

К **НОВОЙ** ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

Л. Д. Лаппо, М. А. Попов

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ПРАКТИКУМ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ТЕСТЫ

ЕГЭ

2017

ЕДИНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ



ЭКЗАМЕН

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Л. Д. Лаппо, М. А. Попов

МАТЕМАТИКА

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ТЕСТЫ

*ПРАКТИКУМ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ТИПОВЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ЕГЭ*

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Л24

Лаппо Л. Д.

Л24 ЕГЭ 2017. Математика. Экзаменационные тесты. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 56 с. (Серия «ЕГЭ. ОФЦ. Практикум»)

ISBN 978-5-377-11092-7

Практикум ЕГЭ по математике предназначен как для работы в классе, так и для самостоятельного контроля знаний.

Предлагаемое пособие содержит тренировочные варианты тестовых заданий Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике (профильный уровень), составленные с учетом всех особенностей и требований ЕГЭ, ориентированные на тех учащихся, для которых математика является обязательным предметом при поступлении в выбранный вуз.

Практикум предназначен учителям и методистам, использующим тесты для подготовки учащихся к Единому государственному экзамену, он также может быть использован учащимися для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Справочное издание

Лаппо Лев Дмитриевич, Попов Максим Александрович

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ТЕСТЫ

**ПРАКТИКУМ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ТИПОВЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ЕГЭ**

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат № РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Редактор *И. М. Бокова*, технический редактор *Л. В. Павлова*, корректоры *Л. И. Иванова*, *И. А. Огнева*

Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*, компьютерная верстка *А. С. Федотова*

Формат 60х90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная.

Уч.-изд. л. 3,27. Усл. печ. л. 7. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2002/16.

107045, Москва, Луков пер., д. 8., www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz; по вопросам реализации: sale@examen.biz

тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2;

953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

ISBN 978-5-377-11092-7

© Лаппо Л. Д., Попов М. А., 2017
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы	4
ВАРИАНТ 1	
Часть 1	5
Часть 2	6
ВАРИАНТ 2	
Часть 1	9
Часть 2	11
ВАРИАНТ 3	
Часть 1	15
Часть 2	16
ВАРИАНТ 4	
Часть 1	18
Часть 2	19
ВАРИАНТ 5	
Часть 1	23
Часть 2	24
ВАРИАНТ 6	
Часть 1	26
Часть 2	27
ВАРИАНТ 7	
Часть 1	31
Часть 2	32
ВАРИАНТ 8	
Часть 1	34
Часть 2	35
ВАРИАНТ 9	
Часть 1	39
Часть 2	40
ВАРИАНТ 10	
Часть 1	42
Часть 2	43
ОТВЕТЫ	47
РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 5	
Часть 1	50
Часть 2	52

ИНСТРУКЦИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

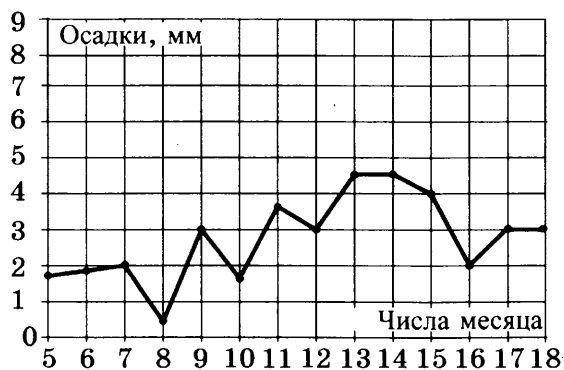
Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

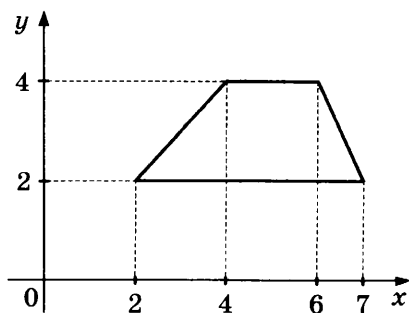
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Брюки стоили 2400 рублей. В ходе сезонной распродажи эти брюки стали стоить 1800 рублей. На сколько процентов была снижена цена на брюки?
2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2016 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из указанного периода выпадало менее 2 миллиметров осадков.



3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (7; 2), (6; 4), (4; 4).



4. В уличном фонаре три лампы. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,8. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

 1 2 3 4

5

6

7

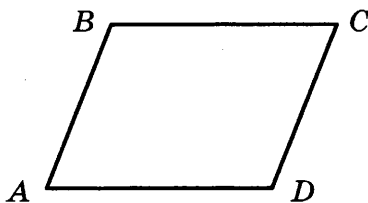
8

9

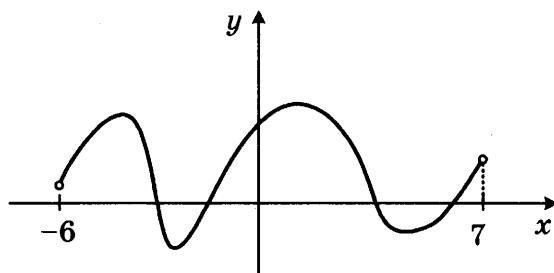
10

5. Решите уравнение $\frac{1}{17x-14} = \frac{1}{16x+32}$.

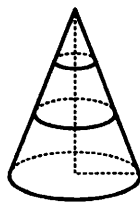
6. Найдите меньший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 13 : 23. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество нулей функции $f(x)$ на данном интервале.



8. В конусе проведено два сечения плоскостями, параллельными плоскости основания конуса. Точками пересечения данных плоскостей с высотой конуса она делится на 3 равных отрезка. Найдите объем средней части конуса, если объем нижней части равен 38.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $3^{2+\log_9 16}$.

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 150 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка составит не менее 560 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. В сосуд, содержащий 8 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 2 литра воды. Какова концентрация получившегося раствора? Ответ дайте в процентах.

	11
--	----

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x + 11$.

	12
--	----

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0$.

	13

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 5.

	14
--	----

- а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостями ABD и CAD_1 .

- б) Найдите тангенс этого угла.

15. Решите неравенство: $\frac{9^x - 5 \cdot 3^x + 3}{3^x - 4} + \frac{3^{x+\log_3 5} - 27}{3^x - 6} \leq 3^x + 4$.

	15
--	----

16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC (с основанием AC), касается его боковых сторон в точках M и N . Точка M делит боковую сторону на отрезки 10 и 7, считая от основания треугольника ABC .

	16
--	----

- а) Докажите, что треугольники MBN и ABC подобны.

- б) Найдите отношение площадей треугольника MBN и трапеции $AMNC$.

17

17. 12-го августа планируется взять кредит в банке на 4 месяца в размере 3 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на p процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где p — натуральное число;
- со 2-го по 11-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 12-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	12.08	12.09	12.10	12.11	12.12
Долг (в млн рублей)	3	2,2	1,7	1	0

Найдите наибольшее значение p , при котором общая сумма выплат не превысит 3,8 млн рублей.

18

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-15 - 8x - x^2} = 4a + 1$ имеет единственный корень.

19

19. На доске написаны числа 1; 2; 3; ..., 33.

За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 36 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример пяти последовательных ходов.
- б) Можно ли сделать 11 ходов?
- в) Какое наибольшее число последовательных ходов можно сделать?

ВАРИАНТ 2

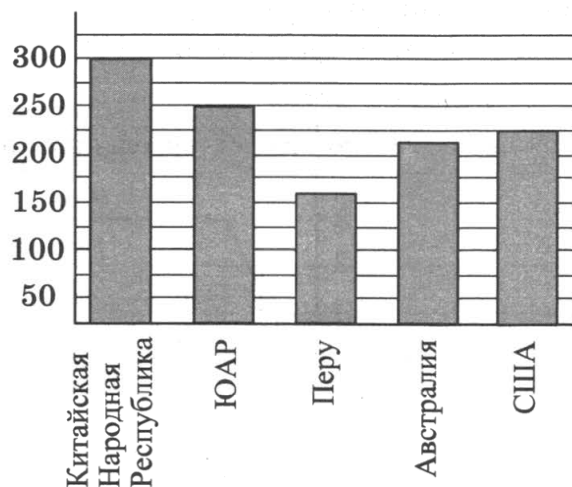
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

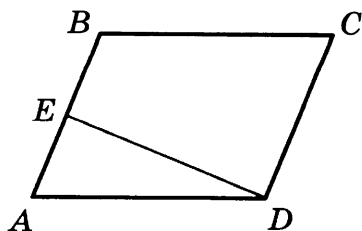
1. Тетрадь стоит 6 рублей. Какую сдачу получит покупатель со 100 рублей при покупке 10 тетрадей после повышения цены тетради на 10%?

 1

2. На диаграмме показано распределение добычи золота в 5 странах мира (в тысячах тонн) за 2015 год. Какое место занимала Австралия среди этих стран?

