

Ф Е Н И К С

СОМНИШАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

ЕТ

Mathematical formulas and a bell icon are visible in the background of the page.



Базовый уровень

Вычисления преобразования

А. Г. Клово

МАТЕМАТИКА

В ФОРМАТЕ ЕГЭ

Базовый уровень

Вычисления и преобразования

РОСТОВ-НА-ДОНУ

 **Феникс**

2016

УДК 373.167.1:57

ББК 22.1я7

КТК 444

К50

Клово, А. Г.

К50 Математика в формате ЕГЭ. Базовый уровень. Вычисления и преобразования / А. Г. Клово. — Ростов н/Д : Феникс, 2016. — 62, [2] с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-26986-2

Настоящая книга является первой в серии небольших по объему книг по подготовке к базовому ЕГЭ по математике. 20 заданий предстоящего экзамена тематически разбиты на 4 части по 5 заданий.

Первая в этой серии книг посвящена анализу заданий, связанных с вычислениями, преобразованиями и свойствами чисел. Эти задания входят в число и самых простых, и самых сложных заданий базового ЕГЭ по математике.

Книга состоит из трех частей. В первой части рассматриваются теоретические вопросы, связанные с этими заданиями. Вторая часть посвящена анализу соответствующих заданий с номерами: 1, 2, 4, 5, 19. В третьей части предлагается серия тренировочных вариантов с этими задачами.

Серия книг будет полезна всем выпускникам школы: и тем, кто сдает только базовый ЕГЭ по математике, и тем, кто готовится к профильному экзамену. В этом случае ее можно будет рассматривать как важную ступень в этой подготовке.

УДК 373.167.1:57

ББК 22.1я7

ISBN 978-5-222-26986-2

© А. Г. Клово, 2015

© Оформление: ООО «Феникс», 2015

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга является первой в серии небольших по объему книг по подготовке к базовому ЕГЭ по математике.

Единый государственный экзамен по математике является обязательным для выпускников школ. Но не все выпускники поступают в вузы, и тем более не все они поступают в те высшие учебные заведения, где есть вступительный экзамен по математике.

Совсем недавно у школьников появился выбор. Госэкзамен по математике разделился на два: базовый и профильный. Профильный экзамен заменяет соответствующий экзамен в вуз. А вот большинство школьников сдают базовый экзамен по математике. Его могут сдавать и те, кто сдает профильный ЕГЭ по математике, так сказать, для надежности.

В средствах массовой информации высказывалась мысль, что базовый ЕГЭ по математике слишком простой, что он чуть ли не разрушает математическое образование в России. Многие считают, что и готовиться к нему особо не надо. Такая точка зрения таит опасность для выпускника.

Базовый госэкзамен по математике содержит 20 заданий. Ответом в каждом задании является целое число или конечная десятичная дробь. В частности, в нескольких заданиях (9, 14, 17) ответом является последовательность цифр из набора 1, 2, 3, 4. Решения задач приводить не надо. Но тем не менее не все они являются простыми.

Как и любой экзамен такого рода, базовый госэкзамен должен «расставить по порядку» огромное количество его участников. Поэтому наряду с простыми он содержит и очень сложные задания. А хорошему ученику недостаточно получить минимальные баллы. Он хочет полностью проявить себя, получить высокие баллы и старается выполнить все задания.

Мы рассчитываем на то, что наша серия книг будет полезна всем выпускникам полной средней школы: и тем, кто хочет просто сдать выпускной экзамен по математике, а также тем,

кто хочет получить при этом высшие баллы. Полезна серия книг будет и тем выпускникам, кто готовится к профильному экзамену. Ее можно будет рассматривать как важную ступень в этой подготовке.

Каждая книга серии состоит из трех основных частей. Первая часть посвящена теоретическим вопросам школьного курса, соответствующих ряду тем госэкзамена. В первой книге акцент делается на заданиях, объединенных рубрикой «Уметь выполнять вычисления и преобразования». В обобщенном плане КИМ ЕГЭ 2016 года по математике (базовый уровень) этой, казалось бы, простой теме посвящены 5 заданий с номерами 1, 2, 4, 5, 19. Сложность этих заданий возрастает от номера к номеру, как и планируемое время на их выполнение: от 5 до 16 минут.

Во второй части книги рассказывается о том, какими конкретно будут эти задания на базовом ЕГЭ по математике в 2016 году. Что будет в этом месте на экзамене? Какие знания потребуются, как их применить, на что обратить внимание? С одной стороны, мы постарались дать ответ на эти вопросы. Для самых простых и самых сложных заданий обсуждаются и подробно обосновываются правильные ответы в характерных для базового ЕГЭ заданиях и в заданиях повышенной сложности. Да, решения задач на экзамене писать не надо. Но для себя мы должны быть уверены в правильности нашего решения и, соответственно, в точном ответе.

В третьей части каждой из 4 книг приводятся не менее 10 репетиционных вариантов по рассматриваемым темам, составленные по спецификации ЕГЭ (базовый уровень) 2016 года.

Отметим, что во втором и в третьем разделах книг в каждом наборе заданий уровень сложности постепенно возрастает от задания к заданию, от варианта к варианту. Чтобы гарантированно решить все относительно простые задания, разумно практиковаться в решении и более сложных задач.

Отметим, на каких темах будут акцентироваться первые 2 раздела последующих книг.

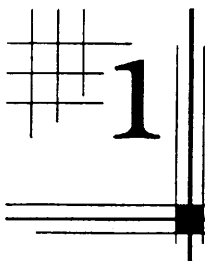
Во второй книге это будут разделы, объединенные рубриками: «Уметь решать уравнения и неравенства», «Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами». Этим темам

посвящены 5 заданий базового ЕГЭ по математике с номерами 7, 13, 15, 16, 17.

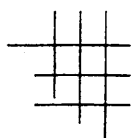
В третьей книге это будут разделы, объединенные рубриками: «Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни», «Уметь выполнять действия с функциями». Этим темам посвящены 5 заданий с номерами 3, 6, 9, 11, 14.

В четвертой книге это будут разделы, объединенные рубрикой «Уметь строить и исследовать простейшие математические модели». Этим темам посвящены 5 заданий с номерами 8, 10, 12, 18, 20.

Автор, как всегда, надеется на общение со своими читателями. Пишите по адресу aleksandrklovo@yandex.ru. Давайте будем обсуждать возникающие проблемы, решения сложных задач. Безусловно, все читатели будут получать подробные ответы на свои вопросы.



КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК



1. Натуральные и целые числа

С чего начинается наше знакомство с математикой? Ребенка учат считать, и он знакомится с натуральными числами: 1, 2, 3, Рассмотрим множество натуральных чисел, которое обозначается символом N .

А как записать натуральное число? Чему равно, например, число, если его первая цифра равна 2, вторая равна 3, а третья равна 4? Мы немедленно скажем, что это число «двести тридцать четыре». Не задумываемся мы потому, что тут же представили себе десятичную запись этого числа: 234. За этим скрывается то, что в записи натуральных чисел используется десятичная позиционная система счисления. Первая цифра справа определяет число единиц числа, вторая цифра справа определяет число десятков, третья цифра — число сотен и т. д. Запись числа \overline{ab} означает, что в этом числе a десятков и b единиц. Тем самым справедливы равенства $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ и т. д. В общем случае n -значное число можно записать в виде $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1}$, и оно равно

$$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1.$$

Такая форма записи чисел наиболее популярна, хотя до сих иногда используется, например на циферблатах часов, римская нумерация. Запишем несколько нату-

ральных чисел, используя десятичную и римскую нумерацию: $2 = II$, $13 = XIII$, $24 = XXIV$.

А сама математика начинается в тот момент, когда появляются операции над введенными объектами. Сколько будет предметов, если к 2 добавить 3 предмета? На этот непростой для малыша вопрос можно ответить, если положить рядом 2 игрушки и 3 игрушки и пересчитать их все вместе. Мы докажем при этом, что $2 + 3 = 5$. Так можно создать известную всем таблицу сложения. А вот если трем детям дать по 2 конфеты и посчитать число конфет, то мы получим формулу $2 \cdot 3 = 6$. В итоге появляется таблица умножения.

Итак, для натуральных чисел можно таким образом ввести операции сложения и умножения, при этом сумма и произведение натуральных чисел также являются натуральными числами. Нам знакомы свойства этих операций: $a + b = b + a$, $a + b + c = a + (b + c)$, $ab = ba$, $abc = a \cdot (bc)$, $a(b + c) = ab + ac$, $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$. Также для этих чисел можно ввести операцию возведения в натуральную степень

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \text{ при этом } a^{m+n} = a^m \cdot a^n, (a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Попытка ввести обратные операции приводит нас к необходимости расширения понятия числа. При этом сформулированные свойства операций над числами сохраняются и несколько расширяются.

Чему равно число $2 - 5$? Это число, обладающее тем свойством, что если его прибавить к 5, то получится число 2. Среди натуральных таких чисел нет, такое абстрактное число называли числом «минус 3», используя обозначение -3 . Итак, при введении операции вычитания, обратной операции сложения, мы приходим к множеству целых чисел: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, которое обозначается символом Z . Основные свойства арифметических операций при этом сохраняются.

Операция, обратная операции умножения чисел, называется операцией деления. В общем случае введение этой операции приводит к рациональным числам, которые рассматриваются в следующем разделе. Но иногда операция деления возможна и для натуральных чисел.

Следующая информация может потребоваться при выполнении последних, сложных задач базового ЕГЭ по математике.

Натуральное число m делится без остатка или просто делится на натуральное число n тогда, и только тогда, когда $\frac{m}{n}$ является натуральным числом.

Четным называется натуральное число, которое делится на 2. Остальные натуральные числа называются нечетными.

Натуральное число делится на 2 тогда, и только тогда, когда его последняя цифра 0 или делится на 2.

