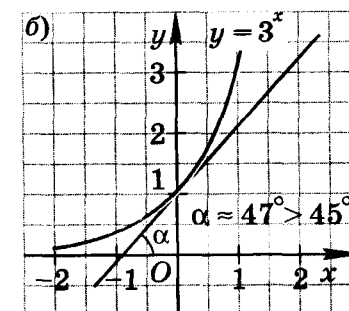
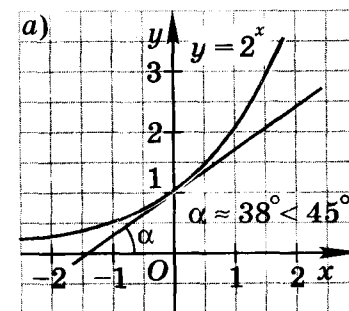


Рис. 30

А

Основанием показательной функции с таким свойством является число, которое было открыто еще в XVII в. Джоном Непером (его портрет — на обложке) и названо **неперовым числом**; оно приблизительно равно 2,7182818284. С XVIII в. неперово число стали обозначать буквой **e** в честь великого Леонарда Эйлера. В 1766 г. Ламбертом (с помощью приема Эйлера) было доказано, что число e , как

и число π , иррационально. Числа e и π очень важны для математики, они входят в большое число формул.

В российских гимназиях для запоминания приближенного значения числа e использовали такое двустишие:

«Помнить, e — закон простой:

Два, семь, дважды Лев Толстой»,

поскольку 1828 — год рождения великого русского писателя Л. Н. Толстого. ▲

Пример. Указать наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют):

$$а) y = 3^{x^2}; \quad б) y = \frac{1}{3} \cdot 0,7^{\sin x}.$$

Решение. а) Поскольку число 3 больше 1, то большему значению показателя x^2 соответствует и большее значение степени 3^{x^2} . Но выражение x^2 при $x = 0$ имеет наименьшее значение, а наибольшего значения не имеет. Значит, при любых значениях x верно неравенство

$$3^{x^2} \geq 3^0, \text{ т. е. } 3^{x^2} \geq 1.$$

б) Поскольку число 0,7 положительно и меньше 1, то большему значению показателя $\sin x$ соответствует меньшее значение степени $0,7^{\sin x}$. Значения выражения $\sin x$ при любых значениях x удовлетворяют неравенству

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Таким образом, при любых значениях x верно неравенство

$$0,7^1 \leq 0,7^{\sin x} \leq 0,7^{-1}.$$

Значит, верно и неравенство

$$\frac{1}{3} \cdot 0,7 \leq \frac{1}{3} \cdot 0,7^{\sin x} \leq \frac{1}{3} \cdot 0,7^{-1}, \text{ т. е. } \\ \frac{7}{30} \leq \frac{1}{3} \cdot 0,7^{\sin x} \leq \frac{10}{21}.$$

Ответ: а) 1 — наименьшее значение функции $y = 3^{x^2}$; наибольшего значения нет;

б) $\frac{7}{30}$ — наименьшее значение, а $\frac{10}{21}$ — наибольшее значение функции $y = \frac{1}{3} \cdot 0,7^{\sin x}$.



1. Сформулируйте определение показательной функции.
2. Сформулируйте теорему о свойствах показательной функции $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).
3. Как можно убедиться, что показательная функция с основанием $0 < a < 1$:
 - а) не принимает наибольшего значения;
 - б) не принимает наименьшего значения;
 - в) не является четной;
 - г) не является нечетной;
 - д) не является периодической?
4. Пусть f — показательная функция. Докажите, не пользуясь изображением ее графика, что:
 - а) функция f не является четной;
 - б) функция f не является нечетной.
- 5*. Что вы знаете о числе e ?

Упражнения

2.10°. Является ли показательной функция:

- | | | |
|-----------------------|-------------------|--|
| 1) $y = 3^x$; | 2) $y = x^2$; | 3) $y = (-3)^x$; |
| 4) $y = \sqrt{3^x}$; | 5) $y = x$; | 6) $y = (x - 2)^5$; |
| 7) $y = \pi^x$; | 8) $y = 5^{-x}$; | 9) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2x}$? |

2.11°. Используя изображение графика функции $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (см. рис. 25), укажите приближенно с точностью до 0,1 значения функции при x , равном:

- | | | | |
|----------|----------|----------|---------|
| 1) 1,5; | 2) -1,5; | 3) -2,5; | 4) 2,5; |
| 5) -0,5; | 6) -1,3; | 7) 2,8; | 8) 3,5. |

Изобразите схематично график функции (2.12—2.13).

- 2.12°. 1) $y = 4^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = 3,5^x$;
4) $y = 2,5^x$; 5) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$; 6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

- 2.13°. 1) $y = (\sqrt{0,4})^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 3) $y = \sqrt{3^x}$;

- 4) $y = \sqrt{\left(\frac{6}{19}\right)^x}$; 5) $y = \pi^x$; 6) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$;

- 7) $y = \left(\frac{\pi}{6}\right)^x$; 8) $y = 0,2009^x$; 9) $y = 2008,2007^x$.

2.14. При каком значении a график функции $y = a^x$ проходит через точку:

- 1) $A(1; 2)$; 2) $B(2; 9)$; 3) $C(2; 16)$;
4) $D(-2; 4)$; 5) $K(-3; \frac{1}{27})$; 6) $M(\frac{1}{2}; \sqrt{2})$?

2.15. 1) Найдите значение m , если точка $A(\sin 30^\circ; m)$ принадлежит графику функции $y = 25^x$.

2) Найдите значение k , если точка $D(\cos 60^\circ; k)$ принадлежит графику функции $y = 16^x$.

2.16. 1) Найдите значение p , если точка $B(p; 16 \cos \frac{\pi}{3})$ принадлежит графику функции $y = 2^x$.

2) Найдите значение t , если точка $M(t; 32 \sin \frac{\pi}{2})$ принадлежит графику функции $y = 2^x$.

2.17. Укажите координаты точки пересечения графиков функции:

- 1) $y = 2^x$ и $y = 8$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;
3) $y = (\frac{1}{3})^x$ и $y = 9$; 4) $y = (\frac{1}{4})^x$ и $y = \frac{1}{64}$.

2.18. Имеет ли график функции $y = 2^x$ общие точки с прямой:

- 1) $y = 12$; 2) $y = -3$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0,0001$?

2.19. Имеет ли график функции $y = 2^x - 1$ общие точки с прямой:

- 1) $y = 6$; 2) $y = -1$; 3) $y = 0$; 4) $y = -1,004$?

2.20. Имеет ли график функции $y = 2^x + 2$ общие точки с прямой:

- 1) $y = 7$; 2) $y = 1$; 3) $y = 2$; 4) $y = 2,05$?

2.21°. Сравните:

- 1) $1,8^0$ и 1 ; 2) 1 и $0,4^2$;
3) $4,3^{1,5}$ и $4,3^{1,6}$; 4) $0,3^{-3}$ и $0,3^{-2}$;
5) $(\frac{1}{7})^{\sqrt{2}}$ и $(\frac{1}{7})^{1,6}$; 6) 3^π и $3^{3,14}$;
7) $(\frac{\pi}{4})^{\sqrt{3}}$ и $(\frac{\pi}{4})^{\frac{2\pi}{3}}$; 8) $(\frac{\pi}{2})^{\sqrt{7}}$ и $(\frac{\pi}{2})^{\frac{4\pi}{5}}$;
9) $\sqrt{3}^{\sin \sqrt{3}}$ и $(\frac{2\pi}{5})^{\sin \sqrt{3}}$; 10) $\sqrt{0,5}^{\cos \sqrt{6}}$ и $(\frac{\pi}{6})^{\cos \sqrt{6}}$.

2.22. Является ли возрастающей (убывающей) функция:

- 1) $y = 4^x$; 2) $y = 0,5^x$; 3) $y = (\sin \frac{\pi}{3})^x$;

4) $y = (\cos \frac{\pi}{4})^x$; 5) $y = (\operatorname{tg} \frac{\pi}{3})^x$; 6) $y = (\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3})^x$;

7) $y = 0,2^{-x}$; 8) $y = 1,4^{-x}$; 9) $y = (\frac{1}{15})^{-2x}$;

10) $y = (1\frac{3}{7})^{-3x}$; 11) $y = 67^{-\frac{x}{2}}$; 12) $y = 0,64^{-\frac{x}{4}}$?

2.23. На рисунке 31 изображен график функции, заданной формулой $y = a^x$ на множестве D . Укажите для нее:

- а) значение a ;
б) область определения;
в) множество (область) значений;
г) промежутки возрастания (убывания);
д) координаты точки пересечения графика с осью Oy ;
е) значение в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$;
ж) наибольшее и наименьшее значения.

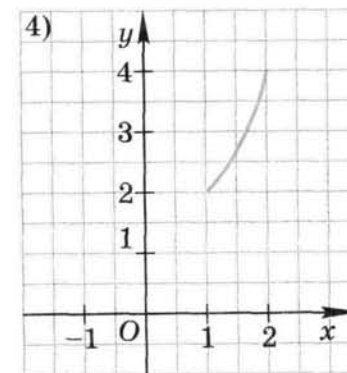
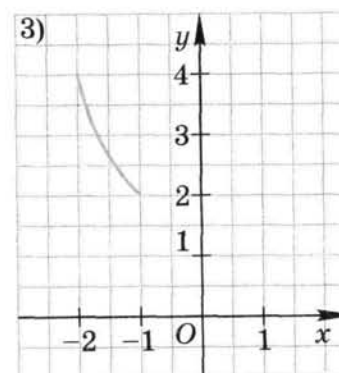
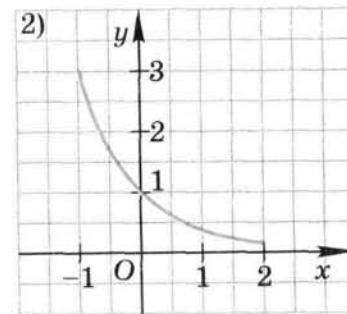
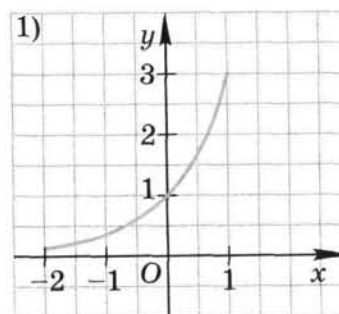


Рис. 31

Укажите (при $a > 0$) естественную область определения выражения, (2.24—2.25).

2.24. 1) a^{3x} ; 2) $a^{\sqrt{x}}$; 3) $a^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;
 4) $a^{\frac{6}{4-x^2}}$; 5) $a^{\frac{2}{x^2+16}}$; 6) $a^{\frac{4}{x^2-9}}$;
 7) $a^{\sqrt{16-x^2}}$; 8) $a^{\sqrt{x^2-64}}$; 9) $a^{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

2.25. 1) $a^{\sin x}$; 2) $a^{\cos x+1}$; 3) $a^{\frac{1}{\sin 2x}}$;
 4) $a^{\frac{1}{\cos 0,5x}}$; 5) $a^{\lg x}$; 6) $a^{\operatorname{ctg} x}$;
 7) $a^{\frac{1}{\sin x-1}}$; 8) $a^{\frac{1}{\cos x+1}}$; 9) $a^{\sqrt{\lg x}}$.

Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения (если они существуют) (2.26—2.28).

2.26*. 1) 2^x ; 2) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; 3) $4^{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{5^{|x|}}$.

2.27*. 1) $5 \cdot 2^{\sin x}$; 2) $6 \cdot 2^{\cos x}$;
 3) $0,3^{\sin^2 x} \cdot 0,3^{\cos^2 x}$; 4) $4,5^{\sin^2 x} \cdot 4,5^{\cos^2 x}$;
 5) $11^{\frac{1}{\sin^2 x}} : 11^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 6) $7,4^{\frac{1}{\cos^2 x}} : 7,4^{\lg^2 x}$;
 7) $6^{\sin^2 x} \cdot 6$; 8) $4 \cdot 4^{\cos^2 x}$.

2.28*. 1) 4^{x^2-x-6} ; 2) 6^{x^2-x-2} ;
 3) 2^{5x-6-x^2} ; 4) 5^{10-x^2-3x} .

Решите неравенство (2.29—2.30).

2.29. 1) $6^x > 0$; 2) $6^x < 0$;
 3) $6^x > -2$; 4) $6^x < -6$.

2.30. 1) $3^x > 1$; 2) $3^x < 1$;
 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 1$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 1$;
 5) $\left(\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}\right)^x \geq 1$; 6) $\left(\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3}\right)^x \leq 1$.

Изобразите схематично график функции (2.31—2.32).

2.31. 1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$;
 3) $y = 2^{x+1}$; 4) $y = 3^{x-2}$;
 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$; 6) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$;
 7) $y = 2^{x-3} + 1$; 8) $y = 3^{x+1} - 2$.

2.32. 1) $y = -3^x$; 2) $y = -0,5^x$;
 3) $y = -0,1^{-2x} + 1$; 4) $y = -2^{-2x} - 2$;
 5) $y = 2 - 3^x$; 6) $y = 3 - 2^x$.

2.33*. Пусть $0 < a < 1$. Изобразите схематично график функции и укажите ее свойства:

1) $y = a^x$; 2) $y = a^{x-1}$; 3) $y = a^{x+1}$;
 4) $y = a^x + 1$; 5) $y = a^x - 1$; 6) $y = a^{x+1} - 1$;
 7) $y = a^{x-1} + 1$; 8) $y = a^{x-1} - 1$; 9) $y = a^{x+1} + 1$;
 10) $y = -a^x$; 11) $y = -a^x + 2$; 12) $y = -a^{x+2}$.

2.34*. Изобразите схематично график функции из упражнения 2.33 при $a > 1$ и укажите ее свойства.

Изобразите схематично график функции (2.35—2.38).

2.35*. 1) $y = |2^x|$; 2) $y = 4^{|x|}$; 3) $y = |3^{-x}|$;
 4) $y = 5^{-|x|}$; 5) $y = -|0,5^{-x}|$; 6) $y = -0,2^{|x|}$;
 7) $y = |3^{|x|}|$; 8) $y = -|4^{|x|}|$.

2.36*. 1) $y = |3^x - 1|$; 2) $y = |0,5^x - 2|$;
 3) $y = |0,2^{x+1} - 2|$; 4) $y = |2^{x-1} - 1|$.

2.37*. 1) $y = 3^{|x|+x}$; 2) $y = 3^{|x|-x}$;
 3) $y = 3^{|x-2|+|x+1|}$; 4) $y = 3^{|x-1|+|x+2|}$;
 5) $y = 3^{|x+1|-|x-2|}$; 6) $y = 3^{|x+3|-|x-4|}$.

2.38*. 1) $y = \frac{4^x - 4}{2^x - 2}$; 2) $y = \frac{9^x - 9}{3^x + 3}$;
 3) $y = \frac{4^{2x} + 4^x}{4^x + 4^0}$; 4) $y = \frac{3^{2x} - 3^x}{3^x - 3^0}$.

2.3. Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения, в которых неизвестное находится в показателе степени. Например:

$$\begin{aligned} 3^x &= 81; \\ 8 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x+2} &= 92; \\ 9^x + 5 \cdot 6^x + 64^x &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения такого вида принято называть **показательными**.

При решении показательных уравнений нам будет полезно следствие из теоремы о свойствах показательной функции.

Следствие. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Если степени с основанием a равны, то их показатели равны, т. е. если $a^s = a^t$, то $s = t$.

Изображение графика показательной функции подсказывает это свойство. На рисунках 26, 29 видно, что каждому значению показательной функции $y = a^s$ соответствует единственный показатель s .

Доказательство этого следствия опирается на теорему из п. 2.2.

Пример 1. Решить уравнение

$$3^{2x^2-3x+5} = 3^{x^2+2x-1}.$$

Решение. Согласно следствию из равенства двух степеней с одинаковым основанием 3 следует равенство их показателей. Таким образом, данное уравнение равносильно уравнению

$$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x - 1,$$

откуда

$$x_1 = 2; x_2 = 3.$$

Ответ: 2; 3.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\text{а) } 27(\sqrt{3})^{2x-4} = 81^{\frac{3}{2x}}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{32^x} = 0,25^{x^2-5x}.$$

Решение. а) Данное уравнение равносильно (поясните почему) уравнению

$$3^{x+1} = 3^{\frac{6}{x}}.$$

Если степени с основанием 3 равны, то равны и их показатели:

$$x + 1 = \frac{6}{x}.$$

Решив это уравнение, получим

$$x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt[4]{32^x} &= 0,25^{x^2+5x} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x}{4}} = 2^{-2(x^2+5x)} \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = -2x^2 - 10x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(8x + 45) = 0 \Leftrightarrow \\ &\quad (x = 0 \text{ или } x = -\frac{45}{8}). \end{aligned}$$

Ответ: а) -3; 2; б) 0; $-\frac{45}{8}$.



При решении каждого уравнения из примера 2 сначала обе части уравнения представили в виде степени с одним и тем же основанием, а затем записали равенство показателей этих степеней.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\text{а) } 8 \cdot 2^{3x-1} - 2^{3x} + 5 \cdot 2^{3x+2} = 92; \quad \text{б) } 3^x = 5^x.$$

Решение. а) Данное уравнение равносильно уравнению

$$2^{3x-1}(8 - 2^{3x-(3x-1)} + 5 \cdot 2^{3x+2-(3x-1)}) = 92.$$

Решая его, получим

$$\begin{aligned} 2^{3x-1}(8 - 2 + 5 \cdot 2^3) &= 92; \\ 2^{3x-1} \cdot 46 &= 92; \\ 2^{3x-1} &= 2. \end{aligned}$$

Так как две степени с одинаковым основанием 2 равны, то равны и их показатели, т. е. $3x - 1 = 1$, откуда находим $x = \frac{2}{3}$.

б) Разделив обе части уравнения на $5^x > 0$, получим уравнение $(\frac{3}{5})^x = 1$, равносильное данному. Решая его, получим $(\frac{3}{5})^x = (\frac{3}{5})^0$, т. е. $x = 0$.

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) 0.



При решении примера 3 левую часть уравнения разложили на множители. Причем за скобку вынесли такой множитель, что в скобках осталось числовое выражение, не содержащее неизвестного.

Пример 4. Решить уравнение $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Решение. Обозначим $3^x = t$, тогда $9^x = t^2$.

Таким образом, из данного уравнения получаем

$$t^2 - 12t + 27 = 0,$$

откуда находим: $t = 3$ или $t = 9$.

Итак, с учетом обозначения имеем:

$$3^x = 3 \text{ или } 3^x = 9;$$

$$x = 1 \text{ или } x = 2.$$

Ответ: 1; 2.



При решении примера 4 был использован метод введения новой переменной, который позволил свести данное уравнение к квадратному относительно этой переменной.

▲ **Пример 5.** Решить уравнение $3^{\frac{x}{2}} + 2^x = 16 - 3^x$.

Решение. Можно заметить, что 2 — корень данного уравнения. Других корней уравнение не имеет, так как функция, стоящая в левой части уравнения, возрастающая, а функция, стоящая в правой части уравнения, убывающая. Поэтому уравнение имеет не более одного корня (см. теорему из п. 1.14).

Ответ: 2.

Пример 6. Решить уравнение $6^x - 81 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x + 648 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 3^x \cdot 2^x - 81 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x + 648 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x(3^x - 81) - 8(3^x - 81) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3^x - 81)(2^x - 8) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3^x - 81 = 0 \text{ или } 2^x - 8 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3^x = 3^4 \text{ или } 2^x = 2^3) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = 4 \text{ или } x = 3). \end{aligned}$$

Ответ: 3; 4.

Пример 7. При каком значении a корнем уравнения $3^{1+x-x^2} = 3^{a-8}$ является число, равное 2?

Решение. Поскольку $x = 2$ — корень, то верно равенство

$$3^{1+2-2^2} = 3^{a-8}, \text{ т. е. } 3^{-1} = 3^{a-8}$$

Решив это уравнение, находим

$$a = 7.$$

Ответ: при $a = 7$. ▲



1. Сформулируйте следствие равенства степеней с положительными отличными от 1 основаниями.
2. Приведите примеры показательных уравнений.
3. Опишите способ решения уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0, a \neq 1$.
4. Опишите способ решения уравнения вида

$$216 \cdot 6^{f(x)} = (\sqrt[5]{36})^{g(x)}$$

5. Опишите способ решения уравнения вида

$$13 \cdot 6^{f(x)} = 7 \cdot 6^{f(x)+1} - 6^{f(x)+2} + 42.$$

6. Опишите способ решения уравнения вида

$$5 \cdot 49^{f(x)} - 34 \cdot 7^{f(x)} - 7 = 0.$$

Упражнения

Решите уравнение (2.39—2.57).

- 2.39°. 1) $5^x = 125$; 2) $6^x = 1296$;
 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256}$;
 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$;
 7) $16^x = \frac{1}{4}$; 8) $27^x = \frac{1}{3}$;
 9) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -2$; 10) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -2,5$.
- 2.40°. 1) $3^{5-2x} = 1$; 2) $4^{8+5x} = 1$;
 3) $3^{x^2-x} = 1$; 4) $4^{x^2+x} = 1$;
 5) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9} = 1$; 6) $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-25}$;
 7) $(5^{x^2+x-2})^{3-x} = 1$; 8) $1 = (6^{x^2-10x+16})^{4-x^2}$.
- 2.41°. 1) $2^{x+1} = 16$; 2) $3^{2-x} = 27$;
 3) $4^{x-1} = 32$; 4) $8^{x+2} = 128$;
 5) $9^{-x} = 27$; 6) $8^{-x} = 16$;
 7) $9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0$; 8) $27^{3-\frac{1}{3}x} - 81 = 0$;
 9) $5^{x-3} + 5^2 = 25$; 10) $7^{2-x} + 49 = 7^2$.
- 2.42°. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-9}$;
 3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2+x}$; 4) $\left(\frac{7}{13}\right)^{3-2x} = \left(\frac{13}{7}\right)^{4+3x}$;
 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2-29} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+5}$; 6) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x} = \left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$.
- 2.43. 1) $0,04^{2-x} = 25^{-1}$; 2) $0,5^{3x-1} = 16^{-2}$;
 3) $3,5^{x-5} = \left(\frac{4}{49}\right)^2$; 4) $0,8^{3-2x} = 1,25^3$;
 5) $0,125^{x-1} = 2^3$; 6) $0,625^{4x+1} = 1,6^{3-2x}$.

- 2.44. 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$;
 3) $3^{x+0.5} \cdot 3^{x-2} = 3$; 4) $0.5^{x+7} \cdot 0.5^{1-2x} = 2$;
 5) $8^x \cdot 4^{x+13} = \frac{1}{16}$; 6) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} = \frac{1}{8}$.
- 2.45. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x$; 2) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x} = (\sqrt[3]{3})^{x-1}$;
 3) $9^{3x+4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2} \cdot \sqrt{2}$;
 5) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-75}$; 6) $25^{3-2x} = \frac{1}{125}(25\sqrt{5})^{-x}$;
 7) $0.125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$; 8) $0.008(25\sqrt{5})^{-x} = 25^{3-2x}$.
- 2.46. 1) $\sqrt{5^{x+2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$; 2) $\sqrt[3]{3^{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$;
 3) $\sqrt[3]{49^{2x+1}} = \frac{7}{\sqrt[5]{7}}$; 4) $\sqrt[5]{6^{x+1}} = \frac{36}{\sqrt{6}}$;
 5) $16^{-1}\sqrt{64^x} = 2^x$; 6) $8^{-1}\sqrt{16^x} = 2^{\frac{x}{2}}$;
 7) $\sqrt[3]{2^x} = 4$; 8) $\sqrt[5]{3^x} = 27$.
- 2.47. 1) $0.5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$; 2) $2^{x^2-6x+0.5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$;
 3) $16 \cdot \sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$; 4) $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[4]{9^{3x-1}} = 27^{-\frac{2}{3}}$.
- 2.48. 1) $\left(\frac{5}{6}\right)^{13\sqrt{x}+5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{7\sqrt{x}-45}$; 2) $\left(\frac{51}{9}\right)^{\sqrt{x-1}-3} = \left(\frac{9}{51}\right)^{8\sqrt{x-1}-15}$;
 3) $\left(\frac{14}{19}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-3} = \left(\frac{19}{14}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x}}+5}$; 4) $\left(\frac{33}{15}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5} = \left(\frac{15}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$.
- 2.49°. 1) $2^x \cdot 3^x = 36$; 2) $2^x \cdot 5^x = 0.1$;
 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{125}{8}\right)^x = \frac{625}{64}$;
 5) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; 6) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.
- 2.50. 1) $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}$; 2) $\frac{10^{x^2}}{2^4} = \frac{5^4}{10^{9-6x}}$;
 3) $\frac{2^{x^2+2}}{6^{3x}} = \frac{6^{3x}}{3^{x^2+2}}$; 4) $\frac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \frac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}$.
- 2.51. 1) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 2) $2^{x+2} + 2^x = 5$;
 3) $2^x - 2^{x-2} = 12$; 4) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$;
 5) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; 6) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$;

- 7) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;
 8) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.
- 2.52. 1) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
 2) $49^{\frac{2x-2}{2}} + \left(\frac{1}{7}\right)^{3-2x} + 7^{2x-1} = 399$;
 3) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$;
 4) $2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} + 4^{x+1} = -\sqrt{\frac{1}{4^{3-2x}}} + 78$;
 5) $25^{x-1} + \sqrt{\frac{1}{25^{-2x}}} = 475 + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}$;
 6) $2^{-(x-1)} + \sqrt{\frac{1}{4^{2+x}}} = 56 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}$.
- 2.53. 1) $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$; 2) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;
 3) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; 4) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;
 5) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$; 6) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$;
 7) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; 8) $64^x - 8^x - 56 = 0$.
- 2.54. 1) $13^{2x+1} - 13^x = 12$; 2) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
 3) $9^x + 3^{x+1} - 108 = 0$; 4) $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$.
- 2.55. 1) $3^{-2x+1} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$; 2) $5 \cdot 5^{-2x} + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$;
 3) $2^{-2x+3} = 2^{-x+1} + 1$; 4) $2 \cdot 3^{-2x+2} = 3^{-x+1} + 1$;
 5) $3 \cdot 2^{-2x+3} = 2^{-x+1} + 1$; 6) $6 \cdot 5^{-2x+3} - 1 = 5^{-x+1}$.
- 2.56*. 1) $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$; 2) $2^x + \frac{8}{2^x} = 16.5$;
 3) $2^{x+2} - 2^{2-x} = 15$; 4) $3^x + 3^{3-x} = 12$;
 5) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; 6) $4^x - 0.25^{x-2} = 15$;
 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^{x+3} = 12$; 8) $5 \cdot 5^{x^2} - 5^{1-x^2} = 24$.
- 2.57*. 1) $\sqrt{2 \cdot 5^x + 6} = 5^x - 1$; 2) $\sqrt{10 - 3^{x+2}} = 3^{x+1} - 2$;
 3) $\sqrt{3^x - 5} = 11 - 3^x$; 4) $\sqrt{9 \cdot 2^x + 25} = 2^x - 3$.
- 2.58*. 1) При каком значении a корнем уравнения $2^{4+x-x^2} = 2^a$ является число, равное -1 ?

2) При каком значении a корнем уравнения $5^{6+2x-x^2} = 5^a$ является число, равное 2?

2.59*. 1) При каком значении a корнем уравнения $(\sqrt{3})^{x^2+ax+2} = 3$ является число, равное -2?

2) При каком значении a корнем уравнения $(\sqrt{7})^{x^2-ax+4} = \frac{1}{7}$ является число, равное 1?

2.60*. 1) При каком значении a корнем уравнения

$$0,5^{a+x} = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x^2-2x}$$

является число, равное -1?

2) При каком значении a корнем уравнения

$$(\sqrt{2})^{a-x} = \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^{x^2+2x}$$

является число, равное 1?

Решите уравнение (2.61—2.63).

2.61*. 1) $3^{|x-2|} = 9;$ 2) $4^{|x-2|} = 16;$

3) $8^{|x^2-1|} = 16;$ 4) $27^{|x^2-2|} = 81;$

5) $2^{|x-2|} = 4^{|x+1|};$ 6) $5^{|x+4|} = 25^{|x|}.$

2.62*. 1) $(0,(3))^{6-x} = 27;$ 2) $3^x \cdot (0,(3))^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x;$

3) $0,25 \cdot (0,1(6))^{x-16} = 54;$ 4) $\sqrt[3]{(0,(6))^x} = \sqrt[5]{1,5}.$

2.63*. 1) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin^2 x + \cos^2 x - 1};$ 2) $0,26^{\lg x \operatorname{ctg} x - 1} = 6^{1+x};$

3) $11^{1+\lg^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}} = 0,11^{3+x};$ 4) $23^{x-1} = \left(\frac{7}{9}\right)^{1+\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}}.$

2.64*. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения:

1) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = \sin \frac{\pi}{2};$ 2) $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\sin x} = \cos 2\pi.$

Решите уравнение (2.65—2.69).

2.65*. 1) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sin^2 x} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\cos^2 x} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2};$

3) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\lg^2 x} = \operatorname{arctg} \sqrt{3};$ 4) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{arccotg} \sqrt{3}.$

2.66*. 1) $2^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}};$

2) $3^{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}};$

3) $2^{\cos 2x} = \sqrt{0,5};$

4) $5^{\sin 2x} = \sqrt{0,2};$

5) $3^{\cos(\pi+0,5x)} = \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3};$

6) $8 \cdot 2^{\cos(1,5\pi+0,4x)} = \sqrt{32}.$

2.67*. 1) $(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}};$

2) $2^{\cos^2 x} = 8^{\sin^2 x};$

3) $25^{1-\cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}};$

4) $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}.$

2.68*. 1) $3 \cdot 3^4 \cdot 3^7 \cdot \dots \cdot 3^x = 3^{117};$

2) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \dots \cdot 5^{2x} = 0,04^{-28}.$

2.69*. 1) $2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot 2^{\cos^3 x} \cdot \dots = 2;$

2) $3^{\sin x} \cdot 3^{\sin^2 x} \cdot 3^{\sin^3 x} \cdot \dots = 3.$

2.70*. При каких значениях a уравнение:

1) $25^x + 5^x \cdot (2-3a) + 2a^2 - 5a - 3 = 0$ имеет одно решение;

2) $9^x - 3^x \cdot (5a+3) + 6a^2 + 11a - 10 = 0$ имеет одно решение;

3) $4^x - 2^x \cdot (6a-4) + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных решения;

4) $36^x + 6^x \cdot (a-1) - 2a^2 + a = 0$ имеет два различных решения?

2.71*. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ y^{x^2-7x+12}=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^{y^2-5y+6}=16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{0,5} - 2^y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5^{\frac{x}{2}} + 3^y = 8, \\ 5^x - 3^{2y} = 16. \end{cases}$

2.4 Показательные неравенства

Рассмотрим неравенства, в которых неизвестное находится в показателе степени. Например,

$$7^{3x^2-x} < 7^{x^2+3x};$$

$$0,09 \leq 0,3^{x^2} < 1.$$

Неравенства такого вида принято называть **показательными**.

Из теоремы о свойствах показательной функции (п. 2.2, свойство 8) получаем следствие, которое постоянно используется при решении показательных неравенств.

Следствие. Пусть $a > 1$. Если $a^s > a^t$, то $s > t$.

Пусть $0 < a < 1$. Если $a^s > a^t$, то $s < t$.

Изображение графика показательной функции подсказывает это свойство. На рисунке 26 видно, что при $a > 1$ большему значению функции соответствует большее значение аргумента. А на рисунке 29 видно, что при $0 < a < 1$ большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

При решении показательных неравенств, так же, как и при решении показательных уравнений, приходится использовать представление обеих частей неравенства в виде степеней с одним и тем же основанием, разложение одной из частей неравенства на множители, введение новой переменной.

Пример 1. Решить неравенство $7^{3x^2-x} < 7^{x^2+3x}$.

Решение. Поскольку из двух степеней с основанием 7 больше та, показатель которой больше, то данное неравенство равносильно неравенству

$$3x^2 - x < x^2 + 3x.$$

Решим его:

$$2x^2 - 4x < 0,$$

$$2x(x - 2) < 0,$$

$$0 < x < 2.$$

Ответ: $(0; 2)$.

Пример 2. Решить неравенство $0,5^{2x-3} \geq 0,25^{1-x}$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$0,5^{2x-3} \geq 0,5^{2(1-x)}.$$

Поскольку из двух степеней с одинаковым основанием 0,5 больше та, показатель которой меньше, то имеем

$$2x - 3 \leq 2(1 - x),$$

$$4x \leq 5,$$

$$x \leq \frac{5}{4}.$$

Ответ: $(-\infty; 1,25]$.

Пример 3. Решить неравенство $5^{0,3x^2} + 2 \cdot 5^{0,3x^2+2} \leq 10,2$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$5^{0,3x^2} (1 + 2 \cdot 5^2) \leq 10,2,$$

откуда

$$5^{0,3x^2} \cdot 51 \leq 10,2,$$

$$5^{0,3x^2} \leq \frac{1}{5},$$

$$5^{0,3x^2} \leq 5^{-1}.$$

Поскольку их двух степеней с основанием 5 больше та, показатель которой больше, то данное неравенство равносильно неравенству

$$0,3x^2 \leq -1.$$

Решений нет, так как $0,3x^2 \geq 0$ при любых значениях x .

Ответ: нет решений.

Пример 4. Решить неравенство

$$7 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} \leq 14 \cdot 2^{2x+1} + 40.$$

Решение.

$$7 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} - 14 \cdot 2^{2x+1} \leq 40 \Leftrightarrow 2^{2x} (7 \cdot 4 + 5 - 14 \cdot 2) \leq 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \leq 8 \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^3 \Leftrightarrow x \leq 1,5.$$

Ответ: $(-\infty; 1,5)$.

Пример 5. Решить неравенство $0,09 \leq 0,3^{x^2} < 1$.

Решение. Данное неравенство перепишем в виде

$$0,3^2 \leq 0,3^{x^2} < 0,3^0.$$

Поскольку из двух степеней с основанием 0,3 больше та, показатель которой меньше, то имеем:

$$2 \geq x^2 > 0,$$

$$0 < x^2 \leq 2,$$

$$0 < |x| \leq \sqrt{2},$$

$$-\sqrt{2} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x \leq \sqrt{2}.$$

Ответ: $[-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}]$.

Пример 6. Решить неравенство

$$5 \cdot 49^{5|x-3|} - 34 \cdot 7^{5|x-3|} - 7 \leq 0.$$

Решение. Пусть $7^{5|x|-3} = t$, тогда $49^{5|x|-3} = t^2$. Используя эти обозначения для данного неравенства, получим $5t^2 - 34t - 7 \leq 0$. Решив это неравенство, получим:

$$-\frac{1}{5} \leq t \leq 7, \text{ т. е. } \begin{cases} t \geq -\frac{1}{5}, \\ t \leq 7. \end{cases}$$

Поскольку $t = 7^{5|x|-3} > 0$, то $t \geq -\frac{1}{5}$ при любых значениях x . Остается решить второе неравенство системы:

$$7^{5|x|-3} \leq 7.$$

Получим:

$$5|x| - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 5|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\left[-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right]$.

Пример 7. При каких значениях m любое значение x из промежутка $[9; 10]$ является решением неравенства

$$3^{2x-m} < 81?$$

Решение.

$$3^{2x-m} < 81 \Leftrightarrow 3^{2x-m} < 3^4 \Leftrightarrow 2x - m < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4+m}{2}.$$

Чтобы решением неравенства $3^{2x-m} < 81$ являлось любое значение x из промежутка $[9; 10]$, необходимо, чтобы этот промежуток входил в промежуток решений этого неравенства $(-\infty; \frac{4+m}{2})$ (рис. 32).

Итак, имеем:

$$10 < \frac{4+m}{2} \Leftrightarrow 20 < 4+m \Leftrightarrow m > 16.$$

Ответ: при $m > 16$.

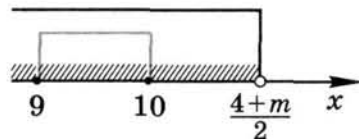


Рис. 32



1. Приведите примеры показательных неравенств.

2. Опишите способ решения неравенств вида:

а) $0,375^{f(x)} < 0,375^{g(x)}$; б) $3,75^{f(x)} < 3,75^{g(x)}$.

3. Опишите возможные способы решения неравенств вида

$$5 \cdot 49^{f(x)} - 34 \cdot 7^{f(x)} - 7 \geq 0.$$

4. Опишите возможные способы решения неравенства вида

$$13 \cdot 6^{f(x)} + 7 \cdot 6^{f(x)+1} < 6^{f(x)+2} + 114.$$

5. Опишите возможные способы решения неравенства вида

$$343 \cdot 7^{g(x)} > (\sqrt[4]{7})^{8f(x)}.$$

Упражнения

Решите неравенство (2.72—2.86).

2.72°. 1) $3^x > 9$; 2) $6^x < 36$;

3) $\left(\frac{1}{25}\right)^x < \frac{1}{25}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{4}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2$; 6) $4^x \leq \frac{1}{2}$;

7) $2^{3x} \leq \frac{1}{8}$; 8) $5^{2x} \geq \frac{1}{25}$.

2.73°. 1) $5^{-x} < \sqrt{5}$; 2) $7^{-x} > \sqrt{7}$;

3) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt[3]{12}$; 4) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{x}{4}} > \sqrt[4]{10}$;

5) $9^{-5x} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 6) $25^{-3x} \geq \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$;

7) $10^{-\frac{2x}{7}} \geq 0,1$; 8) $0,01^{-\frac{4x}{5}} \leq 1000$.

2.74°. 1) $2^{x^2-4} \geq 1$; 2) $5^{x^2-16} \leq 1$;

3) $0,7^{x^2-27} < 0,7^9$; 4) $0,6^{x^2} > 0,36^2$;

5) $0,25^{-x^2+3x} < 256$; 6) $0,5^{-x^2-2x} > 8$;

7) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$; 8) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} \leq \frac{121}{169}$.

2.75. 1) $3^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$; 2) $5^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

3) $\left(\frac{1}{49}\right)^{2x} < (\sqrt{7})^{x^2+3,75}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{19x} > 8^{\frac{2}{3}-x^2}$;

5) $8 \cdot 2^{x^2-3x} \leq (0,5)^{-1}$; 6) $9 \cdot 3^{x^2-4x} \geq 3^{-1}$.

2.76. 1) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;

2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geq 8^{3x}$;

4) $\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \leq 9^{4x}$;

5) $25 \cdot 0,04^{2x} > 0,2^{x(3-x)}$;

6) $4 \cdot 0,5^{x(x+3)} < 0,25^{2x}$.