 2

3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 219, точка E — середина стороны AB . Найдите площадь трапеции $BCDE$.

 3

4

5

6

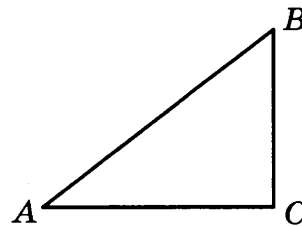
7

8

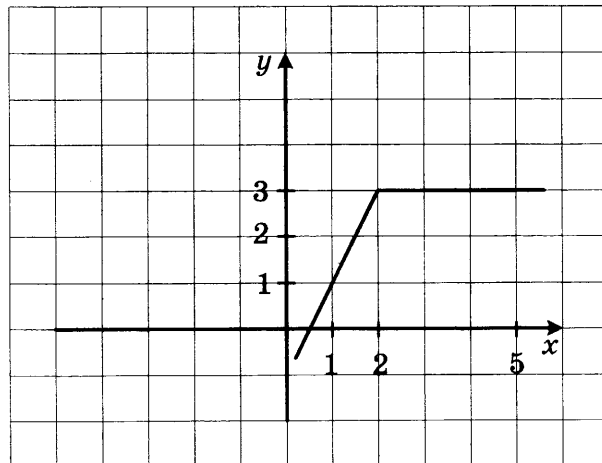
4. В городе N есть три фабрики, выпускающие автомобильные шины. Первая фабрика выпускает 30% этих шин, вторая — 45%, третья — 25%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных шин, вторая — 6%, третья — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине шина не окажется бракованной.

5. Решите уравнение $\frac{3-7x}{2} = 12$.

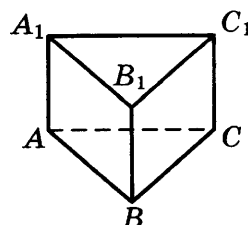
6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $\sin B = \frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите $7\cos B$.



7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $\int_1^5 f(x)dx$.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной $3\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_2 76,8 - \log_2 2,4$.
10. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), от времени описывается формулой $h(t) = -t^2 + 6t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 8 метров.
11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 1 час меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч.
12. Найдите точку максимума функции $y = (x + 4)^2 e^{2-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$.
14. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
а) Опустите перпендикуляр из точки D на плоскость CAD_1 .
б) Найдите его длину.
15. Решите неравенство: $\frac{1 - \log_2(2x^2 - 9x + 9)}{\log_3(x + 8)} \geq 0$.
16. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC (с основанием AC), касается его боковых сторон в точках M и N . Точка M делит боковую сторону на отрезки 18 и 12, считая от основания треугольника ABC .
а) Докажите, что треугольники MBN и ABC подобны.
б) Найдите отношение площадей треугольника MBN и трапеции $AMNC$.

9

10

11

12

13

14

15

16

17




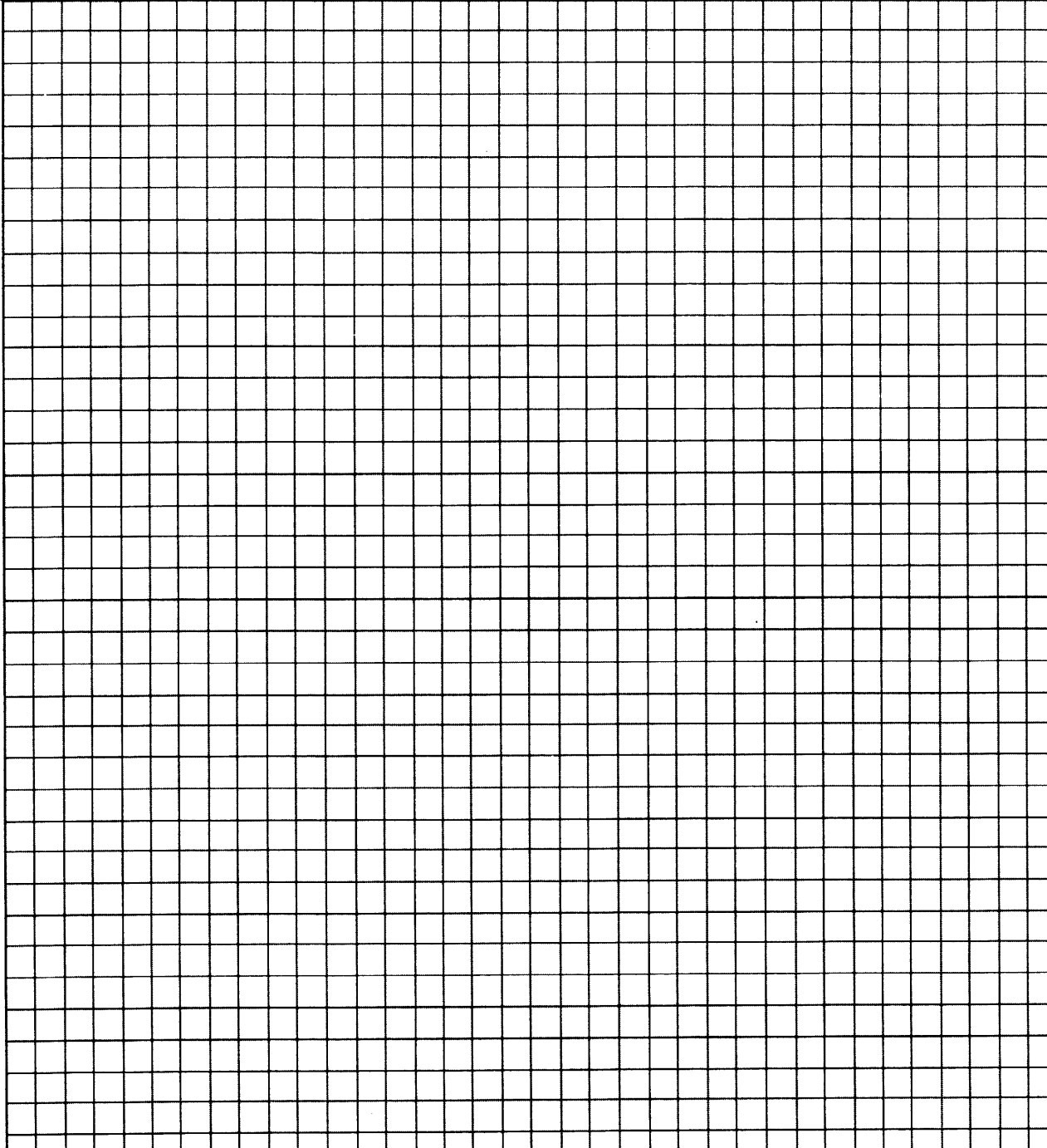
17. 12 ноября 2015 года Дмитрий взял в банке 1 803 050 рублей в кредит под 19% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 12 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг целиком тремя равными платежами?

18

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = 2ax - 2$ имеет на промежутке $(0; +\infty)$ единственный корень.

19

19. Докажите, что уравнение $x^2 + 2 = 5y$ не имеет решений в целых числах.

		▶ Единый государственный экзамен ▶ Бланк ответов № 2 		
Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта	
Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1 . Условия задания переписывать не нужно.				
ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета				
				

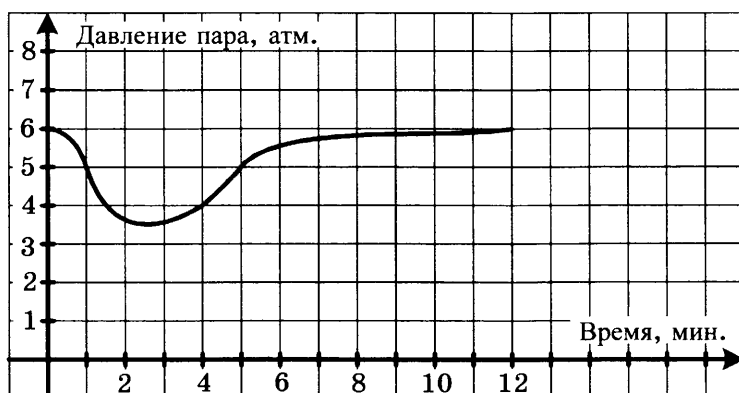
При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ВАРИАНТ 3

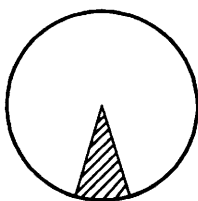
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Цена на пылесос была повышена на 14% и составила 12 768 рублей. Сколько рублей стоил пылесос до повышения цены?
2. На графике показано изменение давления в паровой турбине после запуска. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — давление в атмосферах. Определите по графику, сколько минут давление было меньше 5 атмосфер.



