

ISBN 985-12-1427-2



9 789851 214279

Адукацыйны пар

9

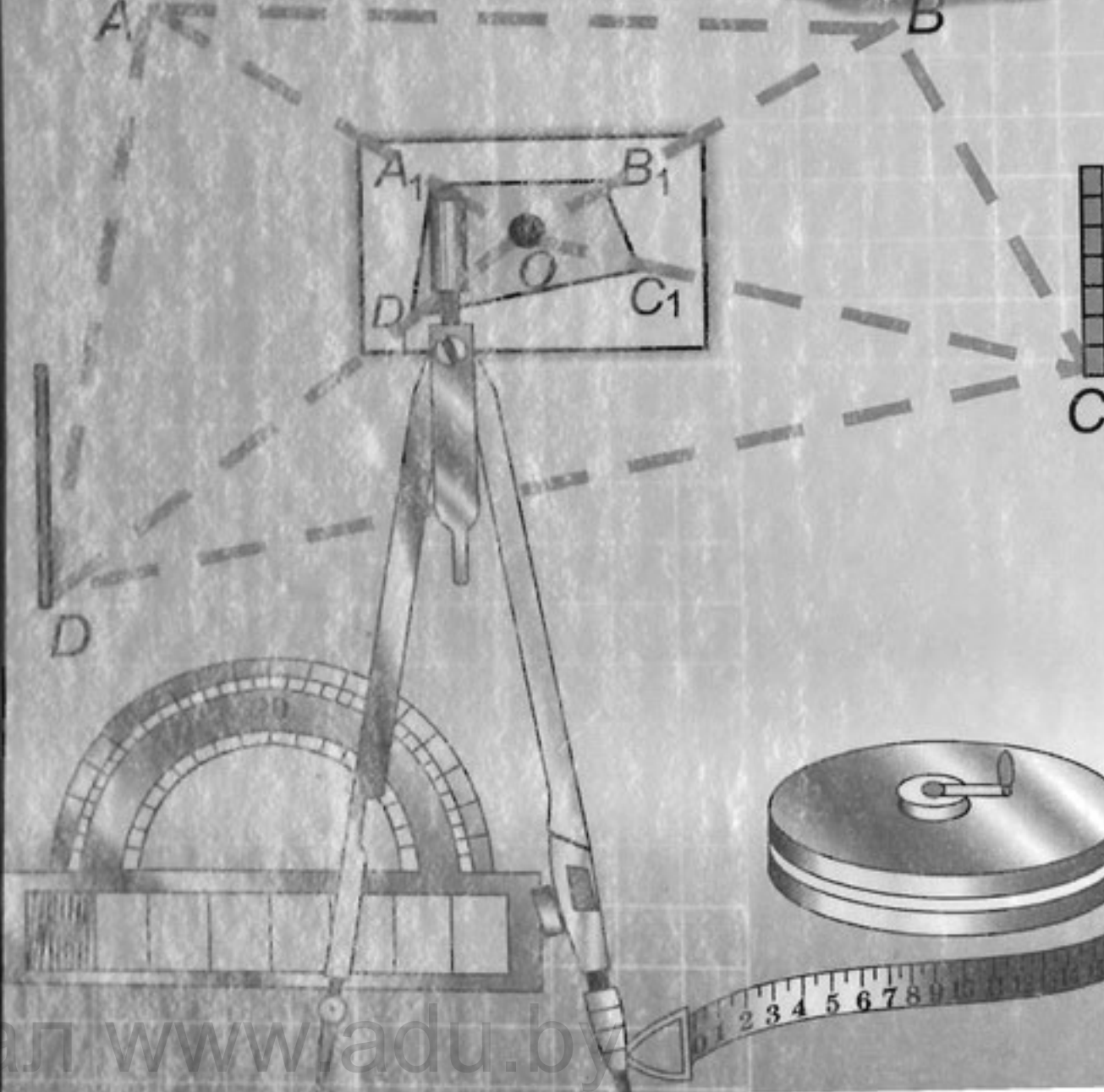
2006

Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

МАТЕМАТИКА

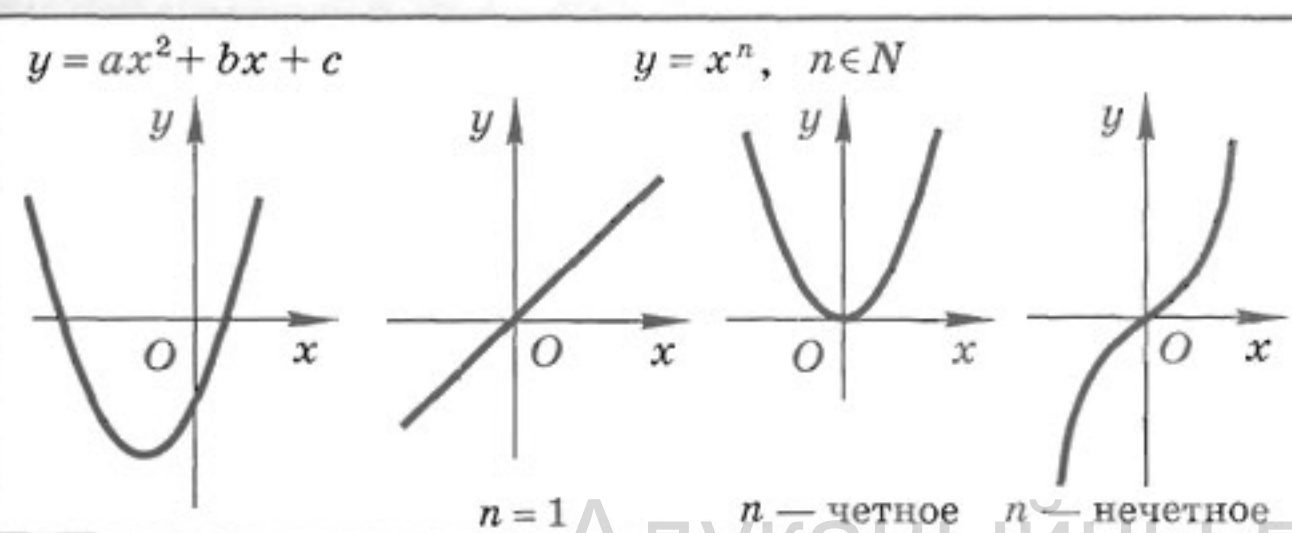
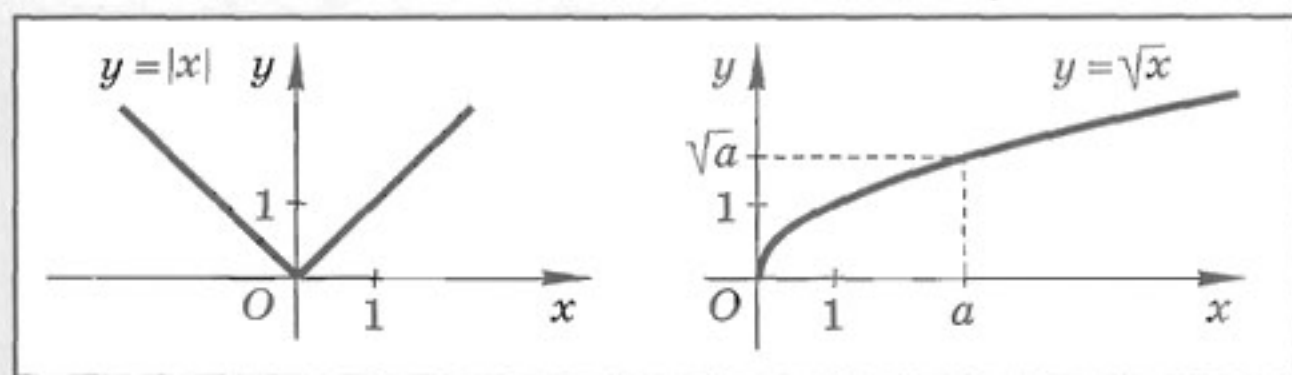
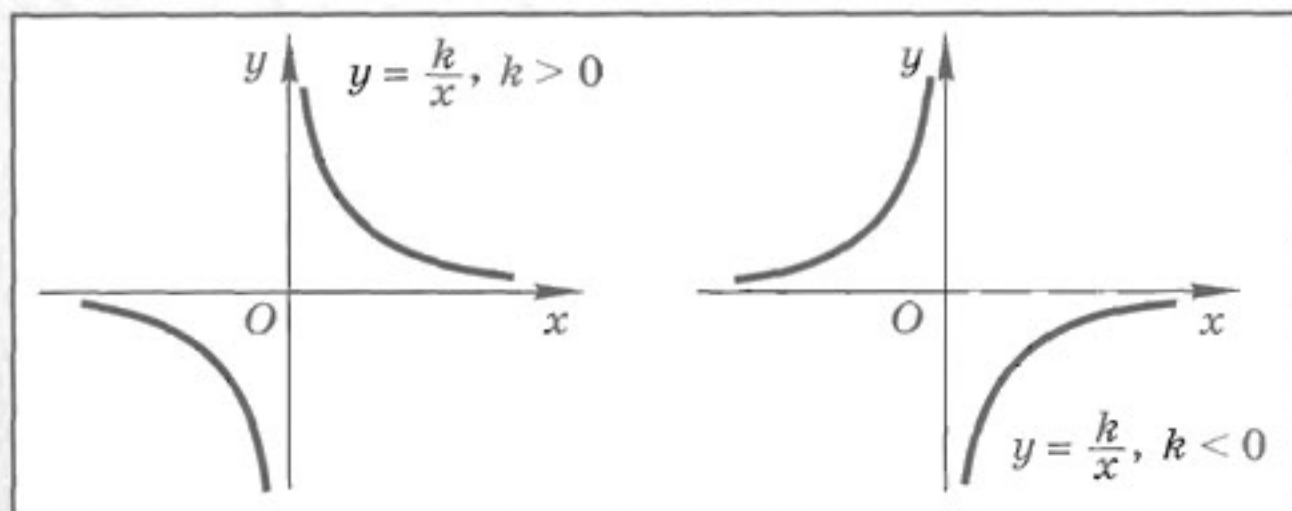
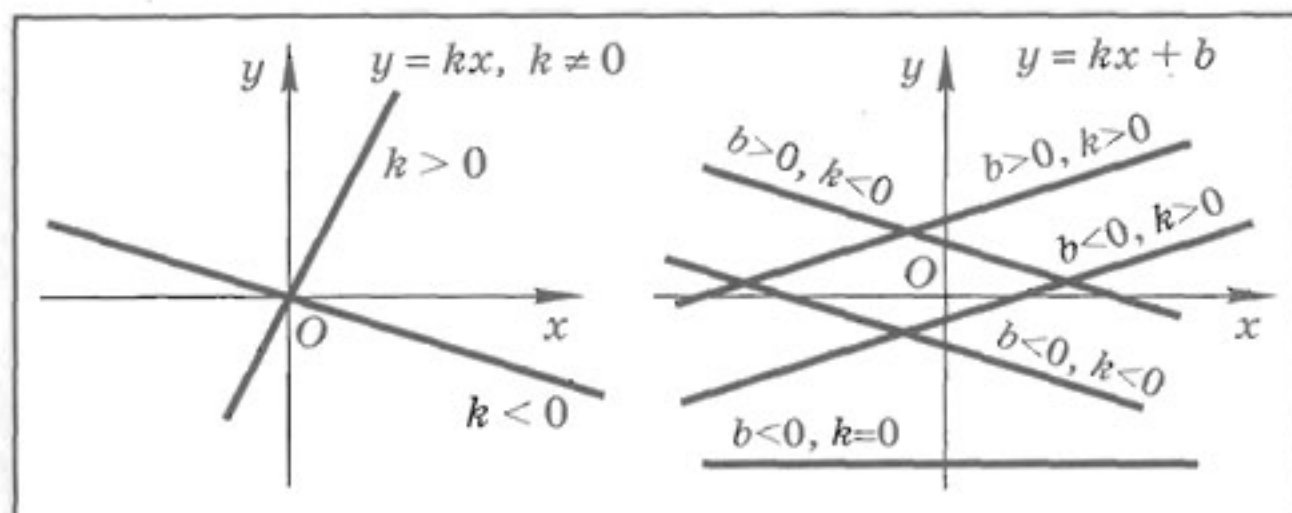
Алгебра
и геометрия

9

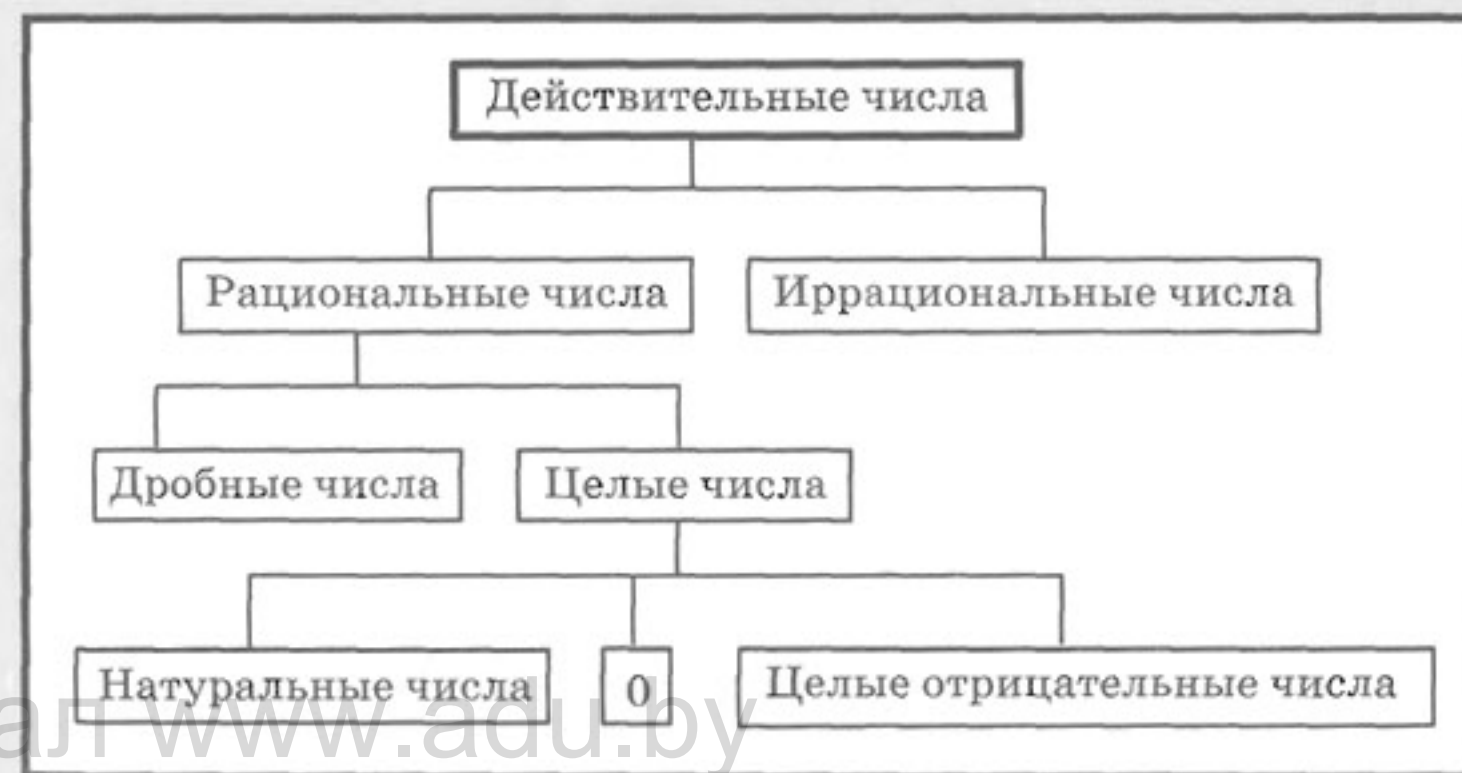
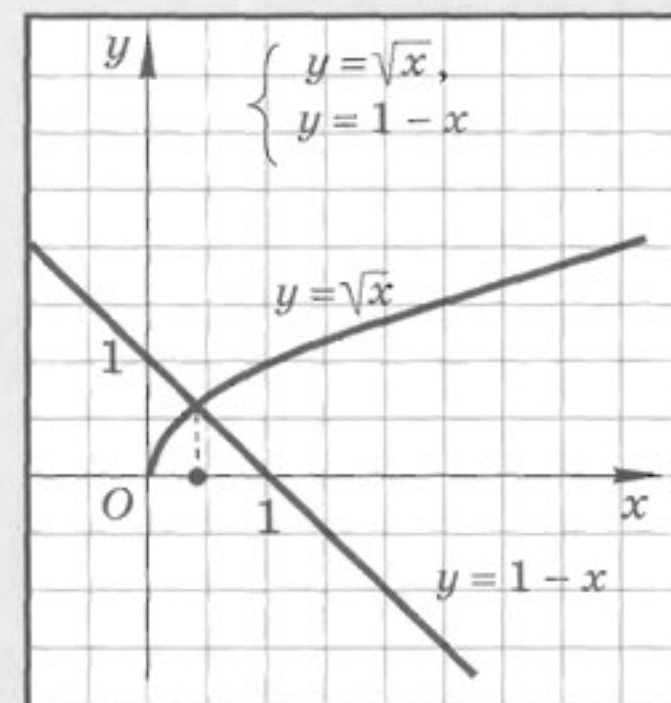
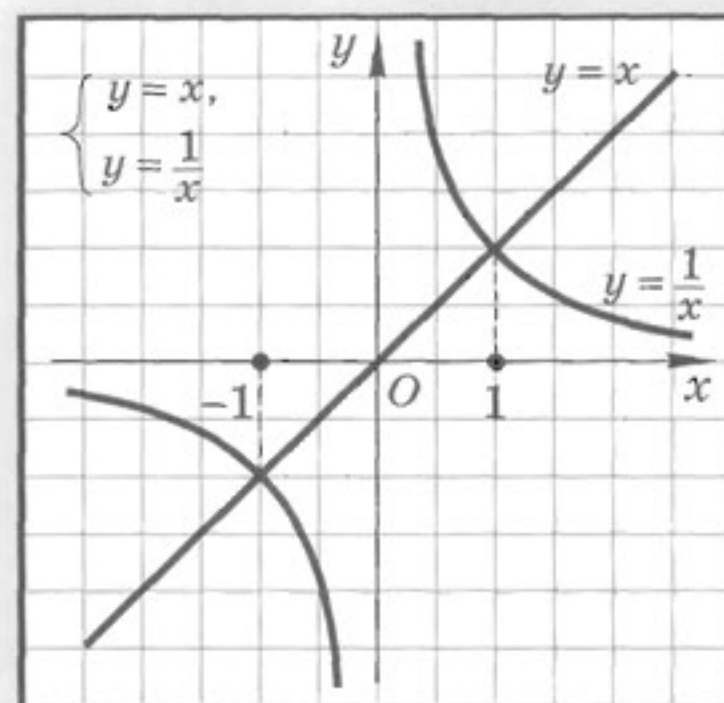


www.adu.by

Функции



Методы решения систем уравнений



УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
С60

Рецензенты

кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(К. О. Ананченко, д-р пед. наук, профессор);
С. А. Хомич, учитель математики политехнической гимназии № 6 г. Минска

Солтан, Г. Н.

С 60 Математика: Алгебра и геометрия: учеб. по-
соб. для 9-го кл. учреждений, обеспечивающих
получение общ. сред. образования, с рус. яз. об-
учения с 12-летним сроком обучения (базовый и
повыш. уровни)/Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан; под
ред. Н. А. Лиходеда. — 2-е изд. — Мн.: Нар. асве-
та, 2006. — 286 с.: ил.
ISBN 985-12-1427-2.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

© Солтан Г. Н., Солтан А. Е., 2005
© Оформление, УП «Народная асве-
та», 2006

ISBN 985-12-1427-2

От авторов

Курс математики 9-го класса является продолжением курсов «Алгебра» и «Геометрия» 8-го класса. В курсе алгебры вы будете изучать математические вопросы, связанные с различными числами и зависимостями между ними. Основное содержание этого материала изложено в блоках «Функции» и «Системы уравнений».

При изучении геометрии вы значительно расширите знания о свойствах геометрических фигур и научитесь использовать их для решения разнообразных задач.

Содержание курса геометрии изложено в разделах «Многоугольники и их площади», «Движения», «Подобие фигур», «Тригонометрические функции угла».

Главы учебного пособия разбиты на параграфы, а параграфы на пункты. К каждому параграфу предложены контрольные вопросы и значительный набор заданий, которые расположены в основном по нарастающей степени трудности. Наиболее сложные задачи и теоретический материал повышенной трудности, отмеченные звездочкой (*), будут полезны для углубления ваших знаний и развития математических способностей. Каждая глава завершается повторением в виде контрольных вопросов, специальных задач и упражнений (номера их даны курсивом), а также домашней контрольной работы. Этот материал позволит вам систематизировать изученное, а также подготовиться к контрольным работам, которые будут проводиться на уроках.

Нумерация заданий в курсах — сквозная.

Основной особенностью данного учебного пособия является взаимосвязанное изложение содержания курсов алгебры и геометрии. При этом каждая глава представляет относительно завершенную картину новых знаний, а последующие главы развивают и обобщают содержание предыдущих. Этот принцип выдерживается как в изложении теоретического материала, так и в заданиях, выполнять которые рекомендуется самостоятельно. Блочно изложенная теория с наличием значительного количества типовых задач и примеров с решениями создает необходимые предпосылки для успешной самостоятельной работы, в которой — залог ваших достижений.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
С60

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(К. О. Ананченко, д-р пед. наук, профессор);
С. А. Хомич, учитель математики политехнической гимназии № 6 г. Минска

Солтан, Г. Н.

С 60 Математика: Алгебра и геометрия: учеб. пособ. для 9-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повыш. уровни)/Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан; под ред. Н. А. Лиходеда. — 2-е изд. — Мн.: Нар. асвета, 2006. — 286 с.: ил.
ISBN 985-12-1427-2.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

© Солтан Г. Н., Солтан А. Е., 2005
© Оформление, УП «Народная асвета», 2006

ISBN 985-12-1427-2

От авторов

Курс математики 9-го класса является продолжением курсов «Алгебра» и «Геометрия» 8-го класса. В курсе алгебры вы будете изучать математические вопросы, связанные с различными числами и зависимостями между ними. Основное содержание этого материала изложено в блоках «Функции» и «Системы уравнений».

При изучении геометрии вы значительно расширите знания о свойствах геометрических фигур и научитесь использовать их для решения разнообразных задач.

Содержание курса геометрии изложено в разделах «Многоугольники и их площади», «Движения», «Подобие фигур», «Тригонометрические функции угла».

Главы учебного пособия разбиты на параграфы, а параграфы на пункты. К каждому параграфу предложены контрольные вопросы и значительный набор заданий, которые расположены в основном по нарастающей степени трудности. Наиболее сложные задачи и теоретический материал повышенной трудности, отмеченные звездочкой (*), будут полезны для углубления ваших знаний и развития математических способностей. Каждая глава завершается повторением в виде контрольных вопросов, специальных задач и упражнений (номера их даны курсивом), а также домашней контрольной работы. Этот материал позволит вам систематизировать изученное, а также подготовиться к контрольным работам, которые будут проводиться на уроках.

Нумерация заданий в курсах — сквозная.

Основной особенностью данного учебного пособия является взаимосвязанное изложение содержания курсов алгебры и геометрии. При этом каждая глава представляет относительно завершенную картину новых знаний, а последующие главы развивают и обобщают содержание предыдущих. Этот принцип выдерживается как в изложении теоретического материала, так и в заданиях, выполнять которые рекомендуется самостоятельно. Блочно изложенная теория с наличием значительного количества типовых задач и примеров с решениями создает необходимые предпосылки для успешной самостоятельной работы, в которой — залог ваших достижений.

Математическое образование немислимо без творческой работы, и здесь главное — накопление знаний, практических умений и навыков, осознание изучаемого. Понимание материала невозможно без знаний, но овладение лишь разрозненными сведениями о математических понятиях, их свойствах и даже об их простейших применениях по образцу не может обеспечить высокого качества математической подготовки. Качество вашего математического образования во многом будет зависеть от того, насколько систематически и вдумчиво вы осваиваете новое, обобщаете изученное, овладеваете общими методами решения задач.

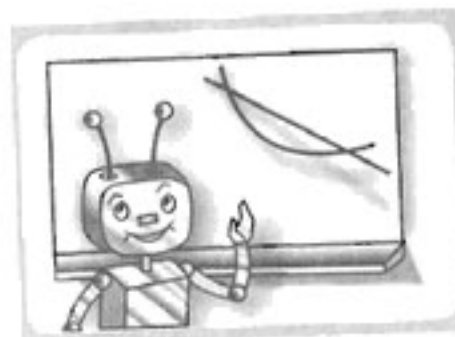
Дорогие друзья! Каждый из вас — член ученического коллектива. Без общения и работы в коллективе, без тесного взаимодействия трудно добиться значительных результатов. Помогайте друг другу, радуйтесь успехам товарищей и приумножайте свои.

Математика — фундаментальная наука. Перед вами открыты все двери для овладения ее основами. Не упускайте возможности в школе приобрести прочные математические знания, развить умственные способности, что непременно будет полезным в вашей дальнейшей учебе и созидательной трудовой деятельности.

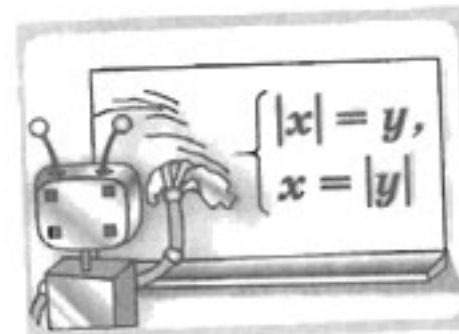
Желаем успехов!

Алгебра

Глава I

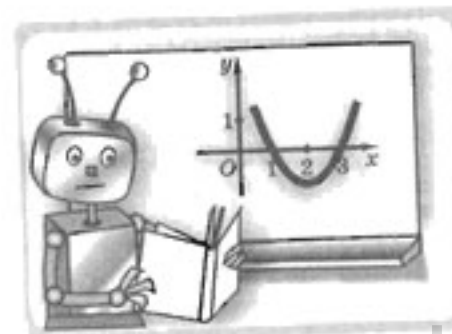


ФУНКЦИИ



Глава II

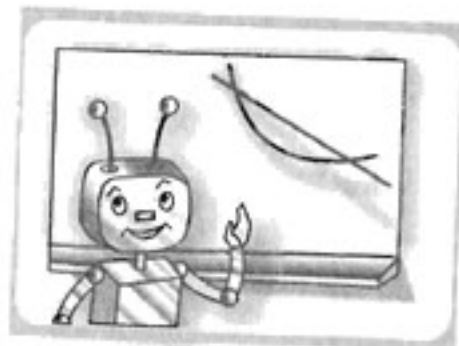
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ



Глава III

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Глава I



ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие функции и способы ее задания

1. Понятие функции¹

Мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами. Например:

1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны.

Пусть сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см². Для каждого значения переменной a можно найти соответствующее значение переменной S .

Так,

если $a = 5$, то $S = 5^2 = 25$ (см²);

если $a = 0,4$, то $S = 0,4^2 = 0,16$ (см²).

Зависимость переменной S от переменной a выражается формулой

$$S = a^2$$

(по условию задачи $a > 0$).

2. Путь, пройденный автомобилем со скоростью 60 км/ч, зависит от времени движения.

Обозначим время движения автомобиля (в часах) буквой t , а пройденный путь (в километрах) буквой s . Для каждого значения переменной t , где $t \geq 0$, можно найти соответствующее значение переменной s . Например:

если $t = 0,5$, то $s = 60 \cdot 0,5 = 30$ (км);

если $t = 2,5$, то $s = 60 \cdot 2,5 = 150$ (км).

Зависимость переменной s от переменной t выражается формулой

$$s = 60t.$$

Переменная, значения которой выбираются произвольно, называется *независимой переменной*, а переменная, значения которой определяются выбранными значениями, — *зависимой переменной*.

В этом примере t является независимой переменной, а s — зависимой переменной.

3. Для каждого однозначного натурального числа устанавливается количество его делителей. Такую зависимость $d(n)$ можно задать следующей таблицей.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3

4. На рисунке 1 дан график температуры воздуха. С помощью этого графика легко проследить, как изменялась температура в течение суток.

Например:

если $t = 14$, то $p = 5$;

если $t = 24$, то $p = 0,5$.

Здесь t является независимой переменной, а p — зависимой переменной.

В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такая зависимость одной переменной от другой называется *функциональной зависимостью* или *функцией*.

Определение. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y .

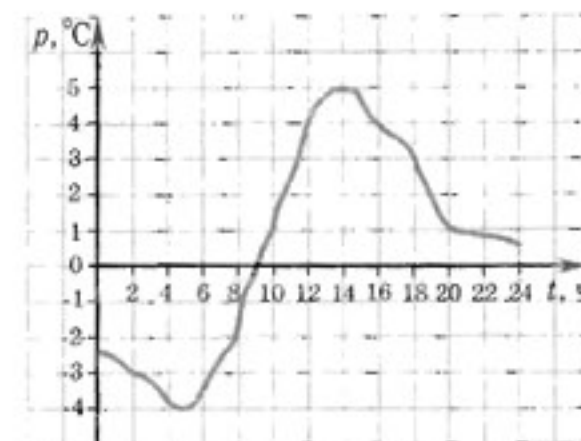


Рис 1

¹ Слово «функция» происходит от латинского functio — выполнение.

Независимую переменную иначе называют *аргументом*, а о зависимой переменной говорят, что она является *функцией* от этого аргумента. Так, площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Чтобы подчеркнуть, что y зависит от x , часто пишут $y(x)$ (читают: « y от x »). Например, если

$$y(x) = \frac{1}{x} + 1, \text{ где } x \neq 0, \text{ то } y(1) = 2, y(-1) = 0, y(0,5) = 3.$$

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*.

Иногда область определения функции зависит не только от формулы, служащей для ее записи, но и от содержания задачи. Например, функция

$$y = x^2$$

определена при любых $x \in \mathbb{R}$.

Если $y = 9x$, где y — стоимость (в у. д. е.) x пар лыж, то y как функция x определена только для $x \in \mathbb{N}$.

Область определения функции, рассмотренной в первом примере, состоит из всех положительных чисел, а в четвертом примере — из $[0; 24]$.

В остальных рассмотренных примерах область определения функции укажите самостоятельно.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество (область) значений функции*. Так, множество значений функции $y(x) = x^2$, где $x \in \mathbb{R}$, — это множество чисел $[0; \infty)$.

В примерах 1—4 область значений функций укажите самостоятельно.

Множество значений функции $y = \frac{1}{x} + 1$ можно найти, выразив переменную x через переменную y : $y = \frac{1}{x} + 1$, $xy = 1 + x$, $xy - x = 1$, $x(y - 1) = 1$, $x = \frac{1}{y - 1}$. Как видно, переменная y может принимать все значения, кроме тех, что обращают в нуль знаменатель $y - 1$ дроби $\frac{1}{y - 1}$. Указанный знаменатель равен

нулю при $y = 1$. Поэтому множеством значений функции $y(x) = \frac{1}{x} + 1$ являются все числа, кроме числа 1, т. е. $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Способы задания функции

Отметим, что обозначение каждой функции через $y(x)$ не является обязательным. Для обозначения функций могут использоваться разные буквы, например: y, f, φ, s, v .

Функцию можно задать различными способами, из которых наиболее распространенные следующие: 1) *задание функции формулой*; 2) *задание функции таблицей*; 3) *графическое задание функции*.

Ф о р м у л а, задающая функцию, дает возможность по значению независимой переменной вычислять соответствующее ему значение функции. Например, если $y(x) = 5x$, то $y(-1) = 5 \cdot (-1) = -5$, $y(0) = 5 \cdot 0 = 0$. По формуле, которой задана функция, можно решать обратную задачу: вычислять значения аргумента по данным значениям функции. Если, например, функция y задана формулой $y = 3x - 5$, то для того, чтобы узнать, при каких значениях аргумента значение функции равно 4, надо подставить вместо y число 4 и решить уравнение $4 = 3x - 5$. Решив это уравнение, получаем $x = 3$. Таким образом, значение функции $y = 3x - 5$ равно 4 при $x = 3$.

Установить соответствие между значениями двух переменных можно так: указать значения аргумента и для каждого из них указать соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Таблицы, как, например, таблицы квадратов чисел, квадратных корней, являются не чем иным, как табличным заданием функции. Табличное задание функции не всегда удобно, так как дает значения функции только для тех значений аргумента, которые приведены в таблице.

В практике нередко функция задается изображением *г р а ф и к а*. Так, например, в современном производстве широко применяются самопишущие приборы, которые автоматически вычерчивают графики изменения тех или иных величин (температуры, давления и т. п.).

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям

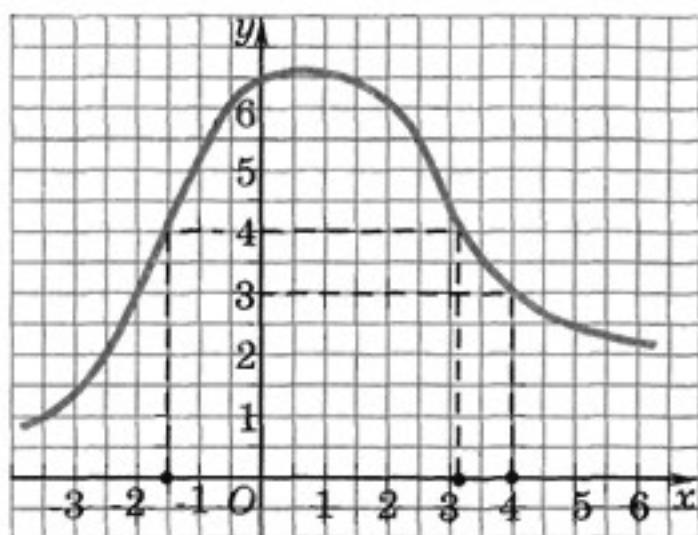


Рис. 2

аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

С помощью графика функции по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции, и наоборот, по данному значению функции — значения аргумента, которым это значение функции соответствует.

Например, по графику функции, данному на рисунке 2, значение функции при $x = 4$ находится так: через точку $x = 4$ оси абсцисс проводим к ней перпендикуляр. Проводим к этому перпендикуляру перпендикуляр в точке его пересечения с графиком функции, на оси ординат находим значение функции $y = 3$. При $y = 4$ значение аргумента, которому оно соответствует, находится в обратном порядке: сначала проводится перпендикуляр к оси ординат в точке $y = 4$, затем из точки его пересечения с графиком строится перпендикуляр на ось абсцисс.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется графиком функции?
3. Как с помощью графика по заданному значению аргумента найти соответствующее значение функции и по заданному значению функции найти значение аргумента, которому оно соответствует?

Задания

Устные упражнения 1—3.

1. Задайте формулой функцию, выражающую зависимость от каждого числа $x \in \mathbb{R}$: а) третью степень этого числа; б) сумму этого числа с числом 5.

2. Функция задана формулой: а) $y = \frac{4x}{x-2}$; б) $y = \frac{x+2}{2x}$. Найдите ее значение при $x = 12$ и $x = -1,5$.

3. Функция задана формулой $y = 5 - 2x$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

4. Запишите область определения функции, заданной формулой: а) $y = \frac{3}{12-x}$; б) $y = 5x + 7$.

5. Запишите область определения и множество значений функции, заданной формулой: а) $y = 3x - 8$; б*) $y = \frac{5}{-x}$.

6. Найдите множество значений функции:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| а) $y = -2x$; | г*) $y = 1 - \frac{1}{x}$; | ж*) $y = x^2 - x + 1$; |
| б) $y = x^2 - 1$; | д) $y = 2 - x $; | з*) $y = x^2 - x$; |
| в*) $y = -\frac{1}{x-1}$; | е) $y = x^2 - 2x + 1$; | и*) $y = x^2 - x^0$. |

7. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой, для целых значений аргумента и постройте ее график:

- а) $y = -0,5x$, где $0 < x < 4$;
- б) $y = 13x - 4$, где $-4 \leq x \leq 0$;
- в) $y = -x$, где $-3 \leq x \leq 3$;
- г) $y = \frac{2}{3x}$, где $-3 \leq x \leq 3$;
- д) $y = x^2 + 1$, где $0,1 < x \leq 2,9$;
- е) $y = x^3$, где $-2,1 < x \leq 2,1$.

8. Найдите область определения функции y , заданной формулой:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| а) $y = \frac{4x+1}{15}$; | в) $y = \frac{1}{x+7}$; | д) $y = \frac{5}{x^2+9} + 14$; |
| б) $y = x^3$; | г) $y = x^2 + x^0 + 1$; | е) $y = \frac{4}{x^2+10x+9}$. |

9. Найдите множество значений функции, заданной формулой:

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| а) $y(x) = x - 1$; | е) $y(x) = \frac{4x-1}{5}$; |
| б) $y(x) = 3$; | ж*) $y(x) = \frac{2}{x-7}$; |
| в) $y(x) = \frac{1}{x}$; | з*) $y(x) = \frac{5}{ x } + 4$; |
| г*) $y(x) = x^2 + x + 1$; | и*) $y(x) = x^{-1} $. |
| д) $y(x) = x^2$; | |

10. Функция задана формулой $y = 1 - x^2$. Верны ли равенства:

а) $y(0) = 1$; в) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$;

б) $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; г) $y(-7) = 50$?

11. Графиком функции $y(x)$ является ломаная $ABCH$, причем ее вершины имеют такие координаты: $A(-2; 2)$, $B(0; 4)$, $C(5; 4)$, $H(6; 5)$. Постройте график этой функции и найдите:

а) при каком значении аргумента x значение функции равно 3;

б) при каких значениях x функция принимает равные значения;

в) при каких значениях функции y значение аргумента равно 4.

12. Графиком некоторой функции является ломаная ABC . Постройте график функции, если: а) $A(-3; 1)$, $B(1; -1)$, $C(3; 3)$; б) $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $C(6; -3)$.

13. На рисунке 3 изображены равнобедренные треугольники с общим основанием $AB = a$, вершины которых лежат на оси симметрии треугольника. Установите, функцией какого аргумента является площадь S этих треугольников. Проведите необходимые измерения и составьте таблицу значений площади данных на рисунке равнобедренных треугольников.

14. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x}$, где $-5 < x < 5$, $x \in \mathbb{Z}$. Постройте график этой функции.

15. При делении натурального числа y на число x в частном получается 5, а в остатке 4. Задайте формулой функцию y от x .

Укажите область определения этой функции.

16. Составьте таблицу стоимости x книг по цене, известной вам, при $x = 1; 2; 3; 4; 5$. Установите, задает ли ваша таблица функцию.

17. Объем куба зависит от длины его ребра. Задайте формулой зависимость объема V куба от длины x его ребра. Вычислите значение V , если $x = 1,5$ м. Является ли эта зависимость функцией?

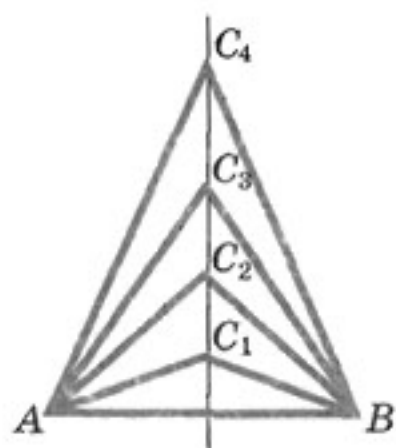
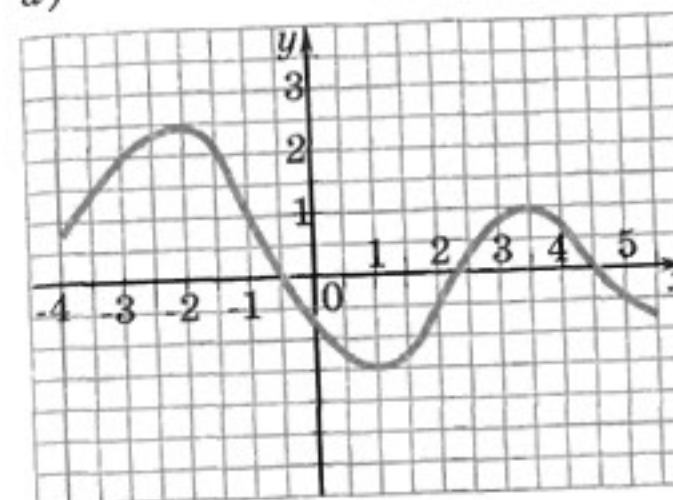


Рис. 3

а)



5)

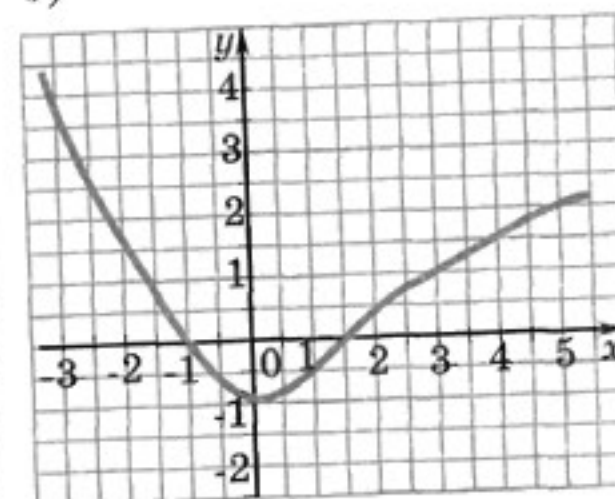


Рис. 4

18. На рисунке 4, а изображен график некоторой функции. Пользуясь им, заполните таблицу 2.

Таблица 2

x	-4	-3	-2	0	1	5
y						

19. Используя график функции, изображенный на рисунке 4, б, заполните таблицу 3.

Таблица 3

x	-3	-1,5	-0,5	0	0,5	3
y						

20. Графиком функции служит отрезок, координаты концов которого $(-6; -2)$ и $(3; 5)$. Начертите график и найдите по графику:

а) значения y при $x = -5; -3; -1; 1; 2$;

б) значения x , которым соответствует $y = -1; 1; 3; 4$.

21. Каждому натуральному числу n ставится в соответствие остаток r от деления этого числа на 4. Найдите r , если n равно 13, 34, 43, 100. В рассматриваемой функциональной зависи-

мости укажите аргумент. Какова область определения этой функции? Какие числа являются значениями функции?

22. Токарь по плану должен изготовить 50 деталей за смену. Однако он перевыполнил план на $x\%$. Составьте формулу, выражающую зависимость y числа изготовленных токарем деталей от x . Найдите по формуле:

- а) значение y , если $x = 10$; 30;
б) значение x , если $y = 51$; 80.

23. Функция задана формулой $y = -0,5(8 - x)$. Заполните таблицу 4 соответственных значений x и y .

Таблица 4

x	-1,4		2,6		8,8	
y		-3,4		-1,8		2,4

24. Какова область определения функции, заданной формулой:

- а) $y = \frac{7}{x^2 - 14}$; б) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$?

25. Функция задана формулой $y = 5,8x - 4(1,2x - 2,5)$. Заполните таблицу 5.

Таблица 5

x	-4		-2	-1		1	2		4
y		$-3\frac{1}{3}$			0			3,6	

26. График функции y изображен на рисунке 5. Выясните, при каких значениях аргумента $y(x) = 0$, в каких промежутках $y(x) > 0$ и в каких $y(x) < 0$.

27. Графиком функции y является ломаная, координаты вершин которой $(2; -2)$, $(4; 4)$ и $(6; 2)$. Постройте этот график и выясните, при каких значениях аргумента функция y обращается в нуль, в каких промежутках она принимает положительные и в каких отрицательные значения.

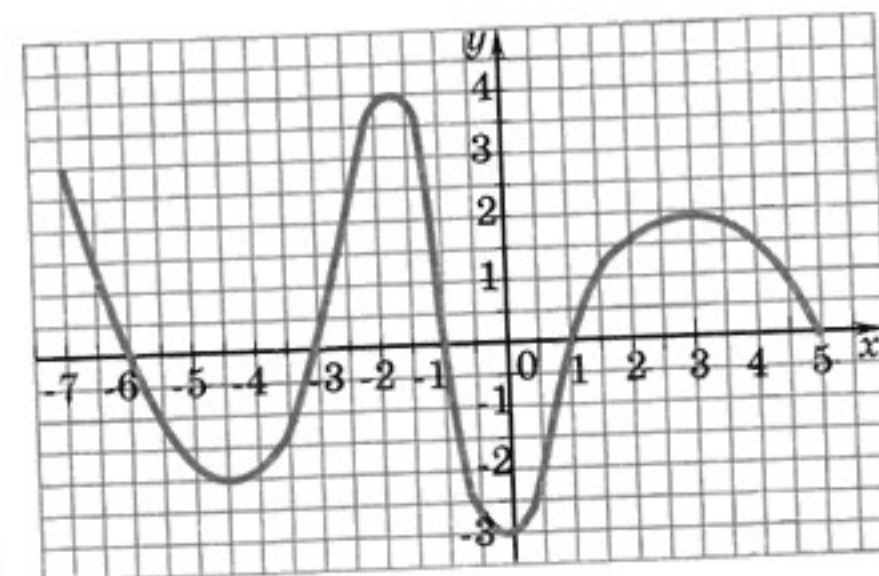


Рис. 5

28. В каких точках $f(x) = 0$, если:

- а) $f(x) = -0,8x + 12$; в) $f(x) = -4x - 0,7$;
б) $f(x) = 2,1x - 70$; г) $f(x) = 100x + 13$?

29. В каких промежутках $f(x) < 0$, если:

- а) $f(x) = 4x + 1,2$; б) $f(x) = -8x + 2$?

30. При каких значениях аргумента $f(x) > 0$, если:

- а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = -5x - 10,15$?

31. На рисунке 6 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток. Найдите по этому графику температуру воздуха:

- а) в 2 часа;
б) в 11 часов;
в) в 16 часов 30 минут;
г) в 22 часа.

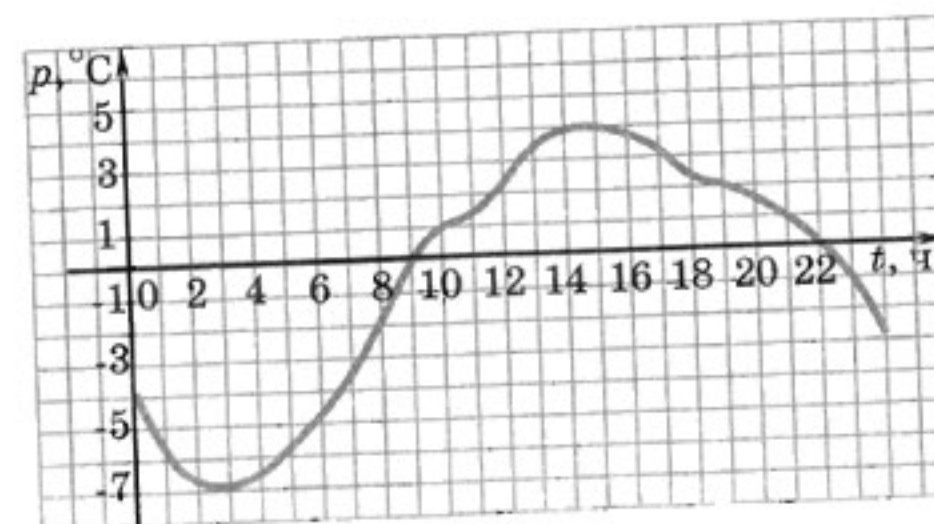


Рис. 6

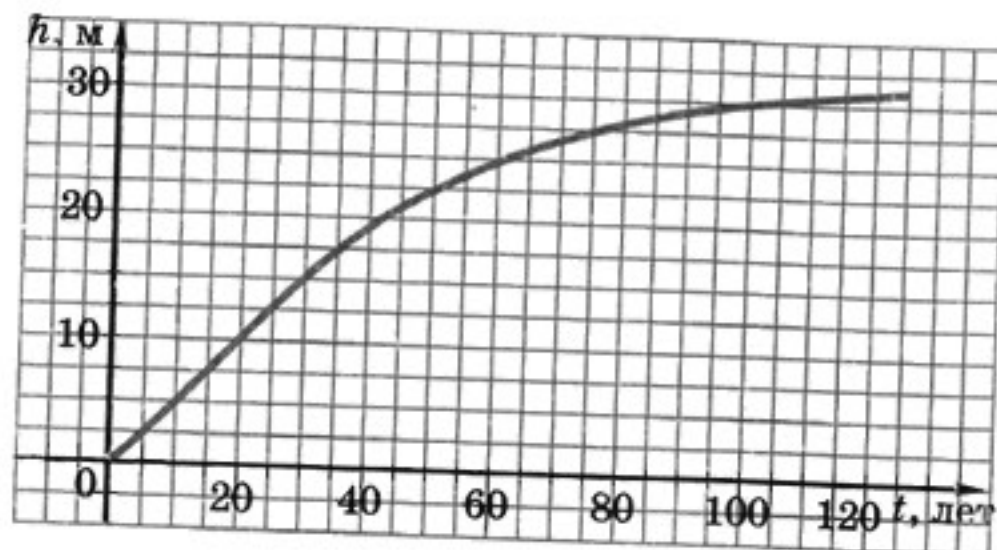


Рис. 7

32. На рисунке 7 показано изменение высоты дерева h (в метрах) в зависимости от его возраста t (в годах). Найдите по графику:

- высоту дерева в возрасте 20, 50 и 100 лет;
- на сколько выросло дерево за промежуток времени от 60 до 100 лет.

§ 2. Функции $y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$ и их графики

1. Возрастаание и убывание, четность и нечетность функций

Функция называется *возрастающей* на промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему из них соответствует большее значение функции (рис. 8, а); функция называется *убывающей* на промежутке,

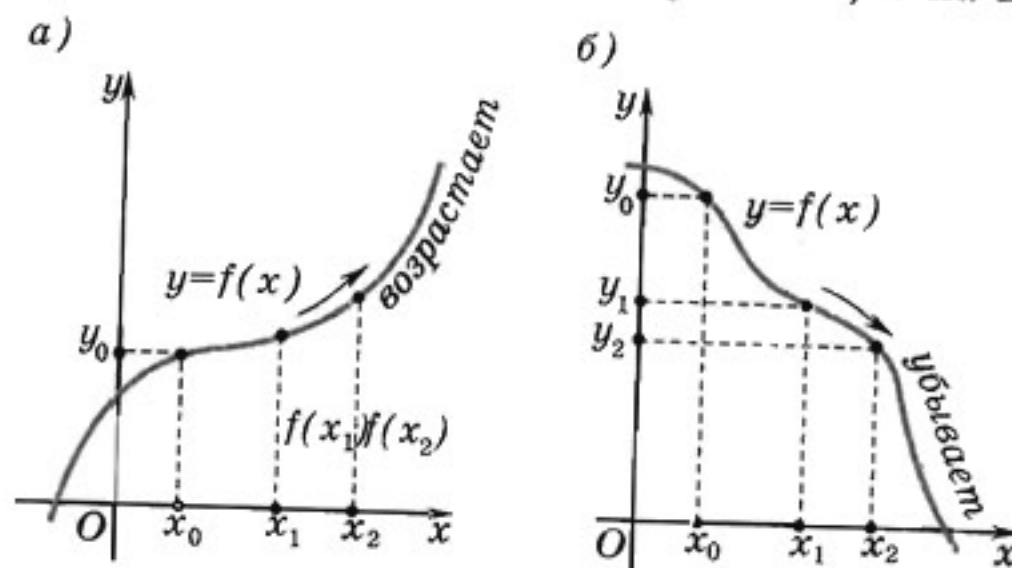


Рис. 8

если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему из них соответствует меньшее значение функции (рис. 8, б).