2.77. 1) $5^{2-3x} - 1 \geq 0$;

3) $\pi^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$;

5) $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{x^2-4}{x-1}} \geq 1$;

2.78. 1) $(0,5)^{1-\frac{3}{x}} \geq 8 \cdot (0,5)^x$;

3) $(0,3)^{\frac{x+2}{x-1}} < (0,3)^{\frac{2}{x-1}}$;

5) $(0,4)^{\frac{3x-1}{x+1}} \leq (2,5)^{x+1}$;

7) $(0,5)^{\frac{x^2-4}{x}} > 8$;

2.79. 1) $5^{|x+2|} > 625$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x+3|} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$;

5) $2^{|2x+3|} \geq 2^{|4x-1|}$;

2.80. 1) $5^{\sqrt{3x-6}} < 125$;

3) $3^{\sqrt{-x^2-3x+4}} > 9$;

2.81*. 1) $3^{\sqrt{3x+4}} \geq \frac{1}{3^x}$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x^2+x-12}} \geq 5^x$;

2.82*. 1) $5^{\cos x} > 1$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin x} \leq 1$;

5) $2,6^{\lg x} < 1$;

7) $0,13^{\operatorname{ctg} x} \geq 1$;

2.83*. 1) $0,7^{\sin x} < 1\frac{3}{7}$;

3) $6,2^{\cos x} \geq 6\frac{1}{5}$;

5) $4,5^{\lg x} \leq \frac{2}{9}$;

7) $0,24^{\operatorname{ctg} x} > \frac{6}{25}$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4x} - 1 \leq 0$;

4) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{x+5}{x^2-9}} > 1$;

6) $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{x^2-16}{x+3}} \leq 1$;

2) $2^{1+\frac{8}{x}} \geq 0,5 \cdot 2^x$;

4) $(0,1)^{\frac{x-3}{x+1}} > 10^{\frac{3}{x+1}}$;

6) $(0,5)^{\frac{3x-4}{x-2}} < 2^{x-2}$;

8) $(0,2)^{\frac{x^2-3}{x}} < 25$;

2) $9^{|x-4|} < 81$;

4) $\left(\frac{4}{9}\right)^{|x-9|} \leq \left(\frac{9}{4}\right)^{-x}$;

6) $10^{|2x+5|} \leq 10^{|7-x|}$;

2) $4^{\sqrt{4x-1}} > 64$;

4) $7^{\sqrt{x^2+x+1}} < 7$;

2) $2^{\sqrt{24-5x}} \geq 2^x$;

4) $6^{\sqrt{7+3x}} \geq \frac{6}{6^x}$;

2) $6^{\sin x} < 1$;

4) $\left(\frac{5}{11}\right)^{\cos x} \geq 1$;

6) $0,54^{\operatorname{ctg} x} < 1$;

8) $9,68^{\lg x} \geq 1$;

2) $0,4^{\cos x} > \frac{2}{5}$;

4) $7,4^{\sin x} \leq \frac{5}{37}$;

6) $0,65^{\operatorname{ctg} x} \geq \frac{13}{20}$;

8) $3,6^{\lg x} < \frac{5}{18}$;

2.84°. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$;

2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;

3) $3^{2x+2} - 3^{2x-1} \geq 78$;

4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leq 624$;

5) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;

6) $3^{2x-2} + 3^{2x-1} - 3^{2x-4} \leq 315$;

7) $2^{x-2} + 8^{\frac{1}{3}x-1} - 4^{\frac{1}{2}x-2} < 10$;

8) $4^x - 2^{2x-2} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$;

9) $2^{x-1} + 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} \geq 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$;

10) $3^{x+3} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} \leq 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2.85. 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$;

3) $9^x - 3^x - 6 > 0$;

5) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \leq 0$;

7) $3^{2x+2} - 3^{x+4} > 3^x - 9$;

2) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$;

4) $4^x - 2^x < 12$;

6) $3^{2x+1} + 11 \cdot 3^x \geq 4$;

8) $9^{x+1} - 3^{x+3} \geq 3^x - 3$;

2.86. 1) $0,25 < 5^x < 125$;

3) $\frac{1}{27} < (\sqrt{3})^x < 81 \cdot \sqrt[5]{9}$;

5) $0,125 < 5^{x^2} < 1$;

7) $0,16 < 0,4^{2x-1} < 1$;

2) $\frac{1}{36} < 6^x < 36$;

4) $\frac{1}{32} < (\sqrt{2})^x < 64 \cdot \sqrt[4]{4}$;

6) $0,0081 < 3^{x^2} < 1$;

8) $0,00032 < 0,2^{4x-2} < 1$;

2.87. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 6^{2x} \leq \frac{1}{36}, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{3-x} \geq 9, \\ x^2 - 2x - 3 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{2-3x} - 1 > 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 2 > 0, \\ x^2 - x - 20 < 0; \end{cases}$

5)* $\begin{cases} 3^x - 7 > 2, \\ x + 8 < 3 \text{ или } 2x + 4 \geq 5; \end{cases}$

6)* $\begin{cases} 4^x - 10 < 6, \\ 4x - 1 < -5 \text{ или } 2x + 3 > 5. \end{cases}$

2.88. Найдите естественную область определения выражения:

- 1) $\sqrt[6]{9^{\frac{1}{x}} - \sqrt{3^x}}$; 2) $\sqrt[8]{\sqrt{2^x} - 32^{\frac{1}{x}}}$;
 3) $\sqrt{\frac{5}{4^x + 3} - \frac{3}{3 - 4^x}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{2^x + 3} - \frac{1}{2^{x+1} + 1}}$.

2.89*. Докажите, что при любых значениях x верно неравенство:

- 1) $0,09^{\sin^2 x + \cos^2 x - 1} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}$;
 2) $7,3^{\sin^2 x - 3} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{1 + \cos x - 2\cos^2 \frac{x}{2}}$;
 3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x} \geq 4,5^{\cos^2 x - 5}$;
 4) $0,07^{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{x^4}$.

- 2.90*. 1) При каких значениях a любое значение x , большее -1 , является решением неравенства $5^{x+a} > 125$?
 2) При каких значениях a любое значение x , меньшее 1 , является решением неравенства $4^{x+a} < 16$?

2.5. Логарифмы

Множеством (областью) значений показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) является множество всех положительных чисел. Значит, для любого положительного числа b найдется такое значение аргумента c , что

$$a^c = b.$$

Такое значение аргумента единственное, так как если $b = a^c$ и $b = a^d$, то, по следствию из п. 2.3, верно равенство $c = d$. Это единственное значение аргумента c называют **логарифмом числа b по основанию a** и обозначают $\log_a b$, т. е.

$$c = \log_a b.$$

Таким образом, равенство $c = \log_a b$ означает, что $b = a^c$. Сформулируем определение логарифма еще раз.

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. **Логарифмом числа b по основанию a** называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

Приведем несколько примеров:

- а) $\log_5 125 = 3$, так как $125 = 5^3$;
 б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, так как $\frac{1}{125} = 5^{-3}$;
 в) $\log_5 1 = 0$, так как $1 = 5^0$;

г) $\log_5 (-5)$ не имеет смысла, так как значение выражения 5^x при любом значении x положительно и не может быть равно -5 ;

д) по определению логарифма не имеют смысла и такие выражения, как $\log_{-2} 4$, $\log_0 1$, $\log_1 3$, $\log_1 1$, поскольку основанием логарифма должно быть положительное число, отличное от единицы.

Нахождение логарифма числа называется **логарифмированием**.

Обозначим $\log_a b = s$. Тогда, согласно определению логарифма, верно равенство $a^s = b$, т. е.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство называется **основным логарифмическим тождеством**.

Согласно этому тождеству, например, имеем:

$$\text{а) } 5^{\log_5 125} = 125; \quad \text{б) } 5^{\log_5 \frac{1}{125}} = \frac{1}{125}; \quad \text{в) } 5^{\log_5 1} = 1.$$



Основное логарифмическое тождество позволяет данное число b представить в виде степени с любым положительным основанием.

Например:

$$17 = 3^{\log_3 17} = 0,11^{\log_{0,11} 17} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\log_2 17}{3}}.$$



Логарифмы были изобретены в 1614 г. шотландским математиком Д. Непером (1550—1617) и независимо от него на 6 лет позднее швейцарским механиком и математиком И. Бюрги (1552—1632).

Оба исследователя хотели найти новое удобное средство арифметических вычислений, но их определения логарифма различны и у обоих не похожи на современные.

Понимание логарифма как показателя степени с данным основанием впервые появилось в XVIII в. в работах английского математика В. Гардинера (1742 г.). Широкому распространению этого определения логарифма более других

содействовал Л. Эйлер, который впервые применил в этой связи и термин «основание».

Термин «логарифм» принадлежит Неперу. Он возник из сочетания греческих слов *логос* — *отношение* и *аритмос* — *число*. Слово «логарифм», таким образом, означало «число отношения».

Пример 1. а) Записать число $\sqrt{3}$ в виде логарифмов по основанию 3; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{7}$.

б) Записать число -5 в виде логарифмов по основанию $\frac{1}{4}$; x ($x > 0$; $x \neq 1$).

Решение. а) По определению логарифма имеем:

$$\sqrt{3} = \log_3 3^{\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{3} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{3} = \log_{\sqrt{7}} (\sqrt{7})^{\sqrt{3}}.$$

б) По определению логарифма имеем:

$$-5 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = \log_{\frac{1}{4}} 4^5 = \log_{\frac{1}{4}} 1024;$$

$$-5 = \log_x x^{-5} = \log_x \frac{1}{x^5}.$$

Пример 2 Между какими целыми числами находится число $\log_2 17$?

Решение. Пусть $\log_2 17 = p$, тогда верно равенство $2^p = 17$. Поскольку $2^4 = 16 < 17 = 2^p$ и $2^p = 17 < 32 = 2^5$, т. е. $2^4 < 2^p < 2^5$, то по свойствам показательной функции с основанием 2 имеем $4 < p < 5$. Значит, $\log_2 17$ находится между числами 4 и 5.

Ответ: $4 < \log_2 17 < 5$.

Пример 3 Решить уравнение:

$$\text{а) } 3^x = 2; \quad \text{б) } 3^x = 2^{x-1}.$$

Решение. а) Поскольку $3^x = 2$, то по определению логарифма имеем

$$x = \log_3 2.$$

$$\text{б) } 3^x = 2^{x-1} \Leftrightarrow 3^x = \frac{2^x}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 2.$$

Ответ: а) $\log_3 2$; б) $\log_{\frac{2}{3}} 2$.



Логарифмы по основанию 10 имеют особое название — **десятичные логарифмы**.

Десятичный логарифм числа b обозначается $\lg b$.

Таким образом, $\lg b = \log_{10} b$.



▲ Особое обозначение и название имеют не только десятичные логарифмы, но и логарифмы, основанием которых является число e :

$$\log_e b = \ln b.$$

Такие логарифмы называются **натуральными**.

Логарифмы по основанию e позволяют выражать математическую зависимость, которая характеризует многие биологические, химические, физические, социальные и другие процессы. По-видимому, этим объясняется и название «натуральные логарифмы», т. е. естественные (этот термин ввел в 1659 г. итальянский математик П. Менголи).

Натуральные и десятичные логарифмы имели большое значение для облегчения вычислений в XVII—XX вв. до создания мощных современных вычислительных средств. Однако, натуральные логарифмы имеют и большое теоретическое значение. ▲



1. Сформулируйте определение логарифма.
2. Сформулируйте основное логарифмическое тождество.
3. Как обозначаются и называются логарифмы по основанию 10?
4. Докажите, что при любом $a > 1$:

$$\text{а) } \log_a 1 = 0; \quad \text{б) } \log_a a = 1.$$

Упражнения

2.91 °. В какую степень нужно возвести число 10, чтобы получить число:

- | | | |
|-------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) 100; | 2) 10 000; | 3) 1000; |
| 4) 10; | 5) 1; | 6) 0,1; |
| 7) 0,001; | 8) $\frac{1}{10\,000}$; | 9) $\frac{1}{10^7}$; |
| 10) $\sqrt{10}$; | 11) $\frac{1}{\sqrt[5]{10}}$; | 12) $\frac{1}{\sqrt[7]{100}}$? |

2.92°. Запишите равенство с помощью логарифма по образцу

$$7^{-2} = \frac{1}{49}, \text{ т. е. } -2 = \log_7 \frac{1}{49} :$$

- | | |
|--|--|
| 1) $2^3 = 8;$ | 2) $3^4 = 81;$ |
| 3) $10^3 = 1000;$ | 4) $64^{\frac{1}{3}} = 4;$ |
| 5) $3^1 = 3;$ | 6) $6^0 = 1;$ |
| 7) $0,11^2 = 0,0121;$ | 8) $2,1^2 = 4,41;$ |
| 9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16;$ | 10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27;$ |
| 11) $\left(\frac{3}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{3};$ | 12) $\left(\frac{9}{20}\right)^{-1} = \frac{20}{9}.$ |

2.93°. Представьте числа 0; -1; 1; -2; 2; -0,3; 0,3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ в виде логарифма по основанию:

- | | | | |
|----------|---------|-------------------|-------------------|
| 1) 7; | 2) 5; | 3) $\frac{1}{4};$ | 4) $\frac{1}{6};$ |
| 5) 0,11; | 6) 0,2; | 7) 2,5; | 8) 1,3. |

2.94. Представьте в виде логарифмов с основаниями 0,1; 2; $\frac{1}{3}$; x ($x > 0$; $x \neq 1$); $x - 2$ ($x > 2$; $x \neq 3$); m^2 ($m \neq 0$; $|m| \neq 1$) число:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1) -2; | 2) -3; | 3) -1; | 4) $-\frac{1}{2};$ |
| 5) 3; | 6) 2; | 7) $-\frac{1}{3};$ | 8) 1; |
| 9) $\frac{1}{2};$ | 10) $\frac{1}{3};$ | 11) 0; | 12) 10. |

2.95°. Найдите логарифм числа по основанию 3:

- | | | | |
|--------------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1) 9; | 2) 1; | 3) $\frac{1}{27};$ | 4) $\frac{1}{81};$ |
| 5) $\frac{1}{\sqrt{3}};$ | 6) $\sqrt[3]{3};$ | 7) $\sqrt[5]{9};$ | 8) $3^{\sqrt{3}}.$ |

2.96°. Найдите число, логарифм которого по основанию 3 равен:

- | | | | |
|-------|-------|-------------------|-------------------|
| 1) 0; | 2) 1; | 3) -1; | 4) -3; |
| 5) 2; | 6) 3; | 7) $\frac{1}{2};$ | 8) $\frac{1}{4}.$ |

2.97. Найдите a , если $\log_a \frac{1}{16}$ равен:

- | | | | |
|--------|--------|--------------------|-------------------|
| 1) 1; | 2) 2; | 3) 4; | 4) -4; |
| 5) -1; | 6) -2; | 7) $-\frac{1}{2};$ | 8) $\frac{1}{2}.$ |

Вычислите (2.98—2.105).

- 2.98°. 1) $\log_2 16;$ 2) $\log_2 2;$ 3) $\log_2 64;$
 4) $\log_2 1;$ 5) $\log_2 \frac{1}{2};$ 6) $\log_2 \frac{1}{8};$
 7) $\log_2 \frac{1}{64};$ 8) $\log_2 \frac{1}{512};$ 9) $\log_2 (2^{\sqrt{2}}).$

- 2.99°. 1) $\log_3 81;$ 2) $\log_3 27;$ 3) $\log_3 \frac{1}{3};$
 4) $\log_3 1;$ 5) $\log_3 \frac{1}{9};$ 6) $\log_3 3;$
 7) $\log_3 243;$ 8) $\log_3 \frac{1}{243};$ 9) $\log_3 (3^{10\sqrt{9}}).$

- 2.100°. 1) $\log_{\frac{1}{2}} 4;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} 1;$ 3) $\log_{\frac{1}{2}} 0,125;$
 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2};$ 5) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2};$ 6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32};$
 7) $\log_{\frac{1}{2}} 128;$ 8) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{2};$ 9) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

- 2.101. 1) $\log_6 \sin \frac{\pi}{2};$ 2) $\log_4 \sin \frac{\pi}{6};$
 3) $\log_{0,25} \cos \frac{\pi}{4};$ 4) $\log_{\frac{1}{8}} \cos \frac{\pi}{3};$
 5) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3};$ 6) $\log_{0,5} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4};$
 7) $\log_3 \operatorname{ctg}(-150^\circ);$ 8) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}(-120^\circ).$

- 2.102. 1) $\log_{16} \sqrt{2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - 8 \cos \frac{4\pi}{3}};$
 2) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + 2 \sin \frac{7\pi}{6}};$
 3) $\log_2 \sqrt{6 \sin \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{5\pi}{3}};$
 4) $\log_3 \sqrt{4 \sin \frac{19\pi}{3} - 2 \cos \frac{5\pi}{6}}.$

- 2.103°. 1) $3^{\log_3 18};$ 2) $5^{\log_5 10};$ 3) $10^{\log_{10} 1};$
 4) $4^{\log_4 8};$ 5) $2^{\log_2 1};$ 6) $12^{\log_{12} 100};$
 7) $7^{\log_7 7};$ 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6};$ 9) $\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_{\frac{3}{16}} \frac{18}{5}};$
 2.104. 1) $(2^{\log_2 5})^2;$ 2) $(6^{\log_6 2})^4;$ 3) $25^{\log_5 3};$

- 4) $4^{\log_2 6}$; 5) $3^{-\log_3 3}$; 6) $4^{-\log_4 16}$;
 7) $27^{-\log_3 2}$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 \frac{1}{3}}$; 9) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_5 10}$.
- 2.105. 1) $2^{2+\log_2 5}$; 2) $3^{2+\log_3 10}$; 3) $5^{2-\log_5 10}$;
 4) $25^{1-\log_{25} 15}$; 5) $5 \cdot 3^{\log_3 4-1}$; 6) $4 \cdot 5^{\log_5 10-2}$;
 7) $27^{\log_3 6-1}$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5+1}$; 9) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\lg \frac{1}{2}-2}$.

2.106. Найдите значение выражения:

- 1) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 27)$; 2) $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}\right)$;
 3) $\log_2(\log_5 \sqrt[8]{5})$; 4) $\log_4(\log_3 \sqrt{81})$;
 5) $\log_3(3\log_2 8)$; 6) $\log_3(3\log_3 27)$;
 7) $\log_6(3\log_2 4)^3$; 8) $\lg(5\lg 100)^2$.

2.107. Вычислите:

- 1) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$; 2) $4\log_6 216 - 2\log_{0.5} 8$;
 3) $2\log_2 \frac{1}{4} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$; 4) $5\log_{\frac{1}{5}} 625 + 8\log_4 1$;
 5) $\log_4 \log_{16} 256 + \log_4 2$; 6) $\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$;
 7) $\frac{2}{5} \cdot (\log_3 81 + 16^{\log_2 3})^{\log_{85} 25}$;
 8) $\frac{1}{3} \cdot (\lg 10 + 9^{\log_3 7})^{\log_{50} 3}$;
 9) $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5}$;
 10) $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$.

Решите уравнение (2.108—2.110).

- 2.108°. 1) $\log_3 x = 3$; 2) $\ln x = 1$; 3) $\log_5 x = 1$;
 4) $\lg x = 0$; 5) $\log_4 x = 2$; 6) $\log_7 x = -2$;
 7) $\ln x = -1$; 8) $\log_{0.1} x = -2$; 9) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.
- 2.109. 1) $\log_x 16 = 2$; 2) $\log_x 5 = -1$; 3) $\log_x 81 = -4$;
 4) $\log_x (2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$; 5) $\log_x 64 = 6$; 6) $\log_x 36 = -2$;
 7) $\log_x \frac{1}{125} = -3$; 8) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; 9) $\log_x 1 = 2$;
 10) $\log_x 16 = 4$; 11) $\log_x 1 = -3$; 12) $\log_x \frac{5}{7} = -1$.

- 2.110. 1) $4^x = 5$; 2) $6^x = 2$; 3) $5^{x-1} = 8$;
 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 6$; 5) $7^{x+1} = 3^x$; 6) $8^{x-2} = 10^x$;
 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 5^x$; 8) $2^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; 9) $3^x = \left(\frac{3}{8}\right)^{x+1}$.

2.111. Имеет ли смысл выражение:

- 1) $\log_2(3 - 2\sqrt{2})$; 2) $\log_4(5 - 3\sqrt{2})$;
 3) $\log_{2-\sqrt{5}} 4$; 4) $\log_{3-\sqrt{10}} \frac{7}{8}$;
 5) $\log_{\sin \frac{\pi}{2}}(\pi - 1)$; 6) $\log_{\cos 2\pi}(4 - \pi)$;
 7) $\sqrt{\log_2 0.6}$; 8) $\sqrt{\log_4 0.9}$?

2.112. Между какими целыми числами находится число:

- 1) $\log_3 15$; 2) $\log_6 200$; 3) $\log_{0.5} 1000$;
 4) $\log_{\frac{1}{3}} 10$; 5) $\log_5 \frac{1}{8}$; 6) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{12}{13}$?

2.6. Основные свойства логарифмов

Теорема 1. При любых положительных значениях b и c верно равенство:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c; \quad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем утверждение (1).

По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a(bc)} = bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} =$$

↓ по свойствам степени ↓

$$= a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Таким образом, имеем:

$$a^{\log_a(bc)} = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Отсюда, по следствию из п. 2.3, получаем равенство (1).

Докажем утверждение (2).

Преобразуем левую часть равенства (2):

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{b}{c} + \log_a c - \log_a c =$$

↓ используя равенство (1), получим ↓

$$= \log_a \left(\frac{b}{c} \cdot c \right) - \log_a c = \log_a b - \log_a c. \quad \square$$



Заметим, что равенство (2) можно доказать тем же способом, что и равенство (1), — сделайте это самостоятельно.

Равенство (1) означает, что *логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.*

Равенство (2) означает, что *логарифм дроби с положительными числителем и знаменателем равен разности логарифмов числителя и знаменателя.*



Замечание. Равенства, доказанные в теореме 1 (как и другие равенства этого пункта), являются тождествами. Действительно, каждое из них превращается в верное числовое равенство при любых значениях a , b и c , для которых входящие в равенство выражения имеют смысл.

Теорема 2. При любых значениях s и положительных значениях b верно равенство

$$\log_a b^s = s \log_a b. \quad (3)$$

Доказательство. По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b^s} = b^s = (a^{\log_a b})^s =$$

↓ по свойствам степени ↓

$$= a^{s \log_a b}.$$

Таким образом, имеем

$$a^{\log_a b^s} = a^{s \log_a b}.$$

Отсюда, по следствию из п. 2.3, получаем равенство (3). \square

Следствие 1. Если числа u и v одного знака, то имеет место равенство

$$\log_a (uv) = \log_a |u| + \log_a |v|. \quad (4)$$

Следствие 2. При любом целом k и $u \neq 0$ имеет место равенство

$$\log_a u^{2k} = 2k \log_a |u|. \quad (5)$$

Докажите эти равенства самостоятельно.

Пример 1. Найти значение выражения:

а) $\log_2 60 - \log_2 15$; б) $\lg 125 + \lg 8$; в) $\log_3 243$.

Решение.

а) $\log_2 60 - \log_2 15 = \log_2 \frac{60}{15} = \log_2 4 = 2$;

б) $\lg 125 + \lg 8 = \lg (125 \cdot 8) = \lg 1000 = 3$;

в) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3 = 5$.

Ответ: а) 2; б) 3; в) 5.

Теорема 3. При любых значениях $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и $c > 0$ верно равенство

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}. \quad (6)$$

Доказательство. *Способ 1.* По основному логарифмическому тождеству имеем

$$b^{\log_b c} = c.$$

Прологарифмировав левую и правую части этого тождества по основанию a , получим

$$\log_a (b^{\log_b c}) = \log_a c.$$

Применив тождество (3), имеем

$$\log_b c \cdot \log_a b = \log_a c.$$

Так как $b \neq 1$, то $\log_a b \neq 0$. Поэтому левую и правую части этого равенства можно разделить на $\log_a b$. В результате получим тождество (6). \square



Способ 2. Пусть $\log_b c = x$, тогда $c = b^x$. Логарифмируя обе части этого равенства по основанию a , получаем

$$\log_a c = \log_a b^x, \text{ т. е. } \log_a c = x \log_a b.$$

Откуда имеем:

$$x = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Итак, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$. \square

Тождество (6) называется *формулой перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*

Обычно в таблицах, микрокалькуляторах даются значения логарифмов по основанию 10, а когда нужно найти значение логарифма по другому основанию, пользуются формулой перехода к другому основанию. При основании $a = c$ тождество (6) имеет вид

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \quad (7)$$

Доказательство. Положив $c = a$ в формуле (6), имеем

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}. \quad \square$$

Пример 2. Найти значение выражения, если $\log_3 p = m$:

а) $\log_{\sqrt{3}} p^2 - \log_{\frac{1}{3}} p + \log_9 \sqrt{p}$;

б) $\log_{\sqrt{3}} p^4 - \log_4 13 \cdot \log_{13} 4 + 1$.

Решение. а) $\log_{\sqrt{3}} p^2 - \log_{\frac{1}{3}} p + \log_9 \sqrt{p} =$

↓ согласно тождеству (6) имеем ↓

$$= \frac{\log_3 p^2}{\log_3 \sqrt{3}} - \frac{\log_3 p}{\log_3 \frac{1}{3}} + \frac{\log_3 \sqrt{p}}{\log_3 9} =$$

↓ используя тождество (3), получим ↓

$$= \frac{2 \log_3 p}{\frac{1}{2}} - \frac{\log_3 p}{-1} + \frac{\frac{1}{2} \log_3 p}{2} =$$

$$= 4 \log_3 p + \log_3 p + \frac{1}{4} \log_3 p =$$

↓ используя тождество (1), имеем ↓

$$= \frac{21}{4} \log_3 p =$$

↓ с учетом условия $\log_3 p = m$, получим ↓

$$= 5,25m.$$

б) $\log_{\sqrt{3}} p^4 - \log_4 13 \cdot \log_{13} 4 + 1 =$

↓ на основании тождеств (6) и (7) получим ↓

$$= \frac{\log_3 p^4}{\log_3 \sqrt{3}} - 1 + 1 =$$

↓ по тождеству (3) и с учетом условия имеем ↓

$$= \frac{4 \log_3 p}{\frac{1}{2}} = 8m.$$

Ответ: а) $5,25m$; б) $8m$.

Следствие 3. Имеют место тождества:

$$\text{а) } \log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b; \quad (8)$$

$$\text{б) } a^{\log_c b} = b^{\log_c a}. \quad (9)$$

Эти тождества можно доказать, используя тождества из этого пункта и свойство (3) из пункта 2.6.

Пример 3. Упростить выражение $A = \frac{1}{3 - \log_2 \frac{8}{9}}$.

Решение. Используя определение логарифма, представим число 3 в виде логарифма по основанию 2:

$$A = \frac{1}{3 - \log_2 \frac{8}{9}} = \frac{\log_2 2}{\log_2 8 - \log_2 \frac{8}{9}} =$$

↓ по свойству (2) логарифмов имеем ↓

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{8 \cdot 9}{8}} = \frac{\log_2 2}{\log_2 9} =$$

↓ воспользовавшись формулой (7), получим ↓

$$= \log_9 2.$$

Ответ: $A = \log_9 2$.

Развитие науки, прежде всего астрономии, уже в XVI в. привело к необходимости громоздких вычислений при умножении и делении многозначных чисел. Эти вычислительные проблемы были в некоторой степени решены с открытием логарифмов и созданием таблиц логарифмов.



1. Сформулируйте теорему о логарифме произведения.
2. Сформулируйте теорему о логарифме дроби.
3. Сформулируйте теорему о логарифме степени.
- 4*. Запишите и обоснуйте формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.
5. Докажите формулу $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
- 6*. Докажите формулы:

а) $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b;$

б) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$

Упражнения

Вычислите (2.113—2.115).

2.113°. 1) $\lg 5 + \lg 2$; 2) $\lg 8 + \lg 125$;
 3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 1,5$;
 5) $\lg 25 + \lg 4$; 6) $\log_6 18 + \log_6 2$.

2.114°. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;
 3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$;
 5) $\log_{36} 84 - \log_{36} 14$; 6) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$.

2.115°. 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;
 2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;
 3) $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24$;
 4) $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$;
 5) $\log_4 91 - \log_4 13 - \log_4 3,5$;
 6) $\log_5 \frac{1}{3} - \log_5 \frac{1}{150} + \log_5 2,5$.

2.116°. Упростите выражение:

1) $\log_{3^{15}} 7^5$; 2) $\log_{7^{20}} 4^{15}$;
 3) $\log_{2^{18}} 5^{12}$; 4) $\log_{5^{16}} 11^{24}$.

Вычислите (2.117—2.119).

2.117°. 1) $\log_{17} \sqrt[3]{289}$; 2) $\log_9 \sqrt[5]{6561}$;
 3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{625}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{343}$;
 5) $\log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{8 \cdot 216}}$; 6) $\log_4 \sqrt[7]{\frac{1}{9 \cdot 1024}}$.

2.118°. 1) $\log_4 32$; 2) $\log_{32} 16$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;
 4) $\log_4 \frac{1}{128}$; 5) $\log_9 243$; 6) $\log_{2\sqrt{2}} 8$;
 7) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64}$; 8) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt{2}$; 9) $\log_{25} \frac{1}{5\sqrt{5}}$.

2.119°. 1) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$; 2) $\lg 5 + \frac{1}{2} \lg 40\,000$;
 3) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 4) $\log_7 196 - 2\log_7 2$;
 5) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3}$; 6) $3\lg 5 + \frac{1}{2} \lg 64$;
 7) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$; 8) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{27} 4^3$;

9) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

10) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

Вычислите (2.120—2.122).

2.120°. 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\frac{\lg 5}{\lg 25}$;
 4) $\frac{\log_{0,2} 36}{\log_{0,2} \frac{1}{6}}$; 5) $\frac{\lg(3\sqrt{3})}{\lg \frac{1}{3}}$; 6) $\frac{\log_9 \frac{1}{6}}{\log_9 \sqrt{6}}$.

2.121. 1) $\frac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2}$; 2) $\frac{\lg 27 + \lg \sqrt{8}}{\lg 2 + 2\lg 3}$;
 3) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$;
 5) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72}$; 6) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2} \log_6 150}$;
 7) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$; 8) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2} \log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 27}$.

2.122. 1) $\log_{\sqrt{3}} \left(2\lg \frac{9\pi}{8} \right) - \log_{\sqrt{3}} \left(1 - \lg^2 \frac{9\pi}{8} \right)$;
 2) $\log_9 (2\lg 195^\circ) - \log_9 (1 - \lg^2 195^\circ)$;
 3) $\log_{\frac{1}{4}} \sin 375^\circ + \log_{\frac{1}{4}} \cos 375^\circ$;
 4) $\log_8 \sin 795^\circ + \log_8 \cos 795^\circ$;
 5) $\log_{\sqrt{3}} (2\cos 15^\circ + 2\sin 15^\circ) + \log_{\sqrt{3}} (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$;
 6) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\cos \frac{\pi}{8} - 2\sin \frac{\pi}{8} \right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)$.

Найдите значение выражения (2.123—2.124).

2.123*. 1) $\log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}+1)$; 2) $\log_{\sqrt{3}+2} (2-\sqrt{3})$;
 3) $\log_{2\sqrt{2}+3} (3-2\sqrt{2})$; 4) $\log_{7-2\sqrt{12}} (7+2\sqrt{12})$;
 5) $\log_{\sqrt{3}+1} (4+2\sqrt{3})$; 6) $\log_{5+2\sqrt{6}} (\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

2.124*. 1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9} - \frac{\log_{27} 8}{\log_3 4}$;

$$3) \left(\frac{\lg 125 - 2 \lg 2}{\lg \sqrt[3]{4} + \lg 0,2} \right)^2;$$

$$4) \left(\frac{\log_6 25 + 2 \log_6 2}{\log_6 \sqrt[3]{0,25} + \log_6 \frac{1}{5}} \right)^3;$$

$$5) \left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7} \right) \lg 7;$$

$$6) \left(\log_{13} 4 + \frac{1}{\log_{25} 13} \right) \lg 13.$$

2.125. Упростите выражение:

$$1) \frac{1}{1 + \log_2 3};$$

$$2) \frac{1}{\log_4 5 - 1};$$

$$3) \frac{2}{\log_3 \frac{4}{5} - 1};$$

$$4) \frac{1 - \log_2 \frac{3}{7}}{2}.$$

Вычислите (2.126—2.131).

$$2.126*. 1) 7^{\frac{1}{\log_8 7}} + 3^{\log_5 2} - 2^{\log_5 3};$$

$$2) 4^{\lg 6} + 12^{\frac{1}{\log_5 12}} - 6^{\lg 4};$$

$$3) 3^{\frac{1}{\log_8 27}} - 5^{\log_6 10} + 10^{\log_6 5};$$

$$4) 9^{\frac{1}{\log_4 81}} - 8^{\log_7 5} + 5^{\log_7 8};$$

$$5) 9^{\log_2 12} - 12^{\log_2 9} + 11^{\frac{1}{4 \log_{16} 11}};$$

$$6) 14^{\frac{1}{3 \log_{125} 14}} + 15^{\log_3 25} - 25^{\log_3 15}.$$

$$2.127. 1) \sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}};$$

$$2) \sqrt{9^{\frac{1}{\log_{15} 3}} + 169^{\frac{1}{\log_{20} 13}}};$$

$$3) \sqrt{27^{\frac{1}{3 \log_{16} 3}} + 6^{2 - \frac{1}{\log_3 6}} + 4^{\frac{1}{\log_5 4}}};$$

$$4) \sqrt{8^{\frac{1}{3 \log_9 2}} + 3^{1 + \frac{1}{2 \log_4 3}} + 1}.$$

$$2.128. 1) \log_5 10 \cdot \lg 5;$$

$$2) \log_3 18 \cdot \log_{18} 3;$$

$$3) \log_2 10 \cdot \lg 32;$$

$$4) \log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 16;$$

$$5) \log_3 25 \cdot \log_5 81;$$

$$6) \log_2 27 \cdot \log_3 64;$$

$$7) \log_3 128 \cdot \log_2 \frac{1}{27};$$

$$8) \log_5 49 \cdot \log_7 \frac{1}{5\sqrt{5}}.$$

$$2.129. 1) \log_6 3 + \log_6 72 + \log_4 7 \cdot \log_{\sqrt{7}} 2 + 5^{\log_5 3};$$

$$2) \log_5 35 - \log_5 7 + \log_3 125 \cdot \log_{\sqrt{5}} 9 - 6^{\log_6 2};$$

$$3) 81^{\frac{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2,5}{3}};$$

$$4) 64^{\frac{-\log_{0,25} 9 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 2 + 1,5}{3}}.$$

$$2.130*. 1) \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{15} 16;$$

$$2) \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \dots \cdot \log_{16} 15;$$

$$3) \log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19;$$

$$4) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6} \cdot \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{7} \cdot \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{8}.$$

$$2.131. 1) 2^{\log_4 (\sqrt{3} - 2)^2} + 5^{\log_{25} (\sqrt{3} + 2)^2};$$

$$2) 6^{\log_{36} (\sqrt{5} - 3)^2} + 7^{\log_{49} (\sqrt{5} + 3)^2};$$

$$3) 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + 3^{\log_9 (2\sqrt{3} - 4)^2};$$

$$4) 2^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}} + 4^{\log_{16} (3\sqrt{2} - 5)^2}.$$

2.132. Выразите через m и n , если $\log_7 2 = m$ и $\log_7 3 = n$:

$$1) \log_7 6;$$

$$2) \log_7 1,5;$$

$$3) \log_7 72;$$

$$4) \log_7 15;$$

$$5) \log_7 12;$$

$$6) \log_7 30.$$

2.133. Известно, что $\log_3 5 = m$. Выразите через m :

$$1) \log_9 15;$$

$$2) \log_5 45;$$

$$3) \log_{1875} 375.$$

2.134*. Известно, что $\log_{21} 14 = m$ и $\log_{28} 24 = n$. Выразите через m и n :

$$1) \log_2 3;$$

$$2) \log_2 7;$$

$$3) \log_2 21.$$

2.135. Найдите значение выражения:

$$1) \lg(10a^4 \cdot \sqrt[5]{b^2}) \text{ при } \lg a = 2; \lg b = 3;$$

$$2) \lg\left(\frac{1}{100} a^8 \cdot \sqrt[4]{b^3}\right) \text{ при } \lg a = 4; \lg b = 5;$$

$$3) \lg\left(\frac{100a \cdot \sqrt[3]{0,1}}{100a}\right) \text{ при } \lg a = -2;$$

$$4) \lg\left(\frac{\sqrt[3]{10b \cdot \sqrt{10000}}}{0,1b}\right) \text{ при } \lg b = -1;$$

$$5) \lg\left(\frac{a \sqrt{1000} \cdot \sqrt[12]{ab^3}}{10 \sqrt{a^2 b}}\right) \text{ при } \lg a = 1; \lg b = -1;$$

$$6) \lg\left(\frac{100^2 a^4 \cdot \sqrt[4]{a^5 b}}{0,001 \sqrt{ab^5}}\right) \text{ при } \lg a = -2; \lg b = -1.$$

2.136. Верно ли равенство:

$$1) 3^{\log_{11} 5} = 5^{\log_{11} 3};$$

$$2) 7^{\log_{\pi} 4} = 4^{\log_{\pi} 7};$$

$$3) \log_9 7^4 = 2 \log_3 7;$$

$$4) \log_{13^{15}} 2^{35} = \frac{7}{3} \log_{13} 2;$$

- 5) $7 = \log_7 9^7$;
 6) $8 = \log_3 8^3$;
 7) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \log_2 3 - \log_2 5$;
 8) $\log_3 7 \cdot \log_3 2 = \log_3 7 + \log_3 2$;
 9) $5^{\log_5 5^{13}} = 13$; 10) $2^{\log_2 7} = 7$;
 11) $4^{\log_5 12} = 12^{\log_5 4}$; 12) $2^{\log_5 6} = 5^{\log_2 6}$?

Найдите значение x (2.137—2.138).