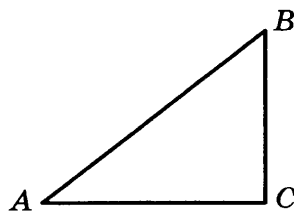
3. Найдите площадь сектора круга радиуса $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, центральный угол которого равен 36° .



4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.
5. Решите уравнение $\log_2(x - 4) = 3$.

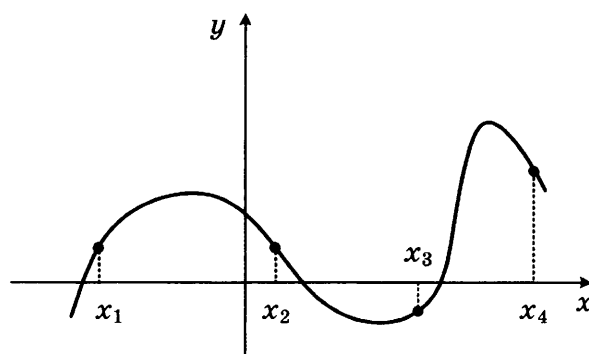
6

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C , $AB = \sqrt{74}$, $\sin A = \frac{5}{\sqrt{74}}$. Найдите AC .



7

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3 и x_4 те, в которых производная функции $y = f(x)$ положительна. В ответ запишите количество найденных точек.



8

8. Объем правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S равен 30. Найдите площадь треугольника ABC , если высота пирамиды SO равна 10.

Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}\right)^{30}}{90}$.

10

10. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11

11. Из двух поселков, расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу вышли два пешехода. Через сколько часов они встретятся, если их скорости равны 3,5 км/ч и 4,5 км/ч?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 27x - 13 \sin x + 11$ на отрезке $[-4\pi; 0]$.

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.
14. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и CA_1 .
15. Решите неравенство: $\frac{\log_x (x-3)}{\log_{x^2} (5-x) - 1} \geq 0$.
16. Вневписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC .
а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC .
б) Найдите площадь $\triangle ABC$, если радиус окружности равен 4, а $AC \cdot AB = 30$.
17. 17 декабря 2015 года Анна взяла в банке 232 050 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 17 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анна переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Анна выплатила долг целиком четырьмя равными платежами?
18. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} x + y + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4x + y^2 + 4y \leq a^2 - 8 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.
19. Решите уравнение $4^{xy} = 2^{2014}$ в целых числах.

 13 14 15 16 17 18 19

ВАРИАНТ 4

Часть 1

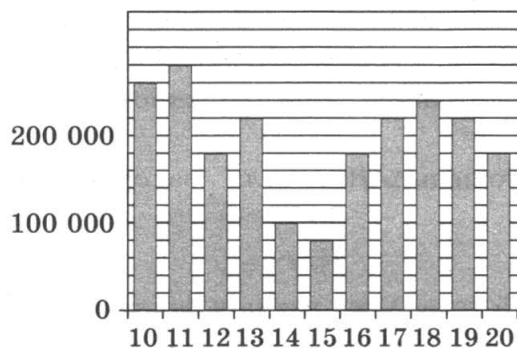
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

1. Налог на доходы составляет 13%. Сколько рублей составляет заработная плата Андрея Петровича, если после удержания налога он получил 19 140 рублей?

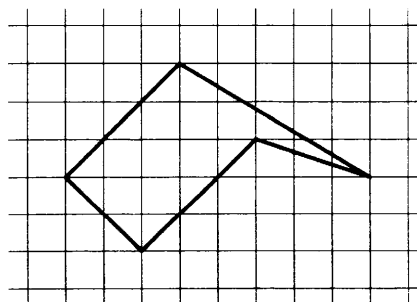
2

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ во все дни с 10 сентября по 20 сентября 2015 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта по подготовке к ЕГЭ за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей данного сайта за день было больше, чем наименьшее количество посетителей за день за указанный период времени.

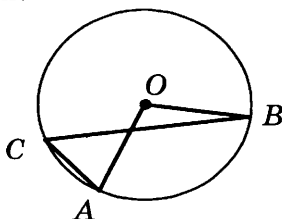


3

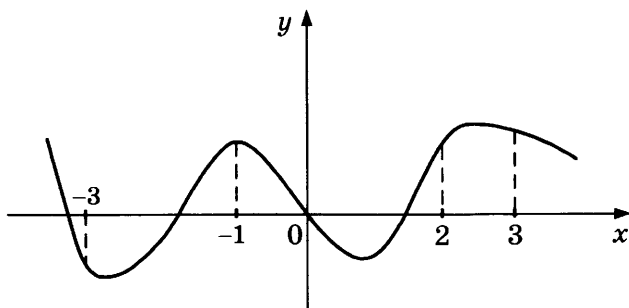
3. Найдите площадь пятиугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают 4 раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет хотя бы 1 раз.
5. Решите уравнение $\sqrt{2x+3} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.
6. Центральный угол на 62° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3, -1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8. Объем цилиндра равен π . Найдите высоту цилиндра, если диаметр его основания равен 1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2^{3-7\sqrt{2}} \cdot 8^{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$.
10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 16 А. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.
11. 3 килограмма яблок стоят столько же, сколько 4 килограмма бананов. На сколько процентов 10 килограммов бананов дешевле 10 килограммов яблок?

12

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 11)e^{x-10}$ на отрезке $[9; 14]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

14

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1
а) Постройте угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .
б) Найдите косинус этого угла.

15

15. Решите неравенство: $\frac{3^{x^2-1} + 3^{x^2-2} + 3^{x^2-3}}{x} \leq 1 \frac{12}{27} (\sqrt{x})^{-2}$.

16

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 3$; $AC = 5$ вписан квадрат $ADEF$.
а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.
б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

17


17. 1 февраля 2016 года Андрей Петрович взял в банке 1,6 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Андрей Петрович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей Петрович должен взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 350 тыс. рублей?

18

18. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} \log_a(2x + y + 1) = -x - 4y - 6 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

19

19. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором число $2014! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2013 \cdot 2014$ не делится на n^{n^2} .

▶ Единый государственный экзамен ▶ Бланк ответов № 2			
Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта
Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1 . Условия задания переписывать не нужно.			
ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета			
<div style="border: 1px solid black; height: 600px; width: 100%;"></div>			

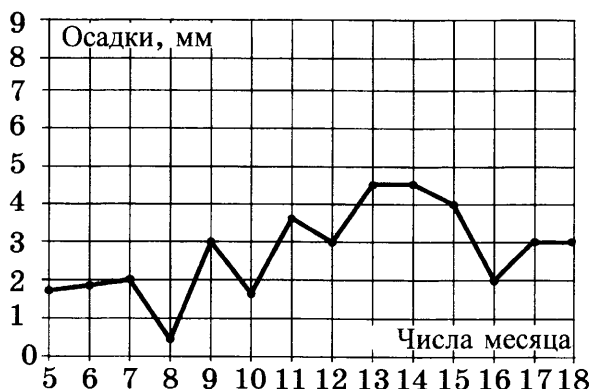
При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ВАРИАНТ 5

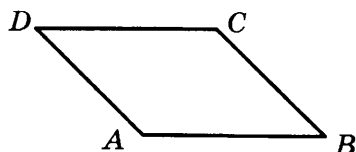
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?
2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.



3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150° .

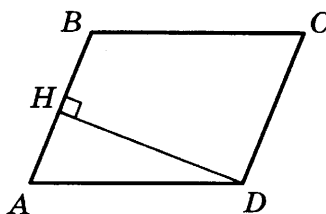


4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^x$.

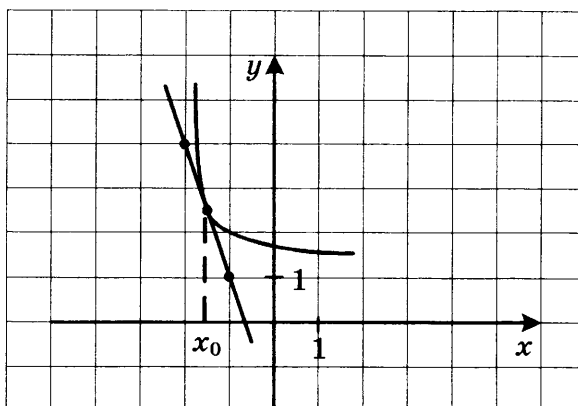
6

6. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB , равна 12, $AD = 13$. Найдите $13\sin B$.



7

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите $f'(x_0)$.



8

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $\frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

10

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с². За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

11

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7 \ln(x + 5) + 3,8$ на отрезке $[-4, 9; 0]$.

	12
--	----

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 5\pi]$.
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .
15. Решите неравенство: $\sqrt{4 - x^2} (4 + 5x + x^2) \geq 0$.
16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.
а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.
б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.
17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?
18. Найдите все значения a , при которых область определения функции $y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{a} \right)^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}}$ содержит ровно два целых числа.
19. Решите уравнение $x^2 + 3 = 7y$ в целых числах.