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 9, а).

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого значения x , взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 9, б).

Пример 1. Доказать, что функция, заданная формулой $y = 2x^2 + 1$, является четной.

Доказательство. 1) Область определения функции — \mathbb{R} . 2) $y(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1$. Как видим, $y(-x) = y(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Значит, эта функция четная.

Пример 2. Доказать, что функция, заданная формулой $y = 3x^3$, является нечетной.

Доказательство. 1) Область определения функции — \mathbb{R} . 2) $y(-x) = 3(-x)^3 = -3x^3$, т. е. $y(-x) = -y(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, поэтому данная функция нечетная.

Значения аргумента, при которых значения функции равны нулю, называются *нулями функции*.

Для того чтобы найти нули функции $y = f(x)$, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Например, функция $y = x^3 - 3x$ имеет нули — $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$.

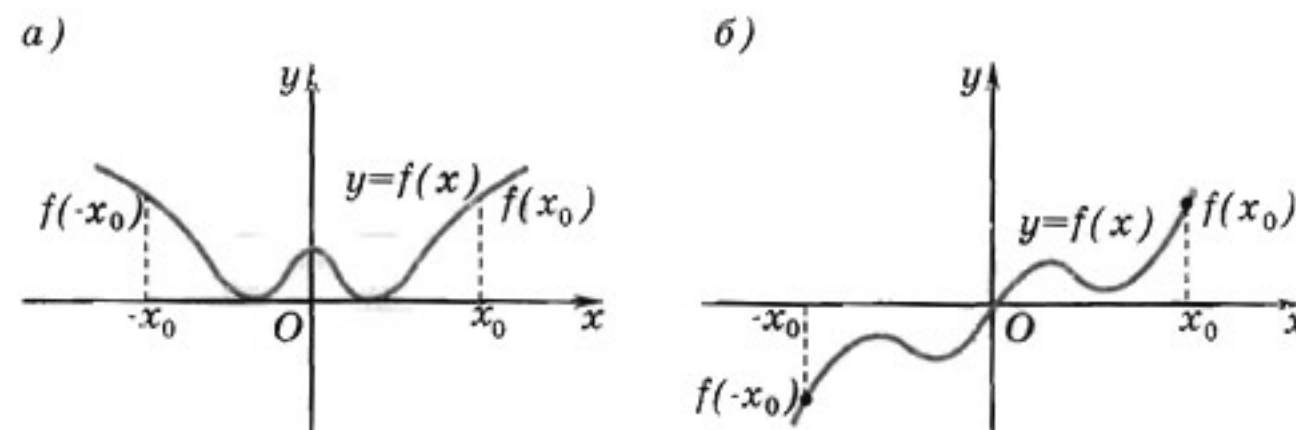


Рис. 9

2. Линейная функция и ее график

Определение. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Построим график линейной функции $y = 0,5x - 2$. Область определения функции состоит из всех чисел. Составим таблицу соответствующих значений x и y .

Таблица 6

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2

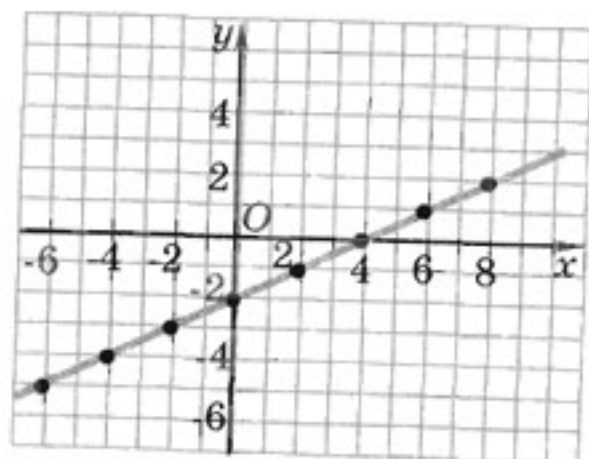


Рис. 10

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Как видно, все отмеченные точки лежат на одной прямой, которая и является графиком линейной функции $y = 0,5x - 2$ (рис. 10).

Вообще, *графиком линейной функции является прямая.*

Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них прямую.

Если, например, надо построить график функции, заданной формулой $y(x) = 2x + 3$, то можно взять два произвольных значения аргумента и вычислить соответствующие значения функции. Например:

если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;

если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Отметим точки $(-2; -1)$ и $(1; 5)$. Проведем через эти точки прямую — график функции $y = 2x + 3$ (рис. 11).

При $k = 0$ линейная функция $y = kx + b$ имеет вид $y = b$, что значит: для всех значений аргумента значение функции одно и то же (b). Поэтому графиком функции в этом случае является прямая, проходящая через точку $(0; b)$ и параллельная оси абсцисс, если $b \neq 0$; или совпадающая с осью Ox , если $b = 0$.

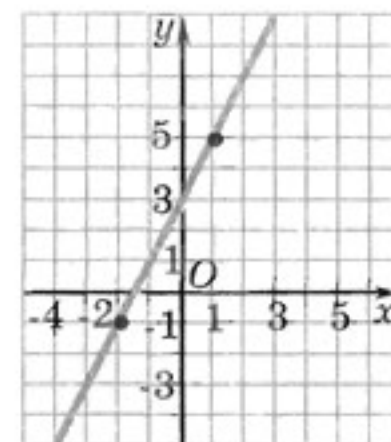


Рис. 11

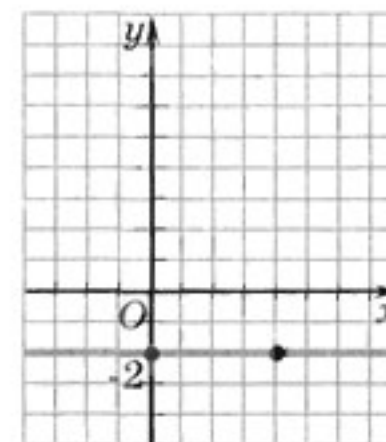


Рис. 12

Например, графиком функции $y = -2$ является прямая, изображенная на рисунке 12.

Заметим, что если область определения линейной функции состоит не из всех чисел, то ее график представляет собой соответствующую часть прямой.

Постройте (самостоятельно) график линейной функции $y = 0,6x + 3$, где $x \in (-\infty; 5)$.

3. Прямая пропорциональность

Определение. Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число.

Число k называется *коэффициентом пропорциональности.*

Прямая пропорциональность является частным случаем для линейной функции, так как формула $y = kx$ получается из формулы $y = kx + b$ при $b = 0$. Отсюда следует, что графиком прямой пропорциональности служит прямая. Эта прямая проходит через начало координат, так как при $x = 0$ значение y равно 0.

Итак, графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Для построения графика прямой пропорциональности достаточно отметить какую-либо точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и начало координат прямую.

Пример. Построить график функции $y = 0,5x$.

Эта функция — прямая пропорциональность. Найдем координаты какой-нибудь точки графика, отличной от начала координат:

если $x = 4$, то $y = 0,5 \cdot 4 = 2$.

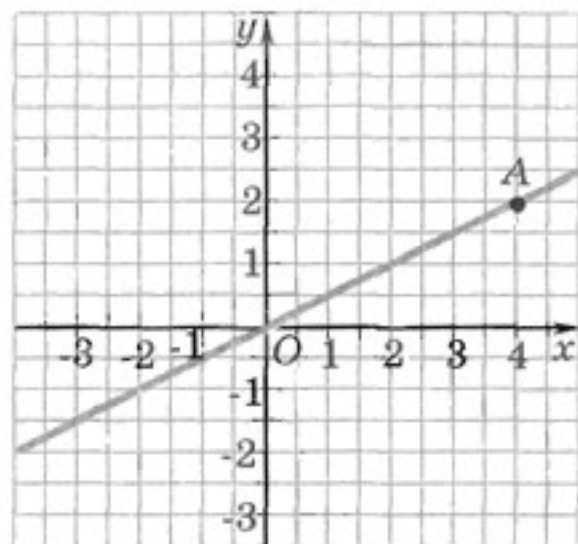


Рис. 13

Отметим точку $A(4; 2)$ и проведем через нее и начало координат прямую (рис. 13). Эта прямая — график функции $y = 0,5x$.

Расположение графика функции $y = kx$ в координатной плоскости зависит от коэффициента k .

Область определения и множество значений функции $y = kx$ составляют все числа. Понятно, что эта функция может быть определена и на частях множества R , которые образуют ее область определения, а соответствующие им значения — множество значений.

Основное свойство прямой пропорциональности $y = kx$, $k \neq 0$, заключается в том, что любые два значения переменной x относятся как соответственные значения переменной y .

Действительно, пусть k — коэффициент прямой пропорциональности. Тогда из формулы $y = kx$ имеем:

$$y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \text{ откуда } \frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2} \text{ (рис. 14).}$$

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то основное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так: с увеличением (либо уменьшением) независимой переменной x в несколько раз соответствующее значение зависимой переменной y увеличивается (либо уменьшается) во столько же раз.

Графиком функции $y(x) = kx$, $k \neq 0$, является прямая, проходящая через начало координат.

Верно и обратное: прямая, которая проходит через начало системы координат и не совпадает с осями, является графиком прямой пропорциональности.

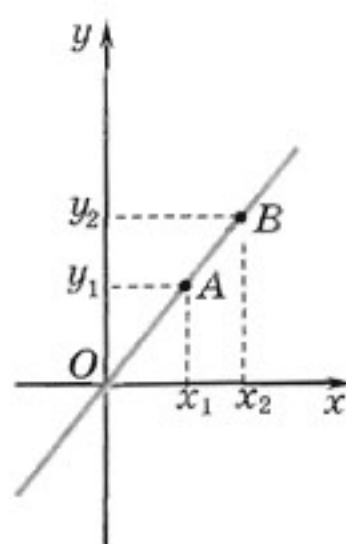


Рис. 14

Доказательство*. Возьмем такую прямую и на ней точку $(1; k)$, $k \neq 0$. Графиком функции $y = kx$, $k \neq 0$, служит прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(1; k)$. Поскольку через две точки можно провести только одну прямую, то взятая прямая совпадает с графиком прямой пропорциональности $y = kx$, $k \neq 0$.

4. Обратная пропорциональность

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Так как выражение $\frac{k}{x}$ при любом значении x , кроме 0, имеет смысл, то областью определения функции, задаваемой формулой $y = \frac{k}{x}$, может быть множество всех чисел R , кроме нуля, или некоторая заданная его часть.

Чтобы изобразить график функции вида $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, возьмем конкретное значение k , например $k = 9$, и составим таблицу 7.

Таблица 7

x	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9
y	-1	-1,5	-3	-4,5	-9	9	4,5	3	1,5	1

Построим соответствующие точки (рис. 15).

Если брать значения x через меньшие промежутки, то и точки расположатся теснее.

При всевозможных значениях x соответствующие точки расположатся на двух ветвях графика, симметричных относительно начала координат и находящихся в I и III углах координатной плоскости (см. рис. 15). (Обоснуйте это.)

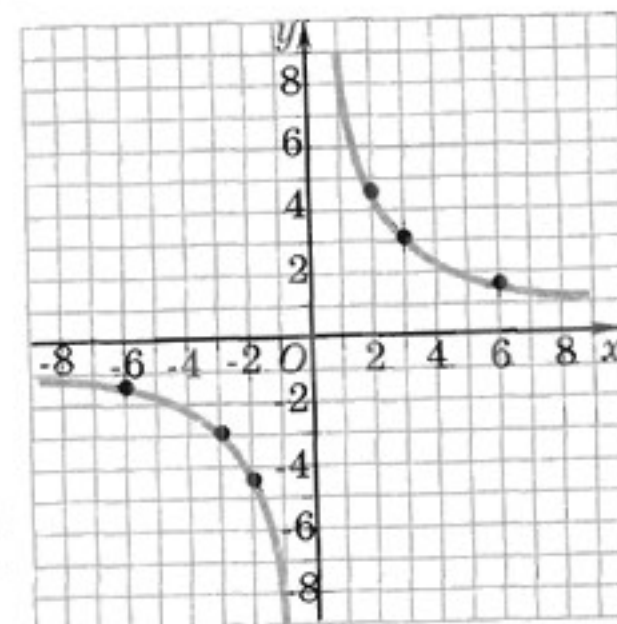


Рис. 15

Вообще, график обратной пропорциональности есть кривая, состоящая из двух ветвей. Кривую такого вида называют *гиперболой*.

Если область определения функции $y = \frac{k}{x}$ состоит не из всех отличных от нуля чисел, то ее графиком служит часть гиперболы. Постройте самостоятельно график функции $y = \frac{9}{x}$, где $x \in (1; 10]$.

Основное свойство обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, можно сформулировать так: если $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ — пары ее соответствующих значений, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Доказательство. Из формулы $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, имеем: $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_1 \neq 0$; $y_2 = \frac{k}{x_2}$, $y_2 \neq 0$. Тогда

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{k}{x_2}}{\frac{k}{x_1}} = \frac{k}{x_2} \cdot \frac{x_1}{k} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Если значения переменных x и y являются положительными числами, то основное свойство обратной пропорциональности может звучать так: *с увеличением (уменьшением) переменной x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.*

Итак, любая функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ обладает следующими свойствами.

1. Функция $y = \frac{k}{x}$, где k — положительное число, принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$.

Доказательство. Знак дроби $\frac{k}{x}$, где $k > 0$, зависит от значений x : если $x < 0$, то $\frac{k}{x} < 0$; если $x > 0$, то $\frac{k}{x} > 0$. Следовательно, при $x < 0$ функция принимает отрицательные значения, а при $x > 0$ — положительные значения.

2. Функция $y = \frac{k}{x}$, где k — положительное число, убывает в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $y_1 = \frac{k}{x_1}$ и $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Составим разность $y_2 - y_1$ и преобразуем ее:

$$y_2 - y_1 = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1x_2} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2}.$$

Если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(-\infty; 0)$ и $x_2 > x_1$, то в этом случае $\frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2} < 0$. Это следует из того, что $k > 0$,

$x_1 - x_2 < 0$ и $x_1x_2 > 0$ (числитель дроби $\frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2}$ отрицателен как произведение положительного и отрицательного чисел, а знаменатель положителен как произведение двух отрицательных чисел). Значит, $y_2 < y_1$, т. е. в промежутке $(-\infty; 0)$ функция убывает.

Если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(0; +\infty)$ и $x_2 > x_1$, то и в этом случае $\frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2} < 0$. Значит, $y_2 < y_1$, т. е. и в промежутке $(0; +\infty)$ функция убывает. (Случай, когда $k < 0$, исследуйте самостоятельно.)

5. Функция $y = |x|$ и ее график

Так как выражение $|x|$ имеет смысл при всех значениях x , то данная функция определена на множестве всех действительных чисел.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, поэтому графиком функции $y = |x|$ при $x \geq 0$ является биссектриса первого координатного угла (рис. 16)

Если $x \leq 0$, то $|x| = -x$; значит, для отрицательных x графиком функции $y = |x|$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 17).

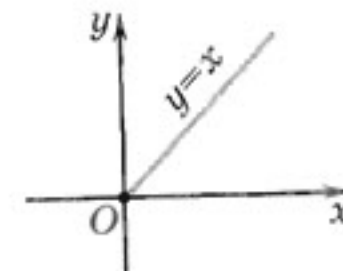


Рис. 16

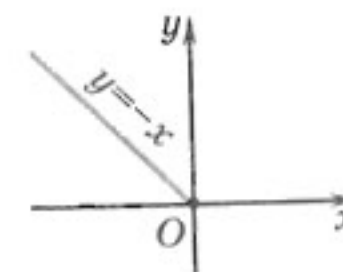


Рис. 17

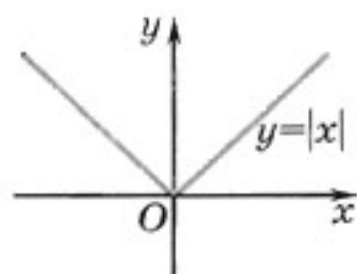


Рис. 18

График функции $y = |x|$ для любых действительных значений изображен на рисунке 18.

Так как $|-x| = |x|$, то график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат. Поэтому для построения графика функции $y = |x|$ можно построить график функции $y = x$ для $x \geq 0$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy .

Множество значений функции $y = |x|$ составляет все неотрицательные числа (объясните это).

6. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Так как выражение \sqrt{x} имеет смысл при $x \geq 0$, то формулой $y = \sqrt{x}$ задается функция, определенная при всех неотрицательных значениях переменной x . Если $x = 0$, то $y = 0$, следовательно, начало координат принадлежит графику этой функции. При $x > 0$ выражение \sqrt{x} принимает положительные значения. Значит, график расположен в первой координатной четверти.

Построим график зависимости $y = \sqrt{x}$. Составим таблицу значений x и y , взяв приближенные значения корней с точностью до 0,1.

Таблица 8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16
\sqrt{x}	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,7	2,8	3	3,2	4

Построив соответствующие точки на координатной плоскости и соединив их последовательно кривой линией, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 19).

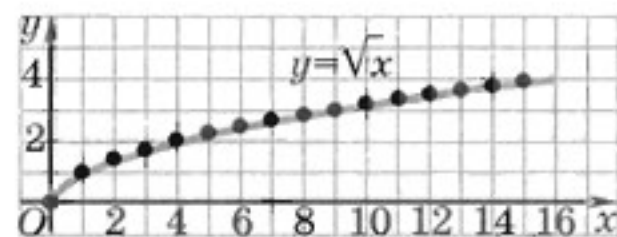


Рис. 19

Отметим, что если функция возрастает на всей области определения, то ее называют *возрастающей* функцией. Если функция убывает на всей области определения, то ее называют *убывающей* функцией.

Теорема. Функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения x из области определения функции, причем $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения y . Тогда

$$y_2 - y_1 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Числитель полученной дроби положителен, так как $x_2 > x_1$. Знаменатель также положителен, так как $\sqrt{x_2} > 0$ и $\sqrt{x_1} \geq 0$. Поэтому дробь является положительной, и, значит, $y_2 > y_1$. Следовательно, функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая. Докажите эту теорему самостоятельно способом от противного.

7. Функция $y = x^2$ и ее график

При построении графика функции $y = x^2$ будем поступать так же, как и при построении графика функции $y = \sqrt{x}$.

Составим, например, такую таблицу значений x и соответствующих значений y .

Таблица 9

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1,5	2	2,5
y	16	12,25	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	2,25	4	6,25

Построим по этой таблице точки (рис. 20) на координатной плоскости. Если будем давать x значения, промежуточные между уже взятыми, то точки расположатся на плоскости плотнее. При всевозможных значениях x все точки расположатся на некоторой линии (кривой), называемой *параболой* (см. рис. 20).

Как видим, график располагается в верхней полуплоскости (т. е. выше оси абсцисс) и лишь одна его точка $O(0, 0)$ лежит на оси абсцисс.

Это понятно: y есть квадрат числа x , поэтому y не может иметь отрицательных зна-

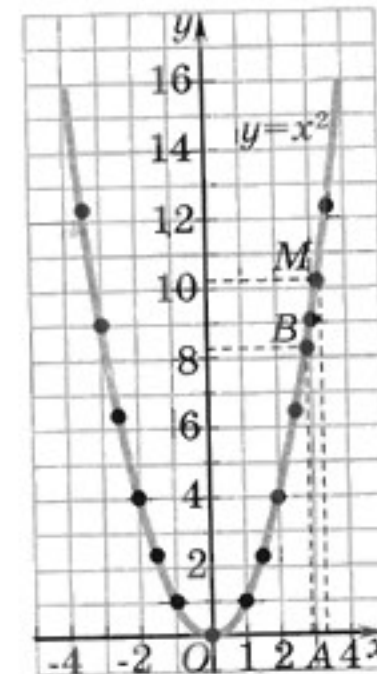


Рис. 20

чений; следовательно, область значений функции $y = x^2$ — промежуток $[0; +\infty)$.

Ось ординат является осью симметрии графика функции $y = x^2$. (Обоснуйте это самостоятельно.)

Теорема. Функция $y = x^2$ является убывающей в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей в промежутке $[0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 принадлежат промежутку $(-\infty; 0]$, причем $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие значения функции. Тогда $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Рассмотрим разность y_2 и y_1 :

$$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Множитель $x_2 - x_1$ положителен, так как $x_2 > x_1$. Множитель $x_2 + x_1$ отрицателен, так как является суммой двух отрицательных чисел или суммой нуля и отрицательного числа. Поэтому произведение $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ отрицательно. Отсюда следует, что $y_2 < y_1$. Значит, функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Таким же образом можно доказать, что функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. (Сделайте это самостоятельно*.)

8. Функция $y = x^3$ и ее график

Составим таблицу значений функции $y = x^3$.

Таблица 10

x	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2
y	-8	-1	-0,125	$\approx -0,02$	0	$\approx 0,02$	0,125	1	8

Как видим, при $x > 0$ и $x^3 > 0$ (куб положительного числа положителен), а при $x < 0$ и $x^3 < 0$ (куб отрицательного числа отрицателен). Следовательно, график расположится на координатной плоскости в I и III четвертях. Заменим значение аргумента x противоположным значением $-x$, тогда и функция примет противоположное значение, так как, если $y = x^3$, то

$$(-x)^3 = -x^3 = -y.$$

Значит, каждой точке $(x; y)$ графика соответствует точка $(-x; -y)$ того же графика, расположенная симметрично относительно начала координат.

Таким образом, начало координат является центром симметрии графика.

График функции $y = x^3$ изображен на рисунке 21. Эта линия называется кубической параболой.

Теорема. Функция $y = x^3$ является возрастающей.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения x , причем $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие значения y . Тогда

$$y_2 - y_1 = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2).$$

Первый множитель положителен, так как $x_2 > x_1$. Второй множитель также положителен. Это можно доказать, выделив из трехчлена $x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2$ квадрат двучлена. (Доказательство завершите самостоятельно.)

Итак, функция $y = x^3$:

- определена для любого действительного x ;
- положительна при $x > 0$, отрицательна при $x < 0$ и равна нулю при $x = 0$;
- возрастающая;
- принимает все действительные значения.

График функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

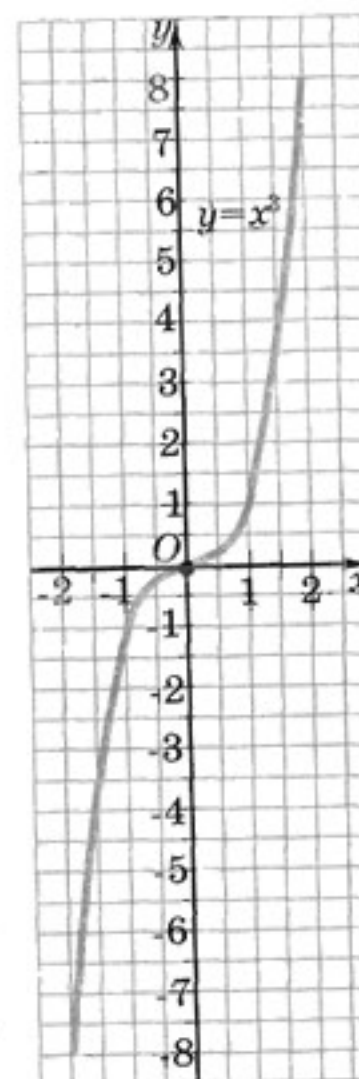


Рис. 21

9*. Степенная функция

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция

$$y = x^n,$$

где n — натуральное число.

Эта функция определена при всех $x \in R$.

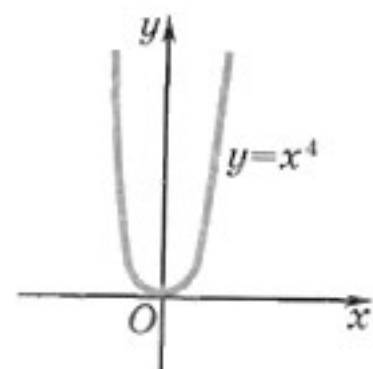


Рис. 22

Степенная функция $y = x^n$ в случае, когда показатель n — нечетное натуральное число, обладает такими же свойствами, как и функция $y = x^3$.

Сформулируйте (самостоятельно) основные свойства функции $y = x^5$ и изобразите ее график.

Рассмотрим теперь функцию $y = x^n$, где n — четное натуральное число. При $n = 2$ эта функция имеет вид $y = x^2$.

Сформулируем ее основные свойства. Функция $y = x^2$:

- определена для любого действительного x ;
- положительна при $x \neq 0$ и равна нулю при $x = 0$;
- принимает все неотрицательные значения.

График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат. Такими же свойствами обладает степенная функция $y = x^n$ в случае, когда показатель n — четное натуральное число.

На рисунке 22 изображен график функции $y = x^4$. Заметим, что функции $y = x^2$ и $y = x^4$ не являются возрастающими на всей числовой оси. Однако на промежутке $[0; +\infty)$ эти функции возрастают, т. е. если $0 \leq x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$ и $x_1^4 < x_2^4$. На промежутке $(-\infty; 0]$ эти функции убывают.

Вообще, функция $y = x^n$ при четном натуральном n убывает при $x \leq 0$ и возрастает при $x \geq 0$.

1. Какая функция называется линейной?
2. Является ли линейной функцией прямая пропорциональность?
3. Что является графиком линейной функции? Как строится график линейной функции?
4. Как называется график функции $y = x^2$?
5. Принадлежат ли точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$ графику функции $y = x^2$? графику функции $y = x^3$? Ответ объясните.
6. Как на координатной плоскости расположен график функции $y = x^2$? график функции $y = x^3$?
7. Какова область определения функции $y = x^2$? функции $y = x^3$?
8. Какие из функций $y = kx + b$, $k > 0$, $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ возрастают на всей области определения?
9. Какие из функций $y = kx$, $k \neq 0$, $y = x^2$, $y = x^3$ являются нечетными?

Задания

Устные упражнения 33—34.

33. Мотоциклист, который выехал из деревни, находится теперь в 15 км от нее. На каком расстоянии y (в километрах) от деревни он будет через x часов, если станет двигаться со скоростью: а) 60 км/ч; б) 50 км/ч? Вычислите значение y при $x = 45$ мин.

34. За проезд в такси берется m рублей за посадку и n рублей за каждый километр дороги. Определите стоимость проезда 10 км на такси.

35. Линейная функция задана формулой $y = 0,4x - 6$. Заполните таблицу 11.

Таблица 11

x	-1	-0,5	0	2,5			
y					-4	-2	0

36. Функция y задана таблицей 12.

Таблица 12

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101

Задайте эту функцию формулой.

37. Скорость распространения звука в воздухе может быть найдена приблизительно по формуле $v = 331 + 0,6t$ (v — скорость в метрах в секунду, t — температура в градусах Цельсия). Найдите, с какой скоростью (в километрах в час) распространяется звук в зимний день (температура -12°C) и летом ($+26^\circ\text{C}$).

38. а) Поезд двигался со скоростью 45 км/ч и затратил на некоторый участок дороги 4 ч. За сколько часов проедет этот же участок дороги поезд, если его скорость равна 40 км/ч?

б) Какой путь проедет поезд, который движется с постоянной скоростью, за 15 с, если за 2 с он проехал 60 м?

39. 1) Функция задана формулой $y = -6x + 19$. Найдите: а) значение функции, которое соответствует значению аргу-

мента, равному 0,5; б) значение аргумента, при котором значение функции равно 1.

2) Функция задана формулой $y = 4x - 30$. Найдите: а) значение функции, которое соответствует значению аргумента, равному -2,5; б) значение аргумента, при котором значение функции равно -6.

40. 1) Принадлежит ли графику функции $y = 15x$ точка: а) $A(-4; -60)$; б) $B(13; 197)$?

2) Принадлежит ли графику функции $y = -15x$ точка: а) $A(4; 60)$; б) $B(-13; 197)$?

41. 1) Постройте график функции $y = -0,5x + 3$. С помощью графика найдите: а) какому значению y соответствует значение x , равное -2; б) какому значению x соответствует значение y , равное 0.

2) Постройте график функции $y = 2x - 4$. С помощью графика найдите: а) какое значение y соответствует значению x , равному 3,5; б) какое значение x соответствует значению y , равному 0.

42. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций: а) $y = 47x - 9$ и $y = -13x + 231$; б) $y = -38x + 15$ и $y = -21x - 36$.

43. Постройте графики линейных функций: а) $y = x + 1$; б) $y = x - 1$; в) $y = 1 - x$.

44. Задайте формулой прямую пропорциональность, график которой проходит через точку:

- а) $A(1; 0,5)$; в) $C(1; -0,5)$;
б) $B(1; -3)$; г) $K(1; 5)$.

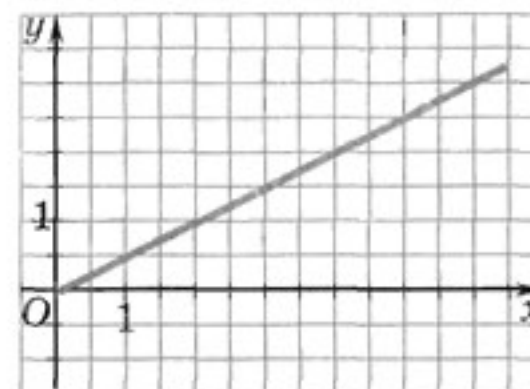
45. Постройте графики функций:

- а) $y = 2,5x$; г) $y = -\frac{4}{x}$;
б) $y = -3x$; д*) $y = 3|x|$;
в) $y = \frac{5}{x}$; е*) $y = -\frac{4}{|x|}$.

46. На сколько процентов: а) 40 меньше 50; б) 50 больше 40?

47. За 7 часов работы токарь изготовил 252 детали. Сколько деталей изготавливал токарь за 15 минут, если известно, что производительность его труда была постоянной?

а)



б)

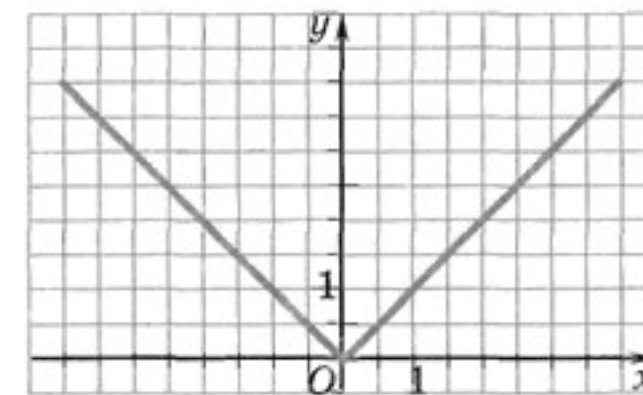


Рис. 23

48. Суточный расход топлива на предприятии составлял 3,6 т, а годовой расход оплаты¹ за него — 66 006 600 р. После реконструкции предприятия суточный расход топлива снизился на 0,6 т. На сколько снизился годовой расход денег на топливо?

49. Постройте график функции $y = -10x + 40$.

50. Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 23, а, б). Задайте эту функцию формулой.

51*. На координатной плоскости укажите множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют следующему условию: а) $x^2 = y^2$; б) $xy = x$.

52. В пустое ведро начинает поступать вода через кран по 4 л в минуту. Ведро вмещает 10 л воды. Постройте график зависимости объема воды m (в литрах), находящейся в ведре, от времени t (в минутах), если наблюдение продолжалось 5 мин. Напишите с помощью формулы зависимость между m и t .

53. Заполните пропуски.

а) Прямая $y = 2x$ проходит через точку (...; 4).

б) Прямая $y = 3x - 4$ отсекает на оси ординат от ее начала отрезок длиной ...

в) Прямая $y = 2x - 6$ отсекает на оси абсцисс от ее начала отрезок длиной ...

г) Среди прямых $y = x - 7$; $y = 5x + 2$; $y = 3x - 7$; $y = x + 4$; $y = -x - 7$ параллельными являются ...

54. Определите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = 13 - x$ и вычислите площадь образованного прямоугольного треугольника.

¹ Здесь и далее цены в задачах условные.

55. График некоторой линейной функции вида $y = kx + 1$ параллелен графику функции $y = -0,4x$. Найдите значение коэффициента k и выясните, принадлежит ли этому графику точка $M(50; -19)$.

56. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой служит прямая, проходящая через точку $A(2; 3)$ и параллельная графику функции $y = 1,5x - 3$. Постройте ее график.

57. График линейной функции — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $M(5; 8)$. Задайте эту функцию формулой.

58. Какие из линейных функций $y = 8x - 5$, $y = -3x + 10$, $y = -49x - 100$, $y = x + 1$, $y = 1 - x$ являются: а) возрастающими; б) убывающими?

59. Является ли возрастающей или убывающей функция:

- а) $y = 0,9x$; в) $y = 6,1x$; д) $y = 3$;
б) $y = -5x$; г) $y = -0,7x$; е) $y = -4$?

60. Постройте график какой-либо функции с областью определения $[-2; 5]$ так, чтобы эта функция:

а) возрастала на промежутке $[-2; 1]$ и убывала на промежутке $[1; 5]$;

б) убывала на промежутке $[-2; 2]$ и возрастала на промежутке $[2; 5]$.

61. а) Найдите значения функции $y = 2x^2$ при $x = -7, -4, -3, -1, -\frac{1}{3}$. Сравните результаты. Докажите, что функция $y = 2x^2$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$.

б) Найдите значения функции $y = 2x^2$ при $x = \frac{1}{2}, 1, 5, 10, 12$. Сравните результаты. Докажите, что функция $y = 2x^2$ является возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.

62. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{-8}{x}$.

Укажите:

а) промежуток, на котором функция принимает положительные значения;

б) промежуток, на котором функция принимает значения больше -4 , но меньше -2 .

63. Известно, что точка $P(-9; 18)$ принадлежит графику функции, заданной формулой вида $y = \frac{k}{x}$. Найдите значение k .

64*. Функция задана формулой $y = \frac{4}{|x|}$. Какой вид имеет эта формула при $x > 0$ и при $x < 0$? Какие значения (положительные или отрицательные) принимает функция на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$? Постройте график этой функции.

65. Докажите, что:

а) функция $y = 3x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;

б) функция $y = -5x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

66*. На одном рисунке постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$.

67. Какова область определения функции:

- а) $y = \sqrt{x - 3}$; е) $y = \sqrt{2,5x + 7,5}$;
б) $y = \sqrt{5 - x}$; ж) $y = \sqrt{-x - 4}$;
в) $y = \sqrt{2x - 1, (4)}$; з) $y = \sqrt{\sqrt{2} + 3x}$;
г) $y = \sqrt{3 - 2x}$; и*) $y = \sqrt{|x - 4|}$;
д) $y = \sqrt{4 + 5x}$;

68. Используя свойство возрастания функции $y = \sqrt{x}$, сравните значения выражений:

- а) $\sqrt{2,7}$ и $\sqrt{2\frac{3}{4}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\sqrt{\frac{1}{8}}$;
б) $\sqrt{0,48}$ и $\sqrt{\frac{3}{7}}$; г) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ и $\sqrt{5,45}$.

69*. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

- а) $y = x^{-1}$ и $y = x$; г) $y = x^{-1}$ и $y = 2$;
б) $y = x^{-2}$ и $y = x$; д) $y = x^{-2}$ и $y = 4$;
в) $y = x^{-3}$ и $y = x$; е) $y = x^{-3}$ и $y = 8$.

70. Найдите по графику функции $y = 3 : x$ приближенное значение функции при: а) $x = 0,7$; б) $x = 2,75$ и вычислите

абсолютную и относительную погрешности каждого значения. Относительную погрешность выразите в процентах.

71. а) Найдите по графику функции приближенное значение функции $y = x^3$ при $x = 0,2; 1,6; 1,9$ и вычислите абсолютную погрешность каждого приближения.

б) Найдите по графику функции $y = x^2$ приближенные значения y при $x = 0,6; 1,8; 2,6$. Вычислите абсолютную погрешность каждого из приближенных значений.

(Графики указанных функций постройте на миллиметровой бумаге.)

72. В одной и той же системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, где $x > 0$. Пользуясь построенными графиками, сравните:

а) $0,6^2$ и $0,6^3$; б) $1,5^2$ и $1,5^3$; в) $2,7^2$ и $2,7^3$.



Повторение главы I

Исторические сведения

Важное математическое понятие *функция* формировалось на протяжении длительного времени. Идея функциональной зависимости имеет истоки в древности. Например, вавилонские математики около 4—5 тыс. лет тому назад нашли формулу для приближенного вычисления площади круга радиусом R : $S = 3R^2$.

Понятие функции, очень близкое к современному, рассматривали в математических трудах знаменитые ученые Исаак Ньютон (1643—1727), Готфрид Вильгельм Лейбниц (1648—1716), Леонард Эйлер (1707—1783).



Николай Иванович
Лобачевский
(1792—1856)

Великий математик Н. И. Лобачевский в одной из своих работ писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое дает средство испытать все числа и выбирать одно из них; или зависимость может сущест-

вовать и оставаться неизвестной...» Примером функции, соответствующей такой трактовке, является функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В современной математике исследование функций является одним из фундаментальных направлений ее развития (в том числе в прикладных направлениях). Практические задачи на исследование функций также имеют давнюю историю. Например, в одной из книг Евклида приводилось геометрическое решение такой задачи: «Доказать, что из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, основание которого равно половине основания данного треугольника».

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией? Приведите примеры.
2. Что такое область определения и множество значений функции?
3. Какие способы задания функции вы знаете?
4. Что называется графиком функции?
5. Какая функция считается линейной? Что является графиком линейной функции?
6. Какое название имеет функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$? Как называют график функции?
7. Дайте определение функции: возрастающей на промежутке; убывающей на промежутке.
8. Какая функция называется четной; нечетной?
9. Постройте графики функций $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$. Какие из этих функций являются: четными; нечетными; возрастающими?

Задания

73*. а) Функция задана формулой $y = \frac{1}{x}$. На сколько процентов уменьшится значение y , если значение x увеличить на 3 %?

Решение. Для x_0 имеем $y = \frac{1}{x_0}$. Увеличив x_0 на 3 %, получим $x_1 = 1,03x_0$. Тогда $y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1,03x_0}$. Найдем, на сколько уменьшится y :

$$y_0 - y_1 = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{1,03x_0} = \frac{1,03 - 1}{1,03x_0} = \frac{0,03}{1,03x_0} = \frac{3}{103} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{3}{103} y_0.$$

Узнаем, сколько процентов составляет эта разность от y_0 , принимаемого за 100 %:

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0} \cdot 100 \% = \frac{\frac{3}{103} y_0}{y_0} \cdot 100 \% = \frac{300}{103} \% \approx 2,91 \%$$

Ответ: на 2,91 %.

б) Функция задана формулой $y = \frac{1}{x}$. На сколько процентов увеличится значение y , если значение x уменьшить на 3 %?

74*. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-x^4 + x^2 - 0,25}$.

Решение. Преобразуем формулу функции

$$y = \sqrt{-(x^4 - x^2 + 0,5^2)} = \sqrt{-(x^2 - 0,5)^2}.$$

Так как $(x^2 - 0,5)^2 \geq 0$ для всех x , то $-(x^2 - 0,5)^2 \leq 0$. Подкоренное выражение по определению квадратного корня должно быть больше либо равно нулю. Поэтому подходят только те значения x , при которых подкоренное выражение равно нулю, т. е. $(x^2 - 0,5)^2 = 0$. Откуда $x^2 - 0,5 = 0$, $x^2 = 0,5$, $x = \pm \sqrt{0,5}$. Таким образом, область определения функции состоит из двух чисел.

Ответ: $-\sqrt{0,5}, \sqrt{0,5}$.

б) $y = \sqrt{-x^6 + 2x^3 - 1}$.

75. Докажите, что если k_1 и k_2 — коэффициенты двух линейных функций различны, то их графики пересекаются, а если эти коэффициенты одинаковы, то прямые параллельны.

Доказательство. Пусть $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — две различные линейные функции. Чтобы выяснить, каково взаимное расположение их графиков, рассмотрим уравнение

$$k_1x + b_1 = k_2x + b_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} k_1x - k_2x &= b_2 - b_1, \\ (k_1 - k_2)x &= b_2 - b_1. \end{aligned}$$

Если $k_1 \neq k_2$, то это уравнение имеет единственный корень. В этом случае графики функций пересекаются. Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то уравнение не имеет корней. В этом случае графики функций параллельны.

76. а) $f(x) = \sqrt{x}$. Докажите, что для любых значений аргумента x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доказательство.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}}.$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2}.$$

Пусть $\left(\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2}\right)^2$. Тогда

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2}{4},$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + 2\sqrt{x_1x_2} + x_2}{4} = \frac{x_1 + x_2 - \sqrt{x_1x_2} - \sqrt{x_1x_2}}{4} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{4} \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, значит, и исходное верно.

б) $f(x) = x^2$. Докажите, что для любых значений аргумента x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

77*. Постройте график функции:

а) $y = x\sqrt{x^2}$.

Решение. Упростим формулу функции, используя свойство корня:

$$y = x|x|.$$

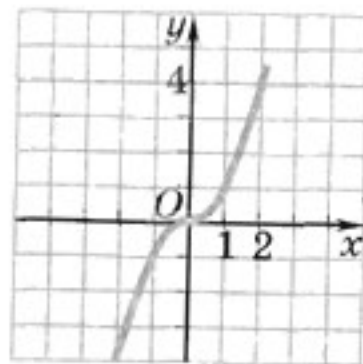


Рис. 24

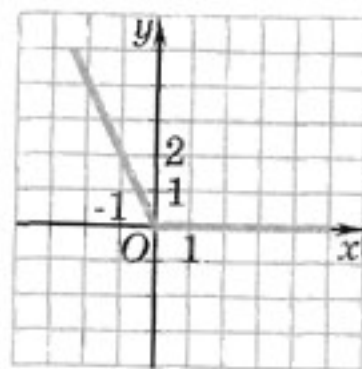


Рис. 25

При $x \geq 0$ получим $y = x^2$, при $x < 0$ получим

$$y = x(-x) = -x^2.$$

График состоит из правой ветви параболы $y = x^2$ и левой ветви параболы $y = -x^2$ (рис. 24).

б) $y = \sqrt{x^2 - x}$.

Решение. Упростим формулу функции, используя свойство корня:

$$y = |x| - x.$$

При $x \geq 0$ получим $y = x - x = 0$, при $x < 0$ получим $y = -x - x = -2x$.

График состоит из положительной части оси Ox и луча прямой $y = -2x$, который расположен слева от оси Oy во II четверти (рис. 25).

78. Постройте график функции:

а) $y = (\sqrt{x-1})^2$; г) $y = x - \frac{x}{|x|}$;

б) $y = \sqrt{(x-1)^2}$; д) $y = \frac{2}{x} - \frac{2}{|x|}$;

в) $y = x + \frac{x}{|x|}$; е) $y = x^0 - 1$.

79. На каких промежутках функции f с областью определения $[-6; 6]$ (рис. 26): а) возрастает; б) убывает?

80. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{-x}$.

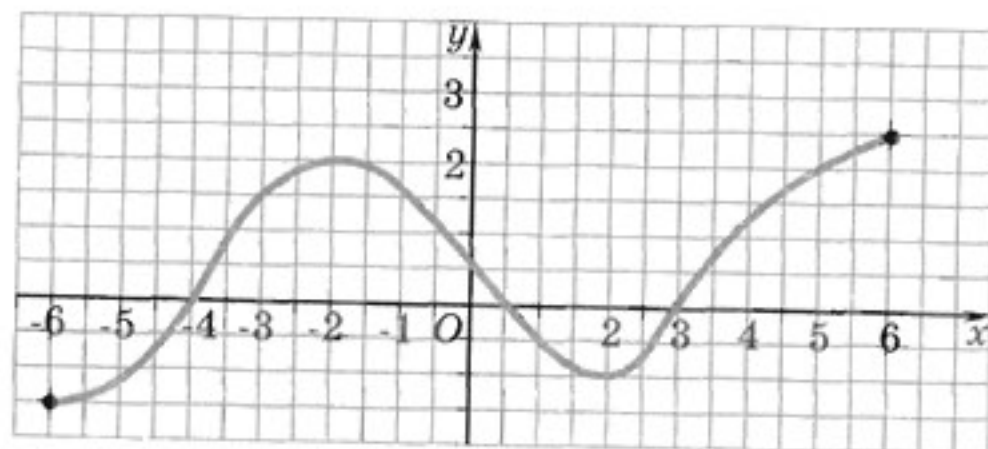


Рис. 26

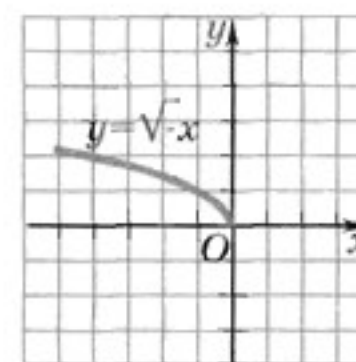
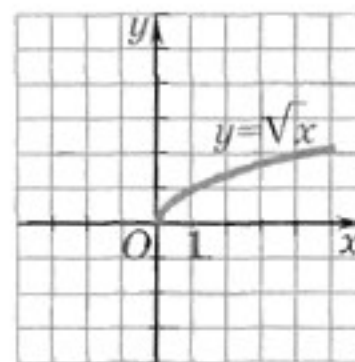


Рис. 27

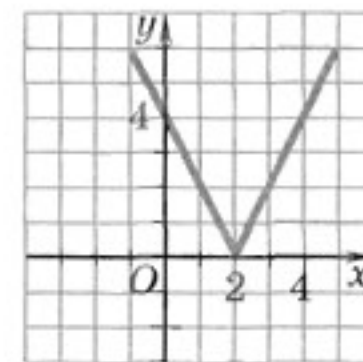


Рис. 28

График функции $y = \sqrt{-x}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ его симметрией относительно оси Oy (рис. 27).

б*) $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$.

Решение. Воспользуемся свойством корня и тождеством $(a-b)^2 = (b-a)^2$. Получим $y = |x-2| + |x-2|$, $y = 2|x-2|$.

1. При $x \geq 2$ имеем $x-2 \geq 0$, $2|x-2| = 2(x-2)$, $y = 2x-4$.

x	2	0
y	4	4

2. При $x < 2$ имеем $x-2 < 0$, $2|x-2| = 2(-x+2)$, $y = -2x+4$ (рис. 28).

x	1	2
y	0	4

81. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x-2}$; б*) $y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

82*. Рассмотрим вопрос о решении уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ с помощью графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Решение. Если x_0 — корень уравнения, то это означает, по определению, что точка x_0 принадлежит области определения каждой из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и выполнено равенство $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Обозначим число $f_1(x_0)$ через y_0 , так что $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Так как $y_0 = f_1(x_0)$, то точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f_1(x)$. Так как, кроме того, $y_0 = f_2(x_0)$, то точка $(x_0; y_0)$ принадлежит также графику функции $y = f_2(x)$. Таким образом, $(x_0; y_0)$ есть точка пересечения

графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. (Покажите это на рисунке самостоятельно.)

Обратно, пусть графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке $(x_0; y_0)$, т. е. $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Это означает, что число x_0 является корнем уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Таким образом, для нахождения решений уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ нужно знать абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y = f_1(x) \text{ и } y = f_2(x).$$

Такой способ решения уравнений называется *графическим*. Он не дает точных решений уравнения, поскольку практически мы всегда имеем дело не с графиком, а лишь с эскизом графика, но часто позволяет установить число решений данного уравнения и оценить погрешность найденных решений.

83*. а) Решите уравнение

$$x^3 = 2x - 6.$$

Решение. Функция $y = x^3$ — степенная, график ее — кубическая парабола.

Составим таблицу 13.

Таблица 13

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	8	-1	-8

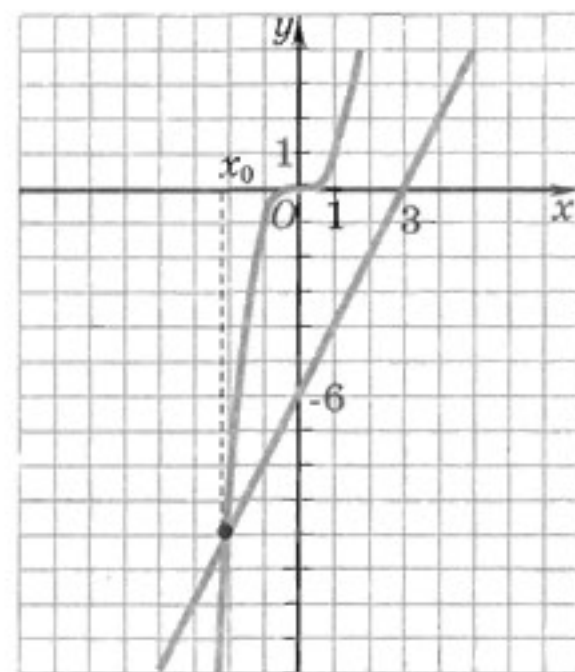


Рис. 29

Функция $y = 2x - 6$ — линейная, график ее — прямая.

Если $x = 0$, то $y = -6$; если $y = 0$, то $x = 3$.

Построим графики этих функций.

Графики пересекаются в единственной точке с абсциссой $x_0 \approx -2,2$ (рис. 29).

Ответ: $x_0 \approx -2,2$.

б) $\frac{6}{x} = 0,5x - 2$.

Решение. Функция $y = \frac{6}{x}$ —

обратная пропорциональность,

график ее — гипербола. Область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Составим таблицу 14 значений функции.

Таблица 14

x	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
y	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

Функция $y = 0,5x - 2$ — линейная, график ее — прямая.

Если $x = 0$, то $y = -2$; если $y = 0$, то $x = 4$.

Построим графики функций. Графики пересекаются в двух точках $x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 6$ (рис. 30). Проверка показывает, что целые значения $x = -2$ и $x = 6$ являются корнями.