- 2.137. 1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$;
 2) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$;
 3) $\lg x = 3\lg 2 + \frac{1}{2}\lg 64 - \frac{1}{3}\lg 8$;
 4) $\lg x = 2\lg 6 + \frac{1}{2}\lg 25 - \frac{1}{3}\lg 125$;
 5) $\lg x = \lg(36^{\log_6 5} + 10^{2-\lg 4} + 4^{\log_4 49})$;
 6) $\lg x = \lg(0,36^{\log_{0,6} 4} + 4^{2-\log_4 2} - 3^{\log_3 16})$.
- 2.138*. 1) $\lg x = \lg\left(\frac{\log_2^2 10 + \log_2 10 \cdot \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 10 + 2\log_2 5}\right)$;
 2) $\lg x = \lg\left(\frac{\lg^2 10 - 2\lg 5 \cdot \lg 2 - 3\lg^2 2}{2\lg 5 - 6\lg 2}\right)$;
 3) $\lg x = \lg\left(\frac{\log_5^2 15 - \log_5^2 3 + 2\log_5 15 + 2\log_5 3}{\log_5 15 + \log_5 3}\right)$;
 4) $\lg x = \lg\left(\frac{\log_2^2 18 - 4\log_2^2 3 + 3\log_2 18 + 6\log_2 3}{\log_2 18 + 2\log_2 3}\right)$;
 5) $\lg x = \lg(4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9})$;
 6) $\lg x = \lg\left(7^{\frac{1}{2\log_3 7}} \cdot 7^{\log_7^2 8} - \sqrt{3} \cdot 8^{\log_7 8} + (\sqrt{7})^{\log_7 9}\right)$;
 7) $\lg x = \lg((\log_3 6 + \log_6 81 + 4)(\log_3 6 - \log_{54} 36)\log_6 3 - \log_3 6)$;
 8) $\lg x = \lg((\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2)$.

2.7. Логарифмическая функция

Рассмотрим выражение $\log_a x$, где x — переменная, a — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$. Это выражение имеет смысл при любом значении $x > 0$ и не имеет смысла при любом значении $x \leq 0$. Таким образом, естественной областью определения выражения $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) является множество всех положительных действительных чисел, т. е. промежуток $(0; +\infty)$.

Определение. Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где a — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$.

Область определения логарифмической функции — это естественная область определения выражения $\log_a x$, т. е. множество $(0; +\infty)$.

Графики некоторых логарифмических функций изображены на рисунке 33. Эти изображения (как и для графиков других функций) можно было получить, строя их по точкам. Отметим некоторые особенности изображенных графиков.

График функции $y = \log_2 x$ расположен справа от оси Oy и пересекает ось Ox в точке $(1; 0)$.

Когда значения аргумента x уменьшаются, т. е. приближаются к нулю, то график этой функции «приближается» к оси Oy и при этом «круто» опускается вниз. А когда значения аргумента x увели-

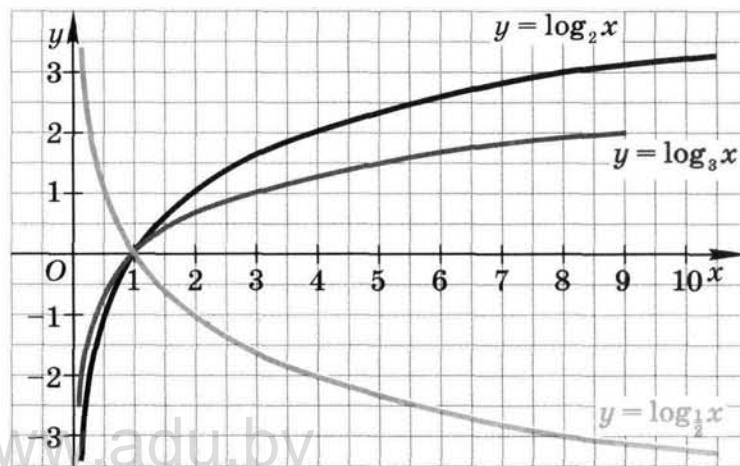


Рис. 33

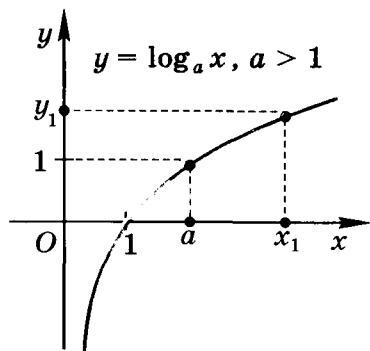


Рис. 34

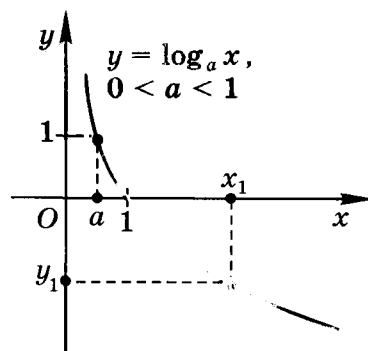


Рис. 35

чиваются, то график «медленно» поднимается вверх (см. рис. 33). Аналогично для любой функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ (рис. 34).

График функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ расположен справа от оси Oy и пересекает ось Ox в точке $(1; 0)$ (см. рис. 33).

Заметим, что когда значения аргумента x уменьшаются, т. е. приближаются к нулю, то график этой функции «приближается» к оси Oy и при этом «круто» поднимается вверх. А когда значения аргумента x увеличиваются, то график «медленно» опускается вниз. Аналогично для любой функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ (рис. 35).

Теорема (о свойствах логарифмической функции $y = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$)

1. Областью определения логарифмической функции является интервал $(0; +\infty)$.
2. Множеством (областью) значений логарифмической функции является множество \mathbf{R} всех действительных чисел.
3. Логарифмическая функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.
4. График логарифмической функции пересекается с осью абсцисс в точке $(1; 0)$ и не пересекается с осью ординат.
5. Значение аргумента $x = 1$ является нулем логарифмической функции.
6. При $a > 1$ логарифмическая функция принимает отрицательные значения на интервале $(0; 1)$ и принимает положительные значения на интервале $(1; +\infty)$.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция принимает отрицательные значения на интервале $(1; +\infty)$ и принимает положительные значения на интервале $(0; 1)$.

7. Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной.

8. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает на всей области определения.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает на всей области определения.

9. Логарифмическая функция не является периодической.

Изображение графика логарифмической функции позволяет наглядно представить эти свойства.

Множество (область) значений логарифмической функции — проекция ее графика на ось Oy , а на рисунках 34 и 35 видно, что эта проекция есть ось Oy . Это значит, что для любой точки y_1 , лежащей на оси Oy , найдется такая точка x_1 , принадлежащая интервалу $(0; +\infty)$, что $y_1 = \log_a x_1$ (свойство 2).

Множество (область) значений логарифмической функции — это множество всех действительных чисел, а в нем нет ни наименьшего числа, ни наибольшего (свойство 3).

График логарифмической функции проходит через точку $(1; 0)$ и лежит в правой полуплоскости (свойства 4, 5).

При $a > 1$ график логарифмической функции лежит в IV координатном угле, когда $x \in (0; 1)$, и лежит в I координатном угле, когда $x \in (1; +\infty)$. При $0 < a < 1$ график логарифмической функции лежит в I координатном угле, когда $x \in (0; 1)$, и лежит в IV координатном угле, когда $x \in (1; +\infty)$ (свойство 6).

Область определения логарифмической функции не симметрична относительно начала координат, поэтому логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической (свойства 7, 9).

На рисунке 34 видно, что при $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, а на рисунке 35 видно, что при $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает (свойство 8).

Пусть точка $M(p; q)$ лежит на графике функции $y = \log_a x$. Это значит, что верно числовое равенство $q = \log_a p$, следовательно, согласно определению логарифма верно числовое равенство $p = a^q$.

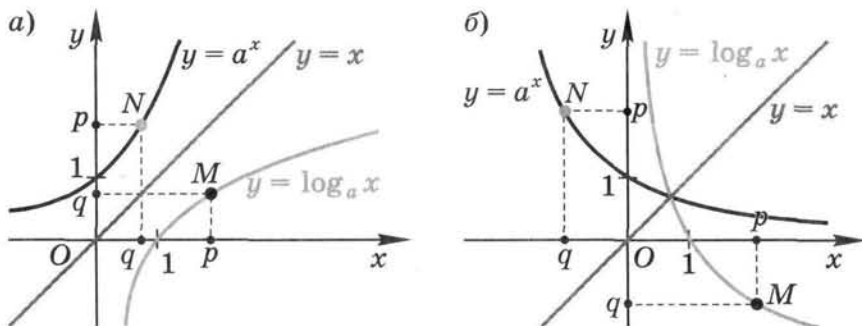


Рис. 36

В свою очередь, последнее равенство означает, что точка $N(q; p)$ лежит на графике функции $y = a^x$.

Заметим, что точки $M(p; q)$ и $N(q; p)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Таким образом, каждой точке M на графике функции $y = \log_a x$ соответствует симметричная ей относительно этой прямой точка N на графике функции $y = a^x$ и наоборот. Следовательно, графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 36).

Последнее утверждение дает возможность, зная график функции $y = a^x$, изобразить график функции $y = \log_a x$ (не используя построение по точкам).

▲ Симметричность графиков функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ означает, что эти функции взаимно обратны.

Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются **взаимно обратными**, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $g(f(x)) = x$ и для любого $x \in D(g)$ верно равенство $f(g(x)) = x$.

Покажем, что показательная и логарифмическая функции с одним и тем же основанием a взаимно обратны.

Пусть $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$. Тогда $D(f) = \mathbf{R}$, $D(g) = (0; +\infty)$.

Для любого $x \in \mathbf{R}$

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x \log_a a = x.$$

Для любого $x \in (0; +\infty)$

$$f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$

Покажем, что графики взаимно обратных функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$.

Пусть точка $M(p; q)$ лежит на графике функции $y = f(x)$. Это означает, что верно числовое равенство $q = f(p)$. Тогда по определению взаимно обратных функций $g(q) = g(f(p)) = p$. А равенство $g(q) = p$ означает, что точка $N(q; p)$ лежит на графике функции $y = g(x)$.

Таким образом, каждой точке M на графике функции $y = f(x)$ соответствует симметричная относительно прямой $y = x$ точка N на графике функции $y = g(x)$, и наоборот. Следовательно, графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$. ▲



1. Сформулируйте определение логарифмической функции.
2. Сформулируйте теорему о свойствах логарифмической функции.
- 3*. Обоснуйте основные свойства логарифмической функции при $a > 0$.
- 4*. Обоснуйте основные свойства логарифмической функции при $0 < a < 1$.

Упражнения

Укажите естественную область определения выражения (2.139—2.145).

- 2.139°. 1) $\lg x$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x$;
 3) $\log_2(x-1)$; 4) $\lg(x+6)$;
 5) $\log_3(3-x)$; 6) $\lg(6-x)$;
 7) $\log_5(-2x)$; 8) $\log_{0,2}\left(-\frac{x}{5}\right)$.
- 2.140. 1) $\lg(2x^2 - 9x + 4)$; 2) $\lg(2x^2 - 5x + 2)$;
 3) $\log_4(2 - 2x^2 + 3x)$; 4) $\log_{0,1}(3 + 5x - 2x^2)$;
 5) $\log_{\frac{2}{3}}(4x^2 + 20x + 25)$; 6) $\log_8(9x^2 - 6x + 1)$;
 7) $\log_5(8x - 16x^2 - 1)$; 8) $\log_{\frac{3}{5}}(28x - 4x^2 - 49)$.
- 2.141. 1) $\log_5|x|$; 2) $\log_{1,4}|x-2|$;
 3) $\log_6 x^2$; 4) $\log_2 x^3$.
- 2.142. 1) $\log_4 \frac{6x-5}{4x+1}$; 2) $\log_2 \frac{2-3x}{2x+5}$;
 3) $\lg \frac{x+4}{x(3-x)}$; 4) $\lg \frac{x(x+5)}{2-x}$;

5) $\lg \frac{(2x-3)(6+3x)}{7-4x}$;

6) $\lg \frac{x-1}{(4x+12)(6-x)}$;

7) $\log_{14} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right)$;

8) $\log_3 \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{4} \right)$.

- 2.143. 1) $\lg(|x+1|-1)$; 2) $\lg(|5-2x|-1)$;
 3) $\lg(|x^2+5x|-6)$; 4) $\lg(|x^2-x|-2)$;
 5)* $\lg(|x|+|x+3|-5)$; 6)* $\lg(|x-2|+|x+2|-4)$.

- 2.144. 1) $\lg \frac{x+2}{|x-2|}$; 2) $\lg \frac{x+4}{|x-5|}$;
 3) $\lg \frac{|x^2-9|}{2x-5}$; 4) $\lg \frac{3x+5}{x^2-25}$;
 5) $\lg \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}$; 6) $\lg \frac{x^2+6x-7}{|x+4|}$.

- 2.145. 1) $\lg(1-\sin x)$; 2) $\lg(1+\cos x)$;
 3) $\sqrt{\lg \cos x}$; 4) $\sqrt{\lg \sin x}$;
 5) $\lg(\arcsin x)$; 6) $\lg(\arccos x)$.

2.146°. 1) Среди точек $A(8; 3)$, $B(\frac{1}{4}; 1)$, $C(16; 2)$, $D(\frac{1}{64}; -3)$ укажите те, которые принадлежат графику функции $y = \log_4 x$.

2) Среди точек $K(5; -1)$, $M(\frac{1}{25}; -2)$, $N(\frac{1}{5}; 1)$, $P(-5; 1)$ укажите те, которые принадлежат графику функции $y = \log_5 x$.

2.147. На рисунке 37 изображен график функции, заданной формулой $y = \log_a x$ на множестве D . Укажите для нее:

- а) значение a ;
 б) область определения;
 в) множество (область) значений;
 г) промежутки возрастания (убывания);
 д) координаты точки пересечения графика с осью Ox ;
 е) промежутки положительных значений;
 ж) промежутки отрицательных значений.

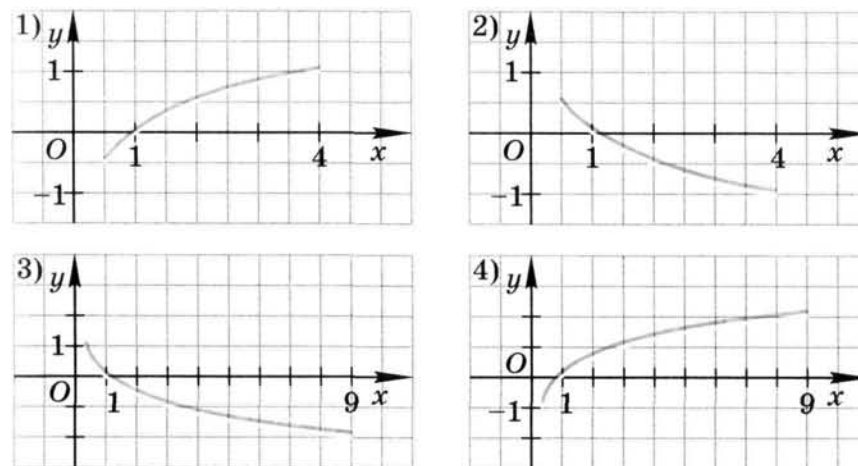


Рис. 37

2.148. Определите значение a и изобразите график функции $y = \log_a x$, зная, что он проходит через точку:

- 1) $A(4; 2)$; 2) $B(9; -2)$;
 3) $C(4; -2)$; 4) $M(9; 2)$.

2.149. Укажите несколько точек, координаты которых удовлетворяют уравнению, задающему функцию, и изобразите график функции:

- 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;
 4) $y = \log_4 x$; 5) $y = \log_2(-x)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

2.150. Для функции (см. упр. 2.149) укажите:

- а) область определения;
 б) множество (область) значений;
 в) промежуток убывания;
 г) промежуток возрастания;
 д) значения x , при которых $y > 0$;
 е) значения x , при которых $y < 0$;
 ж) нули функции.

Сравните с нулем число (2.151—2.152).

2.151°. 1) $\log_3 8$; 2) $\log_2 2,5$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;

- 4) $\lg 3,8$; 5) $\lg 0,45$; 6) $\log_{0,2} 2,5$;
 7) $\log_{0,3} 0,35$; 8) $\log_{1,4} 0,8$; 9) $\log_{0,1} 10$.

- 2.152. 1) $\log_6 \frac{4}{5} - \log_6 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 7$;
 3) $-\log_2 6$; 4) $-\log_3 8$;
 5) $\log_3 8 - 1$; 6) $1 - \log_4 9$;
 7) $8 - \lg 106$; 8) $\lg 90 - 2$;
 9) $\lg\left(\frac{1}{4}\right)^{-26}$; 10) $\lg\left(\frac{3}{2}\right)^{-10}$.

Сравните числа (2.153—2.155).

- 2.153°. 1) $\log_3 15$ и $\log_3 20$; 2) $\log_4 0,5$ и $\log_4 0,4$;
 3) $\log_{\frac{1}{2}} 6$ и $\log_{\frac{1}{2}} 8$; 4) $\log_{0,2} 1,7$ и $\log_{0,2} 1,8$;
 5) $\log_2 3$ и $\log_2 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$;
 7) $\log_4 7$ и $\log_5 7$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} 10$ и $\log_{\frac{1}{3}} 10$.
- 2.154. 1) $\lg \sqrt{0,7}$ и $\lg \frac{8}{13}$; 2) $\lg \sqrt{5}$ и $\lg 3,5$;
 3) $\lg^2 0,3$ и $\lg 0,3^2$; 4) $\log_{0,1} 0,6^2$ и $\log_{0,1}^2 0,6$;
 5) $\lg(\sin 45^\circ)$ и $\lg(\lg 45^\circ)$; 6) $\lg(\cos 30^\circ)$ и $\lg(\lg 30^\circ)$.

- 2.155. 1) $\lg 4 + 3^{\log_7 11}$ и $\lg 3 + 11^{\log_7 3}$;
 2) $\lg 0,2 + 7^{\log_3 11}$ и $\lg 0,5 + 11^{\log_7 7}$;
 3) $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2; 4) 4 и $\log_2 5 + \log_5 3$.

2.156. Является ли убывающей функция:

- 1) $y = \log_8 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;
 3) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; 4) $y = \lg x$;
 5) $y = \log_\pi x$; 6) $y = \log_{0,7} x$;
 7) $y = \lg \frac{x}{3}$; 8) $y = \log_5 (x + 10)$;
 9) $y = \log_3 (3 - x)$; 10) $y = \log_{\frac{1}{2}} (8 - x)?$

2.157. Является ли возрастающей функция:

- 1) $y = \frac{1}{\log_5 x}$; 2) $y = \frac{4}{\log_{\frac{1}{1}} x}$;
 3) $y = \log_{\lg \frac{\pi}{3}} x$; 4) $y = \log_{\sin 30^\circ} x$;

- 5) $y = \log_{\sin \frac{\pi}{3}} (2x)$; 6) $y = \log_{\operatorname{ctg} 30^\circ} \frac{x}{4}$;
 7) $y = \log_{10 \sin 60^\circ} (4 + x)$; 8) $y = \log_{\operatorname{ctg}^2 60^\circ} (x - 1)?$

2.158. При каких значениях a верно равенство:

- 1) $\log_3 a = 8,1$; 2) $\log_2 a = -2,5$;
 3) $\log_{\frac{1}{4}} a = -2,9$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} a = 6,7$;
 5) $\log_a 8 = 2,7$; 6) $\log_a 10 = 0,3$;
 7) $\log_a 0,14 = 5,3$; 8) $\log_a 9 = -7?$

2.159. Сравните числа t и p , если верно равенство:

- 1) $\log_6 t < \log_6 p$; 2) $\log_9 t > \log_9 p$;
 3) $\log_{\frac{1}{5}} t > \log_{\frac{1}{5}} p$; 4) $\log_{0,8} t < \log_{0,8} p$.

2.160. Определите знак произведения $\lg a \cdot \lg b$, если:

- 1) $a > 1, b > 1$; 2) $0 < a < 1, b > 1$;
 3) $0 < a < 1, 0 < b < 1$; 4) $a > 1, 0 < b < 1$.

2.161. Определите знак произведения $\log_{0,1} a \cdot \log_{0,1} b$, используя условие упражнения 2.160.

2.162. Изобразите схематично график функции:

- 1) $y = \log_2 (x - 2)$; 2) $y = \log_2 (x + 2)$;
 3) $y = \log_2 x + 2$; 4) $y = \log_2 x - 2$;
 5) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 3)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x - 3)$;
 7) $y = \log_{\frac{2}{2}} x - 3$; 8) $y = \log_{\frac{2}{2}} x + 3$;
 9) $y = \log_2 (2 - x)$; 10) $y = \log_{\frac{1}{2}} (1 - x)$;
 11) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$; 12) $y = \log_{\frac{2}{3}} (x + 1) - 1$.

2.163*. Для функции (см. упр. 2.162) укажите:

- а) область определения;
 б) множество (область) значений;
 в) промежуток возрастания;
 г) промежуток убывания;
 д) значения x , при которых $y > 0$;
 е) значения x , при которых $y < 0$;

- ж) координаты точки пересечения графика с осью Ox ;
 з) координаты точки пересечения графика с осью Oy .

2.164*. Изобразите схематично график функции, зная, что $a > 1$:

- 1) $y = \log_a x - 1$;
- 2) $y = \log_a x + 2$;
- 3) $y = \log_a (x + 1)$;
- 4) $y = \log_a (x - 2)$;
- 5) $y = \log_a (x - 1) + 1$;
- 6) $y = \log_a (x + 2) - 1$;
- 7) $y = -1 - \log_a x$;
- 8) $y = 1 - \log_a x$.

2.165*. Изобразите схематично график функции (см. упр. 2.164), если $0 < a < 1$.

Изобразите схематично график функции (2.166—2.167).

- 2.166*. 1) $y = \log_2 |x|$;
- 2) $y = \log_{0,5} |x|$;
 - 3) $y = |\log_2 x|$;
 - 4) $y = |\log_{0,5} x|$;
 - 5) $y = \log_2 (|x| - 2)$;
 - 6) $y = \log_{0,5} (|x| - 1)$;
 - 7) $y = |\log_2 (x + 1)|$;
 - 8) $y = |\log_{0,5} (x - 2)|$;
 - 9) $y = |\log_2 |x||$;
 - 10) $y = -|\log_{0,5} |x||$.

- 2.167*. 1) $y = \log_x 1$;
- 2) $y = \log_x x$;
 - 3) $y = 5^{\log_5 x}$;
 - 4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;
 - 5) $y = \log_2 (x^2 - 4) - \log_2 (x - 2)$;
 - 6) $y = \log_2 (x^2 + 2x + 1) - \log_2 (x + 1)$;
 - 7) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$;
 - 8) $y = \lg (\sin^2 x) + \lg (\cos^2 x)$.

2.168. Определите число корней уравнения, используя графики функций:

- 1) $1 - x = \log_3 x$;
- 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 2$;
- 3) $x^2 + 2 = \log_2 x$;
- 4) $x^2 - 4 = \log_4 x$;
- 5) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$;
- 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$;
- 7) $\log_2 |x| = -0,5|x|$;
- 8) $\log_{0,2} |x| \approx x^2$.

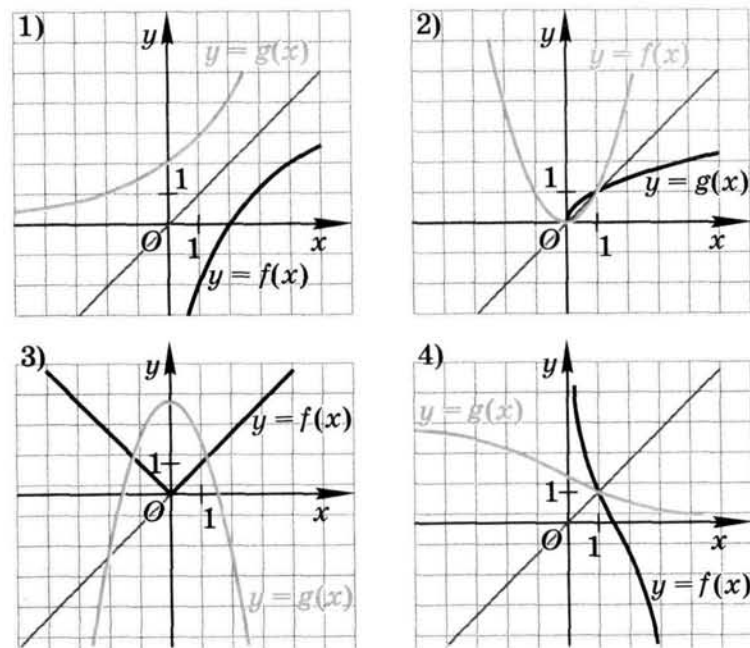


Рис. 38

2.169*. На каком из рисунков (рис. 38) изображены графики взаимно обратных функций?

2.170*. На рисунке 39 изображен график функции $y = f(x)$; перерисовав его в тетрадь, изобразите график функции обратной данной.

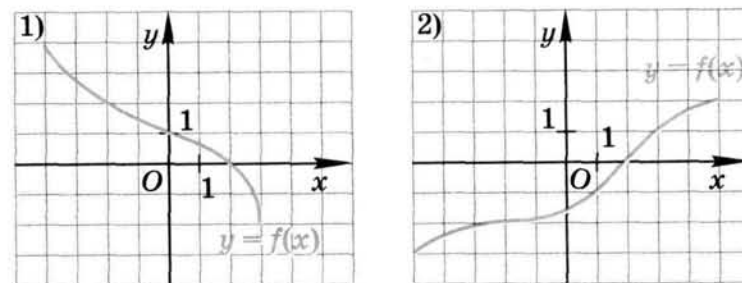


Рис. 39

2.8. Логарифмические уравнения

В этом пункте рассмотрим некоторые уравнения, в которых неизвестное находится под знаком логарифма. Уравнения такого вида принято называть **логарифмическими**.

При решении логарифмических уравнений часто будет использоваться следующее утверждение.

Следствие. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$, $v > 0$. Если $\log_a u = \log_a v$, то $u = v$.

Доказательство. Воспользовавшись основным логарифмическим тождеством и условием, получим:

$$u = a^{\log_a u} = a^{\log_a v} = v. \quad \square$$



При решении уравнений часто используются утверждения, вытекающие из доказанного следствия:

$$1) \log_a f(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$2)^* \log_{f(x)} b = \log_{f(x)} c \Leftrightarrow \begin{cases} b = c, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_{\sqrt{3}}(7x^2 + 2) = 4$.

Решение. По определению логарифма имеем равносильное данному уравнение

$$7x^2 + 2 = (\sqrt{3})^4.$$

Решим это уравнение:

$$7x^2 = 9 - 2,$$

$$x^2 = 1,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Ответ: -1; 1.

Пример 2. Решить уравнение $\log_5(2x) + \log_5 x = \log_5 8$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_5(2x^2) = \log_5 8. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Уравнение (2) равносильно уравнению $2x^2 = 8$ (поясните почему).

Решая его, получим: $x = -2$ или $x = 2$.

С учетом неравенства (1) оставляем $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2^2(x-1) - 5\log_2(x-1) - 6 = 0.$$

Решение. Обозначив $\log_2(x-1) = t$, получим уравнение $t^2 - 5t - 6 = 0$, откуда

$$t = -1 \text{ или } t = 6.$$

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\log_2(x-1) = -1 \quad (3)$$

или

$$\log_2(x-1) = 6. \quad (4)$$

Решая уравнение (3), получаем $x-1 = 2^{-1}$, откуда $x = 1,5$.

Решая уравнение (4), получаем $x-1 = 2^6$, откуда $x = 65$.

Ответ: 1,5; 65.

Пример 4. Решить уравнение $\log_2 x + \log_8 x = -4$.

Решение. Используя формулу перехода к логарифму с другим основанием, получим равносильное данному уравнение

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = -4.$$

Решим его:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} = -4 &\Leftrightarrow 4\log_2 x = -12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Пример 5. Решить уравнение $2^{x+1} = 3^{x-2}$.

Решение. Поскольку $2^{x+1} > 0$ и $3^{x-2} > 0$ при любых значениях x , то можно прологарифмировать обе части данного уравнения, например, по основанию 10; в результате получим:

$$2^{x+1} = 3^{x-2} \Leftrightarrow (x+1)\lg 2 = (x-2)\lg 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lg 3 - \lg 2)x = 2\lg 3 + \lg 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\lg 3 + \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \Leftrightarrow x = \frac{\lg(3^2 \cdot 2)}{\lg 1,5} \Leftrightarrow x = \log_{1,5} 18.$$

Ответ: $\log_{1,5} 18$.



В примере 5 уравнение можно прологарифмировать и по другому основанию, например по основанию 2 (сделайте это). А можно решить его и так:

$$2^{x+1} = 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 18 \Leftrightarrow x = \log_{1.5} 18.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_7(x+1) - \log_7(12-2x) = \log_7(3-x). \quad (5)$$

Решение. *Способ 1.* $\log_7(x+1) = \log_7(12-2x) + \log_7(3-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (12-2x)(3-x), \\ x+1 > 0, \\ 12-2x > 0, \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 19x + 35 = 0, \\ x > -1, \\ x < 6, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x=7 \text{ или } x=\frac{5}{2}), \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,5.$$

Ответ: 2,5.



Способ 2. Из данного уравнения следует, что

$$\frac{x+1}{12-2x} = 3-x.$$

Откуда получим:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 19x + 35 &= 0, \\ x_1 &= 7, x_2 = 2,5. \end{aligned}$$

Проверка полученных значений по исходному уравнению (5) показывает, что число 7 не является его корнем. Действительно, при этом значении x выражения $\log_7(12-2x)$ и $\log_7(3-x)$ не имеют смысла. Значение $x_2 = 2,5$ — корень (убедитесь в этом).

Пример 7. Решить уравнение:

- а) $\log_x 16 = 2$;
- б) $\log_x 1 = 5$;
- в) $\log_x 1 = 0$.

Решение. а) По определению логарифма для уравнения $\log_x 16 = 2$ имеем: $x > 0$, $x \neq 1$ и $x^2 = 16$. Решая последнее уравнение, находим

$$x = -4 \text{ или } x = 4,$$

а поскольку $x > 0$, то получим $x = 4$.

б) Уравнение $\log_x 1 = 5$ равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^5 = 1, \end{cases}$$

которая не имеет решений.



Можно рассуждать иначе. Так как при $x > 0$, $x \neq 1$ верно равенство $\log_x 1 = 0$, то уравнение $\log_x 1 = 5$ не имеет решений.

в) Любое положительное и отличное от 1 число x является корнем уравнения $\log_x 1 = 0$ (поясните почему).

Ответ: а) 4; б) нет решений; в) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 8. Решить уравнение $\log_x(5x+6) = 2$.

Решение:

$$\log_x(5x+6) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5x+6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x = -1 \text{ или } x = 6), \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

▲ **Пример 9.** Решить уравнение с неизвестным x :

- а) $\log_a x = 3$;
- б) $\log_2 x = a$.

Решение. а) Если $a \leq 0$ или $a = 1$, то выражение $\log_a x$ не имеет смысла.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение $x = a^3$.

б) При любом действительном значении a уравнение $\log_2 x = a$ имеет единственное решение $x = 2^a$.

Ответ: а) если $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = a^3$;

б) $x = 2^a$ при любом действительном значении a . ▲



1. Сформулируйте теорему о равенстве логарифмов с одинаковыми основаниями.

2. Опишите способ решения уравнения вида $\log_a f(x) = b$.

3. Опишите способ решения уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

4*. Опишите способы решения уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) + \log_a h(x).$$

5*. Опишите способы решения уравнения вида

$$r_1 \log_a^2 f(x) + r_2 \log_a f(x) + r_3 = 0.$$

6*. Опишите способы решения уравнения вида $\log_x f(x) = m$.

7*. Опишите способы решения уравнения вида

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (a > 0, b > 0).$$

Упражнения

Решите уравнение (2.171—2.197).

2.171°. 1) $\lg(4x+1) = \lg x$;

2) $\lg(x-4) = \lg(3x)$;

3) $\log_6(5x+3) = \log_6(7x+5)$;

4) $\log_{\frac{2}{3}}(6x+8) = \log_{\frac{2}{3}}(3x-1)$;

5) $\log_{\frac{1}{4}}(2x-1) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2+x-3)$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)$.

2.172°. 1) $\log_6 x = 3$;

2) $\log_5 x = 1$;

3) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$;

4) $\log_{27} x = \frac{1}{3}$;

5) $\log_{0,1} x = 0$;

6) $\lg x = 0$;

7) $\log_2(-x) = -5$;

8) $\log_{\frac{1}{2}}(-x) = -1$.

2.173°. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(2x-1) = 1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) = -1$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(4x+5) = -1$;

4) $\log_4(6x-1) = 1$;

5) $\log_4(x^2-6x) = 2$;

6) $\log_3(x^2-8x) = 2$.

2.174. 1) $\lg x^2 = 0$;

2) $\lg x^2 = 2$;

3) $\log_4 x^2 = 3$;

4) $\log_6 x^2 = 0$;

5) $\log_3 x^3 = 0$;

6) $\log_4 x^3 = 6$;

7) $\ln x^2 = 1$;

8) $\ln x^7 = -1$.

2.175. 1) $\log_3(x^2-1) = 1$;

2) $\log_5(x^2+1) = 1$;

3) $\log_{0,5}(3-x^2) = -1$;

4) $\log_{0,2}(6-x^2) = -1$;

5) $\log_9(x-1)^2 = 1$;

6) $\log_{0,04}(x-2)^2 = -1$;

7) $\log_2(\sqrt{x}-2) = 1$;

8) $\log_3(\sqrt{x}+1) = 1$.

2.176. 1) $\log_7 \log_2 \log_{13} x = 0$;

2) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$;

3) $\log_{2008} \log_3 \log_2 x = 0$;

4) $\lg \lg \log_5 x = 0$.

2.177. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(5 - \log_3 x) = 2$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3 - \log_3(x-2)) = 0$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \log_2(x-5)) = -1$;

4) $\log_{\frac{1}{5}}(2 + \log_{\frac{1}{3}}(3+x)) = 0$.

2.178. 1) $\lg(3x-17) = \lg(x+1)$;

2) $\lg(4x+5) = \lg(5x+2)$;

3) $\lg(2x^2+3x) - \lg(6x+2) = 0$;

4) $\log_3(x^2-4x-5) - \log_3(7-3x) = 0$;

5) $\lg(5x^2) - \lg(x^3+6x) = 0$;

6) $\lg(x^3+6x^2) - \lg(2x^2+12x) = 0$.

2.179. 1) $2\lg(x-1) = \lg(5x+1)$;

2) $\log_{0,5}(6-x) = 2\log_{0,5} x$;

3) $\lg(4x-3) = 2\lg x$;

4) $2\log_{0,2} x = \log_{0,2}(5x^2-x)$;

5) $2\lg(x-1) = \lg(1,5x+1)$;

6) $\lg(12x-x^2-19) = 2\lg(x-1)$.

2.180. 1) $\lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 3$;

2) $\log_2(x-5) + \log_2(x+3) = \log_2 8$;

3) $\log_3(x-2) + \log_3(x+6) = 2$;

4) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 0$;

5) $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$;

6) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$.

2.181. 1) $\lg(x-1) = \lg 2 + \lg(2x-11)$;

2) $\lg(3x-1) = \lg 5 + \lg(x+5)$;

3) $\log_7 x + \log_7(x-2) = \log_7(2x^2-7x+6)$;

4) $\log_3(x^2-x) = \log_3 3 + \log_3 x$;

5) $\lg(5x) + \lg \frac{1}{5x} = \frac{1}{2} \lg(x^2+x-5)$;

6) $\lg(8x) - \lg(4x) = \frac{1}{2} \lg(x^2-4x-1)$.

2.182. 1) $\log_5 x - \log_{0,2} x = 1$;

2) $\log_2 x + \log_8 x = 8$;

3) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$; 4) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{2}$;
 5) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$; 6) $\log_5 x - \log_{\sqrt{5}} x = 1$.
 2.183. 1) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; 2) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$;
 3) $\lg^2 x - 3\lg x - 4 = 0$; 4) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$;
 5) $\log_2 4 \cdot \log_3^2 x - \log_3 x = 0$;
 6) $\log_3 9 \cdot \log_4^2 x + \log_4 x = 0$.

2.184. 1) $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$;
 2) $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$;
 3) $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$;
 4) $5\log_{32}^2(-x) = 1 + 2\log_{32} x^2$.

2.185. 1) $2\log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9\lg x)$;
 2) $2\log_{0,1}(\lg x) = \log_{0,1}(3 - 2\lg x)$;
 3) $\lg^2 x = \lg(100x)$;
 4) $2\log_{16}^2 x = \log_{16}(16x)$;
 5) $\lg^2 x + \lg \frac{5}{x} + \lg \frac{2}{x} - 4 = 0$;
 6) $\lg^2 x + \lg \frac{25}{x} + \lg \frac{4}{x} - 5 = 0$;
 7) $\lg^2(10x) + \lg x = 5$;
 8) $\log_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x}{9} + \log_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x}{3} = 1$.

2.186. 1) $5\log_4 x + 3\log_x 4 = 8$;
 2) $\log_5 x - \log_x 5 = 1,5$;
 3) $\log_4 x + \log_x \frac{1}{16} = 1$;
 4) $\log_3 x + \log_x 9 = 3$;
 5) $4\log_{25}(x-1) - \log_3 27 + 2\log_{x-1} 5 = 1$;
 6) $\log_2(1-3x) + \log_3 \frac{1}{27} + 16\log_{1-3x} 2 = 5$.

2.187*. 1) $\log_x 4 = 2$; 2) $\log_x 16 = 4$; 3) $\log_x 1 = 6$;
 4) $\log_x 1 = 2$; 5) $\log_x 1 = 3$; 6) $\log_x 1 = 5$;
 7) $\log_{x+1} 16 = 4$; 8) $\log_{x-1} 4 = 2$.

2.188*. 1) $\log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2$; 2) $\log_{2x-1}(3,5x^2 - 2,5x) = 2$;
 3) $\log_{x+1}(3x^2 + 2x - 1) = 2$; 4) $\log_{x-2}(2x^2 - 13x + 18) = 1$;

5) $\log_{\frac{1}{x+2}}(2x^2 + 6x - 4) = -2$;
 6) $\log_{\frac{1}{1-x}}(2x^2 - 3x - 1) = -2$;
 7) $\log_{\sqrt{x+5}}(3x^2 + 16x + 5) = 4$;
 8) $\log_{\sqrt{x-4}}(3x^2 - 28x + 64) = 4$.

2.189. 1)° $3^{\log_3 x} = 6$; 2)° $3^{\log_7 x} = 4$;
 3)° $8^{\log_8 x^2} = 49$; 4)° $11^{\log_{11} x^2} = 25$;
 5) $6^{\log_6 |x+1|} = 10$; 6) $5^{\log_5 |x-1|} = 18$;
 7) $5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10$; 8) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;
 9) $2^{\lg x} = 162 - x^{\lg 2}$; 10) $7^{\lg x} + x^{\lg 7} - 98 = 0$.