Натуральное число делится на 3 или на 9 тогда, и только тогда, когда сумма цифр числа делится соответственно на 3 или на 9.

Натуральное число делится на 5 тогда, и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

Натуральное число делится на 10 тогда, и только тогда, когда его последняя цифра 0.

Натуральное число делится на 4 тогда, и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, которое равно 0 или делится на 4.

Натуральное число делится на 25 тогда, и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, которое 0 или делится на 25.

Натуральное число делится на 100 тогда, и только тогда, когда две его последние цифры являются нулями.

Часто аналогичные определения относят и к целым числам.

Простым числом называется натуральное число, большее 1, которое делится без остатка только на 1 и на само себя. Например, простыми являются числа 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.

Составным числом называется натуральное число, большее 1, которое делится без остатка как минимум на три натуральных числа.

Остатком при делении целого числа m на натуральное n называется число $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, обладающее тем свойством, что $m - r$ делится на n . При этом целое число

$\frac{m - r}{n}$ называется целой частью числа $\frac{m}{n}$.

2. Дроби, рациональные и действительные числа

Операция, обратная операции умножения, называется операцией деления. Что получится, если 3 поделить на 7? Это число, обладающее тем свойством, что если его умножить на 7, то получится число 3. Среди натуральных таких чисел нет, такое абстрактное число называли дробным числом «три седьмых», используя обозначение $\frac{3}{7}$.

Если задано натуральное число n , то обратным ему числом $\frac{1}{n}$ называется число, обладающее тем свойством, что $\frac{1}{n} \cdot n = 1$.

Пусть теперь еще задано целое число m . Числа вида $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$, называются обыкновенными дробями. Число m называется числителем, число n — знаменателем дроби $\frac{m}{n}$. При $m = 0$ эта дробь равна 0.

Итак, при введении операции деления, обратной операции умножения, мы приходим к рациональным числам вида $\frac{m}{n}$, где m является целым числом ($m \in \mathbb{Z}$), а n — натуральное число ($n \in \mathbb{N}$). Это множество чисел обозначают символом \mathbb{Q} .

Из определения следуют некоторые важные свойства дробей.

Свойство 1. Пусть заданы натуральные числа n , k и целое m . Тогда справедливо равенство $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$.

Итак, умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число не меняет величину дроби.

Свойство 2. Пусть заданы натуральные числа n_1 и n_2 . Тогда из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$.

Свойство 3. Пусть заданы натуральное число n , целые числа m_1 и m_2 . Тогда из условия $m_2 > m_1$ следует неравенство $\frac{m_2}{n} > \frac{m_1}{n}$.

Свойство 4. Пусть заданы натуральные числа m , n_1 и n_2 . Тогда из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{m}{n_1} > \frac{m}{n_2}$. При отрицательных целых m из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{m}{n_1} < \frac{m}{n_2}$.

Если числители дробей одинаковы и положительны, то с увеличением знаменателя дробь уменьшается. Если числители дробей одинаковы и отрицательны, то с увеличением знаменателя дробь увеличивается.

А как сравнить дроби, у которых и числители, и знаменатели разные?

Рассмотрим дроби $\frac{225}{457}$ и $\frac{450}{913}$. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2. Дробь от такой операции не меняется, и мы приходим к равносильной задаче сравнения дробей $\frac{450}{914}$ и $\frac{450}{913}$. При равных числителях знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, следовательно, первая дробь меньше второй.

Для сравнения дробей мы привели дроби к общему числителю. Такое словосочетание редко встречается в школе. Обычно мы говорим о приведении дробей к общему знаменателю. Это связано с тем, что операции сложения и вычитания удобнее проводить для дробей с одинаковыми знаменателями.

Рассмотрим дроби $\frac{11}{24}$ и $\frac{17}{36}$. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 3, а числитель и знаменатель второй дроби на 2. Дроби от этих операций не меняются, и мы приходим к равносильной задаче сравнения дробей $\frac{33}{72}$ и $\frac{34}{72}$. При равных знаменателях числитель первой дроби меньше знаменателя второй дроби, следовательно, первая дробь меньше второй.

В данном случае для сравнения дробей мы привели дроби к общему знаменателю.

Как найти общий знаменатель двух или большего числа дробей? Конечно, существует много натуральных чисел, которые делятся без остатка на все знаменатели этих дробей. Разумно взять наименьшее из них. Такое число называется наименьшим общим кратным (НОК) заданных чисел. Легко проверить, что $\text{НОК}(24; 36) = 72$.

Суммой дробей $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$ с одинаковым знаменателем называется дробь $\frac{m_1 + m_2}{n}$.

Итак, при сложении дробей с одинаковыми знаменателями числители дробей складываются, а знаменатель остается без изменения.

При сложении дробей с разными знаменателями дроби вначале приводятся к общему знаменателю, а затем складываются по правилу сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

$$\text{Например, } \frac{11}{24} + \frac{17}{36} = \frac{33}{72} + \frac{34}{72} = \frac{67}{72}.$$

Вычитание является действием, обратным сложению, поэтому $\frac{m_1}{n} - \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 - m_2}{n}$. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями числители дробей вычитаются, а знаменатель остается без изменения. При вычитании дробей с разными знаменателями дроби вначале приводятся к общему знаменателю, затем вычитаются.

$$\text{Например, } \frac{11}{24} - \frac{17}{36} = \frac{33}{72} - \frac{34}{72} = -\frac{1}{72}.$$

Произведением дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ называется дробь $\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$. Иными словами, $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$. При умножении дробей их числители перемножаются и записываются в числителе, а знаменатели перемножаются и записываются в знаменателе.

$$\text{Например, } \frac{11}{24} \cdot \frac{17}{36} = \frac{11 \cdot 17}{24 \cdot 36} = \frac{187}{864}.$$

Результатом деления дроби $\frac{m_1}{n_1}$ на отличную от 0 дробь $\frac{m_2}{n_2}$ называется дробь $\frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}$. Иными словами,

$$\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}.$$

При делении дробей числитель первой дроби умножается на знаменатель второй дроби и записывается в числителе, а знаменатель первой дроби умножается на числитель второй дроби и записывается в знаменателе.

Например, $\frac{11}{24} : \frac{17}{36} = \frac{11 \cdot 36}{24 \cdot 17} = \frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 17} = \frac{33}{34}$. Заметим, что

по ходу вычислений мы числитель и знаменатель поделили на 12. Такая операция не меняет значения дроби.

Пусть числитель и знаменатель обыкновенной дроби являются натуральными числами. Такая дробь называется правильной, если числитель меньше знаменателя.

Дроби $\frac{11}{24}$, $\frac{17}{36}$, $\frac{187}{864}$ являются правильными дробями.

Дробь $\frac{77}{72}$ является неправильной дробью, ее можно за-

писать в виде $1\frac{5}{72}$. Такие дроби называются смешанными.

При арифметических операциях со смешанными дробями их можно представлять в виде суммы целого числа и правильной дроби или в виде неправильной дроби. Обычно при умножении и делении смешанные дроби надо представлять в виде неправильной дроби, а при сложении и вычитании — в виде суммы целого числа и правильной дроби.

Рассмотрим теперь понятие десятичной дроби. По определению десятичной дроби, это число равно

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

что записывается в виде $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$.

Например, $4,87 = 4 + \frac{8}{10} + \frac{7}{10^2}$ или $4,87 = 4 + \frac{87}{100}$.

Таким образом, десятичная дробь всегда может быть переведена в смешанную или обыкновенную дробь. Обратное возможно только в том случае, когда знаменатель

заданной дроби содержит среди простых делителей только числа 2 и 5. В этом случае числитель и знаменатель дроби мы умножаем на наименьшее натуральное число, при котором в знаменателе получается степень числа 10.

Например, $2\frac{7}{20} = 2 + \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 2 + \frac{35}{100} = 2,35$. Возможны

и другие способы перевода обыкновенной дроби в десятичную. Это можно, например, сделать путем деления числителя на знаменатель в столбик.

Поговорим об операции возведения в степень. Если число a возводится в натуральную степень n , то, как мы уже знаем, это равносильно умножению его n раз само на себя. Если $a \neq 0$, то мы считаем по определению, что $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Тем самым мы научились возводить числа, отличные от 0, в целую степень.

А как определить возведение числа в рациональную степень? Вначале рассмотрим операцию извлечения квадратного корня. Квадратным корнем, или арифметическим квадратным корнем, из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, обозначаемое символом \sqrt{a} , обладающее тем свойством, что $(\sqrt{a})^2 = a$. Например, $\sqrt{4} = 2$, хотя уравнение $x^2 = 4$ имеет 2 корня 2 и -2 .

Рассмотрим теперь операцию извлечения кубического корня. Кубическим корнем из числа a называется число, обозначаемое символом $\sqrt[3]{a}$, обладающее тем свойством, что $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-64} = -4$. Аналогично можно ввести корень любой натуральной степени, при этом корень четной степени можно извлечь только из неотрицательного числа, и он равен неотрицательному числу, а вот корень нечетной степени можно извлекать из любых чисел.

И, наконец, рассмотрим теперь операцию возведения в степень $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Рассмотрим неотрицательное число a , тогда $a^{\frac{1}{n}}$ — это неотрицательное число, обладающее тем свойством, что $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

По определению, неотрицательное число a в рациональной степени $\frac{m}{n}$ определяется формулами $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$.

Обратите внимание, что выражения $\sqrt[n]{a}$ и $a^{\frac{1}{n}}$ отличаются друг от друга. Первое определено для любых a , а второе — только для неотрицательных a . Заметим, что требование неотрицательности основания при возведении в рациональную степень является обязательным. Убедитесь в том, что величину $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$ определить невозможно, такая запись не имеет смысла.

Можно проверить, что свойства степени, сформулированные для возведения в натуральную степень, а именно, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, остаются справедливыми и при возведении чисел в целую и в рациональную степень при сформулированных только что ограничениях.