Ответ: 6; -2.

84. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 2 - x$; в) $-x^3 = x + 5$;

б*) $x^{-1} = x^2 + 1$; г) $|x| = \sqrt{x}$.

85. Решите уравнение:

а) $3 - x = \frac{2}{x}$; б) $\frac{3}{x} = 4 - x$.

86*. Объясните, как, используя графики функций $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$, можно построить график функции $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 31), и решите:

а) уравнение $x + \frac{1}{x} = -3$;

б) неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

в) неравенство $3 < x + \frac{1}{x} < 3,5$.

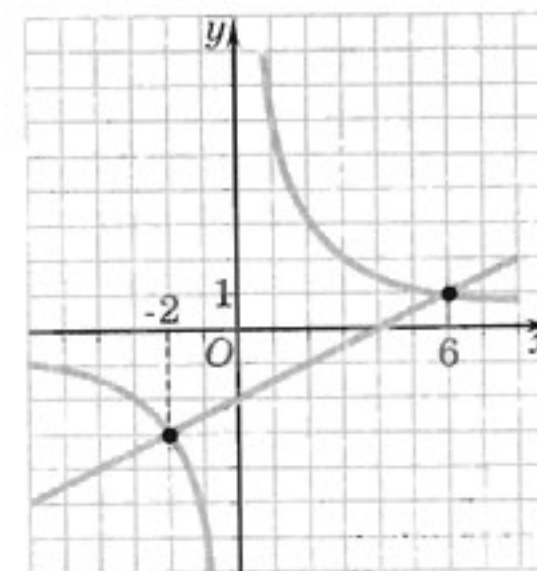


Рис. 30

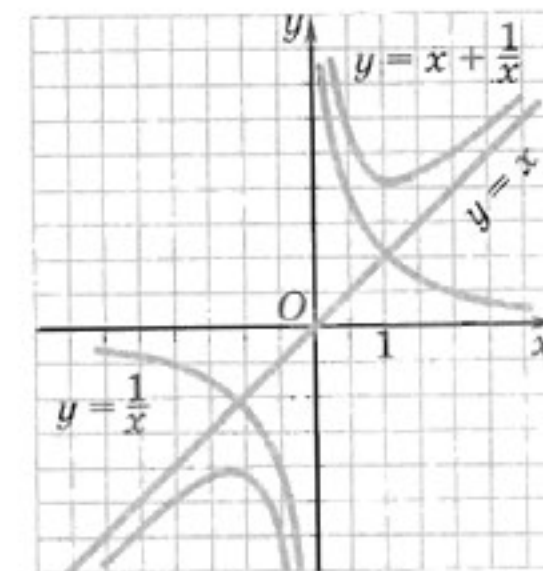


Рис. 31

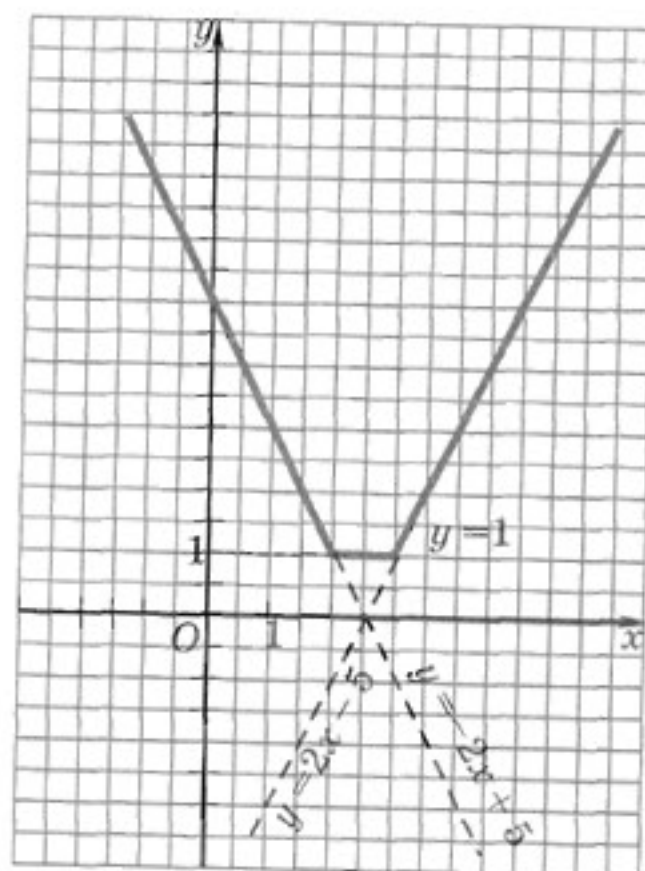


Рис. 32

87*. Запишите уравнение ломаной, график которой изображен на рисунке 32. Решите, используя график:

а) какое-нибудь уравнение, которое можно решить с использованием этого графика;

б) какое-нибудь неравенство, которое можно решить с использованием этого графика.

88*. Решите уравнение:

а) $x^4 - x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $x^3 - 19x + 30 = 0$.

89. Запишите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 11 - x$; г) $y = \sqrt{13 - x^2}$;

б) $y = \frac{1}{11 - x}$; д) $y = (x^2 - 6x + 5)^{-2}$;

в) $y = 1 - x^{-1}$; е*) $y = \frac{1}{x^{-2} - x}$.

90. Приведите пример функции, областью определения которой является:

а) множество R ;

б) множество всех чисел, кроме 14;

в*) одно число;

г*) множество всех отрицательных чисел;

д*) множество, состоящее из двух каких-либо иррациональных чисел

91. Найдите область значений функции:

а) $y = 3x + 5$; е*) $y = \frac{x+3}{x}$;

б) $y = 7x^{-1} + 1$; ж*) $y = x^2 + x + 6$;

в) $y = -x^2 - 2$; з*) $y = (x-1)^2 + (x-2)$;

г) $y = \sqrt{-x}$; и*) $y = x^4 - x^2$.

д*) $y = \frac{4x}{x+5}$;

92. Найдите множество значений функции y , заданной на промежутке $[2; 5]$:

а) $y = 0,05x$; в) $y = -|x|$;

б) $y = -\frac{8}{x}$; г) $y = 0,05x^2$.

93. Постройте график какой-либо функции, определенной для всех $x \in [-4; 5]$ и имеющей два нуля — числа 0,5 и 12. Найдите промежутки возрастания и убывания вашей функции.

94. Какие из приведенных функций являются возрастающими и какие убывающими:

а) $y = 15x$; в) $y = -3x^3$;

б) $y = x^2$; г) $y = 4x$?

95. Приведите пример функции, которая:

а) возрастает на всей области определения;

б) убывает на всей области определения;

в) возрастает на множестве положительных чисел;

г) убывает на множестве отрицательных чисел;

д*) возрастает только на множестве всех натуральных чисел первого десятка.

96. Постройте график функции $y = -1\frac{1}{3}x + 4$ и найдите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат;

б) площадь треугольника, ограниченного графиком функции и осями координат.

97. Приведите пример функции, заданной формулой, области определения которой принадлежит любое число, а множество значений состоит только из одного числа.

98. 1) Постройте график функции $y = -0,5x + 3$. С помощью графика найдите: а) какому значению y соответствует значение x , равное -2 ; б) какому значению x соответствует значение y , равное 0 .

2) Постройте график функции $y = 2x^{-1}$. С помощью графика найдите: а) какое значение y соответствует значению x , равному $3,5$; б) какое значение x соответствует значению y , равному 0 .

99. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций: а) $y = 4,7x - 9$ и $y = -1,3x + 23$; б) $y = -38x + 1,5$ и $y = -21x - 30$.

100. Постройте графики функций:

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| а) $y = 5,8 - 4(1,2x - 2,5)$; | ж*) $y = x + x $; |
| б) $y = 7,2 - 5(1,3x - 2,4)$; | з*) $y = (x)^{-1}$; |
| в) $y = (x - 2)^2 + (3 - x)(x - 2)$; | и) $y = -x^3$; |
| г) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)(x + 3)$; | к) $y = -\sqrt{x}$; |
| д) $y = (4 - x)(x + 1) + (x + 1)^2$; | л*) $y = x^0 + x^{-1} $; |
| е) $y = (6 - x)(x - 2) + (x - 2)^2$; | м*) $y = x(x^{-2} + x^{-1})$. |

101. При каких значениях a график функции $y = ax + 1$ проходит через точку $A(2; 5)$? Постройте такой график.

102. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(2; -5)$? Постройте такой график.

103. Не выполняя построения графика функции $y = 2x - 3$, выясните, проходит ли он через точки:

- | | |
|----------------|----------------|
| а) $(0; -3)$; | в) $(1; -1)$; |
| б) $(1; -2)$; | г) $(2; 3)$. |

104. Дана функция $y = kx + b$. При каких значениях k и b график функции проходит через точки $(-1; 1)$ и $(2; 3)$?

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Из заданных формулами функций укажите те, графики которых изображены на рисунке 33.

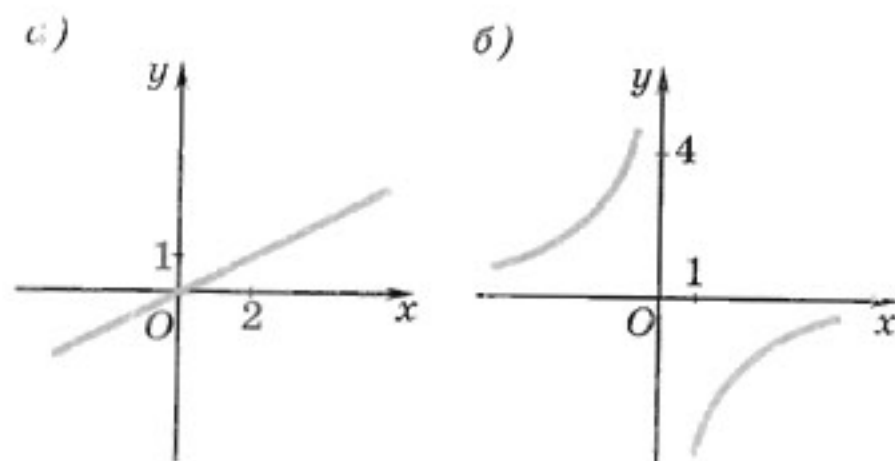


Рис. 33

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|-------------------------|
| а) $y = \frac{1}{2}x + 1$; | в) $y = \sqrt{x}$; | д) $y = x^2$; |
| б) $y = \frac{1}{2}x$; | г) $y = \frac{4}{x}$; | е) $y = -\frac{4}{x}$. |

2. Постройте график функции $y = -0,5x + 3$. С помощью графика найдите: а) какому значению y соответствует значение x , равное -2 ; б) какому значению x соответствует значение y , равное 0 .

3. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций: $y = 47x - 9$ и $y = -13x + 231$.

4. Из населенного пункта в город, расстояние между которыми 20 км, отправился пешеход. Скорость пешехода 5 км/ч. На каком расстоянии будет пешеход от города через t часов? Какие значения может принимать t ?

5. Найдите область определения и множество значений функции: а) $y = \frac{2}{x} - 1$; б*) $y = x - x^0$.

Вариант 2*

1. Какие из функций $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = 2x + 1$ являются: а) четными; б) нечетными?

2. Задайте формулой функцию, график которой проходит через точку $(-2; 6)$: а) прямую пропорциональность; б) обратную пропорциональность.

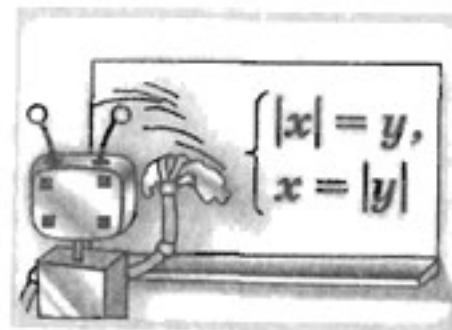
3. Укажите область определения и постройте график функции $y = \frac{x}{|x|} - 1$.

С помощью графика найдите:

- множество значений функции;
- промежутки возрастания, убывания функции;
- нули функции;
- при каких значениях x $y > 0$.

4. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = \sqrt{x + 4} - 3$.

5. При каких значениях a гипербола $y = \frac{4}{x}$ и прямая $y = a - x$ имеют только одну общую точку? Найдите ее координаты.



СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 3. Уравнения с двумя переменными

1. Уравнение с двумя переменными и его график

Рассмотрим пример: найти два числа, сумма квадратов которых равна 100.

Если одно из неизвестных чисел обозначить буквой x , а другое — буквой y , то по условию задачи соотношение между ними записывается в виде равенства $x^2 + y^2 = 100$, содержащего две переменные. Такие равенства называются **уравнениями с двумя переменными** или **уравнениями с двумя неизвестными**.

Для получения ответа на вопрос задачи нужно находить пары $(x; y)$ чисел, такие, которые при подстановке их в уравнение $x^2 + y^2 = 100$ обращают его в верное числовое равенство.

Например, каждая из пар чисел $(8; 6)$, $(6; 8)$, $(10; 0)$, $(0; -10)$ обращает это уравнение в верное числовое равенство. О таких парах значений переменных говорят, что они являются решениями уравнения с двумя переменными.

Вообще, решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая уравнение в верное числовое равенство.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения или не имеющие решений, называются **равносильными**.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной. Так, получается уравнение, равносильное данному, если переносится

слагаемое из одной части уравнения в другую и изменяется знак этого слагаемого или если обе части уравнения умножаются или делятся на одно и то же число, не равное нулю.

Далее мы будем рассматривать разные виды уравнений с двумя переменными и находить их решения. Довольно часто нам придется иметь дело с уравнением вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, а a , b и c — некоторые действительные числа. Это уравнение называется **линейным уравнением с двумя переменными**.

Например, $2x + 3y = 6$ — линейное уравнение с двумя переменными.

Линейное уравнение с двумя неизвестными, у которого хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, называется **уравнением первой степени с двумя неизвестными**.

Чтобы найти решения линейного уравнения с двумя переменными, нужно выразить одну переменную через другую и, придавая значения другой переменной, получать соответствующие значения первой.

Например, для отыскания решений уравнения $2x + 3y = 6$ сначала выразим y через переменную x : $3y = 6 - 2x$, $y = \frac{6 - 2x}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Далее возьмем некоторые значения переменной x и найдем соответствующие значения y , подставив значения x в формулу $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Для удобства пользуемся таблицей 15.

Таблица 15

x	0	3	-3	30
y	2	0	4	-18

Пары $(x; y)$ значений переменных $(0; 2)$, $(3; 0)$, $(-3; 4)$, $(30; -18)$ являются решениями уравнения $2x + 3y = 6$. Это уравнение имеет бесконечно много решений.

Каждую пару $(x; y)$ чисел, являющуюся решением уравнения с двумя переменными, можно изобразить в координатной плоскости точкой, абсцисса которой равна x , а ордината равна y ; все такие пары задают график уравнения.

Таким образом, *график уравнения с двумя переменными* — это множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения.

Пример 1. Выяснить, что является графиком уравнения $2x + 3y = 6$.

Решение. Когда мы выразим переменную y через x , то имеем: $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Формулой $y = -\frac{2}{3}x + 2$ задается линейная функция, график которой — прямая. Поскольку уравнения $2x + 3y = 6$ и $y = -\frac{2}{3}x + 2$ равносильные, то эта прямая — график уравнения $2x + 3y = 6$ (рис. 34).

Вообще, если в уравнении $ax + by = c$ выразим переменную y через переменную x , то имеем: $by = -ax + c$, $y = \frac{-ax + c}{b}$, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Теперь можно заметить, что при $b \neq 0$ графиком линейного уравнения $ax + by = c$ является график линейной функции $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, который, как известно, есть прямая. Для построения прямой — графика линейного уравнения $ax + by = c$, $b \neq 0$, — достаточно найти координаты двух ее точек.

Пример 2. Построить график уравнения $x + y = 1$. Зная, что он представляет прямую, находим координаты двух ее точек. Например: $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 0$. Далее через точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$ проводим прямую — график уравнения $x + y = 1$ (рис. 35).

Если $b = 0$, $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то $ax + 0y = c$, $x = \frac{c}{a}$. В этом случае графиком линейного уравнения $ax + by = c$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $(\frac{c}{a}; 0)$.

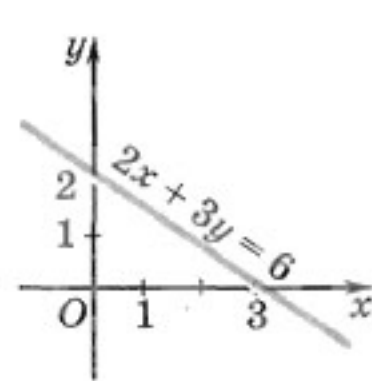


Рис. 34

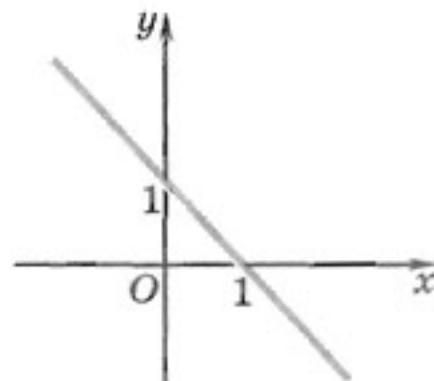


Рис. 35

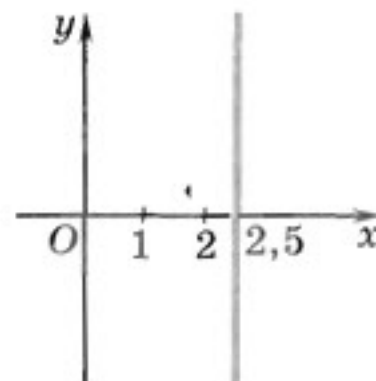


Рис. 36

Например, графиком уравнения $2x + 0y = 5$ является прямая $x = 2,5$ (рис. 36).

Случай, когда $a = 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, исследуйте самостоятельно.

Отметим, что график уравнения с двумя переменными — это чаще всего некоторая линия на координатной плоскости.

2. Уравнения линий на плоскости

Уравнением линии на плоскости считается уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, ей не принадлежащей.

При изучении линии с использованием системы координат по геометрическим свойствам линии находят ее уравнение и по заданному уравнению линии исследуют ее свойства.

1*. Выведем, например, уравнение прямой в заданной системе координат. Отметим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, такие, что прямая l является осью симметрии отрезка AB (рис. 37). Если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой, то $AM = MB$. Применяя формулу расстояния между двумя точками с данными координатами $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (вывод которой повторите), получим:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \quad (1)$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 =$$

$$= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 =$$

$$= 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0.$$

Если обозначим $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$, то уравнение прямой примет вид: $ax + by + c = 0$.

Если точка N не принадлежит прямой l , то $AN^2 \neq BN^2$ и координаты точки N не удовлетворяют уравнению (1).

Таким образом, уравнением прямой в системе координат является линейное уравнение с двумя переменными.

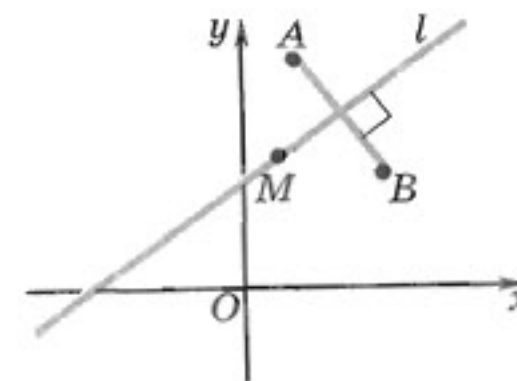


Рис. 37

2. Рассмотрим теперь прямую p , которая проходит через начало системы координат и задается уравнением $y = kx$.

Отметим, что коэффициент k называется *угловым коэффициентом прямой* $y = kx$.

Пусть M — произвольная точка прямой p (рис. 38). Ее координаты следующие $(x_M; y_M)$. Поэтому $k = \frac{y_M}{x_M}$. Таким образом, угловой коэффициент прямой $y = kx$ равен отношению ординаты точки прямой к ее абсциссе.

Прямые $y = kx$ и $y = kx + b$ ($b \neq 0$) параллельны, поскольку имеют равные угловые коэффициенты. (Обоснуйте это самостоятельно.)

3*. Произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно -1 .

Действительно, пусть мы имеем две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке P (рис. 39).

На одной из этих прямых возьмем точку Q и построим прямоугольный треугольник QRP . Затем на другой прямой возьмем такую точку Q' , что $PQ' = PQ$, и построим прямоугольный треугольник $Q'RP$.

$\triangle QRP = \triangle Q'RP$. Следовательно, $\frac{RQ}{PR} = \frac{R'P}{Q'R'}$. Угловой коэффициент прямой l равен $k = \frac{RQ}{PR}$. Угловой коэффициент прямой l' равен $k' = -\frac{Q'R'}{R'P}$. Значит, $k' = -\frac{1}{k}$, $k \cdot k' = -1$.

4. Выведем теперь *уравнение окружности* с центром в начале системы координат и радиусом r . Такая окружность определяется условием $OM = r$ (рис. 40).

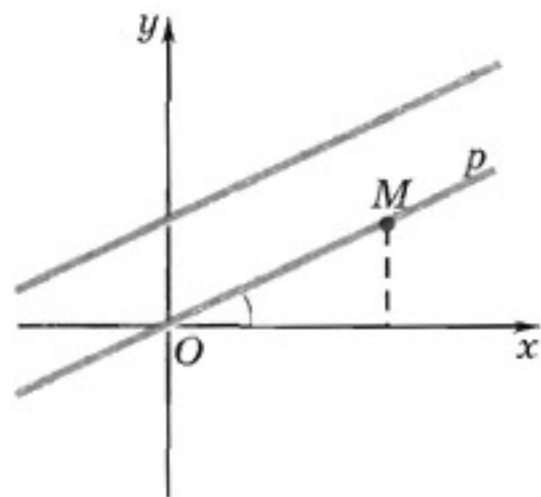


Рис. 38

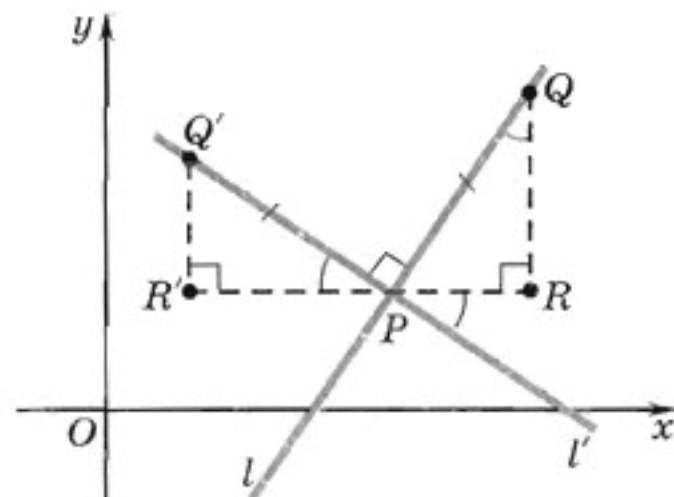


Рис. 39

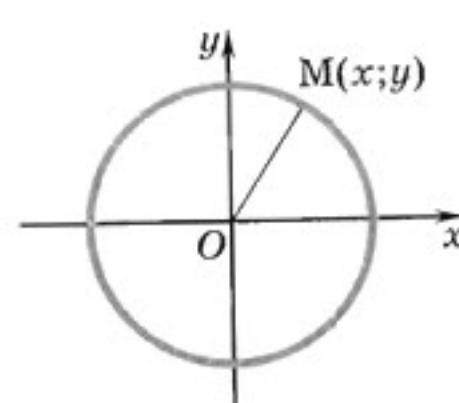


Рис. 40

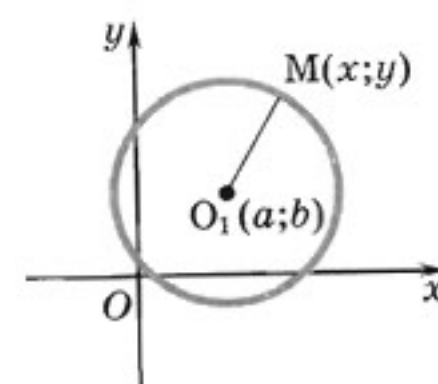


Рис. 41

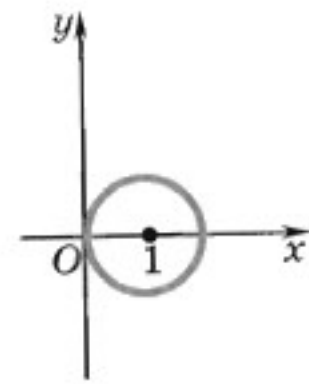


Рис. 42

Применив формулу расстояния между точками O и M , имеем: $OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, или $r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$; откуда $x^2 + y^2 = r^2$.

Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ является уравнением окружности с центром в начале системы координат и радиусом, равным r .

Если центр окружности (рис. 41) находится в точке $O_1(a; b)$, то условие $O_1M = r$ записывается так: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, откуда $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Уравнение вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов a, b, c не равен нулю, называется *уравнением второй степени с двумя неизвестными x и y* .

Пример 1. Уравнение $x^2 - 2x + y^2 = 0$ записывается в виде $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и задает окружность с центром в точке $(1; 0)$ единичного радиуса (рис. 42).

Задача*. Концы отрезка AB , длина которого равна a , скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

Решение. Выберем (рис. 43) систему координат так, чтобы ее начало совпало с вершиной прямого угла, а его стороны находились на осях. Тогда, если точка $M(x; y)$ обладает указанным свойством, то координаты концов отрезка равны: $A(2x; 0)$, $B(0; 2y)$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

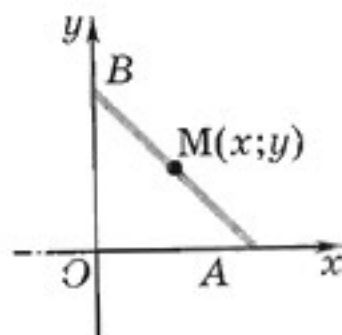


Рис. 43

$$AB = \sqrt{(2x - 0)^2 + (0 - 2y)^2};$$

$$AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2}.$$

По условию $AB = a$, поэтому $4x^2 + 4y^2 = a^2$, откуда $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Последнее уравнение задает окружность с центром в начале системы координат и радиусом $\frac{a}{2}$, поэтому можно заключить, что точка $M(x; y)$ принадлежит дуге окружности $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, причем эта дуга расположена в I четверти.

Ответ: середина отрезка описывает дугу окружности с центром в начале системы координат и радиусом $\frac{a}{2}$, заключенную между сторонами данного прямого угла.

Пример 2*. Написать все двузначные числа, которые увеличиваются на 36, если переставлять местами цифры этих чисел.

Решение. Пусть искомое число $10a + b$, тогда $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$, т. е. чтобы число от перемены цифр местами увеличилось на 36, надо, чтобы разность $a - b$ равнялась 4, отсюда, если $b = 1$, то $a = 5$; если $b = 2$, то $a = 6$; если $b = 3$, то $a = 7$; если $b = 4$, то $a = 8$; если $b = 5$, то $a = 9$.

Искомые числа: 15, 26, 37, 48, 59.

Пример 3*. Написать все двузначные числа, которые увеличиваются в 8,5 раза, если между цифрами этих двузначных чисел вставить нуль.

Решение. Пусть искомое двузначное число $10a + b$. Если вставить между цифрами этого числа нуль, то получим $100a + b$, отсюда уравнение: $(10a + b) \cdot 8,5 = 100a + b$, т. е. $b = 2a$, значит, искомые числа: 12, 24, 36, 48.

1. Что называется решением уравнения с двумя переменными?
2. Какие уравнения с двумя переменными называются равносильными? Приведите пример.
3. Что такое график уравнения с двумя переменными?
4. Какое уравнение с двумя переменными называется линейным? Приведите пример такого уравнения.
5. Какая фигура является графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю? Как расположен в координатной плоскости график уравнения: $x = a$, $x = b$?
6. Что за фигура — график уравнения $x^2 + y^2 = 5^2$?

Задания

Устные упражнения 105—107.

105. Найдите три пары целых чисел, являющихся решениями уравнения $3x + 2y = 5$.

106. а) Докажите, что уравнение $(x + 8)^2 + (y - 1)^2 = -3$ не имеет решений.

б) Докажите, что уравнение $(x + 7)^2 + (y - 10)^2 = 0$ имеет только одно решение.

107. а) Докажите, что если пара чисел $(m; n)$ является решением уравнения $x + y = 9$, то и пара чисел $(n; m)$ — также его решение.

б) Докажите, что если пара чисел $(e; p)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 10$, то и пара $(p; e)$ есть решение этого уравнения.

108. Составьте какое-либо уравнение с двумя переменными, одним из решений которого является следующая пара чисел:

а) $(-1; -1)$; в) $\left(1\frac{4}{7}; 5\frac{3}{7}\right)$;

б) $(0; 100)$; г) $(-0,4; 7,3)$.

109. Постройте график линейного уравнения с двумя переменными.

а) $3x - y = 4$; в) $0x + 3y = 16,5$;

б) $2x - 3y = 7$; г) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$.

110. Постройте график уравнения с двумя переменными:

а) $xy = 6$; г) $4x^2 - 2y = 0$;

б) $xy = -10$; д) $(x - 1)^2 + y^2 = 9$;

в) $2x^2 + y = 5$; е*) $x^2 + (y + 1)^2 = 0$.

111. Найдите решение уравнения $x + 3y = 18$, составленного: а) из двух равных чисел; б*) из двух чисел, таких, что одно в 1 000 000 раз больше другого.

112*. Найдите множество всех пар натуральных чисел, являющихся решениями уравнения:

а) $31x + 19y = 295$; б) $49x + 51y = 602$.

113*. Для сохранения зерна имеются мешки двух размеров: одни вмещают по 60 кг зерна, другие — по 80 кг. Сколько

надо взять тех и других мешков, чтобы все они были наполнены и всего в них было 400 кг зерна?

114*. Докажите, что уравнение имеет только одно решение:

а) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$;

б) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 25 = 0$.

115*. Найдите все решения уравнения $|x| + |y| = 0$.

116. Найдите все пары $(c; p)$ простых чисел, являющихся решениями уравнения: а) $c + p = 29$; б) $c + p = 42$.

117*. Докажите, что уравнение не имеет решений в целых числах:

а) $3x^2 - 4y^2 = 13$; в) $x^2 + y^2 = 0,25$;

б) $2x^2 - 5y^2 = 7$; г) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 12,91 = 0$.

118. Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-3; 2)$, касающейся оси Ox , т. е. имеющей с ней только одну общую точку.

119. Составьте уравнение прямой: а) отрезок которой, заключенный между осями координат, делится точкой $A(2; -1)$ пополам; б*) перпендикулярной прямой $2x - y = 5$.

120*. Дана окружность $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Составьте уравнение окружности, симметричной данной относительно оси ординат.

121*. Составьте уравнение линии, которой принадлежат все точки, такие, что разность квадратов расстояний от них до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1.

122. Дана окружность $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Составьте уравнение окружности, равной данной, центр которой находится в точке $(-1; 1)$.

123*. Составьте уравнение линии, образованной из множества точек, сумма квадратов от каждой из которых до точек $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ равна 12.

124. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + 2x + y^2 = 0$, является окружностью.

125. Составьте уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $A(1; -2)$.

126*. Даны две точки A и B , расстояние между которыми равно 4. Найдите множество точек M , для каждой из которых $MA^2 - MB^2 = 4$.

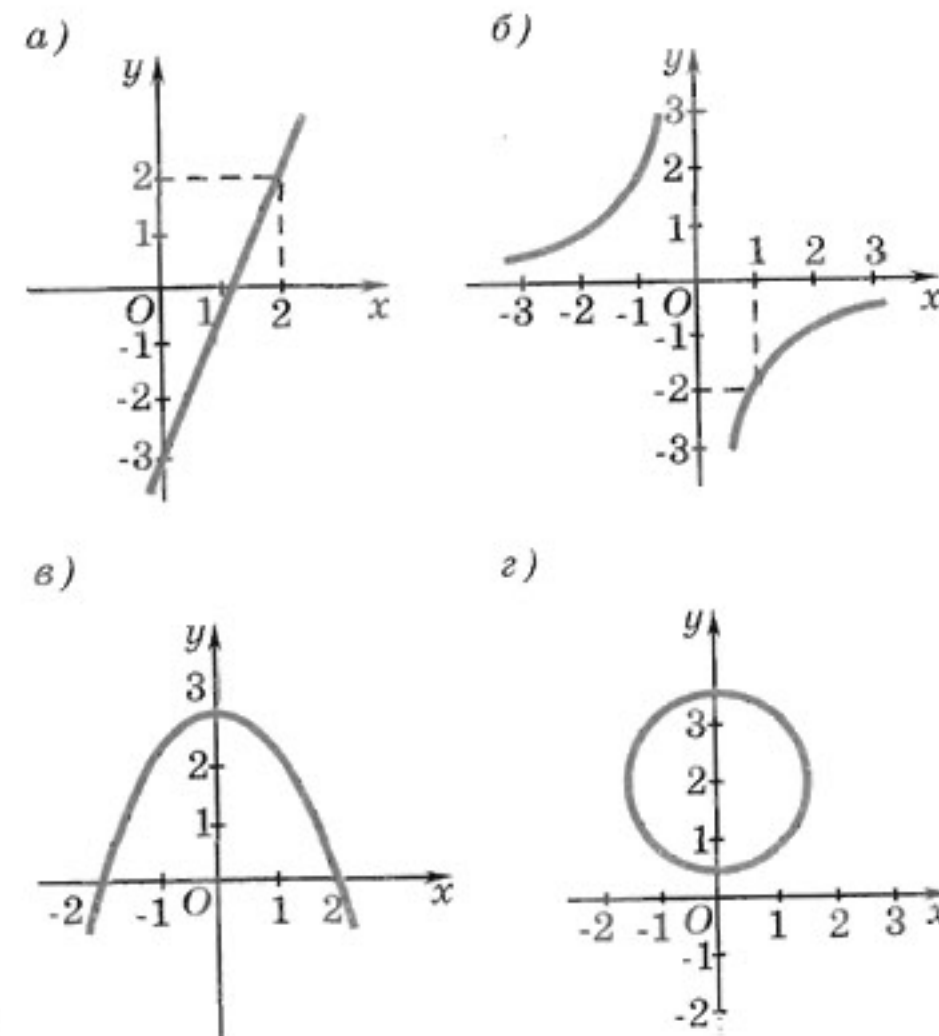


Рис. 44

127*. Найдите угловой коэффициент прямой, перпендикулярной заданной, и постройте ее:

а) $2x - 3y + 1 = 0$; б) $8x + 4y + 3 = 0$.

128. Напишите уравнение:

- а) прямой, изображенной на рисунке 44, а;
б) гиперболы, изображенной на рисунке 44, б;
в) параболы, изображенной на рисунке 44, в;
г) окружности, изображенной на рисунке 44, г.

129. Найдите три каких-либо решения уравнения с двумя переменными:

а) $5x + 2y = 36$; в) $-5x + 6y = 34$;
б) $3x - 4y = 14$; г) $10x - 3y = -8$.

130. Какие из указанных пар чисел являются решениями уравнения $x - y = 5$:

а) $x = 0, y = 5$; в) $x = 1, y = -4$;
б) $x = 0, y = -5$; г) $x = -1, y = 4$?

131*. Найдите все решения уравнения в натуральных числах:

а) $18x + 7y = 120$; в) $x^2 - y^2 = 15$;
б) $xy = 3x + 2y$; г) $4x = 3y + 2$.

132*. Докажите, что любую сумму денег, выражающуюся целым числом рублей больше 7, можно уплатить без сдачи, имея в достаточном количестве только трехрублевые и пятирублевые денежные знаки.

133*. Нужно разлить 20,5 л сока в банки по 0,7 л и 0,9 л таким образом, чтобы все они были наполнены. Сколько тех и других банок надо взять для этого? Какое наименьшее количество банок можно взять?

134*. Мальчик и девочка измеряли одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов разные, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика, если она выражается целым числом сантиметров.

135. Каких два натуральных числа надо взять, чтобы разность их квадратов была равна 133?

136*. Найдите два таких числа, чтобы их сумма, произведение и разность квадратов были равны.

137*. Возраст одного человека в 1887 г. был равен сумме цифр года его рождения. Сколько ему было лет?

§ 4. Системы двух уравнений с двумя переменными

1. Понятие о системе двух уравнений с двумя переменными и ее решение

Рассмотрим пример: найти два числа, сумма которых равна 1, а их разность равна 5.

Обозначим первое неизвестное число буквой x , а второе — буквой y . Тогда по условию задачи должно быть: с одной стороны — $x + y = 1$, с другой — $x - y = 5$. Таким образом, чтобы дать ответ на вопрос задачи, надо найти значения переменных x и y , обращающих в верное числовое равенство каждое из уравнений $x + y = 1$ и $x - y = 5$, т. е. найти общие решения этих уравнений.

В таких случаях говорят, что надо решить *систему уравнений*. Систему уравнений записывают с фигурной скобкой, охватывающей все уравнения.

Например, для решения рассматриваемой задачи можно составить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5 \end{cases}$. Нетрудно заметить,

что пара значений переменных $x = 3$, $y = -2$ является решением каждого уравнения этой системы, поскольку оба равенства $3 + (-2) = 1$ и $3 - (-2) = 5$ верные.

Пара значений переменных, обращающая в верное числовое равенство каждое уравнение с двумя переменными, которое входит в систему уравнений, называется *решением системы уравнений*.

Решить систему двух уравнений с двумя переменными — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Существуют системы уравнений разных видов и разные способы их решения. Например, системы вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где x , y — переменные, a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 — некоторые действительные числа, называются *системами двух линейных уравнений с двумя переменными (или с двумя неизвестными)*.

Системы уравнений с двумя переменными, которые имеют одни и те же решения, называются *равносильными*. Системы уравнений, не имеющие решений, также считаются *равносильными*.

2. Способы решения систем двух уравнений с двумя переменными

Способ подстановки. Сущность этого способа решения в следующем:

- 1) из какого-либо уравнения системы выражают одну переменную через другую;
- 2) во второе уравнение системы вместо этой переменной подставляют полученное выражение;

3) решают полученное после подстановки уравнение с одной переменной;

4) находят все соответствующие значения другой переменной;

5) составляют все решения системы уравнений и записывают ответ.

Пример 1. Решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 51, \\ 5x - y = 15. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Выразим из второго уравнения y через x : $y = 5x - 15$. Подставив в первое уравнение вместо y выражение $5x - 15$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 7(5x - 15) = 51, \\ 5x - y = 15. \end{cases} \quad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2) равносильные (имеют одни и те же решения).

Действительно, пусть некоторая пара чисел $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений (1). Тогда верны числовые равенства $4x_0 + 7y_0 = 51$ и $5x_0 - y_0 = 15$. Заменив в равенстве $4x_0 + 7y_0 = 51$ число y_0 выражением $5x_0 - 15$, вновь получили верное равенство

$$4x_0 + 7(5x_0 - 15) = 51.$$

Значит, каждое решение системы (1) является решением и системы (2). Таким же образом можно доказать, что и каждое решение системы (2) является решением системы (1).

В системе (2) первое уравнение имеет только одно неизвестное x . Решаем это уравнение:

$$\begin{aligned} 4x + 35x - 105 &= 51, \\ 39x &= 156, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Подставив в равенство $y = 5x - 15$ вместо x число 4, находим соответствующее значение y : $y = 5 \cdot 4 - 15$, $y = 5$. Пара чисел (4; 5) является решением системы (2), а следовательно, решением равносильной ей исходной системы уравнений (1).

Ответ: (4; 5).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{8}, \\ 4x + \frac{y}{4} = 11. \end{cases}$$

Решение. Выразим из первого уравнения x через y , используя основное свойство пропорции $x = \frac{5y}{8}$. Подставим во второе уравнение системы вместо x выражение $\frac{5y}{8}$:

$$4 \cdot \frac{5y}{8} + \frac{y}{4} = 11.$$

Решаем полученное уравнение:

$$\frac{10y}{4} + \frac{y}{4} = 11, \quad \frac{11y}{4} = 11, \quad y = 4.$$

Находим соответствующее значение x :

$$x = \frac{5y}{8}, \quad x = \frac{5 \cdot 4}{8} = 2,5.$$

Ответ: (2,5; 4).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = 100. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы имеем: $y = 2 - x$. Тогда после подстановки вместо y выражения $2 - x$ второе уравнение системы будет таким: $x^2 - (2 - x)^2 = 100$. Решаем это уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 + 4x - x^2 &= 100, \\ 4x &= 104, \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Находим соответствующее значение y :

$$\begin{aligned} y &= 2 - x, \\ y &= 2 - 26 = -24. \end{aligned}$$

Ответ: (26; -24).

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы имеем: $y = -2x$. Подставив во второе уравнение вместо y выражение $-2x$, получим $-2x^2 = 2$, $x^2 = -1$. Последнее уравнение не имеет корней, так как квадрат любого числа неотрицателен. Поэтому данная система уравнений решений не имеет.

Ответ: система уравнений не имеет решений.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выразим из второго уравнения y через x : $y = 3x - 1$. Подставив это выражение y в первое уравнение, получим уравнение с одной переменной x :

$$x^2 + (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) - 9 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в левой части этого уравнения имеем равносильное ему уравнение $x^2 - 1 = 0$, корни которого — числа $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Тогда соответствующие значения переменной y равны:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - 1 = 3(-1) - 1 = -4; \\ y_2 &= 3x_2 - 1 = 3(1) - 1 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; -4)$, $(1; 2)$.

Пример 6*. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y = c, \\ x + by = d, \end{cases}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ и $ab \neq 1$.

Решение. Из первого уравнения имеем: $y = c - ax$. Замена во втором уравнении переменной y на $c - ax$ приводит к уравнению с одной переменной $x + b(c - ax) = d$, откуда

$$x = \frac{d - bc}{1 - ab}.$$

Зная x , из равенства $y = c - ax$ находим соответствующее значение y :

$$y = c - \frac{a(d - bc)}{1 - ab} = \frac{c - cab - ad + abc}{1 - ab} = \frac{c - ad}{1 - ab}.$$

Ответ: $\left(\frac{d - bc}{1 - ab}; \frac{c - ad}{1 - ab}\right)$.

Способ алгебраического сложения. При решении систем уравнений способом алгебраического сложения преобразуют исходную систему в систему равносильную, в которой одно из уравнений имеет только одну переменную. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решение. Сложив левые и правые части уравнений системы, получим уравнение с одним неизвестным: $2x = 6$. Заменим второе уравнение исходной системы уравнений уравне-

нием $2x = 6$, получим равносильную ей систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x = 6. \end{cases}$ Ре-

шаем эту систему уравнений. Из уравнения $2x = 6$ находим x : $x = 3$. Подставив значение x в первое уравнение, имеем: $3 + y = 1$, откуда $y = 1 - 3$, $y = -2$. Пара значений переменных $(3; -2)$ является решением данной системы уравнений.

Ответ: $(3; -2)$.

При решении данной системы мы использовали то обстоятельство, что коэффициенты при переменной y являются противоположными числами, поэтому при почленном сложении левых и правых частей этих уравнений (иногда говорят: при сложении уравнений) получили уравнение с одной переменной.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 11y = 1, \\ 10x - y = 5. \end{cases}$$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на -2 , получим систему $\begin{cases} -10x - 22y = -2, \\ 10x - y = 5. \end{cases}$ Сложив левые и правые части уравнений этой системы, имеем: $-23y = 3$, откуда $y = -\frac{3}{23}$. Из второго уравнения системы получаем $x = \frac{5+y}{10}$.

$$\text{Тогда } x = \frac{5 - \frac{3}{23}}{10} = \frac{5 \cdot 23 - 3}{23 \cdot 10} = \frac{112}{230} = \frac{56}{115}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{56}{115}; -\frac{3}{23} \right).$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 7y = -12, \\ 6x + 3y = -18. \end{cases}$$

Решение. Умножив первое уравнение системы на 3 , а второе — на -2 , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 12x - 21y = -36, \\ -12x - 6y = 36. \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы, имеем: $-27y = 0$, $y = 0$. Из второго уравнения первоначальной системы имеем: $x = \frac{-18 - 3y}{6}$; $x = \frac{-18 - 3 \cdot 0}{6} = -3$.

$$\text{Ответ: } (-3; 0).$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -x + 2y = 5, \\ 0,5x - y = -2,5. \end{cases}$$

Решение. Умножив второе уравнение системы на 2 и сложив с первым, получим $0x + 0y = 0$. Это равенство верно при любых значениях переменных x и y . Поэтому данная система уравнений имеет бесконечно много решений, которые являются решениями любого из них. Например, если из первого уравнения выразить y через x , то получим $y = \frac{5+x}{2}$. Тогда множество решений исходной системы уравнений состоит из всех пар $(x; 0,5x + 2,5)$, где x — любое действительное число.

$$\text{Ответ: } (x; 0,5x + 2,5), x \in R.$$

Таким образом, сущность решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными заключается в следующем:

1) умножают почленно уравнения системы на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных являлись противоположными числами;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений преобразованной системы;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующие значения другой переменной;

5) составляют все решения системы уравнений и записывают ответ.

Заметим, что выше мы рассмотрели примеры решения способом алгебраического сложения систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Отметим, что система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

имеет: а) одно решение, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$; б) не имеет решений или имеет бесконечно много решений, если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

(не имеет решений, если $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$; имеет бесконечно много решений, если $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$; при условии, что $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$).

(См. задание 232*.)

Пример 5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 11x^{-1} + 8y^{-1} = 1, \\ 9x^{-1} + 12y^{-1} = 1. \end{cases}$$

Решение. Умножив первое уравнение системы на 3 , а второе на -2 , получим: $\begin{cases} 33x^{-1} + 24y^{-1} = 3, \\ -18x^{-1} - 24y^{-1} = -2. \end{cases}$ Сложив левые

и правые части уравнений этой системы, имеем: $15x^{-1} = 1$, откуда $x = 15$. Подставив в первое уравнение вместо x число 15 , получим $\frac{11}{15} + 8y^{-1} = 1$, откуда $8y^{-1} = \frac{4}{15}$, $y^{-1} = \frac{4}{8 \cdot 15}$,

$$y = \frac{8 \cdot 15}{4} = 30.$$

$$\text{Ответ: } (15; 30).$$

Пример 6*. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 9, \\ x^2 + 2y^2 + x - 5y = 1. \end{cases}$$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на -2 и сложив полученное уравнение со вторым уравнением системы, имеем:

$$\begin{aligned} -2x^2 - 2y^2 + 4x - 6y + 18 + 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 &= 0, \\ 5x - 11y + 17 &= 0. \end{aligned}$$

Заменим исходную систему равносильной:

$$\begin{cases} 5x - 11y + 17 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему способом подстановки: $x = \frac{11y - 17}{5}$,

тогда $\left(\frac{11y - 17}{5}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{11y - 17}{5}\right) + 3y - 9 = 0$,

$$121y^2 - 374y + 289 + 25y^2 - 110y + 170 + 75y - 225 = 0,$$

$$146y^2 - 409y + 234 = 0, \text{ откуда } y_1 = 2, y_2 = \frac{117}{146}.$$

Тогда $x_1 = \frac{11 \cdot 2 - 17}{5} = 1$; $x_2 = \frac{11 \cdot \frac{117}{146} - 17}{5} = -\frac{239}{146}$.

Ответ: $(1; 2), \left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$.

- ?** 1. Что такое система уравнений?
 2. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными? Что значит решить систему уравнений?
 3. Какие способы решения систем двух уравнений с двумя переменными вы знаете? В чем их сущность?
 4. Какие системы уравнений с двумя переменными называются равносильными? Приведите пример.

Задания

Устные упражнения 138—139.

138. Проверьте, является ли пара значений переменных $x = 4, y = -2$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 20, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 20, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

139. Составьте какую-нибудь систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара значений переменных:

а) $x = 0,5, y = 1$; б) $x = 13, y = 0$.

140. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 13, \\ 4x - 2y = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 24, \\ 0,7x - 0,25y = 1; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 3x + 4y = 253, \\ y - 5x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x + 8y = 1. \end{cases}$

141. Покажите графически и способом подстановки, что система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$

142. Покажите графически и способом подстановки, что система имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} x = 5 - y, \\ y = 5 - x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ y = \frac{13 - 2x}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 3y + 1, \\ 2y = \frac{2x - 2}{3}. \end{cases}$

143. Покажите графически и способом подстановки, что система не имеет решения:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x = 3 - 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x = 1, \\ 3x - 3y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ y = \frac{x - 4}{3}. \end{cases}$

144*. Составьте такое уравнение, чтобы оно вместе с уравнением $-x - y = 4$ образовало систему: а) имеющую единственное решение; б) имеющую бесконечное множество решений; в) не имеющую решений.

145. Решите систему уравнений, используя способ подстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} 2xy - y = 7, \\ x - 5y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x - 2y = -5. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 2y = 18, \\ 3x = 2y; \end{cases}$$

146. Решите способом алгебраического сложения систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 21y = 13; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 64x + 51y = 90, \\ 25x + 34y = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 13x - 2y = 56, \\ 7x + 4y = 20; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} 18x - 21y = 2, \\ 24x - 15y = 7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x + 11y = 7, \\ 6x - 7y = -44; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 0,8x - 0,3y = 1, \\ 0,5x - 0,7y = 2. \end{cases}$$

147. Решите систему, используя способ сложения уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172. \end{cases}$$

148. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{15x+7y}{16} - \frac{3x+y}{4} = -1, \\ 3x - \frac{10-y}{6} = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2(3x - 2y) + 1 = 7x, \\ 12(x + y) - 15 = 7x + 12y. \end{cases}$$

149. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x + 4y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 3y = 26, \\ 2x - 5y = 10; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y = -6, \\ y = 4x; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 4x - 6y = 10, \\ 6x - 9y = 15; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5x + 3y = 26, \\ x + 0y = 1; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 3x + 6y = 2, \\ 2x + 4y = 5. \end{cases}$$

150. Решите систему уравнений наиболее удобным, на ваш взгляд, способом:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 13 = y, \\ 3x + 4y = 43; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} y - 2 = -2x, \\ 2x + y = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 10x - 13y = 15, \\ 15x - 4y = 100; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 5x + 8y = 5, \\ 8x + 5y = 8; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x}{3} + 5y = 28, \\ 3x - 5y = -1; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x + y = 10^{20}, \\ x - 2y = 10^{19}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x + y = 8, \\ y - 8 = -2x; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} x - 2y = 2, \\ xy = 12. \end{cases}$$

151. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{1}{y} + x = 5, \\ 2x - \frac{1}{y} = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$\text{д*) } \begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

152. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, которая: а) имеет бесконечно много решений; б) не имеет решений.