2.190*. 1) $5^x = 7^x$; 2) $13^x = 9^x$;
 3) $3^{x-1} = 10^{x-1}$; 4) $4^{x+1} = 7^{x+1}$;
 5) $3^x = 2 \cdot 3^{x-1}$; 6) $3^{x+1} = 3 \cdot 7^x$;
 7) $8^{|x|-2} = 6^{|x|-2}$; 8) $3^{|x|-4} = 2^{|x|-4}$;
 9) $8^{|x-1|-5} = 14^{|1-x|-5}$; 10) $0,17^{x^2-1} = 4,2^{x^2-1}$.

2.191*. 1) $2^{x^2-1} = 5^{x-1}$; 2) $3^{x+2} = 7^{x^2-4}$;
 3) $0,1^{9-x^2} = 23^{x+3}$; 4) $6,7^{25-x^2} = 0,24^{x-5}$;
 5) $7^{x^2-5x+6} = 0,54^{x^2-3x+2}$; 6) $0,38^{x^2-3x+2} = 11^{x^2-7x+10}$.

2.192. 1) $2^x = 3$; 2) $3^x = 18$; 3) $10^x = 20$;
 4) $10^x = \frac{1}{5}$; 5) $2^{x+1} = 0,2$; 6) $2^{x-1} = 0,1$.

2.193*. 1) $x^{\lg x - 3} = 0,01$; 2) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;
 3) $x^{\log_5 x - 3} = \frac{1}{25}$; 4) $x^{\lg x - 1} = 100$;
 5) $x^{\lg x} = 100x$; 6) $x^{\lg x} = 1000x^2$;
 7) $x^{\log_3 x^2} = 3x$; 8) $x^{2\lg x} - 10x = 0$.

2.194*. 1) $4^x = 5^{x+7}$; 2) $6^x = 11^{x-1}$; 3) $3^{x-1} = 5^x$;
 4) $10^{x-1} = 2^x$; 5) $3^{x-2} = 2^{x+1}$; 6) $7^{x-1} = 5^{x+2}$.

2.195*. 1) $\log_5((x+19)\cos x) = \log_5\left(\frac{x+19}{\cos x}\right)$;
 2) $\log_4((x-8)\sin x) = \log_4\left(\frac{x-8}{\sin x}\right)$;
 3) $\log_3(2\sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0$;

$$4) \log_6(\sin 2x) + \log_{\frac{1}{6}}\left(\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}\right) = 0;$$

$$5) \log_2(3\cos x - \sin x) + \log_2 \sin x = 0;$$

$$6) \log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0.$$

$$2.196^*. 1) \left| \log_5 3 \cdot \log_3 x^4 - 2\log_x x^3 \right| = 2\log_x 25;$$

$$2) \left| 3\log_7 2 \cdot \log_2 x^2 - 3\log_x x^4 \right| = -18\log_x 49.$$

2.197*. Решите уравнение с неизвестным x :

$$1) \log_a x = 2; \quad 2) \log_a(x+1) = 4;$$

$$3) \lg x = a; \quad 4) \log_4(x-1) = a.$$

2.198*. Определите, при каких значениях a уравнение имеет ровно два решения:

$$1) \log_2(4^x - a) = x; \quad 2) \log_3(9^x + 9a^3) = x;$$

$$3) x + \log_{\frac{1}{2}}(4^x + a^3) = 0; \quad 4) x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - 2a) = 0.$$

2.199. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^{\log_2 y} = 4, \\ \log_x y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0,5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3^{\log_3(2x-9)} = 9, \\ \lg(x^2 - y^2) - \lg(x-y) = 1. \end{cases}$$

2.9. Логарифмические неравенства

В этом пункте рассмотрим некоторые неравенства, в которых неизвестное находится под знаком логарифма. Неравенства такого вида принято называть **логарифмическими**.

При решении логарифмических неравенств часто будет использоваться утверждение, которое следует из свойств логарифмической функции.

Следствие. Пусть $a > 1$, $u > 0$, $v > 0$. Если $\log_a u > \log_a v$, то $u > v$.

Пусть $0 < a < 1$, $u > 0$, $v > 0$. Если $\log_a u > \log_a v$, то $u < v$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Поскольку по условию $\log_a u > \log_a v$, то, воспользовавшись основным логарифмическим тождеством и следствием из пункта 2.4, имеем

$$u = a^{\log_a u} > a^{\log_a v} = v.$$

Доказательство утверждения при $0 < a < 1$ аналогично доказательству при $a > 1$. Проведите его самостоятельно. \square



При решении неравенств часто используются утверждения, вытекающие из доказанного следствия:

1) Пусть $a > 1$, тогда

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) Пусть $0 < a < 1$, тогда

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

▲ 3) $\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \\ h(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x), \\ g(x) > 0 \end{cases} \right). \blacktriangle$$

Пример 1. Решить неравенство:

$$a) \log_{0,29}(7x^2 + 2) > \log_{0,29} 9;$$

$$б) \log_{5,7}(3x - 4) < \log_{5,7}(4 - x);$$

$$в) \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x^2 + 2) < -4;$$

$$г) \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x + 2) > -4.$$

Решение. а) Заметим, что в неравенстве

$$\log_{0,29}(7x^2 + 2) > \log_{0,29} 9$$

выражение $7x^2 + 2$ принимает положительные значения при любых значениях переменной x .

Поскольку из двух логарифмов с одинаковым основанием 0,29 больше тот, который берется от меньшего числа, то получим неравенство $7x^2 + 2 < 9$, равносильное данному. Решая его, имеем $x^2 < 1$, т. е. $-1 < x < 1$.

б) Поскольку из двух логарифмов с одинаковым основанием 5,7 меньше тот, который берется от меньшего числа, то из неравенства

$$\log_{5,7}(3x - 4) < \log_{5,7}(4 - x)$$

следует неравенство $3x - 4 < 4 - x$.

Кроме того, должны выполняться неравенства $3x - 4 > 0$ и $4 - x > 0$ (объясните, почему неравенство $4 - x > 0$ можно и не записывать).

Таким образом, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - 4 < 4 - x, \\ 3x - 4 > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$1\frac{1}{3} < x < 2.$$

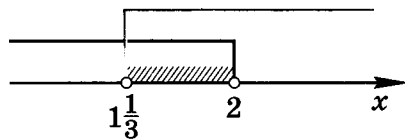


Рис. 40

Решение системы проиллюстрировано на рисунке 40.



Решение этого примера можно оформить так:

$$\log_{5,7}(3x - 4) < \log_{5,7}(4 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 < 4 - x, \\ 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1\frac{1}{3} < x < 2.$$



Сравните решения примеров а) и б). Почему в примере а) достаточно решить одно неравенство $7x^2 + 2 < 9$, а не систему неравенств, как в примере б)?

в) Отметим, что для любых значений x выполняется неравенство $7x^2 + 2 > 0$. Поскольку из двух логарифмов с одинаковым основанием $0 < a < 1$ больше тот, который берется от меньшего числа, то получим неравенство

$$7x^2 + 2 > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4},$$

которое равносильно данному. Решим его:

$$x^2 > 1,$$

$$|x| > 1,$$

$$x < -1 \text{ или } x > 1.$$

г) *Способ 1.* Неравенство $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x + 2) > -4$ равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x + 2) > \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}.$$

Так как $0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, то $7x + 2 < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$, и учитывая область определения логарифмической функции, имеем равносильную данному неравенству систему

$$\begin{cases} 7x + 2 < 9, \\ 7x + 2 > 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $-\frac{2}{7} < x < 1$.

Ответ: а) $(-1; 1)$; б) $(1\frac{1}{3}; 2)$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

г) $(-\frac{2}{7}; 1)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_5(2x) + \log_5 x \geq \log_5 8$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_5(2x) + \log_5 x \geq \log_5 8 &\Leftrightarrow \log_5 2 + \log_5 x + \log_5 x \geq 3\log_5 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\log_5 x \geq 3\log_5 2 - \log_5 2 \Leftrightarrow 2\log_5 x \geq 2\log_5 2 \Leftrightarrow x \geq 2. \end{aligned}$$

Ответ: $[2; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{0,5}^2(x - 1) - 5\log_{0,5}(x - 1) - 6 \leq 0.$$

Решение. *Способ 1.* Пусть $\log_{0,5}(x - 1) = t$, тогда имеем $t^2 - 5t - 6 \leq 0$, откуда находим $-1 \leq t \leq 6$.

Таким образом, с учетом обозначения имеем:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \log_{0,5}(x - 1) \leq 6, \\ \log_{0,5} 0,5^{-1} &\leq \log_{0,5}(x - 1) \leq \log_{0,5} 0,5^6. \end{aligned}$$

Поскольку из двух логарифмов с основанием 0,5 больше тот, который берется от меньшего числа, то получим:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq x-1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow \frac{1}{64} \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow 1\frac{1}{64} \leq x \leq 3.$$

Ответ: $\left[1\frac{1}{64}; 3\right]$.



Способ 2 (метод интервалов). Пусть левая часть неравенства обозначена $f(x)$. Найдем промежутки, где функция $f(x) = \log_{0.5}^2(x-1) - 5\log_{0.5}(x-1) - 6$ принимает неположительные значения. Для этого в области определения функции $D(f) = (1; +\infty)$ найдем ее нули: $x_1 = 1\frac{1}{64}$, $x_2 = 3$ (убедитесь в правильности вычислений самостоятельно).

Затем на каждом из промежутков $(1; 1\frac{1}{64})$ и $(1\frac{1}{64}; 3)$ определим знаки значений функции $f(x)$, например, в точках $1\frac{1}{128}$ и 2:

$$f\left(1\frac{1}{64}\right) = 49 - 35 - 6 = 8 > 0,$$

$$f(2) = 0 - 5 \cdot 0 - 6 = -6 < 0.$$

Пример 4. Решить неравенство $\log_2 x + \log_8 x > -4$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} > -4.$$

$$\text{Решим его: } \log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} > -4 \Leftrightarrow 4\log_2 x > -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x > -3 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 2^{-3}.$$

Поскольку из двух логарифмов с основанием 2 больше тот, который берется от большего числа, то $x > \frac{1}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

▲ **Пример 5.** Решить неравенство $\log_x(2+x) < 1$.

Решение. **Способ 1.**

$$\log_x(2+x) < \log_x x \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ 2+x < x, \text{ или } \\ 2+x > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2+x > x \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ 2 < 0, \text{ или } \\ x > -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow x \in (0; 1).$$

Ответ: $(0; 1)$.



Способ 2.

$$\log_x(2+x) < 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2+x) - \log_2 x}{\log_2 x} < 0 \Leftrightarrow$$

так как функция $y = \log_2 x$ возрастающая, то числитель дроби в левой части последнего неравенства принимает только положительные значения, значит, знаменатель этой дроби должен быть отрицательным

$$\Leftrightarrow \log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$



Способ 3.

$$\log_x(2+x) < 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2+x) - \log_2 x}{\log_2 x} < 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. Пусть

$$f(x) = \frac{\log_2(2+x) - \log_2 x}{\log_2 x}.$$

$$\text{Найдем } D(f): \begin{cases} 2+x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Итак, $D(f) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Найдем нули функции f . Так как при любом значении x верно неравенство $\log_2(2+x) - \log_2 x > 0$ (поясните почему), то функция нулей не имеет.

Определим и отметим над координатной прямой (рис. 41) знаки значений функции f на ее области определения. ▲

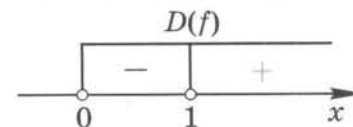


Рис. 41



1. Как сравнить значения логарифмов с одинаковыми основаниями?
2. Опишите возможные способы решения неравенства:
 - а) $\log_5 f(x) \leq \log_5 g(x)$; б) $\log_{0.2} f(x) > \log_{0.2} g(x)$.

Упражнения

Решите неравенство (2.200—2.217).

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 2.200°. 1) $\log_2 x \leq 1$; | 2) $\log_3 x < 2$; | 3) $\log_2 x \leq \frac{1}{2}$; |
| 4) $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$; | 5) $\log_{0.3} x < 0$; | 6) $\log_{0.9} x \leq 2$; |
| 7) $\log_{\frac{2}{3}} x > 4$; | 8) $\log_{0.4} x > 0$; | 9) $\log_{0.5} x \geq 0$. |

- 2.201°. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < 0$; 2) $\log_{\frac{2}{3}}(3x - \frac{1}{3}) < 1$;
 3) $\log_{\frac{1}{4}}(3-4x) \geq -1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(6-2x) > -2$;
 5) $\log_{16}(4x+3) > \frac{1}{2}$; 6) $\log_{27}(3x-4) < \frac{1}{3}$;
 7) $\lg(12-5x) \leq 0$; 8) $\lg(8-2x) \geq 0$.
- 2.202. 1) $\log_4(x^2-6x+10) \geq 0,5$; 2) $\log_5(x^2+2x-3) \leq 1$;
 3) $\log_{0,2}(x^2-2x-3) \geq -1$; 4) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2-4x+3) \leq -1$;
 5) $\log_2(x^2+3x) < 2$; 6) $\log_{0,2}(x^2+4x) > -1$;
 7) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x) > -1$; 8) $\log_2(x^2+x) < 1$.
- 2.203. 1) $\lg(x^2+2x+2) < \lg \frac{5\pi}{4}$;
 2) $\log_3(x^2+7x-17) > \cos(2008\pi)$;
 3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7) > \cos \frac{2009\pi}{2}$;
 4) $\lg(x^2-8x+13) < \operatorname{ctg} \frac{111\pi}{2}$.
- 2.204. 1) $\log_3 \frac{2-3x}{x} \geq -1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{35-x}{x} \geq -\frac{1}{2}$;
 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x-1}{2-x} < -1$; 4) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} < 1$;
 5) $\lg \frac{3x-17}{x+1} \leq 0$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x-4}{x-2} \geq 1$.
- 2.205. 1) $\log_{\sqrt{27}} \log_{\frac{1}{2}}(2+x) > 0$; 2) $\log_{81} \log_{\frac{1}{4}}(x-2) < 0$;
 3) $\log_2 \log_{\sqrt{5}}(x-1) < 1$; 4) $\log_4 \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x) < 0,5$;
 5) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{5}}(x-4) > -1$; 6) $\log_4 \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+1) > 0,5$;
 7) $\log_6 \log_2 \frac{x}{x+4} < 0$; 8) $\log_{\frac{1}{6}} \log_3 \frac{x}{x+2} > 0$.
- 2.206*. 1) $0,4^{\log_{\sqrt{3}} \lg \frac{1}{x}} \geq 1$; 2) $40^{\log_{0,1} \log_5(-\frac{1}{x})} < 1$;
 3) $0,9^{\log_{\sqrt{2}} \lg(-x)} > 1$; 4) $0,1^{\lg \log_2 \frac{2}{x}} \leq 1$.

- 2.207. 1) $\log_2(3-2x) < \log_2 13$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(1-3x) > \log_{\frac{1}{3}} 4$;
 3) $\log_{0,7}(2x-7) > \log_{0,7} 5$; 4) $\log_{2,7}(3x+8) < \log_{2,7} 5$;
 5) $\log_2(4 - \frac{x}{2}) - \log_2 8 < 0$;
 6) $\log_{0,25}(2 - \frac{x}{3}) - \log_{0,25} 2 > 0$;
 7) $\log_{\sin 2}(x^2+x-2) \geq \log_{\sin 2}(6-x)$;
 8) $\log_{\cos 1,5}(x^2-x-2) \leq \log_{\cos 1,5}(6+x)$.
- 2.208. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + \log_{\frac{1}{2}} 12 > \log_{\frac{1}{2}} 10 + \log_{\frac{1}{2}} 6$;
 2) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$;
 3) $\lg(x-12) + 2\lg 4 \leq \lg 24 + \lg 2$;
 4) $\log_{\frac{1}{6}}(2x+8) + \log_{\frac{1}{6}} 8 \geq \log_{\frac{1}{6}} 12 + 2\log_{\frac{1}{6}} 2$.
- 2.209. 1) $\log_5(x+13) < \log_5(x+3) + \log_5(x-5)$;
 2) $\log_4(x+32) > \log_4(1-x) + \log_4(8-x)$;
 3) $\lg(x-3) + \lg x < \lg(\frac{9}{2}x+4)$;
 4) $\log_9(x+1) - \log_9(5-x) > \log_9(2x-3)$.
- 2.210. 1) $\lg(x+2) + \log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x+2) > -1$;
 2) $\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1) \geq -2$;
 3) $2 \cdot \log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3 \cdot \log_5(x-2) \leq 1$;
 4) $2 \cdot \log_2(x+1) + \log_{0,5}(x+1) < 2$;
 5) $\log_4(x-1) + \log_{\sqrt{2}}(x-1) > 2,5$;
 6) $\log_4(x-3) + \log_2(x-3) \leq 1,5$.
- 2.211. 1) $\log_{0,2}^2(x-1) > 4$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x-3) \geq 1$;
 3) $\log_3^2(4-x) < 1$; 4) $\log_5^2(5-x) \leq 4$.
- 2.212. 1) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 < 0$; 2) $\log_2^2 x - 3\log_3 x - 4 > 0$;
 3) $\log_3^2 x - 2\log_3 x < 3$; 4) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;

$$5) \log_{9,1}^2 x + 3 \log_{9,1} x > 4;$$

$$6) \lg^2 x - 3 \lg x > 4;$$

$$7) \lg^2(-x) + \lg x^2 < 3;$$

$$8) 3 \lg^2(-x) - 5 \lg x^2 + 3 > 0.$$

$$2.213. \quad 1) \log_3^2(5-x) - 6 \log_3(5-x) + 5 < 0;$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}}^2(4-x) - 10 \log_{\frac{1}{3}}(4-x) + 9 > 0;$$

$$3) \log_2^2(6x-x^2+2) + 3 \log_{0,5}(6x-x^2+2) > -2;$$

$$4) \log_{0,5}^2(3x-x^2+4) - 6 \log_2(3x-x^2+4) < -8.$$

$$2.214. \quad 1) \log_3 x - \log_x 3 \geq \frac{3}{2}; \quad 2) \log_2 x - \log_x 2 \leq \frac{8}{3};$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}; \quad 4) \log_3 x + \log_x 9 < 2.$$

$$2.215*. \quad 1) \log_x(x+2) \leq \log_x(3-x);$$

$$2) \log_{x-1}(2x-1) \geq \log_{x-1}(x+6);$$

$$3) \log_{x+3} \frac{x-1}{x+2} \leq \log_{x+3} 2;$$

$$4) \log_{x+4} \frac{x-2}{x+3} \leq \log_{x+4} 2;$$

$$5) \log_{4-x}(x^2-x-2) \leq \log_{4-x}(x+6);$$

$$6) \log_{10-x}(x^2+x-2) \leq \log_{10-x}(7x-7).$$

$$2.216*. \quad 1) \log_{x-5} 8 > 3; \quad 2) \log_{x-5} \frac{1}{8} < 3;$$

$$3) \log_{x+1}(5-x) > 1; \quad 4) \log_{x-2}(2x-7) < 1;$$

$$5) \log_x(2x-3) < 1; \quad 6) \log_{x-1}(4-x) > 1.$$

$$2.217*. \quad 1) \log_{x+1}(11x^2+8x-3) > 2; \quad 2) \log_{2+x}(7x^2+11x-6) < 2;$$

$$3) \log_{2x}(x^2-5x+6) \leq 1; \quad 4) \log_{4+2x}(x^2+x-2) \geq 1;$$

$$5) \log_{|x-2|}(2x^2-3x+1) \leq 0; \quad 6) \log_{|x-2|}(2x^2+3x+1) \geq 0;$$

$$7) \log_{x^2}(9-8x) \leq 9^{\lg \cos 32\pi}; \quad 8) \log_{x^2}(8-7x) > 12^{\lg \sin 2,5\pi}.$$

Найдите естественную область определения выражения (2.218—2.223).

$$2.218. \quad 1) \lg \frac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20};$$

$$2) \lg \frac{x-5}{x^2-10x+24};$$

$$3) \lg \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5};$$

$$4) \lg \frac{x^2-4}{x^2-x-2} + \sqrt[3]{x-6}.$$

$$2.219. \quad 1) \sqrt{\lg(x^2-7x+13)};$$

$$2) \sqrt{\lg(x^2-5x+7)};$$

$$3) \sqrt[10]{\log_{0,5}(3x^2-2x)};$$

$$4) \sqrt[8]{\log_{\frac{1}{3}}(x^2+\frac{8}{3}x)};$$

$$5) \sqrt[6]{\log_{\frac{2}{3}}(7-x)-1};$$

$$6) \sqrt[4]{1+\log_{0,5}(2-x)};$$

$$7) \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}};$$

$$8) \sqrt[12]{\log_{0,1} \frac{x+1}{x-4}}.$$

$$2.220. \quad 1) \log_{x-1}(7-x);$$

$$2) \log_{x+2}(5-x);$$

$$3) \log_x(x^2+3x+2);$$

$$4) \log_{-x}(x^2+6x-16);$$

$$5) \sqrt{\log_{5-x}(x^2-9)};$$

$$6) \sqrt{\log_{1-x}(x^2-16)}.$$

$$2.221. \quad 1) \sqrt{\frac{x^2+4x-5}{\lg(x+2)}};$$

$$2) \sqrt{\frac{20-x^2-x}{\lg(x+4)}};$$

$$3) \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{\log_2 x-1};$$

$$4) \frac{\sqrt{30+x-x^2}}{\log_2(x+2)};$$

$$5) \sqrt{\frac{1-\log_3(x^2-2x)}{\sqrt{2x-3}}};$$

$$6) \sqrt{\frac{2+\log_{0,5}(x^2+x)}{\sqrt{2x+1}}}.$$

$$2.222. \quad 1) \sqrt{(\log_{\frac{1}{4}} 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7) \cdot \log_3(x-15)};$$

$$2) \sqrt{(\log_{\frac{1}{7}} 6 - \log_{\frac{1}{8}} 6) \cdot \log_3(x+12)};$$

$$3) \sqrt{\frac{\log_2(\frac{x}{2}+2)}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}}};$$

$$4) \sqrt{\frac{\log_3(\frac{4x}{3}-5)}{\log_2 \log_5 \frac{13}{4}}}.$$

$$2.223. \quad 1) \frac{1}{\lg(6-x)} + \sqrt{x-1};$$

$$2) \frac{1}{\lg(5x+4)} + \sqrt{3-21x};$$

$$3) \lg(x^3-x) + \frac{3}{4x^2};$$

$$4) \lg(x^3+x) - \frac{2}{9-x^2};$$

$$5) \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} + \lg(6-x); \quad 6) \sqrt{1-x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x+4}} + \lg(x+8).$$

2.224*. Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} \log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1), \\ x^2 - 4x + 3 < 0; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} \log_{0,1}(x+1) > \log_{0,1}(5-x), \\ x^2 - 2x - 3 < 0; \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} \log_{0,3}(x^2+4) > 0, \\ 3x^2 - 16x + 21 > 0; \end{cases} & 4) & \begin{cases} \log_2(x^2+8) < 0, \\ -x^2 + 10x - 16 < 0; \end{cases} \\ 5) & \begin{cases} 2^{\log_{0,5} x} \leq 3, \\ \frac{x^2+x-12}{x^2-6x+8} \geq 0; \end{cases} & 6) & \begin{cases} 5^{\log_5 \log_2(x+2)} \leq 3, \\ \frac{x^2-13x+40}{x^2-x-6} \geq 0; \end{cases} \\ 7) & \begin{cases} \lg(x-1) > 0, \\ x^2 + |x-1| + 3 > 0; \end{cases} & 8) & \begin{cases} \lg(x+1) < 0, \\ x^2 + |2x-4| + 3 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.225*. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} 1) \log_2 \sin \frac{x}{2} < -1; & \quad 2) \log_2 \cos \frac{x}{2} > -1; \\ 3) \log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1; & \quad 4) \log_{\frac{1}{2}} \sin 2x < 1; \\ 5) \lg \operatorname{tg} 2x > 0; & \quad 6) \log_3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} < 0. \end{aligned}$$

2.226*. Докажите неравенство:

$$\begin{aligned} 1) \log_5(2 - \cos^2 x) \geq 0; & \quad 2) \log_3(1 + \cos^4 x) \geq 0; \\ 3) \log_{0,3}(1 + \sin^6 x) \leq 0; & \quad 4) \log_{\frac{2}{7}}(3 - \sin^4 x) < 1. \end{aligned}$$

2.227*. Докажите, что при любых значениях x , входящих в естественную область определения выражений, верно неравенство:

$$\begin{aligned} 1) \log_{7,4} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos x \right) \geq \log_{\frac{7}{4}} (4 - \sin^2 x); \\ 2) \log_{0,13} (1 - \sin^4 x) \geq \log_{1,3} \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x \right); \\ 3) \log_{0,6} (2 \sin^2 x + \cos 2x) \geq \log_{2,8} (1 - \cos^6 x); \\ 4) \log_{4,1} (3 - \cos^2 x) \geq \log_{\frac{3}{17}} (\sin^2 x + \cos^2 x). \end{aligned}$$

Приложения

Материалы для повторения теоретических вопросов арифметики и алгебры курса математики 5—11-х классов

ЧИСЛА

Натуральные числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., возникающие при счете, называют натуральными, или целыми положительными. **Множество натуральных чисел обозначается буквой N .**

Пусть a и b — натуральные числа. Говорят, что a **делится на b** (нацело), если существует такое натуральное число s , что $a = bs$. Число b называется **делителем числа a** ; число a называется **кратным числу b** ; число s называется **частным чисел a и b** .

Натуральное число, большее 1, которое не имеет делителей, кроме 1 и самого себя, называется **простым**. Натуральное число, которое имеет еще хотя бы один делитель, кроме 1 и самого себя, называется **составным**. Составное число можно разложить на простые множители, т. е. представить в виде произведения различных его простых делителей, взятых в соответствующих степенях.

Наибольшим общим делителем (НОД) двух натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся a и b . Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то a и b называются **взаимно простыми**.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b .

Целые числа

Натуральные числа называют также **положительными целыми числами**. Числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, называют **отрицательными целыми числами**. Множество, состоящее из всех натуральных чисел, противоположных им отрицательных чисел и нуля называется **множеством целых чисел** и обозначается буквой Z .

Делимость целых чисел, НОД и НОК двух целых чисел определяются также, как и для натуральных чисел.

Разделить целое число a на натуральное число b с остатком — это значит представить a в виде

$$a = bs + r, \text{ где } s \text{ и } r \text{ — целые, } 0 \leq r < b.$$

Для любого целого числа a и натурального числа b деление с остатком возможно, и причем однозначно.

Дроби. Рациональные числа

Пусть $n > 1$ — натуральное число; n -я часть единицы обозначается $\frac{1}{n}$. Эта часть, взятая k раз (k — натуральное число), обозначается $\frac{k}{n}$ и называется **положительной дробью**.

Дробь $\frac{k}{n}$ называют еще **обыкновенной**. Если $k < n$, то дробь $\frac{k}{n}$ называется **правильной**, а если $k \geq n$, то — **неправильной**. Всякое натуральное число можно считать дробью со знаменателем 1.

Дробь $\frac{a}{10^m}$, где $m \geq 0$, записанная в виде

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, где a_0 — целое неотрицательное число, а $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ — цифры, называется **конечной десятичной дробью**.

Дроби со знаком минус, т. е. числа вида $-\frac{k}{n}$, где k и n — натуральные числа, называются **отрицательными дробями**. Множество, состоящее из всех положительных дробей, нуля и всех отрицательных дробей, называется **множеством рациональных чисел** и обозначается буквой Q .

Определение **равенства дробей**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ если } ad = bc.$$

Основное свойство дроби:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} \quad (k \neq 0).$$

Дробь $\frac{a}{b}$ называется **несократимой**, если числа a и b взаимно просты.

Правила действий над дробями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Каждое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число. Если при этом m — положительное, то

рациональное число называется **положительным**, а если m — отрицательное, то рациональное число называется **отрицательным**.

Бесконечная десятичная дробь, которая содержит, начиная с некоторого места после запятой, периодически повторяющуюся группу цифр, называется **периодической**, а эта группа цифр называется **периодом**. Количество цифр в периоде называется **длиной периода**.

Действительные числа

Для нужд математики рациональных чисел недостаточно и вводятся новые числа — **иррациональные**. Каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Множество, состоящее из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется **множеством действительных чисел** и обозначается буквой R .

Основные свойства сложения и умножения действительных чисел

Переместительный закон:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

Сочетательный закон:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

Существуют числа 0 и 1 такие, что для любого числа a имеют место равенства:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$$

Для любого числа a существует **противоположное ему число** $-a$, и для любого числа $a \neq 0$ существует **обратное ему число** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ такое, что имеют место равенства:

$$a + (-a) = 0, \quad a \cdot a^{-1} = 1.$$

Сравнение действительных чисел. Действительное число может быть либо положительным, либо отрицательным, либо нулем.

Число a больше числа b ($a > b$), если разность $a - b$ положительное число; **число a меньше числа b ($a < b$)**, если разность $a - b$ отрицательное число.

Свойства числовых неравенств (сформулированы в основном для строгих неравенств, но верны и для нестрогих):

- 1) если $a < b$, то $b > a$; если $b > a$, то $a < b$;
- 2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
- 3) если $a < b$, то $a + c < b + c$;
- 4) если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
- 5) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- 6) если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
- 7) если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;
- 8) если $0 < a < b$ и n — натуральное число, то $a^n < b^n$;
- 9) если $0 < a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
- 10) если $0 < a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;
- 11) если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического);
- 12) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Двойное неравенство — это неравенство вида

$$a < c < b.$$

Оно означает, что $c > a$ и $c < b$; это можно записать и так:

$$\begin{cases} c > a, \\ c < b. \end{cases}$$

Двойные неравенства читаются, как правило, начиная со средней части. Например, неравенство $a < c < b$ читается « c больше a и меньше b ».

Множество всех чисел x , удовлетворяющих одному из неравенств $x < a$, $x > a$, $a < x < b$, $x \leq a$, $x \geq a$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$ называется **числовым промежутком**.

В следующей таблице приводятся обозначения различных числовых промежутков.

| Условие, которому удовлетворяет число x | Обозначение множества всех чисел, удовлетворяющих этому условию | Изображение этого множества на координатной прямой |
|---|---|--|
| $a < x < b$ | $(a; b)$ | |
| $a \leq x < b$ | $[a; b)$ | |
| $a < x \leq b$ | $(a; b]$ | |
| $a \leq x \leq b$ | $[a; b]$ | |
| $x < a$ | $(-\infty; a)$ | |
| $x \leq a$ | $(-\infty; a]$ | |
| $x > a$ | $(a; +\infty)$ | |
| $x \geq a$ | $[a; +\infty)$ | |

Промежутки $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$ называются **интервалами**; промежуток $[a; b]$ называется **отрезком**.

Каждой точке на координатной прямой соответствует определенное действительное число — координата этой точки. Наоборот, каждому действительному числу a соответствует определенная точка на координатной прямой — точка с координатой a .

Модуль действительного числа a (обозначается $|a|$) определяется так:

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0, \text{ и } |a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Действительные числа приближаются конечными десятичными дробями с точностью до 10^{-n} с недостатком и с избытком.

Например, **приближение числа $\pi = 3,14159...$ с точностью до 10^{-2} с недостатком 3,14, с избытком — 3,15**, т. е. $3,14 < \pi < 3,15$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Пропорция

Частное $\frac{a}{b}$ чисел a и b называется *отношением этих чисел*.

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется *пропорцией*. Пропорцию можно записать и так: $a : b = c : d$.

Числа a и d называются *крайними членами пропорции*, b и c — *средними членами пропорции* $a : b = c : d$.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, т. е. $ad = bc$.

Проценты

Процентом называют одну сотую: $1\% = \frac{1}{100}$.

Нахождение числа x , которое равно $p\%$ числа A :

$$x = A \cdot p\% = A \cdot \frac{p}{100} = \frac{Ap}{100}.$$

Нахождение числа x , если $p\%$ его равны B (т. е. $x \cdot p\% = B$):

$$x = B : p\% = B : \frac{p}{100} = \frac{100B}{p}.$$

Алгебраические выражения. Равенства и тождества

Выражение, составленное из чисел или букв, знаков действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения арифметического корня, а также скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называется *алгебраическим*. Алгебраические выражения бывают *целыми, рациональными, иррациональными*.

Если в алгебраическом выражении встречаются *деление на нуль, извлечение корня четной степени из отрицательного числа или возведение нуля в нулевую или отрицательную степень*, то, говорят, что такое выражение *не имеет смысла*.

Если в алгебраическом выражении встречаются буквы, которые могут принимать различные значения, то эти буквы называются *переменными*. Наборы значений, которые могут принимать

переменные, образуют *область определения выражения*. В область определения выражения могут входить только такие наборы значений переменных, при которых выражение имеет смысл. Все такие наборы значений образуют *естественную область определения выражения* (или, другими словами, область допустимых значений переменных, входящих в выражение).

Если в выражение вместо переменных подставить какой-либо набор их значений из области определения и выполнить все указанные в этом выражении действия, то полученное в результате число называется *значением выражения* при этом наборе переменных.

Если два выражения A и B соединить знаком «=», то получим запись $A = B$, называемую *равенством*. Выражение A называют *левой частью*, а выражение B — *правой частью* равенства.

Когда обе части равенства обозначают числа, то оно называется *числовым*. **Верное числовое равенство** — это такое равенство, в котором обе части обозначают одно и то же число.

Свойства верного числового равенства.

1. Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число, то получится верное числовое равенство.

2. Если в верном числовом равенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое равенство.

3. Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится верное числовое равенство.

Пусть A и B — выражения. Равенство $A = B$ называется *тождеством*, если оно превращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B определены, т. е. имеют смысл.

Верное числовое равенство также является тождеством.

Если $A = B$ — тождество, то выражения A и B называются *тождественно равными*.

Неравенства

Если два выражения A и B соединить одним из знаков « $>$ » или « $<$ », то полученную запись $A > B$ или $A < B$ называют **неравенством**. Выражение A называют **левой частью неравенства**, а выражение B — **правой частью**.

Неравенства $A < B$ и $C < D$ ($A > B$ и $C > D$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $A < B$ и $C > D$ называют **неравенствами разных знаков**. Знаки неравенств « $<$ » и « $>$ » называют **противоположными**.

Когда обе части неравенства обозначают числа, оно называется **числовым**. Числовое неравенство $A < B$ называют **верным**, если его левая часть обозначает число, меньшее, чем правая.

Неравенства со знаками « $<$ » и « $>$ » называются **строгими**.

Нестрогие неравенства образуются, если выражения A и B соединяются одним из знаков « \leq » или « \geq ». Знак « \leq » читается «меньше или равно» или «не больше», а знак « \geq » читается «больше или равно» или «не меньше».

СТЕПЕНИ И КОРНИ

Степень с целым показателем

Определение степени. Пусть n — натуральное число, a — действительное число. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad \text{при } n \geq 2; \quad a^1 = a.$$

Пусть $n \leq 0$ — целое число, $a \neq 0$ — действительное число. Тогда

$$a^0 = 1; \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \text{при } n < 0.$$

Выражение a^n называется **n -й степенью числа a** , число a — **основанием степени**, число n — **показателем степени**.

Свойства степеней. Для любых действительных $a \neq 0$, $b \neq 0$ и в любых целых m и n имеют место тождества:

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$3) \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$4) \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$5) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Корень n -й степени (см. п. 1.2).

Степень с рациональным показателем (см. п. 1.8).

Действия над степенями с рациональными показателями (см. п. 1.9); сравнение степеней с рациональными показателями (см. п. 1.10).

Степень с иррациональным показателем, степень с действительным показателем (см. п. 2.1).

Логарифмы (см. п. 2.5); основные свойства логарифмов (см. п. 2.6).

Многочлены

Одночленом называется произведение чисел и степеней переменных. Число 0 (нуль) называется **нулевым одночленом**.

Степенью одночлена называется сумма показателей всех переменных, которые он содержит. Если нулевой одночлен не содержит переменных, то его степенью считается число 0. Степень нулевого одночлена не определена.

Многочленом называется сумма одночленов. Одночлен также считается многочленом. Одночлены, из которых составлен многочлен, называются его **членами**.

Алгебраическое выражение, составленное из многочленов, соединенных знаками сложения, вычитания и умножения, называется **целым**. Алгебраические выражения, где кроме того использовано и деление многочлена на многочлен, называется **рациональным**.

Формулы сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$\blacktriangle (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \blacktriangle$$

Алгебраические (рациональные) дроби

Алгебраической (рациональной) дробью называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B многочлены, $B \neq 0$.

Всякий многочлен является алгебраической (рациональной) дробью.

Равенство алгебраических (рациональных) дробей, основное свойство дроби, правила действий над алгебраическими (рациональными) дробями определяются так же, как для обыкновенных дробей.

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Уравнения с одной переменной

Равенство, содержащее одну переменную, называется **уравнением с одной переменной** (одним неизвестным). Значение переменной (неизвестного), при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называется **корнем (решением) уравнения**. **Решить уравнение** — это значит найти все его корни (решения) или доказать, что их нет.

Два уравнения называются **равносильными**, если каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого. Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

Свойства уравнений:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

Линейное уравнение

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, x — неизвестное, называется **линейным**.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = b = 0$, то корнем уравнения является любое число.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$, x — неизвестное, называется **квадратным**. Число a называется **старшим коэффициентом**, b — **средним коэффициентом**, c — **свободным членом** квадратного уравнения.

Дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_{1,2} = \frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1, называется **приведенным**.

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Наоборот, если для чисел x_1 и x_2 верны равенства $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то корни x_1 и x_2 — приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Квадратный трехчлен — это левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Корни этого уравнения называются **корнями квадратного трехчлена**, а дискриминант — **дискриминантом квадратного трехчлена**.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется **биквадратным**. Оно сводится к квадратному введением нового неизвестного $u = x^2$.

Рациональные уравнения

Уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены от одной и той же переменной, называется **рациональным**. Рациональное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение с двумя переменными

Равенство, содержащее две переменные, называется **уравнением с двумя переменными**. Переменные в уравнении называются также неизвестными.

Упорядоченная пара значений неизвестных, при которых уравнение превращается в верное числовое равенство, называется **решением уравнения с двумя неизвестными**.