Дальнейшее развитие понятия числа можно воспринимать как решение все более сложных уравнений. Например, можно проверить, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения среди рациональных чисел. Действительно, в уравнении $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ множитель 2 слева встречается

четное число раз или не встречается, а справа находится единственный множитель 2. Конечные и бесконечные десятичные дроби (множество всех точек числовой оси) образуют множество действительных чисел R . Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными числами. Как мы видим, иррациональные числа существуют, например, это положительный корень уравнения $x^2 = 2$ число $\sqrt{2}$.

Как определить, что данное число является рациональным или, наоборот, не является рациональным числом? Сумма иррационального числа с рациональным будет числом иррациональным. Иначе иррациональное число будет равно разности рациональных чисел, что невозможно. Аналогичной является ситуация и с другими арифметическими операциями.

Отметим еще одно понятие — трансцендентное число. Это иррациональные числа, которые не являются корнями алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Таких чисел подавляющее большинство на числовой оси. Поэтому все мировые константы являются трансцендентными числами.

3. Алгебраические преобразования

Умение проводить тождественные алгебраические преобразования приобретает в повседневной работе школьника. Тождественность означает, что первоначальное выражение при всех значениях аргумента совпадает с конечным выражением. Так бывает далеко не всегда. На это мы не всегда обращаем внимание. Тем более что в школьных учебниках зачастую делается замечание, что ответы приведены для соответствующей области определения.

Отметим формулы сокращенного умножения, которые справедливы при любых значениях аргумента:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$,
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$,
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

А вот эти формулы с радикалами надо применять с осторожностью:

- $a = \sqrt{a^2}$ при $a \geq 0$, $a = -\sqrt{a^2}$ при $a \leq 0$, $a = \sqrt[3]{a^3}$ при всех a ;
- $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$ при $a \geq 0$, $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[6]{a^2}$ при $a \leq 0$.

4. Углы, тригонометрические функции

В трех-четырех заданиях базового госэкзамена выпускники будут иметь дело с тригонометрическими функциями. Давайте вначале ответим на простые вопросы. Что такое синус, косинус, тангенс, котангенс?

Если речь идет о тригонометрических функциях острого угла в прямоугольном треугольнике, то эти величины определяются следующим образом.

Пусть задан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB и прямым углом C . Рассмотрим острый угол A и при данных обозначениях введем тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике.

Синусом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета

BC к гипотенузе AB , следовательно, $\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$.

Косинусом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение прилежащего катета AC к гипотенузе AB , следовательно, $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$.

Тангенсом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC , следовательно, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$.

Котангенсом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение прилежащего катета AC к противолежащему катету BC , следовательно, $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{AC}{BC}$.

Если записать соответствующие определения для острого угла B в этом прямоугольном треугольнике ABC , то легко заметить справедливость следующих соотношений: $\sin \angle A = \cos \angle B$, $\sin \angle B = \cos \angle A$, $\operatorname{tg} \angle A = \operatorname{ctg} \angle B$, $\operatorname{tg} \angle B = \operatorname{ctg} \angle A$.

В прямоугольном треугольнике справедлива теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Отсюда следует справедливость соотношения $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$.

Как измеряется угол? Пусть угол образован двумя противоположно направленными лучами, исходящими из одной точки. Считается, что такой угол равен 180° , а его $\frac{1}{180}$ часть называется углом, величина которого равна 1° (1 градусу).

Тригонометрические функции острых углов, равных 30° , 45° и 60° , могут быть легко вычислены.

Если в прямоугольном треугольнике острый угол A равен 45° , то его катеты равны между собой. Пусть каждый из них равен a , тогда, с учетом теоремы Пифагора,

гипотенуза треугольника равна $a \cdot \sqrt{2}$. Отсюда получим $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

Если в прямоугольном треугольнике острый угол A равен 30° , то противолежащий катет равен половине гипотенузы. Отсюда $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, а с учетом теоремы Пифагора вычислим $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

В общем случае понятие угла и тригонометрических функций вводится следующим образом.

Пусть на плоскости OXY задана прямоугольная система координат и единичная окружность с центром O в начале координат. Рассмотрим точку $A(1; 0)$ и точку B , полученную из точки A перемещением по заданной единичной окружности на $|x|$ единиц против часовой стрелки при $x > 0$ и по часовой стрелке при $x < 0$. Соответствующий угол AOB называется углом в x радиан.

Рассмотрим развернутый угол. С одной стороны, его градусная мера равна 180° , а с другой стороны, радианная мера этого угла равна половине длины единичной окружности, т. е. равна числу π . Таким образом, справедливо равенство

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ градусов и } \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 1 \text{ радиану.}$$

При этом проекция точки B единичной окружности на ось OY называется синусом угла x , а проекция точки B на ось Ox называется косинусом угла x . Кроме того, по определению считается, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ справедливо и в этом случае.

Диапазон углов $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ называется 1-й четвертью,

диапазон углов $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ называется 2-й четвертью, диа-

пазон углов $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ называется 3-й четвертью, диапа-

зон углов $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ называется 4-й четвертью.

Из определения тригонометрических функций следует, что синусы углов, лежащих в 1-й и 2-й четвертях — положительные числа, лежащих в 3-й и в 4-й четвертях — отрицательные.

Косинусы углов, лежащих в 1-й и 4-й четвертях — положительные числа, лежащих во 2-й и в 3-й четвертях — отрицательные.

Тангенсы и котангенсы углов, лежащих в 1-й и 3-й четвертях — положительные числа, лежащих во 2-й и в 4-й четвертях — отрицательные.

Из определения тригонометрических функций следуют некоторые их свойства. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Будем перемещаться из точки $A(1; 0)$ по единичной окружности и рассматривать проекции точек окружности на ось ординат, т. е. значения функции $y = \sin x$.

Мы видим, что функция $y = \sin x$ принимает значения на отрезке $[-1; 1]$ и $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, т. е. функция $y = \sin x$ имеет основной (наименьший положительный) период 2π , при смене знака аргумента она меняет знак, т. е.

является нечетной функцией. На промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ эта функция возрастает, на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ она убывает. Функция $y =$

$= \sin x$ равна 0 при значениях $x = \pi n$, $n \in Z$, равна 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ и равна -1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$, значениями которой при таком же перемещении по окружности являются проекции точек на окружности на ось абсцисс. Мы видим, что функция $y = \cos x$ принимает значения на отрезке $[-1; 1]$ и $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, т. е. функция имеет основной период 2π , при смене знака аргумента она не меняется, т. е. является четной функцией. На промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ эта функция убывает, на промежутках $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ она возрастает. Функция $y = \cos x$ равна 0 при значениях $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, равна 1 при $x = 2\pi n$, $n \in Z$ и равна -1 при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$, которая по определению равна $\frac{\sin x}{\cos x}$, т. е. отношению функций, свойства которых указаны выше. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает все возможные значения и $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, т. е. функция имеет основной период π . При смене знака аргумента она меняет знак, т. е. является нечетной функцией. Она возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ равна 0 при $x = \pi n$, $n \in Z$, равна 1 при $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ и равна -1 при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

И, наконец, рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$, которая равна, по определению, $\frac{\cos x}{\sin x}$. Следовательно, эта функция принимает все возможные значения. Также выполнены свойства: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, т. е. функция имеет ос-

новой период π , при смене знака у аргумента она меняет знак, т. е. является нечетной функцией. Она убывает на интервалах $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ равна 0 при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, равна 1 при $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и равна -1 при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что основной период функции $y = \sin 2x$ равен $\frac{2\pi}{2} = \pi$, основной период функции $y = \sin 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$, а вот основной период функции $y = \sin ax$ при условии $a \neq 0$ равен $\frac{2\pi}{|a|}$.

Полезно знать значения тригонометрических функций на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

- $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;
- $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует;
- $\operatorname{ctg} 0$ не существует, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
 $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$.

Если аргумент тригонометрической функции не лежит на этом промежутке, то мы используем формулы приведения:

- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$,
 $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$;

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$,
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctgx}$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}x$;
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$;
- $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$;
- $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Другие формулы приведения являются следствием этих.

При решении тригонометрических уравнений используются следующие формулы:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$;
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$;
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y}{1 \mp \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$, $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y \mp 1}{\operatorname{ctg}y \pm \operatorname{ctg}x}$;
- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$;
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;
- $\sin x \pm \sin y = 2\sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$;
- $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$;
- $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$;
- $2\sin x \cdot \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$;
- $2\sin x \cdot \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$;
- $2\cos x \cdot \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$;
- $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Отметим, что в последних двух формулах область определения левой части не совпадает с областью определения правой части. В подобных случаях при решении уравнений надо проводить дополнительный анализ.

5. Показательные и логарифмические функции

Для любого положительного числа a и произвольного действительного числа x определена степень a^x . При значении $a = 1$ выполнено условие $1^x \equiv 1$, а если $a \neq 1$, величина a^x обладает важными свойствами.

Функция $y = a^x$ при условии $a \neq 1$ и $a > 0$ называется показательной функцией. Она определена при всех действительных значениях аргумента x . При $0 < a < 1$ показательная функция $y = a^x$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0, при $a > 1$ функция $y = a^x$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Показательная функция может принять любое положительное значение. Для этих функций выполнены соотношения: $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{x-y} = a^x : a^y$, $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

При $a = e$ (об этом числе мы поговорим позже) получаем функцию $y = e^x$, которая называется экспонентой.

Показательная функция является монотонной функцией и, следовательно, имеет обратную функцию.

Логарифмом числа a по основанию b (обозначается $\log_b a$) называется число c , удовлетворяющее условию $b^c = a$. При этом предполагается, что числа a и b положительны и $b \neq 1$. Если $b = 10$, то используется обозначение $\log_{10} a = \lg a$ и такой логарифм называется десятичным. Если $b = e$, то используется обозначение $\log_b a = \ln a$ и такой логарифм называется натуральным.