	13
--	----

	14
--	----

	15
--	----

	16
--	----

	17
--	----

	18
--	----

	19
--	----

ВАРИАНТ 6

Часть 1

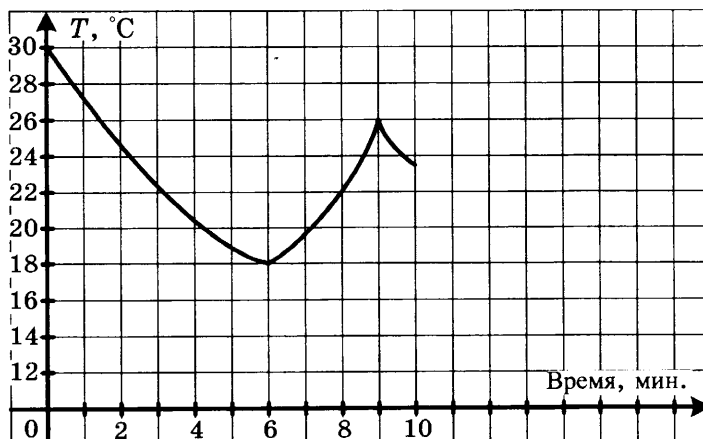
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

1. Число сдающих ЕГЭ по математике базового уровня за последний год увеличилось втрое. На сколько процентов увеличилось число сдающих ЕГЭ по математике базового уровня за последний год?

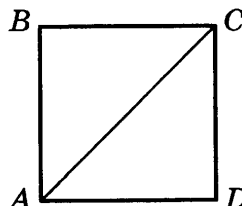
2

2. На графике показано изменение температуры в классе после включения кондиционера. На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, кондиционер автоматически выключается, и температура начинает расти. По графику определите, сколько минут работал кондиционер до первого выключения.



3

3. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 8.



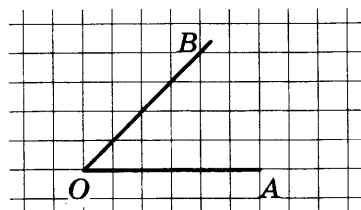
4

4. Игральный кубик бросают трижды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию $A = \{\text{сумма очков не более 6}\}$?

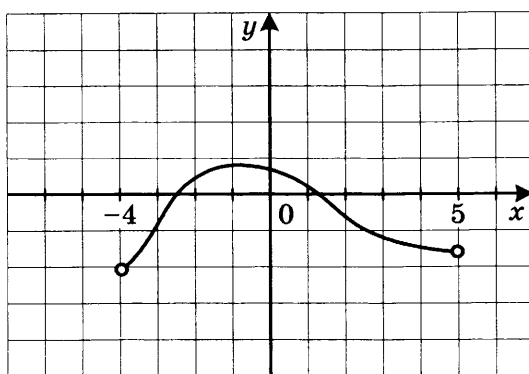
5. Решите уравнение $5^{\log_{25}(4x-7)} = 11$.

 5

6. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $17\sqrt{2}$.

 6


7. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$.

 7


8. Площадь поверхности куба равна 242. Найдите его диагональ.

 8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 - 10a + 25}$ при $a \in [3; 4]$.

 9

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с². За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 32 метра. Ответ выразите в секундах.

 10

11. Заказ в 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 3 детали меньше, чем первый рабочий?

 11

12

12. Найдите наибольшее значение функции $x^5 - 3x^3 + 4x$ на отрезке $[-3; -1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 - \operatorname{ctg} x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13.

а) Постройте линейный угол двугранного угла между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы.

б) Найдите величину этого угла.

15

15. Решите неравенство: $\log_2(x-3)^2 + \log_{0,5}(x^2-9) < 1$.

16

16. Внеписанная в треугольник ABC окружность касается его боковой стороны и продолжения основания AC .

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте BH треугольника ABC .

б) Найдите площадь $\triangle ABC$, если радиус окружности равен 8, а $AC \cdot AB = 120$.

17



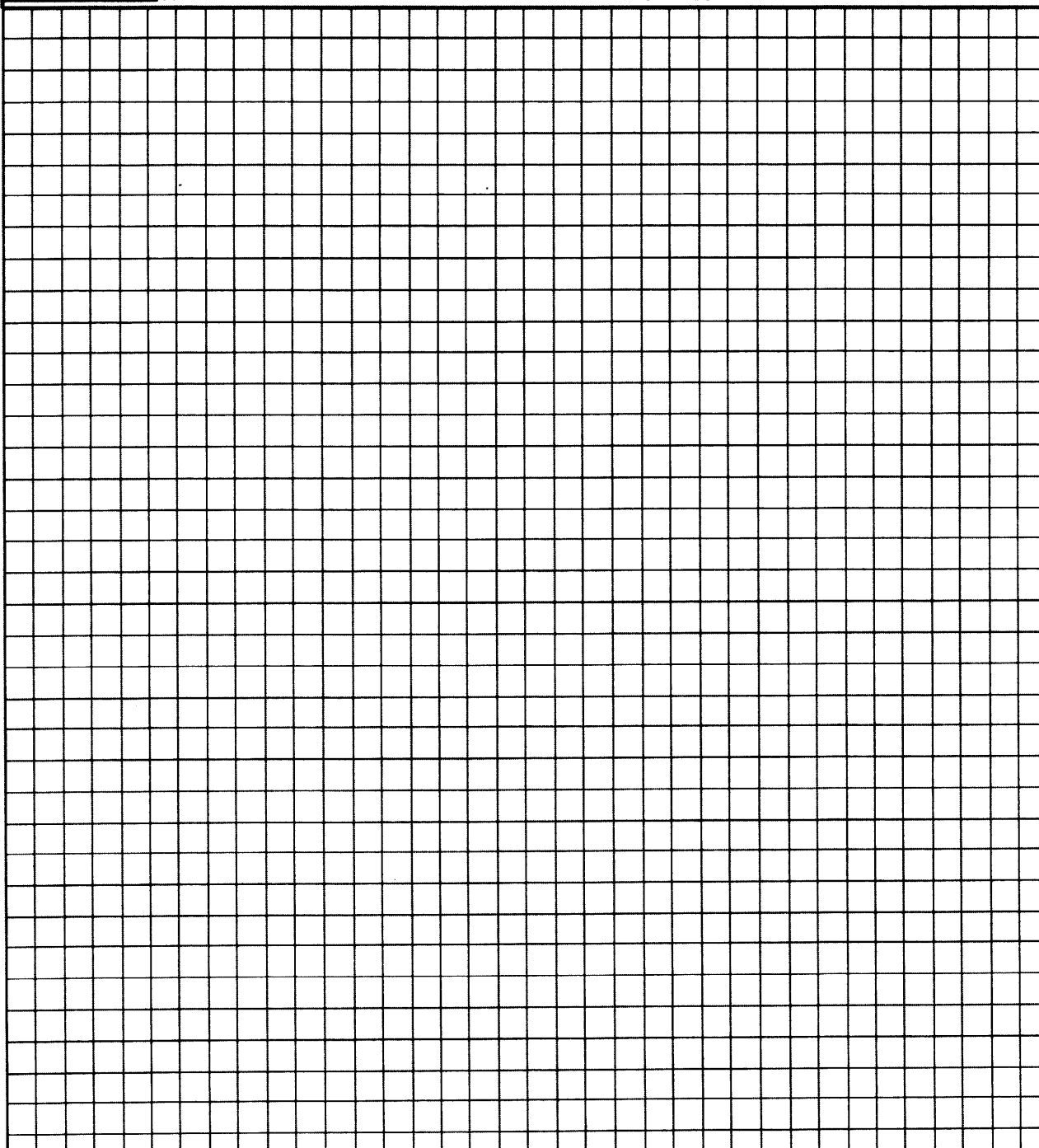
17. 18 декабря 2015 года Андрей взял в банке 85 400 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 18 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Андрей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Андрей выплатил долг целиком двумя равными платежами?

18

18. Найдите наибольшее целое значение параметра k , при котором все решения неравенства $|||31x - 147| + 157| - 167| + 177| - 187 \leq 93k^4$ принадлежат отрезку $[-190; 200]$.

19

19. Решите уравнение $mn^2 + 46 = 11m$ в натуральных числах.