Два уравнения с двумя неизвестными называются **равносильными**, если каждое решение одного уравнения является решением другого, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

При решении уравнений с двумя неизвестными используются те же свойства, что и при решении уравнений с одним неизвестным.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Формула расстояния между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Уравнение окружности с центром в точке $M(a; b)$ и радиусом R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Когда зависимость между двумя переменными x и y записывается при помощи двух уравнений $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$, то говорят о **системе двух линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)**. Обычно система записывается в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Аналогично определяется и записывается система двух произвольных уравнений с двумя неизвестными.

Упорядоченная пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называется **решением системы уравнений**.

Две системы уравнений называются **равносильными**, если каждое решение одной системы является решением другой, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными считаются и системы, которые не имеют решений.

Число решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

2) система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

3) система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Неравенства с одной переменной

Неравенство, содержащее одну переменную, называется **неравенством с одной переменной** или **неравенством с одним неизвестным**.

Решением неравенства с одной переменной называется такое значение переменной (неизвестного), при котором это неравенство превращается в верное числовое неравенство. **Решить неравенство** — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются **равносильными**, если каждое решение одного неравенства является решением другого, и наоборот, т. е. когда они имеют одни и те же решения. Равносильными считаются и неравенства, которые не имеют решений.

Свойства неравенства:

1) если в неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному;

2) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство равносильное данному;

3) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Линейным неравенством с одним неизвестным называется неравенство вида $ax > b$ ($ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$), где a и b — числа, x — неизвестное.

Квадратным неравенством с одним неизвестным или **неравенством второй степени** называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), где $a \neq 0$, b , c — числа, x — неизвестное.

Рациональным неравенством называется неравенство вида $\frac{A}{B} > 0$ ($\frac{A}{B} \geq 0$, $\frac{A}{B} < 0$, $\frac{A}{B} \leq 0$), где A и B — многочлены от одной и той же переменной.

ФУНКЦИИ

Функцией, заданной на множестве D , называется закон, по которому каждому значению x из множества D ставится в соответствие одно определенное значение y .

При этом x называется **независимой переменной**, или **аргументом**, y — **зависимой переменной**, или **функцией от x** , а множество D — **областью определения функции**.

В алгебре основным **способом задания функции** является **формула**, левая часть которой — это зависимая переменная, а правая — выражение с независимой переменной.

Функция может быть задана также **таблицей**, **графиком**, **описанием**.

Обычно функция обозначается какой-нибудь буквой, например f , тогда ее значение в точке x обозначается $f(x)$, а тот факт, что y является функцией от x , записывается так: $y = f(x)$.

Область определения функции f обозначается $D(f)$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$, а ее область определения не указана, то считается, что область определения состоит из всех тех значений x , при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Множество всех значений, которые может принимать функция f называется **множеством (областью) значений** этой функции; оно обозначается $E(f)$.

Графиком функции f называется множество всех точек $(x; f(x))$ координатной плоскости, где $x \in D(f)$.

Функция f называется **возрастающей в некотором промежутке**, если в этом промежутке большему значению аргумента

соответствует большее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция f называется **убывающей в некотором промежутке**, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция f называется **нечетной**, если ее область определения симметрична относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция f называется **четной**, если ее область определения симметрична относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно оси Oy координатной плоскости.

Нулем функции f называется то значение x , при котором верно равенство $f(x) = 0$.

Интервал, на котором значения функции имеют постоянный знак (они либо только положительны, либо только отрицательны) называется интервалом **знакопостоянства функции**.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция вида $y = kx$ (k — число, $k \neq 0$).

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат и образующая с осью Ox угол α , такой, что $\operatorname{tg} \alpha = k$ (рис. 42, а, б).

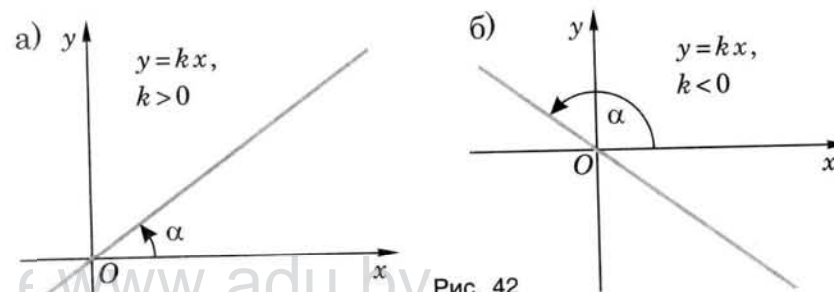


Рис. 42

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции.

Свойства прямой пропорциональности — функции, заданной формулой $y = kx$ ($k \neq 0$).

1. Областью определения функции является множество действительных чисел \mathbf{R} .

2. Множеством (областью) значений функции является множество действительных чисел \mathbf{R} .

3. Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.

4. График функции проходит через начало координат — точку $(0; 0)$.

5. Значение $x = 0$ является нулем функции.

6. Функция является нечетной.

7. При $k > 0$ функция возрастающая в области определения.

При $k < 0$ функция убывающая в области определения.

8. При $k > 0$: если $x \in (0; +\infty)$, то $y > 0$;

если $x \in (-\infty; 0)$, то $y < 0$.

При $k < 0$: если $x \in (0; +\infty)$, то $y < 0$;

если $x \in (-\infty; 0)$, то $y > 0$.

Таким образом, $(-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$ — промежутки знакопостоянства функции.

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$ (k и b — числа).

Графиком линейной функции $y = kx + b$ ($k \neq 0$) является прямая, проходящая через точки $(-\frac{b}{k}; 0)$ и $(0; b)$ (рис. 43).

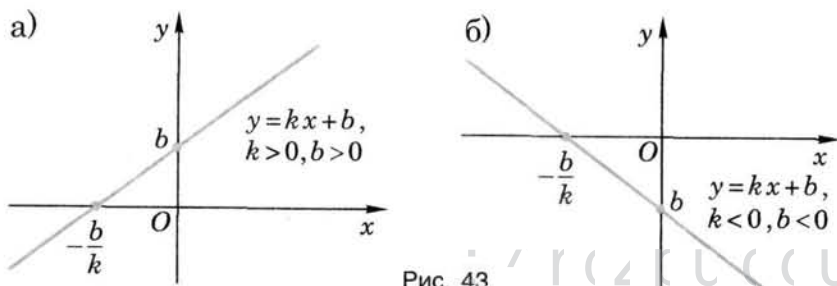


Рис. 43

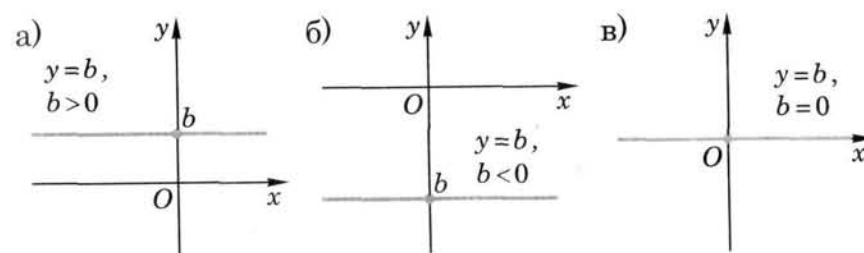


Рис. 44

Графиком линейной функции $y = b$ является прямая, проходящая через точку $(0; b)$ и параллельная оси Ox . При $b = 0$ график функции совпадает с осью Ox (рис. 44).

Любая прямая, не параллельная оси Oy , является графиком линейной функции.

Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ называется **угловым коэффициентом прямой**.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $(x_0; y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Свойства линейной функции $y = kx + b$

1. Областью определения функции является множество действительных чисел \mathbf{R} .

2. Множеством (областью) значений функции при $k \neq 0$ является множество \mathbf{R} . При $k = 0$ множество значений функции состоит из одного числа b .

3. При $k \neq 0$ функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений; при $k = 0$ значение $y = b$ — единственное.

4. При $k \neq 0$ график функции пересекает оси Ox и Oy в точках $(-\frac{b}{k}; 0)$ и $(0; b)$; при $k = 0$ есть только точка пересечения с осью Oy (при $b \neq 0$) — $(0; b)$; при $k = b = 0$ график совпадает с осью Ox .

5. При $k \neq 0$ значение $x = -\frac{b}{k}$ является нулем функции. При $k = 0$ и $b \neq 0$ функция нулей не имеет. При $k = 0$ и $b = 0$ каждое действительное число является нулем функции.

6. При $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной. При $k = 0$ и $b \neq 0$ функция четная. При $k = 0$ и $b = 0$ функция одновременно четная и нечетная.

7. При $k > 0$ функция возрастающая в области определения. При $k < 0$ функция убывающая в области определения. При $k = 0$ функция постоянная в области определения.

8. При $k \neq 0$ промежутками знакопостоянства являются $(-\infty; -\frac{b}{k})$, $(-\frac{b}{k}; +\infty)$. При $k = 0$ и $b \neq 0$ промежутками знакопостоянства являются $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = |x|$

График функции $y = |x|$ состоит из части прямой $y = x$ при $x \geq 0$ и из части прямой $y = -x$ при $x < 0$. Он изображен на рисунке 45.

Свойства функции $y = |x|$

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел \mathbf{R} .

2. Множеством (областью) значений является промежутки $[0; +\infty)$.

3. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$, — оно равно нулю. Наибольшего значения функции не существует.

4. График функции имеет с осями координат единственную точку пересечения $(0; 0)$ — начало координат.

5. Нулем функции является значение $x = 0$.

6. Функция четная.

7. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.

8. Все точки графика функции, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс; значит, $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ — промежутки знакопостоянства.

Функция $y = x^{2k}$, где $k \in \mathbf{N}$ (см. п. 1.11).

Функция $y = x^{2k+1}$, где $k \in \mathbf{N}$ (см. п. 1.11).

Функция $y = x^r$, где $r \in \mathbf{Q}$, $r \notin \mathbf{Z}$, $r > 1$ (см. п. 1.11).

Функция $y = x^r$, где $r \in \mathbf{Q}$, $0 < r < 1$ (см. п. 1.11).

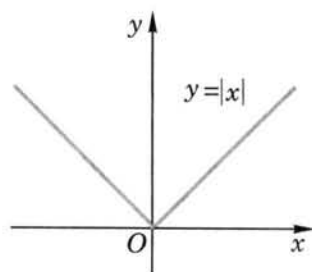


Рис. 45

Функция $y = x^{-2k+1}$, где $k \in \mathbf{N}$ (см. п. 1.12).

Функция $y = x^{-2k}$, где $k \in \mathbf{N}$ (см. п. 1.12).

Функция $y = x^r$, где $r \in \mathbf{Q}$, $r \notin \mathbf{Z}$, $r < 1$ (см. п. 1.12).

Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция вида $y = \frac{k}{x}$ (k — число, $k \neq 0$).

График обратной пропорциональности называется **гиперболой** (рис. 46).

Свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).

1. Областью определения функции является $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множеством (областью) значений функции является вся числовая прямая, кроме точки $y = 0$, т. е. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Наибольшего и наименьшего значения функции не существует.

4. При любом значении аргумента x значение функции $y \neq 0$, т. е. гипербола не пересекает ось абсцисс.

5. Нулей функция не имеет.

6. Функция нечетная.

7. При $k > 0$ функция убывающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающая на промежутке $(0; +\infty)$.

При $k < 0$ функция возрастающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и возрастающая на промежутке $(0; +\infty)$.

8. Если $k > 0$, то ветви гиперболы располагаются в I и III координатных углах, если $k < 0$, то ветви гиперболы располагаются в II и IV координатных углах.

Таким образом, $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ — промежутки знакопостоянства.

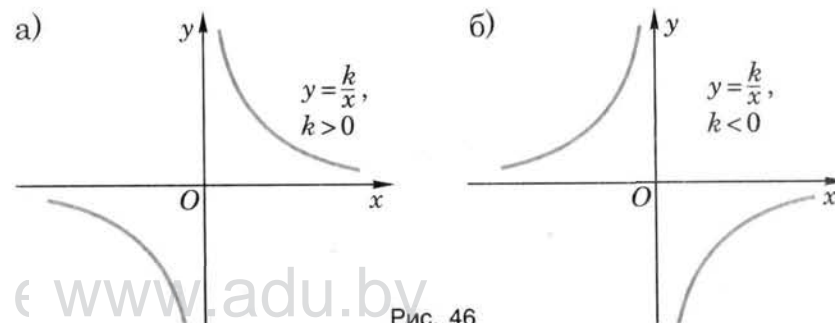


Рис. 46

Квадратная функция

Квадратной (говорят, также **квадратичной**) **функцией** называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — числа, $a \neq 0$).

График квадратной функции называется **параболой**.

Графиком функции является парабола с осью симметрии $x = -\frac{b}{2a}$, вершиной в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ и ветвями, направленными вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Свойства квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел \mathbf{R} .

2. Если $a > 0$, то множество (область) значений функции — промежуток $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty\right)$;

если $a < 0$, то множество (область) значений функции — промежуток $\left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

3. Если $a > 0$, то при $x = -\frac{b}{2a}$ функция принимает свое наименьшее значение

$$y_{\text{наим}} = \frac{4ac - b^2}{4a};$$

если $a < 0$, то при $x = -\frac{b}{2a}$ функция принимает свое наибольшее значение

$$y_{\text{наиб}} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

4. График функции имеет единственную точку пересечения с осью Oy — $(0; c)$.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то ось Ox парабола пересекает в двух точках $\left(-\frac{b - \sqrt{D}}{2a}; 0\right)$ и $\left(-\frac{b + \sqrt{D}}{2a}; 0\right)$; если $D = 0$, то точка $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ — единственная точка пересечения с осью Ox ; если $D < 0$, то точек пересечения параболы с осью Ox нет.

5. При $D > 0$ нулями функции являются значения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; при $D = 0$ нулем функции является значение $x = -\frac{b}{2a}$; при $D < 0$ функция не имеет нулей.

6. Если $b \neq 0$, то функция не является ни четной, ни нечетной. Если $b = 0$, то функция четная.

7. Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то функция убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ и возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$.

8. Если $D \geq 0$, то промежутки $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства.

Если $D < 0$, то промежутком знакопостоянства является вся область определения \mathbf{R} .

| $\begin{matrix} D \\ a \end{matrix}$ | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|--------------------------------------|---------|---------|---------|
| $a > 0$ | | | |
| $a < 0$ | | | |

Показательная функция — функция вида $y = a^x$, где a — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$ (см. п. 2.2).

Логарифмическая функция — функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (см. п. 2.7).

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть по некоторому закону каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное действительное число a_n . Тогда говорят, что задана **числовая последовательность** a_1, a_2, \dots ,

a_n, \dots ; ее обозначают (a_n) . Число a_n называется ***n*-м членом** последовательности (a_n) .

Числовая последовательность — это функция, заданная на множестве натуральных чисел с областью значений, содержащейся в множестве действительных чисел.

Арифметическая прогрессия с разностью d — это такая числовая последовательность (a_n) , что $a_{n+1} = a_n + d$ для любого натурального n .

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем q ($q \neq 0$) — это такая числовая последовательность (b_n) , что $b_{n+1} = b_n q$ для любого натурального n .

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы суммы первых *n* членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1; \quad S_n = nb_1, \text{ если } q = 1.$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$ называется **бесконечно убывающей**.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ УГОЛ КАК МЕРА ПОВОРОТА. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛОВ И ДУГ

Пусть дана плоскость и луч с началом в точке O , который вращается от начального положения OA до конечного положения OB . Величину поворота, совершенного этим лучом, измеряют величиной угла, который образует лучи OA и OB в конце вращения. Напри-

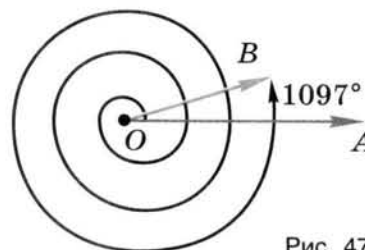


Рис. 47

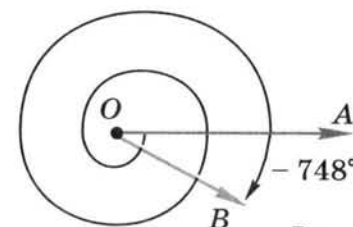


Рис. 48

мер, на рисунке 47 изображен поворот луча на угол 1097° , а на рисунке 48 изображен поворот луча на угол -748° . (Если поворот луча совершен против часовой стрелки, то угол поворота принято считать положительным, а если по ходу часовой стрелки — отрицательным.)

Радияном называется величина центрального угла, который опирается на дугу окружности длиной в один радиус (обозначается 1 рад). Соответственно дуга величиной один радиан — это дуга, длина которой равна радиусу

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла.

Соотношения между ними

Рассмотрим на координатной плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Такую окружность будем называть **единичной** или **тригонометрической окружностью**, а круг, который она ограничивает, — **тригонометрическим кругом**.

Положительную полуось абсцисс примем за начало отсчета для любого угла α . Точку ее пересечения с единичной полуокружностью обозначим A_0 , а точку пересечения с единичной окружностью луча, определяющего угол α , обозначим A_α (рис. 49).

Пусть α — произвольный угол.

Синусом угла α называется ордината точки A_α , т. е. $\sin \alpha = y_\alpha$.

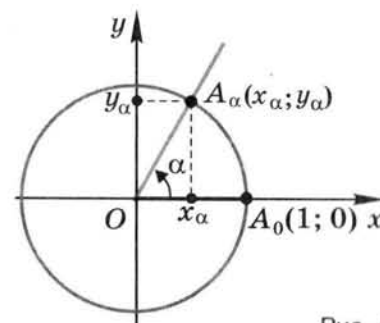


Рис. 49

Косинусом угла α называется абсцисса точки A_α , т. е. $\cos \alpha = x_\alpha$.

Пусть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **Тангенсом** угла α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Пусть $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **Котангенсом** угла α называется отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и следствия из него:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Арксинусом числа b ($b \in [-1; 1]$) называется число из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен b :

$$\sin (\arcsin b) = b.$$

Арккосинусом числа b ($b \in [-1; 1]$) называется число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b :

$$\cos (\arccos b) = b.$$

| | | | | | |
|-------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| b | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\arcsin b$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\arccos b$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

Арктангенсом числа b ($b \in \mathbf{R}$) называется число из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен b :

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} b) = b.$$

Арккотангенсом числа b ($b \in \mathbf{R}$) называется число из промежутка $[0; \pi]$, котангенс которого равен b :

$$\operatorname{ctg} (\operatorname{arccotg} b) = b.$$

| | | | | |
|----------------------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| b | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\operatorname{arctg} b$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arccotg} b$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

Имеют место тождества:

$$\begin{aligned} \arcsin (-b) &= -\arcsin b, \\ \operatorname{arctg} (-b) &= -\operatorname{arctg} b, \\ \arccos (-b) &= \pi - \arccos b, \\ \operatorname{arccotg} (-b) &= \pi - \operatorname{arccotg} b. \end{aligned}$$

Формулы приведения

| Тригонометрическое выражение | $\sin \beta$ | $\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \beta$ | $\operatorname{ctg} \beta$ |
|------------------------------|----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| Величина угла β | | | | |
| $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\sin \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ |
| $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ |
| $\pi - \alpha$ | $\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $\pi + \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\sin \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ |
| $2\pi - \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |

Правила формул приведения

1) **Правило знака:** в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии, что угол α принадлежит I четверти.

2) **Правило названий:** когда в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус меняется на косинус, тангенс на котангенс, и наоборот, когда угол равен $\pi \pm \alpha$ или $2\pi - \alpha$, то название выражения сохраняется.

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Следствия из формул сложения

Преобразование произведения в сумму (разность)

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Преобразование суммы (разности) в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Простейшие тригонометрические уравнения

Если $a \in [-1; 1]$, то:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a \in \mathbb{R}$, то:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Периодические функции

Пусть $T \neq 0$. Функция f называется *периодической* с периодом T , если для любого значения x из области определения функции, числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения, и при этом верно равенство $f(x + T) = f(x)$.

Если число T — период функции f , то периодом функции f является число kT при любом целом $k \neq 0$.

Если $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T , то $y = p(x)$ — периодическая функция с периодом $\frac{T}{p}$.

Функция $y = \sin x$

Каждому действительному числу x поставим в соответствие угол, радианной мерой которого является это число, а этому углу поставим в соответствие его синус. Тем самым каждому действительному числу x ставится в соответствие определенное число $\sin x$, т. е. на множестве \mathbb{R} определяется функция $y = \sin x$.

График функции $y = \sin x$ (рис. 50) называется *синусоидой*.

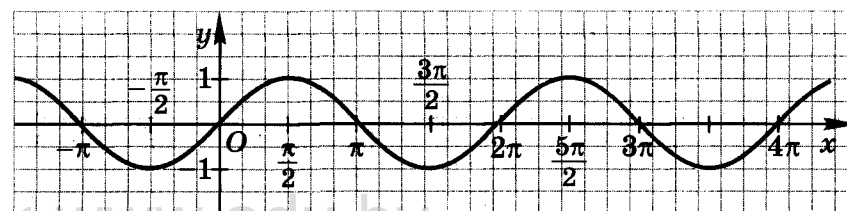


Рис. 50

Свойства функции $y = \sin x$

1. Область определения функции $y = \sin x$ — множество \mathbf{R} .
2. Множество (область) значений функции $y = \sin x$ — $[-1; 1]$.
3. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π .
4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Наибольшее значение $y = 1$ функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

5. Нулями функции $y = \sin x$ являются значения аргумента $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.
6. Функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$ и положительные значения на каждом из промежутков $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$.
7. Функция $y = \sin x$ нечетная.
8. Функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$ и убывает на каждом из промежутков $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], k \in \mathbf{Z}$.

Функция $y = \cos x$

Функция $y = \cos x$ определяется аналогично функции $y = \sin x$.
График функции $y = \cos x$ (рис. 51) называется **косинусоидой**.

Свойства функции $y = \cos x$

1. Область определения функции $y = \cos x$ — множество \mathbf{R} .
2. Множество (область) значений функции $y = \cos x$ — $[-1; 1]$.
3. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π .

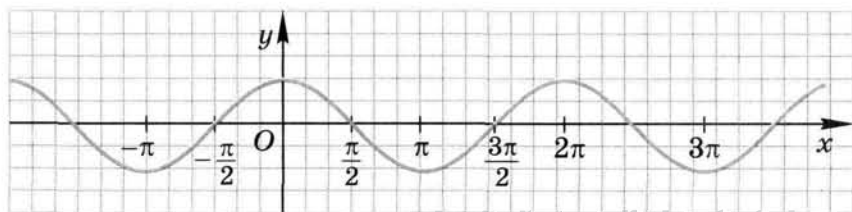


Рис. 51

4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Наибольшее значение $y = 1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

5. Нулями функции $y = \cos x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

6. Функция $y = \cos x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$ и положительные значения на каждом из промежутков $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$.

7. Функция $y = \cos x$ четная.

8. Функция косинус убывает на каждом из промежутков $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$ и возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется аналогично функции $y = \sin x$.
График функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 52) называется **тангенсоидой**.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
2. Множество (область) значений функции $y = \operatorname{tg} x$ — все действительные числа.
3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π .

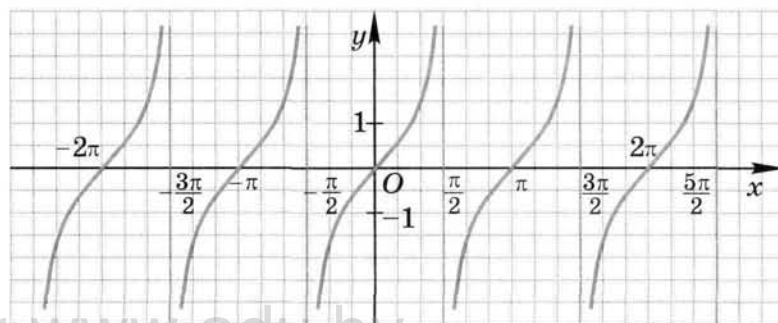


Рис. 52

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет.

5. Нулями функции $y = \operatorname{tg} x$ являются значения аргумента $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$ и положительные значения на каждом из промежутков $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.

8. Функция тангенс возрастает на каждом из промежутков вида $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определяется аналогично функции $y = \sin x$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 53) называется *котангенсоидой*.

Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. Область определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ — множество действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Множество (область) значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ — все действительные числа.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π .

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{ctg} x$ не имеет.

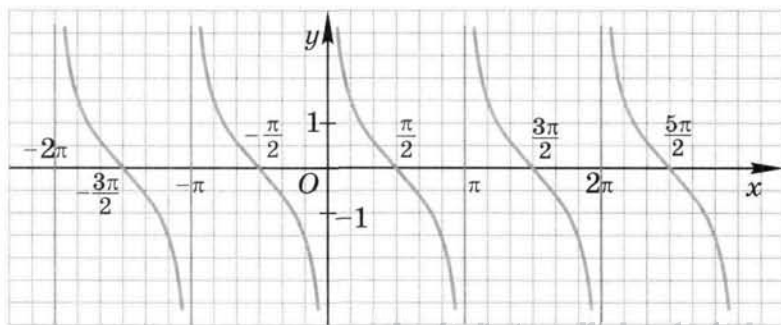


Рис. 53

5. Нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$ и положительные значения на каждом из промежутков $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная.

8. Функция тангенс убывает на каждом из промежутков вида $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

ПРОИЗВОДНАЯ

Приращение функции

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Пусть $y = f(x)$ некоторая функция, x_0 — фиксированная точка из области определения этой функции, x — произвольная точка из некоторой окрестности точки x_0 , $x \neq x_0$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента в точке** x_0 .

Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx стремящемся к нулю.

Производная в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке x из некоторого промежутка. Поставив в соответствие каждому числу x из этого промежутка число $f'(x)$, мы получим новую функцию, которая называется производной функции f и обозначается f' или y' .

Механический смысл производной

Пусть тело движется прямолинейно, $s(t)$ — путь, пройденный телом за время t , $v(t)$ — скорость тела в момент времени t . Тогда $v(t) = s'(t)$, т. е. скорость есть производная от пройденного пути по времени.

Геометрический смысл производной

Пусть $y = f(x)$ — функция, $P(x_0; y_0)$ — точка на ее графике, φ — угол наклона касательной в точке $P(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$. Тогда $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$, т. е. угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен производной этой функции в точке x_0 (рис. 54).

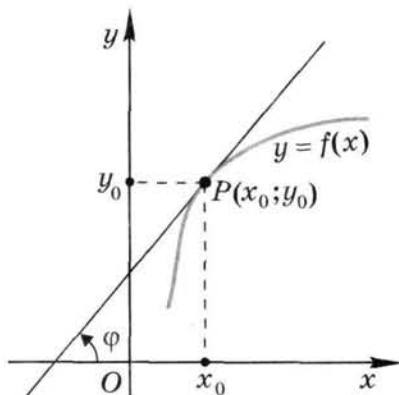


Рис. 54

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Правила вычисления производной

$$c' = 0, c — \text{const},$$

$$(cf(x))' = cf'(x), c — \text{const},$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Для любого целого k верна формула:

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Применение производных при исследовании функций Возрастание и убывание функции

Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Максимумы и минимумы функции

Функция f имеет в точке x_0 максимум, если существует такая окрестность точки x_0 , что для любого x из этой окрестности верно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

При этом точка x_0 называется **точкой максимума функции f** .

Функция f имеет в точке x_0 **минимум**, если существует такая окрестность точки x_0 , что для любого x из этой окрестности верно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

При этом точка x_0 называется **точкой минимума функции f** .

Функция может иметь одну, несколько, а может вообще не иметь точек максимума (минимума).

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Точка x_0 называется **внутренней** точкой множества D , если существует такая окрестность точки x_0 , которая содержится во множестве D .

Необходимое условие экстремума для внутренней точки x_0 области определения функции f :

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в точке x_0 существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума для внутренней точки x_0 области определения функции f :

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «+» на «-», то x_0 является точкой максимума.

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «-» на «+», то x_0 является точкой минимума.

Упражнения для повторения арифметического и алгебраического материала курса математики 5—11-х классов

Упражнения для повторения распределены по тринадцати тематическим разделам: «Действительные числа», «Пропорции. Проценты», «Арифметическая и геометрическая прогрессии», «Алгебраические выражения», «Тригонометрические выражения», «Логарифмические выражения», «Рациональные уравнения и системы уравнений. Рациональные неравенства», «Текстовые задачи», «Иррациональные уравнения», «Тригонометрические уравнения», «Показательные и логарифмические уравнения и системы уравнений. Показательные и логарифмические неравенства», «Функции, их графики и свойства», «Производная» — и разбиты по сложности на две группы: I и II (в группе II — более трудные задания).

Надеемся, что работа над этим материалом поможет повторить, обобщить и закрепить изученное.

Желаем успехов!

I. Действительные числа

I

Найдите значение выражения (1—2).

1. 1) $(6,72 : \frac{3}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0,8) : 1,21 - 8\frac{3}{8}$;
2) $3,075 : 1,5 - \frac{1}{4} (\frac{1}{25} + 3,26) - 1,025$.
2. 1) $0,756^2 - 0,241 \cdot 0,756 - 0,415 \cdot 0,756$;
2) $23 \cdot 17,8 - 3 \cdot 7,2 + 23 \cdot 7,2 - 17,8 \cdot 3$;
3) $\frac{956^2 - 44^2}{406} + \frac{38^2 - 17^2}{72^2 - 12^2}$;
4) $\frac{62^2 - 32^2}{71^2 - 23^2 + 94 \cdot 42}$.
3. 1) Докажите, что произведение трех последовательных четных чисел делится на 24.
2) Докажите, что сумма двузначного числа и числа, полученного из него перестановкой его цифр, кратна 11.

4. 1) Докажите, что при любом нечетном значении a разность $a^2 - 1$ делится на 8.
2) Докажите, что при любом натуральном значении n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

5. 1) Докажите, что значение выражения

$$(\sqrt{10 + 5\sqrt{3}} + \sqrt{10 - 5\sqrt{3}})^2$$

является рациональным числом.

- 2) Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{17 + 6\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

является иррациональным числом.

6. Упростите выражение:

$$\begin{aligned} 1) & \sqrt{75} + 0,5\sqrt{48} - 0,2\sqrt{300}; \\ 2) & (5\sqrt{8} - \frac{1}{3}\sqrt{10} - 2\sqrt{18}) : (\frac{1}{3}\sqrt{2}). \end{aligned}$$

7. Упростите выражение:

$$1) \frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}; \quad 2) \frac{\sqrt{70} - \sqrt{30}}{\sqrt{35} - \sqrt{15}}.$$

8. Упростите выражение:

$$1) \sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}}; \quad 2) \sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}.$$

9. Упростите выражение:

$$\begin{aligned} 1) & 1000^{-\frac{2}{3}} + (\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}} - 625^{-0,75}; \\ 2) & (0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{4}{3}} + (5^0)^4 \cdot 5. \end{aligned}$$

II

10. Докажите, что:

- 1) нечетная натуральная степень числа 11, увеличенная на 13, кратна 12;
- 2) четная натуральная степень числа 9, уменьшенная на 1, кратна 40.

11. Докажите, что при четном натуральном n :

$$1) 7^n - 5^n \text{ делится на } 24; \quad 2) 5^n - 3^n \text{ делится на } 16.$$

12. Упростите выражение:

$$1) 2^{\log_2 6} + 2\sqrt{12,5} + \frac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{7} + \sqrt{14}};$$

$$2) 8\sqrt{4,5} - \frac{5\sqrt{10}}{2\sqrt{5} - \sqrt{10}} + 3^{\log_3 5}.$$

13. Вычислите:

$$1) (4\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{50 + \sqrt{384}}; \quad 2) (\sqrt{3} - \sqrt{17})\sqrt{20 + \sqrt{204}}.$$

14. Вычислите:

$$1) \frac{(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2})^2 \cdot (4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2})}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}; \quad 2) \frac{5^{0,5}}{5^{0,5} - 3^{0,5}} - \frac{15^{0,5} - 3}{7 - 2 \cdot 15^{0,5}}.$$

15. Вычислите:

$$1) \left(\sqrt{(\sqrt{5} - 2,5)^2} - \sqrt[3]{(1,5 - \sqrt{5})^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{15\pi}{4};$$

$$2) 2^{-1,5} \cdot \cos \frac{11\pi}{4} + \left(\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1,5)^2} \right)^2.$$

16. 1) Упростите выражение $(m^{1,5} - m^{-0,5}) : (m^3 - m) \cdot m^{0,5}$ и найдите его значение при $m = 4^{-\log_4 49}$.

2) Упростите выражение $(t^{2,5} + t^{-1,5}) : (t^5 + t) \cdot t^{1,5}$ и найдите его значение при $t = 7^{-\log_7 64}$.

2. Пропорции. Проценты

I

Найдите x из пропорции (17—18).

$$17. 1) \frac{x}{\frac{186}{25} - 0,48} = \frac{4,1 + \frac{63}{60}}{\frac{70}{6} + 2\frac{1}{15}};$$

$$2) \frac{14 + \frac{7}{4}}{\frac{25}{2} - \frac{184}{15}} = \frac{x}{0,1 : 90 : 0,05 + \frac{2}{9}}.$$

$$18. 1) \frac{(\frac{4}{15} + \frac{10}{75}) : 0,04}{0,3 + \frac{8}{15}} = \frac{0,75 - \frac{1}{6}}{x};$$

$$2) \frac{x}{(1,25 + \frac{5}{6}) : \frac{1}{3}} = \frac{(6,8 - \frac{16}{5}) : \frac{35}{6}}{11 - \frac{19}{2}}.$$

19. 1) Найдите углы треугольника, если они относятся как 1 : 2 : 15.

2) Периметр треугольника равен 7,2 см. Найдите стороны этого треугольника, если они относятся как 11 : 12 : 13.

20. 1) Разделите число 434 обратно пропорционально числам 2; 3; 5.

2) Разделите число 172,8 обратно пропорционально числам 4; $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{3}$.

21. 1) Найдите число, если 6,5 % от него составляют 34 % от 31,2.

2) Найдите число, если 11 % от него составляют 14,5 % от 22.

22. 1) Сколько процентов соли содержится в растворе, если в 200 г раствора содержится 150 г воды?

2) За смену токарь может выточить 81 деталь при норме 45 деталей. На сколько процентов он перевыполнил план?

23. 1) Цветы ромашки при сушке теряют 72 % своей массы. Сколько килограммов цветов надо взять, чтобы получить из них 12,25 кг сухих цветов?

2) Морская вода содержит 5 % соли. Сколько нужно взять морской воды, чтобы получить при выпаривании 17,25 кг соли?

24. 1) На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 25 %, а другое — на 50 %?

2) На сколько процентов изменится дробь, если ее числитель уменьшить на 20 %, а знаменатель — на 60 %?

II

25. 1) Найдите положительное число, если 45 % от него составляют столько же, сколько составляют 20 % от числа, ему обратного.

2) Найдите положительное число, если 27 % от него равны 90 % от его квадрата.

26. 1) Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. В каком отношении необходимо взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

2) Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1 : 2, а во втором — 2 : 3. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 19 кг сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7 : 12?

27. 1) Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве?
- 2) Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 25 % цинка, а второй — 50 % меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в 2 раза выше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28 % цинка. Сколько килограммов меди содержится в получившемся новом сплаве?
28. 1) Из бутылки, наполненной 12-процентным раствором соли, отлили 1 л и долили бутылку 1 л воды, затем отлили еще 1 л и опять долили 1 л воды. В бутылке оказался 3-процентный раствор соли. Какова вместимость бутылки?
- 2) Фляга наполнена 96-процентным раствором соли. Из нее отлили 12 л раствора и дополнили флягу водой. Затем из фляги отлили еще 18 л и снова дополнили ее водой, после чего концентрация соли во фляге составила 32 %. Найдите объем фляги.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

I

29. Сумма трех последовательных членов арифметической прогрессии (a_n) равна 72. Второе число больше первого в 5 раз. Найдите эти числа.
30. Сумма трех последовательных членов арифметической прогрессии (a_n) равна 87. Третье число меньше суммы первых двух на 5. Найдите эти числа.
31. Сумма седьмого и десятого членов арифметической прогрессии (a_n) равна 5. Найдите сумму первых шестнадцати членов прогрессии.
32. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что сумма пятого и девятого

членов равна 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

33. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если сумма первых трех членов равна 7, а их произведение равно 8.
34. Знаменатель геометрической прогрессии (b_n) равен 0,5, четвертый член равен 10, а сумма всех членов равна 155. Найдите число членов прогрессии.
35. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии (b_n) , если разность пятого и первого членов прогрессии в пять раз больше разности третьего и первого ее членов.
36. Между числами 7 и 56 вставьте два числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали геометрическую прогрессию (b_n) .
37. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если второе число уменьшить на 2, а остальные два числа оставить без изменений, то полученные числа составят геометрическую прогрессию со знаменателем 3. Найдите эти числа.
38. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если первые два из них оставить без изменений, а из последнего вычесть первое, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите разность арифметической прогрессии, если второе из взятых чисел равно 6.

II

39. Вычислите:

$$1) 39 + 33 + 27 + \dots - 45; \quad 2) 12\frac{1}{2} - 11\frac{5}{6} - 11\frac{1}{6} - \dots - 7\frac{1}{2}.$$

40. Найдите сумму первых пятидесяти совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2; 7; 12; ... и 3; 10; 17; ...
41. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?
42. При каких значениях параметра a четыре различных корня уравнения $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

43. При каких значениях a числа $2\cos\frac{\pi}{6}$, $4\sin a$, $6\cos(\frac{\pi}{2} + a)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (a_n) ?
44. Найдите x , если $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ являются последовательными, не равными друг другу, членами арифметической прогрессии (a_n) .
45. Определите, при каких значениях x числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию:
 1) $a = \lg 3$; $b = \lg(9^x + 9)$; $c = \lg(9^x + 99)$;
 2) $a = \lg 5$; $b = \lg(5^{-x} - 5)$; $c = \lg(5^{-x} + 22)$.
46. Найдите значение выражения $\frac{\log_b 5(\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 25 - 2\log_c 5}$, если числа a , b , c являются последовательными членами геометрической прогрессии.
47. Найдите значение выражения

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$
48. При каких значениях m и n последовательность

$$\frac{m-n}{m+n}, \frac{m+n}{m-n}, \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^3; \dots$$
 является бесконечно убывающей геометрической прогрессией?

4. Алгебраические выражения

I

Разложите на множители (49—50).

49. 1) $4mn - 9kt - 9mt + 4nk$; 2) $7ax - 8bx - 7ay + 8by$;
 3) $12a^2 - 12$; 4) $7a^3 - 7a$;
 5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$; 6) $ak^4 - k^4 - ak^2 + k^2$;
 7) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$;
 8) $m^2 - 2mn + n^2 - p^2 + 2pq - q^2$.
50. 1) $(a+b)(a-b)^3 - (a-b)(a+b)^3$;
 2) $(a-b)^2(a+b)^5 + (a+b)^2(a-b)^5$;
 3) $a^4 - 18a^2 + 81$;
 4) $a^4 + 10a^2 + 25$.