Соотношения $y = \log_a x$ и $x = a^y$ равносильны, поэтому логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной

показательной функции $y = a^x$. При этом свойства логарифмической функции вытекают из свойств показательной функции.

Функция $y = \log_a x$ определена при значениях аргумента $x > 0$, принимает любые значения на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Логарифмическая функция монотонно возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

Из определения следует основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} \equiv x$, которое тождественно выполнено при значениях $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов, т. е. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Логарифм частного равен разности логарифмов, т. е. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

Степень аргумента логарифма выносится множителем за знак логарифма, т. е. $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$.

Степень основания логарифма выносится множителем в степени (-1) за знак логарифма, т. е. $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$.

Заметим, что во всех этих формулах область определения левой части не совпадает с областью определения правой. Это надо учитывать в будущем при решении уравнений и неравенств, содержащих логарифмические функции. Если после преобразования область определения расширяется, то могут появиться посторонние решения. Если область определения сужается, то могут быть потеряны решения.

Задание № 1

В соответствии с обобщенным планом базового ЕГЭ в задании № 1 проверяется умение выполнять вычисления и преобразования. Коды проверяемых требований указывают на умение выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма. В то же время коды проверяемых элементов содержания указывают на умение проводить действия с целыми числами, дробями, процентами, рациональными числами, преобразовывать выражения, включающие арифметические операции. В этом первом задании арифметические действия будут самыми простыми. Если есть такая необходимость, еще раз просмотрите в теоретическом разделе книги, каким должен быть порядок действий при выполнении арифметических операций. Убедитесь, что вы умеете выполнять арифметические действия с целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями. Вспомните на всякий случай определение процента и логарифма.

В демонстрационном варианте базового ЕГЭ предлагаются задания, содержащие сложение обыкновенных

дробей и умножение на целое число. Тем не менее, в соответствии с документами о проведении ОГЭ, учащимся надо быть готовыми и к выполнению некоторых других несложных заданий.

Ответом в задании 1 является целое число или конечная десятичная дробь. Планируемое время выполнения задания равно 5 минутам.

Из справочных материалов для базового ЕГЭ может понадобиться таблица квадратов целых чисел от 0 до 99.

Обратите внимание, что уровень заданий в предлагаемом наборе постепенно повышается и последние задания сложнее тех, которые встретятся вам на ЕГЭ.

Примеры

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{5}{6} + \frac{7}{15}$.

Комментарий и решение

В задании предлагается выполнить одно арифметическое действие — сложение правильных дробей. Будем надеяться, что подавляющее число выпускников средней школы не допустят здесь ошибки. Центральным является приведение дробей к общему знаменателю. Что это означает? Первый знаменатель — число 6, разлагается на простые делители 2 и 3. Знаменатель второй дроби 15 разлагается на простые делители 3 и 5. Минимальным набором, содержащим все эти простые делители, является набор 2, 3, 5. Произведение этих чисел — число 30 — является наименьшим общим кратным знаменателей дробей примера и является их общим знаменателем. Приводя дроби к общему знаменателю, запишем верные равенства:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}, \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{14}{30}.$$

$$\text{В итоге } \frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} = 1,3.$$

Итак, при сложении правильных дробей мы находим общий знаменатель этих дробей, приводим дроби к этому общему знаменателю. При этом дроби не меняются, т. к. числитель и знаменатель каждой дроби в случае необходимости можно разделить на одинаковый множитель. При сложении правильных дробей с одинаковыми знаменателями знаменатель остается неизменным, а числители складываются.

Ответ. 1,3.

Пример 2. Найдите значение выражения $2,8 - 3\frac{3}{4}$.

Комментарий и решение

В этом примере обратим внимание на 2 момента. Во-первых, вычитание дробей можно понимать как частный случай сложения чисел с разными знаками. А в этом случае полагается из большего числа вычесть меньшее и взять результат со знаком большего числа. Во-вторых, дроби должны быть записаны в одной форме. Итак, искомой является величина $-(3,75 - 2,8) = -0,95$.

Ответ. $-0,95$.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$5 \cdot \left(3\frac{5}{6} - 5\frac{1}{3} \right).$$

Комментарий и решение

Конечно, надо вначале выполнить действия в скобках. Итак,

$$\begin{aligned} 3\frac{5}{6} - 5\frac{1}{3} &= -\left(4 - 3 + 1\frac{1}{3} - \frac{5}{6} \right) = -\left(1 + \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \right) = \\ &= -1 - \frac{3}{6} = -1,5. \end{aligned}$$

После умножения на 5 получим результат: $-7,5$.

Ответ. $-7,5$.

Пример 4. Найдите 20 % от числа 48.

Комментарий и решение

Один процент от числа равен сотой части числа, следовательно, p процентов от числа a равны числу $\frac{a \cdot p}{100}$. Отсюда, искомое число равно выражению $\frac{48 \cdot 20}{100}$, т. е. ответом является число 9,6.

Ответ. 9,6.

Пример 5. Найдите значение выражения $1 + \log_2 0,25$.

Комментарий и решение

Чему равен $\log_2 0,25$? Это, по определению логарифма, число, обладающее тем свойством, что 2 в степени, равной этому числу, равно 0,25. Очевидно, таким свойством обладает число -2 . Действительно, $2^{-2} = 0,25$ и ответом является число $1 + (-2)$, это число -1 . Здесь потребовалось только лишь определение логарифма. Преобразования логарифмических выражений относятся к заданию № 5.

Ответ. -1 .

Пример 6. Найдите значение выражения $\left(1\frac{1}{14} - 3\frac{1}{2}\right) \cdot 21$.

Комментарий и решение

Значение выражения в скобке умножим на 21. В первой скобке от большего числа $3\frac{1}{2}$ отнимем меньшее число $1\frac{1}{14}$ и результат $3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{14} = 2 + \frac{7-1}{14} = 2\frac{3}{7} = \frac{17}{7}$ возьмем со знаком « $-$ ». Первая скобка равна $-\frac{17}{7}$. В итоге $-\frac{17}{7} \cdot 21 = -17 \cdot 3 = -51$.

Ответ. -51 .

Пример 7. Найдите значение выражения

$$10,25 \cdot \left(0,39 - \frac{4,7}{2x} \right)$$

при $x = 15\frac{2}{3}$.

Комментарий и решение

Заметим, что буквой x обозначено число $\frac{47}{3}$. Первой выполним операцию деления в скобках $\frac{47 \cdot 3}{10 \cdot 2 \cdot 47} = \frac{3}{20}$. Второй будет операция вычитания в скобках $0,39 - \frac{3}{20} = 0,39 - 0,15 = 0,24$. Заключительной будет операция умножения $10,25 \cdot 0,24 = \frac{41}{4} \cdot \frac{6}{25} = \frac{246}{100} = 2,46$.

Ответ. 2,46.

Задания по теме № 1

Задание 1. Найдите значение выражения $3,5 - 1\frac{3}{4}$.

Задание 2. Найдите значение выражения $7,2 - 11,05$.

Задание 3. Найдите значение выражения $2\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3} - 1$.

Задание 4. Найдите значение выражения $3 \cdot \left(3\frac{1}{3} - 5\frac{1}{6} \right)$.

Задание 5. Найдите значение выражения $\left(4\frac{5}{6} - 7\frac{1}{3} \right) \cdot 6$.

Задание 6. Найдите значение выражения $3\frac{1}{6} - 2\frac{2}{3} \cdot 4$.

Задание 7. Найдите значение выражения

$$5,9 \cdot \sqrt{0,68 - \frac{4}{5x}}$$

при $x = 2,5$.

Задание 8. Найдите значение выражения

$$\left(1\frac{1}{14} - 3\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{3}\right).$$

Задание 9. Найдите значение выражения

$$10,25 \cdot \left(0,39 - \frac{4,7}{2x}\right)$$

при $x = 15\frac{2}{3}$.

Задание 10. Найдите значение выражения

$$6,24 \cdot \left(0,14 - \frac{3,5}{5x}\right)$$

при $x = \frac{35}{2}$.

Ответы на задания по теме № 1

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	1,75	6	-7,5
2	-3,85	7	3,54
3	-1,5	8	-3
4	-5,5	9	2,46
5	-15	10	0,624

Задание № 2

В задании № 2, так же как и в задании № 1, проверяется умение выполнять вычисления и преобразования, при этом коды проверяемых требований в этих заданиях совпадают. Вспомним, что это умение выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма. Что касается проверяемых элементов содержания, то в задании

№ 2 появляются действия со степенями, в том числе рациональными.

В демонстрационном варианте базового ЕГЭ предлагаются задания, содержащие умножение и деление выражений, содержащих натуральные степени. Мы, как всегда, предложим вам несколько более широкий набор заданий.

Отметим, что в работе над этим заданием можно использовать ряд формул из справочных материалов для базового ЕГЭ, предоставляемых участникам экзамена. Например, свойства арифметического квадратного корня:

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0, b \geq 0$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0, b > 0$.

Также приведены некоторые формулы сокращенного умножения:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Приведены также формулы, характеризующие свойства степени при $a > 0, b > 0$:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, (a^n)^m = a^{nm}$,
- $(ab)^n = a^n b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Ответом в задании 2 является целое число или конечная десятичная дробь. Планируемое время выполнения задания равно 5 минутам.

Примеры

Пример 1. Представьте выражение $a^8 \cdot a^7 : a^{13}$, где a — натуральное число, в виде a^b . Укажите значение b .

Комментарий и решение

При перемножении степенных выражений показатели степеней складываются, а при делении — вычитаются. Поэтому $b = 8 + 7 - 13 = 2$, тем самым мы приходим к ответу $b = 2$.

Ответ. 2.

Пример 2. Найдите значение выражения $(a^{2,95} \cdot a^{-1,45})^2$ при $a = 3$.