		» Единый государственный экзамен		
» Бланк ответов № 2				
Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта	
Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1 . Условия задания переписывать не нужно.				
ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета				
				

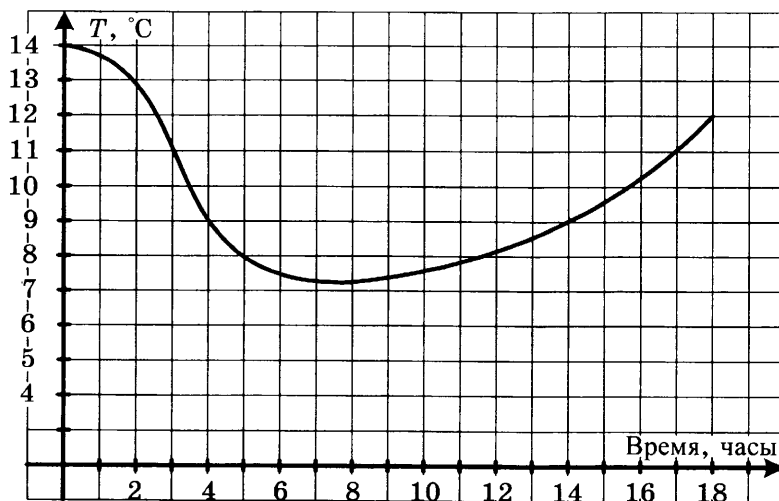
При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ВАРИАНТ 7

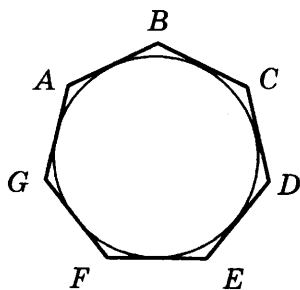
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В городе N живет 100 000 жителей. Среди них — 30% детей и подростков. Среди взрослых 70% работают. Сколько взрослых не работает?
2. На рисунке показан график изменения температуры воздуха. Сколько часов температура была ниже 9 градусов?



3. Найдите площадь семиугольника, если его периметр равен 20, а радиус вписанной в этот семиугольник окружности равен 2.



4

5

6

7

8

9

10

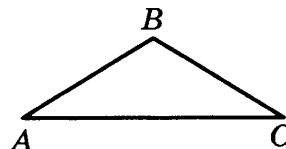
11

12

4. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится нацело на 195? Ответ округлите до тысячных.

5. Решите уравнение $\cos \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответ напишите наименьший положительный корень.

6. Один из углов равнобедренного треугольника равен 176° . Найдите один из двух других его углов. Ответ дайте в градусах.



7. Прямая $y = 2x - 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Во сколько раз увеличится диагональ куба, если его ребра увеличить в 10 раз?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $-47 \operatorname{ctg} 1305^\circ$.

10. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 8$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

11. Андрей при подготовке к ЕГЭ поставил себе задачу — решать каждый день на 5 задач больше, чем в предыдущий. За первый день он решил 7 задач, а за последний — 37 задач. Сколько задач он решил всего?

12. Найдите наименьшее значение функции $e^{4x} - 5e^{2x} + 11$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3^x + 2 \cdot 3^{-x-2} = 1$.

	13

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5, 5; -1]$.

14. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы — треугольник ABC , в котором $AB = BC$, $AC = 6$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью ACC_1 .

	14
--	-----------

15. Решите неравенство: $\sqrt{25 - x^2} \log_{x+5} 2 \leq 0$.

	15
--	-----------

16. Две окружности касаются внешним образом в точке L . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BL пересекает первую окружность в точке D , прямая AL пересекает вторую окружность в точке C .

	16
--	-----------

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ALB , если известно, что радиусы окружностей равны 8 и 2.

17. Лев взял кредит в банке на срок 40 месяцев. По договору Лев должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $p\%$ этой суммы, затем следует платеж Льва.

	17
--	-----------

Ежемесячные платежи подбираются таким образом, чтобы долг уменьшался равномерно.

Известно, что наибольший платеж Льва был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга. Найдите p .

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + x^2} = x^2 - a$ имеет ровно два различных корня.

	18
--	-----------

19. Докажите, что уравнение $3x^2 + 3 = 7y$ не имеет решений в целых числах.

	19
--	-----------

ВАРИАНТ 8

Часть 1

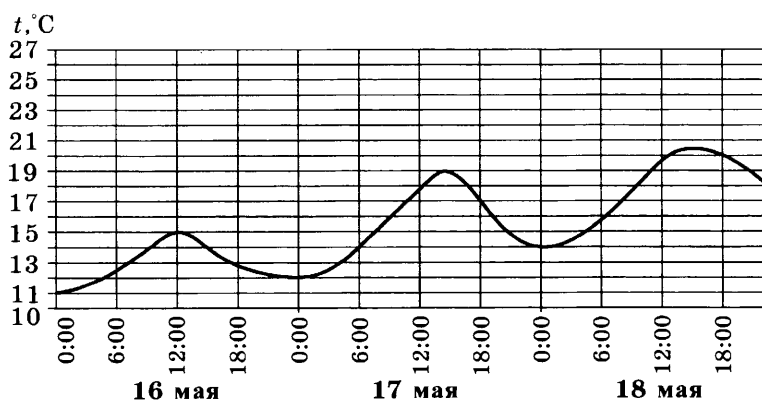
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

1. В доме, в котором живет Максим, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Максим живет в квартире № 177. В каком подъезде живет Максим?

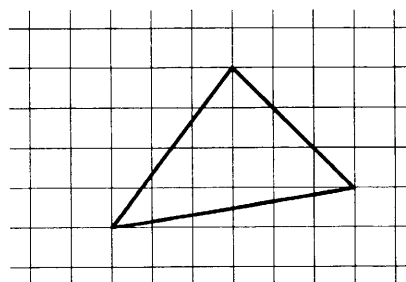
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



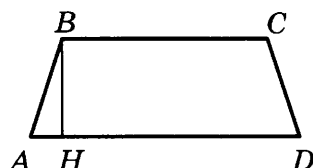
4. Найдите вероятность того, что при рассадке случайным образом за круглым столом группы, состоящей из 7 мальчиков и 2 девочек, девочки не будут сидеть рядом.

 4

5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} = 64$.

 5

6. Основания равнобедренной трапеции равны 114 и 186. Высота трапеции равна 45. Найдите котангенс острого угла трапеции.

 6

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - 13t + 37$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах (измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

 7

8. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если стороны ее основания равны 6, а объем равен $3\sqrt{3}$.

 8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{7} + 3\sqrt{2})$.

 9

10. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в цепи в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 8А. Определите, какое наименьшее сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

 10

11. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

 11

12. Найдите наибольшее значение функции $\log_9(2 - x^2 + 2x) + 4$.

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

14

15

16

17

18

19

13. а) Решите уравнение $7^{\sin 3x} \cdot 3^{2 \sin 3x} = 63^{\cos 3x}$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. В шаре проведено два сечения параллельными плоскостями, причем одно из них проходит через центр шара. Расстояние между плоскостями равно 3, а площадь меньшего сечения равна 16π . Найдите площадь поверхности шара.

15. Решите неравенство: $\log_3 (x-1)^{36} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{-24} < 12$.

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r , касающаяся стороны AC в точке D , причем $AD = r$.




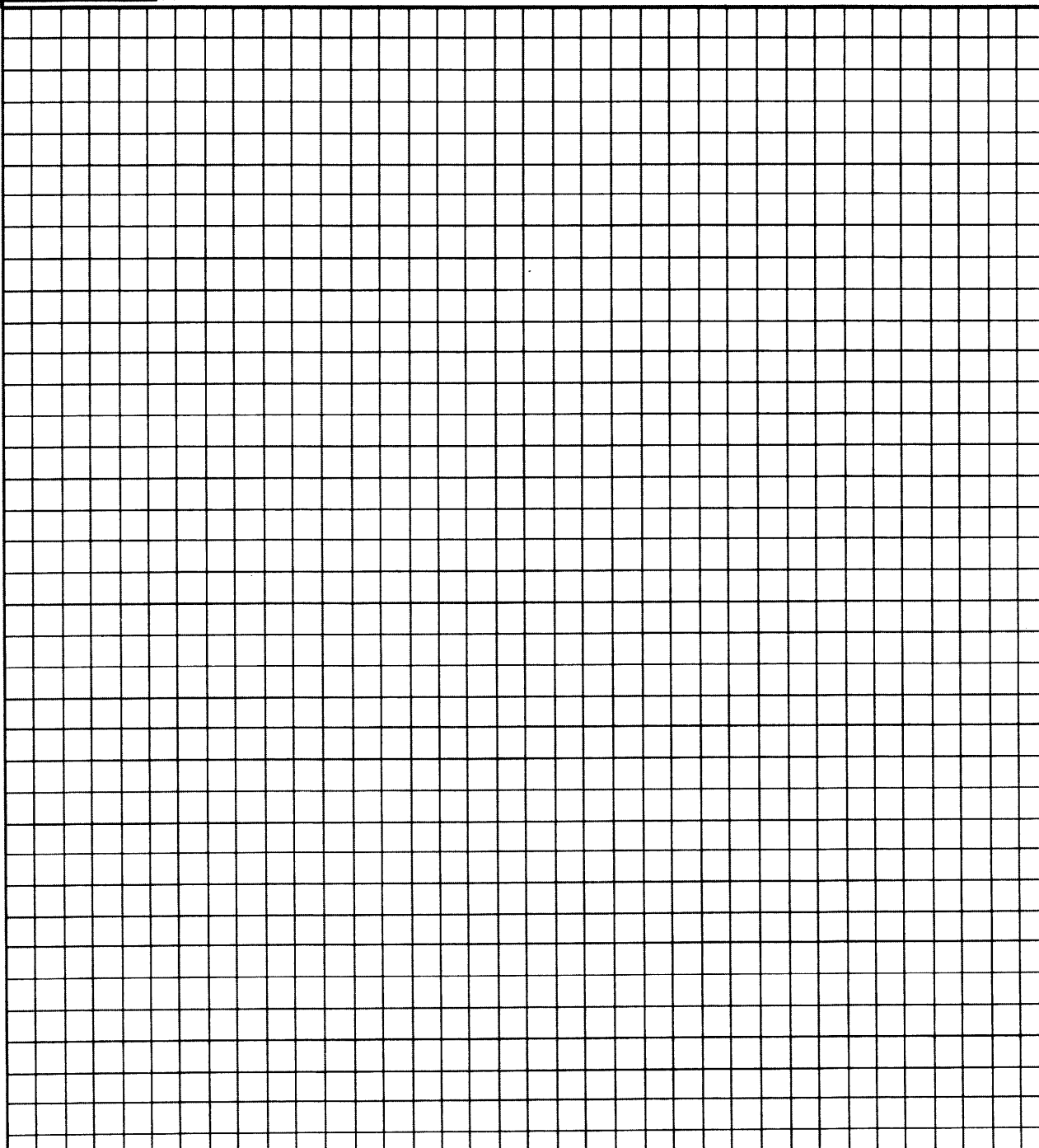
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N . Найдите площадь треугольника BMN , если известно, что $r = 1$ и $CD = 3$.