Сократите дробь (51—53).

51. 1) $\frac{a^3 - ab^2}{ab - a^2}$; 2) $\frac{b^2 - ab}{a^2b - ab^2}$.
52. 1) $\frac{49c - c^3}{c^3 - 14c^2 + 49c}$; 2) $\frac{16c^4 - 9c^2}{16c^3 - 24c^2 + 9c}$.
53. 1) $\frac{a^2 - 9a + 14}{a^2 - 10a + 16}$; 2) $\frac{p^2 - 13p + 30}{p^2 - 12p + 27}$.

Упростите выражение (54—57).

54. 1) $\frac{a^2 - a}{a^2 - ab + am - mb} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^3 - am^2 + a^2 - m^2}{a^2 + ab}$;
 2) $\frac{3a^2 - 6a}{a^2 + ab - am - mb} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 4} \cdot \frac{a^3 - am^2 + 2a^2 - 2m^2}{a^2 - ab}$.
55. 1) $\frac{m^2 - n^2 - m + n}{a^2 - b^2 + b + a} : \frac{4m - 4n}{5b + 5a}$; 2) $\frac{m^2 - n^2 + m + n}{a^2 - b^2 - b + a} : \frac{2m + 2n}{3b - 3a}$.
56. 1) $\left(\frac{2a}{a-1}\right)^2 \cdot \frac{1 + a^2 - 2a}{2a} - a$; 2) $\left(\frac{2a}{a+1} - \frac{3}{1-a}\right) : \frac{4a^2 + 6 + 2a}{a^2 - 1}$.
57. 1) $\left(\frac{3a + a^2}{a + 3} + \sin \frac{\pi}{2}\right) : \left(\frac{1}{1+a} - \frac{a}{1+2a+a^2}\right)^{-1}$;
 2) $\left(\frac{6}{2a^2 - 2} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{3+a}{2+2a}\right) : \left(\frac{4a^2 - 4}{3}\right)^{-1} - (\sqrt[4]{6})^8$.

58. 1) При $a = 2$ найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1}\right) \cdot (5\sqrt{a} - 5)(\sqrt{a} + 2).$$

2) При $a = 8$ найдите значение выражения

$$\left(\frac{7}{\sqrt{a}-1} + \frac{7}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{\sqrt{a}}{(2-\sqrt{a})(\sqrt{a}+1)} - \frac{a\sqrt{a}}{4}.$$

II

Разложите на множители (59—60).

59. 1) $m^2 - n^2 + 2nk - k^2$; 2) $4m^4 - 4m^2 + 1 - n^2$.
60. 1) $(2a - 3)^3 + 1$; 2) $(3a - 2)^3 - 27$.

Сократите дробь (61—63).

$$61. \quad 1) \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 + b^2 - 2ab}; \quad 2) \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}.$$

$$62. \quad 1) \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}{2a^2 + 4ab + 2b^2}; \quad 2) \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}{5a^2 - 10ab + 5b^2}.$$

$$63. \quad 1) \frac{-5x - 2x^2 - 3}{2x^2 + 3x}; \quad 2) \frac{2 + x - 3x^2}{9x^2 - 4}.$$

Упростите выражение (64—66).

$$64. \quad 1) \left(\frac{m-3}{m^2-3m+9} + \frac{18-6m}{27+m^3} \right) : \frac{5(3-m)^2}{54+2m^3};$$

$$2) \left(\frac{m+1}{m^3-1} - \frac{1}{m^2+m+1} - \frac{2}{1-m} \right) : \frac{m+2+m^2}{m^3-1}.$$

$$65. \quad 1) \frac{a+6\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}+1} - \frac{a+6\sqrt{a-1}+4}{\sqrt{a-1}+1};$$

$$2) \frac{a+6\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}+4} - \frac{a+6\sqrt{a-2}+6}{\sqrt{a-2}+4}.$$

$$66. \quad 1) \frac{|a-1|(a^2+a+2)(a+1)a}{a^3-1-|a-1|}; \quad 2) \frac{|a+1|(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^4+a^3+|a+1|}.$$

$$67. \quad 1) \text{Зная, что } \frac{a+b}{a-2b} = \frac{2}{3}, \text{ найдите значение выражения } \frac{a^2-2b^2}{2a^2+5ab+3b^2}.$$

$$2) \text{Зная, что } \frac{ab-b^2}{a^2-ab+4b^2} = \frac{1}{5}, \text{ найдите значение выражения } \frac{2a+5b}{b-7a}.$$

$$68. \quad 1) \text{Зная, что } a + \frac{2}{a} = -4, \text{ найдите значение выражения } a^3 + 2a^2 + \frac{8}{a^2} + \frac{8}{a^3}.$$

$$2) \text{Зная, что } m - \frac{1}{m} = 3, \text{ найдите значение выражения } 2m^3 + 3m^2 + \frac{3}{m^2} - \frac{2}{m^3}.$$

$$69. \quad 1) \text{При каких целых } n \text{ значение выражения } \frac{2n^2+9n+13}{n+2} \text{ является натуральным числом?}$$

$$2) \text{При каких целых } n \text{ значение выражения } \frac{3n^2+5n+3}{n+2} \text{ является натуральным числом?}$$

5. Тригонометрические выражения

I

$$70. \quad 1) \text{Известно, что } \sin \alpha = -\frac{15}{17} \text{ и } \frac{35\pi}{2} < \alpha < \frac{37\pi}{2}. \text{ Найдите } \cos \alpha, \text{ tg } \alpha, \text{ ctg } \alpha.$$

$$2) \text{Известно, что } \cos \alpha = \frac{21}{29} \text{ и } 9\pi < \alpha < 10\pi. \text{ Найдите } \sin \alpha, \text{ tg } \alpha, \text{ ctg } \alpha.$$

$$71. \quad 1) \text{Известно, что } \text{tg } \alpha = -\frac{5}{12} \text{ и } \cos \alpha < 0. \text{ Найдите } \cos \alpha, \sin \alpha.$$

$$2) \text{Известно, что } \text{ctg } \alpha = \frac{12}{5} \text{ и } \sin \alpha < 0. \text{ Найдите } \cos \alpha, \sin \alpha.$$

$$72. \quad 1) \text{Известно, что } \sin \alpha = -\frac{2}{3} \text{ и } \text{ctg } \alpha > 0. \text{ Вычислите } \frac{\text{tg } \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

$$2) \text{Известно, что } \cos \alpha = -\frac{3}{4} \text{ и } \text{ctg } \alpha < 0. \text{ Вычислите } \frac{\text{ctg } \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

$$73. \quad 1) \text{Найдите } \sin \alpha \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = 1\frac{1}{3}.$$

$$2) \text{Найдите } \sin \alpha + \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Упростите выражение (74—77).

$$74. \quad 1) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \text{tg } \alpha; \quad 2) \text{ctg } \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$75. \quad 1) \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}; \quad 2) \sin^3 4\alpha \cos 4\alpha - \cos^3 4\alpha \sin 4\alpha.$$

$$76. \quad 1) \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right);$$

$$2) \sin^2\left(\frac{7\pi}{12} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right).$$

$$77. \quad 1) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta);$$

$$2) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Докажите тождество (78—81).

$$78. \quad 1) \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$2) \sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$79. \quad 1) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$2) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

80. 1) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha = 4\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$;
 2) $1 - \sqrt{2}\sin\alpha = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$.
81. 1) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 9\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;
 2) $\frac{\cos 15\alpha + \cos 7\alpha + \cos \alpha}{\sin 7\alpha - \sin \alpha + \sin 15\alpha} = \operatorname{ctg} 7\alpha$.

II

Вычислите (82—85).

82. 1) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 2) $\cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 4\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
83. 1) $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{2}{7}$;
 2) $\sin \alpha \sin 3\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$.
84. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 3}{2\sin 2\alpha - 1}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 3$;
 2) $\frac{5 - 4\cos \alpha}{\sin \alpha - 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.
85. 1) $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \sin^4 \frac{7\pi}{12} + \sin^4 \frac{5\pi}{12} + \sin^4 \frac{11\pi}{12}$;
 2) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{9\pi}{8}$.

Упростите выражение (86—88).

86. 1) $\frac{4\cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$;
 2) $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha} - \cos \alpha$.
87. 1) $\cos(\arccos x + \arccos y)$;
 2) $\sin(\arccos x + \arcsin y)$.
88. 1) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$;
 2) $\sin(2\operatorname{arctg} x)$.

Докажите тождество (89—92).

89. 1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$;
 2) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.
90. 1) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$;
 2) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \cos^{-1} 2\alpha$.

91. 1) $\frac{\sin \alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$;
 2) $\frac{\sin(\beta + 2\alpha)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

92. 1) $\sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$;
 2) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

Вычислите (93—94).

93. 1) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$;
 2) $\sin\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$.
94. 1) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17}\right)$;
 2) $\cos\left(2\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right)$.
95. Верно ли, что:
 1) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;
 2) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$?

6. Логарифмические выражения

I

Найдите значение выражения (96—102).

96. 1) $\log_5^2 25$;
 2) $\log_4^3 64$;
 3) $\log_3^4 \frac{1}{9}$;
 4) $\log_{0,5}^2 32$.
97. 1) $\sqrt{\log_2 16}$;
 2) $\sqrt{\lg 10\,000}$;
 3) $\sqrt[3]{\log_2 256}$;
 4) $\sqrt{(-2\log_6 \frac{1}{36})}$.
98. 1) $(6^{\log_6 \sqrt[3]{4}})^3$;
 2) $(3^{\log_3 \sqrt[7]{6}})^7$;
 3) $2^{\log_8 125}$;
 4) $9^{\log_3 \sqrt{10}}$.
99. 1) $(6^{\log_2 6})^{\log_6 2}$;
 2) $(5^{\log_{16} 7})^{\log_5 4}$;
 3) $25^{\frac{1}{\log_3 5}}$;
 4) $3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.
100. 1) $\sqrt{\log_{25} 5 + \log_{25} 60 - \log_{25} 12}$;
 2) $\sqrt{\log_{18} 54 + \log_{18} 2 - \log_{18} 6}$.

101. 1) $\log_{0.5} \sin \frac{\pi}{4} - \log_{2008} \operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}$;

2) $\log_{0.75} \cos \frac{25\pi}{6} + \log_{2008} \sin \frac{17\pi}{2}$.

102. 1) $\log_{0.5} \log_{36} 6 - 8^{\frac{1}{\log_6 8}}$; 2) $\log_{0.25} \log_{256} 4 - 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$.

Упростите выражение (103—105).

103. 1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2} \log_5 (x^2 - 10x + 25)}$; 2) $3^{-\log_9 (x^2 - 16x + 64)}$.

104. 1) $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$; 2) $7^{\sqrt{\log_7 8}} - 8^{\sqrt{\log_8 7}}$.

105. 1) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}} \left(2 \sin \frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8}\right)}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}\right)}$.

106. 1) Найдите значение $\lg 12$, если $\lg 2 = m$, $\lg 7 = n$.
2) Найдите значение $\lg 24$, если $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$.

II

Упростите выражение (107—111).

107. 1) $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{\log_1 m}{3}} + 4^{1+4 \log_4 m}\right) \cdot 6^{-\frac{1}{\log_m 6}}$;

2) $\left(\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{\log_1 n}{5}} + 2^{1+3 \log_2 m}\right) \cdot 8^{-\frac{1}{\log_m 8}}$.

108. 1) $\log_8 (15\sqrt{3} + 26) + \log_4 (7 - 4\sqrt{3})$;

2) $\log_9 (2\sqrt{2} + 3) + \log_{27} (5\sqrt{2} - 7)$.

109. 1) $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2 \log_2^2 7}{\log_2 14 + 2 \log_2 7}$;

2) $\frac{\log_3^2 12 + 2 \log_3 12 + 4 \log_3 2 - 4 \log_3^2 2}{3 \log_3 12 + 6 \log_3 2}$.

110. 1) $3^{\frac{1}{\log_5 3}} \cdot 3^{\log_3^2 4} - 5 \cdot 4^{\log_3 4} + \lg 0,1$;

2) $2^{\frac{1}{2 \log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 25}$.

111. 1) $(\log_3 4 + 9 \log_4 3 + 6)(\log_3 4 - 3 \log_{108} 4) \log_4 3 - \log_3 4$;

2) $(\log_7 3 + \log_3 7 + 2)(\log_7 3 - \log_{21} 3) \log_3 7 - \log_7 3$.

112. 1) Упростите выражение $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b}$ и найдите его значение, если $\log_a b = 2$.

2) Упростите выражение $\log_{\sqrt[3]{b}} \frac{b}{\sqrt[3]{a}} - \frac{3}{\log_{\sqrt[3]{ab}} (a\sqrt{b})} + 2 \log_a \sqrt{b}$ и найдите его значение, если $\log_b a = 2$.

7. Рациональные уравнения и системы уравнений.

Рациональные неравенства

I

Решите уравнение (113—119).

113. 1) $49 - 16x^2 = 0$; 2) $x^2 - 27 = 0$.

114. 1) $\frac{1}{7}x + 49x^2 = 0$; 2) $y^3 - 64y = 0$.

115. 1) $x^2 - 9x + 10 = 0$; 2) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{25} = 0$;
3) $x^2 + 4x - \sqrt{3} + 1 = 0$; 4) $x^2 + 2(1 + \sqrt{8})x + 8\sqrt{2} = 0$.

116. 1) $x^2 - (x + 3)(x - 2) = 2(x^2 - 4)$;
2) $3(x^2 - 1) = 2x^2 + (x + 2)(x - 1)$.

117. 1) $x^2 + 12|x| + 35 = 0$; 2) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 20 = 0$;
3) $x^2 - (\sqrt{x+3})^2 - 8 = 0$; 4) $x^2 - 4x \cdot \frac{|x-10|}{x-10} + 2 = 0$.

118. 1) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{10x - 3} = 0$; 2) $\frac{3x^2 + x^3}{x^2 - 4} = 0$.

119. 1) $\frac{x}{x^2 - 16} + \frac{x-1}{x+4} = 0$; 2) $\frac{1}{x^2 - 16} + \frac{12}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x-4)^2} = 0$.

120. Найдите корни уравнения $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 5$, удовлетворяющие условию $-\sqrt{47} \leq x \leq 5$.

Решите уравнение (121—124).

121. 1) $|x^2 - 4x| = 5$; 2) $|2x - x^2| + 9 = 0$;
3) $|3x^2 - 5x + 6| = 4$; 4) $|7x^2 - 3x - 2| = -11$.

122. 1) $|x - 2| = |x + 3|$; 2) $|x^2 - 1| = |x + 5|$;
3) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$; 4) $2x^2 + |x| - 3x = 0$.

123. 1) $(x^2 - 7x + 12)\sqrt{x - 4} = 0$;
2) $(4x^2 - 3x - 2)\sqrt{2x} = 0$;
3) $(x^2 - \sqrt{2}x - 4)\sqrt{5x + 10} = 0$;
4) $(x^2 - x - 3 + \sqrt{3})\sqrt{6 + 3x} = 0$.

124. 1) $\frac{-3x^2 + 6}{\sqrt{x - 1}} = 0$; 2) $\frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x + 2}} = 0$.

Решите систему уравнений (125—127).

125. 1) $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x^2 - 4y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 6x - y^2 = 3. \end{cases}$

126. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

127. 1) $\begin{cases} 4x^2 - 20xy + 25y^2 = 64, \\ 16x^2 + 24xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 = 4, \\ 9x^2 - 6xy + y^2 = 256. \end{cases}$

128. 1) Укажите корень уравнения $x^2 - 7x - 8 = 0$, удовлетворяющий неравенству $3x - 14 > 0$.
2) Укажите корень уравнения $-x^2 + 7x - 10 = 0$, удовлетворяющий неравенству $10 - 3x > 0$.

Решите неравенство (129—139).

129. 1) $\frac{3x + 7}{5} - \frac{2x + 1}{3} \leq \frac{7 - x}{6}$; 2) $\frac{2x + 5}{3} - \frac{6x - 1}{4} \geq x + 1$.

130. 1) $\frac{7x - 12}{1 - 6x} > 0$; 2) $\frac{0.6x + 1}{5x + 2} < 0$.

131. 1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $2x^2 - 7x + 3 > 0$.

132. 1) $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{x} < \frac{1}{4}$.

133. 1) $\frac{2}{x - 1} > \frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{x + 3} < \frac{1}{5}$.

134. 1) $\frac{3}{x} \leq \frac{x}{27}$; 2) $\frac{36}{x} \geq \frac{x}{4}$.

135. 1) $\frac{2}{x} - \frac{5}{6 - x} < 0$; 2) $\frac{2}{10 - x} - \frac{7}{x} > 0$.

136. 1) $\frac{7x + 1}{x^2 + 4x + 3} < 1$; 2) $\frac{5x + 3}{x^2 + x - 2} > 1$.

137. 1) $\left(\frac{2x + 9}{3}\right)^2 - \left(\frac{12 - x}{4}\right)^2 \geq 0$; 2) $\left(\frac{3x - 5}{4}\right)^2 - \left(\frac{8 - x}{5}\right)^2 \leq 0$.

138. 1) $x^2(x - 4)^3(x + 2) > 0$; 2) $x^4(x + 1)^2(3x - 15) < 0$.

139. 1) $|4 + 2x| < 5$; 2) $|3 - 2x| > 4$.

140. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 23 > 0, \\ 3x - 40 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 2 - 5x < 0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x \geq 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0, \\ x > 0. \end{cases}$

II

Решите уравнение (141—143).

141. 1) $|x - 6| = x - 6$; 2) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5 - x$;
3) $|x - 1| + |x + 1| = 8$; 4) $|x + 5| - |x - 3| = 8$.

142. 1) $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$; 2) $\frac{3}{1 + x + x^2} = 3 - x - x^2$.

143. 1) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
2) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x) = 24$;
3) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$;
4) $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$.

Решите систему уравнений (144—146).

144. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 2, \\ y^3 + x^2y = 2; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + x - y = 33, \\ 2xy - 4x^2 + 3x + 5y = -37; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$
145. 1) $\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 = 0, \\ 3x^2 - 2xy = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 3xy - 4x^2 = 0, \\ 4xy - x^2 = 3; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} y^2 + 2xy - 15x^2 = 0, \\ y^2 + 3xy = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy + 2x^2 = 0, \\ 5xy - 2y^2 = 18. \end{cases}$
146. 1) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + 3x = 27, \\ 4\frac{x+y}{x-y} - 5x = -11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = 11 + 2y, \\ \frac{x-y}{x+y} + 8y = -29. \end{cases}$

147. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2 + 8x - 2 = 0$ имеет:

- 1) два различных корня; 2) два равных корня;
3) один корень; 4) не имеет корней?

148. При каких значениях a уравнение $(a+5)x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет:

- 1) два различных корня; 2) два равных корня;
3) один корень; 4) не имеет корней?

149. При каких значениях a имеет два равных корня уравнение:

- 1) $3x^2 - 6x + 2a = 0$; 2) $2x^2 - 12x + 3a = 0$?

150. При каких значениях a модуль разности корней уравнения $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ равен 6?

151. При каких значениях a корни уравнения $(a+2)x^2 - ax - a = 0$ симметричны относительно $x = 1$?

152. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 7?

Решите уравнение относительно x (153—155).

153. 1) $(6-a)x = -4$; 2) $(a+7)x = -7$;
3) $3x + a = 2a - 3$; 4) $a - 4x = 3a + 1$.

154. 1) $x^2 + 10kx + 9k^2 = 0$;
2) $x^2 + (2k-3)x - 6k = 0$;
3) $x^2 - (3k-2)x + 2k^2 - k - 3 = 0$;
4) $x^2 - 4kx + 3k^2 - 4k - 4 = 0$.

155. 1) $2ax^2 - (a+1)x + \frac{1}{8}a = 0$; 2) $\frac{1}{2}ax^2 - (3-2a)x + 2a = 0$.

156. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение:

- 1) $\begin{cases} ax - 2a^2y = a, \\ a^2x + 3ay = a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a^2x + 3a^5y = 2a, \\ -5a^3x + 8a^2y = 7a^4; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} ax + (a-4)y = 3 - 6a, \\ 6x - 2y = a - 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (5a+2)x - 8y = 19 - a, \\ (2a+11)x + 7y = a + 13. \end{cases}$

157. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений не имеет решений:

- 1) $\begin{cases} ax - 10y = 16, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2ay = 11, \\ 5x - 10y = 23; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} ax + 7y = a - 3, \\ 5x - 2ay = a + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 11x - 4ay = 19, \\ 12ax + 7y = 15. \end{cases}$

Решите неравенство (158—159).

158. 1) $(x^2 - 3x - 1)^2 \leq (x^2 + 7x + 1)^2$;
2) $(x^2 + 2x - 2)^2 \geq (x^2 - 5x + 2)^2$.

159. 1) $\frac{(x^2 - 7x - 8)(x - 8)^3}{(x + 2)^2(5 - x)} \geq 0$;

- 2) $\frac{(x^2 + 5x - 24)(x + 2)^5}{(x - 5)^4(12 - 6x)} \leq 0$.

8. Текстовые задачи

I

160. Если числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель дроби увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$, а если числитель дроби уменьшить на 5, а знаменатель дроби увеличить на 5, то получится дробь $\frac{1}{3}$. Найдите дробь.
161. Числитель дроби на 3 меньше ее знаменателя. Сумма дроби и обратной ей дроби в 7,25 раза больше исходной. Найдите исходную дробь.
162. Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если цифру десятков увеличить на 3, а цифру единиц уменьшить на 3, то полученное число будет записано теми же цифрами, что и исходное. Найдите исходное число.
163. В разряде десятков двузначного числа стоит цифра, которая на 3 больше цифры, стоящей в разряде единиц. Сумма квадратов цифр числа, сложенная с квадратом самого числа равна 2733. Найдите число.
164. Моторная лодка прошла по течению реки 14 км, а затем 9 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость моторной лодки в стоячей воде равна $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
165. Юра и Игорь, выехавшие на велосипедах навстречу друг другу из деревень Золотухино и Жуки, сближаются со скоростью $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Если они увеличат скорость сближения на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то встретятся на 18 мин раньше. Каково расстояние между деревнями Золотухино и Жуки?
166. Мотоциклист Костя едет из деревни Онуфрино со скоростью $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Если он уменьшит скорость движения в два раза, то приедет в поселок Ананичи на 4 ч позже намеченного. Какой путь надо проехать Косте от Онуфрино до Ананичей?
167. Бригада строителей сдала в эксплуатацию объект на 4 дня быстрее, чем другая бригада, работающая на таком же объек-

те. За сколько дней может каждая бригада построить объект, если, работая до этого совместно, за 24 дня они построили 5 таких объектов?

168. В бассейн проведены две трубы. Через первую трубу он наполняется на 12 ч быстрее, чем через вторую. После того как первая труба действовала 10 ч, ее закрыли и открыли вторую, через которую бассейн наполнится за 16 ч. За сколько часов через каждую трубу отдельно можно наполнить пустой бассейн?
169. Теплоход загружается подъемными кранами. Сначала работали краны одинаковой мощности. Через 2 ч погрузки к ним присоединились краны меньшей мощности, и после этого погрузка теплохода была окончена через 3 ч. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка была бы окончена через 4 ч 30 мин. За сколько часов краны каждой мощности выполнили бы всю погрузку, работая отдельно?
170. Двое рабочих, из которых второй начинает работать на $1\frac{1}{2}$ дня позже первого, могут выполнить работу за 7 дней. Если бы эту работу выполнял каждый отдельно, то первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. Сколько дней нужно каждому рабочему, чтобы выполнить работу отдельно?
171. На машиностроительном заводе разработали новый тип детали для генераторов. Из 875 кг металла стали делать на 3 детали больше, чем делали деталей старого типа из 900 кг. Определите массы деталей нового и старого типов, если две детали нового типа легче одной детали старого типа на 0,1 т.
172. Для промывания фотографических негативов служит ванна, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда размером $20 \times 90 \times 25$ см. Для постоянного обновления вода поступает в ванну через один кран и одновременно вытекает через другой. Чтобы полностью опорожнить ванну посредством второго крана, требуется на 5 мин меньше времени, чем для наполнения ее через первый кран при закрытом втором. Если же открыть оба крана, то полная ванна опорожнится за 1 ч. Найдите количество воды, пропускаемое каждым краном за 1 мин.

173. 20 % возраста бабушки Веры Александровны на 12 лет больше 30 % возраста внучки Анны, а 10 % возраста бабушки на 3 года меньше 60 % возраста Анны. Сколько лет Вере Александровне и сколько лет Анне?
174. 40 % числа самостоятельно сделанных Антоном домашних заданий по алгебре на 11 больше 20 % числа списанных заданий, а 10 % числа самостоятельно сделанных заданий на 6 меньше 40 % числа списанных. Найдите число домашних заданий по алгебре, выполненных Антоном самостоятельно, и число списанных.
175. Имеются 15-процентный и 35-процентный растворы соли. Сколько надо взять каждого раствора, чтобы получить 600 г 30-процентного раствора?
176. В одном сплаве содержится 60 % олова, а в другом — 80 %. Сколько надо взять каждого сплава, чтобы получить из них 170 кг нового сплава, в котором олово составляет 65 %?
177. Имеется 600 г серебра 835-й пробы. Сколько чистого серебра надо добавить к этим 600 г, чтобы получить серебро 875-й пробы?
178. На одной полке было на 15 книг больше, чем на другой. После того как на первой полке книг стало больше на 10 %, а на второй — на 20 %, число книг на первой полке составило $\frac{11}{20}$ числа книг на обеих полках. Сколько книг стало на каждой полке?

II

179. Два двузначных числа поочередно приписывают друг к другу. Разность получившихся четырехзначных чисел равна 2178. Найдите эти двузначные числа, если их сумма равна 68.
180. Сумма цифр четырехзначного числа равна 15. Отношение двузначного числа, записанного первыми двумя цифрами, к числу, записанному последними двумя цифрами, равно $\frac{8}{21}$. Найдите четырехзначное число.
181. При делении третьего числа на первое в частном получилось 2, а в остатке 3. При делении второго числа на первое в частном

- получилось 1, а в остатке 2. Найдите эти три числа, если сумма второго и третьего на 1 больше квадрата первого числа.
182. Заработная плата повысилась на 5 %, а цены на товар снизились на 16 %. На сколько процентов повысилась покупательская способность потребителей?
183. Через три крана цистерна может быть освобождена от содержащейся в ней жидкости за 4 ч 48 мин. Чтобы освободить цистерну только с помощью первого и второго кранов, понадобится в 1,5 раза больше времени, чем с помощью третьего крана. С помощью второго и третьего кранов цистерна будет освобождена от содержимого в 6,5 раза быстрее, чем с помощью только первого крана. За какое время цистерна может быть освобождена от содержимого с помощью каждого крана отдельно?
184. Бак наполняется водой из двух кранов, причем первый кран открыли на 5 ч раньше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько был открыт второй, а второй — столько, сколько был открыт первый, то из первого крана в бак попало бы вдвое меньше воды, чем из второго. Если открыть оба крана одновременно, то бак наполнится за 17 ч. Сколько времени был открыт второй кран?
185. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист с постоянной скоростью $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ км, его догнал автомобиль, который выехал из A через 15 мин после велосипедиста. После этого велосипедист, проехав еще 25 км, встретил автомобиль, который, доехав до пункта B и отдохнув 0,5 ч, развернулся и поехал в пункт A . Найдите расстояние между пунктами A и B , если скорость автомобиля постоянна.
186. Два поезда выехали из города A в город B с интервалом 5 ч и одновременно прибыли в город B . Когда первый поезд находился в середине пути, второй отставал от него на 225 км, а за час до прибытия расстояние между поездами было равно 30 км. Найдите скорости поездов и расстояние между городами.

187. Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению реки. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A , расположенного выше пункта B . Через 2,5 ч он прибыл в пункт C . На обратный путь было затрачено 5 ч. Поставив на лодку двигатель, рыбак увеличил собственную скорость лодки в 3 раза и приплыл из пункта A в пункт B за 24 мин. Найдите скорость течения реки.

9. Иррациональные уравнения и системы уравнений.

Иррациональные неравенства

I

Решите уравнение (188—192).

188. 1) $\sqrt{16x^2 + 16x + 29} = 5$; 2) $\sqrt{9x^2 - 12x + 85} = 9$;
 3) $\sqrt[4]{5x^2 + 23x + 246} = 4$; 4) $\sqrt[4]{7x^2 - 52x + 102} = 3$.
189. 1) $\sqrt[9]{\frac{x+7}{3x+17}} = 1$; 2) $\sqrt[7]{\frac{x+2}{5x+22}} = -1$.
190. 1) $\sqrt{5x+1} = \sqrt{7x-9}$; 2) $\sqrt{4x-7} = \sqrt{3x-4}$;
 3) $\sqrt{-x^2 - 13x - 9} = \sqrt{-7x - 9}$;
 4) $\sqrt{-x^2 - 16x - 3} = \sqrt{-8x - 3}$.
191. 1) $\sqrt{x} + \sqrt{25-x} = 5$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{16-x} = 4$;
 3) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$; 4) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = 2$.
192. 1) $\sqrt[3]{2x-1} = 1 - \sqrt[3]{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$.
 3) $\sqrt[9]{x^2 + 4x} \cdot \sqrt[6]{x-3} = 0$; 4) $\sqrt[7]{x^2 - 1} \cdot \sqrt[4]{2x+1} = 0$.
 5) $\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x+5}} = 4$; 6) $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$.

Решите неравенство (193—194).

193. 1) $\sqrt{0,4x+1} < 3$; 2) $\sqrt{1-0,1x} \leq 5$;
 3) $\sqrt[3]{2x+5} \geq 3$; 4) $\sqrt[5]{x+5} > -2$.

194. 1) $5\sqrt{x} - 4x \geq 1$; 2) $11\sqrt{x} - 4x \geq 6$;
 3) $\sqrt{x+7} > \sqrt{-1-x}$; 4) $\sqrt[4]{5x+4} < \sqrt[4]{2+9x}$.

Решите систему уравнений (195—196).

195. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x + y = 26; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ x + y = 25. \end{cases}$
196. 1) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x - 6} = y, \\ \sqrt{y^2 + 5y - 6} = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x - 7} = y, \\ \sqrt{y^2 + 4y - 7} = x. \end{cases}$

II

Решите уравнение (197—201).

197. 1) $\sqrt{7-x} - \sqrt[3]{2+x} = -1$; 2) $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 5$.
198. 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;
 2) $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5x-10}$;
 3) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$;
 4) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$.
199. 1) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt{x-3}$;
 3) $\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3$; 4) $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.
200. 1) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2 \cdot \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}} = \frac{7}{3}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = 2\frac{1}{6}$.
 3) $\frac{(x^2 + 3x - 10)\sqrt{x+6}}{4x+20} = 0$; 4) $\frac{(x^2 - 6x - 27)\sqrt{20-2x}}{18-2x} = 0$.
201. Решите неравенство:
 1) $\sqrt{2x^2 - 15x + 28} \leq x - 2$; 2) $\sqrt{-x^2 - 5x - 4} \leq x + 4$;
 3) $(x^2 - 8x + 12)\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \leq 0$;
 4) $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{4 - 3x^2 - 4x} \leq 0$.

Решите систему уравнений (202—206).

$$202. \quad 1) \begin{cases} \sqrt{y-x+1} = 5, \\ \sqrt{-y-x-15} = 2y-3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sqrt{2y-x+3} = 1, \\ \sqrt{-2y-x+6} = 3y-2. \end{cases}$$

$$203^*. 1) \begin{cases} x\sqrt{x} + 12y\sqrt{x} = 32, \\ 8y\sqrt{y} + 6x\sqrt{y} = 32; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} = 351, \\ 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 378. \end{cases}$$

$$204^*. 1) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$$

$$205^*. 1) \begin{cases} 2x - \sqrt{xy} + 9y = 71, \\ 2x + \sqrt{xy} - 9y = 73; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - \sqrt{xy} + 4y = 79, \\ 5x + \sqrt{xy} - 4y = 81. \end{cases}$$

$$206^*. 1) \begin{cases} |y|\sqrt{y^2 - 4x^2} = 0, \\ x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} |x|\sqrt{4x^2 - y^2} = 0, \\ x - y + \sqrt{4x^2 - y^2} = 1. \end{cases}$$

207. Решите уравнение с неизвестным x :

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{x-4} = a; & 2) \sqrt{x+1} = -a; \\ 3) a^2 \cdot \sqrt{x-4} + \sqrt{x} = 0; & 4) \sqrt{x-6} + a^2|x| = 0; \\ 5) \sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3; & 6) \sqrt{x-a} - \sqrt{x+1} = 4. \end{array}$$

10. Тригонометрические уравнения

I

Решите уравнение (208—214).

$$208. \quad 1) \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = 1; \quad 2) 3 + \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos x = 0; \\ 3) 6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0; \quad 4) \sin^2(\pi + x) - \sin x - 2 = 0.$$

$$209. \quad 1) \sin^3 x = 2\sin 2x; \quad 2) \operatorname{tg} x - 5\operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 6\sin \frac{13\pi}{2}.$$

$$210. \quad 1) \frac{1}{\cos^2 x} - 4\operatorname{tg} x + 2 = 0; \quad 2) \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} = 0;$$

$$3) 7 + 4\sin x \cos x + \frac{3}{\cos(270^\circ + 2x)} = 0;$$

$$4) \frac{2 - 3\sin x + \cos(2x + \pi)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

$$211. \quad 1) \sin 3x - \sin x = 0; \quad 2) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x; \\ 3) \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 4x = 0; \quad 4) \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(90^\circ - 4x).$$

$$212. \quad 1) \cos 4x + \sin 4x = \sqrt{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 1; \\ 3) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}; \quad 4) \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x + 2.$$

$$213. \quad 1) \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x; \\ 2) \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = \cos 3x - \sin x; \\ 3) 2\sin 2x \cos 3x + \sin x + \cos 2x = 0; \\ 4) 2\cos 5x \cos 8x - \cos 13x = 0; \\ 5) 2\sin x \sin 8x = \cos 7x; \\ 6) 2\sin x \cos 2x = \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 7) \sin^4 x - \cos^4 x = 0,5; \\ 8) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

$$214. \quad 1) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}; \\ 2) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sin 2x; \\ 3) \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 4 + 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}\right); \\ 4) \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{ctg}^2 2x = 0; \\ 5) \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0; \\ 6) 2\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2.$$

215. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x + \sin y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos 2x + \cos y = 0. \end{cases}$$

II

Решите уравнение (216—220).

216. 1) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$;

2) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

217. 1) $\sin^6 x - \cos^6 x + 1 = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$;

2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{14}(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

218. 1) $4^{|\sin x - 1|} = 16$; 2) $5^{[x - 2|\sin x|]} = (\sqrt{5})^{x|\sin x|}$.

219. 1) $\lg(3\sin x - \cos x) + \lg \cos x = 0$;

2) $\lg(2\sin x - 1 + 10\sin^2 x) = \lg(1 - \sin x)$;

3) $\log_{1/\sin x} \cos^2 x = \log_{\sqrt{\sin x}} \sqrt{7 - \operatorname{tg} x}$;

4) $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

220. 1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

2) $\sin(\arcsin(x - 1)) = x^2 - 4x + 5$;

3) $\arccos x = \pi + (x^2 - 1)^2$;

4) $-2\arcsin x = \pi + (x + 1)^2$;

5) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$;

6) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;

7) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;

8) $4\operatorname{arctg} x \frac{3x - 1}{x + 3} = \pi$.

221. Решите уравнение относительно x :

1) $\sin x = a$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + 1$;

3) $\sin(x^2 - 4x) = a$; 4) $\sin(x^2 + 6x) = 3a$;

5) $\sin^4 x - \cos^4 x = a$; 6) $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

222*. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \cos 2y \sqrt{\sin x} = 0, \\ 4\sin^2 x + \cos 2y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$

223*. Решите систему уравнений с двумя переменными x и y :

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = a^2, \\ \cos x \sin y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = a, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

11. Показательные и логарифмические уравнения и системы уравнений. Показательные и логарифмические неравенства

I

Решите уравнение (224—225).

224. 1) $16^{x-0.5} - 5 \cdot 4^{x-1} + 2 = 0$; 2) $25^{x+1.5} - 9 \cdot 5^x + 1 = 0$;

3) $2,5^{\cos x} \cdot (\sqrt{10})^{2\cos x} = 25^{0.5}$; 4) $36^{\sin x} \cdot 4^{\sin x} = 144^{-0.5}$;

5) $\sqrt{64^{5-3x}} = \sqrt[3]{16^{8+x}}$; 6) $\sqrt{27^{9-5x}} = \sqrt[3]{9^{7+x}}$;

7) $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x = 2^{2x} + 8$; 8) $6^{2x+1} - 3 \cdot 6^x = 2 \cdot 6^{2x} + 126$.

225. 1) $\left(\frac{27}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} = \frac{\lg 125}{\lg 25}$; 2) $\left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x+1} = \frac{\lg 64}{\lg 16}$;

3) $\lg(x + 3) = -\lg(2x + 5)$; 4) $\lg(x + 8) = -\lg(3x + 22)$;

5) $3\lg^2(3x + 79) = 14\lg(3x + 79) - 16$;

6) $3\lg^2(5x + 89) + 20 = 16\lg(5x + 89)$.

Решите систему уравнений (226—227).

226. 1) $\begin{cases} 2^{x+1} \cdot 3^{y+2} = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{x+3} \cdot 2^{y-3} = 3, \\ x - y = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625, \\ 5^x \cdot 9^y = 2025. \end{cases}$

227. 1) $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2, \\ \lg x - \lg y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ \log_2 x = 4 - \log_2 y. \end{cases}$

Решите неравенство (228—230).

228. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2.5-0.5x^2} > \frac{1}{16}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-0.5x^2} \leq 27$;

- 3) $2^{3x-2} + 2^{3x-1} \geq 6$; 4) $4^{3x-2} + 4^{3x-1} \leq 80$;
 5) $2 \cdot 3^x - 9^x + 3 > 0$; 6) $2^{4x-2} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 \leq 0$;
 7) $\frac{9^x - 81}{x^2 + 10x + 21} > 0$; 8) $\frac{11^x - 121}{x^2 + 14x + 45} < 0$.