Комментарий и решение

Вначале выполним действие в скобках, т. е. вычислим $a^{2,95} \cdot a^{-1,45} = a^{2,95-1,45} = a^{1,5}$. Возводя полученное выражение в квадрат, найдем итоговый вид заданного выражения a^3 . В итоге получим ответ $3^3 = 27$.

Ответ. 27.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{24 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 10^6}$.

Комментарий и решение

Разделим числитель и знаменатель дроби на 10^4 и получим выражение $\frac{24}{0,5 \cdot 100}$. Это выражение приводится

к виду $\frac{24}{50}$, и мы приходим к ответу 0,48.

Ответ. 0,48.

Пример 4. Найдите значение выражения

$$(a - 2)(a - 4) + 5a - 2$$

при $a = -1,5$.

Комментарий и решение

Конечно, никто не запрещает сразу подставить в заданное выражение $a = -1,5$ и вычислить его числовое значение. Но мы его вначале преобразуем, надеясь на уменьшение количества вычислительной работы.

Итак, $(a-2)(a-4) + 5a - 2 = a^2 - a + 6 = (a - 0,5)^2 + 5,75$ и при $a = -1,5$ получим ответ

$$(-1,5 - 0,5)^2 + 5,75 = 4 + 5,75 = 9,75.$$

Ответ. 9,75.

Пример 5. Упростите выражение $\frac{175^{n-2}}{5^{2n-5} \cdot 7^{n-4}}$.

Комментарий и решение

Обратим внимание на тот факт, что число 175 имеет простые делители 3, 5 и 7. Используя это, запишем выражение

в виде $\frac{7^{n-2} \cdot 5^{n-2} \cdot 5^{n-2}}{5^{n-5} \cdot 5^n \cdot 7^{n-4}} = \frac{7^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-2}}{5^{-5} \cdot 7^{-4}}$. Так как при перемножении степеней их показатели складываются, а при делении вычитаются, то заданное выражение равно $7^2 \cdot 5 = 245$.

Ответ. 245.

Пример 6. Найдите $x + y$, если равенство

$$\frac{\sqrt[5]{a^{-3}b^{-9/8}}}{\sqrt[4]{a^{-5}\sqrt{b^5}}} = a^x b^y$$

выполнено для всех положительных чисел a и b .

Комментарий и решение

Выделим сомножители, содержащие степень a . Следова-

$$\text{тельно, } a^x = \frac{\sqrt[5]{a^{-3}}}{\sqrt[4]{a^{-5}}} = \frac{a^{-\frac{3}{5}}}{a^{-\frac{5}{4}}} = a^{-\frac{3}{5} + \frac{5}{4}} = a^{\frac{13}{20}}.$$

Выделим сомножители, содержащие степень b . Следова-

$$\text{тельно, } b^y = \frac{\sqrt[5]{b^{-9/8}}}{\sqrt[4]{\sqrt{b^5}}} = \frac{b^{-\frac{9}{40}}}{b^{\frac{5}{8}}} = b^{-\frac{9}{40} - \frac{5}{8}} = b^{-\frac{17}{20}}. \text{ Отсюда}$$

$$x = \frac{13}{20}, y = -\frac{17}{20} \text{ и искомая величина } x + y \text{ равна } -0,2.$$

Ответ. -0,2.

Задания по теме № 2

Задание 1. Представьте выражение $a^7 \cdot a^9 : a^{11}$, где a — натуральное число, в виде a^b . Укажите значение b .

Задание 2. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{8} \cdot (a^{-2,5} : a^{-3})^4$$

при $a = 4$.

Задание 3. Найдите значение выражения $(a^{1,5} \cdot a^{0,5})^3$ при $a = 2$.

Задание 4. Найдите значение выражения $(a^{2,5} \cdot a^{-1,5})^2$ при $a = 3$.

Задание 5. Найдите значение выражения

$$a^{-2,5} : a^{-3\frac{1}{4}} \cdot a^{1,25}$$

при $a = 4$.

Задание 6. Найдите значение выражения $(a^{-2,3} : a^{-3\frac{4}{5}})^2$ при $a = 2$.

Задание 7. Представьте выражение $(a^{3,75} : a^{2,25})^3$ в виде a^x и укажите в ответе значение x .

Задание 8. Упростите выражение $\sqrt{\frac{a^3 + 8}{a + 2}} - 6\sqrt{a^2}$ и найдите его значение при $a = -3,49$.

Задание 9. Представьте выражение $(2x^2 + 3x - 1) \cdot (3x - 4) + 2$ в виде $ax^3 + bx^2 + cx + d$ и укажите в ответе значение коэффициента b .

Задание 10. Упростите выражение $\sqrt{\frac{a^3 - 1}{a - 1}} + 3\sqrt{a^2}$ и найдите его значение при $a = -1,14$.

Ответы на задания по теме № 2

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	5	6	8
2	2	7	4,5
3	64	8	1,49
4	9	9	1
5	16	10	2,14

Задание № 4

В соответствии с обобщенным планом базового ЕГЭ в задании № 4 также проверяется умение выполнять вычисления и преобразования. Акцент здесь делается на несложные алгебраические преобразования и нахождение их числовых значений. Надо уметь вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

В этом задании необходимо осуществлять практические расчеты по заданным формулам, преобразовывать несложные формулы, выражающие зависимости между величинами. Здесь нужно уметь описывать с помощью функций реальные зависимости между величинами и извлекать нужную информацию, решать при этом различного вида уравнения и неравенства.

При выполнении заданий из демонстрационного варианта, тренировочных заданий может создаться впечатление, что при решении этой задачи надо в формулу, которая есть в тексте задания, подставить заданные величины. При этом искомая величина должна быть найдена из полученного уравнения относительно этой величины. Часто так оно и есть, но для того чтобы избежать ошибок, надо разобраться в смысле задания. Может быть, уравнение будет иметь несколько корней, и надо выяснить,

какой из них является искомым. К тому же тут могут быть задания с более сложной логической структурой.

В демонстрационном варианте предлагаются задания, содержащие формулы, в которых заданы все величины, кроме одной искомой величины. Вряд ли при выполнении этого задания понадобятся справочные материалы.

Ответом в задании 4 является целое число или конечная десятичная дробь. Планируемое время выполнения задания равно 7 минутам.

Примеры

Пример 1. Найдите в соответствующих единицах измерения ускорение a из равенства $F = ma$, если $F = 124$ и $m = 4$.

Комментарий и решение

В задании № 4 не планируется анализ единиц измерения в соответствующих формулах. Надо формально выразить одну величину через другие в алгебраической формуле и провести необходимые числовые вычисления.

В данном случае $a = \frac{F}{m} = \frac{124}{4} = 31$.

Ответ. 31.

Пример 2. Футболист головой послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 12t + 1,8$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите, на какой высоте в метрах будет находиться мяч через 2 секунды после удара футболиста.

Комментарий и решение

Для выполнения задания достаточно в выражение $-5t^2 + 12t + 1,8$ подставить $t = 2$. Мы получим $-20 + 24 + 1,8 = 5,8$; это число и будет ответом задания.

Ответ. 5,8.

Пример 3. В электрическую сеть параллельно включены 2 прибора с сопротивлениями R_1 и R_2 . Общее сопротивление цепи определяется формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Определите R_1 , если $R_2 = 30$ Ом и $R = 22,5$ Ом.

Комментарий и решение

Здесь классическая ситуация. В написанной формуле участвуют 3 величины, две из которых заданы.

Подставляя эти величины в формулу, мы получаем уравнение для искомого ответа $22,5 = \frac{R_1 \cdot 30}{R_1 + 30}$.

Умножая обе части соотношения на знаменатель, получим $(R_1 + 30) \cdot 22,5 = R_1 \cdot 30$ или $30 \cdot 22,5 = R_1 \cdot 7,5$. Отсюда $R_1 = 30 \cdot 3 = 90$.

Ответ. 90.

Пример 4. Истребитель летел прямолинейно 10 минут со скоростью 2 700 километров в час. Найдите расстояние в км, преодоленное истребителем за это время.

Комментарий и решение

Заметим, что 10 минут составляют шестую часть часа. Поэтому искомое расстояние мы найдем, разделив 2 700 на 6. Ответом является число 450.

Ответ. 450.

Пример 5. Футболист головой послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 11t + 2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите, через сколько секунд мяч, опускаясь вниз, будет находиться на высоте 8 метров.

Комментарий и решение

Для того чтобы правильно выполнить это задание, надо понимать суть происходящего. Заметим, что в момент времени $t = 0$ высота $h(0)$, на которой находится мяч, равна 2 метрам. Это рост футболиста, который бьет головой.

Взлетая вверх, мяч преодолевает высоту 8 метров, в этот момент квадратный трехчлен $-5t^2 + 11t + 2$ равен 8. Опускаясь, мяч снова преодолевает отметку 8 метров. Следовательно, искомой величиной является больший корень уравнения $-5t^2 + 11t + 2 = 8$ или $5t^2 - 11t + 6 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни 1 и 1,2. Ответом является число 1,2.

Ответ. 1,2.

Пример 6. Зависимость объёма месячного спроса q на продукцию народного предприятия от цены p задаётся формулой $q = 45\,000 - 120p$. Месячная выручка предприятия r составляет $r(p) = q \cdot p$. Для внедрения инноваций величина $r(p)$ должна быть не менее 4 200 000 рублей. Определите минимальную цену товара p в рублях, обеспечивающую внедрение инноваций.

Комментарий и решение

Чтобы провести необходимое исследование, выразим выручку предприятия через цену товара

$$r(p) = 45000p - 120p^2.$$

Далее наши действия зависят от поставленного в задаче вопроса. В данном случае надо найти наименьшее решение неравенства $45000p - 120p^2 \geq 4200000$. После деления на 120 приходим к неравенству $p^2 - 375p + 35000 \leq 0$.