153*. Найдется ли система двух линейных уравнений с двумя переменными, которая имеет ровно три решения?

154. Равносильны ли системы уравнений:

$$а) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ -6x + 3y = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -5x + 2y = 7, \\ 15x - 6y = -21; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{7}, \\ x + 2y = -14 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 7x + 7y = 3x - 3y, \\ x + 2y = -14? \end{cases}$$

155. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки: а) $A(4; 1)$ и $B(-1; -4)$; б) $C(3,5; 5,5)$ и $D(0; -7)$.

156. Напишите уравнение прямой, график которой проходит через точки $A(-2; 11)$ и $B(13; 3)$.

157. Задайте формулой линейное уравнение с двумя переменными, графику которого принадлежат точки $M(0; 5)$ и $N(-11; 0)$.

158*. Сколько решений может иметь система двух уравнений с двумя переменными, одно из которых линейное, а графиком второго является гипербола $y = \frac{4}{x}$?

159*. Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0, \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 - y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 3; \end{cases} \quad г) \begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

160*. Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 5; \end{cases} \quad б) \begin{cases} y + x^2 = 0, \\ x^2 + 6x + 9y + 45 = 0. \end{cases}$$

161*. При каких значениях a система уравнений имеет только одно решение:

$$а) \begin{cases} 3x + 7y = 20, \\ ax + 14y = 15; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3x + 2ay = 1, \\ 3(a - 1)x + ay = 1? \end{cases}$$

162. Найдите все значения b , при которых графики уравнений $bx - 8y = 12$ и $2x - 6y = 15$: а) пересекаются в одной точке; б) не имеют общих точек.

163*. При каких значениях c окружности $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - c)^2 + y^2 = 4$ касаются?

164*. Найдите все значения a , при которых прямая $3x + 4y = 12$ касается окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

165*. Сколько решений в зависимости от p имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ y = |x - p|? \end{cases}$$

166. Является ли пара значений переменных $x = 3, y = -1$ решением системы уравнений:

$$а) \begin{cases} 3 - x + y = 9, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases} \quad б) \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 5x + y^2 = 10? \end{cases}$$

167. а) Является ли решение системы уравнений $\begin{cases} 7x - 3y = 0, \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ решением уравнения $3x + 5y = 44$?

б) Найдется ли решение уравнения $7x - 2y = 96$, являющееся решением системы уравнений $\begin{cases} 4x + 5y = 18, \\ -5x + 4y = 80? \end{cases}$

168. Составьте какую-либо систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел:

$$а) (2; 0,2); \quad в) (100; -3,5); \quad д) (13; -6); \\ б) (1; 4); \quad г) (90,3; -77\frac{1}{7}); \quad е) (-13; 14).$$

169. Существуют ли целые числа m и n , такие, что:

$$а) m - n = 54 \text{ и } mn = 4747; \\ б) m + n = 100 \text{ и } m^2 - n^2 = 9800?$$

170. Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 74; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{cases} x^2 - 2xy = y^2 + 1, \\ x + y = 2; \end{cases} & \text{е*)} \begin{cases} m^2 + n^2 = 8, \\ m^{-2} + n^{-2} = 2^{-1}; \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1\frac{1}{15}, \\ x - y = 2; \end{cases} & \text{ж*)} \begin{cases} u^2 + uv = 12, \\ uv - v^2 = 2; \end{cases} \\ \text{д*)} \begin{cases} \frac{x}{12} = \frac{3}{y}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases} & \text{з*)} \begin{cases} |x| + |y| = 4; \\ x - y = 2. \end{cases} \end{array}$$

171*. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x^2 + y = 31, \\ y^2 - x = 31; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ xy = 10; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ xy = 324. \end{cases} \end{array}$$

172. Найдите числа m и n , если известно, что они являются корнями уравнения $x^2 + mx + n = 0$.

173*. Найдите коэффициенты a , b и c квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, если:

$$\begin{array}{l} \text{а)} f(1) = 6; f(2) = 12 \text{ и } f(3) = 20; \\ \text{б)} f(0) = 5; f(5) = 0 \text{ и } f(-4) = 4. \end{array}$$

174*. Решите систему уравнений относительно переменных x и y (остальные переменные считаются параметрами, в зависимости от которых исследуются и находятся решения; слово «параметр» происходит от греческого «параметрео» — отмечая):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{p} = 1, \\ \frac{c}{x} + \frac{p}{y} = 4, \quad c \neq 0, p \neq 0; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = m, \\ \sqrt{xy} = n, \quad m > 0, n > 0. \end{cases} \end{array}$$

3. Решение текстовых задач с применением систем уравнений

Решение текстовой задачи с применением систем двух уравнений с двумя переменными осуществляется примерно так:

1) изучается условие задачи;

2) соотношения между неизвестными и известными данными выражают уравнениями с двумя переменными;

3) из этих уравнений составляют систему уравнений;

4) решают систему уравнений;

5) выполняют проверку, т. е. выясняют соответствие найденных правильных решений системы уравнений условию задачи, и записывают ответ.

Решение задачи с применением системы уравнений часто упрощает процесс записи задачи на языке математики. Далее вы сможете решать многие текстовые задачи с использованием уравнений с одной переменной, как это делали до сих пор, или систем уравнений.

Рассмотрим задачи.

Задача 1. За 15 тетрадей и 6 карандашей заплатили 48 р. За 12 тетрадей и 5 карандашей по тем же ценам заплатили 39 р. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

Решение. Обозначим цену одной тетради x р., а цену одного карандаша — y р. Тогда по условию задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 15x + 6y = 48, \\ 12x + 5y = 39. \end{cases}$$

Решаем ее. Умножив второе уравнение системы на -1 и сложив с первым уравнением, получим $3x + y = 9$, откуда $y = 9 - 3x$. Подставив выражение $9 - 3x$ вместо y во второе уравнение данной системы уравнений, получим уравнение $12x + 5(9 - 3x) = 39$. Решаем это уравнение:

$$12x + 45 - 15x = 39, \quad -3x = -6, \quad x = 2. \quad \text{Тогда } y = 9 - 3x = 9 - 3 \cdot 2 = 3.$$

Найденные решения системы уравнений верные и удовлетворяют условию.

Ответ: тетрадь стоит 2 р., карандаш — 3 р.

Составьте и решите самостоятельно аналогичную задачу (с нынешними ценами на указанные принадлежности).

Задача 2. Найти периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см, а площадь 24 см².

Решение. Обозначим длину одного катета этого прямоугольного треугольника a см, а другого — b см. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10^2, \\ \frac{1}{2}ab = 24. \end{cases}$$

Умножив обе части второго уравнения системы на 4 и сложив с первым, получим

$$(a+b)^2 = 196, \text{ откуда } a+b = 14 \text{ или } a+b = -14.$$

Условию примера удовлетворяет первое значение $a+b = 14$. Тогда периметр треугольника равен $14 + 10 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Задача 3. Существуют ли два натуральных числа, сумма которых равна 2000^4 , а разность 1999^4 ?

Решение. Допустим, что такие натуральные числа есть. Обозначим большее из них x , а меньшее y . Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} x+y = 2000^4, \\ x-y = 1999^4. \end{cases} \text{ откуда } 2x = 2000^4 + 1999^4.$$

При любых $x \in \mathbb{N}$ в левой части полученного уравнения — четное число, а в правой — нечетное (как сумма четного и нечетного чисел). Поэтому это уравнение не имеет корней, являющихся натуральными числами.

Ответ: таких натуральных чисел нет.

Задача 4*. В трех ведрах — вода. Когда половину воды из первого ведра перелили во второе, а затем одну треть воды, которая стала во втором ведре, перелили в третье ведро и, наконец, одну четвертую часть воды из третьего ведра перелили в первое, то в каждом ведре оказалось по 6 л воды. Сколько литров воды было в каждом ведре первоначально?

Решение. Пусть в первом ведре было x л воды, в другом — y л, тогда в третьем ведре было $(18 - x - y)$ л воды. После того как из первого ведра перелили во второе половину воды, в первом осталось $0,5x$ л воды, а во втором стало $(y + 0,5x)$ л. После того как из второго ведра перелили треть воды в третье ведро, во втором ведре осталось $\frac{2}{3}(y + 0,5x)$ л, а в третьем стало $(18 - x - y + \frac{1}{3}(y + 0,5x))$ л. После того как из третьего ведра перелили четверть воды в первое, в третьем

ведре осталось $\frac{2}{4}(18 - x - y + \frac{1}{3}(y + 0,5x))$ л. Так как в каждом ведре стало по 6 л воды, то составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(y + 0,5x) = 6, \\ \frac{2}{4}(18 - x - y + \frac{1}{3}(y + 0,5x)) = 6. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений. Из первого уравнения системы имеем: $y + 0,5x = 9$. Подставив 9 вместо $y + 0,5x$ во второе уравнение, получим $\frac{3}{4}(18 - x - y + 3) = 6$, откуда $21 - x - y = 8$, $13 - x - y = 0$. Подставив выражение $9 - 0,5x$ вместо y в последнее уравнение, имеем: $13 - x - (9 - 0,5x) = 0$, откуда $4 - 0,5x = 0$, $x = 8$. Тогда $y = 9 - 0,5x = 9 - 0,5 \cdot 8 = 5$; $18 - x - y = 5$.

Ответ: в первом ведре было 8 л воды, а во втором и третьем — по 5 л.

Задача 5. В трех поселках 6000 жителей. Во втором поселке жителей вдвое больше, чем в первом, а в третьем — на 400 жителей меньше, чем во втором. Сколько жителей во втором поселке?

Решение. Обозначим через x , y и z — количество жителей в первом, втором и третьем поселках соответственно. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z = 6000, \\ y = 2x, \\ y = z+400; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z = 6000, \\ x = \frac{y}{2}, \\ z = y-400; \end{cases}$$

$$\frac{y}{2} + y + y + 400 = 6000,$$

$$5y = 12\,800, y = 2560.$$

Ответ: 2560.

Задача 6*. По окружности, длина которой 24 м, движутся две точки в одну и ту же сторону. Найти скорость этих точек, если известно, что первая из них обходит окружность на 10 мин быстрее второй и обгоняет вторую каждые 4 мин.

Решение. Пусть скорость первой точки x м/мин, а скорость второй — y м/мин. Тогда первая точка проходит окружность за $\frac{24}{x}$ мин, а вторая — за $\frac{24}{y}$ мин. Так как первая точка проходит окружность на 10 мин быстрее второй, то $\frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 10$. С другой стороны, известно, что первая точка за 4 мин проходит на 24 м больше второй, поэтому $4x = 4y + 24$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 10, \\ 4x = 4y + 24. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $y = x + 6$. Тогда $\frac{24}{x-6} = \frac{24}{x} + 10$.

Решаем это уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{10x(x-6) + 24(x-6) - 24x}{x(x-6)} &= 0, \\ 10x^2 - 60x - 24 \cdot 6 &= 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq 6, \\ 5x^2 - 30x - 72 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 5 \cdot 72}}{5}, \\ x_1 &= \frac{15 + \sqrt{225 + 360}}{5} = \frac{15 + \sqrt{585}}{5} \approx \frac{15 + 24}{5} = 7,8, \\ x = \frac{15 - \sqrt{585}}{5} < 0 &\text{ — не удовлетворяет условию задачи.} \\ y &= x - 6, \quad y \approx 7,8 - 6 = 1,8. \end{aligned}$$

Ответ: скорость первой точки приблизительно равна 7,8 м/мин, скорость второй точки приблизительно равна 1,8 м/мин.

- ? 1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?
2. Как можно решить систему двух уравнений с двумя переменными, в которых одно из уравнений первой степени, а другое — второй степени?

3. Известно, что система уравнений $\begin{cases} y = P(x), \\ y = Q(x) \end{cases}$ имеет два решения.

Сколько точек пересечения имеют графики уравнений?

4. Охарактеризуйте способ решения текстовых задач с использованием систем уравнений. Приведите пример.

Задания

175. У двух хозяев Ивана Степановича и Степана Ивановича были индюки. «Дай мне одного индюка, — говорит Иван Степанович, — и их у меня станет ровно в два раза больше, чем у тебя». «Нет, — говорит Степан Иванович, — лучше ты мне дай одного индюка, и их тогда станет у нас поровну». Сколько индюков было у каждого?

176. Найдите два числа, сумма которых равна 13, а разность 5.

177. Колхоз отвел под пшеницу и овес 700 га пашни, причем площадь под овес была на 60 га больше площади под пшеницу. Сколько гектаров пашни было отведено под каждую культуру?

178. Из двух сортов муки по цене 31 р. и 46 р. за килограмм получили 100 кг смеси по цене 40 р. за килограмм. Сколько муки каждого сорта входит в смесь?

179. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, если известно, что их сумма равна 5 м, а его площадь — 3 м².

180. Найдите два числа, одно из которых вдвое больше другого, а сумма этих чисел равна 18.

181. Найдите скорость самолета и скорость поезда, если известно, что скорость самолета в 7 раз больше скорости поезда и что за один час поезд проходит на 600 км меньше, чем пролетает самолет.

182. Найдите длины неизвестных сторон треугольника ABC, если его периметр равен 42 дм, AC = 16 дм, а AB : BC = 7 : 6.

183. Составьте задачу по данным на рисунке 45, которая решается с применением системы уравнений

$$\begin{cases} x + 1100 = 3y, \\ x + 3y = 1900. \end{cases}$$

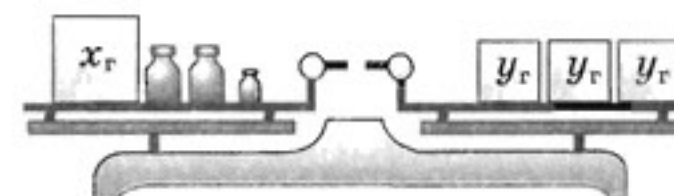


Рис. 45

184. Составьте и решите задачу, по условию которой можно составить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 88; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

185. Хозяйка купила 5 кг картофеля и 2 кг моркови. За всю покупку она заплатила b р. Сколько стоит килограмм картофеля и килограмм моркови, если за картофель хозяйка заплатила на c р. больше, чем за морковь?

186. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу одновременно из двух пунктов A и B , расстояние между которыми 28 км. Через час они встретились и без остановок продолжили путь с теми же скоростями. Найдите скорости велосипедистов, если известно, что один из них приехал в пункт B на 35 мин раньше, чем другой в A .

187*. В трех ведрах — вода. Если $\frac{1}{2}$ воды из первого ведра перелить в другое, затем $\frac{1}{4}$ воды, сказавшейся во втором, перелить в третье и, наконец, $\frac{1}{10}$ воды из третьего ведра перелить в первое, то в каждом ведре будет по 9 л. Сколько литров воды было в каждом ведре?

188. С применением какой из записанных систем уравнений можно решить задачу: «Найдите два числа, если известно, что их разность равна 2, а отношение $\frac{9}{8}$ »:

$$\text{а) } \begin{cases} x = y + 2, \\ \frac{x}{y} = \frac{9}{8}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -y = x + 2, \\ x : y = 9 : 8? \end{cases}$$

189. Две бригады рабочих по плану должны были совместно изготовить за месяц 600 деталей. Первая бригада перевыполнила свое месячное задание на 20 %, а вторая — на 15 %, и поэтому ими изготовлено 118 деталей сверх плана. Сколько деталей должна была изготовить по плану каждая бригада за месяц?

190. Масса смеси двух веществ равна 18 кг. После того как из нее выделили 40 % первого вещества и 25 % второго, в ней первого вещества стало столько же, сколько и второго веще-

ства. Сколько килограммов каждого вещества было в смеси вначале?

191. Из двух емкостей начали одновременно отпускать бензин: из первой каждый день по 16,5 т, из второй — по 11,4 т. Когда вторая емкость стала пустой, в первой еще было 25 т. Если бы из первой емкости отпускали ежедневно по 10 т бензина, а из второй — по 6 т, то емкости стали бы пустыми одновременно. Сколько бензина было в каждой емкости первоначально?

192. Произведение двух чисел равно 135, а их разность равна 6. Что это за числа?

193. За две куртки и брюки заплатили 160 р. После снижения цен на куртки на 20 %, а на брюки на 25 % такая же покупка обошлась в 125 р. Сколько стоили куртка и брюки до снижения цен?

194. Два лыжника вышли одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 38 км, навстречу друг другу. С какой скоростью шел каждый лыжник, если известно, что встретились они через 4 ч и один из них прошел до встречи на 2 км больше второго?

195. Разность двух чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел относится к их разности как 5 : 1. Найдите эти числа.

196. Периметр прямоугольника равен 40 дм и разделен биссектрисой одного из его углов на две части, разность периметров которых равна 20 дм. Найдите длины сторон этого прямоугольника.

197. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 20 см, а ее высота 15 см. Найдите длины диагоналей трапеции, если ее основания относятся как 3 : 7.

198*. Дан треугольник со сторонами 3, 4 и 5 дм. Найдите длину отрезка, параллельного большей стороне этого треугольника и делящего его площадь пополам.

199*. Один хозяин решил развести гусей и норок с таким расчетом, чтобы всего голов было 1000, а ног 2000. Выясните, будут ли при таком расчете у хозяина и гуси, и норки.

200. Две бочки содержат разное количество воды. Если из первой бочки отлить 18 л, а из второй — 12 л, то во второй останется воды вдвое больше, чем в первой. Если же из первой отлить 8 л, а из второй — 16 л, то количество литров воды,

оставшейся в первой бочке, будет составлять $\frac{7}{8}$ от количества литров воды, оставшейся во второй бочке. Сколько литров воды было в каждой бочке?

201. В магазин завезли картофель и капусту. В первый день продали половину картофеля и одну треть капусты общей массой 15 т. Во второй день продали половину остального картофеля и половину остальной капусты общей массой 10 т. Сколько тонн картофеля и сколько тонн капусты завезли в магазин?

202. Хозяйка от двух коров надоила за год 6700 л молока. В следующем году надой от первой коровы увеличился на 15 %, а от второй на 20 %, и поэтому хозяйка надоила за год от обеих коров 7870 л молока. Сколько литров молока надоила хозяйка во втором году от каждой коровы?

203*. Бригада рабочих начала рыть котлован. Через 3 дня к ней присоединилась вторая бригада, и им потребовалось еще 8 дней совместной работы, чтобы вырыть котлован. Если бы первые три дня работала только вторая бригада, то для завершения работы обеим бригадам понадобилось бы еще 9 дней. За сколько дней может вырыть котлован каждая бригада в отдельности?

204*. За n пар лыж и m пар коньков уплатили k тысяч рублей. Сколько стоит пара лыж и сколько стоит пара коньков, если известно, что p пар коньков на t тысяч дороже, чем g пар лыж?

205*. Первая бригада выполнила часть задания за s дней, а затем вторая бригада завершила это задание за p дней. За сколько дней может выполнить это задание каждая бригада в отдельности, если первой понадобится на это на k дней меньше, чем второй?

206*. Известно, что длина окружности переднего колеса телеги на a м меньше длины ее заднего колеса. Переднее колесо на расстоянии b м сделало столько же полных поворотов, сколько заднее на расстоянии c м. Найдите длину окружности каждого колеса.

207*. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему ставят 3 балла, а за каждую неверно решенную задачу — минус 5 баллов. Если же ученик не решил задачу, то ему ставят 0 баллов. В результате ученик получил 13 баллов. Сколько задач решил ученик?

208*. Какое число нужно прибавить к числам 100 и 164, чтобы полученные суммы были квадратами целых чисел?



Повторение главы II

Исторические сведения

Диофант Александрийский — древнегреческий математик, который создал «Арифметику» в 13 книгах. Он разработал достаточно общие приемы решения в натуральных числах уравнений с несколькими неизвестными, получивших название — **диофантовы уравнения**.

Диофант обозначал неизвестные буквой σ , а понятие «равняется» — буквой ζ (от греческого слова «изосис» — «равенство»).

Римляне перевели это понятие на свой язык словом *equatio* — «равенство», и отсюда возникли во всех европейских языках термины для обозначения уравнения: *die Gleichung* (нем.), *the equation* (англ.).

Наше обозначение неизвестного буквой x произошло, по-видимому, от итальянского названия неизвестного *cosa* — «вещь» (поэтому алгебра называлась *коссическим искусством*), позаимствованного от арабов, где слово «вещь» начинается с буквы, соответствующей букве x . Декарт окончательно установил употребление для обозначения неизвестных последних букв латинского алфавита, вначале чаще используя для этого букву z .

Способы решения систем уравнений первой степени появляются сначала в Индии, Китае, у арабских народов; позже — в Европе (Леонардо Пизанский — XIII в., Пачиоли — XV в., Штифель — XVI в.). Прежде появился способ сложения и вычитания, а затем и другие: подстановки, сравнения. У Ньютона в его лекциях, изданных в 1707 г., применяются уже все эти способы.

Контрольные вопросы

1. Объясните на примерах понятие уравнения с двумя переменными.
2. Что называется решением уравнения с двумя переменными?
3. Что представляет собой график уравнения с двумя переменными?
4. Какое уравнение называется линейным уравнением с двумя переменными и что является его графиком?



**Диофант
Александрийский**
(ок. III в.)

5. Каким уравнением с двумя переменными можно задать окружность?

6. Объясните на примерах понятие системы двух уравнений с двумя переменными.

7. Что называется решением системы двух уравнений с двумя переменными и что значит решить систему двух уравнений с двумя переменными?

8. Какие системы двух уравнений с двумя переменными называются равносильными? Приведите примеры.

9. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

10. Объясните на примерах решение систем уравнений способом подстановки.

11. Объясните на примерах решение систем уравнений способом алгебраического сложения.

12. Покажите на примерах, как можно использовать графики функций или графики уравнений при решении систем уравнений.

13. Объясните на примерах, как решать текстовую задачу с использованием системы уравнений.

Задания

209. Найдите какие-нибудь три решения линейного уравнения с двумя переменными: а) $3x - y = 10$; б) $6x + 2y = 7$.

210. Среди решений уравнения $4x - 5y = 10$ найдите такую пару $(x; y)$ чисел, чтобы значение x было:

а) на 20 % больше;

б) на 20 % меньше соответствующего значения y .

211. Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными:

а) одним из решений которого является пара чисел $(3; 4)$;

б) единственным решением которого является пара чисел $(4; 5)$.

212. Постройте график уравнения:

а) $x - 2y = 18$;

в) $x^2 + y^2 = 2$;

б) $x + y - 2(x - y) = 4$;

г) $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

213. Найдите все решения уравнения:

а) $|x| + \sqrt{y^2} = 0$;

в) $(2x - 3)^2 = -(3y + 2)^2$;

б) $(x + 4)^2 + y^2 = 0$;

г) $(x + 1,5)^2 + (y - 4,2)^2 = 0$.

214. Найдите какие-нибудь три решения уравнения:

а) $3x - 4y = 1$;

в) $14,3x - 0,9y = 15$;

б) $5x + 7y = 22$;

г) $24,6 + y = -\frac{17}{21}x$.

215. (Старинная русская задача.) За 500 р. куплено несколько пудов сахара. Если бы на те же деньги было куплено на 5 пудов больше, то каждый пуд сахара был бы на 5 р. дешевле. Сколько куплено пудов сахара?

216. Ученик купил несколько тетрадей по 2 р. и несколько карандашей по 3 р., уплатив за всю покупку 19 р. Сколько тетрадей и сколько карандашей купил ученик?

217. Для спортивного клуба решили приобрести несколько одинаковых комплектов шахмат и шашек на общую сумму 670 р. Сколько комплектов шахмат можно будет купить, если стоимость одного комплекта шахмат 50 р., а шашек — 30 р.?

218*. Хозяйка решила купить несколько одинаковых глубоких и мелких тарелок на общую сумму 700 р. Глубокая тарелка стоит 80 р., а мелкая — 60 р. Сколько глубоких тарелок могла купить хозяйка?

219*. Решите устно систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ \frac{y}{x} = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = -8; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^{-1}y^{-1} = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$$

220. При каких m и n решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + my = 5, \\ nx + y = 10 \end{cases}$$

является пара чисел $x = 4, y = 4$?

221. При каких a и b решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - ay = 6, \\ bx - y = 8 \end{cases}$$

является пара чисел $(4; 7)$?

222. Составьте какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел $(2; -4)$.

223. Составьте какую-нибудь систему двух уравнений с двумя переменными, не имеющую решений.

224. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} y = 24 + x, \\ 2x - y = 18; \end{cases} & \quad \text{в*) } \begin{cases} 0,6x = 0,75y + 2, \\ 0,5 + 0,2y = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 4x + 5y = 5, \\ 5x + 4y = 4; \end{cases} & \quad \text{г*) } \begin{cases} x - \frac{1}{4}(y + 4) = 6, \\ 2 - 0,3(3x + 1) = 21. \end{cases} \end{aligned}$$

225. Предприниматель купил две вещи на общую сумму 3 600 000 р., продал их и получил 25 % прибыли. За сколько была продана каждая вещь, если на одну вещь была наценка 50 %, а на другую — 12,5 %?

226. Произведение двух чисел равно 135, а их разность равна 6. Найдите эти числа.

227. Разность двух чисел относится к их произведению как $10 : 24$, а сумма этих чисел относится к их разности как $5 : 10$. Найдите эти числа.

228*. Сумма двух взаимно обратных чисел равна $2,1(6)$, а их разность равна $0,8(3)$. Найдите эти числа.

229*. Поле разделено на три участка. В первый день запахали половину первого участка и $\frac{3}{4}$ второго. Третий участок, составляющий четверть всего поля, вспахали полностью. Вспаханная за день площадь поля вдвое больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

230*. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4x - 3y + 31, \\ x + 2y - 7 = 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x^2 - y^2 - 5x + y - 24 = 0, \\ 3x - y + 9 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

231*. Решите систему уравнений и дайте графическую иллюстрацию решения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x - 2y = 6, \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52; \end{cases} & \quad \text{э) } \begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 + 5x - 7y = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x - y = -3, \\ (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 8; \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} xy = 16, \\ x^2 - y = 8 - 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

232*. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

имеет:

а) одно решение, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$;

б) не имеет решений или имеет бесконечно много решений,

если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (не имеет решений, если $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$; имеет

бесконечно много решений, если $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$, при условии, что $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$).

Доказательство. Если система (1) уравнений имеет решение, то существует такая пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которой в оба уравнения системы получаются верные числовые равенства:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Умножив обе части равенства $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$ на b_2 , а равенства $a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$ на $-b_1$ и сложив почленно, получим $(a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = b_2c_1 - b_1c_2$, откуда

$$x_0 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (2)$$

Умножив обе части первого равенства на $-a_2$, а второго — на a_1 и сложив почленно, получим:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y_0 = a_1c_2 - a_2c_1,$$

откуда

$$y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) видно, что если система (1) имеет решение, то, поскольку $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, это решение единственное.

Докажем теперь существование решения, т. е. докажем, что пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (1). Подставим в систему (1) вместо x и y их значения $x_0 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$:

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1 \cdot \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \\ &= \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1; \\ & a_2 \cdot \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_2 \cdot \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \\ &= \frac{a_2b_2c_1 - a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 - a_2b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_2(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_2. \end{aligned}$$

Как видим, каждое уравнение системы (1) преобразуется в верное равенство, поэтому пара чисел $(x_0; y_0)$, определенных по формулам (2) и (3), является решением этой системы.

Случай б) исследуйте самостоятельно.

233. Покажите графически решение системы линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} -2y = -3x + 6, \\ 10y = -3x - 12. \end{cases}$$

$$\text{Решение. } \begin{cases} y = 1,5x - 3, \\ y = -0,3x - 1,2. \end{cases}$$

$$y = 1,5x - 3 \quad y = -0,3x - 1,2$$

x	y	x	y
0	-3	-4	0
2	0	6	-3

Ответ: (1; -1,5). (См. рис. 46.)

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -2y = -3x + 6, \\ 10y = -3x - 12. \end{cases}$$

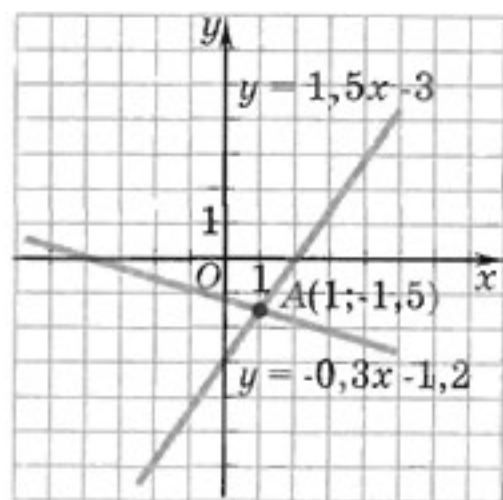


Рис 46

234*. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$ и

квадратное уравнение $t^2 - at + b = 0$ связаны следующим образом: если t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения, то система уравнений имеет два решения: $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ и не имеет других решений. Обратно, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений, то числа x_0 и y_0 являются корнями уравнения.

Доказательство. Пусть t_1, t_2 — корни уравнения. По формулам Виета имеем

$$t_1 + t_2 = a, \quad t_1 t_2 = b,$$

т. е. пары чисел $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ являются решениями системы.

Покажем, что других решений система не имеет. Пусть $(x_0; y_0)$ — какое-либо решение системы.

Тогда $x_0 + y_0 = a$, $x_0 y_0 = b$, и потому многочлен $t^2 - at + b$ можно записать следующим образом:

$$t^2 - at + b = t^2 - (x_0 + y_0)t + x_0 y_0 = (t - x_0)(t - y_0).$$

Отсюда мы заключаем, что числа x_0 и y_0 являются корнями квадратного уравнения.

235*. Решите систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Решение. Уравнение (см. № 234) для данной системы имеет вид $t^2 - t - 2 = 0$. Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Следовательно, данная система имеет решения (2; -1) и (-1; 2).

$$\text{б) } \begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Введем обозначения $x + y = a$, $xy = b$. Имеем:

$$\begin{aligned} xy(x + y) &= ab; \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \\ &= (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = a(a^2 - 3b). \end{aligned}$$

Поэтому в результате замены система примет вид

$$\begin{cases} ab = 6, \\ a^3 - 3ab = 9. \end{cases}$$

Отсюда находим $a^3 = 3ab + 9 = 27$, $a = 3$, и тогда $b = 2$.

Решив систему

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases}$$

найдем два решения: (1; 2) и (2; 1).

Ответ: (1; 2), (2; 1).

236. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

б*) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$

ж*) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

в*) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ 4y^2 + xy = 115; \end{cases}$

з*) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10, \\ y^3 + x^2y = 5; \end{cases}$

г*) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$

и*) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 3, \\ (x + 2)(y + 2) = 24; \end{cases}$

д*) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^3 + y^3 = 19; \end{cases}$

к*) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$

237*. Маугли попросил своих друзей-обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось лишь 33 ореха. По сколько орехов собрали обезьяны (известно, что каждая обезьяна принесла больше одного ореха)?

238*. а) Для кормления лошадей было заготовлено на определенный срок сено. Если бы лошадей было на две меньше, то этого запаса хватило бы на 10 дней больше установленного срока; если бы лошадей было на две больше, то заготовленного сена не хватило бы на 6 дней до установленного срока. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена?

б) Один хозяин купил 30 птиц трех видов на 30 монет. За каждые три птицы первого вида он уплатил одну монету, за каждые две птицы второго вида — также одну монету, а за каждую птицу третьего вида — две такие же монеты. Сколько птиц каждого вида купил хозяин?

239. На колхозный двор прилетело 35 ворон. Неожиданно испугавшись кота, вороны взлетели и разделились на две стаи: первая стая уселась на ветви старого тополя, а другая — на крышу водонапорной башни. Через некоторое время с тополя на крышу перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с крыши, после чего на тополе осталось вдвое больше ворон, чем на крыше. Сколько было ворон в обеих стаях первоначально?

240. а) Выясните, имеет ли система решения и сколько:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ xy = -0,5x. \end{cases}$$

б) Составьте какую-либо систему линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара значений переменных $x = 4$, $y = 1$.

в) Укажите какие-нибудь три решения системы:

$$\begin{cases} 1,5y + x = -0,5, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$

241. Имеет ли решения система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3y + x - y = 2, \\ x - y = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy - 2x - y = 14, \\ 2x - y = 6, \\ 3x + 2y = 16? \end{cases}$

242*. Решите систему уравнений с тремя неизвестными:

а) $\begin{cases} xy = 15, \\ xz = 5, \\ yz = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + xz = 5, \\ xy + yz = 8, \\ yz + xz = 9. \end{cases}$

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Система уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = c_1, \\ 5x - 2y = c_2 \end{cases}$ имеет решение $x = 7$ и $y = 2$. Найдите значения c_1 и c_2 .

2. Напишите уравнение прямой $y = kx + b$, если график ее проходит через точки: $C(1; 2)$ и $D(4; 5)$.

3. Решите систему уравнений и дайте графическую иллюстрацию решения:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -8. \end{cases}$$

4. В первый день засеяли $\frac{1}{4}$ первого поля и $\frac{1}{3}$ второго, что составило 240 га. Во второй день засеяли $\frac{1}{3}$ остальной части первого поля, что на 60 га меньше половины оставшейся части второго поля. Найдите площадь каждого поля.

5. При каком значении a прямые $ax - 3y = 6$ и $4x + 3y = 12$ пересекаются на оси абсцисс?

Вариант 2*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x + 7y = 13. \end{cases}$$

2. Являются ли равносильными системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (x + y)^2 = 9, \\ xy = 2? \end{cases}$$

Ответ поясните.

3. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению $xy - 2 = 2x - y$.

4. Решите задачу: а) или б).

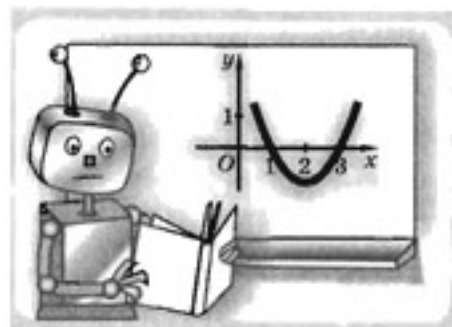
а) Из пунктов A и B , расположенных на расстоянии 100 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста. Через 4 ч они встретились. После встречи скорость первого

велосипедиста, двигающегося из A в B , возросла на 5 км/ч, а скорость второго возросла на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость второго велосипедиста, если первый прибыл в пункт B на 1 ч раньше, чем второй в пункт A .

б) Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую цистерну поступает 100 л воды в минуту, во вторую — 60 л и в третью — 80 л. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья заполнены частично и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

5. Найдите все значения параметра b , при которых не имеет решений система уравнений

$$\begin{cases} (b + 1)x + y = 3, \\ 2x - (b - 2)y = 6. \end{cases}$$



КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 5. Квадратичная функция и ее свойства

Квадратичная функция и ее график

Определение. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a , b и c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$. Если $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, то получим квадратичную функцию $y = x^2$, которую мы рассматривали ранее. График квадратичной функции $y = x^2$ — парабола. Парабола $y = x^2$ симметрична относительно оси Oy .

Точка O — вершина параболы (рис. 47).

Напомним, что функции, графики которых симметричны относительно оси Oy , — *четные*; функции, графики которых симметричны относительно начала системы координат, — *нечетные*. По определению функция y — четная, если при любых x и $-x$ из ее области определения верно равенство $y(-x) = y(x)$; функция y — нечетная, если $y(-x) = -y(x)$ при любых x и $-x$, принадлежащих ее области определения.

Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2$ при некоторых значениях

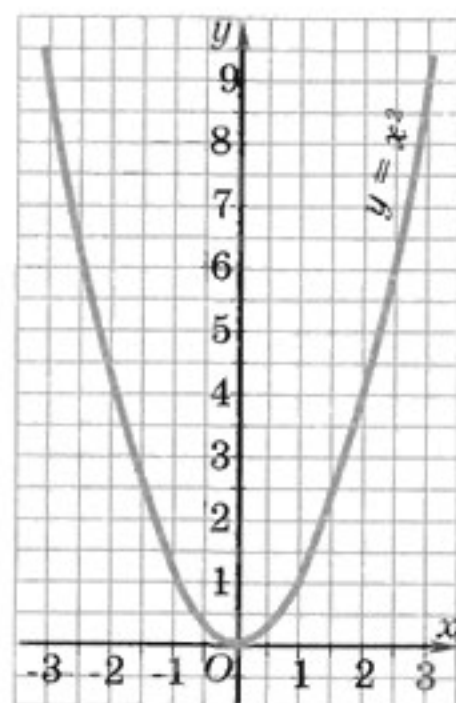


Рис. 47

а. Пусть $a = 2$. Тогда у произвольной точки M графика функции $y = 2x^2$ с абсциссой t ордината равна $2t^2$. Сравним ординаты точек M и N , где N — точка графика функции $y = x^2$ с абсциссой t (рис. 48).

Их отношение $\frac{2t^2}{t^2}$ равно 2. Таким

образом, можно заключить, что точка M получается растяжением ординаты точки N в 2 раза. Такое рассуждение можно провести для любых двух точек графиков функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ с одной и той же абсциссой. Как видно, график

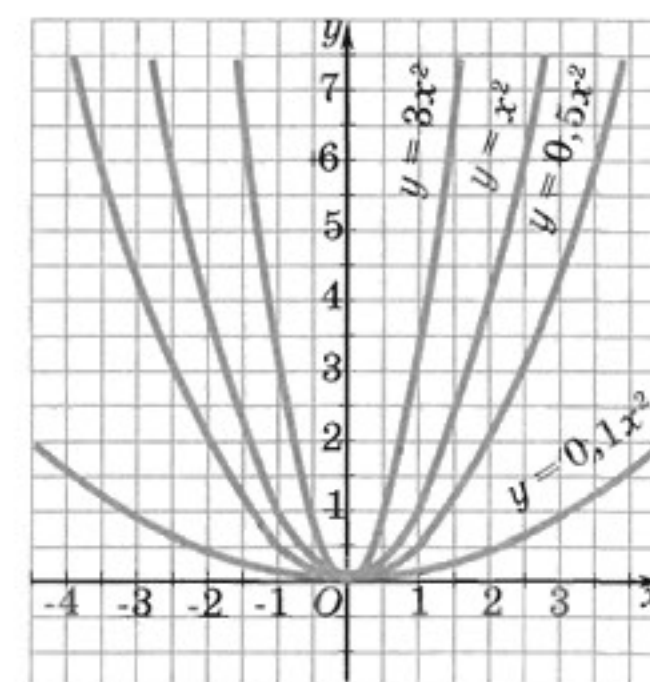
функции $y = 2x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ растяжением его в 2 раза вдоль оси Oy и также является параболой.

Рассуждая аналогично, можно показать, что парабола $y = ax^2$, где $a > 1$, получается растяжением параболы $y = x^2$ в a раз вдоль оси Oy .

Рассмотрев самостоятельно функции $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$, заметьте, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается сжатием графика функции $y = x^2$ к оси Ox в 2 раза.

Графики функций $y = ax^2$ и $y = -ax^2$ симметричны относительно оси Ox (рис. 49, а, б).

а)



б)

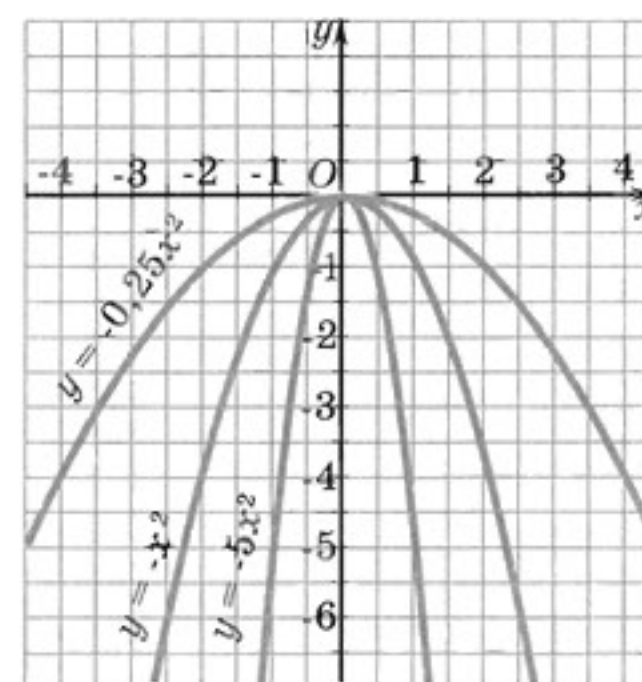


Рис. 49

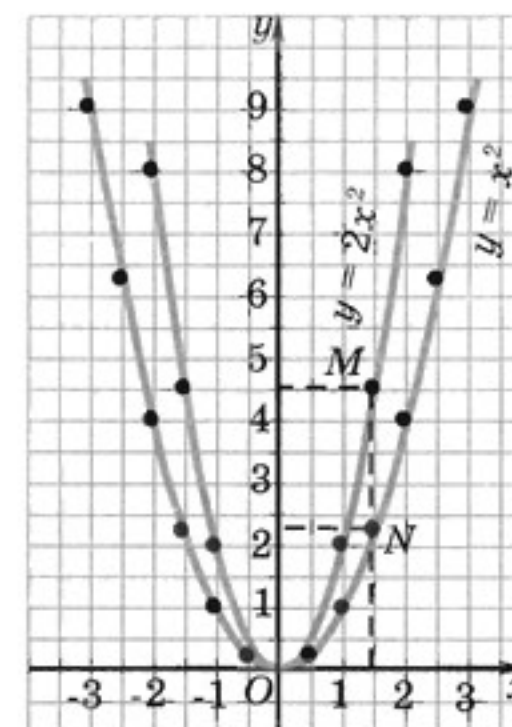


Рис. 48

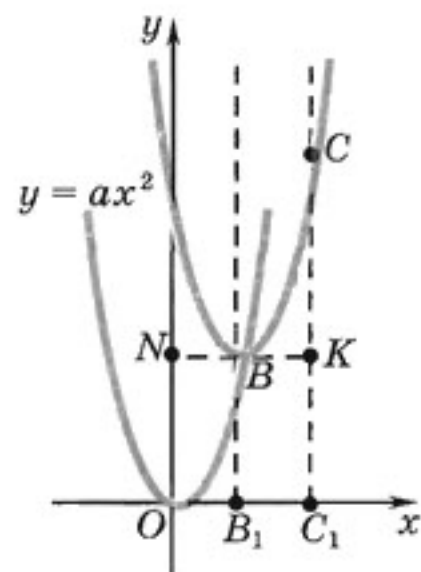


Рис. 50

Функция $y = ax^2$ — четная, так как для любых x и $-x$ из области определения $ax^2 = a(-x)^2$. Точка $(0; 0)$ является вершиной параболы $y = ax^2$, а две ее части, разделенные осью симметрии, называемые ветвями параболы, направлены вверх, если $a > 0$, вниз — если $a < 0$.

Сдвинем параболу $y = ax^2$ в системе координат так, чтобы ее ось симметрии оставалась параллельной оси Oy (рис. 50). Пусть после указанного перемещения вершина параболы имеет координаты $(m; n)$. Возьмем на параболе произвольную точку $C(x; y)$, ее проекцию на ось Ox обозначим C_1 . Проведем через точку B прямую, параллельную оси Ox . Тогда $x = OC_1$, $y = C_1C$, $BK = x - m$, $KC = y - n$. Учитывая, что $KC = a(BK)^2$, имеем: $y - n = a(x - m)^2$, откуда $y = a(x - m)^2 + n$. Таким образом, параболу $y = ax^2$, сдвинутая указанным способом, задается формулой $y = a(x - m)^2 + n$.

Отметим, что последнюю формулу мы вывели, пользуясь рисунком, на котором значения a , m и n — положительные. Эта формула справедлива при любых $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$.

Покажем, что и график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ можно получить параллельным переносом (т. е. преобразованием фигуры F , при котором произвольная ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x + m; y + n)$, где m и n — постоянные числа для всех точек $(x; y)$) параболы $y = ax^2$. Для этого запишем квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Если обозначить $-\frac{b}{2a} = m$, $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = n$, то получим $y = a(x - m)^2 + n$. Понятно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить параллельным переносом параболы $y = ax^2$,

когда ее вершина $(0; 0)$ переходит в точку $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$. Эта точка является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$, а ее осью симметрии — прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $a > 0$, то при $x = -\frac{b}{2a}$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$; если $a < 0$, то в вершине параболы достигается наибольшее значение y .

Действительно, если записать функцию в виде $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, то видно, что значение выражения $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ не зависит от переменной x . Если $a > 0$, то слагаемое $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ не может быть отрицательным. Оно равно 0 при $x = -\frac{b}{2a}$, и в этом случае функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Аналогично установите, что если $a < 0$, то при $x = -\frac{b}{2a}$ функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

На основании этих свойств можно заключить, что при $a > 0$ областью значений функции $y = ax^2 + bx + c$ является промежуток $\left[\frac{-b^2 + 4ac}{4a}; +\infty \right)$, а при $a < 0$ — $\left(-\infty; \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right]$.

Если $a > 0$, то функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$, если $a < 0$, то функция $y = ax^2 + bx + c$ возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$.

Действительно, если $a > 0$, то для произвольных значений аргумента x_1 и x_2 , таких, что $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, имеем

$$y_2 - y_1 = a \left(x_2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \left(x_1 + \frac{b}{2a} \right)^2 = a \left(x_2 + \frac{b}{2a} + x_1 + \frac{b}{2a} \right) \times \\ \times \left(x_2 + \frac{b}{2a} - x_1 - \frac{b}{2a} \right) = a \left(x_2 - \left(-\frac{b}{2a} \right) + \left(x_1 - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right) \right) \times$$

$\times (x_2 - x_1) > 0$, так как каждый из сомножителей положителен. Отсюда заключаем, что $y_2 > y_1$ и функция y возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$.

Если $a > 0$ и $-\frac{b}{2a} \geq x_2 > x_1$, то второй множитель в выражении $y_2 - y_1 = a \left(x_2 - \left(-\frac{b}{2a} \right) + \left(x_1 - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right) \right) (x_2 - x_1)$ отрицателен, а остальные — положительны, поэтому $y_2 < y_1$ и функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на данном промежутке.

Случай, когда $a < 0$, исследуйте самостоятельно.

Например, функция $y = x^2 - 2x + 2$ возрастает при $x \geq 1$ ($-\frac{b}{2a} = 1$), поскольку для любых двух значений x_2 и x_1 аргумента x , таких, что $x_2 > x_1 \geq 1$, имеем: $y_2 - y_1 = (x_2^2 - 2x_2 + 2) - (x_1^2 - 2x_1 + 2) = (x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0$, поэтому $y_2 > y_1$. Функция $y = x^2 - 2x + 2$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Таким образом, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ обладает следующими свойствами.

1. Областью определения функции является множество действительных чисел R .

2. Областью значений функции при $a > 0$ является промежуток $\left[\frac{-b^2 + 4ac}{4a}; +\infty \right)$, а при $a < 0$ — промежуток $\left(-\infty; \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right]$.

3. Нули функции: при $D = b^2 - 4ac > 0$ — числа $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; если $D < 0$, то функция нулей не имеет; если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Наименьшее значение $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ функция принимает при $x = -\frac{b}{2a}$, если $a > 0$; наибольшее значение $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ функция принимает при $x = -\frac{b}{2a}$, если $a < 0$.

5. Функция при $a > 0$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$ и убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$; функция при $a < 0$ возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$.

6. Функция четная, если $b = 0$; при $b \neq 0$ функция является ни четной, ни нечетной.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$; прямая $x = -\frac{b}{2a}$ — ось симметрии параболы. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз.

Рассмотрим на примерах, как можно построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 2x + 2$.

1. Найдем координаты вершины $(x_0; y_0)$ параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1; y_0 = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-2)^2 + 4 \cdot 2}{4} = 1.$$

Ординату вершины параболы можно найти, подставив значение ее абсциссы в формулу $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$; для нашей функции $y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$. Строим в координатной плоскости вершину параболы — точку $(1; 1)$.

2. Находим координаты нескольких точек параболы. При $x = 0$ $y = 2$. Симметричная точка $(0; 2)$ относительно оси параболы — точка $(2; 2)$.

Через точки $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(2; 2)$ проводим плавную кривую линию — параболу $y = x^2 - 2x + 2$ (рис. 51).

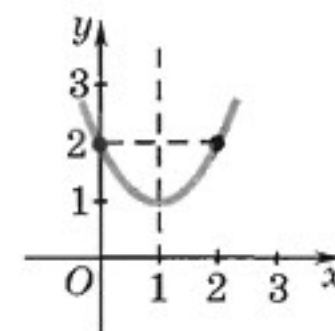


Рис. 51

Указанный способ построения графика квадратичной функции по трем точкам схематический. Чтобы график был построен более точно, полезно найти, кроме координат вершины и координат какой-либо пары симметричных точек параболы, координаты большего числа ее точек.

Пример 2. Построить график функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.

1. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$; $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -3$.

2. Вычислим координаты нескольких точек графика функции (см. табл. 16).

Таблица 16

x	0	-2	1	-3
y	-1	-1	5	5

3. Строим график функции (рис. 52).

Пример 3. Построить график функции $y = -0,5x^2 - x + 2$.

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -0,5 < 0$. Вершина параболы — точка $(-1; 2,5)$, ось симметрии параболы — прямая $x = -1$. Найдем точку пересечения графика с осью Ox , для чего решим уравнение $-0,5x^2 - x + 2 = 0$. Заменим его равносильным уравнением $x^2 + 2x - 4 = 0$ (уравнения являются равносильными, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней).

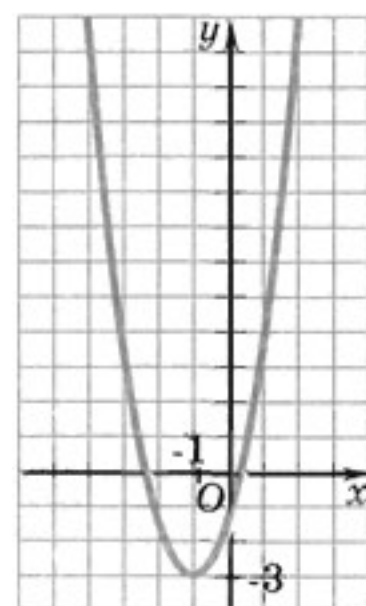


Рис. 52

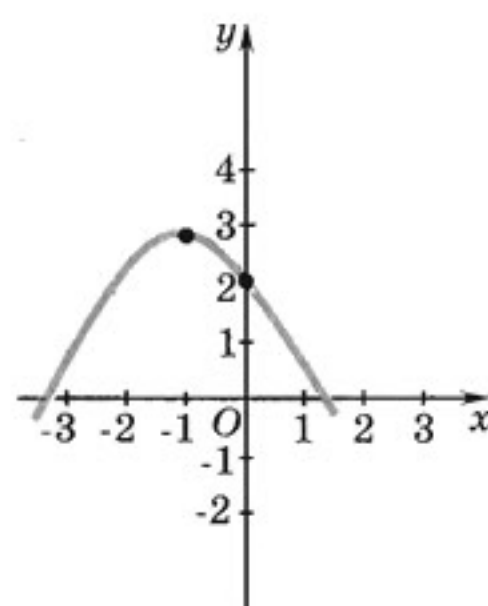


Рис. 53

Решаем уравнение $x^2 + 2x - 4 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Строим точки $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$. Находим еще две точки параболы: $(0; 2)$ и симметричную ей относительно оси симметрии параболы точку $(-2; 2)$. Проводим через построенные точки параболу (рис. 53).