229. 1) $\log_4 x + \log_4(x-12) \geq 3$; 2) $\log_3 x + \log_3(x-24) \geq 4$;
 3) $\lg \frac{9-2x}{x+2} < 0$; 4) $\lg \frac{7-2x}{x+4} \leq 0$;
 5) $\log_{0.1} \frac{x+4}{x-9} \geq 0$; 6) $\log_{0.2} \frac{x+2}{x+9} \leq 0$.

230. 1) $\log_8 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{8}} \left(1 - \frac{x}{6}\right) < 1$;
 2) $\log_3 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{4}\right) > 1$;
 3) $(x+4)(8-x)\lg(x-1) < 0$;
 4) $(x+8)(6-x)\log_{0.1}(x-1) > 0$.

II

Решите уравнение (231—235).

231. 1) $27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 2^{3x} = 0$;
 2) $8^x - 2 \cdot 20^x + 3 \cdot 50^x - 6 \cdot 5^{3x} = 0$;
 3) $7^x + 24^x = 25^x$; 4) $12^x + 5^x = 13^x$.
 232. 1) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$; 2) $5^{-x} \cdot 8^{\frac{x}{x-1}} = 100$;
 3) $x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}$; 4) $x^{2\log_{16} x} = \frac{64}{\sqrt{x}}$.
 233. 1) $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1) = 2$; 2) $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) = 2$;
 3) $\log_3(5x+1) + \log_{5x+1} 3 = 4,25$;
 4) $\log_4(3x+1) + \log_{3x+1} 4 = 3\frac{1}{3}$.
 234. 1) $\log_{2009} \sqrt{16-5x} = \log_{2009}(2x-5)$;
 2) $\log_{2008} \sqrt{11x-18} = \log_{2008}(2x-9)$.
 235. 1) $\log_{\sin(2\pi-x)}(\cos^2 x + 0,5\sin 2x + 1) = 0$;
 2) $\log_{\cos(2\pi-x)}(\cos 2x + \sin x) = 0$.

236. 1) При каких значениях a уравнение $4^x - (a+1) \cdot 2^x + 2a - 2 = 0$ имеет ровно один корень?
 2) При каких значениях a уравнение $4^{(a-1)x^2+2(a+3)x+a} = \frac{1}{16}$ имеет единственный корень?

237. Решите уравнение относительно x :

- 1) $\lg(x-3) = \lg(2x+a)$;
 2) $\log_{0.25}(x^2 - 7x - a) = \log_{0.5}(x+3)$.

Решите систему уравнений (238—239).

- 238*. 1) $\begin{cases} 0,5\log_x y + 2\log_y x = 2, \\ 5\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2,5, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$
 239*. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(y-x) = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

Решите неравенство (240—242).

240. 1) $\frac{(\log_2 5)^x - (\log_2 5)^2}{(\log_2 5)^{-x} + x \log_2 5} > 0$; 2) $\frac{(\log_3 2)^x - (\log_3 2)^2}{(\log_3 2)^{-x} + x \log_3 2} > 0$.
 241. 1) $(2 + \sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 < 0$;
 2) $(2 + \sqrt{5})^{x-1} > (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.
 242*. 1) $|3^{9x^2-2} - 6| > 3$; 2) $|2^{4x^2-5} - 9| < 7$.

12. Производная

I

243. Найдите производную функции f :

- 1) $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x - 6$;
 2) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x + 45$;
 3) $f(x) = (x-2)\left(x^2 + 5x - \frac{25}{6}\right)$;
 4) $f(x) = (x+1)\left(x^2 - 4x + \frac{7}{3}\right)$;
 5) $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - x\sqrt{5} + 2}$; 6) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2 + x\sqrt{2} - 1}$.

244. Тело движется по закону $s(t)$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). Найдите скорость движения в момент времени $t = 4$ с, если:

$$1) s(t) = 2t^3 - 6t^2 + t + 3; \quad 2) s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t - 4.$$

245. Движение точки происходит по закону $s(t) = t^2 - 2t - 5$. В какой момент времени скорость движения равна:

$$1) 12; \quad 2) 0?$$

246. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t)$ и $s_2(t)$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени их скорости равны, если:

$$1) s_1(t) = 7,5t^2 - 8t - 7 \text{ и } s_2(t) = 2,5t^2 + 2t - 9;$$

$$2) s_1(t) = 12,5t^2 - 10t \text{ и } s_2(t) = 4,5t^2 + 6t + 11?$$

247. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ в точке с абсциссой x_0 , равной: $-2; -1; 2; 3$.

248. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ в точке графика $(x_0; y_0)$, если:

$$1) x_0 = 4; \quad 2) x_0 = -2;$$

$$3) y_0 = -5; \quad 4) y_0 = 1.$$

249. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$ и ее точки экстремума, если:

$$1) f(x) = 3x^5 - 5x^3; \quad 2) f(x) = 2x^4 - x^3;$$

$$3) f(x) = x^{59} - 59x + 0,15; \quad 4) f(x) = x^{93} - 93x - 7,65;$$

$$5) f(x) = x^2(2x-1) - 9; \quad 6) f(x) = x^2(2x-3) - 7.$$

250. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $I = [0,1; 1]$, если:

$$1) f(x) = \frac{16x - 4x^2 - 3}{5x^2}; \quad 2) f(x) = \frac{18x - 2x^2 - 3}{5x^2}.$$

II

251. В какой точке касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$, наклонена к оси абсцисс под углом α :

$$1) f(x) = -2x^3 - 12x^2 - 23x - 8, \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$2) f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 37x - 2, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}?$$

252. Касательная к кривой $y = g(x)$ параллельна прямой $y = f(x)$. Найдите координаты точки касания и напишите уравнение этой касательной, если:

$$1) f(x) = -5x \text{ и } g(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4;$$

$$2) f(x) = 6x \text{ и } g(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 9.$$

253. Найдите угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку P , если:

$$1) f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 0,5, \quad P(1; 2);$$

$$2) f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6, \quad P(2; 4).$$

254. Прямоугольный участок земли площадью 8 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина забора была наименьшей, если участок огораживают:

$$1) \text{ с трех сторон; } \quad 2) \text{ со всех сторон?}$$

255. 1) Число 28 разложили на 2 слагаемых так, чтобы сумма кубов была наименьшей. Найдите эти числа.
2) Число 49 представьте в виде произведения двух положительных сомножителей так, чтобы сумма их была наименьшей. Найдите эти числа.

256. При каких значениях a функция f имеет единственную критическую точку:

$$1) f(x) = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5;$$

$$2) f(x) = x^3 + 3ax^2 + 75x - 13?$$

257. 1) При каких значениях a функция $f(x) = 2ax^3 + 5ax$ возрастает на области определения?

$$2) \text{ При каких значениях } a \text{ функция } f(x) = 8ax^5 + 3ax \text{ убывает на области определения?}$$

13. Функции

I

258. Укажите область определения функции f :

- 1) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$;
 3) $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x}$;
 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$.

259. Укажите область определения функции f :

- 1) $f(x) = \lg(53 - 3x)$; 2) $f(x) = \lg^2(27 + 4x)$;
 3) $f(x) = \lg^3(-3x - 15)$; 4) $f(x) = \log_2(4x - 4 - x^2)$;
 5) $f(x) = \frac{1}{\lg(36 - 5x)}$; 6) $f(x) = \lg \lg x$.

260. Укажите область определения функции f :

- 1) $f(x) = 2^{\sqrt{16-8x}}$; 2) $f(x) = 2^{-\sqrt{25x-4}}$;
 3) $f(x) = (13 - x)^{-0.5}$; 4) $f(x) = (2x + 21)^{0.5}$.

261. Найдите координаты вершины параболы:

- 1) $y = 5(x - 8)^2 + 2$; 2) $y = -2(x + 3)^2 - 5$;
 3) $y = x^2 - x - 1$; 4) $y = -x^2 + 2x + 3$.

262. Докажите, что число $\frac{3\pi}{2}$ является периодом функции f :

- 1) $f(x) = \sin\left(\frac{4x}{3} - 2\right)$; 2) $f(x) = \cos \frac{4x+15}{3}$.

263. Докажите, что число π является периодом функции f :

- 1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \log_2 \frac{1}{32}$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \lg \sqrt[5]{100}$.

264. Докажите, что функция f является четной:

- 1) $f(x) = x^2 + \cos 5x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 4x + x \sin 2x$;
 3) $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2} + 6 + \frac{1}{x^4} + \lg x^6$.

265. Докажите, что функция f является нечетной:

- 1) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} 2x$; 2) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x \cos 6x$;
 3) $f(x) = x^3 \lg(x^2 + 16)$; 4) $f(x) = \sin x(1 - \cos x)$.

266. Укажите множество значений функции, заданной формулой $y = f(x)$, если:

- 1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; 2) $f(x) = x - |x|$;
 3) $f(x) = |x| + 4$; 4) $f(x) = \sqrt{25 - |x - 6|}$.

267. Укажите множество значений функции f :

- 1) $f(x) = x^2 - 12x + 29$; 2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$;
 3) $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x - 3}$; 4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$;
 5) $f(x) = -\pi^x + 2$; 6) $f(x) = 0,1^x - \sqrt{3^2 + 4^2}$.

268. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции, заданной формулой:

- 1) $f(x) = 7 - x^2$; 2) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$;
 3) $f(x) = 9 - |x|$; 4) $f(x) = |10 - x|$.

269. Укажите промежутки, на которых принимает положительные (отрицательные) значения функция, заданная формулой:

- 1) $f(x) = 0,25x - 5$; 2) $f(x) = 12 - 0,3x$;
 3) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 5$; 4) $f(x) = -\frac{4}{6-x} - 3$;
 5) $f(x) = -5x^2 + 13x + 6$; 6) $f(x) = 3x^2 - 13x + 12$;
 7) $f(x) = \log_{0.2}(x - 5) + 2$; 8) $f(x) = \log_3(x + 20) - 3$;
 9) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{6}} - 6$; 10) $f(x) = 4^{\frac{3x}{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

270. Докажите, что на промежутке $(0; +\infty)$ является убывающей функция:

- 1) $y = -4x^2$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = 2 - 3x$;
 4) $y = \frac{13}{x}$; 5) $y = -|x|$; 6) $y = 1 - x^3$.

271. При каких значениях x график функции $y = 2x^2 - 10x + 9$ лежит не ниже графика функции $y = x - 3$?

272. При каких значениях p графику функции $y = 3(x + p)^2 - 2$ принадлежит точка A :

- 1) $A(-3; 5)$; 2) $A(-4; -4)$?

II

273. Известно, что функция задана формулой $y = f(x)$, где:

- 1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 4 - x$; 3) $f(x) = \frac{2}{x}$;
 4) $f(x) = -\frac{4}{x}$; 5) $f(x) = x^2$; 6) $f(x) = x^3$;
 7) $f(x) = \sqrt{x}$; 8) $f(x) = |x|$; 9) $f(x) = 2^x$;
 10) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 11) $f(x) = \log_2 x$; 12) $f(x) = \log_{0,5} x$.

Изобразите график функции, заданной формулой:

- а) $y = f(x - 1) + 2$; б) $y = f(2x - 2) - 1$;
 в) $y = 3f(x - 2) + 2$; г) $y = -3f(x - 2) - 2$.

274. Известно, что функция задана формулой $y = f(x)$, где:

- 1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \cos x$;
 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Изобразите график функции, заданной формулой:

- а) $y = 2f(x)$; б) $y = 2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
 в) $y = 2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$; г) $y = -2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$.

275. Укажите область определения функции:

- 1) $f(x) = \lg(2x + 12) - \sqrt{-2x - 10}$;
 2) $f(x) = \lg(4x + 12) + x\sqrt{-x - 1}$;
 3) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{x+1}{\lg(2+x)}$; 4) $f(x) = \frac{\lg(x-1)}{\sqrt{3,5-x}} - \sin x$.

276. Изобразите график функции $y = ax^2 + bx - 4$, если корнями уравнения $ax^2 + bx - 4 = 0$ являются числа 1 и 4.

277. Изобразите график функции $y = ax^2 + bx + c$, если этому графику принадлежат точки $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(-2; 15)$.

278. Изобразите график функции $y = x^2 - 8x + a$, если ее наименьшее значение равно 2.

279. Изобразите график функции $y = x^2 + ax + a + 2$, если корни уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ относятся как 1 : 2.

280. Изобразите график функции $y = x^2 - 2x + c$, если корни уравнения $x^2 - 2x + c = 0$ удовлетворяют равенству $7x_2 - 4x_1 = 47$ и $x_1 < x_2$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. 1) -24; 3) 152.

1.2. 2) Больше; 4) меньше; 6) меньше; 8) меньше.

1.3. 1) 6^8 ; 3) $(-5)^{21}$; 5) 2^{10n+4} .

1.4. 2) a^{10} ; 4) m^{22} ; 6) $(6t)^{14}$.

1.5. 1) Например, $2^3 \cdot 2^{13}$; 3) например, $a^2 \cdot a^3$; 5) например, $4^2 \cdot 4^{b+1}$; 7) например, $13^a \cdot 13^{2a}$; 9) например, $(7p)^9 \cdot (7p)^{10}$; 11) например, $p^8 \cdot p^{12}$.

1.6. 2) 3^3 ; 4) x^8 ; 6) a^4 ; 8) 17^{2n-1} ; 10) $(-0,8)^{t-6}$.

1.7. 1) Например, $2^{20} : 2^8$; 3) например, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{17} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 5) например, $a^{t+3} : a^3$;
 7) например, $\left(\frac{2}{7}b\right)^7 : \left(\frac{2}{7}b\right)^4$.

1.8. 2) 5^6 ; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-10}$; 6) 5^{16} ; 8) $(-3)^{4p}$.

1.9. 1) Да.

1.10. 2) $\frac{y^5}{32}$; 4) $-512a^3$; 6) $1000x^6y^{15}$.

1.11. 1) $\frac{x^4}{y^4}$; 3) $\frac{x^4}{y^6}$; 5) $\frac{a^4b^{14}}{25c^8}$.

1.12. 2) $\frac{1}{6^5}$; 4) $\frac{1}{(-8)^{13}}$; 6) $\frac{1}{y^{12}}$; 8) $\frac{1}{(4y)^{16}}$.

1.13. 1) $\frac{1}{8}$; 3) 16; 5) $-\frac{1}{64}$; 7) $\frac{1}{15}$; 9) 1; 11) 1.

1.14. 2) 21^{-12} ; 4) $(-a)^{-27}$; 6) 19^{-1} ; 8) 2^{-6} .

1.15. 1) $4x^6y^{16}$; 3) $\frac{4}{5}a^3y^2$.

1.16. 2) $-4^{k-6}b^{8-2k}c^{2k-3}$; 4) $\frac{1}{8}x^6y^{18}$.

1.17. 1) -2048.

1.18. 2) $\frac{67}{131}$.

1.19. 1) Больше; 3) больше; 5) больше; 7) меньше.

1.20. 2) Да; 4) нет; 6) да.

1.21. 1) Не обязательно; 3) не обязательно.

1.22. 2) Не обязательно; 4) да; 6) верно, если $m = n = 1$.

1.23. 1) 0,05.

1.25. 2) Нет.

1.26. 1) Да; 3) нет.

1.27. 2) 7; 4) 1; 6) 0,5; 8) 1,1; 10) $\frac{12}{17}$; 12) $\frac{9}{16}$.

1.28. 1) 1; 3) 7) 5) $\frac{1}{3}$; 7) 0,1.

1.29. 2) 1; 4) 0,2; 6) 0,8; 8) 0,6.

- 1.30. 1) 3; 4; 5; 7; 9; 10; 3) 3; 4; -5; 0,2; 0,06; -100; 5) 2; 2; 3; 0,5; 10; 0,1.
 1.31. 1) -1; 4) -4; 6) -7; 8) -5.
 1.32. 1) -3; 3) -30; 5) -6.
 1.33. 2) $9\frac{1}{3}$.
 1.34. 1) 25; 3) 2,25; 5) $\frac{125}{216}$.
 1.35. 2) 625; 4) 6; 6) 12.
 1.36. 1) 10; 3) 12; 5) -3; 7) 1024; 9) -25; 11) -1024.
 1.37. 2) 10; 4) 4; 6) 0; 8) -2.
 1.38. 1) 5; 3) 1; 5) 1; 7) 0.
 1.39. 2) -1; 4) 41; 6) -4.
 1.40. 1) 0,4; 3) 11.
 1.41. 2) 9; 4) -4.
 1.42. 1) 1; 3) $-7a^3b^3$.
 1.43. 2) [4,5; +∞); 4) [0; 2]; 6) \mathbb{R} ; 8) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
 1.44. 1) (0,25; +∞); 3) (1,8; +∞); 5) $x \neq 1$; 7) $(-\infty; \frac{11}{17})$.
 1.45. 2) 4 мм; 4) 60 см.
 1.46. 1) $\pm 0,7$; 3) 0,2; 5) -40; 7) $\pm 0,5$.
 1.47. 2) -0,5; 4) -2; 6) 0.
 1.48. 1) $\pm\sqrt{11}$; 3) $\pm\sqrt[8]{27}$; 5) $\sqrt[3]{38}$; 7) $-15\sqrt{6}$; 9) $-13\sqrt[3]{13}$.
 1.49. 2) $\pm 0,14$; 4) ± 2 ; 6) \emptyset ; 8) 0; 10) $\pm\sqrt{3}$.
 1.50. 1) -0,2; 3) $\pm 0,1$; 5) -2.
 1.51. 2) $\sqrt[3]{30 + \sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[3]{5 - \sqrt{5}}$.
 1.52. 1) -3; 1; 3) 1.
 1.53. 2) ± 2 ; 4) -1; 2; 6) $\pm\sqrt{3}$.
 1.54. 1) [0; +∞); 3) \mathbb{R} ; 5) [1; +∞); 7) $x \neq 0$.
 1.55. 2) -y; 4) y; 6) $\frac{h}{4}$; 8) h.
 1.56. 1) a; 3) 2t; 5) -n.
 1.57. 2) a; 4) -b.
 1.58. 1) $|a|$; 3) $\frac{|a|}{2}$; 5) $|a|$; 7) $|a - b|$.
 1.59. 2) -23, -7, $-3\frac{2}{3}$, 2, $-3\frac{2}{3}$, -7, -23; 4) -26, -10, $-6\frac{2}{3}$, -1, $4\frac{2}{3}$, 8, 24.
 1.60. 1) -1; 3) 11.
 1.61. 2) -80.
 1.62. 1) $|a + x|$; 3) $|m - 3|$.
 1.63. 2) a) $x - 22$; б) $2 - x$.
 1.64. 1) Да.

- 1.65. 2) $\pm 1,5$; 4) 4; 6) \emptyset ; 8) \emptyset .
 1.66. 1) 6; 3) 0,2; 5) $\sqrt{2}$; 7) $(\frac{2}{3})^8$.
 1.67. 2) $\sqrt{|a|}$; 4) $\sqrt[3]{n}$; 6) $\sqrt{3xy^2}$; 8) $\frac{3a^3b^3}{2m}$.
 1.68. 1) $\sqrt{\sqrt{7} - 2}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$; 5) $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.
 1.69. 2) 81; 4) 6,25; 6) 0, 4096; 8) $\frac{1}{81}$.
 1.70. 1) $\sqrt[6]{6}$; 3) $\sqrt[10]{10}$; 5) $\sqrt[5]{5}$; 7) $\sqrt[14]{7}$; 9) $\sqrt[18]{3}$; 11) $\sqrt[16]{2}$.
 1.71. 2) 3; 4) 2.
 1.72. 1) Больше; 3) равны; 5) меньше.
 1.73. 2) Увеличить в $\sqrt[3]{3}$ раз; 4) увеличить в $\sqrt[3]{9}$ раз.
 1.74. 1) -32; 3) 81; 5) -1.
 1.75. 2) 0; 4) 1; 6) 1024.
 1.76. 1) 10; 3) 3; 5) -18; 7) 60; 9) 12.
 1.77. 2) 4; 4) 3.
 1.78. 1) -47,5; 3) 0.
 1.79. 2) -0,2; 4) 2; 6) 4.
 1.80. 1) -1,5; 3) 24.
 1.81. 2) $\frac{a}{x} \sqrt[9]{\frac{800a^8}{x^8}}$; 4) $\frac{a^5b}{2} \sqrt[5]{a^4b^4}$; 6) $-6\sqrt[3]{9m^5n^2}$; 8) $a^7b^5\sqrt[7]{b^2}$.
 1.82. 1) $\sqrt[3]{3a}$; 3) $-2a$; 5) $-1,5a$.
 1.83. 2) $m^2n^2 - n$; 4) $\sqrt[3]{b(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b})^3}$.
 1.84. 1) $a\sqrt[3]{a}$; 3) $64\sqrt[3]{4}$; 5) $2x\sqrt[3]{2x}$; 7) $2a^5x^{10}\sqrt[3]{2ax^2}$.
 1.85. 2) $\sqrt{2}$.
 1.86. 1) $5\sqrt[3]{3}$; 3) $-3\sqrt[3]{2}$; 5) $-2\sqrt[5]{3}$; 7) $-3\sqrt[5]{4}$.
 1.87. 2) $2a^2y^2\sqrt[3]{2a^2x^2}$; 4) $2ax\sqrt[3]{2a^2x}$; 6) $-\frac{3xy}{4a^2}\sqrt[5]{y^2}$; 8) $\frac{\sqrt[9]{b-ax^4}}{x^2}$.
 1.88. 1) $\sqrt[3]{24ax^4}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{27n^4}{32m^2}}$; 7) $\sqrt[3]{1-a}$.
 1.89. 2) $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt[7]{64}}{2}$; 6) $3\sqrt[3]{6}$; 8) $8\sqrt[5]{3}$.
 1.90. 1) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$; 3) $\sqrt[3]{(t-1)^2 \cdot (t+1)}$; 5) $\sqrt[3]{2-x}$.
 1.91. 2) $\frac{k(\sqrt[3]{k} + 2)}{k^2 + 8}$; 4) $\frac{m(\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 25)}{m + 125}$; 6) $2(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4})$; 8) $\frac{3 - \sqrt[3]{3}}{216}$.
 1.92. 1) -16, 25; 3) $\frac{2}{3}$; 5) \emptyset ; 7) -8; -6.

- 1.93. 2) -8; 4) -31; 6) -1,75; 1.
 1.94. 1) 18; 3) 45; 5) 10; 7) 6.
 1.95. 2) 1080; 4) 99; 6) 1.
 1.96. 1) 27; 3) 125; 5) $|a|$; 7) $6|b|$; 9) $a^2|b^3|$; 11) $3x^2|y|^3$.
 1.97. 2) $1,2a^2|b|^{5m}$; 4) $0,8|a|^3b^{4m}$.
 1.98. 1) $2\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{7}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$; 7) $3\sqrt[6]{2}$; 9) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$; 11) $\frac{11}{2}\sqrt[11]{\frac{11}{30}}$.
 1.99. 2) $|x|^3\sqrt{a}$; 4) $\frac{4}{x^2\sqrt[4]{x}}$; 6) $0,75x^2y^2\sqrt[4]{2x}$; 8) $2c|c|m^4\sqrt[4]{c^2m}$.
 1.100. 1) $\sqrt{20}$; 3) $\sqrt[4]{8}$; 5) $\sqrt[4]{0,5a^4}$; 7) $\sqrt[10]{2n^{15}}$.
 1.101. 2) $t^2\sqrt{-t^3}$; 4) $m^2|n|^5\sqrt{m}$; 6) $8mn\sqrt{n}$; 8) $-3mn\sqrt[4]{m}$; 10) $mn\sqrt{mn}$;
 12) $-mn\sqrt{t}$.
 1.102. 1) $-\sqrt{5m^2}$; 3) $\sqrt[4]{m^5-2m^4}$; 5) $-\sqrt[4]{5m^4}$; 7) $\sqrt[4]{(m+4)^3}$.
 1.103. 2) 3; 4) 1,3; 6) 1,75; 8) $\frac{9}{11}$.
 1.104. 1) $\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{m^2}{n}}$; 3) $\frac{a}{|b|}\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$.
 1.105. 2) 2; 4) $\sqrt{5}-1$; 6) $4-2\sqrt{3}$.
 1.106. 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{512}}{2}$; 5) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 7) $0,6\sqrt[4]{2}$; 9) $\frac{\sqrt[4]{9}}{7}$.
 1.107. 2) $t\sqrt[4]{a+b}$; 4) $(a-b)\sqrt[6]{a+b}$; 6) $\sqrt[4]{a-b}(a+b)(a^2+b^2)$.
 1.108. 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 3) $-\frac{3+5\sqrt{3}}{22}$; 5) $1+3\sqrt{15}$; 7) $243(\sqrt{7}+\sqrt{6})^4$;
 9) $2(2+\sqrt[3]{3})(4+\sqrt{3})$.
 1.109. 2) $\frac{36(\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)(2\sqrt{6}+1)}{23}$; 4) $\frac{168+\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{6}-\sqrt{3})(10+2\sqrt{42})}{168}$;
 6) $5(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$; 8) $\frac{\sqrt[4]{8}(\sqrt[4]{2}-1)}{2}$.
 1.110. 1) $t \leq 0$; 3) t — любое; 5) $t \leq 0$.
 1.111. 2) $k \leq \frac{2}{3}$; 4) $k \leq -4$.
 1.112. 1) -0,25; 3) \emptyset ; 5) 3,75; 7) -2; 0,75.
 1.113. 2) -8; 4) $\frac{\sqrt{17}+1}{2}$; 6) 8.
 1.114. 1) 15 625; 3) 9,5; 42.
 1.115. 2) 0; 4) 5; 6) -3.
 1.117. 2) Да; 4) да; 6) нет; 8) да.

- 1.118. 1) $1\frac{1}{3}$; 3) $-57\frac{1}{6}$; 5) $\frac{1}{4}$.
 1.119. 2) $1,5\sqrt{6}$; 4) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$.
 1.120. 1) 1; 3) 13,5; 5) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
 1.121. 2) 2; 4) -0,25.
 1.122. 1) $b_n = \frac{24}{5^{n-2}}$; 3) $b_n = 75 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
 1.123. 2) Да; 4) нет.
 1.124. 1) $\frac{13}{24}$.
 1.125. 2) $2\pi R^2$ — сумма площадей всех кругов; $4R^2$ — сумма площадей всех квадратов.
 1.126. 1) 8; 3) 4; 5) 6.
 1.127. 2) 0,(01); 4) 0,(0001); 6) 0,(000001).
 1.129. 1) 0,(7); 3) 0,(4); 5) 0,(5).
 1.130. 2) $3\frac{8}{33}$; 4) $31\frac{49}{90}$; 6) $9\frac{247}{1980}$; 8) $\frac{451}{999}$.
 1.131. 1) 0,(69); 3) 0,9(2).
 1.132. 2) 1,6; 4) 2,5.
 1.134. 1) $x^{\frac{5}{2}}$; 3) $b^{\frac{2}{3}}$; 5) $a^{-\frac{2}{3}}$; 7) $a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$; 9) $(a+b)^{-1}$; 11) $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$.
 1.135. 2) $2\sqrt[5]{a^{101}}$, $4\sqrt{a^7}$, $\sqrt[10]{a^{-3}}$, $\sqrt[5]{a^{-3}}$, $\sqrt[10]{(9a)^{-203}}$, $\sqrt{(5a)^{-3}}$;
 4) $\sqrt[10]{(c^2-d^2)^{47}}$, $\sqrt[5]{(c^2+d^2)^{27}}$, $\sqrt[10]{(c-d)^{-7}}$, $\sqrt[10]{(c^3-d^3)^{-9}}$,
 $-\sqrt[5]{(c+3d)^{-31}}$, $-\sqrt[10]{(c-2d)^{-73}}$.
 1.136. 1) 2, 512, 27, 32, -3, -625; 3) $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{9}$, 10; 5, -11 $\frac{1}{9}$, -2.
 1.137. 2) Нет; 4) да; 6) нет; 8) нет.
 1.138. 1) $1\frac{13}{15}$; 3) 0,072; 5) 4; 7) $\frac{1}{3}$.
 1.139. 2) $9\frac{1}{9}$; 4) 1; 6) 1000.
 1.140. 1) 5; 3) -52; 5) 6,4356.
 1.141. 2) $-1\frac{2}{3}$; 4) 8.
 1.142. 1) Да; 3) нет; 5) да; 7) да.
 1.143. 2) $[0; +\infty)$; 4) \mathbb{R} ; 6) $(0; +\infty)$; 8) \mathbb{R} ; 10) $a \neq 0$; 12) \mathbb{R} .
 1.144. 1) $[-1; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 5) $a \neq 10$; 7) $(-\infty; \frac{1}{3})$; 9) $(-\infty; \frac{1}{2})$; 11) $[3; +\infty)$.
 1.145. 2) $[-3; 3]$; 4) \mathbb{R} ; 6) $(-2; 5)$; 8) $(-5; 9)$; 10) $(-5; 3)$.

- 1.146. 1) $[6; +\infty)$; 3) $(-1; 5)$.
- 1.147. 2) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) \emptyset ; 8) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
10) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 1.148. 1) Меньше; 3) больше.
- 1.149. 2) $a^{-\frac{1}{6}}$; 4) $a^{\frac{16}{3}}$; 6) a^2 ; 8) a^3 .
- 1.150. 1) b^{-1} ; 3) $b^{-0.3}$; 5) $b^{\frac{7}{3}}$; 7) $b^{0.4}$; 9) $b^{\frac{3}{4}}$.
- 1.151. 2) $t^{\frac{8}{27}}$; 4) $t^{\frac{5}{3}}$; 6) t^{-1} .
- 1.152. 1) $t^{\frac{11}{3}}$; 3) t^5 .
- 1.153. 2) $a^{\frac{19}{6}} b^{\frac{27}{20}}$; 4) $a^{\frac{2}{15}} b^{\frac{1}{6}}$.
- 1.154. 1) b ; 3) b^{-1} .
- 1.155. 2) 2; 4) $5^{3.4}$; 6) 25; 8) 1; 10) $2^{1.4}$.
- 1.156. 1) 6; 3) $\frac{12}{7}$; 5) $\frac{6}{5}$.
- 1.157. 2) 32; 4) $\frac{1}{18}$; 6) 14; 8) 135; 10) $2^{2.3}$.
- 1.158. 1) $3 \cdot 2^{-3.5}$; 3) $\frac{25}{36}$.
- 1.159. 2) 9; 4) 2.
- 1.160. 1) $4x^{\frac{1}{3}} - x$; 3) $ab^{2.5} + a^{0.5}b^3$.
- 1.161. 2) $a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)$; 4) $a^{\frac{7}{9}}\left(1 - a^{\frac{2}{9}}\right)$; 6) $a^{\frac{1}{5}}\left(1 - a^{\frac{2}{5}}\right)$; 8) $a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{3}{5}} + a^{\frac{1}{5}} - 1\right)$.
- 1.162. 1) $a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}\right)$; 3) $3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$; 5) $8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\left(3a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$.
- 1.164. 2) $3^{-1} + 9^{-\frac{2}{3}} + 2 \cdot 3^{-\frac{7}{6}}$; 4) $m^5 + n^{-\frac{1}{2}} - 2m^{\frac{5}{2}}n^{-\frac{1}{4}}$;
6) $25d^{\frac{10}{3}} + 40d^{\frac{5}{3}}t^2 + 16t^3$.
- 1.165. 1) $a^2 - b$; 3) $a - c^{-2}$; 5) $16a^{\frac{4}{5}} - t^{-\frac{1}{2}}$.
- 1.166. 2) $6\frac{8}{9}$; 4) $\frac{1}{2}$.
- 1.167. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 11\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 11\right)$; 3) $\left(n - 13^{\frac{1}{2}}\right)\left(n + 13^{\frac{1}{2}}\right)$; 5) $\left(7^{\frac{1}{2}} - b^2\right)\left(7^{\frac{1}{2}} + b^2\right)$.
- 1.168. 2) $\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)$; 4) $\left(2 - n^{\frac{1}{4}}\right)\left(2 + n^{\frac{1}{4}}\right)$.

- 6) $\left(0, 1m^{\frac{1}{12}} - 0, 3n^{\frac{1}{4}}\right)\left(0, 1m^{\frac{1}{12}} + 0, 3n^{\frac{1}{4}}\right)$; 8) $\left(6^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{5}}\right)\left(6^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{5}}\right)$;
10) $\left(x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{8}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{8}}\right)$; 12) $\left(m^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{1}{10}}\right)\left(m^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{1}{10}}\right)$.
- 1.169. 1) $m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}$; 3) $a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{2}{5}}$; 5) $\frac{a^{\frac{1}{7}} + 5b^{\frac{2}{7}}}{2}$; 7) $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}$;
9) $3 - a^{\frac{1}{3}}$.
- 1.170. 2) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{a^{-0.25} - b^{-0.25}}{a^{-0.25} + b^{-0.25}}$; 6) $b^{0.25} - a^{0.25}$.
- 1.171. 1) $\left|a^{\frac{3}{4}}b^{-1} - 3b^{\frac{2}{3}}\right|$.
- 1.172. 2) $2n^{\frac{1}{4}}$; 4) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; 6) $-6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 8) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$.
- 1.173. 1) $2\sqrt[3]{a} + 1$; 3) $a^{\frac{2}{3}} - 1$.
- 1.174. 2) $\frac{1}{2\sqrt{a}(a-b)}$; 4) $\frac{4ab}{(a-b)^2}$.
- 1.175. 1) Меньше; 3) меньше; 5) меньше; 7) больше; 9) меньше.
- 1.176. 2) Меньше; 4) меньше; 6) больше; 8) больше; 10) меньше.
- 1.177. 1) Меньше; 3) меньше. 1.178. 2) Меньше; 4) меньше.
- 1.179. 1) Больше; 3) меньше. 1.180. 2) Больше; 4) больше.
- 1.181. 1) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0.2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0.1}$; 3) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$, $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{18}}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; 5) $(\sqrt{5} - 1)^2$,
 $\sqrt{0.3}$, 0,3.
- 1.182. 2) Больше; 4) больше; 6) меньше; 8) больше; 10) больше; 12) меньше.
- 1.183. 1) Больше; 3) больше; 5) больше; 7) меньше; 9) больше.
- 1.184. 2) Меньше; 4) меньше; 6) больше; 8) больше; 10) больше.
- 1.185. 1) $a > b$; 3) $a > b$; 5) $a > b$.
- 1.186. 2) $a > b$; 4) $a > b$; 6) $a < b$; 8) $a > b$.
- 1.187. 1) $m < 1$; 3) $m > 1$; 5) $m < 1$; 7) $m > 1$.
- 1.188. 2) $m > 1$; 4) $m > 1$; 6) $m < 1$.
- 1.189. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) да; 9) нет.
- 1.190. 2) Меньше; 4) меньше; 6) равны.
- 1.191. 1) Меньше; 3) меньше; 5) больше.
- 1.192. 2) 64; 4) 4; 6) 2.
- 1.193. 1) 4; 3) 5.
- 1.194. 2) $x \neq -2$; 4) $(-\infty; -3) \cup \left[\frac{6}{13}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; -4] \cup [-2; 2]$; 8) $(0; 1]$.

1.195. 1) 2; 3) 0,5; 5) $-\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{4}$; 9) $-\frac{1}{3}$.

1.196. 2) $[0; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$.

1.197. 1) 0; $-4\frac{17}{27}$; 3) 125; $-4\frac{17}{24}$.

1.198. 2) (0; 0), (1; 1); 4) \emptyset .

1.206. К 1.201. 1) а) $[0; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; г) (0; 0); 3) а) \mathbf{R} ; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \neq 0$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 0); 5) а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 0).

К 1.202. 2) а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 0); 4) а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 0); 6) а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 0).

К 1.203. 1) а) $[0; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$; в) y не принимает отрицательные значения; г) (0; 2); 3) а) $[0; +\infty)$; б) $[-3; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (\sqrt[15]{9}; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (0; \sqrt[15]{9})$; г) (0; -3), $(\sqrt[15]{9}; 0)$; 5) а) \mathbf{R} ; б) \mathbf{R} ; в) $y > 0$ при $x \in (\sqrt[9]{2}; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; \sqrt[9]{2})$; г) (0; -2), $(\sqrt[9]{2}; 0)$.

К 1.204. 2) а) $[-1; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (-1; +\infty)$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 1), $(-1; 0)$; 4) а) \mathbf{R} ; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (2; +\infty)$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 2^{26}), $(2; 0)$; 6) а) $[3; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (3; +\infty)$; г) (3; 0).

К 1.205. 1) а) \mathbf{R} ; б) $[-1; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (-1; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-2; -1)$; г) $(-3; 0)$, $(0; 2^{12} - 1)$; 3) а) $[-1; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in [-1; +\infty)$, y не принимает отрицательные значения; г) (0; 3); 5) а) $[-3; +\infty)$; б) $[-3; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (3^{\frac{7}{29}} - 3; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-3; 3^{\frac{7}{29}} - 3)$; г) $(0; 3^{\frac{29}{7}} - 3)$, $(3^{\frac{29}{7}} - 3; 0)$.

1.207. 2) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 0]$; 4) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 0]$; 6) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -1]$; 8) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[2; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -2]$; 10) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [-2; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[3; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 3]$; 12) $D(y) = \mathbf{R}$, $E(y) = [-4; +\infty)$, y возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

1.208. 1) 3; 4) 3; 5) \emptyset .

1.209. 2) 4; 4) \emptyset ; 6) 4; 8) 10; 10) 2.

1.210. 1) 19; 3) \emptyset ; 5) 0; 2) 7) \emptyset .

1.211. 2) $[0; 9]$; 4) $(2; +\infty)$; 6) $(4; +\infty)$.

1.212. 1) Больше; 3) больше; 5) равны.

1.213. 2) Меньше; 4) больше; 6) меньше; 8) больше.

1.214. 1) Больше; 3) меньше; 5) больше; 7) больше.

1.215. 2) $\frac{1}{1024}$; 4) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{2}$.

1.216. 1) -4; 3) 2.

1.217. 2) $x \neq -0,2$; 4) $(-\infty; 0) \cup (2; 5) \cup (8; +\infty)$; 6) $(4; +\infty)$; 8) $(-2; -1) \cup (0; 5)$.

1.218. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{1}{3}$; 7) $-\frac{1}{4}$.

1.219. 2) $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 6) $(0; +\infty)$.

1.220. 1) 3; 63,875; 3) -7,9936; 39999,999.

1.221. 2) (1; 1); 4) \emptyset .

1.229. К 1.224. 1) а) $x \neq 0$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \neq 0$; г) нет; 3) а) $x \neq 0$; б) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; г) нет; 5) а) $x > 0$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$; г) нет.

К 1.225. 2) а) $x > 0$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$; г) нет; 4) а) $x > 0$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$; г) нет; 6) а) \mathbf{R} ; б) \mathbf{R} ; в) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; г) (0; 0).