Можно, конечно, догадаться, учитывая обратную теорему Виета, что корни равны 175 и 200. Ну, а если не догадаться, все члены уравнения поделите на 25, и в неравенстве

$\frac{1}{25}p^2 - 15p + 1400 \leq 0$ вычисления станут несложными.

Итак, промежуток $175 \leq p \leq 200$ является решением неравенства, а наименьшее решение — число 175 — искомой ценой в рублях за единицу продукции.

Ответ. 175.

Задания по теме № 4

Задание 1. Найдите в соответствующих единицах измерения массу тела m из равенства $F = ma$, если сила и ускорение равны соответственно $F = 81$ и $a = 6$.

Задание 2. В электрическую сеть параллельно включены 2 прибора с сопротивлениями R_1 и R_2 . Общее сопротивление цепи определяется формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Определите R , если $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 16$ Ом.

Задание 3. Период полураспада изотопа меди ${}^{64}_{29}\text{Cu}$, т. е. промежуток времени, в течение которого количество изотопа уменьшается вдвое, равен 12 часам 48 минутам. На хранение было оставлено 128 граммов изотопа. Определите количество граммов изотопа ${}^{64}_{29}\text{Cu}$, которое останется через 25 часов и 36 минут хранения.

Задание 4. Пусть основания трапеции равны a и b , высота трапеции равна h . Тогда ее площадь равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту, т. е. вычисляется по формуле $S = \frac{a + b}{2}h$. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 3 и 6, а высота равна 8.

Задание 5. Расстояние S в метрах между двумя движущимися объектами изменяется по закону

$$S(t) = \sqrt{25t^2 - 180t + 744},$$

где t — прошедшее время в секундах.

Определите, сколько секунд расстояние между объектами не превышало 22 метра.

Задание 6. Пусть a , b , c — стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр, тогда площадь треугольника может быть найдена по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Найдите площадь треугольника со сторонами 10, 17, 21.

Задание 7. Футболист послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $-5t^2 + 16t + 1$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите, сколько секунд мяч находился на высоте не менее 4 метров.

Задание 8. При первых 200 км поездки расход бензина составлял 7,25 литра на 100 км пути. На следующих 25 км подъема в горы расход бензина составлял 14 литров на 100 км пути. Определите средний расход топлива на 100 км пути за эту поездку.

Задание 9. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия от цены p в рублях задаётся формулой $q = 8000 - 25p$. Выручка предприятия за месяц составляет $r(p) = q \cdot p$ рублей. Определите цену товара p в рублях, при которой величина выручки за месяц $r(p)$ будет наибольшей.

Задание 10. Тело, которое движется со скоростью $v \frac{\text{м}}{\text{с}}$, при равномерном торможении с ускорением $a \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ проходит

до полной остановки расстояние $\frac{v^2}{2a}$ метров. Автомобиль, для которого $a = 10$, двигался со скоростью 54 километра в час. Определите количество метров, пройденных автомобилем до полной остановки.

Ответы на задания по теме № 4

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	13,5	6	84
2	3,2	7	2,8
3	32	8	8
4	36	9	160
5	3,2	10	11,25

Задание № 5

В соответствии с обобщенным планом базового ЕГЭ в задании № 5 продолжается проверка умений выполнять вычисления и преобразования. Специфика этого задания заключается в более глубоких преобразованиях заданных выражений. При этом могут встретиться выражения с радикалами, тригонометрическими функциями, показательными и логарифмическими функциями.

Ответом в задании 5 является целое число или конечная десятичная дробь. Планируемое время выполнения задания равно 8 минутам.

При выполнении этого задания также можно рассчитывать на использование ряда формул из справочных материалов для базового ЕГЭ, предоставляемых участникам экзамена. Это формулы сокращенного умножения и свойства степеней, о которых шла речь в обсуждении содержания задания № 2. Кроме того, отметим некоторые факты из тригонометрии. Это основное тригонометрическое

тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, определения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике, таблица значений тригонометрических функций при значениях аргументов $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ в градусах и соответствующих значений в радианах.

Также при вычислении тригонометрических выражений можно использовать приведенные в таблице свойства логарифмов. При $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0$ справедливы формулы: $a^{\log_a b} = b, \log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ и т. д.

Обратите внимание, что уровень заданий в предлагаемом наборе постепенно повышается и последние задания сложнее тех, которые встретятся вам на ЕГЭ.

Примеры

Пример 1. Найдите значение выражения $2 \cdot 3^{\log_3 64}$.

Комментарий и решение

Для выполнения этого задания достаточно вспомнить определение логарифма и связанное с ним основное логарифмическое тождество. Так как $a^{\log_a b} = b$, то $2 \cdot 3^{\log_3 64} = 2 \cdot 64 = 128$.

Ответ. 128.

Пример 2. Найдите значение выражения $\sqrt{6\frac{1}{4}} - \sqrt{2\frac{1}{4}}$.

Комментарий и решение

Сама запись примера провоцирует на неправильные действия. Но мы с вами понимаем, что надо упростить каждое слагаемое в отдельности. Итак,

$$\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ и } \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

В итоге $2,5 - 1,5 = 1$.

Ответ. 1.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\cos \alpha}$, если $\sin \alpha = 0,5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Комментарий и решение

Трудно представить себе школьный курс математики без тригонометрии. И весьма вероятно, что именно в задании № 4 необходимо будет проявить свои умения в проведении тригонометрических преобразований.

И, конечно, прежде всего мы при этом должны помнить об основном тригонометрическом тождестве $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Очень важно при этом понимать, что, зная $\sin \alpha$, мы можем найти не $\cos \alpha$, а $\cos^2 \alpha$. Поэтому для нахождения $\cos \alpha$ нужна дополнительная информация. Она дана в условии $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, которое позволяет определить знак $\cos \alpha$, в данном случае отрицательный.

$$\text{Итак, } \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2.$$

Ответ. -2 .

Пример 4. Найдите значение выражения

$$\frac{74}{7 - 2\sqrt{3}} + 5 - 4\sqrt{3}.$$

Комментарий и решение

Как преобразовать подобное выражение? Конечно, можно придумать самые разнообразные задания с самыми разными методами решения. Но есть некоторые общие принципы. Как правило, полезно избавиться от иррациональности в знаменателе, это и будет идеей наших преобразований.

В первом слагаемом

$$\frac{74}{7-2\sqrt{3}} = \frac{74(7+2\sqrt{3})}{(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3})} = \frac{74(7+2\sqrt{3})}{49-12} = 14 + 4\sqrt{3},$$

откуда

$$\frac{74}{7-2\sqrt{3}} + 5 - 4\sqrt{3} = 19.$$

Ответ. 19.

Пример 5. Найдите значение выражения $\log_2^2 25 \cdot \log_5^2 8$.

Комментарий и решение

Определенные навыки в работе с логарифмами помогут нам подобрать тот набор преобразований, которые приведут к желаемой цели. В данном случае вспомним формулы $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, $\log_b x^k = k \cdot \log_a x$, а затем проведем следующие преобразования:

$$\log_2^2 25 \cdot \log_5^2 8 = (2 \cdot \log_2 5)^2 \cdot (3 \cdot \log_5 2)^2 = 4 \cdot 9 = 36.$$

Ответ. 36.

Пример 6. Найдите значение выражения $A + A^2$, если $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$.

Комментарий и решение

Конечно, можно догадаться, что $7-2\sqrt{6} = (1-\sqrt{6})^2$, $7+2\sqrt{6} = (1+\sqrt{6})^2$, точнее, подобрать выражения, квадраты которых равны подкоренным выражениям.

Следовательно,

$$A = \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{6})^2} = |1-\sqrt{6}| - |1+\sqrt{6}| = -2.$$

Заметим, что под первым модулем число отрицательное, под вторым — положительное, поэтому

$$A = -(1-\sqrt{6}) - (1+\sqrt{6}) = -2.$$

Соответственно, $A + A^2 = 2$.

Что делать, если мы не смогли преобразовать подкоренные выражения в квадраты чисел? Возведем в квадрат обе части заданного соотношения, получим

$$\begin{aligned} A^2 &= 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{(7 - 2\sqrt{6})(7 + 2\sqrt{6})} = \\ &= 14 - 2\sqrt{49 - 24} = 4. \end{aligned}$$

Квадрат какого числа равен 4? Так как очевидно, что $A < 0$, то $A = -2$, и мы приходим к тому же ответу.

Ответ: 2.

Задания по теме № 5

Задание 1. Найдите значение выражения

$$(\sqrt{45} - \sqrt{5})\sqrt{5}.$$

Задание 2. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$.

Задание 3. Найдите значение выражения

$$\cos 60^\circ - \cos \alpha,$$

если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Задание 4. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} + 9 \right)^2.$$

Задание 5. Найдите значение выражения $A + A^2$, если $A = \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} - \sqrt{20 + 6\sqrt{11}}$.

Задание 6. Найдите значение выражения

$$37 \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 240^\circ.$$

Задание 7. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 72}{\log_5 4} + \log_4 \frac{2}{9}.$$

Задание 8. Найдите значение выражения $\log_{6,25} 0,4$.

Задание 9. Найдите значение выражения

$$12 + \frac{59 \cdot \sin 12^\circ}{\cos 102^\circ}.$$

Задание 10. Найдите значение выражения

$$\left(1 + \log_3 \frac{4}{3}\right) \cdot (1 + \log_2 13,5).$$

Ответы на задания по теме № 5

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	10	6	111
2	-0,75	7	2
3	0,25	8	-0,5
4	121	9	-47
5	30	10	6

Задание № 19

Задание № 19 относится к числу самых сложных заданий базового ЕГЭ. В то же время, с формальной точки зрения, проверяется лишь умение выполнять вычисления и преобразования. Коды проверяемых требований и проверяемых элементов содержания совпадают с содержанием первых двух заданий.