Таким образом, схема построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть следующей.

1. Построить вершину параболы — точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{b^2 + 4ac}{4a}$ (или $y_0 = y(x_0)$).

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy , — ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции (если они существуют) и построить точки пересечения параболы с осью Ox (если они есть).

4. Построить еще какие-либо точки параболы, симметричные относительно ее оси симметрии.

5. Провести через построенные точки параболу.

График любой квадратичной функции можно построить также, преобразуя график параболы $y = x^2$.

Пример 4. Построить график функции

$$y = 2x^2 + 4x + 6.$$

Выполним такие преобразования. Вынесем за скобку коэффициент при x^2 , а затем выделим полный квадрат:

$$y = 2(x^2 + 2x + 3) = 2(x^2 + 2x + 1 + 2)$$

и, наконец,

$$y = 2(x + 1)^2 + 4.$$

Этот график можно получить из параболы $y = x^2$ путем преобразований.

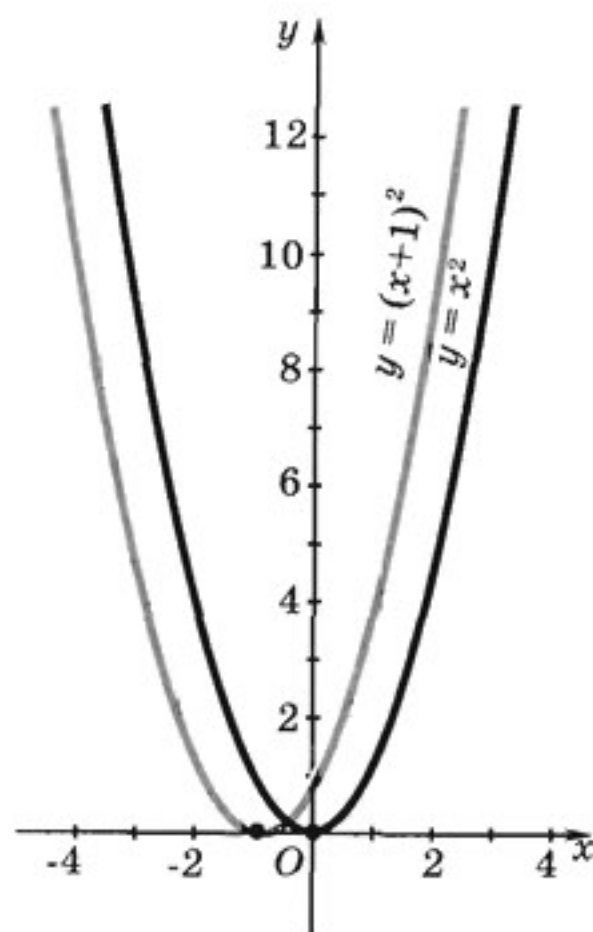
1. Перенесем параболу $y = x^2$ на 1 единицу влево (рис. 54, а), получим:

$$y = (x + 1)^2.$$

2. Умножим все ординаты на 2 — растяжение в 2 раза (рис. 54, б), получим:

$$y = 2(x + 1)^2.$$

а)



б)

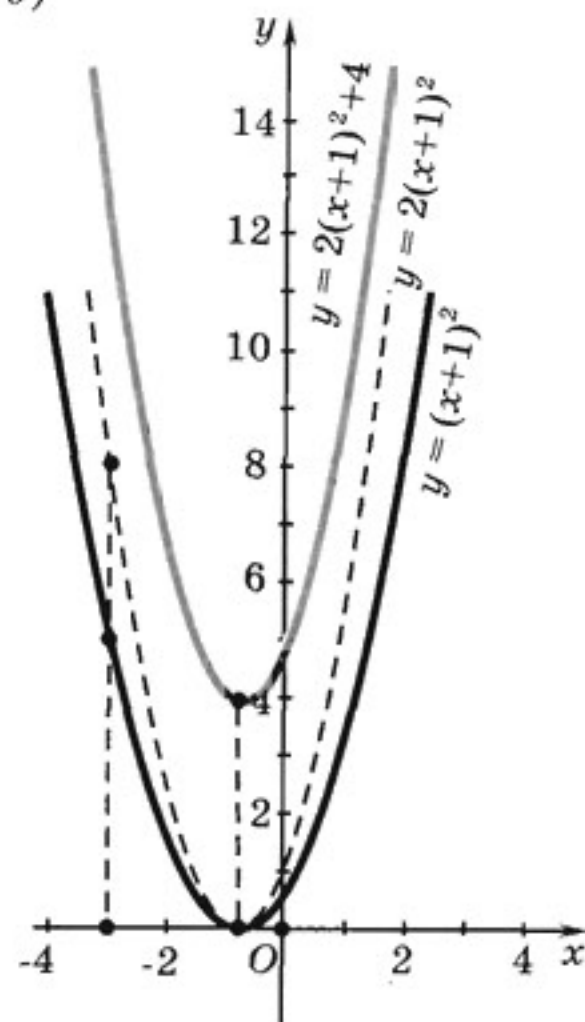


Рис. 54

3. Перенесем последний график вверх на 4 единицы, получим искомый график (рис. 54, б):

$$y = 2(x + 1)^2 + 4.$$

Примечание. Можно ограничиться также построением лишь одной параболы. Для этого достаточно через точку $O_1(-1; 4)$ провести оси O_1x_1 и O_1y_1 , параллельные осям Ox , Oy , и во вспомогательной системе координат $x_1O_1y_1$ построить параболу $y_1 = 2x_1^2$.

- ?
1. Как называется кривая, являющаяся графиком функции $y = 5x^2$?
 2. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
 3. Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
 4. Как получить график параболы $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ из графика параболы $y = ax^2$?
 5. Как построить график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$?
 6. Как расположена парабола относительно оси x , если дискриминант квадратного трехчлена: а) равен нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля?
 7. Какие точки параболы играют существенную роль для отыскания промежутков, где функция $y = ax^2 + bx + c$: а) возрастает или убывает; б) принимает отрицательные или положительные значения?

Задания

Устные упражнения 234—244.

243. Приведите примеры: а) четных функций; б) нечетных функций.

244. а) Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2$.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = -2,5x^2$.

245. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 0,6x^2$ и $y = -0,6x^2$. Найдите область определения и множество значений каждой из них.

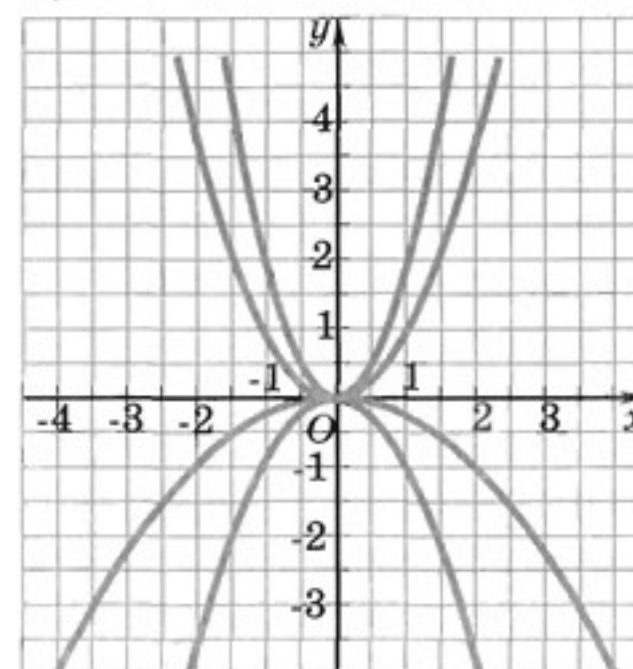
246. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции: а) $y = -13x^2$; б) $y = 0,2x^2$. Перечислите свойства этой функции.

247. Проверьте, принадлежит ли графику функции $y = -2000x^2$ точка: а) $O(0; 0)$; б) $A(1; -2000)$; в) $B(-1; 2000)$; г*) $C(-2000, 1; 0, 1)$.

248. На рисунке 55, а, б даны графики некоторых квадратичных функций. Найдите для каждой из функций, заданных формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, соответствующие значения a , b и c .

249. Площадь S круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, $\pi \approx 3,14$. Найдите: а) площадь круга, радиус которого равен 4; б) радиус круга, площадь которого равна 5 см^2 .

а)



б)

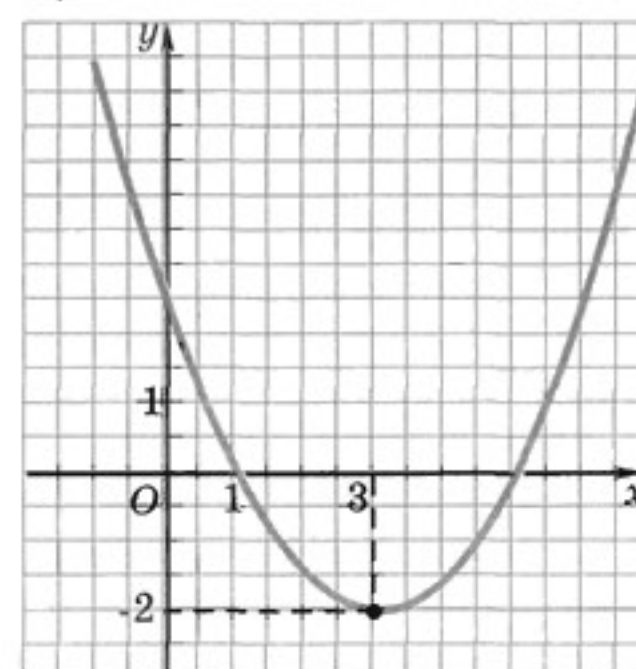


Рис. 55

250. Площадь поверхности куба S зависит от длины x его ребра. Задайте формулой зависимость S от x и установите, является ли эта зависимость квадратичной функцией. Найдите:
а) площадь поверхности куба, ребро которого равно 3,5 дм;
б) ребро куба, площадь поверхности которого равна 109 м^2 .

251. Пересекаются ли: а) парабола $y = 2x^2$ и прямая $y = 14x - 20$; б) парабола $y = -x^2$ и прямая $y = 2x - 3$? Если есть точки пересечения, то найдите их координаты.

252. Найдите нули функции: а) $y = 24x^2 - 6$; б) $y = -x^2 + 4$.

253. При каких значениях a функция $y = ax^2 - 5$: а) имеет нули; б) не имеет нулей?

254. Постройте график функции:

- а) $y = (x + 1)^2$; г) $y = x^2 + 2$;
б) $y = (x - 2)^2$; д) $y = -2(x + 1,5)^2$;
в) $y = x^2 - 1$; е) $y = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$.

255. Постройте график функции:

- а) $y = x^2 - 3x$; г) $y = x^2 - 4x + 4$;
б) $y = x^2 + 4x$; д) $y = -0,25x^2 - 4x + 4$;
в) $y = x^2 - 6x + 1$; е) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$.

256. Постройте график функции $y = 0,5x^2 - 3x + 2,5$. Найдите:

- а) область определения функции;
б) множество значений функции;
в) нули функции;
г) множество значений аргумента, на котором функция возрастает; убывает;
д) наименьшее значение функции;
е) промежутки знакопостоянства функции.

257. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 8$. Найдите:

- а) область определения и множество значений функции;
б) множество значений аргумента, при которых $y = 0$; $y > 0$; $y < 0$;
в) множество значений аргумента, на котором функция возрастает; убывает;

г) значение аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение.

258. Постройте график функции:

- а) $y = 0,5x^2 + x - 7,5$; г) $y = 6x - 4x^2$;
б) $y = 0,5x^2 - 3x + 4$; д) $y = (x - 7)(x + 3)$;
в) $y = 4 - 0,4x^2$; е) $y = (2x + 7)(x - 1)$.

259. Без построения графика установите, в каких четвертях расположена парабола:

- а) $y = x^2 + 16x + 3$; в) $y = -4x^2 + x - 7$;
б) $y = x^2 - x + 3$; г) $y = -x^2 + 4x - 1$.

260. При каком значении c график функции $y = x^2 - 7x + c$ проходит через точку $M(10; -1)$?

261. При каком значении b график функции $y = x^2 + bx - 19$ проходит через точку $N(-13; 31)$?

262. Задайте формулой квадратичную функцию, если известно, что ее графиком является парабола, проходящая через точку $(-1; 6)$, а ее вершина — точка $(1; 2)$.

263. Постройте график функции:

- а) $y = x^2 - 10^0$; г) $y = 2x^2 - x - 1$;
б) $y = x^2 + 5x^0$; д) $y = x^2 - 5^0x - 6$;
в) $y = x^2 - 5x + 5^{-1}$; е) $y = |-x^2| + 5x - 6$.

264. Постройте график функции и, используя его, выясните ее свойства:

- а) $y = x^2 + 10x + 25$; г) $y = -2x^2 + 5x - 2$;
б) $y = x^2 + 10x + 30$; д) $y = 3x^2 + 4x + 5$;
в) $y = 3x^2 + 5x - 1$; е) $y = 3x^2 + 13x - 10$.

265*. 1) При каком значении k прямая $y = kx$ и парабола $y = x^2 + 4x + 1$ имеют только одну общую точку?

2) Квадратный трехчлен $y = x^2 + px + q$ принимает при $x = 1$ наименьшее значение, равное -4 . Найдите $y(0)$.

3) Квадратный трехчлен $y = -x^2 + bx + c$ принимает при $x = 1$ наибольшее значение, равное -4 . Найдите $y(-1)$.

4) Найдите коэффициенты a , b , c квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, если он при $x = 1$ принимает наибольшее значение, равное 3, а $y(0) = 0$.

5) Найдите коэффициенты квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, если его график:

- а) проходит через точки $A(-1; 0)$, $B(3; 0)$ и $C(0; -6)$;
- б) проходит через точки $K(-2; 0)$, $Z(1; 0)$, $M(0; 2)$.

§ 6. Решение задач с применением свойств квадратичной функции

Свойства квадратичной функции применяют при решении многих задач, особенно на нахождение наибольшего (максимального) или наименьшего (минимального) значений переменной величины.

Пример. Данное положительное число t представить в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим одно из слагаемых через x ; тогда другое слагаемое равно $t - x$.

Нам нужно найти наибольшее значение произведения $x(t - x)$. Рассмотрим квадратичную функцию $y = x(t - x) = -x^2 + tx$. Коэффициент при x^2 этой функции отрицателен (равен -1); следовательно, при $x = -\frac{t}{-2} = \frac{t}{2}$ функция принимает наибольшее значение.

Так как $x = \frac{t}{2}$, то $t - x = \frac{t}{2}$. Итак, произведение двух чисел, сумма которых равна данному положительному числу, является наибольшим, если эти числа равны между собой.

Задача 1. Забором длиной 100 м нужно огородить прямоугольный участок, примыкающий к стене. Какими должны быть размеры участка, чтобы он имел наибольшую площадь?

Решение. Обозначим ширину участка через x м (рис. 56), тогда его длина равна $(100 - 2x)$ м, а площадь $S = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$ (м²). Видим, что площадь участка выражается квадратичной функцией $S(x) = -2x^2 + 100x$. Эта функция принимает наибольшее значение при $x = 25$. Тогда $100 - 2x = 50$ (м).



Рис. 56

Ответ: ширину участка нужно взять равной 25 м, а длину — 50 м.

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 49 м/с. Считая ускорение земного притяжения равным 9,8 м/с² и не учитывая сопротивление воздуха, найти, на какую наибольшую высоту взлетит тело.

Решение. Из курса физики известно, что высота h (в метрах), на которой окажется брошенное вертикально вверх тело через t с, может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость (в метрах в секунду), $g = 9,8$ м/с².

Квадратичная функция $h(t) = 49t - 4,9t^2$ принимает наибольшее значение при $t_0 = \frac{49}{2 \cdot 4,9} = 5$ (с). Тогда искомая наибольшая высота $h = h(5) = 49 \cdot 5 - 4,9 \cdot 5^2 = 122,5$ (м).

Ответ: 122,5 м.

Задача 3*. Заготовленным материалом можно облицевать 6000 м² стенок и дна канала оросительной системы с прямоугольным поперечным сечением. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы объем воды в канале длиной 1 км был наибольшим?

Решение. Пусть площадь прямоугольного поперечного сечения канала равна hx (рис. 57), тогда объем канала $V = 1000hx$ м. Учитывая, что смоченная площадь равна 6000 м², получим уравнение

$$(2h + x) 1000 = 6000, \text{ или } 2h + x = 6.$$

Отсюда $h = \frac{6 - x}{2} = 3 - 0,5x$, а $V(x) = 1000x(3 - 0,5x)$. Поскольку корни уравнения $1000x(3 - 0,5x) = 0$ равны $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, а коэффициент $a = -500 < 0$, то функция $V(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 3$.

Тогда $h_{\text{наиб.}} = 3 - 0,5 \cdot 3 = 1,5$ (м).

Ответ: ширина сечения равна 3 м; высота сечения равна 1,5 м.

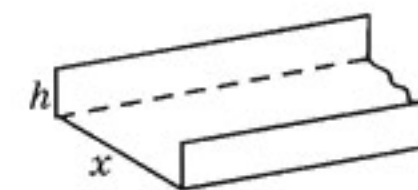


Рис. 57

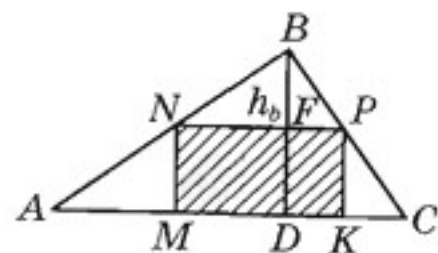


Рис. 58

Задача 4*. На земельном участке, имеющем форму остроугольного треугольника ABC , надо построить дом прямоугольной формы так, чтобы он прилегал к стороне участка (рис. 58). Известно что $AC = 40$ м, $h_b = BD = 20$ м.

Какую наибольшую площадь участка

может занять проектируемое здание?

Решение. Пусть $MN = x$, $MK = y$.

Так как $\triangle ABC \sim \triangle NBP$, то

$$\frac{AC}{BD} = \frac{NP}{BF}; \quad \frac{40}{20} = \frac{y}{20 - x}; \quad y = 40 - 2x.$$

$$S = xy = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x.$$

Тогда $S_{\text{наиб.}} = 200$ м² (обоснуйте это самостоятельно).

Задача 5*. Какова формула для нахождения числа диагоналей выпуклого многоугольника в зависимости от числа его сторон? Сколько диагоналей имеет выпуклый двенадцатиугольник?

Решение. Пусть число сторон данного выпуклого многоугольника равно x . Тогда число диагоналей, проведенных из каждой вершины, равно $x - 3$, и поэтому число всех диагоналей $y = \frac{x(x-3)}{2}$. Двенадцатиугольник имеет $\frac{12(12-3)}{2} = 54$ (диагонали).

Ответ: 54 диагонали.

? 1. Верно ли, что если $a > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет наименьшее значение, равное $-\frac{D}{4a}$ (где $D = b^2 - 4ac$); если $a < 0$, то квадратичная функция имеет при $x = -\frac{b}{2a}$ наибольшее значение, равное $-\frac{D}{4a}$?

2. Сформулируйте теорему о наибольшем произведении двух положительных чисел, сумма которых постоянна.

Задания

266. Запишите число 17 в виде суммы двух чисел, произведение которых наибольшее.

267*. Сумма двух положительных чисел равна 13. Найдите эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

268. В треугольнике сумма стороны и высоты, опущенной на нее, равна 15 см. Может ли площадь такого треугольника быть равной 50 см²?

269. Периметр прямоугольника равен 16 м. Какими должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

270. Какими должны быть стороны прямоугольника, периметр которого 1,2 м, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

271. Участок земли в форме прямоугольника площадью 0,5 га обнесен забором. Какими должны быть размеры участка, чтобы его периметр был наименьшим?

272*. При каком значении p сумма квадрата корней уравнения $x^2 + (p-2)x + p-3 = 0$ принимает наименьшее значение?

273*. Большая сторона прямоугольника равна s . Проводится окружность с центром в одной из вершин прямоугольника, радиус которой равен его меньшей стороне, и от прямоугольника отделяется часть круга. При какой длине меньшей стороны площадь остальной части прямоугольника будет наибольшей?

274*. Автобус едет из пункта A в пункт C . От пункта A до пункта B , находящегося между A и C , он движется со скоростью 60 км/ч. В пункте B он уменьшает скорость на a км/ч и при такой скорости преодолевает третью часть пути от B до C . Остальную часть пути он движется со скоростью на $2a$ км/ч большей, чем первоначальная. Существует ли значение a , при котором автобус быстрее всего проедет путь от B до C ?

275*. Тело брошено вертикально вверх с высоты 25 м с начальной скоростью 4 м/с. Считая ускорение земного притяжения равным 9,8 м/с² и не учитывая сопротивление воздуха, найдите, через сколько секунд: а) тело будет на высоте 30 м; б) на наибольшей высоте, на которую оно может взлететь.

276*. Длина диагонали основания прямоугольного параллелепипеда равна 16 м, а высота параллелепипеда — 4 м. Какой нужно взять ширину основания прямоугольного параллелепипеда, чтобы он имел наибольший объем?

277. Для ограды прямоугольного участка заготовлено 78 щитов, длиной 2,5 м каждый. Какую длину и ширину должен иметь прямоугольный участок, чтобы его площадь была наибольшей?

278*. Меньшая сторона прямоугольника, равная 10 см, стала увеличиваться со скоростью 2 см/с, а большая, равная 25 см, уменьшаться со скоростью 1 см/с. Установите, как со временем меняется площадь этого прямоугольника, при каком значении t (t — время) она принимает наибольшее значение. Какие размеры будет иметь такой прямоугольник?

279. Из всех прямоугольников с диагональю $8\sqrt{2}$ дм найдите тот, у которого наибольшая площадь.

280*. В квадрат со стороной 4 см вписывается другой квадрат так, что вершины его лежат на сторонах данного квадрата. Каким должно быть расстояние от вершины данного квадрата до ближайшей к ней вершины вписанного квадрата, чтобы вписанный квадрат имел наименьшую площадь?

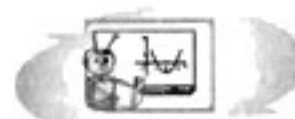
281*. Среди всех прямоугольников, вписанных в данный полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади, если одна из его сторон лежит на диаметре.

282*. Из пунктов A и B , расположенных на двух пересекающихся прямолинейных дорогах, движутся (по этим дорогам) равномерно с одинаковой скоростью два пешехода. Постройте отрезок, длина которого является кратчайшим расстоянием между движущимися пешеходами. Через сколько часов после начала движения пешеходы будут на кратчайшем расстоянии друг от друга, если $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = 8$ км, $OB = 6$ км, а скорость пешехода равна 5 км/ч? Покажите на рисунке место нахождения пешеходов.

283*. Из квадратного листа фанеры, сторона которого равна 10 единицам, вырезано прямоугольное отверстие с диагональю 5 единиц. Отверстие покрыто железом. Единица площади фанеры весит 2 г, а единица площади отверстия — 7 г. Какие размеры имеет прямоугольное отверстие, если известно, что масса листа максимальна (наибольшая)?

284*. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

285*. На основании AB треугольника ABC дана точка M . На каком расстоянии от этого основания нужно провести прямую, ему параллельную, пересекающую стороны AC и BC в точках D и E , чтобы площадь треугольника DEM была максимальной?



Повторение главы III

Исторические сведения

В первой половине XVII в. в связи с развитием механики в математику проникают идеи изменения и движения и начинает складываться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Так, французские математики Пьер Ферма (1601—1665) и Рене Декарт (1596—1650) представляли себе функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон понимал функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки. В 1671 г. под функцией он представлял себе переменную величину, которая изменяется с течением времени. Для функции Ньютон даже придумал свое название — флюэнта. «Я буду называть, — писал Ньютон, — флюэнтами или текущими величинами величины, которые я рассматриваю как постепенно и неопределенно возрастающие...»



Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1648—1716)

Впервые термин «функция» употребил в 1694 г. Лейбниц. Под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону.

В XVIII в. формируется взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную величину с другой. Это так называемая аналитическая точка зрения на понятие функции. Подход к такому определению впервые сделал швейцарский математик И. Бернулли (1667—1748), который в 1718 г. определил функцию следующим образом: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной и постоянных».

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 г. ученик И. Бернулли Л. Эйлер: «Функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное каким-нибудь способом из этой переменной величины и из чисел либо постоянных величин».

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется квадратичной функцией и какие ее свойства вы знаете?
2. Как называется график квадратичной функции и какие способы его построения вы знаете? Приведите примеры.
3. Приведите пример использования свойств квадратичной функции для нахождения наибольшего или наименьшего значения переменной величины.

Задания

286. Постройте график функции:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| а) $y = -\frac{1}{2}x^2$; | д) $y = 0,5x^2 + 3x + 6$; |
| б) $y = x^2 + 6x + 5$; | е) $y = -3x^2 - 3x + 18$; |
| в) $y = x^2 - 4x$; | ж) $y = x^2 - 10x + 25$; |
| г) $y = -x^2 + 5$; | з) $y = (x - 5)(x + 3)$. |

287. Докажите, что функция $y = -x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$.

288. Докажите, что: а) функция $y = x^4$ — четная; б) функция $y = x^3$ — нечетная.

289. Решите уравнение с использованием графика функции $y = x^2$:

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| а) $x^2 = 4$; | в) $x^2 = 0$; |
| б) $x^2 = -5$; | г) $x^2 = \sqrt{3}$. |

290. Постройте график функции $y = 2x^2 - x - 1$. Пользуясь этим графиком, найдите:

- а) все значения аргумента, при которых $y = 0$; $y < 0$; $y > 0$;
- б) множество значений аргумента, на котором функция возрастает; убывает;
- в) наибольшее или наименьшее значение функции.

291. Покажите, что график функции, заданной формулой $y = (x - 2)(x - 4)$, есть парабола.

292. Докажите, что функция $y = 2x + x^2$ возрастает при $x \geq 0$.

293. При каких значениях b и c вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$ будет точка $(6; -12)$?

294. Из всех прямоугольников с данным периметром 20 км найдите прямоугольник с наибольшей площадью.

295*. Проведите в данном треугольнике ABC прямую MN , параллельную стороне AC , чтобы площадь прямоугольника $MNPO$ ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$, $O \in AC$) была наибольшей.

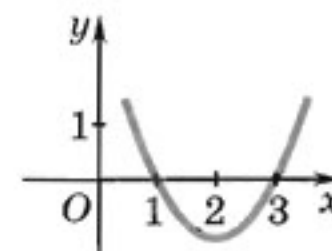


Рис. 59

296*. Автобус вез несколько пассажиров. На остановке из автобуса вышли 6 человек и 20 человек зашли в автобус. На следующей остановке вышли 4 человека и зашли 10 человек, после чего число пассажиров в автобусе стало равным квадрату первоначального числа пассажиров. Сколько пассажиров было в автобусе первоначально?

297. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a , b и c (рис. 59).

298. Запишите уравнение параболы, если известно, что она пересекает ось абсцисс в точке 5, а ее вершиной является точка $(2\frac{3}{4}; 10\frac{1}{8})$.

299*. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$. Определите по графику, при каких значениях x функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) значение, равное нулю.

300*. Постройте график функции

$$y = |3 - 2x^2|.$$

Примечание. Отметим, что:

1. а) При осевой симметрии относительно оси OX точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; -y)$;
- б) при осевой симметрии относительно оси OY точка $(x; y)$ переходит в точку $(-x; y)$;
- в) при центральной симметрии относительно начала координат точка $(x; y)$ переходит в точку $(-x; -y)$.
2. а) При параллельном переносе вдоль оси OX точка $(x; y)$ переходит в точку $(x + a; y)$, где a — некоторое число, при этом перенос происходит «вправо», если $a > 0$, и «влево», если $a < 0$;
- б) при параллельном переносе вдоль оси OY точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; y + b)$, где b — некоторое число, при этом перенос происходит «вверх», если $b > 0$, и «вниз», если $b < 0$.
3. а) При растяжении (сжатии) в k раз ($k > 0$, $k \neq 1$) вдоль оси OX относительно оси OY точка $(x; y)$ переходит в точку $(kx; y)$;

б) при растяжении (сжатии) в k раз ($k > 0$, $k \neq 1$) вдоль оси OY относительно оси OX точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; ky)$.

Применительно к графику функций эти свойства дают геометрические преобразования (см. табл. 17), использование которых позволяет из известного графика функции $y = f(x)$ строить графики других функций.

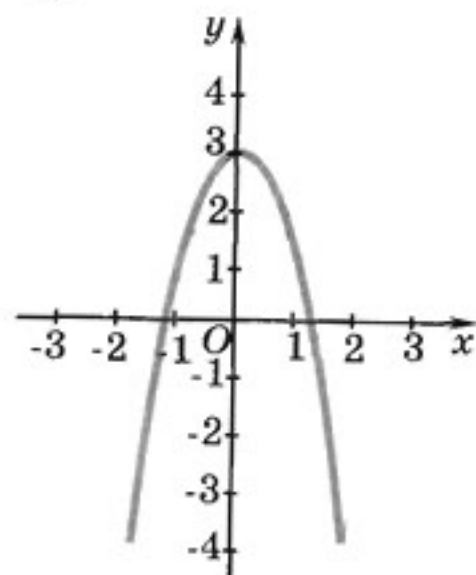
Таблица 17

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + b$	Параллельный перенос его вдоль оси OY : на b единиц вверх, если $b > 0$; на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос его вдоль оси OX : на a единиц вправо, если $a > 0$; на $-a$ единиц влево, если $a < 0$
$y = kf(x)$, $k > 0$	Растяжение его вдоль оси OY относительно оси OX : в k раз, если $k > 1$; сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$y = f(kx)$, $k > 0$	Сжатие его вдоль оси OX относительно оси OY : в k раз, если $k > 1$; растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$y = -f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси OX
$y = f(x) $	Часть графика, расположенная ниже оси OX , симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения
$y = f(-x)$	Симметричное отражение графика относительно оси OY
$y = f(x)$	Часть графика (для области $x \geq 0$) остается без изменения, а его часть (для области $x < 0$) заменяется симметричным отображением относительно оси OY части графика для $x \geq 0$

1. Строим график функции $y = -2x^2 + 3$ (рис. 60, а).

2. Ту часть графика, которая лежит выше оси x (для нее $-2x^2 + 3 \geq 0$), оставим без изменения, а часть графика, которая

а)



б)

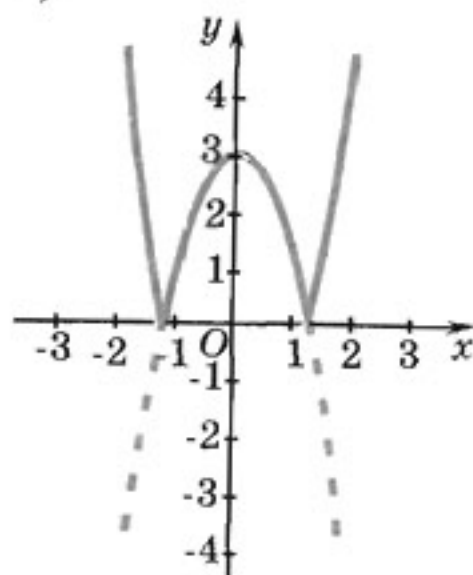


Рис. 60

лежит ниже оси x (для нее $-2x^2 + 3 < 0$), отобразим симметрично относительно Ox . Полученная в результате этого кривая (сплошная линия) — график функции $y = |-2x^2 + 3|$ (рис. 60, б).

301*. Постройте графики функций:

- а) $y = |-x^2 + 2|$; в) $y = |x^2 + x - 2|$;
б) $y = |3x^2 - 1|$; г) $y = |-x^2 + 3x - 2|$.

302*. Постройте графики функций:

- а) $y = |-2x^2| + 1$; в) $y = 2x^2 - |x| - 2$;
б) $y = |-3x^2 + 8x + 3|$; г) $y = -3x^2 + |2x - 1|$.

303*. Постройте график функции $y = |-2x^2 + 3| - 3$.

304. Определите, при каком значении x квадратный трехчлен имеет наибольшее (наименьшее) значение. Найдите эти значения:

- а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = -x^2 + 4x - 3$.

305*. Найдите наименьшее положительное значение функции $y = \frac{30}{3-x} + \frac{30}{3+x}$.

Решение. Преобразуем формулу функции: $y = \frac{30(x+3) + 30(3-x)}{(3-x)(3+x)} = \frac{180}{9-x^2}$.

Наименьшее положительное значение функция y принимает, когда знаменатель принимает наибольшее положительное значение. Функция $f(x) = -x^2 + 9$ квадратичная. График ее — парабола, направленная ветвями вниз ($a < 0$), которая получена из графика функции $y = -x^2$ параллельным переносом вверх на 9 единиц. Наибольшее значение функции $f(x)$ равно ординате вершины $f(x_0) = 9$, и оно больше нуля. Отсюда наименьшее положительное значение

$$y_0 = \frac{180}{f(x_0)} = \frac{180}{9} = 20.$$

Ответ: 20.

306*. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ принимает наименьшее значение?

307. Найдите:

а) наименьшее значение функции $y = x^2 - x + 1$;

б*) наибольшее положительное значение функции

$$y = \frac{1}{x^2 + 8x + 17}.$$

308. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2.$$

309*. Два тела начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy , угол между которыми равен 90° . Первое тело движется со скоростью v_1 по прямой Ox от точки A до точки O , находящейся на расстоянии a от точки A . Второе тело движется со скоростью v_2 по прямой Oy от точки B до точки O , находящейся на расстоянии b от точки B . Найдите наименьшее расстояние между этими телами во время движения.

310*. Постройте график функции:

а) $y = |x^2 + x - 2|$;

г) $y = (x-1)|x-2|$;

б) $y = x^2 - 2|x| + 1$;

д) $y = |4x^2 - 1| - 3x$;

в) $y = (x-1)(2-|x|)$;

е) $y = x + x\sqrt{(x-1)^2}$.

311*. На рисунке 61 изображены четыре параболы. Найдите, какими формулами можно задать функции, графиками которых являются эти параболы.

312*. Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - |5x| + 6|$;

б) $y = x^2 + x\sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}$;

в) $y = 2x^2 - \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}$.

313*. Постройте график функции:

а) $y = (x+1)(|x|-1)$;

б) $y = |x-1|(|x|-1)$;

в) $y = |x-1| \cdot |x+2|$;

г) $y = \frac{|x-2|}{x-2} + 2x$;

д) $y = \frac{x^3}{|x^3|} - x^2$;

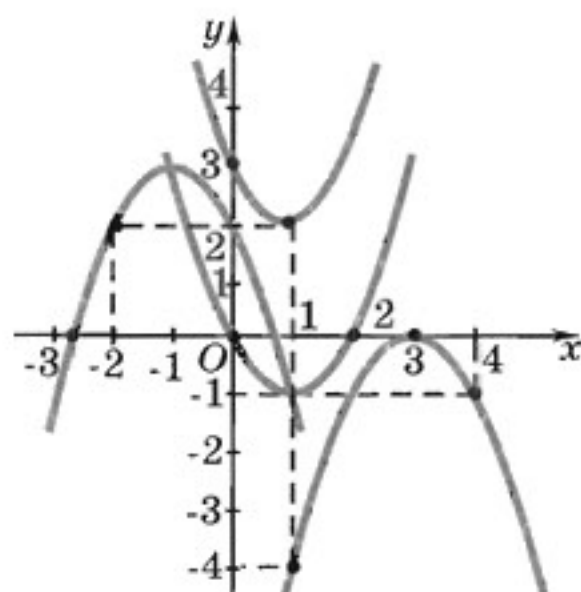


Рис. 61

е) $y = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| = 1; \\ |x|, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$

ж) $y = \begin{cases} 0,5x - 1, & \text{если } x > 3; \\ 0, & \text{если } |x| < 3; \\ -(x+3)^2, & \text{если } x \leq -3. \end{cases}$

314*. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{4} + 1 - \frac{4}{x} = 0$; в) $x(x-1)(x+2) = 1-x$;

б) $\frac{x^2}{5} - 2 + \frac{5}{x^2} = 0$; г) $x(x+1)(x-2) = 2-x$.

315*. Решите уравнение $2\sqrt{x} = x^2 - x - 2$.

Решение. Рассмотрев рисунок 62, на котором построены графики функций $y = f_1(x) = 2\sqrt{x}$ и $y = f_2(x) = x^2 - x - 2$, видим, что уравнение $2\sqrt{x} = x^2 - x - 2$ имеет только один корень $x_0 \approx 2,9$.

316*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + 1 = x(x+2), \\ |x| \cdot y = 1. \end{cases}$$

Решение. Для решения системы построим графики функций $y = x^2 + 2x - 1$ и $y = \frac{1}{|x|}$. Эти графики имеют две точки пересечения (рис. 63), т. е. система обладает двумя реше-

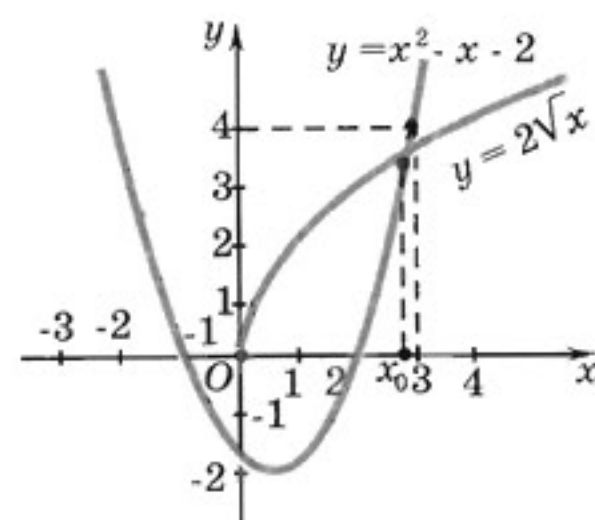


Рис. 62

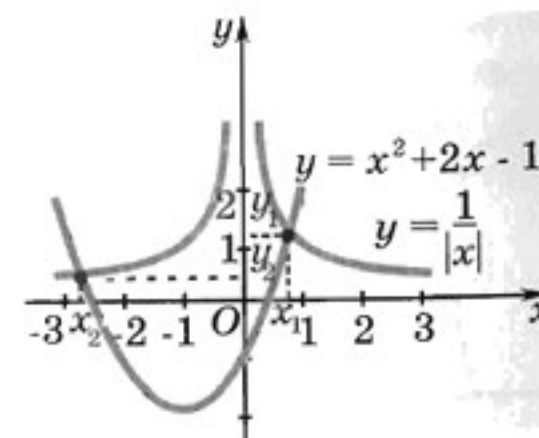


Рис. 63

ниями, которые находятся приблизительно: $x_1 \approx 0,8$, $y_1 \approx 1,2$; $x_2 \approx -2,6$, $y_2 \approx 0,4$.

317. Найдите приблизительно координаты точек пересечения графиков:

- а) $y = 2x^2$ и $y = 3$; в) $y = 3x$ и $y = -2x^2 + 1$;
б) $y = x^2 - 1$ и $y = -\sqrt{x}$; г*) $y = 2x^2 - 1$ и $y = -x + x^0$.

318. а) Запишите уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку $(-1; 6)$, а ее вершиной является точка $(1; 2)$.

б) Запишите уравнение параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $x = -1$ и $x = 3$, а ось ординат в точке $y = 2$.

319. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на промежутке:

- а) $0 \leq x \leq 5$; б) $-5 \leq x \leq 0$.

320. 1) Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{x^0 + x^2}$; б) $y = \sqrt{4 + x^2}$.

2) В каких промежутках возрастает и в каких убывает функция:

- а) $y = x^2 + 2x - 15$; б) $y = -x^2 + 6x - 8$?

Найдите наименьшее или наибольшее значение этой функции.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. Графики каких из указанных функций изображены на

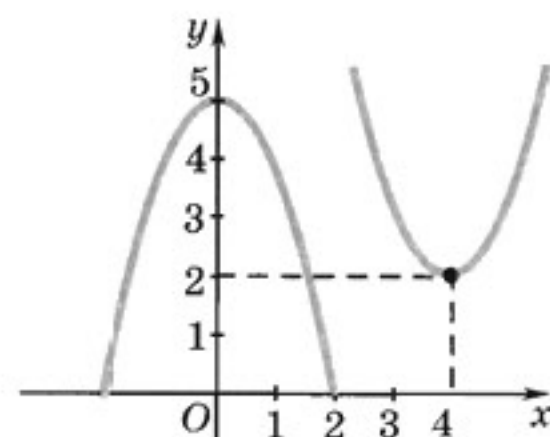


Рис. 64

рисунке 64:

- а) $y = x^2 - 5$;
б) $y = (x - 4)^2 + 2$;
в) $y = (x + 2)^2 + 4$;
г) $y = -x^2 + 5$?

2. Постройте график функции $y = 2(x + 1,5)^2 - 2,5$. По графику укажите значения x , при которых функция принимает:

а) положительные; б) отрицательные значения.

3. Найдите нули функции $y = 0,5x^2 - x - 4$, промежутки возрастания и убывания. Постройте график этой функции.

4. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола $y = \frac{1}{3}x^2$ и прямая $y = 6x - 15$. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

5. Сумма двух положительных чисел равна 16. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

Вариант 2*

1. Постройте в одной системе координат графики функций $y = -x^2$, $y = -x^2 + 4$, $y = -(x + 4)^2$.

2. Найдите нули функции $y = x^2 - 7x - 18$.

3. При каком значении b функция $y = x^2 + bx - 2$ убывает на промежутке $(-\infty; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$?

4. Постройте график функции, заданной формулой $f(x) = x^2 - 6x + c$, если известно, что ее наименьшее значение равно -1 . Укажите значения x , при которых $f(x) < 0$, $f(x) > 0$.

5. Найдите такое значение a , при котором отрезок прямой $x = a$, концы которого лежат на линиях $y = 2x^2$ и $y = -(x + 1)^2$, имеет наименьшую длину.

§ 7. Упражнения для повторения курса алгебры

Предлагаемые упражнения направлены на обобщение ваших алгебраических знаний, закрепление и развитие практических умений. Многие из этих упражнений — комбинированные: для их решения вы сможете осуществить разные подходы и комплексно использовать накопленные знания по разным разделам курсов алгебры (и геометрии) VII — IX классов, а также курсов математики V — VI классов.

321. Вычислите значение выражения:

- а) $(16 - 3\frac{3}{16})4 - 0,4 \cdot 0,75$;
б) $(47,2 : 12\frac{3}{7} \cdot 20 : 6\frac{2}{3}) - 1\frac{35}{36}$;

$$в) 14\frac{24}{29} - \left(49\frac{1}{3} : 16 - 14 : 8\frac{1}{6}\right);$$

$$г) \frac{33,3 \cdot (10 - 8,5)}{(3,5 - 2\frac{13}{20}) : \frac{1}{4} + 0,4};$$

$$д) 2,(6) \cdot \frac{5,7 - 0,03 \cdot 0,045}{\frac{1}{12} - 30,75 : 3\frac{1}{6}}.$$

322. Постройте график функции:

а) $y = kx - 4$, которому принадлежит точка $M(5; 6)$;

б) $y = -2x + b$, которому принадлежит точка $P(-1; 0)$.

323. Докажите, что графики функций $y = kx + b$ и $y = -kx + b = 0$, $k \neq 0$, симметричны относительно оси ординат.

324*. Решите уравнение:

$$а) |x| + |x + 1| = 3; \quad б) |x| + |x + 1| = 3^{-1}.$$

325. Если из числа 16 вычесть некоторое число, то получится число, равное 0,6 их суммы. Что это за число?

326. Двое рабочих выполнили некоторое задание за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый выполнил бы все задание, если известно, что за первые 7 дней они совместно выполнили 80 % всего задания?

327*. 60 деталей один рабочий изготавливает на 3 ч быстрее другого. За сколько часов другой рабочий изготавливает 90 деталей, если совместно они изготавливают за один час 30 деталей?

328*. Решите уравнение $x^4 - 2x^2 - 0,4x + 0,4 = 0$.

Решение. Это уравнение можно свести к системе, состоящей из уравнения $y = x^2$ и уравнения некоторой окружности:

$$\begin{aligned} (x^4 - 3x^2) + (x^2 - 0,4x + 0,3) &= 0, \\ (x^2 - 1,5)^2 + (x - 0,2)^2 &= 1,89. \end{aligned}$$

Обозначая x^2 через y , сведем это уравнение к системе

$$\begin{cases} y = x^2, \\ (x - 0,2)^2 + (y - 1,5)^2 = 1,89. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения (рис. 65) является окружность радиуса $\sqrt{1,89} \approx 1,37$ с центром в точке $(0,2; 1,5)$. Корни

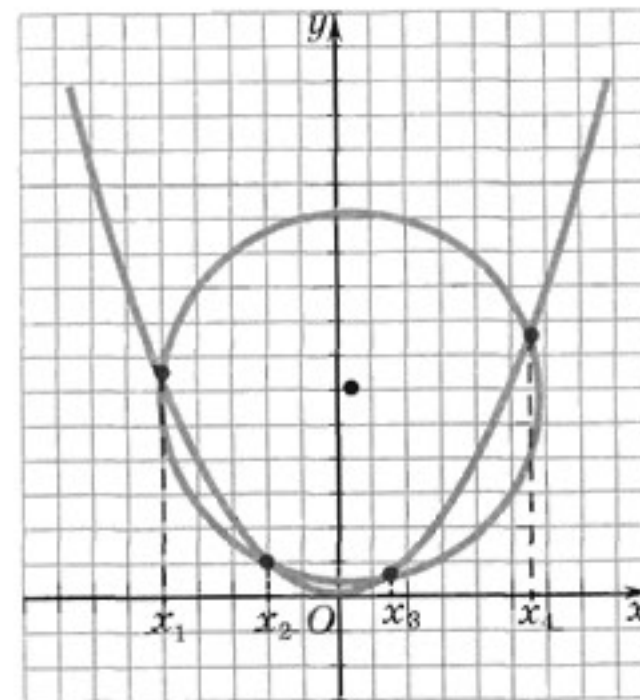


Рис. 65

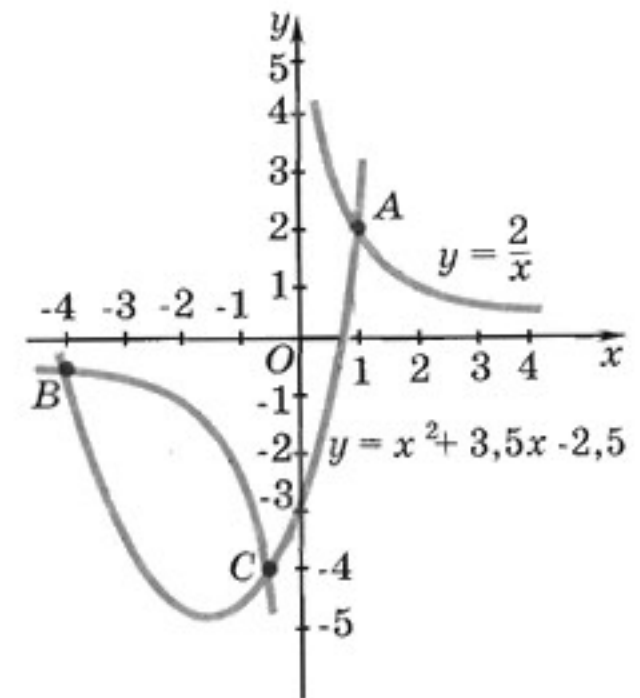


Рис. 66

данного уравнения определяются теперь графически как абсциссы четырех точек пересечения этой окружности с параболой $y = x^2$: $x_1 \approx -1,2$; $x_2 \approx -0,7$; $x_3 \approx 0,4$; $x_4 \approx 1,4$.

Ответ: $\approx -1,2$; $\approx -0,7$; $\approx 0,4$; $\approx 1,4$.

329*. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 2, \\ 2y = 2x^2 + 7y - 5. \end{cases}$

Решение. График первого уравнения системы — гипербола $y = \frac{2}{x}$ (рис. 66). График второго — парабола $y = x^2 + 3,5x - 2,5$. Эти графики пересекаются в трех точках: $A(1; 2)$, $B(-0,5; -4)$, $C(-0,5; -4)$.

Ответ: $(1; 2)$, $(-0,5; -4)$, $(-0,5; -4)$.

330. Установите, возрастает ли при $x \geq 1$ функция $f(x)$:

$$а) f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}; \quad б*) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

331. Известно, что график функции $y = kx - 2$ проходит через точку: а) $(12; 10)$; б) $(-5; 13)$. Найдите значение k и установите, какой является эта функция: возрастающей или убывающей?

332. Известно, что графику функции $y = kx + b$ принадлежат точки: а) $(-1; -15)$ и $(2; 7)$; б) $(-3; 10)$ и $(17; 111)$. Найдите значения k и b и промежутки знакопостоянства функции.

333*. Найдите площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = 1,5 - 0,5x$ и $y = |x|$.

334*. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$, где $x \in [4; 10]$;

б) $y = \frac{x-4}{\sqrt{(x-2)^2}}$; в) $y = x^2 - x - x^0$.

335*. Функции называются *тождественно равными* на множестве M , если они определены на этом множестве и для каждого значения аргумента, принадлежащего M , равны соответствующие значения этих функций. Например, нетрудно установить, что функции $y = \sqrt{x^2}$ и $y = |x|$ тождественно равны на множестве R .

Приведите пример функций, тождественно равных:

- а) на множестве всех отрицательных чисел;
- б) на промежутке $(5; +\infty)$;
- в) на множестве трех каких-либо действительных чисел.

336*. Постройте график уравнения $x + y = xy$.

337*. Из квадрата со стороной 10 см вырезали прямоугольник со сторонами 8 см и x см. Обозначив площадь оставшейся части квадрата (в квадратных сантиметрах) буквой y , выразите зависимость y от x формулой. Найдите: а) значение y , если $x = 2,5; 4$; б) значение x , если $y = 20$; 36.

Является ли эта зависимость функцией? Если является, то укажите ее область определения и множество значений.