17. На первый курс на специальность «Оборудование и машины» поступило 46 человек: 34 мальчика и 12 девочек. Их распределяют по двум группам численностью 22 и 24 человека, причем в каждой группе должна учиться по крайней мере одна девочка. Каким должно быть распределение по группам, чтобы сумма чисел, равных процентам девочек в первой и второй группах, была наибольшей?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{9^x - a} = 3^x - 2a$ не имеет корней.

19. Найдите наименьшее натуральное n , при котором число $2014! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2013 \cdot 2014$ не делится на n^{n^5} .

		▶ Единый государственный экзамен ▶ Бланк ответов № 2 		
Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта	
Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1 . Условия задания переписывать не нужно.				
ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета				
				

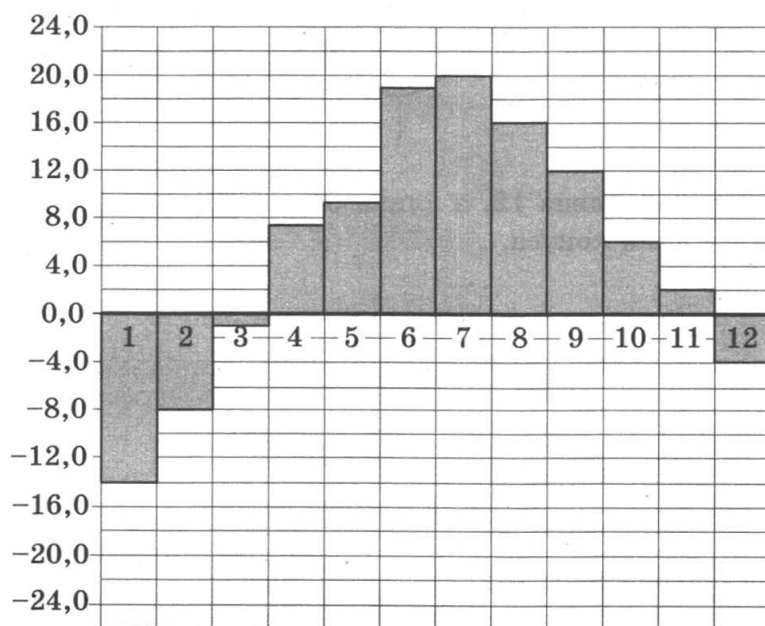
При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ВАРИАНТ 9

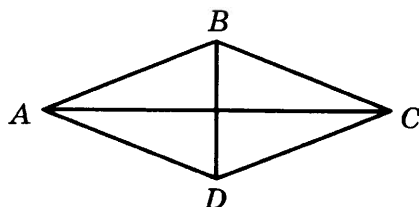
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Лыжник проехал 5 километров за 24 минуты. Найдите среднюю скорость лыжника на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.
2. На диаграмме показана среднемесячная температура в Санкт-Петербурге за все месяцы 2015 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 15 градусов Цельсия.



3. В ромбе $ABCD$ $AC = 12$; $BD = 5$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$.



4

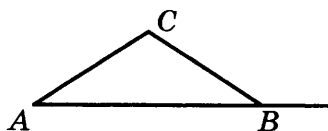
4. В сборнике билетов по геометрии всего 64 билета, в 16 из них встречается вопрос по теме «Треугольники». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Треугольники».

5

5. Решите уравнение $3^{5x-1} = 27$.

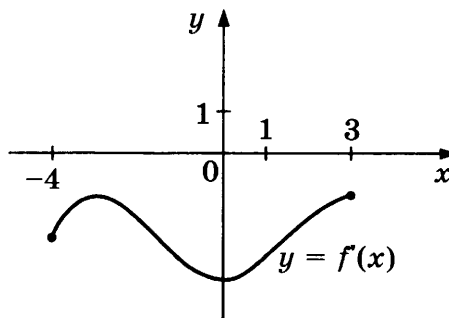
6

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B .



7

7. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 3]$. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$. В какой точке отрезка функция принимает наименьшее значение?



8

8. Высота конуса равна 12, а длина образующей — 15. Найдите диаметр основания конуса.

Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 74}{\log_{27} 74}$.

10

10. Камень брошен вниз с высоты 4 м. Высота h (в метрах), на которой находится камень во время падения, зависит от времени t (в секундах): $h(t) = 4 - 3t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

11

11. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист и одновременно из B в A выехал автомобилист. Мотоциклист прибыл в B через 2 часа после встречи, а автомобилист в A через 30 минут после встречи. Сколько часов был в пути мотоциклист?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 6x + 194$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3^{4\sin x} + 4 \cdot 3^{2\sin x} - 21 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ со стороной основания 2 и боковым ребром 3 точка M делит ребро SD в отношении 1 : 2 (считая от вершины S).
а) Постройте угол между прямой BM и плоскостью AEC .
б) Найдите величину этого угла.
15. Решите неравенство: $\frac{x^2 - 1,5x - 1}{\log_{\sqrt{2}} |x|} < 0$.
16. Две окружности касаются внешним образом в точке L . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BL пересекает первую окружность в точке D , прямая AL пересекает вторую окружность в точке C .
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника ALB , если известно, что радиусы окружностей равны 1,25 и 5.
17. В мае 2017 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S млн рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый декабрь каждого года долг возрастает на 10%;
— с января по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в мае 2018, 2019 и 2020 годов долг остается равным S млн рублей;
— выплаты в 2021, 2022 и 2023 годах равны между собой;
— к маю 2023 года долг будет выплачен полностью.
Найдите наименьшее целое S , при котором общая сумма выплат не превысит 13 млн рублей.
18. Найдите все значения a , при которых областью определения функции $y = \frac{1}{2^{2x} - 2^x - a}$ является вся числовая прямая.
19. Решите уравнение $x^2 + 2 = 3y$ в целых числах.

13

14

15

16

17

18

19

ВАРИАНТ 10

Часть 1

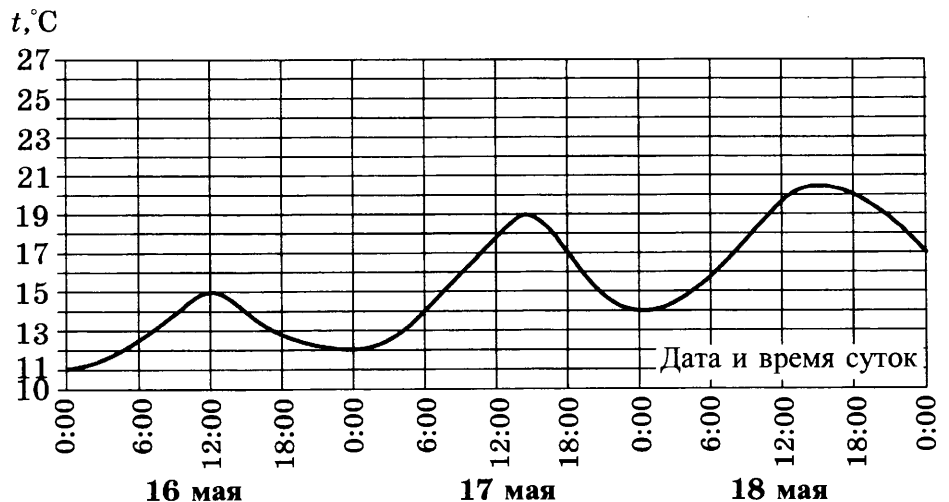
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

1. Таксист за месяц проехал 2300 км. Цена бензина 37 рублей за литр. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

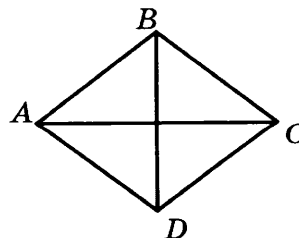
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разницу между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 17 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 8.