Даже самые простые натуральные числа обладают такими удивительными свойствами, что далеко не все их тайны раскрыты учеными. Чуть-чуть заглянуть в неизведанное позволит на базовом ЕГЭ выполнение задания № 19. Давайте посмотрим на некоторые из этих проблем.

Первые из предлагаемых примеров перекликаются с идеями демонстрационного варианта.

В справочных материалах для базового ЕГЭ приводится таблица квадратов целых чисел от 0 до 99, она может потребоваться в расчетах.

Заметим, что решение сложной задачи не обязательно должно быть сложным. Правильным решением является математически грамотное обоснование правильного ответа.

Примеры

Пример 1. Найдите наименьшее натуральное число, не являющееся трехзначным числом, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Комментарий и решение

В демонстрационном варианте условие задания аналогичное, но нет ограничения на число цифр в числе. При этом требуется привести пример такого числа. В качестве примера авторы демоварианта приводят все возможные трехзначные числа.

Формально решение может быть очень коротким. Заметим, что у двузначного числа сумма цифр не может быть равна 20, минимальное четырехзначное число с суммой цифр 20 — число 1 199 — не удовлетворяет условию задачи, а вот следующее такое число — 1 289 — подходит.

Ответ. 1 289.

Пример 2. Найдите наименьшее натуральное число m , для которого существует натуральное n такое, что выполнено соотношение $\sqrt{11 - 2\sqrt{m}} + \sqrt{18 + 2\sqrt{n}} = 7$.

Комментарий и решение

Если перебрать натуральные числа, являющиеся полными квадратами, то легко найти решение уравнения в натуральных числах $m_1 = 25$, $n_1 = 81$. Но, как это часто

бывает, очевидное решение не является правильным, и искомый ответ сформирует не столь очевидное решение $m_2 = 18$, $n_2 = 32$.

Для поиска этого решение запишем заданное уравнение в виде $\sqrt{18 + 2\sqrt{n}} = 7 - \sqrt{11 - 2\sqrt{m}}$ и возведем обе части в квадрат. (Полученное после этого решение требует проверки.)

Теперь уравнение запишется в виде

$$7\sqrt{11 - 2\sqrt{m}} = 21 - \sqrt{m} - \sqrt{n}.$$

Отсюда несложно показать, что существует рациональное число k такое, что $\sqrt{n} = k \cdot \sqrt{m}$. Теперь уравнение запишем в виде $7\sqrt{11 - 2\sqrt{m}} = 21 - (k + 1)\sqrt{m}$, возведем обе части в квадрат, приравняем по отдельности рациональные и иррациональные слагаемые и найдем, что $k = \frac{4}{3}$, $m_2 = 18$, $n_2 = 32$. Проверка показывает, что это действительно решение нашего уравнения.

Ответ. 18.

Пример 3. Найдите число трехзначных натуральных чисел, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Комментарий и решение

Если мы рассмотрим все цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то их квадраты при делении на 3 дают соответственно остатки: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, при делении на 9 остатками будут числа: 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1, 0.

Добавление цифры, кратной 3, не влияет на вопрос о делимости суммы квадратов цифр на 3 и на 9.

Мы видим, что не существует двух не кратных 3 цифр, сумма квадратов которых делится на 3. Поэтому искомое число состоит из трех цифр, не делящихся без остатка на 3. Таких наборов, сумма цифр которых равна 20, всего

2. Это наборы цифр: 8, 8, 4 и 8, 7, 5. Первый из них не удовлетворяет условию задачи. Поэтому ответ определяют числа 5, 7, 8, взятые в произвольном порядке. Всего искомым вариантов 6, это числа 578, 587, 758, 785, 857, 875.

Ответ. 6.

Пример 4. Модули чисел a, b, c, d, e соответственно равны числам 6, 7, 8, 9, 12. Берется величина A , равная сумме всех возможных различных попарных произведений чисел этого набора, т. е. числу $ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$. Найдите наименьшее возможное значение модуля величины A .

Комментарий и решение

Заметим, что

$$A = \frac{(a + b + c + d + e)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - e^2}{2},$$

причем $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 374$.

Величина A будет наименьшей по модулю, когда величина $(a + b + c + d + e)^2$ наиболее близка к числу 374. Так как сумма модулей заданных чисел равна 42, то квадрат их суммы всегда является четным числом. Но, как легко проверить, сумма этих чисел не может быть равна 20 ни при каких знаках этих чисел. Следующим по близости является квадрат числа 18 — число 324. Эта ситуация может быть реализована: $6 + 7 + 8 + 9 - 12 = 18$.

$$\text{В этом случае } |A| = \left| \frac{18^2 - 374}{2} \right| = 25.$$

Ответ. 25.

Пример 5. Рассматривается уравнение

$$x^2 - 2xy - 3y^2 + 2x - y + 3 = 0.$$

Найдите число пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих заданному уравнению.

Комментарий и решение

Заметим, что $x^2 - 2xy - 3y^2 = (x + y)(x - 3y)$.

Затем найдем числа a и b , для которых выражения $(x + y + a)(x - 3y + b)$ и $x^2 - 2xy - 3y^2 + 2x - y + 3$ отличаются на константу.

Раскрывая скобки, видим, что для этого надо решить систему
$$\begin{cases} a + b = 2, \\ -3a + b = -1. \end{cases}$$

Несложно получить решение $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{4}$. Итак, заданное уравнение равносильно уравнению

$$\left(x + y + \frac{3}{4}\right)\left(x - 3y + \frac{5}{4}\right) = -\frac{33}{16}.$$

Умножим правую часть на 16, а каждый множитель в левой части на 4. В итоге придем к эквивалентному уравнению $(4x + 4y + 3)(4x - 12y + 5) = -33$. Множители в левой части могут принимать значения: 1 и -33, -1 и 33, 3 и -11, -3 и 11, 11 и -3, -11 и 3, 33 и -1, -1 и 33. Соответственно мы получаем 8 систем уравнений, из которых только 4 имеют целочисленные решения: 1 и 1; -1 и 1; 1 и -2; -7 и -2. Итак, данное уравнение имеет 4 целочисленных решения.

Ответ. 4.

Пример 6. Рассматривается уравнение

$$2x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 8y = 5.$$

Найдите число пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих заданному уравнению.

Комментарий и решение

Заметим, что $2x^2 + 6xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + (x + y)^2$.

Затем найдем числа a и b , для которых выражения $(x + 2y + a)^2 + (x + y + b)^2$ и $2x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 8y$ отличаются на константу.

Несложно получить, что $a = -1$, $b = -2$. Итак, заданное уравнение равносильно уравнению

$$(x + 2y - 1)^2 + (x + y - 2)^2 = 10.$$

Существует 4 варианта, когда сумма квадратов двух целых чисел равна 10. Соответственно мы приходим к 4 системам:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 3, \\ x + y - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 1 = -3, \\ x + y - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 1 = 3, \\ x + y - 2 = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 1, \\ x + y - 2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 1 = -1, \\ x + y - 2 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 1, \\ x + y - 2 = -3; \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 1 = -1, \\ x + y - 2 = -3; \end{cases} \begin{cases} x + 2y - 1 = -3, \\ x + y - 2 = -1. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное целочисленное решение. Всего искомым решений 8.

Ответ. 8.

Пример 7. Для натурального числа n рассматривается

дробь $\frac{n^2 + 11}{(n^2 + 4) \cdot (n^2 + 2) \cdot (n + 6)}$. Найдите наибольшее про-

стое p , для которого найдется натуральное число n такое, что данная дробь сократима на это p .

Комментарий и решение

Прежде всего, заметим, что, если дробь сократима, то числитель имеет общий множитель с одним из множителей знаменателя. Докажем, что числитель $n^2 + 11$ не может иметь общих простых делителей с первым множителем знаменателя $n^2 + 4$. В самом деле, разность этих чисел равна 7, и таким общим множителем может быть только простое число 7. Но тогда число n^2 должно иметь

остаток 3 при делении на 7, что невозможно. Для проверки этого можно рассмотреть квадраты всех возможных остатков при делении на 7. Это числа 0, 1, 4, 2, далее они повторяются.

Со вторым множителем знаменателя таким делителем может быть только простое число 3, т. к. разность числителя и этого множителя равна 9. При $n = 1$ такая возможность реализована.

Поделив числитель на третий множитель знаменателя, мы получим тождество $\frac{n^2 + 11}{n + 6} = n - 6 + \frac{47}{n + 6}$. Если первая дробь в этом тождестве сократима, то сократима и последняя, причем на число 47, что реализуется при $n = 41$.

Ответ. 47.

Задания по теме № 19

Задание 1. Найдите наибольшее натуральное число, сумма цифр которого равна 7, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Задание 2. Найдите число пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 2xy - 3y^2 = 5$.

Задание 3. Для простого числа p рассматривается число $A = |p^2 - 77| + 37$, причем известно, что A также является простым числом. Найдите наибольшее возможное значение числа A .

Задание 4. Найдите трехзначное число (или сумму таких трехзначных чисел, если их несколько), которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 26 раз.

Задание 5. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b , то получится число,

большее произведения чисел a и b на 32. В ответе напишите число, равное $a + b$.

Задание 6. Рассматривается уравнение

$$(x - 2y) \cdot (x + y + 4) = 3 - x - y.$$

Найдите число пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих заданному уравнению.

Задание 7. Для натурального числа n рассматривается

дробь $\frac{2n^2 + 3n + 19}{(n^2 + 6) \cdot (n^2 + 8) \cdot (n + 5)}$. Найдите наибольшее про-

стое p , для которого найдется натуральное число n такое, что данная дробь сократима на это p .

Задание 8. Модули чисел a, b, c, d, e соответственно равны числам 6, 7, 8, 9. Берется величина A , равная сумме всех возможных различных попарных произведений чисел этого набора, т. е. числу $ab + ac + ad + bc + bd + cd$. Найдите наименьшее возможное значение модуля величины A .