338. Пусть t — время движения велосипедиста (в часах), s — пройденный им путь (в километрах). Найдите зависимость пути, пройденного велосипедистом, от времени, если известно, что велосипедист движется со скоростью 15 км/ч.

339. Книга стоит 120 р. Выразите формулой зависимость между купленным количеством (n) данных книг и уплаченной суммой (y), выраженной в рублях.

340. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 8x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 3y = 9, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x = 8 - y, \\ 14x + 7y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 8x = 4 + 2y. \end{cases}$

341. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = 2y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = (x + 4)^2 + (y - 8)^2, \\ x + y = 35; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{6x}{y} + \frac{6y}{x} = 13, \\ 12x^{-1} + 12y^{-1} = 5. \end{cases}$

342*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3x + 7y^2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + xy + y = 27, \\ xy^{-1} + yx^{-1} = 2,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133. \end{cases}$

343. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + y)^2 - 5(x + y) = -4, \\ (x - y)^2 - x + y = 2; \end{cases}$

б*) $\begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 18, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2x + 2y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y. \end{cases}$

344. Три брата получили от бабушки несколько пряников. Они их поделили по-братски. Младшему дали половину всех пряников и еще половину пряника, среднему дали половину остатка и еще половину пряника, а старшему — половину остатка и еще половину пряника. Сколько всего бабушка дала им пряников?

345. Перед началом учебного года отец купил сыновьям тетради. Старшему сыну он дал тетрадь и четверть остатка. Среднему — одну тетрадь и четверть нового остатка. Младшему — одну тетрадь и четверть очередного остатка. После этого в запасе осталось 24 тетради. Сколько было куплено тетрадей?

346*. Плащ стоил p рублей. Сначала цену плаща снизили на 30 %, а через год цену повысили на 30 %. Сколько стал стоить плащ?

347. В результате мер по экономии электроэнергии в первый месяц сократили ее расход на 20 %, во второй — на 10 %, а в третий — на 10 %. На сколько процентов в результате сократился расход электроэнергии?

348. Из металлического листа прямоугольной формы изготовили открытую сверху коробку, для этого вырезали по углам квадраты со стороной 4 см и края спаяли. Вычислите длину и ширину листа, если его периметр равен 60 см, а объем коробки — 160 см^3 .

349. Имеются два слитка из разных сплавов, каждый массой 720 г. Плотность первого слитка на 1 г/см^3 меньше плотности второго слитка. Найдите объем каждого слитка, если известно, что объем одного на 10 см^3 больше объема другого.

350*. Из ведра с бензином взяли 1 л бензина и вылили его в ведро со смазочным маслом. Затем из ведра с маслом взяли 1 л смеси и вылили ее в ведро с бензином. Чего теперь больше в этих ведрах: масла в бензине или бензина в масле?

351*. В школьной библиотеке имеется не более 5000 книг. Если их связать по 5, или по 6, или по 7, то каждый раз останется одна лишняя книга. Если их связать по 11 книг, то лишних книг не останется. Сколько книг в библиотеке?

352*. Ученики класса решили создать свою библиотеку. Каждый седьмой ученик принес 4 книги, каждый пятый — 3 книги, 60 % учеников принесли по 2 книги, остальные — по одной книге. Сколько книг в классной библиотеке?

353. Во время производственной практики 9 студентов и мастер изготовили некоторое число приборов. Каждый студент изготовил 20 приборов, а мастер — на 9 приборов больше, чем в среднем каждый из 10 членов группы. Сколько всего приборов было изготовлено?

354*. а) Три девочки — Юля, Зина и Аня — хотят поделить между собой мячик, сачок и куклу. Сколькими различными способами они могут это сделать?

Решение. Рассуждаем так. Юле можно сопоставить любой из трех предметов: мячик, сачок или куклу, т. е. имеются три возможности. После каждого из этих сопоставлений Зине можно сопоставить любой из двух оставшихся предметов. Та-

ким образом, всего возможностей сопоставления по предмету Юле и Зине $3 \cdot 2 = 6$. После выбора любого из этих шести сопоставлений Ане можно сопоставить лишь один оставшийся предмет. Итак, всего возможностей распределения предметов между девочками $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Примечание. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается символом « $n!$ » и читается «эн-факториал». Таким образом, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$. Задачи на определение числа возможных конечных множеств, которые можно составить из данных элементов, называют комбинаторными.

б) Как за три минуты поджарить с обеих сторон три ломтика хлеба, если на сковородке помещается только два ломтика и на поджаривание одной стороны затрачивается 1 мин?

в) Сколько всего прабабушек и прадедушек было у всех твоих прабабушек и прадедушек?

г) Допустим, что n разноцветных шариков распределены по двум ящикам: в первом — m шаров, во втором — k . Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами можно это сделать?

д) Сколько можно записать двузначных чисел?

355*. На плоскости отмечено несколько точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Всякие две точки соединены отрезком. Таких отрезков оказалось 190. Сколько отмечено точек на плоскости?

356*. На плоскости дано несколько пересекающихся прямых, каждые две из которых пересекаются и никакие три из них не проходят через одну точку. При пересечении прямых получилось всего 1275 точек. Сколько было прямых?

357. Павел купил 14 м ткани первого вида, второго вида 5 м и третьего 9 м, за что вместе заплатил 160 долларов. Сергей приобрел соответственно 4, 13 и 9 м таких тканей и заплатил за все 128 долларов. Федор купил по 5 м ткани каждого вида. Сколько денег уплатил Федор?

358. Два автомобиля вышли одновременно навстречу друг другу из городов M и N . При встрече оказалось, что автомобиль, вышедший из M , прошел на 15 км больше, чем тот, который вышел из N . Не изменяя скорости, они продолжили свое движение, и один прибыл в N через 50 мин после встречи, а второй — через 1 ч 52,5 мин. Определите время движения автомобилей до встречи и расстояние между городами.

359*. Числитель некоторой дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 1, то дробь станет не меньше $\frac{1}{2}$. Если числитель и знаменатель уменьшить на 1, то дробь станет не больше $\frac{6}{7}$. Найдите эту дробь.

360. Если число 1270 разделить на некоторое число, то получится частное 74 и некоторый остаток. Найдите делитель и остаток.

361*. Рыбак плыл на лодке вверх по течению реки. Ветром смахнуло в воду его шляпу, лежавшую на носу лодки. Через полчаса рыбак заметил, что шляпы нет, немедленно развернулся и поплыл вниз по течению реки. Определите скорость течения реки, если рыбак догнал шляпу на расстоянии 8 километров от того места, где она упала в воду.

362*. Грузовик отправился из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 240 км, со скоростью 40 км/ч. В это же время из B в A вышел легковой автомобиль. После встречи легковой автомобиль достиг пункта A и немедленно повернул обратно. Какова должна быть скорость легкового автомобиля, чтобы он прибыл в пункт B раньше грузовика?

363. Найдите два числа, сумма которых равна a , а произведение равно b .

364*. Две бригады должны были принять на зернохранилище по n т ржи. Первая бригада принимала в час на k т ржи больше второй и поэтому закончила работу на t ч раньше. По сколько тонн ржи принимала в час каждая бригада?

365*. В треугольнике из вершины прямого угла проведена высота, длина которой равна h . Найдите отрезки, на которые эта высота разделила гипотенузу (длина гипотенузы равна c).

366*. От вершины прямого угла одновременно отправились и двигаются по его сторонам два тела, одно со скоростью a км/ч, другое — со скоростью b км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет равно d км?

367*. Две трубы, проведенные в бассейн, имеют диаметры m и n . Найдите диаметр трубы, имеющей пропускную способность, равную сумме пропускных способностей этих труб.

368*. Поезду надо преодолеть путь a км. Если он увеличит скорость на b км/ч, то пройдет этот путь на t ч раньше. Сколько времени потребуется поезду на весь путь?

Геометрия

Глава IV



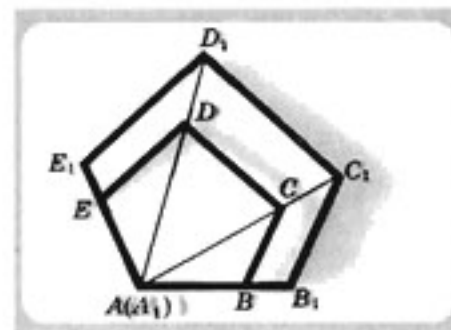
МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИХ ПЛОЩАДИ

Глава V



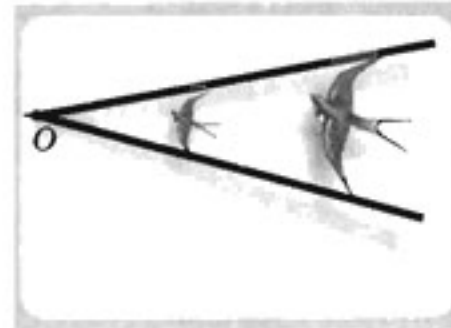
ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава VI



ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

Глава VII



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА



Глава IV

МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИХ ПЛОЩАДИ

§ 8. Многоугольники и их свойства

1. Понятие многоугольника

Прежде чем определить понятие многоугольника, рассмотрим понятие ломаной.

Ломаной $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (рис. 67, а) называется геометрическая фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ и отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, которые их соединяют. Точки A_1, A_2, \dots, A_n называются **вершинами** ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — **звеньями** ломаной. Точки A_1 и A_n — концы ломаной; A_1A_2 и A_2A_3 — соседние звенья ломаной.

Если звенья ломаной не пересекаются, то она считается **простой ломаной** (рис. 67, б).

Если концы ломаной совпадают, то она называется **замкнутой ломаной** (рис. 68, а, б).

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная вместе с ограниченной ею частью плоскости, никакие два соседних звена которой не лежат на одной прямой.

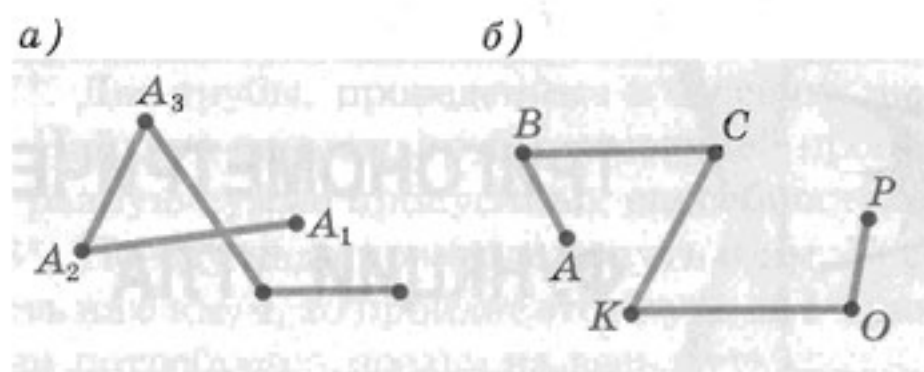


Рис. 67

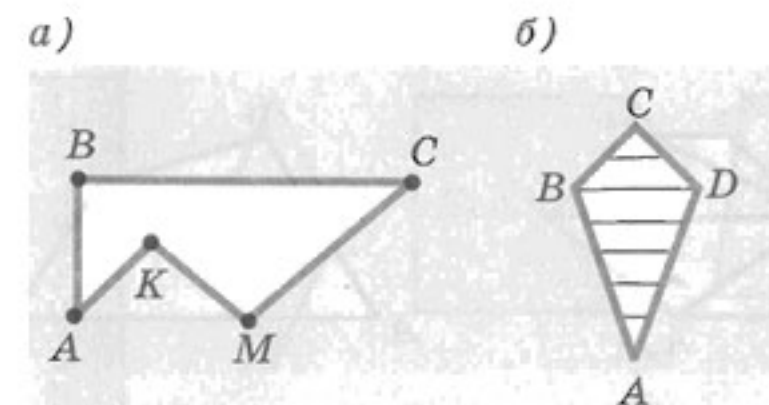


Рис. 68

Многоугольник делит плоскость на две части: *ограниченную*, или *внутреннюю*, *область многоугольника* (на рис. 68, б она заштрихована) и *внешнюю область многоугольника*.

Отметим, что плоская фигура считается *ограниченной*, если существует круг, которому принадлежат все ее точки.

На рисунках 69, а и 69, б изображены разные многоугольники. Все многоугольники на рисунке 69, а характеризуются тем, что любые две их точки можно соединить отрезком, лежащим во внутренней области многоугольника. Такие многоугольники называются **выпуклыми**. Многоугольники на рисунке 69, б являются **невыпуклыми**. (Почему?) В школе изучают, в основном, многоугольники выпуклые, поэтому слово «выпуклый» часто опускают.

Многоугольник имеет стороны, вершины и углы. Многоугольник с n вершинами называют **n -угольником**; n -угольник имеет n сторон. Две вершины многоугольника, принадлежащие одной его стороне, считаются **соседними**. Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется

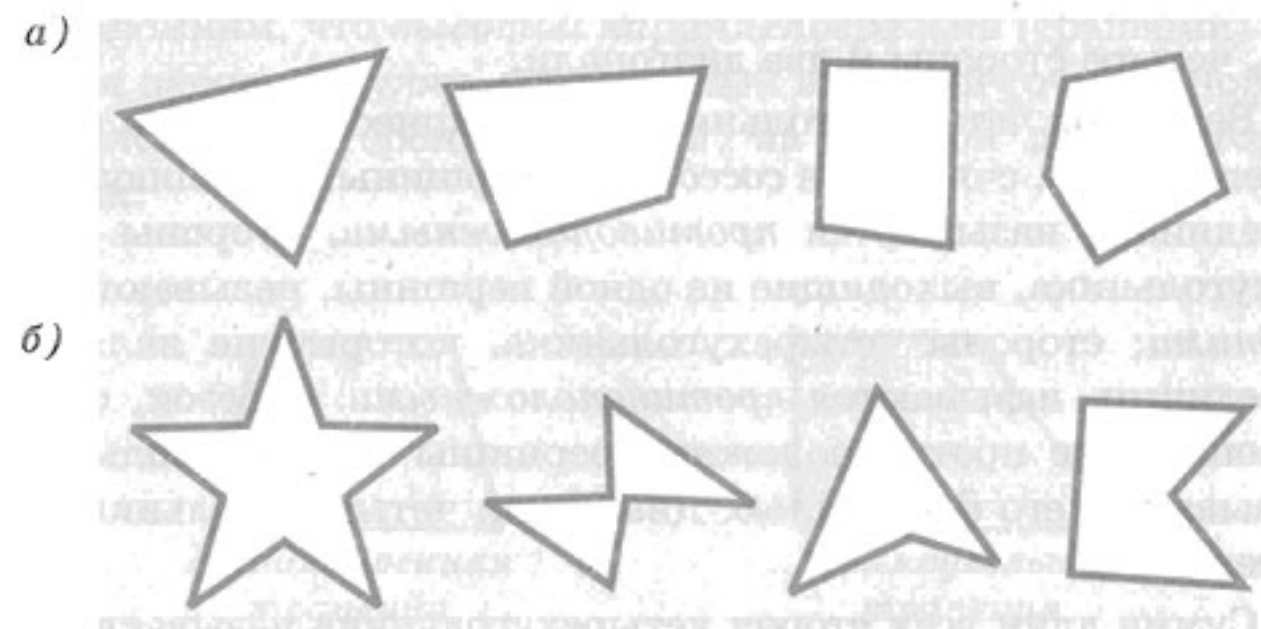


Рис. 69

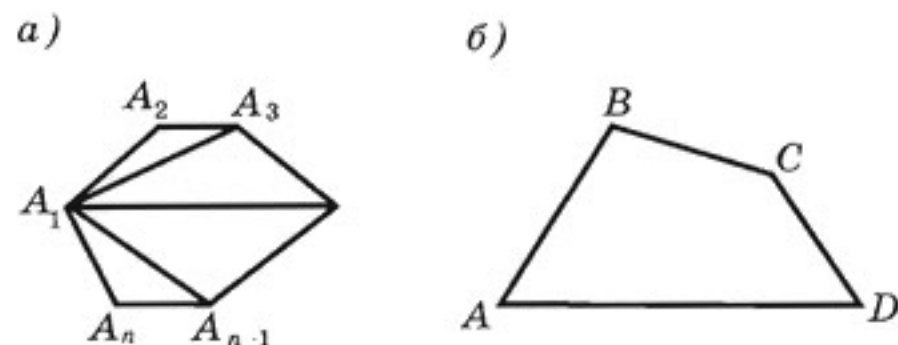


Рис. 70

его *диагональю*. Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром*.

Теорема. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Рассмотрим выпуклый n -угольник $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ (рис. 70, а). Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ являются углами этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого, соединив диагоналями вершину A_1 с другими вершинами, получим $n - 2$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n -угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180° , поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

2. Определения четырехугольников

Дать определение четырехугольника вы можете сами. Четырехугольник обозначается путем последовательного указания его вершин: $ABCD$ и $ADCB$ (см. рис. 70, б).

Отметим, что любой четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали.

Вершины четырехугольника, являющиеся концами одной из его сторон, считаются *соседними*; вершины, не являющиеся соседними, называются *противоположными*. Стороны четырехугольника, выходящие из одной вершины, называются *соседними*; стороны четырехугольника, которые не являются соседними, называются *противоположными*. Отрезок, соединяющий две противоположные вершины четырехугольника, называется его *диагональю*. Диагонали четырехугольника пересекаются.

Сумма длин всех сторон четырехугольника называется *периметром* четырехугольника.

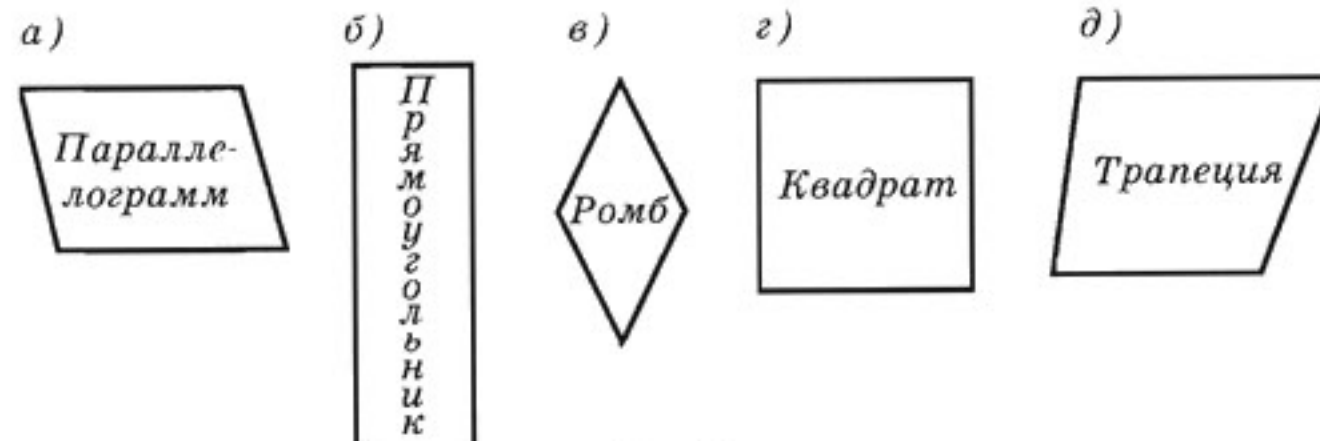


Рис. 71

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*.

Четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией* (рис. 71, а, б, в, г, д).

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами*.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 72, а). Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис. 72, б).

Напомним, что *высотой параллелограмма* (трапеции) является перпендикуляр, проведенный из любой точки одной из параллельных сторон, к прямой, на которой лежит вторая из них.

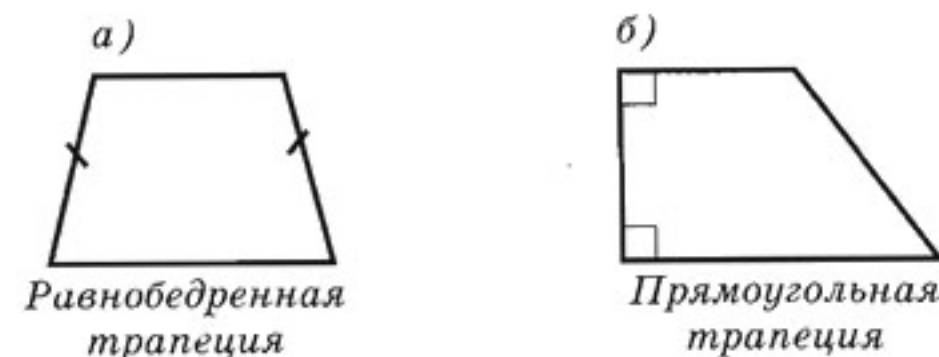


Рис. 72

3. Свойства четырехугольников

Если фигура A представляет вид фигуры B , то она обладает свойствами фигуры B . Например, квадрат является и ромбом, и прямоугольником, поэтому он имеет свойства ромба и прямоугольника.

Свойства параллелограмма

Рассмотрим сначала признаки параллелограмма.

Признак 1. Четырехугольник является параллелограммом, если у него две стороны равны и параллельны.

Доказательство. Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. Пусть по условию $BC \parallel AD$ и $BC = AD$ (рис. 73, а). Тогда $\triangle BCA = \triangle DAC$ по первому признаку равенства треугольников ($BC = AD$ по условию, CA — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и BC и секущей AC). Из равенства треугольников заключаем, что $\angle 3 = \angle 4$. Тогда прямые AB и CD параллельны по второму признаку параллельности прямых.

Имеем: у четырехугольника противоположные стороны попарно параллельны, значит, он является параллелограммом.

Признак 2. Четырехугольник является параллелограммом, если противоположные стороны его попарно равны.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$ (рис. 73, б). Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. Тогда: 1) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по третьему признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$; 2) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ по соответствующему признаку параллельности прямых; 3) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (по определению параллелограмма).

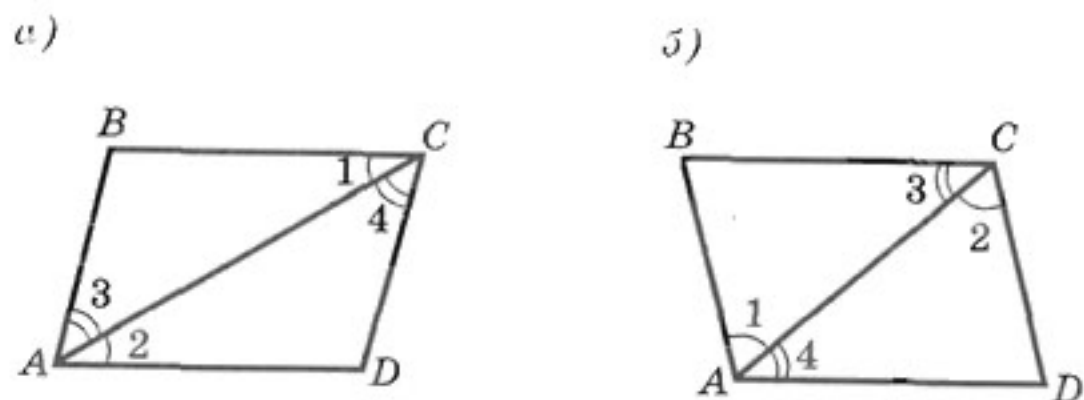


Рис. 73

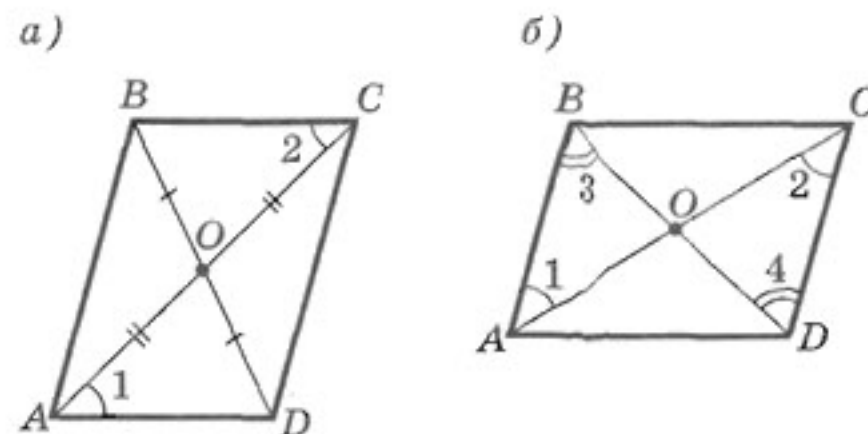


Рис. 74

Признак 3. Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом.

Доказательство (см. рис. 74, а).

Таблица 18

Утверждения	Аргументы (обоснование)
$\triangle AOD = \triangle BOC$ $BC = AD$ $\angle 1 = \angle 2$ $BC \parallel AD$ $ABCD$ — параллелограмм	По первому признаку равенства треугольников Как соответственные стороны равных треугольников Как соответственные углы равных треугольников По признаку параллельности прямых По первому признаку параллелограмма

Сформулируем и докажем некоторые свойства параллелограмма. Наиболее важными из них являются теоремы, обратные рассмотренным признакам параллелограмма.

Например, докажем, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а его диагонали пересекаются в точке O (рис. 74, б).

Тогда $AB = CD$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми); $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и соответствующих секущих). Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ (по второму признаку равенства треугольников). В равных треугольниках соответственные стороны равны, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$, что и надо было доказать.

Теоремы, обратные другим признакам параллелограмма, докажите самостоятельно, как и еще одно свойство: противоположные углы параллелограмма равны.

Свойства прямоугольника

Понятно, что свойства параллелограмма являются свойствами и прямоугольника, так как прямоугольник — вид параллелограмма.

Рассмотрим особое свойство прямоугольника: **диагонали прямоугольника равны.**

Доказательство. $\triangle ADC = \triangle DAB$ (рис. 75, а) как прямоугольные по двум катетам (AD — общий, $AB = DC$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$). Поэтому $AC = DB$.

Что касается признаков прямоугольника, то ясно, что признаки параллелограмма не являются признаками прямоугольника.

Сформулируем один из признаков прямоугольника, который выражается теоремой, обратной только что рассмотренной: **если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.**

Докажем этот признак прямоугольника разными способами. (Решение задач разными способами поучительно, хорошо способствует усвоению математических знаний и развитию математических способностей.)

I способ. Пусть у параллелограмма $ABCD$ (рис. 75, б) диагонали AC и BD равны. Как известно, диагонали параллелограм-

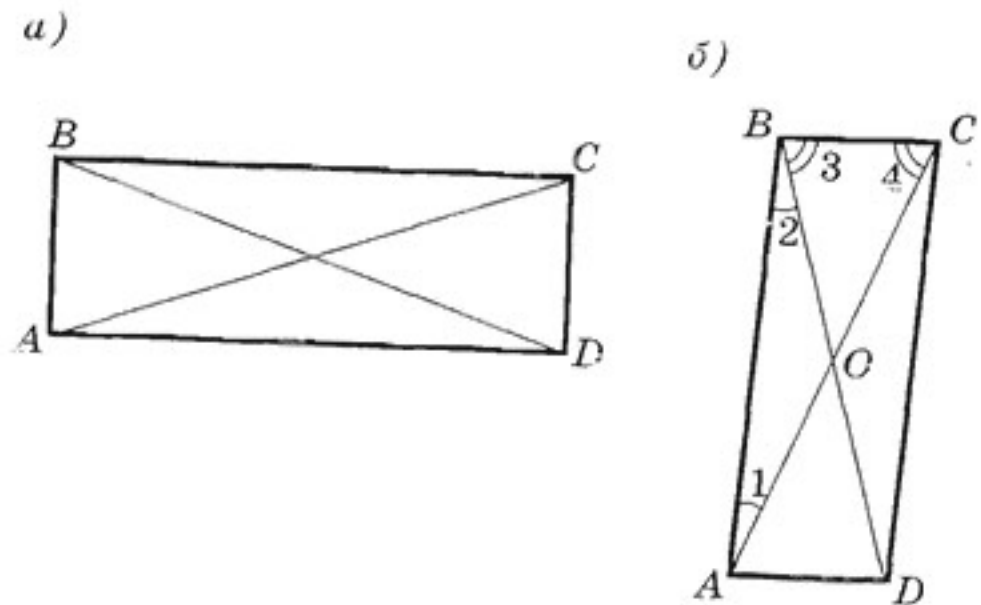


Рис. 75

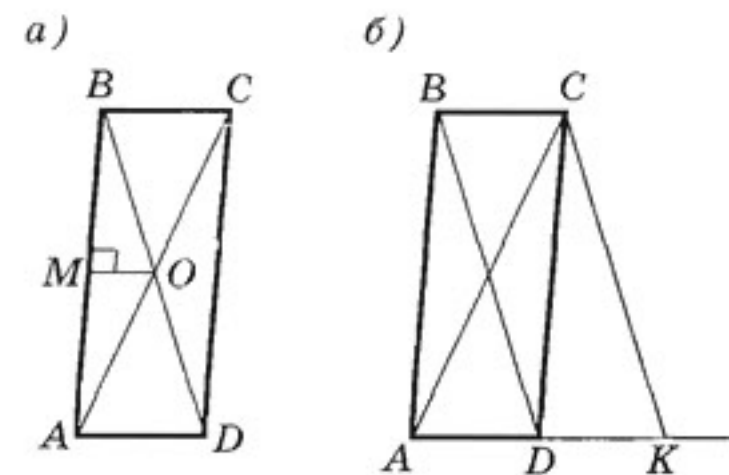


Рис. 76

ма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому с учетом условия имеем $AO = OB = OC$.

Поэтому $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ — равнобедренные; $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Поскольку $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, то, учитывая предыдущее, $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником, так как и остальные его углы прямые.

II способ. Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам и по условию $AC = BD$, то $BO = OA$ (рис. 76, а). Проведем медиану OM равнобедренного треугольника ABO . По свойству равнобедренного треугольника $OM \perp AB$. С другой стороны, OM является средней линией треугольника ABC . По свойству средней линии треугольника $OM \parallel BC$. Поскольку прямая BA перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой; поэтому $\angle ABC$ — прямой, а параллелограмм с прямым углом есть прямоугольник.

III способ. Продлим AD и проведем $CK \parallel BD$ (рис. 76, б). Тогда $DK = BC$, $AD = BC$, $CK = BD$ как противоположные стороны параллелограммов. С учетом условия $AC = BD$ имеем: $AC = CK$. В равнобедренном треугольнике CAK медиана CD служит одновременно высотой, поэтому угол ADC — прямой. Параллелограмм с прямым углом — прямоугольник.

Свойства ромба

Кроме свойств параллелограмма, которыми обладает ромб, рассмотрим особое его свойство: **диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.**

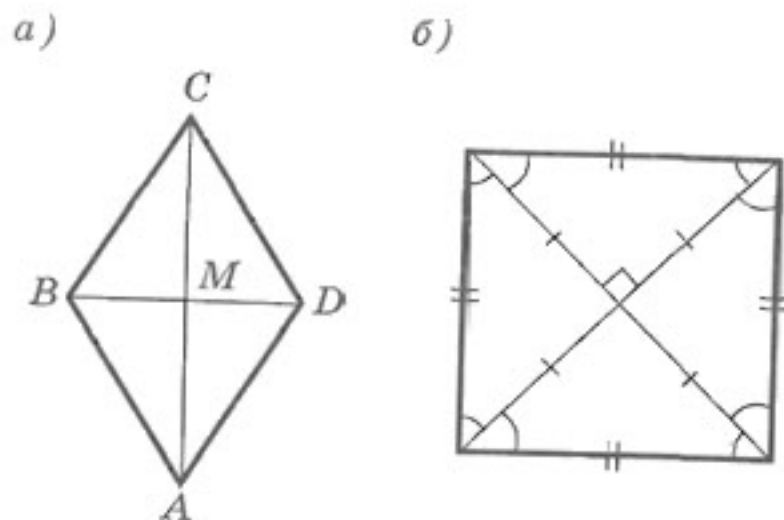


Рис. 77

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольный ромб, и в точке M пересекаются его диагонали AC и BD (рис. 77, а). Тогда по свойству параллелограмма $BM = MD$. Медиана CM равнобедренного треугольника BCD является его высотой и биссектрисой. Поэтому $AC \perp BD$ и луч CA — биссектриса $\angle BCD$.

Свойства квадрата

Квадратом можно назвать не только прямоугольник со всеми равными сторонами, но и ромб со всеми прямыми углами.

Квадрат обладает всеми свойствами и прямоугольника, и ромба. Например: все углы квадрата прямые; или диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и лежат на биссектрисах его углов (рис. 77, б).

Свойства трапеции

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция, в которой $AB \parallel DC$ и MK — средняя линия (рис. 78).

Проведем луч DK , который пересекает луч AB в точке X . Тогда $\triangle DCK = \triangle XBK$ по второму признаку равенства треугольников ($CK = KB$ по условию, $\angle CKD = \angle BKH$ как вертикальные, $\angle DCK = \angle KBX$ как накрест лежащие при параллельных прямых DC и AB и секущей CB). Отсюда $DK = KX$. Получили, что MK — средняя линия треугольника ADX , по-

Рис. 78

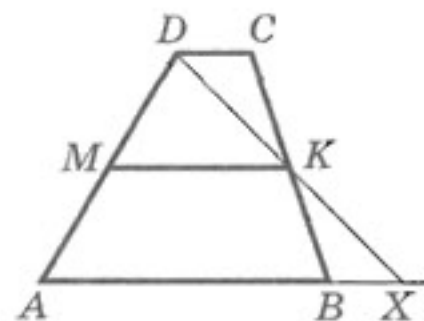
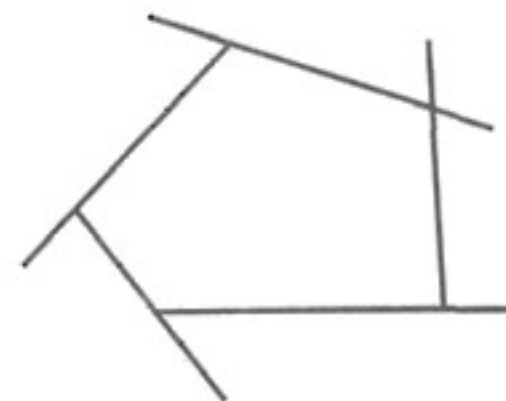


Рис. 79



этому $MK = \frac{1}{2} AX$. Заменяв BX на равный отрезок DC , получим $MK = \frac{1}{2} (AB + DC)$. По свойству средней линии треугольника $MK \parallel AX$. По признаку параллельности прямых $MK \parallel DC$. Теорема доказана.

Иным способом докажете эту теорему самостоятельно, проведя отрезок AC (см. рис. 78).

Задача 1. Доказать, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° (рис. 79).

Доказательство. Построим при каждой вершине многоугольника по одному внешнему углу (см. рис. 79).

Сумма каждого угла многоугольника и смежного с ним равна 180° . Сумма всех углов многоугольника и всех его внешних углов (по одному при вершине) равна $n \cdot 180^\circ$. Поэтому сумма внешних углов выпуклого n -угольника равна $n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ$, т. е. равна 360° .

Угол, смежный с углом многоугольника, называют его *внешним углом*.

Задача 2. Существует ли такой выпуклый многоугольник, у которого отношение суммы внутренних углов к сумме внешних, взятых по одному при каждой вершине, равно $\frac{15}{4}$?

Решение. Сумма внутренних углов многоугольника $(n - 2) \cdot 180^\circ$, а сумма внешних углов 360° . Тогда $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{15}{4}$, откуда $n = 9,5$; число сторон не может быть дробным, значит, такого многоугольника нет.

Задача 3. В квадрат $ABCD$ вписать новый квадрат так, чтобы одна из его вершин находилась в точке M , данной на стороне AB .

Построение. Отложим отрезки $CL = DN = AK = BM$ (рис. 80), и полученные точки M, L, N и K соединим. $KMLN$ — искомый квадрат.

Доказательство.

$\triangle MBL = \triangle NLC = \triangle KND = \triangle AMK$ (как прямоугольные треугольники с двумя соответственно равными катетами): $MB = LC = ND = AK$ — по построению, $BL = CN = KD = AM$, так как $AB = BC = AD = CD$. Значит, $ML = LN = KN = KM$, т. е. $KMLN$ — ромб. $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 3$ (из равенства треугольников AKM и KND), следовательно, $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$, т. е. $\angle MKN = 90^\circ$, значит, $KMLN$ — квадрат.

Исследование.

Решение задачи единственное, так как точки L, N, K можно построить единственным образом.

Напомним, что полное решение задачи на построение с помощью циркуля и линейки состоит из следующих частей:

- 1) отыскания способа ее решения (анализа);
- 2) построения фигуры по найденному в процессе анализа плану;
- 3) доказательства, что построенная фигура является искомой, т. е. удовлетворяет условию задачи;
- 4) исследования — выяснения вопроса, при каких данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

Задача 4*. Доказать, что в четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, проходящих через середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

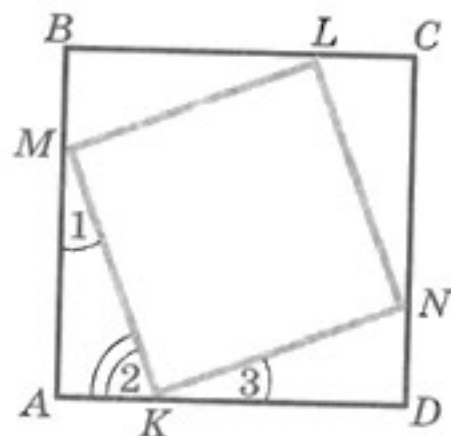


Рис. 80

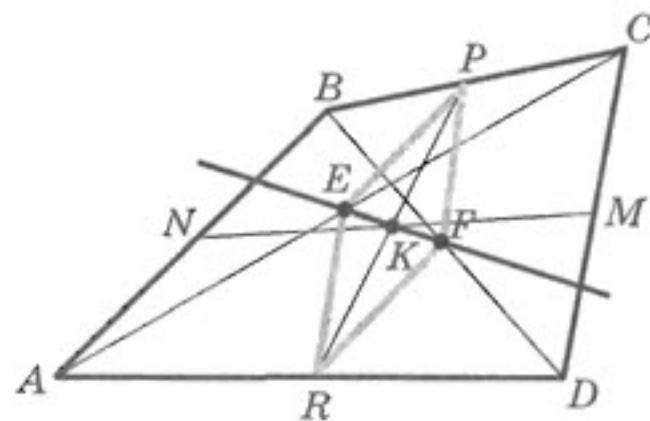


Рис. 81

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник (рис. 81) и точки N, P, M, R — середины его сторон; E — середина AC и F — середина BD ; K — точка пересечения MN и PR .

Тогда $FP \parallel DC$; $FP = 0,5DC$ (из $\triangle DBC$); $ER \parallel DC$; $ER = 0,5DC$ (из $\triangle CAD$) — по свойству средней линии треугольника.

Следовательно, $REPF$ — параллелограмм с диагональю RP ; $K \in RP$, причем $KR = KP$ (обоснуйте это сами). Отсюда заключаем, что точки E, K и F лежат на одной прямой EF .

- ?
1. Объясните, какая фигура называется многоугольником. Что такое вершины, стороны, диагонали и периметр многоугольника?
 2. Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.
 3. Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n -угольника.
 4. Начертите четырехугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.
 5. Чему равна сумма углов выпуклого четырехугольника?
 6. Что такое параллелограмм?
 7. Докажите, что у параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны.
 8. Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
 9. Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.
 10. Какой четырехугольник называется прямоугольником? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
 11. Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.
 12. Какой четырехугольник называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
 13. Докажите, что если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то он является ромбом.
 14. Что такое квадрат? Перечислите свойства квадрата.
 15. Какой четырехугольник называется трапецией?
 16. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

Задания

Устное упражнение 369.

369. Могут ли быть все углы выпуклого четырехугольника тупыми?

370. Докажите, что середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

371. Найдите точку, сумма расстояний которой от вершин выпуклого четырехугольника наименьшая.

372. Докажите, что выпуклый четырехугольник, у которого все углы равны, есть прямоугольник.

373. В параллелограмме проведена биссектриса одного из углов. На какие отрезки она разбивает большую сторону параллелограмма, если его стороны 5 и 6 см?

374*. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

375. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба, а середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

376. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей трапеции, параллельна основаниям.

377. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.

378. Докажите, что сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° .

379. Периметр параллелограмма равен P , а одна из его сторон c . Найдите длину стороны параллелограмма, соседнюю известной.

380. Найдите углы четырехугольника, если: а) они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5; б) два его угла прямые, а третий составляет 25 % величины четвертого.

381. Покажите соотношения между четырехугольниками с использованием диаграммы.

382. По данным на рисунке 82, а найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

383. По данным на рисунке 82, б найдите периметр параллелограмма.

384. По данным на рисунке 82, в найдите углы параллелограмма.

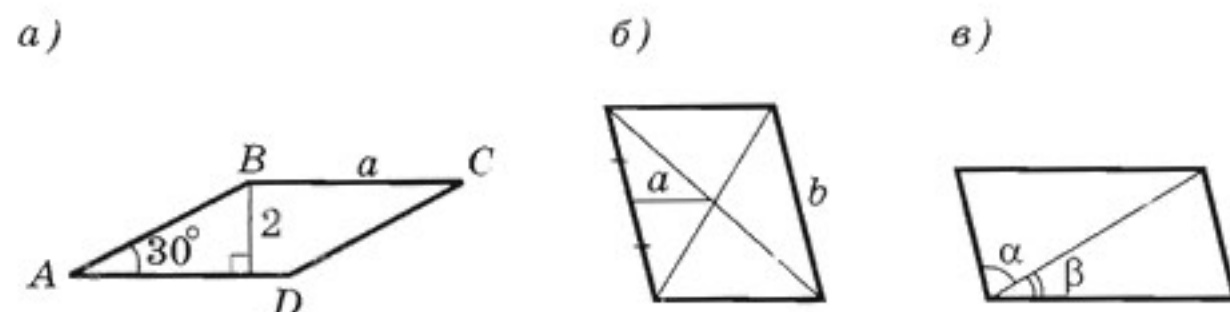


Рис. 82

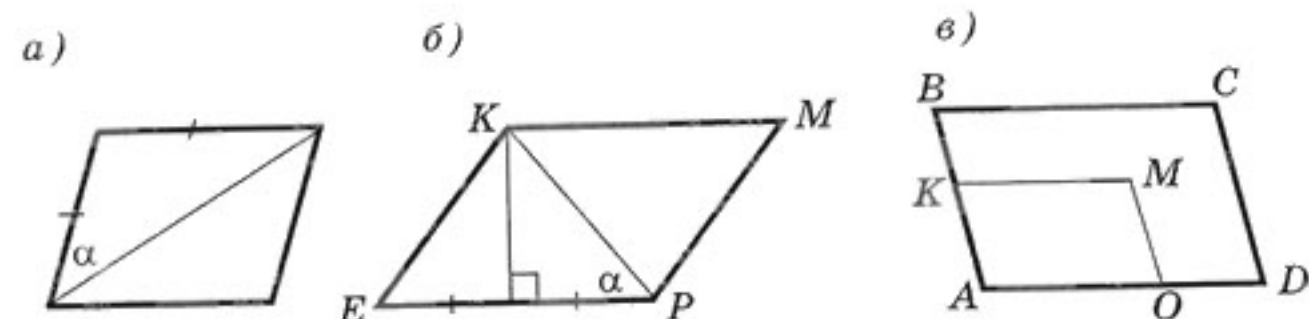


Рис. 83

385. В прямоугольнике $ABCE$ проведена диагональ AC . Известно, что угол ACB в 8 раз меньше угла CAB . Найдите угол CAB .

386. В параллелограмме $ABCM$ сторона AB равна 6 см, диагональ AC равна 5 см, а диагональ BM равна 9 см. Найдите периметр треугольника AOB , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

387. По данным на рисунке 83, а найдите углы параллелограмма.

388. По данным на рисунке 83, б найдите величины углов параллелограмма $EKMP$.

389. Дано: $ABCD$ и $AKMO$ — параллелограммы (рис. 83, в). Докажите, что: а) $KM \parallel BC$; б) $\angle M = \angle C$.

390. Сумма двух противоположных углов параллелограмма равна 94° . Найдите сумму двух других его противоположных углов.

391. Найдите углы параллелограмма, если разность двух из них равна 70° .

392. Дано: $ABKM$ и $DCKM$ — параллелограммы (рис. 84, а). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

393. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $BH \perp AC$; $DM \perp AC$ (рис. 84, б). Докажите, что: а) $BH \parallel DM$; б) $BH = DM$.

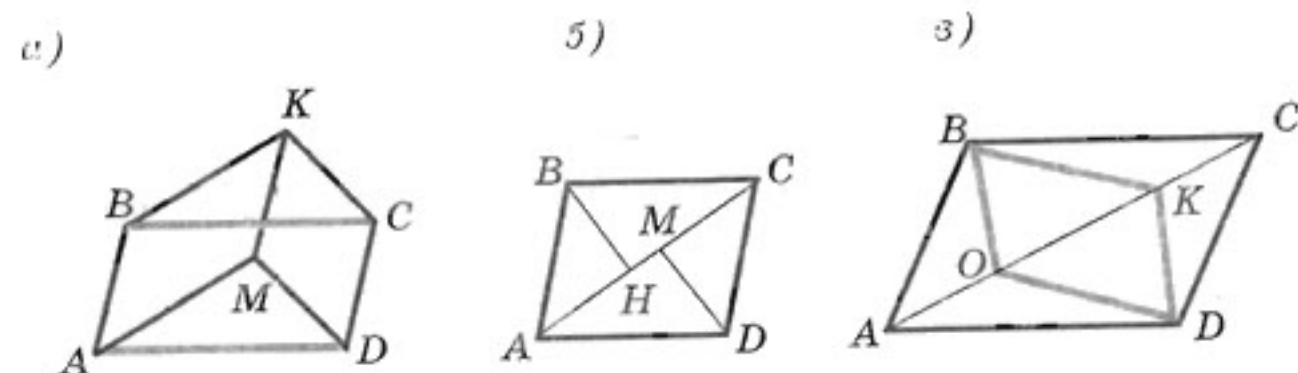


Рис. 84

394. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AO = CK$ (рис. 84, в). Докажите, что $BKDO$ — параллелограмм.

395. Постройте с помощью циркуля и линейки параллелограмм: а) по двум соседним сторонам и углу между ними; б) по данным диагоналям и углу между ними.

396. Дано: $ABCD$ — квадрат, $AO = OC$; $\angle BKO = \alpha$ (рис. 85, а). Вычислите $\angle AOK$.

397. Дано: $ABCD$ — трапеция, $CM = MB$, $CK = AK$ (рис. 85, б). Докажите, что MN — средняя линия трапеции.

398. На рисунке 85, в дана равнобедренная трапеция $ABCD$, FP — ее средняя линия, $BC = 7$, $AN = 3$. Найдите длину FP .

399. Диагонали квадрата $ABCP$ пересекаются в точке O . Вычислите углы треугольника AOB .

400. Сторона ромба образует с продолжениями его диагоналей углы, которые относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

401. В четырехугольнике диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Можно ли утверждать, что такой четырехугольник является квадратом?

402. DM и CK — биссектрисы углов D и C трапеции $ABCD$. Найдите угол между этими биссектрисами.

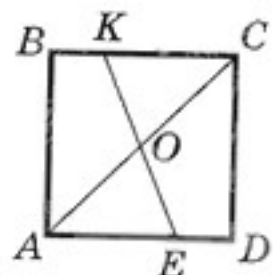
403. Основания трапеции равны s и p . Найдите длину отрезка, который соединяет середины диагоналей трапеции.

404. Средняя линия трапеции делится ее диагональю на части, равные 2 и 5. Вычислите углы трапеции, если каждая из ее боковых сторон равна 6.

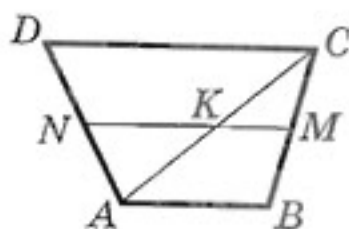
405. Одна из диагоналей трапеции делит ее среднюю линию на части 5 см и 10 см. Найдите периметр трапеции, если известно, что каждая диагональ является биссектрисой острого угла трапеции.

406. Постройте ромб по сумме его диагоналей и углу между стороной и одной из диагоналей.

а)



б)



в)

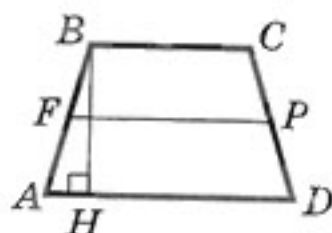


Рис. 85

407. Биссектриса одного из углов параллелограмма делит его сторону на отрезки 3 см и 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

408. Периметр трапеции равен 40, меньшее основание 10. Через конец меньшего основания проведена прямая, параллельная боковой стороне трапеции. Найдите периметр полученного треугольника.

409. Постройте прямоугольную трапецию, если даны ее большее основание и боковые стороны.

410. Заполните пропуски.

а) Если трапеция имеет ось симметрии, то ее ...

б) Оси симметрии пересекают сторону квадрата под углами ... либо ... градусов.

в) Если основания трапеции равны $\frac{1}{2}$ м и $\frac{1}{3}$ м, то ее средняя линия равна ...

г) Диагонали трапеции разделили ее среднюю линию на 3 отрезка, по 8 мм каждый, поэтому ее основания равны ... мм и ... мм.

д) Если провести два взаимно перпендикулярных диаметра окружности и последовательно соединить их концы, то получится ...

е) Окружность имеет ... осей симметрии.

411*. На рисунке 86 квадрат $ABCD$, $BM = AM$, $AN = ND$. Докажите, что $BK = KF = FD$.

412. Биссектрисы углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Докажите, что другое основание трапеции равно сумме ее боковых сторон.

413. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей равнобедренной трапеции, образует с равными сторонами равные углы.

414. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD , $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите длину AD , если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60^\circ$.

415. Угол B прямоугольного треугольника ABC равен 30° . Отрезок KE соединяет середины катета BC и гипо-

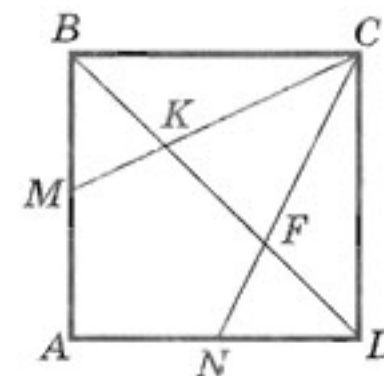


Рис. 86

тенузы AB . Выявите вид четырехугольника $ASKE$ и найдите длину отрезка KE , если гипотенуза AB равна 16 см.

416*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , равна 1 дм. Известно также, что прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

417*. Докажите, что четырехугольник $ABCD$, для которого прямые AC и BD являются осями симметрии, есть ромб.