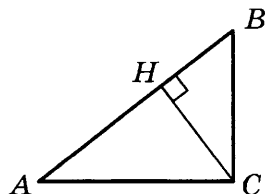
4. Вероятность того, что новый телевизор прослужит больше 5 лет, равна 0,92. Вероятность того, что он прослужит больше 10 лет, равна 0,39. Найдите вероятность того, что он прослужит больше 5 лет, но меньше 10.

 4

5. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = 13$.

 5

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C CH — высота, $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $AC = 4$. Найдите $2\sqrt{5} AH$.

 6


7. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - c$. Найдите c .

 7

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $AD = \sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали параллелепипеда AC_1 .

 8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + 1$.

 9

10. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию некоторого предприятия от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

 10

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 120 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 300 м, за 15 с. Найдите длину поезда (в метрах).

 11

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 576}{x}$.

 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\log_{2016}(\sin x + \sqrt{3} \cos x + 2016) = 1$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

14

14. В правильной шестиугольной призме $AB...E_1F_1$ со стороной основания 4 и боковым ребром 2

а) Опустите перпендикуляр из точки C на прямую E_1F_1 .

б) Найдите его длину.

15

15. Решите неравенство: $\frac{(4x+7)^2}{x-3} \geq \frac{56x+49+16x^2}{21-10x+x^2}$.

16

16. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r , касающаяся стороны AC в точке D , причем $AD = r$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках M и N . Найдите площадь четырехугольника $AMNC$, если известно, что $r = 2$ и $CD = 6$.

17

17. По вкладу «Классика» банк в конце каждого года планирует начислять 12% годовых, а по вкладу «Бонус» — увеличивать сумму вклада на 7% в первый год и на одинаковое целое число n процентов в последующие годы.


Найдите наименьшее значение n , при котором за 4 года хранения вклад «Бонус» окажется выгоднее вклада «Классика» при равных суммах первоначальных взносов.

18

18. Найдите все значения параметра a , при которых область определения функции $y = \log_2(\log_2(a-x)) \cdot \log_2 x$ содержит ровно пять целых чисел.

19

19. Решите уравнение $3^m + 4^n = 73$ в натуральных числах.

▶ Единый государственный экзамен ▶ Бланк ответов № 2			
Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта
Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ. Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1 . Условия задания переписывать не нужно.			
ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета			
<div style="border: 1px solid black; height: 600px; width: 100%;"></div>			

При недостатке места для ответа используйте обратную сторону бланка

ОТВЕТЫ

№ задания	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25	34	11200	22000	4	200	21000	5	12,5	7659
2	4	4	4	3,5	9	6	10	12	3	7
3	7	164,25	0,9	14	140	4	20	10,5	6,5	56
4	0,488	0,9615	0,08	0,9375	0,001	20	0,006	0,75	0,75	0,53
5	46	-3	12	-1	-0,75	32	1	2	0,8	86
6	65	3	7	62	12	17	2	0,8	-0,75	8
7	4	11	2	-3	-3	2	1,5	37	3	-5
8	14	4,5	9	4	6	11	10	1	18	6
9	36	5	0,1	8	10,5	3	-47	10	3	2
10	8	2	75	13,75	2	2	62,5	27,5	1	8
11	8	10	2,5	25	90	12	154	48	3	200
12	1	-2	11	-1	-24,2	-2	4,75	4,5	1	24

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$	а) πn ; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$ б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; 0	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$
14	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
15	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 4; \log_3 6)$	$(-8; -7) \cup [1; 1,5) \cup (3; 3,5]$	$(3; 4]$
16	б) $\frac{49}{240}$	б) $\frac{4}{21}$	б) 12
17	10	842579,5	73205
18	$a \in \left[-\frac{1}{7}; -\frac{1}{9}\right) \cup \{0\}$	$a \in \left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$	$a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
19	а) Например: (1; 2; 20); (3; 4; 19); (5; 6; 18); (7; 8; 17); (9; 10; 16) б) нет в) 6		(1; 1007); (19; 53); (53; 19); (1007; 1); (-1; -1007); (-19; -53); (-53; -19); (-1007; -1)

	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
13	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n; \arctg 2 + \pi n;$ $n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \arctg 2; \arctg 2 + \pi$	а) $\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi$	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$
14	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	$\sqrt{3}$	60°
15	$(0; 1]$	$\{-2\} \cup [-1; 2]$	$(-\infty; -9) \cup (3; +\infty)$
16	б) $\frac{5}{6}$	б) $1,5$	б) 48
17	5	6	51529
18	$a = e^{-\frac{1}{e}}$ или $a > 1$	$a \in (1,5; 2] \cup [3; 3,5)$	$k = 2$
19	13	$\begin{cases} 7k + 2; 7k^2 + 4k + 1; \\ 7k + 5; 7k^2 + 10k + 4; \end{cases} k \in \mathbb{Z}$	$(23; 3)$

	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
13	а) $-1; \log_3 2 - 1$ б) -1	а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}$	а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{11\pi}{6}$
14	$0,3$	100π	$\arctg \frac{\sqrt{65}}{13}$
15	$(-5; -4) \cup \{5\}$	$(-2; 1) \cup (1; 4)$	$(-1; -0,5) \cup (1; 2)$
16	б) $12,4$	б) $1,6$	б) 5
17	$1,5$	В одной группе — 11 девочек и 11 мальчиков; в другой — одна девочка и 23 мальчика	8
18	$a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$	$a \in (-\infty; -0,25)$
19		4	$\begin{cases} 3k + 1; 3k^2 + 2k + 1; \\ 3k + 2; 3k^2 + 4k + 2; \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

	Вариант 10
13	а) $-\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$
14	$2\sqrt{13}$
15	$\left\{-\frac{7}{4}\right\} \cup (3; 7) \cup [8; +\infty)$
16	б) 17,6
17	14
18	$a \in (6; 7]$
19	(2; 3)

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 5

Часть 1

1. Билет на поезд стоит 200 рублей. Какое наибольшее число билетов можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены билета на 15%?

Решение

$$200 \text{ р.} — 100\%$$

$$x \text{ р.} — 115\%$$

$$x \cdot 100 = 200 \cdot 115$$

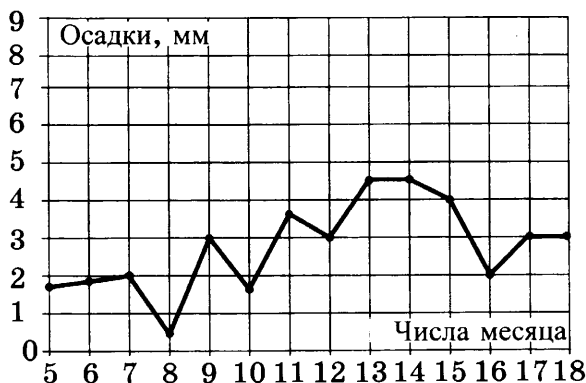
$$100x = 23\,000$$

$$x = 230 \text{ (р.)} — \text{цена на билет после повышения цены на } 15\%.$$

$$4 \cdot 230 = 920; 5 \cdot 230 = 1150 > 1000$$

Ответ: 4.

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 5 до 18 марта 2015 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 3 миллиметра осадков.

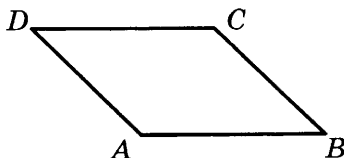


Решение

По рисунку видно, что 3 миллиметра осадков впервые выпало 9-го числа.

Ответ: 9.

3. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 14 и 20, а угол между ними равен 150° .



Решение

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin \angle BAD = 14 \cdot 20 \cdot \sin 150^\circ = 280 \cdot \frac{1}{2} = 140.$$

Ответ: 140.

4. Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок промахнется все 3 раза.

Решение

Так как результаты каждого выстрела независимы друг от друга, то мы можем применить теорему умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность промаха при каждом выстреле равна $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность промахнуться три раза равна $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$.

Ответ: 0,001.

5. Решите уравнение $17^{2x+3} = \left(\frac{1}{289}\right)^x$.