К 1.226. 1) а) $x \neq 0$; б) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (2^{-\frac{1}{9}}; +\infty)$, $y < 0$, при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2^{-\frac{1}{9}})$; г) $(2^{-\frac{1}{9}}; 0)$; 3) а) $x \neq 0$; б) $(3; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \neq 0$; г) нет; 5) а) $x > 0$; б) $(2; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 0$; г) нет.

К 1.227. 2) $x > 1$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 1$; г) нет; 4) а) $x \neq -2$; б) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > -2$, $y < 0$ при $x < -2$; г) $(0; 2^{-31})$; 6) а) $x \neq -3$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \neq -3$; г) $(0; 3^{-24})$.

К 1.228. 1) а) $x \neq 2$; б) $(0; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \neq 2$; г) $(0; 2^{-102})$; 3) а) $x > 1$; б) $(-3; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 1 + 3^{-\frac{3}{2}}$, $y < 0$ при $x \in (1; 1 + 3^{-\frac{3}{2}})$; г) $(1 + 3^{-\frac{3}{2}}; 0)$; 5) а) $x > 3$; б) $(-2; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x > 3 + 2^{\frac{7}{2}}$, $y < 0$ при $x \in (3; 3 + 2^{\frac{7}{2}})$; г) $(3 + 2^{\frac{7}{2}}; 0)$.

1.230. 2) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$; 4) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$; 6) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-1; +\infty)$,

убывает на $(-\infty; -1)$; 8) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$; 10) $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, $E(y) = (-2; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-\infty; 3)$, убывает на $(3; +\infty)$; 12) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, $E(y) = (-4; +\infty)$, y возрастает на промежутке $(-\infty; -2)$, убывает на $(-2; +\infty)$.

1.231. 1) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{2}$; 5) -3 ; 7) 3 ; 9) 2 .

1.232. 2) $x > \frac{1}{5}$; 4) $0 < x < \frac{1}{25}$; 6) $0 < x < \frac{1}{27}$.

1.233. 1) \emptyset ; 3) \emptyset ; 5) \emptyset ; 7) \emptyset .

1.234. 2) 6 ; 4) -5 ; 3) 6 ; -3 ; 8.

1.235. 1) 2 ; 3) 9 ; 5) -21 ; 7) 4 .

1.236. 2) $-\frac{2}{5}$; 1) 4 ; -8 ; -6 .

1.237. 1) 1 ; 3) -2 ; 2) 5 ; 3 .

1.238. 2) 10 ; 4) 2 ; 3) 6 ; -8 .

1.239. 1) 2 ; 3) -2 ; 5) 3 ; 7) 3 .

1.240. 2) \emptyset ; 4) 0 .

1.241. 1) $0,25$; 3) 2 .

1.242. 2) 6 ; 4) $\frac{2}{3}$; 6) 17 .

1.243. 1) 3 ; 3) -1 ; 2) 5 ; 2 ; 5 ; 8 .

1.244. 2) -6 ; 9) 4 ; -8 ; 5) 6 ; -5 ; 5 .

1.245. 1) -1 ; 2) 4 ; 3) -6 ; 7.

1.246. 2) 16 ; 4) 1 ; 6) 1 .

1.247. 1) $a \geq -4$; 3) $a \geq 2$; 5) $a \leq 1,25$; 7) $a \leq 4$.

1.249. 2) 2 ; 4) 13 ; 6) 2 .

1.250. 1) 2 ; 3) 3 ; 5) 3 ; 7) 2 .

1.251. 2) $-\frac{5}{3}$; 4) 4 ; -5 ; -4 ; 0 ; 2) 6 ; -5 ; $\frac{2}{3}$.

1.252. 1) 1 ; 3) 3 .

1.253. 2) 3 ; 4) 7 ; 12 ; 6) -4 ; -1 .

1.254. 1) 1 .

1.255. 2) -2 ; 4) 3 ; 6) 8 .

1.256. 1) \emptyset ; 3) 4 .

1.257. 2) \emptyset ; 4) \emptyset .

1.258. 2) $x > 7$; 4) \emptyset ; 6) $x \geq -2$; 8) 2 ; $-2 \leq x < 7$.

1.259. 2) \emptyset ; 4) $\pm 2\sqrt{2}$; 6) \emptyset ; 8) $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$; 10) 0 .

1.260. 2) $(-1; 0)$; 4) $[-4; 1]$.

1.261. 1) $0 \leq x < 1$; 3) $0 \leq x < 25$.

1.262. 1) $0 \leq x < 9$; 3) $0 \leq x < 6$; 5) $0 \leq x < 4$; $x \geq 100$; 7) $0 \leq x < 7$.

1.263. 2) $[0; 2]$; 4) $x = 0$, $x \geq 2$; 6) $(0; 2)$; 8) $(2; +\infty)$; 10) 2 .

1.265. 1) 4 ; 3) $[3; 12]$; 5) $[1; 2]$; 7) $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$.

1.266. 1) $x \geq 1$; 3) $-2 < x \leq 1$; 5) \emptyset ; 7) $2 \leq x \leq 5$.

1.267. 1) \emptyset ; 4) $[-6; 3]$; 6) $(4; 5]$; 8) $x < \frac{2}{11}$.

Глава 2

2.1. 2) $3,4^{2,2}$; $3,4^{\sqrt{5}}$; $3,4^{2,7}$; $3,4^3$; 4) $0,2^{3,9}$; $0,2^{\sqrt{3}}$; $0,2^{1,7}$; $0,2^{0,5}$; 6) $25^{-\frac{\sqrt{19}}{6}}$;

$(\frac{1}{125})^{\sqrt{0,1}}$; $(\sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; 8) $(\frac{1}{3})^{\frac{3}{3}}$; $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$; $(\frac{1}{3})^{\frac{5}{5}}$; $(\frac{1}{3})^{\frac{7}{7}}$.

2.2. 1) Например, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$; $3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$; $3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$; 3) напри-

мер, $0,1^2 < 0,1^{\frac{\pi}{3}} < 0,1$; $0,1^{1,1} < 0,1^{\frac{\pi}{3}} < 0,1$; $0,1^{1,05} < 0,1^{\frac{\pi}{3}} < 0,1^{1,04}$; 5) напри-

мер, $(\arcsin \frac{1}{2})^3 < (\arcsin \frac{1}{2})^{\sqrt{5}} < (\arcsin \frac{1}{2})^2$;

$(\arcsin \frac{1}{2})^{2,3} < (\arcsin \frac{1}{2})^{\sqrt{5}} < (\arcsin \frac{1}{2})^{2,2}$;

$(\arcsin \frac{1}{2})^{2,24} < (\arcsin \frac{1}{2})^{\sqrt{5}} < (\arcsin \frac{1}{2})^{2,23}$.

2.3. 1) Больше; 4) меньше; 6) меньше; 8) меньше.

2.4. 1) 3 ; 3) 4 ; 5) 6 ; 7) 8 .

2.5. 2) 3 ; 4) $0,5$; 6) $0,3$; 8) $0,13$; 10) 4 .

2.6. 1) $4^{-\frac{2\pi}{3}}$; 3) 1 .

2.7. 2) $\frac{2n^{\sqrt{3}}}{n^{\sqrt{3}} - m^{\sqrt{3}}}$; 4) 1 ; 6) $m^{2\sqrt{5}} - n^{2\sqrt{5}}$.

2.8. 1) $m^{\sqrt{6}} - n^{\sqrt{6}}$; 3) $m^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + n^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; 5) $1 - m^{2\sqrt{2}}$.

2.9. 2) 2 ; 4) $\frac{1}{1 - 2a^5}$; 6) $\frac{2(a^{\sqrt{10}} - b^{\sqrt{10}})}{a^{\sqrt{10}} + b^{\sqrt{10}}}$.

2.10. 1) Да; 3) нет; 5) нет; 7) да; 9) да.

2.11. 2) $0,5$; 4) $2,8$; 6) $0,6$; 8) $4,1$.

2.14. 1) 2 ; 3) 4 ; 5) 3 .

2.15. 2) 4 .

2.16. 1) 3 .

2.17. 2) $(-1; \frac{1}{3})$; 4) $(-3; \frac{1}{64})$.

2.18. 1) Да; 3) нет.

- 2.19. 2) Нет; 4) нет.
- 2.20. 1) Да; 3) нет.
- 2.21. 2) Больше; 4) больше; 6) больше; 8) больше; 10) меньше.
- 2.22. 1) Возрастающая; 3) убывающая; 5) возрастающая; 7) возрастающая; 9) возрастающая; 11) убывающая.
- 2.23. 1) а) 3; б) $[-2; 1]$; в) $(\frac{1}{9}; 3]$; г) $[-2; 1]$ — промежуток возрастания; д) $(0; 1)$; е) $\frac{1}{3}$; 3; ж) 3; $\frac{1}{9}$; 3) а) $\frac{1}{2}$; б) $[-2; 1]$; в) $[2; 4]$; г) $[-2; 1]$ — промежуток убывания; д) нет; е) 2; нет; ж) 4; 2.
- 2.24. 2) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; 8) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.
- 2.25. 1) \mathbf{R} ; 3) $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$; 7) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$; 9) $[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbf{Z}$.
- 2.26. 2) Ни наименьшее, ни наибольшее значения не существуют; 4) наименьшего значения нет, 1 — наибольшее значение.
- 2.27. 1) -2,5 — наименьшее значение, 10 — наибольшее значение; 3) 0,3 — наименьшее и наибольшее значения; 5) 11 — наименьшее и наибольшее значения; 7) 6 — наименьшее значение, 36 — наибольшее значение.
- 2.28. 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{6^9}}$ — наименьшее значение, наибольшего значения нет; 4) наименьшего значения нет; $\sqrt[4]{5^{49}}$ — наибольшее значение.
- 2.29. 1) \mathbf{R} ; 3) \mathbf{R} .
- 2.30. 2) $(-\infty; 0)$; 4) $(-\infty; 0)$; 6) $[0; +\infty)$.
- 2.39. 1) 3; 3) 4; 5) -3; 7) -0,5; 9) \emptyset .
- 2.40. 2) -1,6; 4) -1; 0; 6) -5; 5; 8) -2; 2; 8.
- 2.41. 1) 3; 3) 3,5; 5) -1,5; 7) 3; 9) \emptyset .
- 2.42. 2) 2,6; 4) -7; 6) 0; 3.
- 2.43. 1) 1; 3) 1; 5) 0.
- 2.44. 2) 2,5; 4) 9; 6) -1.
- 2.45. 1) -0,2; 3) -4; 5) 26,5; 7) 6.
- 2.46. 2) 2,5; 4) 6,5; 6) 2; 8) 45.
- 2.47. 1) -2; 4; 3) -2; 5.
- 2.48. 2) 5; 4) 35.
- 2.49. 1) 2; 3) 3; 5) 2.
- 2.50. 2) 1; 5; 4) ± 2 .
- 2.51. 1) 3; 3) 4; 5) 0; 7) 2.
- 2.52. 2) 2; 4) 2; 6) -5.

- 2.53. 1) 0; 3) 2; 5) 0; 1; 7) 1.
- 2.54. 2) -1; 1; 4) 3.
- 2.55. 1) 1; 3) 1; 5) 2.
- 2.56. 2) 2; 3) 2; 5) 0; 3; 7) -2; -1.
- 3.57. 2) 0; 4) 4.
- 2.58. 2) 6.
- 2.59. 1) 2.
- 2.60. 2) -2.
- 2.61. 1) 0; 4; 3) $\pm \frac{\sqrt{21}}{3}$; 5) -4; 0.
- 2.62. 2) -1; 4) -0,6.
- 2.63. 1) 1; 3) -3.
- 2.64. 2) $-\pi$.
- 2.65. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 2.66. 2) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 6) $(-1)^{n+1} \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.
- 2.67. 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbf{Z}$.
- 2.68. 2) 7.
- 2.69. 1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 2.70. 2) $[-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}] \cup \{7\}$; 4) $a > 0,8$.
- 2.71. 1) (4; 2); 3) (4; 1).
- 2.72. 2) $(-\infty; 2)$; 4) $(-\infty; 1)$; 6) $(-\infty; -0,5]$; 8) $[-1; +\infty)$.
- 2.73. 1) $(-0,5; +\infty)$; 3) $(\frac{2}{3}; +\infty)$; 5) $[\frac{1}{60}; +\infty)$; 7) $(-\infty; -3,5]$.
- 2.74. 2) $[-4; 4]$; 4) $(-2; 2)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 8) $[1; 2]$.
- 2.75. 1) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -7,5) \cup (-0,5; +\infty)$; 5) $[1; 2]$.
- 2.76. 2) $[-2; 0,2]$; 4) $(-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{6}; +\infty)$; 6) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
- 2.77. 1) $(-\infty; \frac{2}{3}]$; 3) $(-\infty; 3)$; 5) $[-2; 1) \cup [2; +\infty)$.
- 2.78. 2) $(-\infty; -2] \cup (0; 4]$; 4) $(-1; 0)$; 6) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; 8) $(-3; 0) \cup (1; +\infty)$.
- 2.79. 1) $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$; 3) \emptyset ; 5) $[-\frac{1}{3}; 2]$.
- 2.80. 2) $(2,5; +\infty)$; 4) $(1; 0)$.
- 2.81. 1) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4]$.
- 2.82. 2) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$; 4) $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbf{Z}$; 6) $(\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$; 8) $[\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$.

2.83. 1) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 5) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$;

7) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

2.84. 1) $(-\infty; 1)$; 3) $[1; +\infty)$; 5) $[9; +\infty)$; 7) $(-\infty; 5)$; 9) $[-1; 0) \cup [4; +\infty)$.

2.85. 2) $(0; 1)$; 4) $(-\infty; 2)$; 6) $[-1; +\infty)$; 8) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

2.86. 1) $(-2; 3)$; 3) $(-6; 8,8)$; 5) $(-1; 1)$; 7) $(0,5; 1,5)$.

2.87. 2) $(-\infty; -1)$; 4) $(-4; -3,5)$; 6) $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$.

2.88. 2) $[-\sqrt{10}; 0) \cup [\sqrt{10}; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$.

2.90. 1) $a \geq 4$.

2.91. 2) 4; 4) 1; 6) -1; 8) -4; 10) 0,5; 12) $-\frac{2}{7}$.

2.92. 1) $3 = \log_2 8$; 3) $3 = \lg 1000$; 5) $1 = \log_3 3$; 7) $2 = \log_{0,11} 0,0121$;

9) $-4 = \log_{\frac{1}{2}} 16$; 11) $-1 = \log_{\frac{13}{3}} \frac{13}{3}$.

2.93. 2) $0 = \log_5 1, -1 = \log_5 \frac{1}{5}, 1 = \log_5 5, -2 = \log_5 \frac{1}{25}, 2 = \log_5 25$;

$-0,3 = \log_5 5^{-0,3}, 0,3 = \log_5 5^{0,3}; -\sqrt{2} = \log_5 5^{-\sqrt{2}}, \sqrt{2} = \log_5 5^{\sqrt{2}};$

4) $0 = \log_{\frac{1}{6}} 1, -1 = \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}, 1 = \log_{\frac{1}{6}} 6, -2 = \log_{\frac{1}{6}} 36, 2 = \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36},$

$-0,3 = \log_{\frac{1}{6}} 6^{0,3}, 0,3 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{0,3}, -\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{6}} 6\sqrt{2}; 6) 0 = \log_{0,2} 1,$

$-1 = \log_{0,2} 5, 1 = \log_{0,2} 0,2, -2 = \log_{0,2} 25, 2 = \log_{0,2} 0,04,$

$-0,3 = \log_{0,2} 0,2^{-0,3}, 0,3 = \log_{0,2} 0,2^{0,3}, -\sqrt{2} = \log_{0,2} 5^{\sqrt{2}}, \sqrt{2} = \log_{0,2} 5^{-\sqrt{2}};$

8) $0 = \log_{1,3} 1, -1 = \log_{1,3} \frac{10}{13}, 1 = \log_{1,3} 1,3, -2 = \log_{1,3} \frac{100}{169},$

$2 = \log_{1,3} \frac{169}{100}, -0,3 = \log_{1,3} 1,3^{-0,3}, 0,3 = \log_{1,3} 1,3^{0,3}, -\sqrt{2} = \log_{1,3} \left(\frac{10}{13}\right)^{\sqrt{2}},$

$\sqrt{2} = \log_{1,3} 1,3^{\sqrt{2}}.$

2.94. 1) $-2 = \log_{0,1} 100, -2 = \log_2 0,25, -2 = \log_{\frac{1}{3}} 9, -2 = \log_x \frac{1}{x^2},$

$-2 = \log_{x-2} (x-2)^{-2}; -2 = \log_{m^2} m^{-4}; 3) -1 = \log_{0,1} 10; -1 = \log_2 \frac{1}{2},$

$-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3, -1 = \log_x \frac{1}{x}, -1 = \log_{x-2} (x-2)^{-1}, -1 = \log_{m^2} m^{-2};$

5) $3 = \log_{0,1} 0,001, 3 = \log_2 8, 3 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}, 3 = \log_x x^3, 3 = \log_{x-2} (x-2)^3,$

$3 = \log_{m^2} m^6; 7) -\frac{1}{3} = \log_{0,1} \sqrt[3]{10}, -\frac{1}{3} = \log_2 \sqrt[3]{\frac{4}{2}}, -\frac{1}{3} = \log_x x^{-\frac{1}{3}},$

$-\frac{1}{3} = \log_{x-2} (x-2)^{-\frac{1}{3}}, -\frac{1}{3} = \log_{m^2} m^{-\frac{2}{3}}; 9) \frac{1}{2} = \log_{0,1} \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2},$

$\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} = \log_x \sqrt{x}, \frac{1}{2} = \log_{x^2} \sqrt{x-2}, \frac{1}{2} = \log_{m^2} |m|; 11) 0 = \log_{0,1} 1,$

$0 = \log_2 1, 0 = \log_{\frac{1}{3}} 1, 0 = \log_x 1, 0 = \log_{x-2} 1, 0 = \log_{m^2} 1.$

2.95. 2) 0; 4) -4; 6) $\frac{1}{3}$; 8) $\sqrt{3}$.

2.96. 1) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 5) 9; 7) $\sqrt{3}$.

2.97. 2) $\frac{1}{4}$; 4) 2^{16} ; 6) 4; 8) $\frac{1}{256}$.

2.98. 1) 4; 3) 6; 5) -1; 7) -6; 9) 1,125.

2.99. 2) 3; 4) 0; 6) 1; 8) -5.

2.100. 1) -2; 3) 3; 5) $-\frac{1}{3}$; 7) -7; 9) 1,5.

2.101. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; 8) $-\frac{1}{2}$.

2.102. 1) -0,125; 3) 1.

2.103. 2) 10; 4) 8; 6) 100; 8) 6.

2.104. 1) 25; 3) 9; 5) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{8}$; 9) 0,001.

2.105. 2) 90; 4) $1\frac{2}{3}$; 6) 1,6; 8) 0,001.

2.106. 1) -1; 3) -3; 5) 2; 7) 3.

2.107. 2) 18; 4) -20; 6) 0; 8) 1; 10) $\frac{2}{81}$.

2.108. 1) 27; 3) 5; 5) 16; 7) $\frac{1}{e}$; 9) 0,5.

2.109. 2) $\frac{1}{5}$; 4) 2; 6) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{4}$; 10) 2; 12) 1,4.

2.110. 1) $\log_4 5$; 3) $\log_5 40$; 5) $\log_{\frac{3}{7}} 7$; 7) $\log_{15} 3$; 9) $\log_8 0,375$.

2.111. 2) Да; 4) нет; 6) нет; 8) нет.

2.112. 1) 2 и 3; 3) -10 и -9; 5) -2 и -1.

2.113. 2) 3; 4) 2; 6) 2.

2.114. 1) 4; 3) -3; 5) 0,5.

2.115. 2) 1,5; 4) 2; 6) 3.

2.116. 1) $\frac{1}{3} \log_3 7$; 3) $\frac{2}{3} \log_2 5$.

2.117. 2) 0,8; 4) $-\log_7 3$; 6) $\frac{5}{6}$.

2.118. 1) 2,5; 3) -1,5; 5) 2,5; 7) -4; 9) 0,75.

- 2.119. 2) 3; 4) 2; 6) 3; 8) 2; 10) 81.
 2.120. 1) 0; 3) 1; 5) 1.
 2.121. 2) -1; 4) -1; 6) 0,5.
 2.122. 1) 0,75; 3) 0,5; 5) -1,5.
 2.123. 2) 1,5; 4) -3; 6) $1\frac{1}{3}$; 8) 0.
 2.124. 1) 1; 3) -3; 5) 1.
 2.125. 2) $\log_{1,25} 4$; 4) $\log_2 \sqrt{\frac{14}{3}}$.
 2.126. 1) 6; 3) 8; 5) 2.
 2.127. 2) 25; 4) 4.
 2.128. 1) 1; 3) 5; 5) 8; 7) -21.
 2.129. 2) 11; 4) 8.
 2.130. 1) 4; 3) 1.
 2.131. 2) 6; 4) 10.
 2.132. 1) $m + n$; 3) $3m + 2n$; 5) $2m + n$.
 2.133. 2) $\frac{m+2}{2m+1}$.
 2.134. 1) $\frac{2mn-3m-n+3}{mn+m-1}$; 3) $\frac{4-n}{mn+m-1}$.
 2.135. 2) 33,75; 4) $2\frac{2}{3}$; 6) -0,25.
 2.136. 1) Да; 3) да; 5) нет; 7) нет; 9) нет; 11) да.
 2.137. 2) 8; 4) 36; 6) 8.
 2.138. 1) 1; 3) 3; 5) 3; 7) 2.
 2.139. 2) $(0; +\infty)$; 4) $(-6; +\infty)$; 6) $(-\infty; 6)$; 8) $(-\infty; 0)$.
 2.140. 1) $(-\infty; 0,5) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-0,5; 2)$; 5) $x \neq -2,5$; 7) \emptyset .
 2.141. 2) $x \neq 2$; 4) $(0; +\infty)$.
 2.142. 1) $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{6}; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4) \cup (0; 3)$;
 5) $(-\infty; -2) \cup (1,5; 1,75)$; 7) $(0; 3)$.
 2.143. 2) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
 2.144. 1) $(-2; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $(2,5; 3) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.
 2.145. 2) $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 6) $[-1; 1]$.
 2.146. 1) C, D.
 2.147. 1) а) 4; б) $[0,5; 4]$; в) $[\frac{1}{2}; 1]$; г) промежуток возрастания $[0,5; 4]$; д) $(1; 0)$;
 е) $(1; 4]$; ж) $[0,5; 1)$; з) а) $\frac{1}{3}$; б) $[\frac{1}{3}; 9]$; в) $[-2; 1]$; г) промежуток убывания
 $[\frac{1}{3}; 9]$; д) $(1; 0)$; е) $[\frac{1}{3}; 1)$; ж) $(1; 9)$.

- 2.148. 2) $\frac{1}{3}$; 4) 3.
 2.149. 1) Например, $(1; 0)$, $(2; 1)$, $(8; 3)$; 3) например, $(1; 0)$, $(4; -1)$, $(16; -2)$;
 5) например, $(-1; 0)$, $(-2; 1)$, $(-4; 2)$.
 2.150. 2) а) $(0; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) $(0; +\infty)$; г) нет; д) $(0; 1)$; е) $(1; +\infty)$; ж) $(1; 0)$;
 4) а) $(0; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) нет; г) $(0; +\infty)$; д) $(1; +\infty)$; е) $(0; 1)$; ж) $(1; 0)$;
 6) а) $(-\infty; 0)$; б) \mathbf{R} ; в) нет; г) $(-\infty; 0)$; д) $(-1; 0)$; е) $(-\infty; -1)$; ж) $(-1; 0)$.
 2.151. 1) Больше; 3) больше; 5) меньше; 7) больше; 9) меньше.
 2.152. 2) Меньше; 4) меньше; 6) меньше; 8) меньше; 10) меньше.
 2.153. 1) Меньше; 3) больше; 5) больше; 7) больше.
 2.154. 2) Меньше; 4) больше; 6) больше.
 2.155. 1) Больше; 3) больше.
 2.156. 2) Да; 4) нет; 6) да; 8) нет; 10) нет.
 2.157. 1) Нет; 3) да; 5) нет; 7) да.
 2.158. 2) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 4) $(\frac{1}{5})^{6,7}$; 6) $1000\sqrt[3]{10}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.
 2.159. 1) $t < p$; 3) $t < p$.
 2.160. 2) Минус; 4) минус.
 2.161. 1) Плюс; 3) плюс.
 2.163. 2) а) $(-2; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) $(-2; +\infty)$; г) нет; д) $(-1; +\infty)$; е) $(-2; -1)$; ж) $(-1; 0)$;
 з) $(0; 1)$; 4) а) $(0; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) $(0; +\infty)$; г) нет; д) $(4; +\infty)$; е) $(0; 4)$; ж) $(4; 0)$;
 з) нет; 6) а) $(3; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) нет; г) $(3; +\infty)$; д) $(3; 4)$; е) $(4; +\infty)$; ж) $(4; 0)$;
 з) нет; 8) а) $(0; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) нет; г) $(0; +\infty)$; д) $(0; 8)$; е) $(8; +\infty)$; ж) $(8; 0)$;
 з) нет; 10) а) $(-\infty; 1)$; б) \mathbf{R} ; в) $(-\infty; 1)$; г) нет; д) $(0; 1)$; е) $(-\infty; 0)$;
 ж) $(0; 0)$; з) $(0; 0)$; 12) а) $(-1; +\infty)$; б) \mathbf{R} ; в) нет; г) $(-1; +\infty)$; д) $(-1; -\frac{2}{3})$;
 е) $(-\frac{2}{3}; +\infty)$; ж) $(-\frac{2}{3}; 0)$; з) $(0; -1)$.
 2.168. 1) 1; 3) 0; 5) 1; 7) 2.
 2.169. 2); 4).
 2.171. 2) \emptyset ; 4) \emptyset ; 6) 2.
 2.172. 1) 216; 3) 2; 5) 1; 7) $-\frac{1}{32}$.
 2.173. 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$; 6) 9.
 2.174. 1) ± 1 ; 3) ± 8 ; 5) 1; 7) $\pm \sqrt{e}$.
 2.175. 2) ± 2 ; 4) ± 1 ; 6) -3; 7) 8) 4.
 2.176. 1) 169; 3) 8.
 2.177. 2) 11; 4) 0.

- 2.178. 1) 9; 3) 2; 5) 2; 3.
 2.179. 2) 2; 4) 0,25; 6) 2; 5.
 2.180. 1) 2; 3) 3; 5) 5.
 2.181. 2) \emptyset ; 4) 4; 6) 5.
 2.182. 1) $\sqrt{5}$; 3) 8; 5) 3.
 2.183. 1) -100; 3) -0,5.
 2.184. 2) [0,25; 4]; 4) [-4,6; -2].
 2.185. 2) 10; 4) 0,25; 16; 6) 0,1; 1000; 8) 3; 9.
 2.186. 1) $4^{0,6}$; 4; 3) 0,25; 16; 5) 6.
 2.187. 2) 2; 4) \emptyset ; 6) \emptyset ; 8) 3.
 2.188. 1) 4; 3) 1; 5) 2; 7) 2.
 2.189. 2) 4; 4) ± 5 ; 6) -17; 19; 8) 100; 10) 100.
 2.190. 2) 0; 4) -1; 6) 0; 8) ± 4 ; 10) ± 1 .
 2.191. 1) 1; $\log_2 2,5$; 3) -3; $\lg 23\,000$; 5) 2; $\log_{3,78} \frac{17150}{27}$.
 2.192. 2) $\log_3 18$; 4) $-\lg 5$; 6) $\log_6 0,6$.
 2.193. 1) 10; 100; 3) 5; 25; 5) 0,1; 100; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3.
 2.194. 2) $\log_{11} 11$; 4) $\log_5 10$; 6) $\log_{1,4} 175$.
 2.195. 1) $\pi + 2\pi k$, $k = -4, -5, -6, \dots$; $2\pi n$, $n \in \{-3, -2, -1, 0\} \cup \mathbf{N}$;
 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{N}$; 5) $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{N}$.
 2.196. 2) $\frac{1}{49}$.
 2.197. 2) $x = a^4 - 1$, $a > 0$, $a \neq$;
 4) $x = 4^a + 1$, $a \in \mathbf{R}$.
 2.198. 1) $-0,25 < a < 0$;
 3) $0 < a < \sqrt[3]{0,25}$.
 2.199. 1) (100; 10); (0,01; 0,1);
 3) (4; 1).
 2.200. 2) (0; 9); 4) (1; 8); 6) [0,81; $+\infty$); 9) $(-\infty; 1]$.
 2.201. 2) $(\frac{1}{3}; +\infty)$; 4) (1; 3); 6) $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$; 8) $(-\infty; 3,5]$.
 2.202. 1) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; 3) $[-2; -1] \cup (3; 4]$; 5) $(-4; -3) \cup (0; 1)$;
 7) $(-1; 0) \cup (2; 3)$.
 2.203. 2) $(-\infty; -9) \cup (2; +\infty)$; 4) $(4 + \sqrt{3}; 6)$.
 2.204. 1) [0,6; 0); 3) (1; 2); 5) $(5\frac{2}{3}; 9]$.

- 2.205. 2) (2,25; 3); 4) $(1; 1\frac{2}{3})$; 6) $(-1; -0,5)$; 8) $(-\infty; -3)$.
 2.206. 1) [0,1; 1); 3) $(-10; -1)$.
 2.207. 2) $(-1; \frac{1}{3})$; 4) $(-2\frac{2}{3}; -1)$; 6) (0; 6); 8) $(-6; -2] \cup [4; +\infty)$.
 2.208. 1) (3; $+\infty$); 3) (12; 15].
 2.209. 2) $(-2; 1)$; 4) (1,5; 2) \cup (4; 5).
 2.210. 1) $(-2; 8)$; 3) (2; 7); 5) (3; $+\infty$).
 2.211. 2) (3; 3,5] \cup [5; $+\infty$); 4) $[-20; 4,96]$.
 2.212. 1) $(\frac{1}{9}; 27)$; 3) $(\frac{1}{3}; 27)$; 5) $(0; (\frac{10}{91})^4)$ \cup (9,1; $+\infty$); 7) $(-10; -0,001)$.
 2.213. 2) $(-\infty; 3\frac{2}{3}) \cup (4 - \frac{1}{3^9}; 4)$; 4) (0; 3).
 2.214. 1) $(0; \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [9; +\infty)$; 3) $(\sqrt{3}; 9)$.
 2.215. 2) (0,5; 2) \cup [7; $+\infty$); 4) $(-4; -3) \cup (2; +\infty)$; 6) (1; 5) \cup (9; 10).
 2.216. 1) (6; 7); 3) (0; 2); 5) (0; 3).
 2.217. 2) $(-1; \frac{5}{6})$; 4) [3; $+\infty$); 6) $(-\infty; -1,5] \cup [0; 1) \cup (3; +\infty)$; 8) $(-8; -1)$.
 2.218. 1) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 3) (4; 5) \cup (6; $+\infty$).
 2.219. 2) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$; 4) $[-3; -2\frac{2}{3}] \cup (0; \frac{1}{3}]$; 6) $(-\infty; 0]$; 8) $(-\infty; -1)$.
 2.220. 1) (1; 2) \cup (2; 7); 3) (0; 1) \cup (1; $+\infty$); 5) $(-\infty; -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}; 4)$.
 2.221. 2) $(-3; 4]$; 4) $(-2; -1) \cup (-1; 6]$; 6) $(0; \frac{\sqrt{17}-1}{2}]$.
 2.222. 1) [16; $+\infty$); 3) $[-2; +\infty)$.
 2.223. 2) $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}) \cup (-\frac{3}{5}, \frac{1}{7}]$; 4) (0; 3) \cup (3; $+\infty$); 6) $(-8; -4) \cup (-4; 1]$.
 2.224. 1) \emptyset ; 3) \emptyset ; 5) $(-\infty; -4] \cup (2; 3] \cup [4; +\infty)$; 7) (2; $+\infty$).
 2.225. 2) $(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; 4) $(\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$;
 6) $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

| | |
|---|---|
| Корень арифметический 10 | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии 40 |
| — — n -й степени 12 | |
| Логарифм 136 | Тождество основное логарифмическое 137 |
| — десятичный 139 | |
| — натуральный 139 | |
| Логарифмирование 137 | Уравнение иррациональное 86 |
| Неравенство иррациональное 99 | — логарифмическое 164 |
| — логарифмическое 172 | — показательное 122 |
| — показательное 130 | — — с переменной x 92 |
| Прогрессия бесконечно убывающая геометрическая 38 | Формула перехода 145 |
| Степень с действительным показателем 104 | Функции взаимно обратные 156 |
| — иррациональным показателем 104 | Функция логарифмическая 153 |
| — — рациональным показателем 48 | — показательная 109 |
| | — степенная 67, 79 |
| | Число e 139 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| От авторов | 3 |
| Глава 1 | |
| Степень с рациональным показателем. Степенная функция | |
| 1.1. Степень с целым показателем | 4 |
| 1.2. Корень n -й степени | 10 |
| 1.3. Тождества с корнями, содержащие одну переменную | 19 |
| 1.4. Действия с корнями нечетной степени | 24 |
| 1.5. Действия с корнями четной степени | 31 |
| 1.6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия | 38 |
| 1.7. Периодические дроби | 43 |
| 1.8. Степень с рациональным показателем | 47 |
| 1.9. Действия со степенями с рациональными показателями | 53 |
| 1.10. Сравнение степеней с рациональными показателями | 62 |
| 1.11. Степенная функция (показатель положительный) | 67 |
| 1.12. Степенная функция (показатель отрицательный) | 78 |
| 1.13. Иррациональные уравнения | 86 |
| 1.14. Решение иррациональных уравнений с использованием свойств функций | 92 |
| 1.15. Иррациональные неравенства | 99 |
| Глава 2 | |
| Показательная и логарифмическая функции | |
| 2.1. Степень с действительным показателем | 104 |
| 2.2. Показательная функция | 109 |
| 2.3. Показательные уравнения | 122 |
| 2.4. Показательные неравенства | 129 |
| 2.5. Логарифмы | 136 |
| 2.6. Основные свойства логарифмов | 143 |
| 2.7. Логарифмическая функция | 153 |
| 2.8. Логарифмические уравнения | 164 |
| 2.9. Логарифмические неравенства | 172 |
| Приложения | |
| Материалы для повторения теоретических вопросов арифметики и алгебры курса математики 5—11-х классов | 183 |
| Упражнения для повторения арифметического и алгебраического материала курса математики 5—11-х классов | 216 |
| Ответы | 251 |
| Предметный указатель | 270 |

(Название и номер школы)

| Учебный год | Имя и фамилия ученика | Состояние учебного пособия при получении | Оценка ученику за пользование учебным пособием |
|-------------|--------------------------|---|--|
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 11-летним сроком обучения

2-е издание, переработанное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редакторы *Н. М. Алганова, К. М. Лукашевич*.
Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Тех-
нический редактор *М. И. Чепловодская*. Корректоры *В. С. Бабеня, Е. П. Тхир,*
Т. Н. Ведерникова, А. В. Алешко.

Подписано в печать 04.09.2008. Формат 60 × 90^{1/16}. Бумага офсетная.

Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 17 + 0,25 форз.

Уч.-изд. л. 10,33+0,17 форз. Тираж 118 000 экз. Заказ 2557.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»

Министерства информации Республики Беларусь

ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

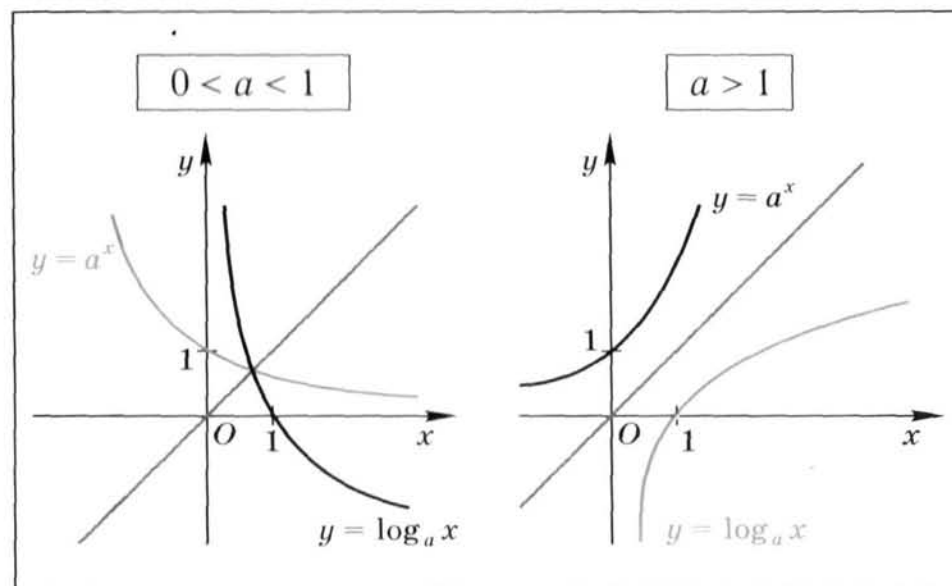
ЛП № 02330/0056617 от 27.03.2004.

Ул. Красная, 23, 220600, Минск. by

Степенная функция $y = x^r$ и ее график

| Значение показателя r степени | Область определения функции | График функции |
|--|--|----------------|
| $r = 0$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т.е. $x \neq 0$ | |
| $r = 1$ | \mathbb{R} , т.е. x — любое число | |
| $r \in (0; 1)$ | $[0; +\infty)$, т.е. $x \geq 0$ | |
| $r = 2n, n \in \mathbb{N}$ | \mathbb{R} , т.е. x — любое число | |
| $r = 2n+1, n \in \mathbb{N}$ | \mathbb{R} , т.е. x — любое число | |
| $r \in (n; n+1), n \in \mathbb{N}$ | $[0; +\infty)$, т.е. $x \geq 0$ | |
| $r = -2n, n \in \mathbb{N}$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т.е. $x \neq 0$ | |
| $r = -2n+1, n \in \mathbb{N}$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т.е. $x \neq 0$ | |
| $r \in (n-1; n), n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$ | $(0; +\infty)$, т.е. $x > 0$ | |

Графики показательной и логарифмической функций



Свойства логарифмов ($a > 0, b > 0, c > 0, m > 0, a \neq 1, c \neq 1$)

$$\log_a(bm) = \log_a b + \log_a m$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

$$\log_a b^p = \frac{p}{q} \log_a b$$

$$b^{\log_a m} = m^{\log_a b}$$