418*. Верно ли, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, равен полусумме двух других его сторон, то противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны?

419*. Постройте прямоугольник по данной стороне и сумме диагонали с другой стороной.

Домашняя проверочная работа

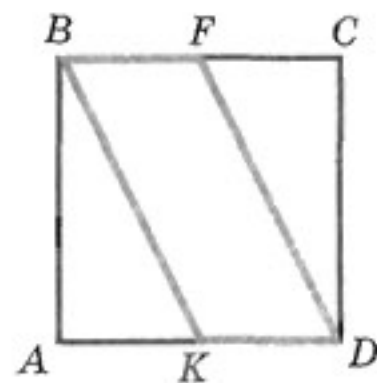


Рис. 87

1. В квадрате $ABCD$ (рис. 87) точки K и F — середины сторон AD и BC соответственно. Используя какой из признаков параллелограмма, можно доказать, что четырехугольник $BFDK$ — параллелограмм?

2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите углы треугольника COD , если $\angle ADB = 40^\circ$.

3. Постройте параллелограмм по его двум диагоналям и углу между ними.

4. Основания трапеции равны 5,4 см и $6\frac{1}{3}$ см. Найдите длину отрезка, который соединяет середины диагоналей трапеции.

5. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке M , сторону BC — в точке K ; биссектриса угла C пересекает диагональ BD в точке N , а сторону AD — в точке P .

а) Докажите, что $AKCP$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение BM к ND .

§ 9. Площади многоугольников

С площадями фигур вы знакомились в предыдущих классах (вычисляли их с помощью палетки), знаете формулы площади квадрата, прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции, круга.

Площадь фигуры — это положительная величина, числовое значение которой имеет следующие свойства.

1. Равные фигуры имеют равные площади.
2. Если фигура составлена из нескольких фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.
3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Пользуясь этими свойствами, обобщим знания о площадях многоугольников.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство. Обозначим смежные стороны a и b , а площадь прямоугольника S . Построим данный прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$ (рис. 88, а). Площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из двух квадратов и двух равных прямоугольников. При этом площадь каждого из прямоугольников равна S . По второму свойству площадей имеем $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + S + S$, откуда $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S$, $2ab = 2S$, $S = ab$, что и надо было доказать.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами $AC = a$, $BC = b$ (рис. 88, б). Построим прямоугольник $BCAD$, для которого смежными сторонами служат

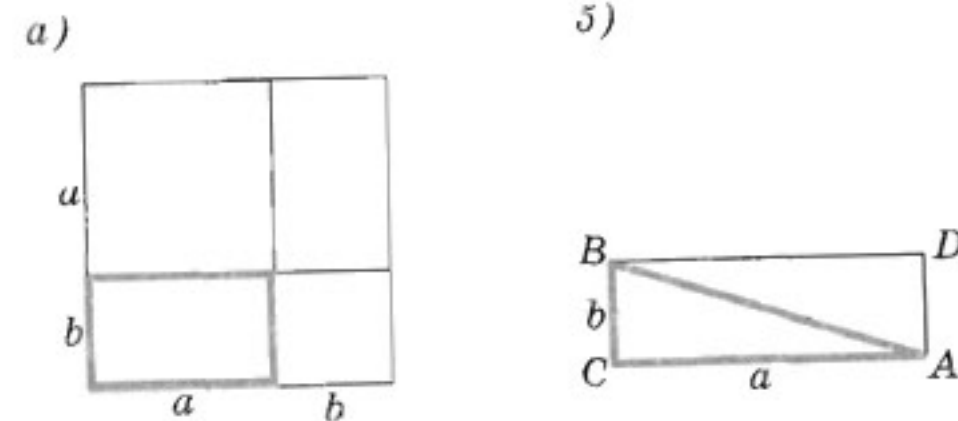


Рис. 88

катеты данного треугольника. Далее доказательство проведите самостоятельно, используя таблицу 19.

Таблица 19

Утверждения	Аргументы
1. $\triangle BAC = \triangle ABD$...
2. $S_{\triangle BAC} = S_{\triangle ABD}$...
3. $S_{ABCD} = a \cdot b$...
4. $S_{\triangle BCA} + S_{\triangle ADB} = ab$...
5. $S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} ab$...

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на проведенную к нему высоту.

Доказательство. Рассмотрим три следующих случая (рис. 89, а, б, в).

$$а) S = \frac{1}{2} a_1 h + \frac{1}{2} a_2 h = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) h = \frac{1}{2} ah.$$

$$б) S = \frac{1}{2} ah.$$

$$в) \frac{1}{2} a_1 h + S = \frac{1}{2} (a_1 + a) h; S = \frac{1}{2} (a_1 + c) h - \frac{1}{2} a_1 h = \frac{1}{2} ah.$$

Теорема доказана.

Пользуясь свойствами площадей и выведенными формулами, повторите вывод зависимости между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника, которая носит имя древнегреческого математика Пифагора (VI в. до н. э.).

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

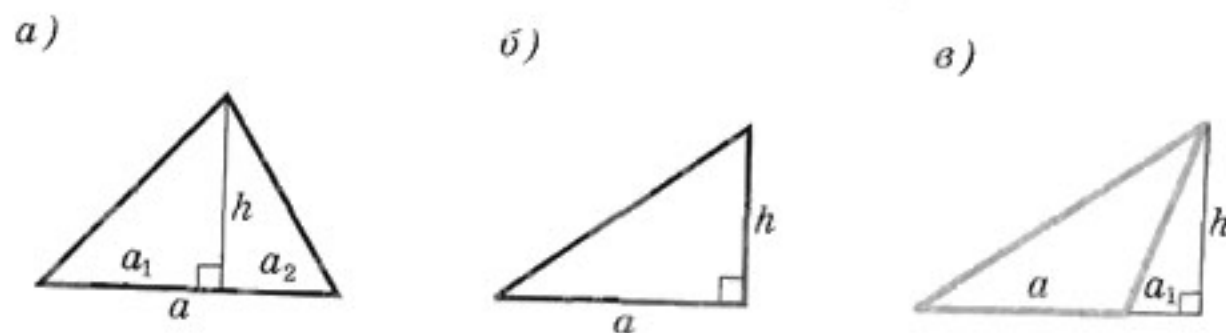


Рис. 89

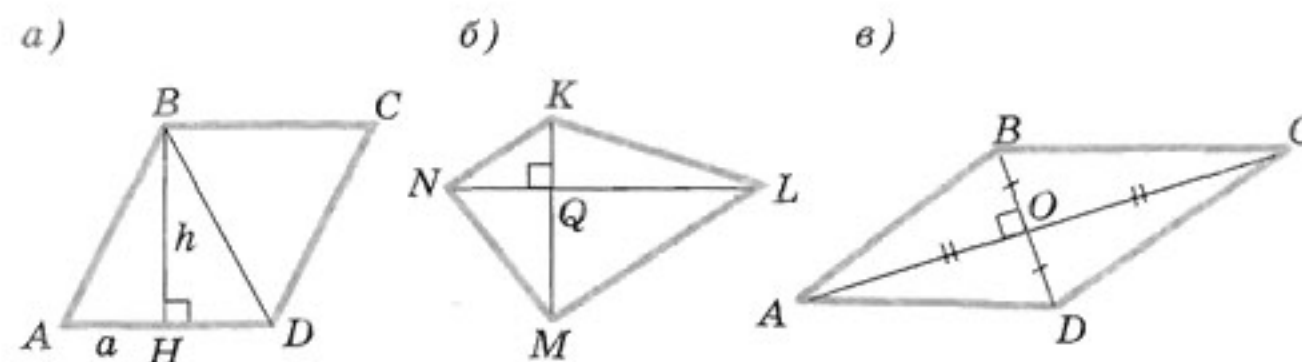


Рис. 90

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан параллелограмм ABCD (рис. 90, а) с основанием $AD = a$ и высотой $BH = h$. Докажем, что $S_{ABCD} = ah$. Для этого диагональю BD разбиваем данный параллелограмм на два равных треугольника ABD и CDB. Так как $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} ah$, то $S_{ABCD} = ah$, что и надо было доказать.

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике MNKL диагональ MK перпендикулярна диагонали NL, Q — точка пересечения диагоналей (рис. 90, б). Докажем, что

$$S_{MNKL} = \frac{1}{2} MK \cdot NL.$$

$$\begin{aligned} S_{MNKL} &= S_{\triangle MNQ} + S_{\triangle NKQ} + S_{\triangle KQL} + S_{\triangle LQM} = \\ &= \frac{1}{2} (MQ \cdot NQ + NQ \cdot QK + KQ \cdot QL + QL \cdot QM) = \\ &= \frac{1}{2} (NQ (MQ + QK) + QL (KQ + QM)) = \\ &= \frac{1}{2} (MQ + QK) (NQ + QL) = \frac{1}{2} MK \cdot NL. \end{aligned}$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (рис. 90, в). (Докажите самостоятельно.)

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

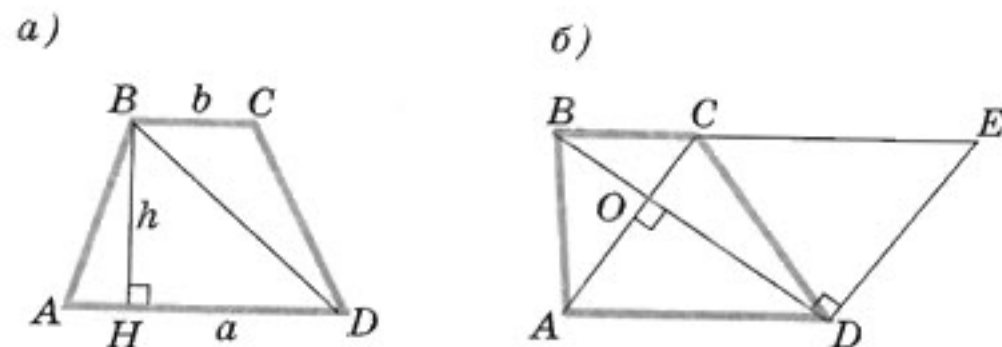


Рис. 91

Доказательство. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=a$, $BC=b$ и высотой $BH=h$ (рис. 91, а). Докажите, что $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Разбив диагональю BD трапецию на два треугольника ABD и BCD , имеем $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh = \frac{a+b}{2} \cdot h$, что и требовалось доказать.

Задача. Основания трапеции равны 3 см и 2 см. Диагонали ее равны 4 см и 3 см. Найти площадь трапеции.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ (рис. 91, б). Проведем $ED \parallel AC$ (до пересечения с продолжением BC в точке E). В треугольнике BED стороны равны 3 см, 4 см и 5 см, значит, $\angle BDE = 90^\circ$ (по теореме, обратной теореме Пифагора), поэтому и $\angle AOD = 90^\circ$ (по свойству параллельных прямых).

Поскольку диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то $S_{ABCD} = 0,5 AC \cdot BD = 6 \text{ (см}^2\text{)}$.

Ответ: 6 см^2 .

1. Что такое площадь фигуры и какие основные свойства площади вы знаете?
2. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.
4. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?
5. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.

Задания

Устные упражнения 420—421.

420. Докажите, что площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

421. Две фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади. Докажите, что равные четырехугольники равновеликие. Сформулируйте обратное утверждение и установите, справедливо ли оно.

422. Стороны прямоугольника 4 см и 15 см. Найдите стороны равновеликого ему прямоугольника, если они относятся как 3 : 5.

423. Проведите через вершину параллелограмма прямую, делящую параллелограмм на две равновеликие фигуры.

424. Дан треугольник. Проведите через его вершину прямую, которая делит треугольник на два равновеликих треугольника.

425. Проведите через вершину трапеции прямую, которая пересекает основание трапеции и делит ее на две равновеликие фигуры.

426. Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AM = MD$ (рис. 92, а). Докажите, что $S_{ABM} = S_{DCM}$.

427. По данным на рисунке 92, б вычислите площадь невыпуклого многоугольника.

428. Имеются две веревки длиной по 100 м каждая. Одной из них обнесен прямоугольный участок со стороной 20 м, а другой — квадрат. Площадь чего больше: прямоугольника или квадрата? Решите задачу, приняв длину веревки за x м, а сторону прямоугольника за $0,2x$ м.

429. Земельный участок имеет форму прямоугольника. Он отмечен на карте с масштабом 1 : 1000. Во сколько раз площадь этого участка на местности больше, чем на плане?

430. На сколько процентов изменится площадь прямоугольного треугольника ACB с катетами $AC = 4\frac{2}{3}$, $BC = 3,5$, если катет AC увеличить на 20 %, а катет BC уменьшить на 20 %?

431. Найдите площадь треугольника ABC , если его вершины имеют следующие координаты: $A(-2; 1)$, $B(2; 1)$, $C(0; -5)$.

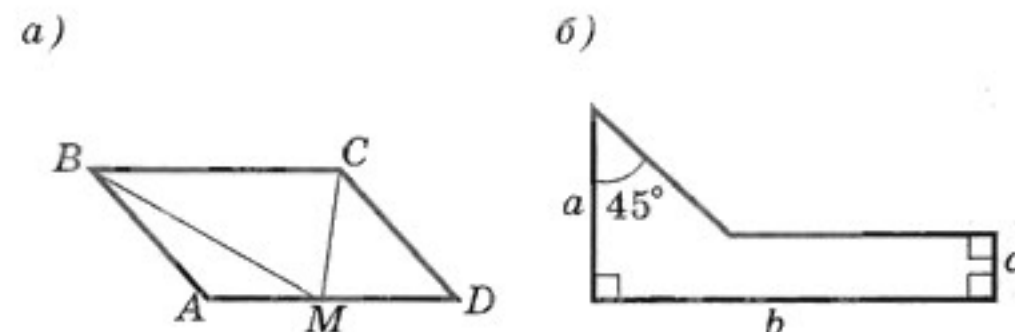


Рис. 92

432. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 24 см и боковой стороной 13 см.

433. Трапеция разрезана на параллелограмм и треугольник, площади которых равны. Найдите большее основание трапеции, если меньшее равно 3 см.

434. Площадь трапеции равна 60 дм^2 , основания 8 дм и 12 дм. Найдите высоту трапеции.

435. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E ; при этом $BE = p$, $EC = k$. Вычислите площадь прямоугольника $ABCD$.

436. Площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 6 см равна 24 см^2 . Найдите высоту параллелограмма.

437*. Дан круг радиусом 5 см. Найдите (с точностью до целых значений) сторону равновеликого ему квадрата.

438. Площади трех разных граней прямоугольного параллелепипеда равны 17 дм^2 , 27 дм^2 и 28 дм^2 . Найдите длину ребра куба, площадь поверхности которого равна площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

439. На рисунке 93 изображена прямая призма, основания которой — трапеции, и ее развертка. Пользуясь этим рисунком, найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что ее боковое ребро равно h , а периметр основания — P .

440*. Определите площадь треугольника по трем сторонам:

- а) 6, 25, 29; б) $5, 8\frac{2}{3}, 12\frac{1}{3}$.

441*. Внутри треугольника ABC найдите такую точку X , что $S_{\triangle ABX} = S_{\triangle XAC} = S_{\triangle XBC}$.

442*. В треугольнике ABC CH — высота, причем $AH = BC$. Найдите AC , если $AB = 3$, $CH = \sqrt{3}$.

443*. Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

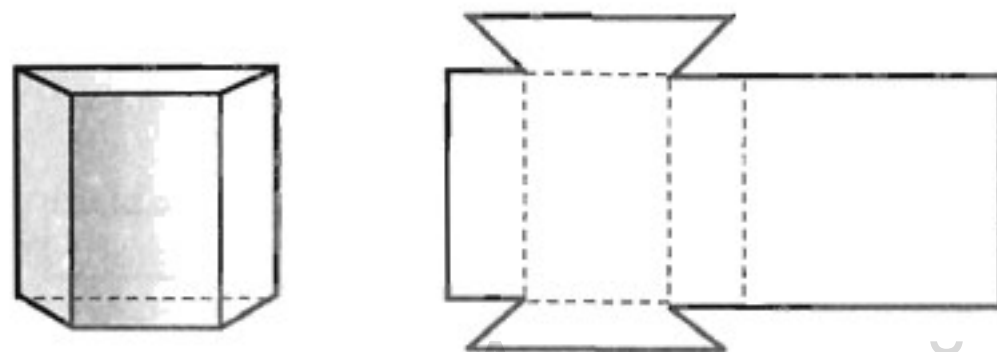


Рис. 93



Исторические сведения

Рассмотрим еще одну интересную и важную теорему, впервые доказанную независимо друг от друга венгерским математиком Бойаи и немецким ученым Гервином и относящуюся к измерению площадей многоугольников.

Если два многоугольника α и β имеют одинаковую площадь, т. е. $S(\alpha) = S(\beta)$, то многоугольник α можно разрезать на конечное число многоугольников $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, из которых можно сложить второй многоугольник β .

Так, например, на рисунке 94 треугольник ABC разрезан на части, из которых составлен прямоугольник $BCNM$.

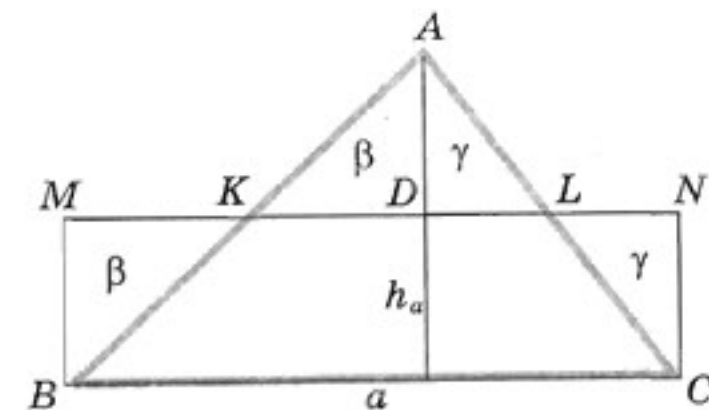


Рис. 94

Контрольные вопросы

1. Что такое многоугольник? Покажите примеры многоугольников.
2. Что называют четырехугольником?
3. Перечислите виды четырехугольников (с формулировками определений фигур).
4. Какие свойства параллелограмма вы знаете?
5. Какие свойства квадрата, прямоугольника и ромба вы знаете?
6. Какие свойства трапеции вы знаете?
7. Что такое площадь фигуры и какие основные свойства площади вы знаете?
8. Чему равна площадь квадрата? Прямоугольника? Прямоугольного треугольника? Параллелограмма? Ромба? Трапеции?
9. Какие фигуры называются равновеликими? Приведите примеры таких фигур.

Задания

444. Докажите, что диагонали трапеции в точке пересечения не делятся пополам.
445. Верно ли, что концы A и C диагонали параллелограмма $ABCD$ симметричны относительно точки пересечения диагоналей?
446. Приведите примеры четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, который имеет только одну ось симметрии.
447. Тупой угол A ромба $ABCD$ равен 140° . Найдите углы треугольника ABM , где M — точка пересечения диагоналей ромба.
448. $ABCE$ — прямоугольник, диагонали которого пересекаются в точке K . Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.
449. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$ см, а высота BH равна 8 см. Вычислите площадь треугольника.
450. В трапеции $ABCD$ одно основание в два раза больше другого, а средняя линия равна 6 дм. Найдите длины оснований трапеции.
451. Вычислите площадь ромба, периметр которого равен 20, а острый угол равен 30° .
452. Найдите площадь параллелограмма, в котором смежные стороны соответственно равны 5 и 6, а острый угол равен 30° .
453. $ABCD$ — параллелограмм, причем $AC = 8$ см, $BE = 4$ см, $BC = 5$ см. Найдите периметр треугольника BOC , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.
454. Диагональ AC ромба $ABCK$ равна его стороне. Вычислите углы треугольника ABK .
455. Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60° , если гипотенуза равна c .
456. Докажите: если в треугольнике один из углов равен 60° , то квадрат стороны, лежащей против этого угла, равен неполному квадрату разности двух его других сторон.
457. Вычислите периметр ромба с диагоналями 24 и 10 дм.
458. Вычислите площадь ромба, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см.
459. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции разбивают ее на треугольники, среди которых есть две пары равных между собой треугольников.
460. Разрежьте данный треугольник на две части, из которых можно составить параллелограмм.
461. Диагональ AC параллелограмма $ABCK$ равна 15. Середина M стороны AB соединена отрезком с вершиной K . Найдите отрезки, на которые отрезок KM делит отрезок AC .
- 462*. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 5 и 20, а боковые стороны 14 и 15.
- 463*. Найдите высоты треугольника, если его стороны равны 13, 14 и 15.
464. Вычислите площадь трапеции, средняя линия которой равна 8, а высота на треть больше ее.
465. Вычислите площадь треугольника, средняя линия которого равна 9, а перпендикулярная к ней высота треугольника на 13 % меньше этой средней линии.
466. Отрезки AB и CK пересекаются в точке M , которая является их общей серединой. Верно ли, что треугольники AMC и KMB равны?
467. Известно, что диагонали квадрата взаимно перпендикулярны. Сформулируйте обратное утверждение и установите, верно ли оно.
468. Как проверить, является ли вырезанный из бумаги четырехугольник: а) ромбом; б) прямоугольником?
469. Докажите: а) отрезок, соединяющий основания двух высот, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника, параллелен основанию этого треугольника; б) расстояния от центра симметрии ромба до всех его сторон равны между собой; в) отрезок, соединяющий любые две вершины выпуклого четырехугольника, меньше его полупериметра; г*) биссектрисы углов параллелограмма со сторонами s и p образуют при пересечении прямоугольник, диагональ которого равна $|s - p|$.
470. Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен P , а точка пересечения диагоналей находится на расстоянии d от каждой его стороны.
- 471*. Дана трапеция. Постройте равновеликий ей параллелограмм.
- Установите, какой из ответов правильный (472 — 478).

472. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если две его стороны соответственно равны 8 и 12 см.

Ответы: а) 28 см; б) 32 см; в) 40 см; г) 28 см или 32 см.

473. Параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MKPE$ имеют соответственно равные стороны ($AB = KM$, $AD = ME$). Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

Ответы: а) 45° ; б) 30° ; в) 60° ; г) 150° .

474*. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка P делит диагональ квадрата в отношении $AP : PC = 3 : 1$. Найдите угол MPD .

Ответы: а) 90° ; б) 120° ; в) 60° ; г) 75° .

475. В прямоугольном треугольнике один катет короче другого на 1 см, а гипотенуза равна 5 см. Найдите площадь треугольника.

Ответы: а) 12 см^2 ; б) 6 см^2 ; в) $7,5 \text{ см}^2$; г) 10 см^2 .

476. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ равна 13 см.

Ответы: а) $202,8 \text{ см}^2$; б) $405,8 \text{ см}^2$; в) приблизительно 2 дм^2 ; г) $35,2 \text{ см}^2$.

477. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 20 и 60 см, а боковые стороны — 37 и 13 см.

Ответы: а) 480 см^2 ; б) 960 см^2 ; в) 240 см^2 ; г) $\approx 500 \text{ см}^2$.

478*. В равнобедренном треугольнике ABC угол B при вершине равен 20° . Из вершин A и C при его основании проведены два луча, пересекающиеся в точках M и K боковые стороны треугольника, причем угол SAM равен 60° , а угол ACK равен 50° . Найдите величину угла AMK .

Ответы: а) 30° ; б) 45° ; в) 10° ; г) 20° .

479*. Через точку, находящуюся внутри данного угла, проведите прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник с наименьшей площадью.

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. В ромбе $ABCD$, где O — точка пересечения диагоналей BD и AC , угол ADC равен 110° . Найдите углы треугольника AOB .

2. Стороны параллелограмма равны 6 см и 10 см, а его высота, проведенная к меньшей из них, равна 8 см. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к другой стороне.

3. В прямоугольнике $ABCD$ AE и CF — перпендикуляры, опущенные из вершин A и C на диагональ BD . Угол между диагоналями равен 30° , $CF = 2 \text{ см}$.

а) Докажите, что $AE = CF$.

б) Найдите длину диагонали BD .

4. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка N делит сторону AD в отношении $1 : 3$, считая от точки A . Найдите площадь квадрата $ABCD$, если площадь треугольника AMN равна 1 см^2 .

5. Постройте ромб по стороне и одной из диагоналей.

Вариант 2*

1. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AL угла A делит сторону BC на отрезки $BL = 3 \text{ см}$, $LC = 5 \text{ см}$. Найдите: а) периметр параллелограмма; б) длину средней линии трапеции $ALCD$.

2. Площадь ромба равна 24 см^2 , а его периметр 20 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до его сторон.

3. Докажите, что если диагонали четырехугольника равны, то середины его сторон являются вершинами ромба.

4. Основания трапеции равны 2 и 8, а ее диагонали равны 5 и 7. Найдите площадь трапеции.

5. Даны равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и некоторый острый угол. Постройте параллелограмм с острым углом, равным данному, и имеющий ту же площадь, что и трапеция $ABCD$.

ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ



§ 10. Основные виды движений

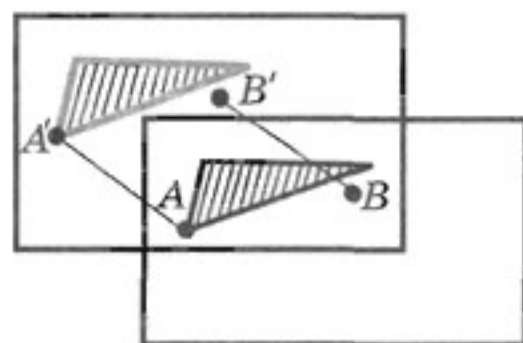
1. Понятие движения

Если каждой точке A плоскости ставится в соответствие некоторая точка A' этой плоскости, причем для различных точек A и B точки A' и B' также различны, и при этом для всякой точки A' плоскости существует соответствующая ей точка A этой плоскости, то говорят, что задано *взаимно однозначное отображение плоскости на себя* (или геометрическое преобразование плоскости) (рис. 95, а).

Движением называется геометрическое преобразование плоскости, при котором сохраняется расстояние между точками. Пусть f — движение, а A и B — произвольные точки плоскости. Если $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$, то $A'B' = AB$ (см. рис. 95, а).

Пусть фигура Φ переводится движением f в фигуру Φ' (рис. 95, б), тогда говорят, что фигура Φ' — образ фигуры Φ в этом преобразовании (записывают $\Phi' = f(\Phi)$), причем сохра-

а)



б)

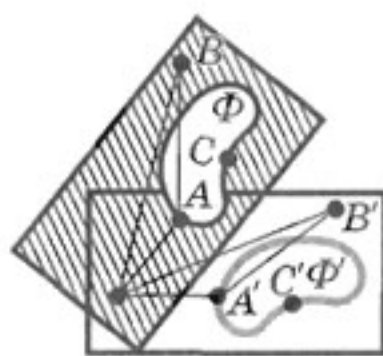


Рис. 95

няется расстояние между любыми двумя точками фигуры Φ и поставленными им в соответствие двумя точками фигуры Φ' . Основные виды движений — *осевая симметрия, центральная симметрия, параллельный перенос, поворот около точки*.

2. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Зафиксируем на плоскости точку O и возьмем произвольную точку X (рис. 96, а). На продолжении отрезка XO за точку O возьмем точку X' , такую, что отрезок OX равен отрезку OX' . Тогда точка X' называется *симметричной точке X относительно точки O* . При этом точка, симметричная точке X' , есть точка X , а точка, симметричная точке O , есть сама точка O .

а)



б)

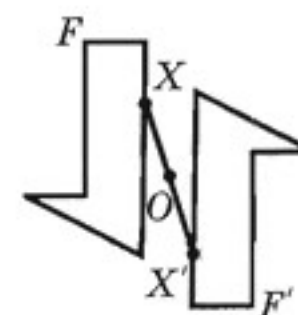


Рис. 96

Преобразование фигуры F в фигуру F' , при котором каждая ее точка X переходит в точку X' , симметричную относительно данной точки O , называется *преобразованием симметрии относительно точки O (центральной симметрией)* (рис. 96, б). При этом фигуры F и F' называются *симметричными относительно точки O* .

Если преобразование симметрии относительно точки переводит фигуру в себя, то она называется *центрально-симметричной*, а эта точка называется *центром симметрии*.

Например, параллелограмм — центрально-симметричная фигура; его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 97).

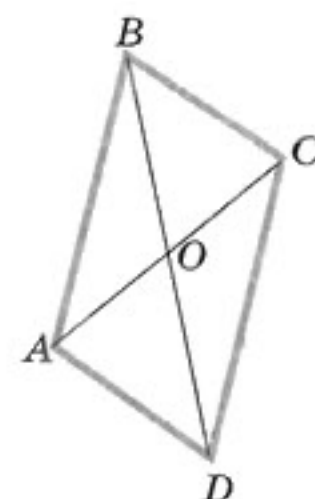


Рис. 97

3. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Зафиксируем на плоскости прямую l , возьмем произвольную точку X и построим перпендикуляр XH на прямую l . На продолжении отрезка XH за точку H отложим отрезок HX' , равный отрезку XH (рис. 98). Тогда точка X' называется симметричной точке X относительно прямой l . Если точка X лежит на прямой l , то она симметрична сама себе относительно прямой l ; точка, симметричная точке X' относительно прямой l , есть точка X .

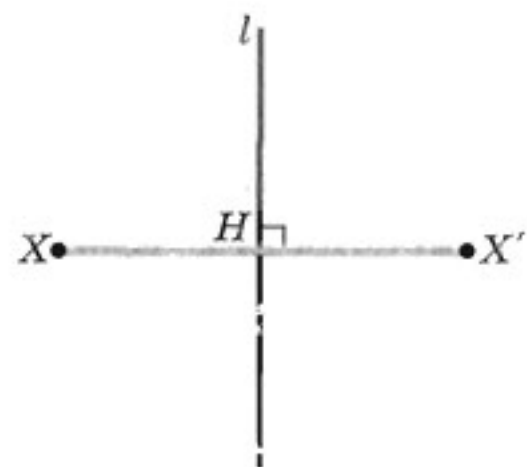


Рис. 98

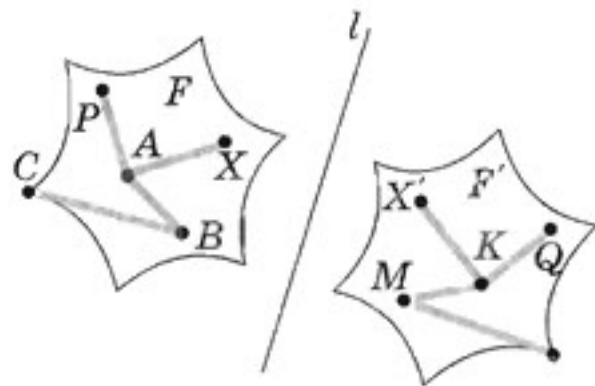


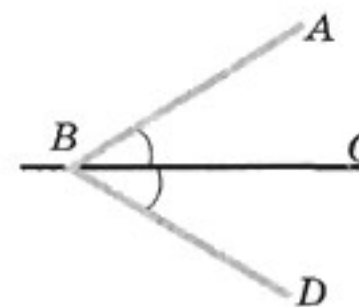
Рис. 99

Преобразование фигуры F в фигуру F' , при котором каждая ее точка X переходит в точку X' , симметричную относительно данной прямой l , называется *преобразованием симметрии относительно прямой l* (осевой симметрией), а сами фигуры F и F' называются *симметричными относительно прямой l* (рис. 99).

Если преобразование симметрии относительно прямой l переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется *симметричной относительно прямой l* , а прямая l называется *осью симметрии* фигуры F .

Например, осью симметрии угла является прямая, на которой лежит его биссектриса (рис. 100, а); осью симметрии окружности является прямая, проходящая через ее центр (рис. 100, б).

а)



б)

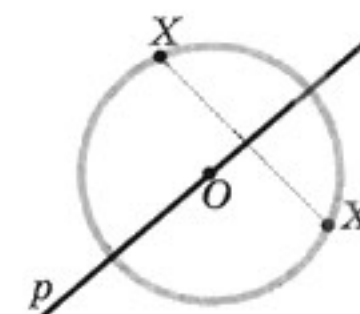


Рис. 100

4. Параллельный перенос

Возьмем на плоскости две точки A и B и проведем луч AB (рис. 101). Этот луч задает на плоскости определенное направление. Возьмем произвольную точку A' на плоскости, построим луч $A'M$, параллельный лучу AB (короче говорят: луч $A'M$ заданного направления AB), и отложим на луче $A'M$ отрезок $A'B'$, равный отрезку AB . Тогда говорят, что точка B' получена из точки A параллельным переносом точки A' в заданном направлении AB на заданное расстояние AB .

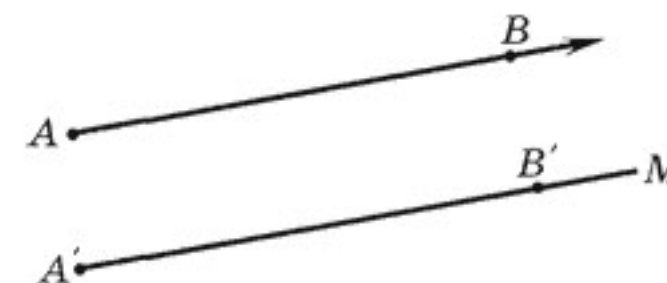


Рис. 101

Преобразование фигуры F в фигуру F' , при котором каждая ее точка X переходит в точку X' при перемещении в одном направлении на одно и то же расстояние, называется *параллельным переносом* (рис. 102).

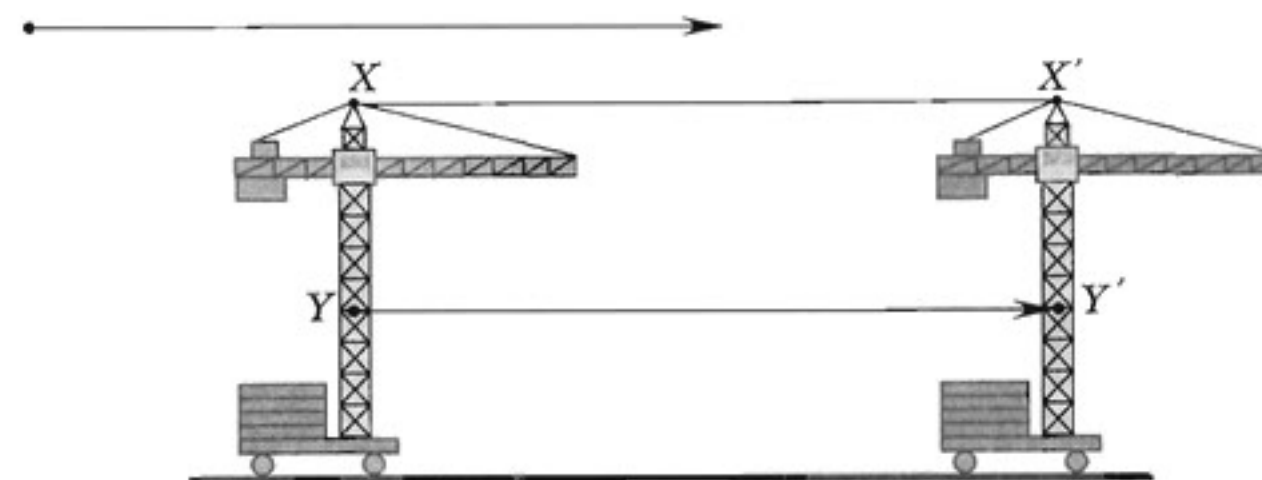


Рис. 102

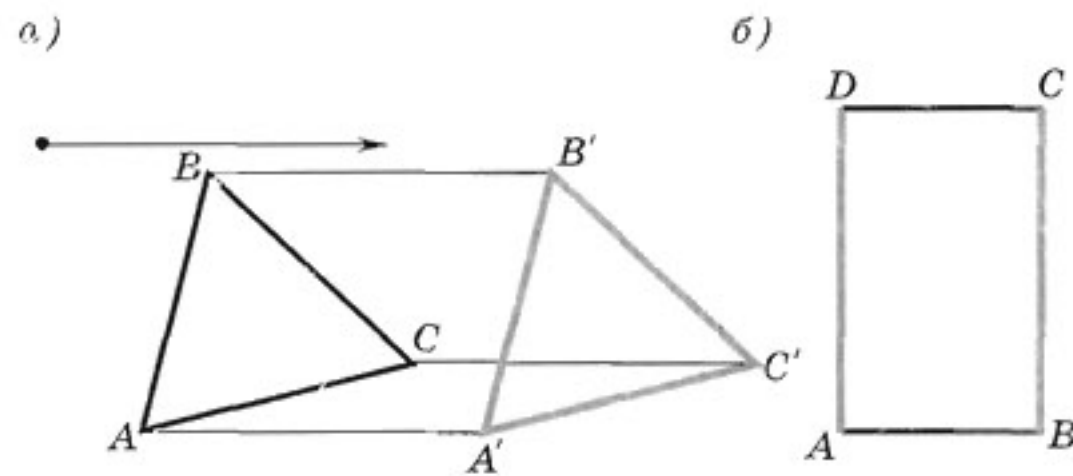


Рис. 103

Например, при параллельном переносе в заданном направлении на заданное расстояние треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$ (рис. 103, а); при параллельном переносе в направлении AD на расстояние AD сторона AB прямоугольника $ABCD$ (рис. 103, б) переходит в сторону DC .

5. Поворот около данной точки

Поворотом около данной точки O (центра поворота) называется движение, при котором каждый луч, выходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (по ходу часовой стрелки или против ее хода) (рис. 104, а).

Поворот фигуры задается указанием центра поворота O , угла поворота α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) и направления поворота (по ходу часовой стрелки или против ее хода).

Например, при повороте около точки O на 45° против хода часовой стрелки отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$ (рис. 104, б).

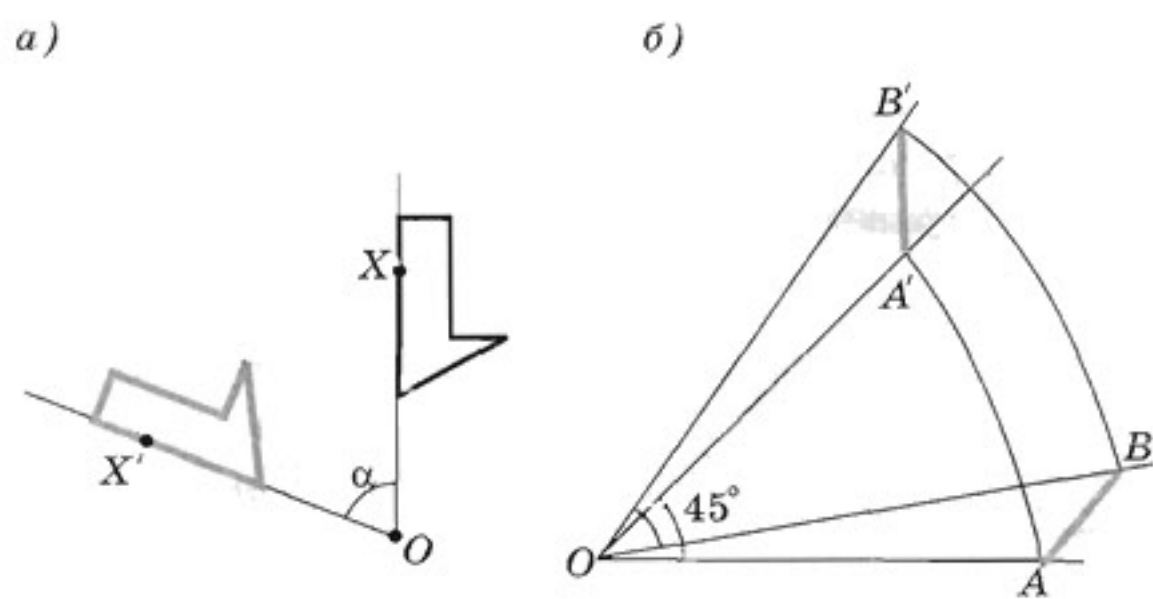


Рис. 104

6. Свойства движений

Теорема. При движении отрезок отображается на отрезок.

Доказательство. Пусть при заданном движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M' и N' (рис. 105). Докажем, что весь отрезок MN отображается на отрезок $M'N'$. Пусть P — произвольная точка отрезка MN , P' — точка, в которую отображается точка P . Тогда $MP + PN = MN$.

Так как при движении расстояния сохраняются, то

$$M'N' = MN, M'P' = MP \text{ и } N'P' = NP. \quad (1)$$

Из равенств (1) получаем, что $M'P' + P'N' = M'N'$ и, следовательно, точка P' лежит на отрезке $M'N'$ (если предположить, что это не так, то будет выполняться неравенство $M'P' + P'N' > M'N'$). Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка $M'N'$.

Нужно еще доказать, что в каждую точку P' отрезка $M'N'$ отображается какая-нибудь точка P отрезка MN . Докажем это. Пусть P' — произвольная точка отрезка $M'N'$ и точка P при заданном движении отображается в точку P' . Из соотношений (1) и равенства $M'N' = M'P' + P'N'$ следует, что $MP + PN = MN$, и, значит, точка P лежит на отрезке MN . Теорема доказана.

Следствие. При движении треугольник отображается на равный ему треугольник. (Докажите самостоятельно.)

Пользуясь доказанной теоремой, можно убедиться в том, что при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а угол — на равный ему угол.

Напомним, что в нашем курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Мы говорим, что фигура Φ равна фигуре Φ' , если фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ' . Понятие наложения относится к основным понятиям геометрии, поэтому определение наложения не дается. Под наложением фигуры Φ на фигуру Φ' мы понимаем некоторое отображение фигуры Φ на фигуру Φ' . Более того, при этом не только точки фигуры Φ , но и любая точка плоскости отображается в определенную точку плоскости, т. е. *наложение — это отображение плоскости на себя.*

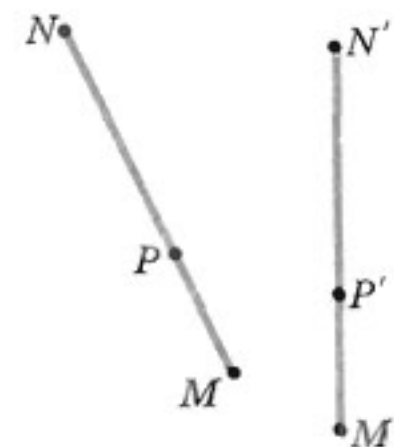


Рис. 105

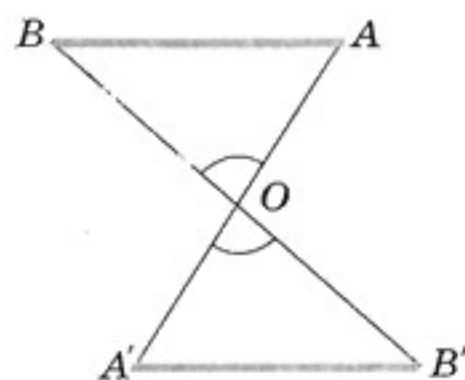


Рис. 106

Движение является наложением. При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

Задача 1. Известно, что движение отображает треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$. Как построить образ медиан треугольника ABC при этом движении? (Сделайте это самостоятельно.)

Задача 2*. Доказать, что симметрия Z относительно точки O является движением.

Доказательство. Пусть $Z(A) = A'$, $Z(B) = B'$ (рис. 106) и точки A, B, O не лежат на одной прямой. Тогда треугольники AOB и $A'O'B'$ равны по первому признаку равенства треугольников. Значит,

$$A'B = AB$$

Предположим теперь, что точки A, B, O лежат на одной прямой. Тогда в зависимости от того, лежит точка O между точками A и B или нет, имеем:

$$A_1B_1 = |OB_1 - OA_1| = |OB - OA| = AB \quad (\text{рис. 107, а})$$

или

$$A_1B_1 = OA_1 + OB_1 = OA + OB = AB \quad (\text{рис. 107, б}).$$

Следовательно, преобразование Z является движением.

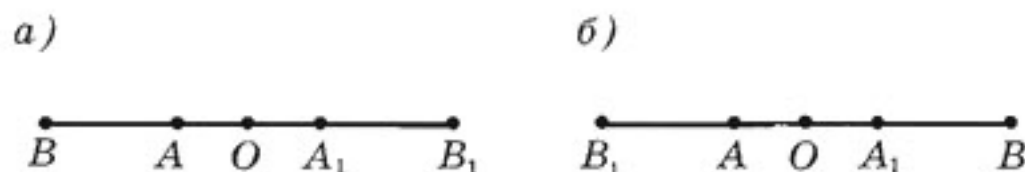


Рис. 107

Задача 3*. Доказать, что осевая симметрия S является движением.

Доказательство. Докажем, что при осевой симметрии $A'B' = AB$, где $A' = S(A)$, $B' = S(B)$.

Пусть точки A и B лежат в одной полуплоскости, ограниченной прямой a (рис. 108). Проведем $AK \perp BB'$, $A'K' \perp BB'$. Тогда $AK = A'K'$, так как длины этих отрезков равны расстоянию между параллельными прямыми AA' и BB' .

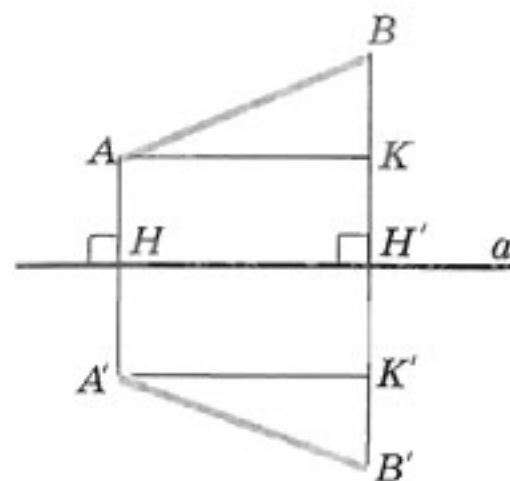


Рис. 108

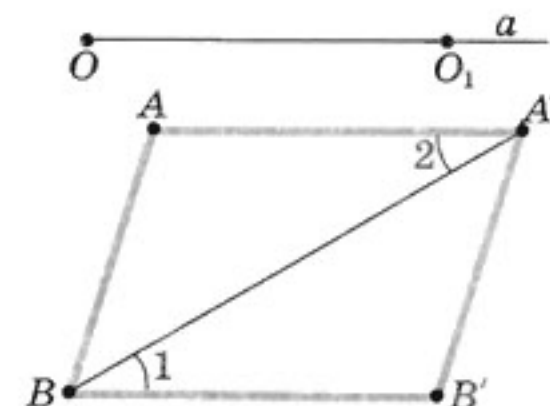


Рис. 109

Аналогично $AN = KN'$, $A'N = K'N'$. Тогда $BK = BN' - KN'$ и $B'K' = B'N' - K'N'$.

Но $BN' = N'B'$, $KN' = K'N'$, значит, $BK = B'K'$. Тогда треугольники ABK и $A'B'K'$ равны.

Таким образом, $AB = A'B'$.

Случай, когда одна из точек A и B или они обе лежат на прямой a , рассмотрите самостоятельно, как и случай, когда точки A и B лежат в разных полуплоскостях с границей a .

Итак, преобразование S — движение.

Задача 4*. Доказать, что параллельный перенос T является движением.

Доказательство. Пусть A и B — некоторые точки, не лежащие на прямой, параллельной лучу a (рис. 109).

Положим $T(A) = A'$, $T(B) = B'$. Соединим точку B с точками A, A', B' , а точку A' — с точками A и B' . Тогда в треугольнике ABA' и $A'B'B'$ имеем:

$$AA' = BB' = OO_1,$$

$A'B$ — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$.

Значит, эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Таким образом, $A'B' = AB$.

Допустим теперь, что точки A и B лежат на прямой, параллельной OO_1 (рис. 110). Тогда $AA' = BB' = OO_1$. Если одна из

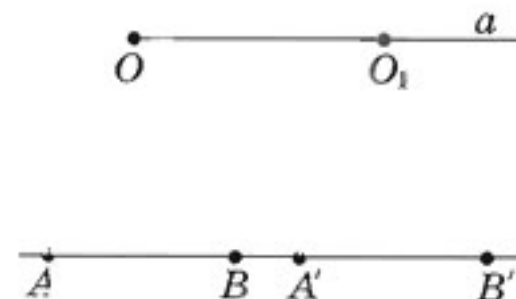


Рис. 110

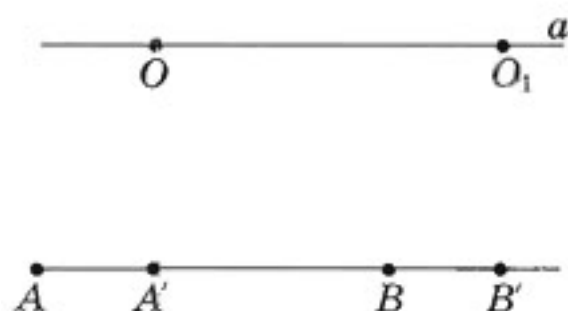


Рис. 111

точек A и B , например точка B , лежит между A и A' , то $A'B' = BB' - A'B$, $AB = AA' - A'B$, откуда $A'B' = AB$.

Если же точка B не лежит на отрезке AA' , а точка A не лежит на отрезке BB' (рис. 111), то $AB = AA' + A'B$, $A'B' = A'B + BB'$ и вновь $A'B' = AB$.

Аналогичные рассуждения проводятся также в случае, когда точки A и B лежат на прямой OO_1 . Таким образом, преобразование T является движением.

1. Объясните, что такое отображение плоскости на себя.
2. Какое отображение плоскости называется: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией?
3. Что такое движение плоскости?
4. Докажите, что осевая симметрия является движением.
5. Является ли центральная симметрия движением?
6. Докажите, что при движении отрезок отображается на отрезок.
7. Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.
8. Объясните, что такое наложение.
9. Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?
10. Какое отображение плоскости называется параллельным переносом?
11. Докажите, что параллельный перенос является движением.
12. Какое отображение плоскости называется поворотом?

Задания

Устные упражнения 480—482.

480. Докажите, что при осевой симметрии плоскости: а) прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси; б) прямая, перпендикулярная оси, отображается на себя.

481. Докажите, что при центральной симметрии плоскости: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

482. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

483. Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно центра O , если: а) точка O лежит на прямой AB ; б) точка O не лежит на прямой AB .

484. Изобразите отрезок AB и точку O вне этого отрезка. Начертите отрезок, образованный поворотом отрезка AB вокруг точки O на угол: а) 60° против хода часовой стрелки; б) 120° по ходу часовой стрелки; в) 180° .

485. Изобразите луч OA и точку A на этом луче; нарисуйте произвольный треугольник. Сделайте параллельный перенос этого треугольника вдоль луча OA на отрезок OA .