Задание 9. Найдите наибольшее натуральное число, сумма цифр которого равна 11, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Задание 10. Найдите наибольшее натуральное число m , для которого существует натуральное n такое, что выполнено соотношение $\sqrt{33 - 4\sqrt{m}} - \sqrt{17 - 4\sqrt{n}} = 2$.

Ответы на задания по теме № 19

№ задания	Ответ	№ задания	Ответ
1	3 211	6	4
2	4	7	103
3	89	8	13
4	4 680	9	221 111 111
5	20	10	50

Во всех вариантах ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр.

Вариант № 1

- 1 Найдите значение выражения $6,8 - 1\frac{1}{5}$.
- 2 Представьте выражение $a^3 \cdot a^{15} : a^{12}$, где a — натуральное число, в виде a^b . Укажите значение b .
- 4 Найдите в соответствующих единицах измерения массу тела m из равенства $E = \frac{mv^2}{2}$, если энергия и скорость равны соответственно $E = 18$ и $v = 3$.
- 5 Найдите значение выражения $4 \cdot 5^{\log_5 27}$.
- 19 Если в натуральном числе первую цифру поменять с последней цифрой, то число увеличится на 108 %. Найдите наименьшее такое число, не являющееся двухзначным.

Вариант № 2

1 Найдите значение выражения $3,4 - 7,15$.

2 Найдите значение выражения $\frac{3^3}{5^2}$.

4 Найдите в соответствующих единицах измерения пройденный телом путь S из равенства $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, если начальная скорость, ускорение и время равны соответственно $v_0 = 2$, $a = 3$ и $t = 4$.

5 Найдите значение выражения $\sqrt{13\frac{4}{9}} - \sqrt{7\frac{1}{9}}$.

19 Модули чисел a, b, c соответственно равны числам 6, 7, 9. Берется величина A , равная сумме всех возможных различных попарных произведений чисел этого набора, т. е. числу $ab + ac + bc$. Найдите наименьшее возможное значение модуля величины A .

Вариант № 3

1 Найдите значение выражения $2 \cdot \left(4\frac{2}{3} - 7\frac{1}{6}\right)$.

2 Найдите значение выражения $\frac{1}{8} \cdot (a^{-1} \cdot a^5)^2$ при $a = 2$.

4 Альпинист спускался вниз по отвесной скале. Из-под ноги альпиниста сорвался камень, который падал вниз 2,1 секунды. Расстояние h до основания скалы рассчитывается по формуле $h = 5t^2$, где t — время падения камня. Найдите высоту в метрах по отношению к основанию скалы, на которой находится альпинист.

5

Найдите значение выражения $\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin \alpha}$, если

$$\cos \alpha = 0,6 \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

19

Задана система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 10 = 2xy + 5y, \\ \sqrt{7x + 5y - 45} = \sqrt{7x + 5y - 45}. \end{cases}$$

Найдите число целочисленных решений этой системы.

Вариант № 4

1

Найдите 30 % от числа 55.

2

Найдите значение выражения $\left(a^{-1,2} : a^{-4\frac{1}{5}}\right)^2$ при $a = 2$.

4

Найдите в соответствующих единицах измерения ускорение тела a из равенства $\vec{F} = ma$, если сила и массу равны соответственно $F = 12$ и $m = 8$.

5

Найдите значение выражения $\frac{93}{6 - \sqrt{5}} + 7 - 3\sqrt{5}$.

19

Найдите наибольшее натуральное число m , для которого существует натуральное n такое, что выполнено соотношение $\sqrt{9 - 2\sqrt{m}} + \sqrt{21 - 2\sqrt{n}} = 2$.

Вариант № 5

1

Найдите значение выражения $\frac{2,6 - 3,8}{1,5}$.

2 Найдите значение выражения $\frac{2^3 \cdot 3^5}{6^4}$.

4 Пусть основания трапеции равны a и b , высота трапеции равна h . Тогда ее площадь равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту, т. е. вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2}h$.

Найдите высоту трапеции, основания которой равны 2 и 5, а площадь равна 49.

5 Найдите значение выражения $\log_3^2 32 \cdot \log_2^2 9$.

19 Разность двух натуральных чисел равна 24, а наименьшее общее кратное равно 320. Найдите наибольшее из этих чисел.

Вариант № 6

1 Найдите значение выражения $\frac{4}{7} + \frac{8}{35}$.

2 Найдите значение выражения $2^{-4,5} : 2^{-2\frac{1}{4}} \cdot 2^{5,25}$.

4 Футболист послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 21t + 1$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите количество секунд до того момента, когда мяч, падая вниз, будет находиться на высоте 5 метров над футбольным полем.

5 Найдите значение выражения $\frac{340}{9^{\log_3 5}}$.

19 Модули чисел a, b, c, d, e соответственно равны числам 5, 8, 9, 11, 12. Берется величина A , равная

сумме всех возможных различных попарных произведений чисел этого набора, т. е. числу $ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$. Найдите наименьшее возможное значение модуля величины A .

Вариант № 7

1 Найдите значение выражения $\left(1\frac{1}{22} - 2\frac{1}{2}\right) \cdot 33$.

2 Найдите значение выражения $\frac{1}{27} \cdot (a^{-1,2} : a^{-3,7})^2$ при $a = 3$.

4 В электрическую сеть параллельно включены 2 прибора с сопротивлениями R_1 и R_2 . Общее сопротивление цепи определяется формулой $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Определите R_2 , если $R_1 = 25$ Ом и $R = 18,75$ Ом.

5 Найдите значение выражения $\left(\frac{7}{\sqrt{3}-2} - 2 \cdot \sqrt{3} + 14\right)^2$.

19 Для простого числа p рассматривается число $A = |p^2 - 131| + 91$, причем известно, что A также является простым числом. Найдите наибольшее возможное значение числа A .

Вариант № 8

1 Найдите значение выражения

$$\left(4\frac{3}{11} - 4,3\right) \cdot \left(1,7 + 5\frac{1}{7} : \frac{6}{7}\right).$$

2 Найдите значение выражения $\frac{1}{12^3} \cdot (2^4 : 3^{-3})^2$.

- 4 С учетом внутреннего сопротивления справедлива формула $I = \frac{E}{R + r}$ (закон Ома для всей цепи). Здесь I — сила тока, измеряемая в амперах, E — электродвижущая сила в вольтах, r — внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление цепи, измеряемые в омах. Известно, что $E = 220$, $I = 4$, внутреннее сопротивление составляет 2 ома. Найдите внешнее сопротивление цепи в омах.

- 5 Найдите значение выражения $\frac{\log_2 48}{\log_2 3} + \log_3 \frac{27}{16}$.

- 19 Натуральные числа k , m и n удовлетворяют уравнению $19 \cdot 3^k + 12 \cdot (k^2 + (k+1)^2) = (3m-1)^3 - (3n-1)^3$.

Найдите сумму этих чисел или наибольшую из возможных сумм, если натуральных решений этого уравнения несколько.

Вариант № 9

- 1 Найдите значение выражения $7\frac{5}{7} - 5\frac{1}{7} \cdot 3\frac{3}{14}$.

- 2 Найдите значение выражения $\frac{1}{16} \cdot (a^{-2} \cdot a^{3,5})^2$ при $a = 10$.

- 4 Футболист послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 16t + 0,5$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента удара по мячу. Найдите максимальную высоту в метрах, на которую взлетел мяч.

- 5 Найдите значение выражения $A + A^2$, если

$$A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}.$$

- 19 Рассматриваются все натуральные числа, которые делятся нацело на 10 и имеют ровно 10 различных натуральных делителей, включая 1 и само это число. Найдите наибольшее из этих чисел.

Вариант № 10

- 1 Найдите значение выражения $4,86 \cdot \left(1,5 - \frac{1}{6x}\right)$ при $x = 0,9$.

- 2 Найдите значение выражения $\frac{20^{n-3}}{2^{2n-4} \cdot 5^{n-5}}$.

- 4 На хранение было оставлено 12 граммов изотопа менделевий ${}^{262}_{101}\text{Md}$. Через 27 минут осталось полтора грамма изотопа. Определите период полураспада изотопа ${}^{262}_{101}\text{Md}$, т. е. количество минут, в течение которых количество изотопа уменьшается вдвое.

- 5 Найдите значение выражения $\frac{\sin 36^\circ + \sin 24^\circ}{\sin 84^\circ}$.

- 19 В десятичной записи натурального числа нет цифры 8, при этом сумма квадратов его цифр в 8 раз больше суммы его цифр. Найдите наименьшее возможное количество цифр, используемых в десятичной записи этого числа.

ОТВЕТЫ

Вариант Задание	1	2	3	4	5
1	5,6	-3,75	-5	16,5	-0,8
2	6	1,08	32	64	1,5
4	4	32	22,05	1,5	14
5	108	1	-0,625	25	100
19	275	33	3	20	64

Вариант Задание	6	7	8	9	10
1	0,8	-48	-0,21	0,8	6,39
2	8	9	108	62,5	6,25
4	4	75	53	13,3	9
5	13,6	243	4	20	1
19	33	197	4	1 250	5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Краткий теоретический справочник	6
2. Содержание заданий на вычисления и преобразования на базовом ЕГЭ-2016	26
3. Репетиционные варианты	56
Ответы	63

Клово Александр Георгиевич

**МАТЕМАТИКА В ФОРМЕ ЕГЭ. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ.
ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Ответственные редакторы *О. Морозова,
Н. Калиничева*
Технический редактор *Г. Логвинова*
Компьютерная вёрстка *А. Ильинов*

Подписано в печать 08.12.2015.
Формат $84 \times 108^{1/32}$. Бумага тип. № 2.
Тираж 3000 экз. Заказ № 52.

ООО «ФЕНИКС»

344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-75
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.