Решение

$$17^{2x+3} = (17^{-2})^x$$

$$17^{2x+3} = 17^{-2x}$$

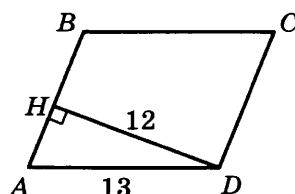
$$2x + 3 = -2x$$

$$4x = -3$$

$$x = -0,75$$

Ответ: -0,75.

6. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB , равна 12, $AD = 13$. Найдите $13\sin B$.



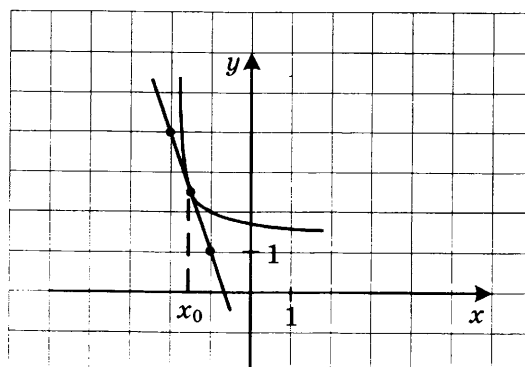
Решение

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - \angle A; \sin B = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\sin A = \frac{DH}{AD} = \frac{12}{13} = \sin B \Rightarrow 13 \sin B = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12.$$

Ответ: 12.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите $f'(x_0)$.



Решение

По геометрическому смыслу производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . По рисунку видно, что этот угловой коэффициент равен -3 .

Ответ: -3 .

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а его высота равна 4. Найдите диаметр основания цилиндра.

Решение

$$S_{б.п.} = 2\pi Rh = 24\pi \Rightarrow Rh = 12 \Rightarrow R = \frac{12}{h} = \frac{12}{4} = 3$$

$$D = 2R = 6.$$

Ответ: 6.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ}$.

Решение

$$\frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin 226^\circ} = \frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{\sin(2 \cdot 113^\circ)} = \frac{21 \sin 113^\circ \cos 113^\circ}{2 \sin 113^\circ \cos 113^\circ} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с². За t секунд после начала торможения он проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 48 метров. Ответ выразите в секундах.

Решение

$$30t - 3t^2 = 48$$

$$3t^2 - 30t + 48 = 0$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 16 = 36$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Из физических соображений (через 5 секунд автомобиль остановится) верный ответ: $t = 2$.

Ответ: 2.

11. Автомобиль двигался половину времени со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение

$$V_{\text{ср.}} = \frac{S_{\text{общ.}}}{t_{\text{общ.}}} = \frac{80 \cdot \frac{t}{2} + 100 \cdot \frac{t}{2}}{t} = 90 \text{ (км/ч)}$$

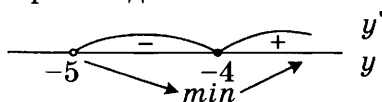
Ответ: 90.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7 \ln(x + 5) + 3,8$ на отрезке $[-4, 9; 0]$.

Решение

$$y' = 7 - \frac{7}{x+5} = \frac{7x+28}{x+5} = \frac{7(x+4)}{x+5}$$

Так как область определения функции — числовой луч $(-5; +\infty)$, то имеем следующую схему поведения функции и ее производной:



$$y(-4) = -28 - 7 \ln 1 + 3,8 = -28 + 3,8 = -24,2$$

Ответ: -24,2.

13. а) Решите уравнение $\sin^2 x = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 5\pi]$.

Решение

$$\text{а) } \sin^2 x = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin^2 x = 5 \sin x$$

$$\sin^2 x - 5 \sin x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } 0 \leq \pi n \leq 5\pi$$

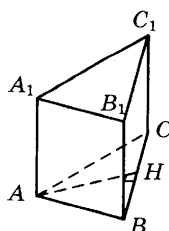
$$0 \leq n \leq 5$$

Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, то $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Получаем корни $0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .



Решение

Плоскость ABC перпендикулярна ребру AA_1

$$\text{пр}_{ABC}(AA_1) = A$$

$$\text{пр}_{ABC}(BC_1) = BC$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство: $\sqrt{4 - x^2}(4 + 5x + x^2) \geq 0$.

Решение

$$\sqrt{(2 - x)(2 + x)}(x + 1)(x + 4) \geq 0$$

$$\begin{cases} (2 - x)(2 + x) = 0 \\ (2 - x)(2 + x) > 0 \\ (x + 1)(x + 4) \geq 0 \end{cases}$$

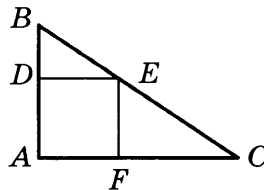
$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x \in [-1; 2) \end{cases}$$

Ответ: $\{-2\} \cup [-1; 2]$.

16. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и катетами $AB = 2$; $AC = 6$ вписан квадрат $ADEF$.

а) Докажите, что треугольники BDE и EFC подобны.

б) Найдите отношение площади треугольника EFC к площади квадрата $ADEF$.

Решение

а) Так как $ADEF$ — квадрат, то $\angle BDE = \angle EFC = 90^\circ$.

$DE \parallel AC$, следовательно $\angle BED = \angle ECF$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых DE и AC секущей $BC \Rightarrow \triangle BED \sim \triangle EFC$ по двум углам.

б) Пусть сторона квадрата равна x , тогда $BD = 2 - x$; $FC = 6 - x$. Исходя из того, что

$$\triangle BDE \sim \triangle EFC: \frac{BD}{EF} = \frac{DE}{FC} \Leftrightarrow \frac{2 - x}{x} = \frac{x}{6 - x} \Leftrightarrow (2 - x)(6 - x) = x^2$$

$$12 - 8x + x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$S_{\triangle EFC} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$$

$$S_{ADEF} = x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle EFC}}{S_{ADEF}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{9} = 1,5$$

Ответ: 1,5.

17. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Решение

Очевидно, что для того, чтобы погасить кредит как можно быстрее, Иван должен ежегодно выплачивать банку максимально подъемную для себя сумму. По условию задачи эта сумма составляет 250 тысяч рублей. Запишем решение с помощью таблицы:

Год	Долг Ивана банку до начисления процентов	Долг Ивана банку после начисления процентов	Долг Ивана банку после внесения им суммы ежегодного платежа
1	1 000 000	1 100 000	850 000
2	850 000	935 000	685 000
3	685 000	753 500	503 500
4	503 500	553 850	303 850
5	303 850	334 235	84 235
6	Меньше 100 000	Меньше 110 000	0

В последней строчке применяется метод оценки, чтобы не считать 10% от 84 235. Мы строго показали, что 5 лет Ивану не хватит для возвращения кредита, а 6 лет — хватит.

Ответ: 6.

18. Найдите все значения a , при которых область определения функции

$$y = \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{a} \right)^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}}$$

содержит ровно два целых числа.

Решение

$$\begin{aligned}
 y &= \left(\sqrt[3]{x} \cdot x^{5 \log_x a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^{3x+1} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{a} \right)^{16} - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a} \right)^{\frac{1}{4}} = \\
 &= \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3} + \log_x a^5} + a^x \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{2a} \cdot a^5 - x^{\frac{1}{3} + x \log_x a}} = \\
 &= \sqrt[4]{x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x^{\log_x a^5} - x^{\log_x a^x} \right) + \sqrt[3]{2a} (a^x - a^5)} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a} \right) \cdot (a^5 - a^x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2a})(a^5 - a^x) \geq 0 \end{cases}$$

При $a \in (0; 1)$ последнее неравенство системы эквивалентно

$(x - 2a)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2a] \cup [5; +\infty)$ — не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ это неравенство верно для $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ — тоже не подходит.

При $a > 1$ $x \in [2a; 5]$ (или $[5; 2a]$, если $2a > 5$)

Область определения будет содержать ровно 2 целых числа, если

$$\begin{cases} 2a \in (3; 4] \\ 2a \in [6; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (1, 5; 2] \\ a \in [3; 3, 5) \end{cases}$$

Ответ: $a \in (1, 5; 2] \cup [3; 3, 5)$.

19. Решите уравнение $x^2 + 3 = 7y$ в целых числах.

Решение

Остаток от деления на 7

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
$x^2 + 3$	3	4	0	5	5	0	4

Так как $7y = x^2 + 3$ делится на 7, то или $x = 7k + 2$ или $x = 7k + 5$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{При } x = 7k + 2: \quad & 7y = 49k^2 + 28k + 4 + 3 \\ & y = 7k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } x = 7k + 5: \quad & 7y = 49k^2 + 70k + 25 + 3 \\ & y = 7k^2 + 10k + 4 \end{aligned}$$

Ответ: $(7k + 2; 7k^2 + 4k + 1); (7k + 5; 7k^2 + 10k + 4), k \in \mathbb{Z}$.