486*. Расстояние между любыми двумя точками одной фигуры меньше 10 см, а расстояние между некоторыми двумя точками другой фигуры больше 10 см. Могут ли эти фигуры быть симметричными относительно точки?

487. Точка A симметрична точке A_1 относительно оси l . Верно ли, что точка A_1 симметрична точке A относительно той же оси?

488. Четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой AC . Найдите стороны BC и AD , если $AB = 1$, $CD = 2$.

489. В какую фигуру перейдет полуплоскость при симметрии относительно: а) границы полуплоскости; б) прямой, лежащей в полуплоскости и параллельной границе этой полуплоскости?

490. При симметрии S относительно прямой, проходящей через вершину A треугольника ABC , $S(B) = C$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

491. В какую фигуру отображается полуплоскость при параллельном переносе в направлении, параллельном границе полуплоскости?

492. Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

493. Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат — на квадрат.

494. Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

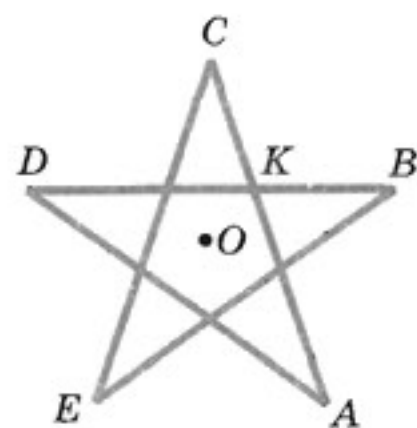


Рис. 112

495*. Фигура $ABCDE$ (рис. 112) поворотами вокруг центра O на x° , $2x^\circ$, $3x^\circ$, $4x^\circ$, $5x^\circ$ отображается на себя. Чему равен x ? Назовите образ отрезка AC при повороте на x° . Какова величина угла AKB ?

496. 1) Точка A называется *неподвижной* при движении f , если $f(A) = A$. Определите неподвижные точки, если движение f является:

а) центральной симметрией; б) поворотом; в) осевой симметрией; г) параллельным переносом.

2*) Выполняется ли переместительный закон для движений f и g , если: а) f и g — осевые симметрии? б) f — поворот, g — параллельный перенос?

497. Точка D является точкой пересечения биссектрис равнобедренного треугольника ABC . Докажите, что при повороте вокруг точки D на угол 120° треугольник ABC отображается на себя.

498. Даны равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и точка D на прямой AC такая, что точка C лежит на отрезке AD . Постройте отрезок B_1D , который получается из отрезка BC параллельным переносом, заданным вами.

499. Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол, заданный вами.

500. а) Найдите геометрическое место центров симметрии двух параллельных прямых.

б) Даны две пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, около которых можно осуществить поворот одной прямой, чтобы она совпала с другой. Определите угол поворота.

501*. Две равные окружности пересекаются. На какой угол надо повернуть одну из них около точки их пересечения, чтобы она совпала с другой окружностью?

§ 11. Применение движений к решению задач

Приведем теперь примеры задач, решение которых осуществляется методами геометрических преобразований.

Основная идея при применении этих методов заключается в удачном выборе и выполнении такого движения, которое дает блестящий результат в решении задачи.

Задача 1. Через общую точку A двух окружностей F_1 и F_2 провести прямую так, чтобы эти окружности отсекали на ней равные хорды.

Решение. Построим окружность F_3 (рис. 113), симметричную окружности F_1 относительно точки A . Тогда искомая прямая проходит через точку K пересечения окружностей F_2 и F_3 . Отрезки AM и AK равны как равноудаленные от центров равных окружностей хорды.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены серединные перпендикуляры к боковым сторонам. Доказать, что отрезки этих перпендикуляров, заключенные внутри треугольника, равны.

Доказательство. Пусть в данном треугольнике (рис. 114) KF и PE — отрезки указанных серединных перпендикуляров. При осевой симметрии относительно прямой, на которой лежит высота BH треугольника ABC , треугольник AKF переходит в треугольник CEP и соответственно отрезок

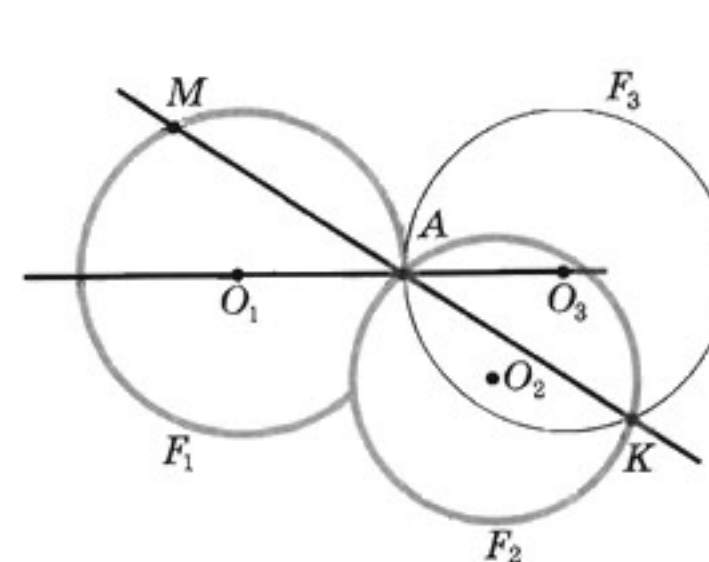


Рис. 113

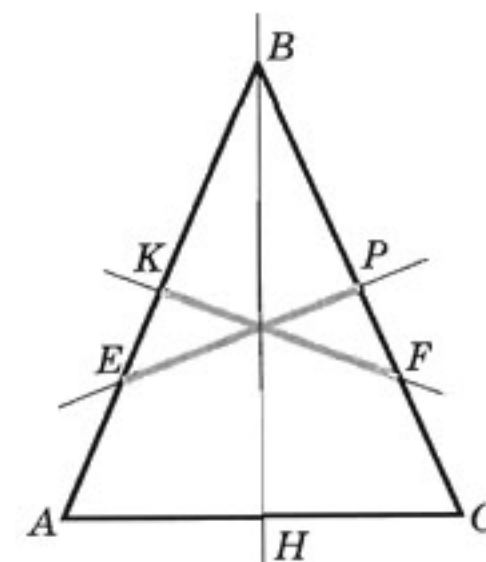


Рис. 114

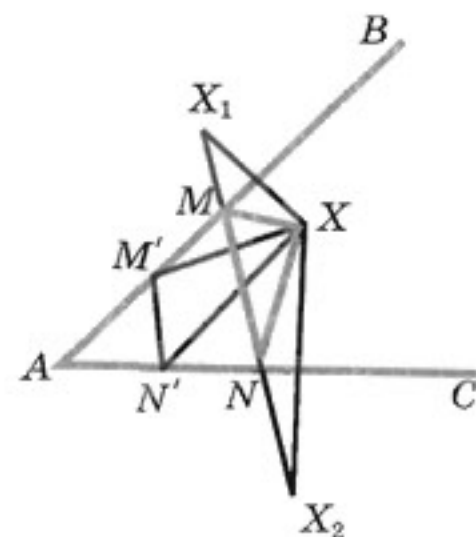


Рис. 115

и X_2 , симметричные точке X относительно прямых, на которых лежат стороны угла BAC . Проведем отрезок X_1X_2 , который пересекает сторону BA в точке M , а сторону CA — в точке N . Тогда треугольник XMN имеет наименьший периметр $X_1M + MN + NX_1$. (Убедитесь в этом сами, построив произвольный треугольник $XM'N'$ и применив неравенство треугольника.)

Задача 4*. Где нужно строить мост через реку с параллельными берегами, чтобы соединить пункты A и B , расположенные по разные стороны реки, кратчайшим путем?

Решение. Представим, что один из берегов реки вместе с одним из населенных пунктов перенесен параллельно отрезку, составляющему с берегом реки угол 90° , к другому берегу

так, чтобы края реки слились в одну прямую (рис. 116). Точка A переносится вдоль направления моста на расстояние, равное его длине.

Ломаная $AMFB$ будет кратчайшим путем от точки A до точки B (через мост MF). Длина пути равняется сумме длин отрезков A_1B и MF .

При любом другом положении моста путь из точки A в точку B будет длиннее. Покажем это. Пусть мост проходит через две

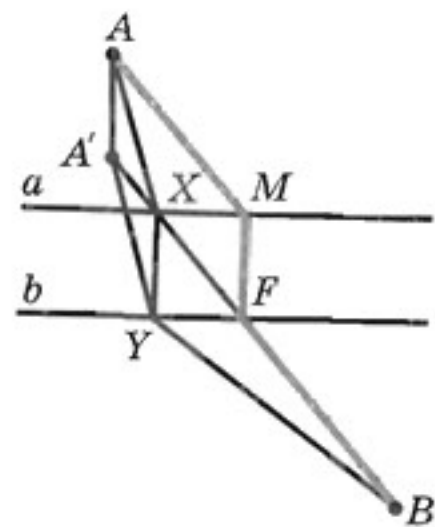


Рис. 116

KF в отрезок PE . Поэтому отрезки KF и PE равны, что и требовалось доказать.

Задача 3*. Даны острый угол A и точка X внутри него (рис. 115). Построить треугольник с наименьшим периметром так, чтобы две его вершины лежали на сторонах угла (по одной на каждой стороне), а третьей вершиной была точка X .

Решение. Пусть даны угол BAC и точка X . Построим точки X_1

другие точки X и Y , тогда путь из точки A в точку B представит собой ломаную $AXYB$. Чтобы сравнить длину ломаной $AXYB$ с длиной ломаной $AMFB$, «перенесем» один из берегов реки так, чтобы края берегов реки слились в одну прямую. При этом точка X перейдет в точку Y , точка A — в точку A' , отрезок AX — в отрезок $A'Y$. Длина пути из точки A в точку B будет равняться длине ломаной $A'YB$ и длине моста. Длина ломаной $A'YB$ больше длины отрезка $A'B$, и, следовательно, путь из точки A в точку B через мост XY будет длиннее, чем через мост MF .

Задача 5*. Проектировщикам линии связи нужно соединить три пункта A , B и C (рис. 117), чтобы сумма всех отрезков линии связи была кратчайшей, так как в этом случае будет использовано меньше материала. Как построить эту линию?

Решение. Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 117). Пусть M — искомая точка, сумма расстояний от которой до вершин A , B и C должна быть наименьшей.

Применим поворот на 60° вокруг точки A , а затем вокруг точки C , тогда:

1. Точка B_1 получится из точки B при повороте ее относительно точки A на угол 60° , а тогда $AB = AB_1$; точка M перейдет в точку M_1 , при этом

$$AM = AM_1 = MM_1; BM = M_1B_1; \\ AM + BM + CM = MM_1 + B_1M_1 + CM \geq B_1C.$$

Знак равенства будет, если точки M и M_1 будут принадлежать B_1C .

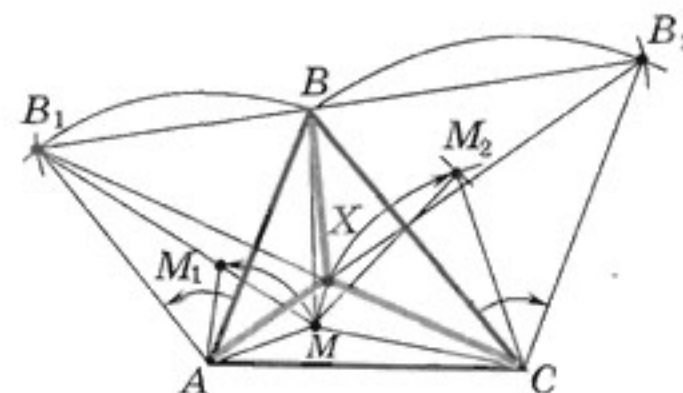


Рис. 117

2. Точка B_2 получится из точки B при повороте ее относительно точки C на угол 60° , а тогда $BC = B_2C$; точка M перейдет в точку M_2 , при этом

$$MC = M_2C = MM_2; BM = B_2M_2;$$

$$AM + BM + CM = AM + B_2M_2 + MM_2 \geq AB_2.$$

Знак равенства будет, если M и M_2 принадлежат AB_2 .

Пересечение B_1C и AB_2 определяет единственную точку X , сумма расстояний от которой до вершин треугольника будет наименьшей.

Построение.

1. Построим $\angle BAB_1 = 60^\circ$, $AB = AB_1$.

2. Построим $\angle BCB_2 = 60^\circ$, $BC = B_2C$.

3. Построим X — точку пересечения B_1C и AB_2 . X — искомая точка, а сумма $AX + BX + CX$ наименьшая.

Задача 6*. На отрезках AB и BC прямой AC по одну сторону от нее построены равносторонние треугольники ABM и BCF . Установить вид треугольника BKE , где K — середина отрезка AF , а E — середина отрезка MC (рис. 118).

Решение. Возьмем за центр поворота точку B и повернем около нее на 60° против хода часовой стрелки треугольник BMC . При этом повороте точка M перейдет в точку A , C — в F , а сам треугольник BMC — в треугольник BFA ; отрезок BF — в отрезок BK . Отсюда заключаем, что треугольник BKE — равносторонний.

Задача 7*. Прямая пересекает стороны AB и CD квадрата $ABCD$ в точках M и N , а перпендикулярная ей прямая пересекает стороны BC и AD в точках P и Q (рис. 119). Сравнить длины отрезков MN и PQ .

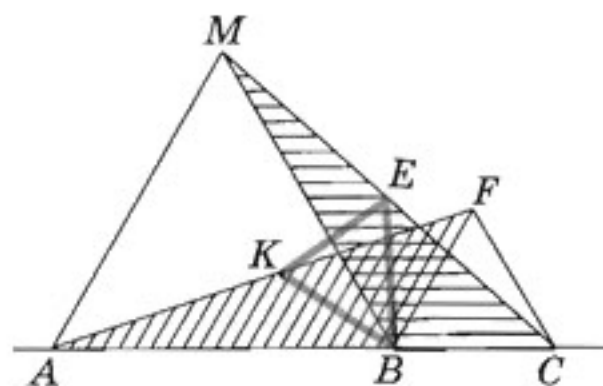


Рис. 118

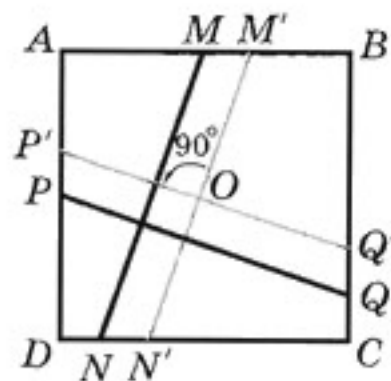


Рис. 119

Решение. Отрезки MN и PQ равны. Докажем это.

Проведем через центр O квадрата отрезки $M'N'$ и $P'Q'$ соответственно параллельные отрезкам MN и PQ . Повернем квадрат около его центра O на 90° против хода часовой стрелки. При этом повороте отрезок $M'N'$ перейдет в отрезок $P'Q'$; поэтому $M'N' = P'Q'$.

Так как $MN = M'N'$, а $PQ = P'Q'$ (как противоположные стороны параллелограмма), то $MN = PQ$. Таким образом, доказано, что отрезки MN и PQ равны.

Задания

502. Дана прямая и две точки A и B , расположенные по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку C , чтобы треугольник ABC имел наименьший периметр.

503. Дан угол и точка M , не принадлежащая углу. Проведите прямую, которая содержала бы точку M и отсекала от сторон угла равные отрезки.

504. Постройте произвольный угол и отметьте какую-либо точку O этого угла, не принадлежащую его сторонам. На сторонах угла найдите такие точки X и Y , что отрезок XY делился бы точкой O пополам.

505. На рисунке 120 изображен пруд, ширина AB которого равна 10 м. Какую часть (в метрах) отражения в пруду фабричной трубы увидит наблюдатель, находящийся в точке S ?

506. Докажите, что если прямая, содержащая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то трапеция равнобокая. Верно ли обратное утверждение?

507*. Докажите, что всякая трапеция, вершины которой лежат на окружности, равнобедренная.

508. Пересечением окружности с центром O и трапеции $ABCD$ (AB и CD — ее боковые стороны) являются точки A, B, C, D . Докажите, что точки пересечения прямых AB и DC , отрезков AC, BD и точка O принадлежат одной прямой.

509*. В окружности, центр которой не указан, проведены две параллельные, но не равные хорды.

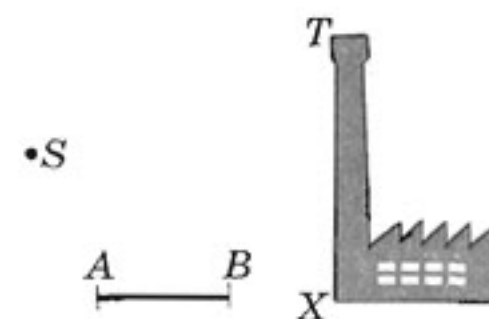


Рис. 120

Пользуясь только одной линейкой, разделите эти хорды пополам.

510. Постройте произвольный шестиугольник, который имел бы центр симметрии. Что вы можете сказать о сторонах этого шестиугольника?

511. Две прямые, содержащие точку пересечения диагоналей параллелограмма, пересекают его стороны соответственно в точках M и L , N и K . Докажите, что четырехугольник $MNLK$ — параллелограмм.

512. Прямые, которым принадлежат боковые стороны трапеции, перпендикулярны. Докажите, что длина отрезка, концами которого являются середины оснований трапеции, равна полуразности длин оснований.

513. Если в треугольнике две медианы равны, то треугольник равнобедренный. Докажите.

514*. По одну сторону от железной дороги расположены две деревни A и B . Где надо расположить на железной дороге платформу MK данной длины a , чтобы длина дороги $AMKB$ была наименьшей?

515. Через центр равностороннего треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° и которые не содержат вершин треугольника. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треугольника, равны.

516. На сторонах квадрата построены равносторонние треугольники так, что пересечением каждого из них и квадрата является сторона квадрата. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются центры построенных треугольников, является квадратом.

517. На сторонах CA и CB равностороннего треугольника ABC отложены отрезки CM и CN , сумма длин которых равна длине стороны треугольника. Определите угол MON , где O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

518*. Две параллельные прямые a и b пересечены третьей прямой c . Постройте равносторонний треугольник с данной стороной так, чтобы его вершины принадлежали соответственно прямым a , b и c .

519. В равнобедренной трапеции длина большего основания равна 20 см, длина боковой стороны равна 8 см, а величина

одного из углов 60° . Вычислите длину меньшего основания трапеции.

520. Сумма длин оснований трапеции равна 21 см, а длины диагоналей равны 13 см и 20 см. Вычислите площадь трапеции.

521*. Даны две равные окружности. Найдите геометрическое место точек, около которых можно осуществить поворот одной окружности, чтобы она совпала с другой окружностью.

522*. В треугольнике ABC угол B равен 15° , угол C — 30° . Из вершины A к стороне BC проведен перпендикуляр, пересекающий сторону BC в точке D . Докажите, что отрезок BD вдвое больше стороны AC .



Повторение главы V

Исторические сведения

Идея преобразований имеет давнюю историю и способствует формированию взгляда на геометрию как на предмет, изучающий фигуры в их движении, изменении и преобразовании одной в другую. Геометрические преобразования дают новые методы доказательства теорем и решения многих задач.

Знакомство с основными геометрическими преобразованиями имеет и практическое значение. Например, осевая симметрия используется на практике при раскрое тканей. Свойства осевой симметрии положены в основу схемы устройства домкрата (см. рис. 121). При уменьшении длины CD точка B поднимается вверх, при этом стержень AB всегда сохраняет вертикальное положение, так как точки A и B остаются симметричными относительно горизонтальной прямой.

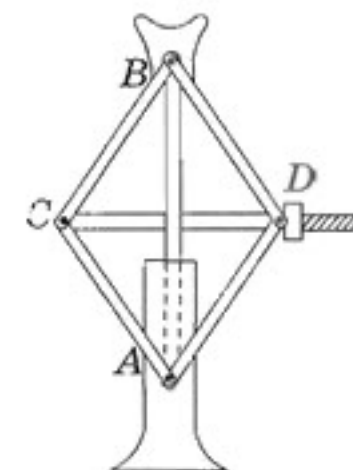


Рис. 121

Контрольные вопросы

1. Что называют движением плоскости?
2. Какие виды движений вы знаете? Сформулируйте определение каждого из них.

Задания

523. Постройте точки, симметричные точкам $A(2; -3)$; $B(5; 0)$; $C(0; -7)$ относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) биссектрисы I и III координатных углов. Запишите координаты построенных точек.

524. Точка A имеет координаты $(a; b)$. Какие координаты имеют точки, симметричные ей относительно оси Ox , оси Oy , биссектрисы I и III координатных углов? Какие координаты имеет точка, симметричная точке A относительно биссектрисы II и IV координатных углов?

525. Докажите, что точки $A(a; b)$ и $A'(-a; -b)$ можно отобразить друг на друга центральной симметрией с центром в начале координат.

526. Выберите из данного множества точек $\{(-1; 5), (3; -2), (0; 0), (5; 1), (1; -5), (7; 0), (-3; 2)\}$ такие точки, которые попарно симметричны относительно начала координат.

527. На клетчатом листе бумаги изобразите оси координат так, чтобы оси Ox и Oy совпали с горизонтальной и вертикальной линиями. Примите сторону квадрата за единичный отрезок и отметьте точки $A(3; 2)$ и $B(7; 6)$. Постройте ось симметрии точек A и B одной линейкой.

528. Начертите четырехугольник, который имеет только одну ось симметрии, причем ни одна из диагоналей не принадлежит оси.

529. Начертите четырехугольник с двумя осями симметрии, причем диагонали не принадлежат осям. Будут ли оси симметрии взаимно перпендикулярны?

530. Прямые AC , BD и m являются осями симметрии четырехугольника $ABCD$. Каково взаимное расположение прямой m и сторон четырехугольника? Имеет ли он другие оси симметрии?

531. Будет ли четырехугольник ромбом, если диагонали этого четырехугольника принадлежат прямым, являющимся его осями симметрии?

532. Докажите, что параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, есть ромб. Верно ли обратное утверждение?

533*. Для того чтобы четырехугольник был ..., необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Вместо многого поставьте вид четырехугольника.

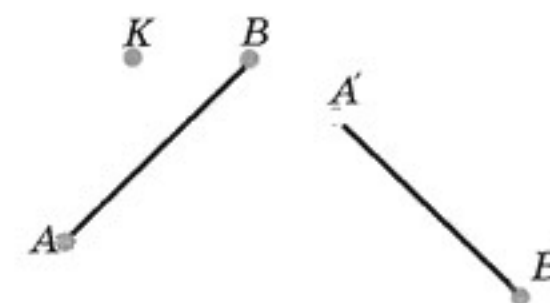


Рис. 122

534. Известно, что отрезок $A'B'$ — образ отрезка AB при повороте (рис. 122). Как построить образ точки K с помощью одного циркуля?

535. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x + 5$ относительно начала координат.

536. Известно, что прямые $y = 3x + ...$ и $y = ...x + 4$ симметричны относительно начала координат. Поставьте пропущенные числа.

537*. Запишите уравнение прямой, полученной из прямой $y = 2x - 1$ поворотом вокруг начала координат на 90° по часовой стрелке (против часовой стрелки).

538. Отрезок $B'C'$ является образом отрезка BC при параллельном переносе. Как построить при помощи циркуля:

а) образ точки $M (M \in BC)$; б) точку, образом которой является точка $N' (N' \in B'C')$?

539. Из концов диаметра BC окружности с центром O проведены две хорды BA и CD так, что $BA \parallel CD$. Докажите, что точка O — середина отрезка AD .

540. Даны две точки. а) Найдите множество точек, повороты вокруг которых отображают одну из них на другую. б) Постройте точку, поворот вокруг которой на 60° отображает одну из них на другую.

541. Постройте равносторонний треугольник ABC . а) Отметьте на отрезке AB точку K и построьте ее образ при повороте около центра O треугольника на 120° по часовой стрелке. б) Отметьте на отрезках BC и CA соответственно такие точки M и P , что $BM = CP$. Какова величина угла MOP ?

542. Даны две равные окружности и на каждой из них соответственно точки A и B . Постройте центр поворота, отображающего одну окружность на другую, чтобы при этом точка A перешла в точку B .

543*. Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы основание его принадлежало данной прямой m , а вершина — данной прямой l .

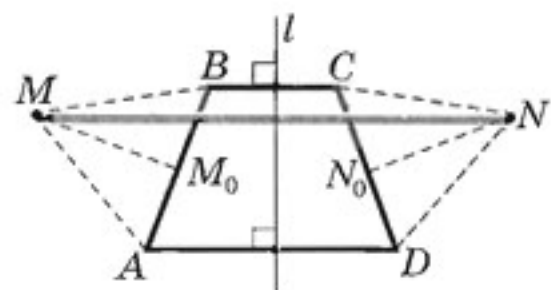


Рис. 123

544*. На боковых сторонах AB и CD равнобокой трапеции $ABCD$ вне ее построены равнобедренные треугольники ABM и DCN (рис. 123).

Докажите, что $(MN) \parallel (AD)$.

Доказательство. Так как трапеция равнобокая, то прямая l , проходящая через середины оснований, является ее осью симметрии, поэтому можно рассмотреть преобразование осевой симметрии S_l .

$$S_l: \begin{matrix} A \rightarrow D, \\ B \rightarrow C \end{matrix} \Rightarrow [AB] \rightarrow [DC] \Rightarrow \triangle ABM \rightarrow \triangle DCN$$

(это следует из равенства треугольников) $\Rightarrow M \rightarrow N$.

Так как $M \rightarrow N$, то из определения симметричных точек следует, что $(MN) \perp l$, но $(AD) \perp l$, поэтому $(MN) \parallel (AD)$ (на основании известного признака параллельности двух прямых).

545. Выясните, будет ли фигура, состоящая из трех прямых, из которых две параллельны, а третья их пересекает, иметь центр симметрии.

546. На прямой даны два равных отрезка AB и CD . Постройте их центр симметрии.

547. Почему диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам?

548*. Как можно измерить расстояние между недоступными вершинами двух углов, пользуясь осевой симметрией?

549*. Как можно определить величину угла, вершина которого не помещается на чертеже?

550. Укажите известные вам отображения плоскости на себя, при которых каждая прямая отображается на параллельную ей прямую.

551. Укажите движения, при которых полуплоскость отображается на себя.

552. Какие фигуры, составленные из равных полукругов (рис. 124), при некотором повороте отображаются на себя?

553*. а) Фигуры F_1 и F_2 имеют общий центр симметрии. Докажите, что пересечение и объединение этих фигур также является центрально-симметричными фигурами.

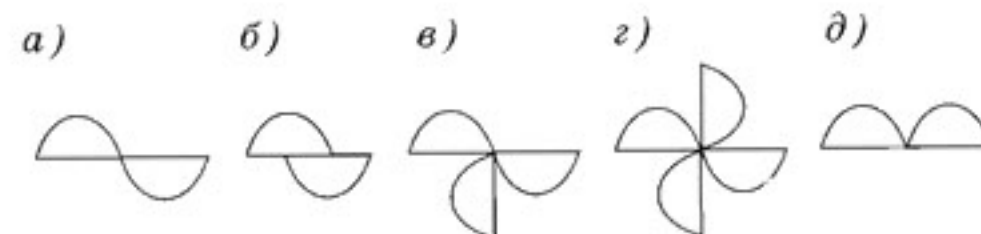


Рис. 124

б) Докажите, что если прямые a и b являются осями симметрии фигуры, то прямая, симметричная a относительно прямой b , тоже является осью симметрии этой фигуры.

в) Докажите, что если точки A и B — центры симметрии фигуры F , то и точка C , симметричная точке B относительно A , тоже является центром симметрии этой фигуры.

554. Существует ли параллельный перенос, при котором:

а) одна сторона треугольника отображается на его другую сторону;

б) одна из сторон квадрата отображается на его другую сторону?

555. Приведите примеры фигур, которые можно отобразить на себя с помощью параллельного переноса.

556. Докажите, что фигура, изображенная на рисунке 125, а, б, при некоторых поворотах с указанным центром O отображается на себя.

557. Приведите примеры фигур, для которых существует несколько поворотов, отображающих эти фигуры на себя.

558*. Дан ромб $ABCD$, острый угол B которого равен 60° . Прямая MN отсекает от сторон BC и CD отрезки CM и CN , сумма которых равна стороне ромба. Докажите, что треугольник AMN равносторонний.

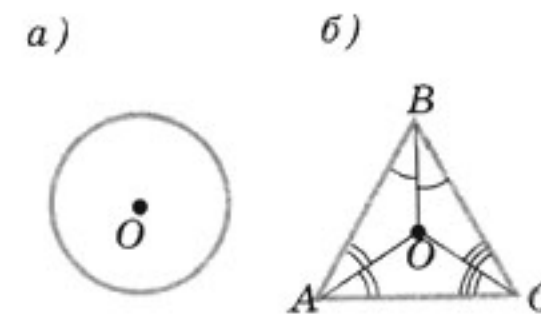


Рис. 125

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. При каком движении квадрат отображается на себя?
2. Постройте точки, симметричные точкам $A(5; 2)$, $B(-3; -4)$, $C(0; 3)$ относительно оси ординат. Запишите их координаты.

3. Постройте треугольник, симметричный данному равно-
стороннему треугольнику относительно точки пересечения его
медиан. Существует ли поворот, отображающий полученный
треугольник на данный? Если существует, то укажи-
те его.

4. Задайте параллельный перенос парой точек.

а) Начертите любую окружность и ее образ при заданном
параллельном переносе.

б) Отметьте на данной окружности точку и постройте ее об-
раз при помощи линейки и циркуля.

5. Даны два непараллельных равных отрезка AB и CD (как,
например, на рисунке 126). Постройте центр поворота, отобра-
жающего отрезок AB на CD ($A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$).

Вариант 2*

1. O — данная точка плоскости. Каждой точке $X \neq O$ соот-
ветствует такая точка X_1 , что X_1 принадлежит лучу OX и
 $OX_1 = 2 \cdot OX$, точка O соответствует сама себе. Является ли дан-
ное отображение движением?

2. Постройте точки, симметричные точкам $A(3; -2)$, $B(0;$
 $5)$ и $C(-2; -4)$ относительно начала координат. Запишите их
координаты.

3. Постройте треугольник ABC , у которого $AB = 7$ см,
 $BC = 6$ см, $AC = 5$ см. Отметьте на отрезке AB точку X
($BX = 2$ см) и на отрезке AC точку Y ($CY = 3$ см). Постройте
образ треугольника ABC при симметрии с осью XY . Укажите
фигуру, являющуюся пересечением данного треугольника и
его образа.

4. Перерисуйте рисунок 126 в тетрадь. Найдите на отрезках
 AB и CD такие точки, которые могут быть отображены одна

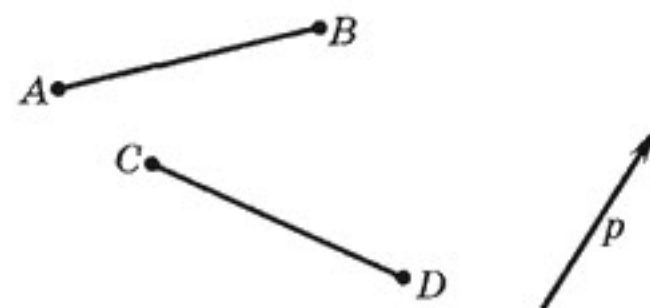


Рис. 126

на другую параллельным переносом в направлении p на рас-
стояние 2 см.

5. Даны две окружности, радиусы которых равны. Сколько
существует поворотов, отображающих одну из окружностей на
другую?

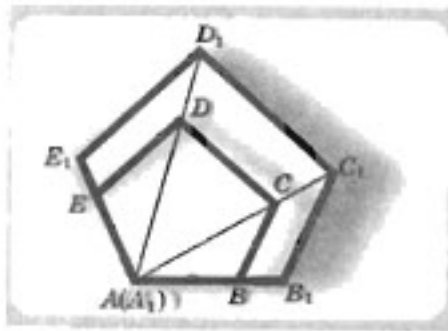
а) Укажите точку, поворот вокруг которой на 45° отобра-
жает одну из окружностей на другую.

б) Отметьте точку, не принадлежащую окружностям, и
постройте ее образ при этом повороте с помощью одного цир-
куля.

6. а) В треугольнике ABC точка M является серединой BC .
Точка A_1 симметрична точке A относительно точки M . Дока-
жите, что четырехугольник ABA_1C — параллелограмм.

б) Докажите, что любая прямая, проходящая через точку
пересечения диагоналей параллелограмма, делит его на две
равные фигуры.

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ



§ 12. Подобные треугольники

Определение подобных треугольников

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$. Если отношение длин двух отрезков AB и A_1B_1 равно отношению длин отрезков CD и C_1D_1 , то считают, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 .

Например, если $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 10$ см, $CD = 3$ см, $C_1D_1 = 6$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{1}{2}$; отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 (рис. 127).

Понятие пропорциональности аналогично и для большего числа отрезков. Например, три отрезка AB , CD и MK пропорциональны отрезкам A_1B_1 , C_1D_1 и M_1K_1 , если $AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1 = MK : M_1K_1$.

Если в треугольниках (ABC и $A_1B_1C_1$) попарно равны углы (A и A_1 , B и B_1 , C и C_1), а соответственные стороны, лежащие

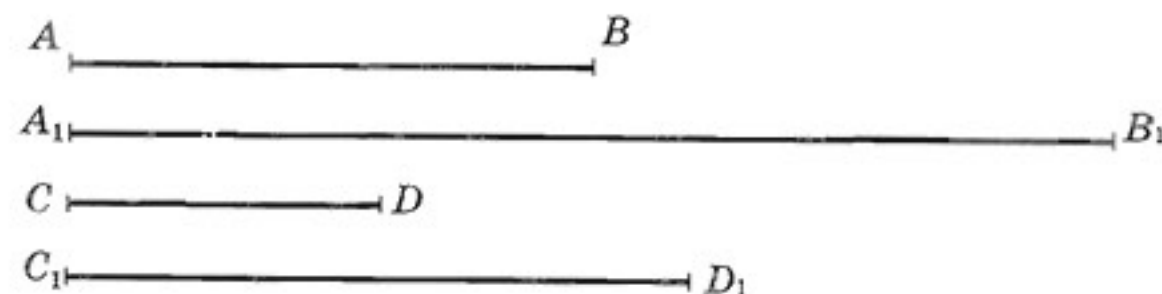


Рис. 127

против равных углов, пропорциональны, то треугольники (ABC и $A_1B_1C_1$) называются подобными.

Например, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 128) подобные. В этих треугольниках $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Подобие треугольников (как и других фигур) записывается с помощью знака \sim . Так, на рисунке $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Число, равное отношению длин соответственных сторон подобных треугольников, называется коэффициентом подобия и обозначается обычно буквой k :

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

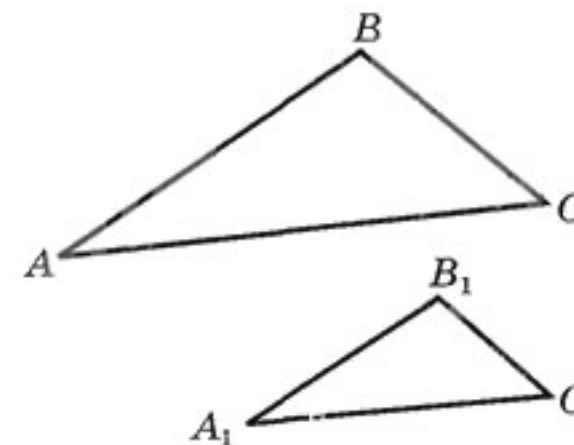


Рис. 128

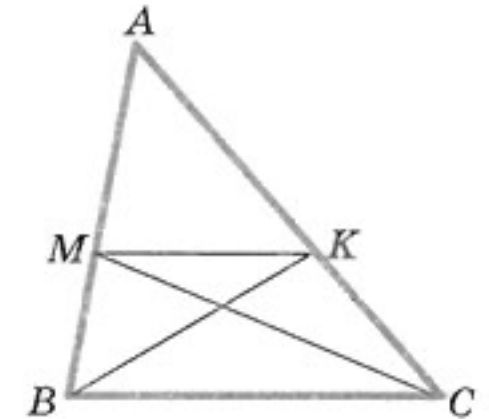


Рис. 129

Теорема. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от этих сторон отрезки, им пропорциональные.

Дано: $MK \parallel BC$ в треугольнике ABC (рис. 129).

Доказать: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AK}$.

Доказательство. Проведем отрезки BK и CM .

Тогда имеем: $\frac{S_{\triangle BMK}}{S_{\triangle AMK}} = \frac{BM}{AM}$, $\frac{S_{\triangle CMK}}{S_{\triangle AMK}} = \frac{CK}{AK}$, $S_{\triangle BMK} = S_{\triangle CMK}$ (обос-

нуйте это самостоятельно), поэтому $\frac{BM}{AM} = \frac{CK}{AK}$. Прибавив к обе-

им частям последнего равенства 1, получим $\frac{BM}{AM} + 1 = \frac{CK}{AK} + 1$,

$\frac{BM + AM}{AM} = \frac{CK + AK}{AK}$, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AK}$, что и требовалось доказать.

1. Что называется отношением отрезков AB и CD ?
 2. Какие отрезки называются пропорциональными?
 3. Какие треугольники называются подобными?

Задания

Устные упражнения 559—560; 562, а, б.

559. Найдите неизвестное значение x из пропорции:

а) $\frac{5}{x} = \frac{4}{7}$; в) $\frac{5}{4} = \frac{2x}{13}$; д) $\frac{2}{3} = \frac{11}{x+3}$;
 б) $\frac{x}{5} = \frac{4}{7}$; г) $\frac{4}{5} = \frac{2x}{13}$; е) $\frac{3}{2} = \frac{11}{x+3}$.

560. Докажите, что:

а) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;
 б) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;
 в) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{t}$, то $\frac{a+c+p}{b+d+t} = \frac{a}{b}$;
 г) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{t} = \frac{m}{n}$, то $\frac{a+c+p+m}{b+d+t+n} = \frac{a}{b}$.

561. а) Отрезок AB , равный 98 см, разделен на части, пропорциональные числам: а) 2; 4; 8; б) 3; 4; 5. Найдите длину каждой части.

562. Верно ли, что: а) равные треугольники подобны; б) подобные треугольники равны; в) два треугольника, каждый из которых подобен третьему треугольнику, подобны между собой?

563. а) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

б) Решите задачу 563, а при условии, что $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

564. Докажите, что периметры подобных треугольников относятся, как их соответственные стороны.

565. Стороны треугольника равны 4,8 м, 1,6 м и 6 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 15,5 м.

566. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 4 см. Найдите эти стороны.

567. В треугольнике ABC проведен отрезок DE , параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB , а E — на стороне BC). Найдите AD , если $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $BE = 15$ см.

568. Найдите длину отрезка BE в задаче 567, если: а) $BC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11,9$ см; б) $EC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 10$ дм.

569. Даны три отрезка: a , b , c . Постройте: а) четвертый пропорциональный отрезок x , такой, что $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; б) отрезок x , такой, что $\frac{x}{a} = \frac{a+b}{b}$; в) отрезок x , такой, что $\frac{x}{a} = \frac{a+b}{a}$; г) отрезок x , такой, что $\frac{x}{a+b} = \frac{a+c}{c}$.

570. Постройте треугольник, подобный данному треугольнику, с коэффициентом подобия, равным 1,5.

571. Стороны треугольника относятся как 4 : 5 : 6. Найдите стороны подобного треугольника, если меньшая из них равна 0,8 дм.

572. Известно, что стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6 и 8. Найдите длины сторон подобного ему треугольника, если известно, что разность между его наибольшей и наименьшей сторонами равна 15 мм.

§ 13. Признаки подобия треугольников

Первый признак подобия треугольников

Теорема. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 130). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

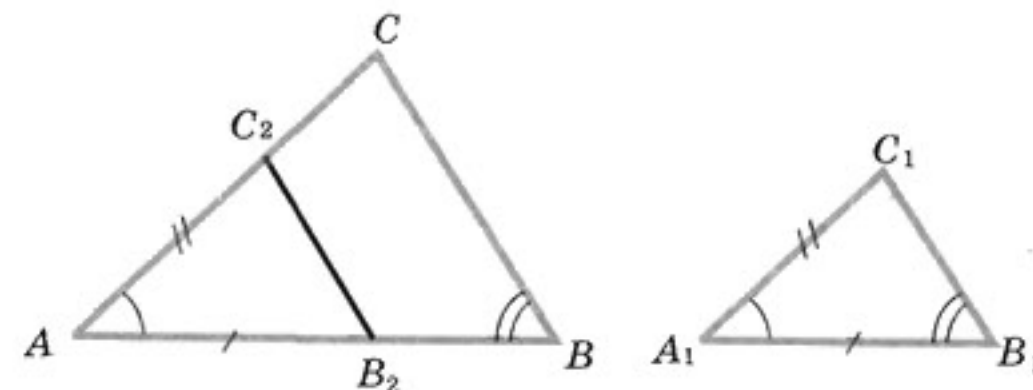


Рис. 130

$\sim \triangle A_1B_1C_1$, для чего установим, что $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$, $\angle C_1 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1)$. Поскольку $\angle A + \angle B = \angle A_1 + \angle B_1$, то $\angle C = \angle C_1$.

Чтобы доказать пропорциональность сторон, построим треугольник AB_2C_2 , равный треугольнику $A_1B_1C_1$, где $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$, $AC_2 = A_1C_1$. Тогда $\angle B_2 = \angle B_1$, $\angle C_2 = \angle C_1$; $B_2C_2 \parallel BC$ по признаку параллельности прямых.

По доказанной теореме имеем:

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}. \text{ Поскольку } AB_2 = A_1B_1, AC_2 = A_1C_1, \\ \text{то } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ и } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Второй признак подобия треугольников

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$ (рис. 131). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого рассмотрим треугольник $A_1B_1C_2$, в котором $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$. Треугольники $A_1B_1C_2$ и ABC подобны

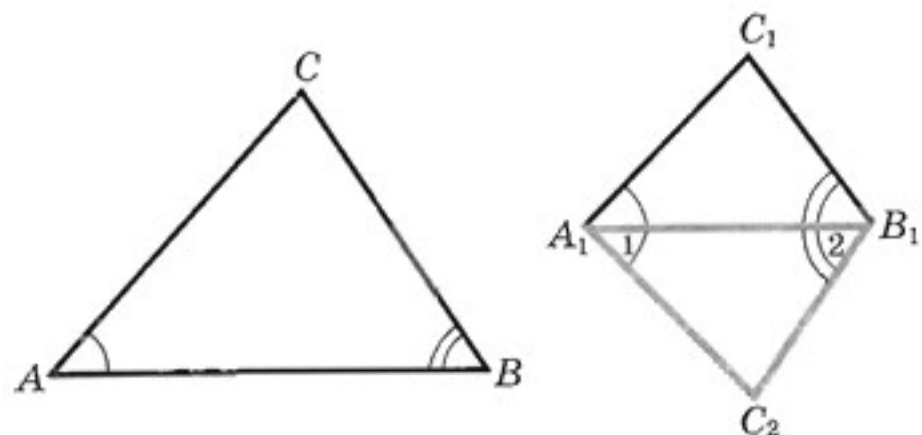


Рис. 131

по первому признаку подобия треугольников, поэтому $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_2$. По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих равенств имеем: $A_1C_1 = A_1C_2$; тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1B_1C_2$ по первому признаку равенства треугольников. Далее, $\angle B = \angle 2 = \angle A_1B_1C_1$, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников.

Третий признак подобия треугольников

Теорема. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Доказательство. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ (рис. 132). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

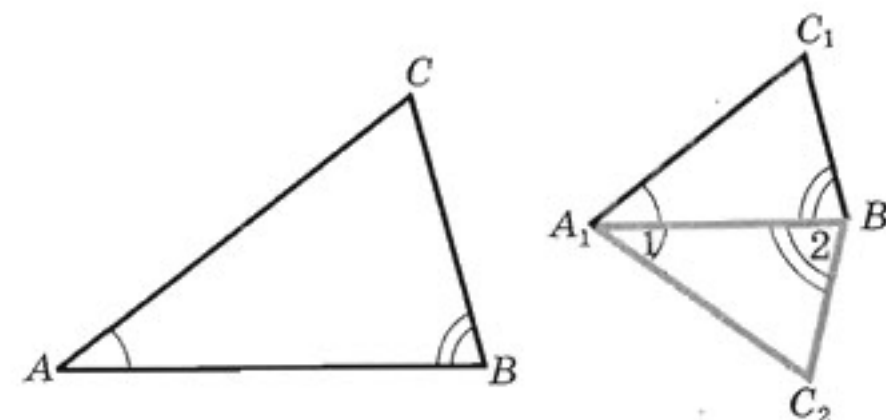


Рис. 132

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_2$, в котором $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$ (далее доказательство теоремы проведите самостоятельно, используя таблицу 20).

Таблица 20

Утверждения	Аргументы
$\triangle A_1B_1C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$...
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_2} = \frac{CA}{C_2A_1}$...
$B_1C_1 = B_1C_2, C_1A_1 = C_2A_1$...
$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1B_1C_2$...
$\angle A = \angle 1 = \angle C_1A_1B_1$...
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$...

- ? 1. Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников.
 2. Сформулируйте и докажите второй признак подобия треугольников.
 3. Сформулируйте и докажите третий признак подобия треугольников.

Задания

Устные упражнения 573—574.

573. Докажите, что два треугольника, два угла одного из которых равны 108° и 20° , а два угла второго — 52° и 20° , подобные.

574. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке P , а сторону BC — в Q . Докажите, что треугольники ABC и PQC подобны.

575. В треугольнике ECD (рис. 133) $BA \parallel CE$, $DB : BC = 5 : 2$, $AB = 4,5$ см. Найдите CE .

576. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

577. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

578. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см; основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

579. В треугольнике ABC (рис. 134) $MK \parallel AC$. Верно ли, что:

- а) $\frac{MO}{AE} = \frac{OK}{EC}$; б) $\frac{BO}{OE} = \frac{OK}{EC}$?

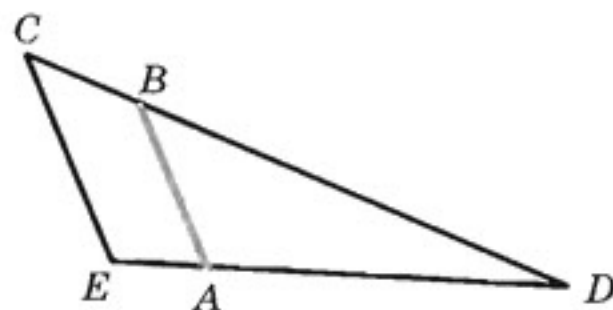


Рис. 133

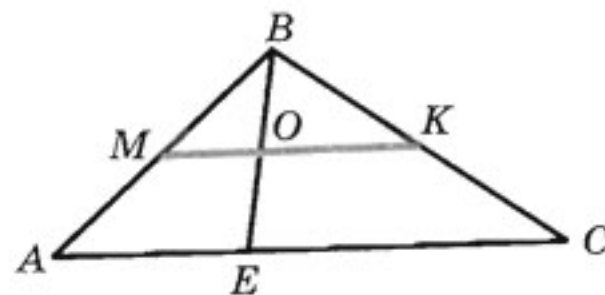


Рис. 134

580. Дано: $MN \parallel AC$
 (рис. 135), $NK \parallel CD$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$,
 $CD = 2,1$ дм. Найдите NK .

581. Докажите, что:

а) прямоугольные треугольники подобны, если они имеют по одному равному острому углу;

б) прямоугольные треугольники подобны, если катеты одного из них пропорциональны катетам другого;

в) равнобедренные треугольники подобны;

г) равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу между боковыми сторонами;

д) равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

582. По данным на рисунке 136, а, б найдите AD :

- а) $DC = 3$, $DK = 10$, $KB = 12$;
 б) $AB = 5$, $BC = 4$.

583. Подобны ли два треугольника, если:

- а) два угла одного равны 60° и 70° , а два угла второго 50° и 80° ;
 б) они прямоугольные и катеты одного равны 3 дм и 4 дм, а катеты другого 0,6 дм и 0,8 дм;
 в) стороны одного 3 см, 4 см и 6 см, а стороны другого 6 см, 8 см и 12 см?

584. В треугольнике ABC угол B — тупой, BH и CE — высоты. Подобны ли треугольники ABH и CBE ?

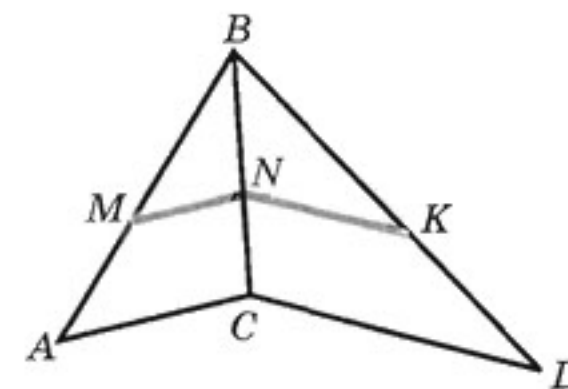


Рис. 135

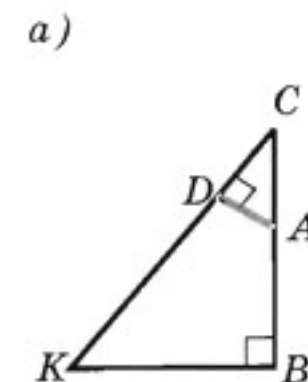
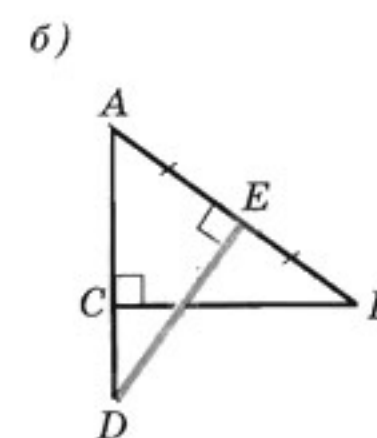


Рис. 136



585. Может ли биссектриса прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделить его на два подобных треугольника?

586. Докажите, что в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны AB и A_1B_1 относятся как их: а) биссектрисы CL и C_1L_1 ; б) медианы CM и C_1M_1 ; в) высоты CH и C_1H_1 .

587. Сумма высот двух подобных треугольников, проведенных к их двум соответственным сторонам, равна 36 см, а коэффициент подобия треугольников равен 2. Найдите длины этих высот треугольников.

588. Докажите, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки (обобщение теоремы Фалеса).

589. Разделите данный отрезок на две части в отношении 3 : 4.

590. Постройте равносторонний треугольник и проведите прямую, параллельную одной из его сторон так, чтобы коэффициент подобия данного и отсеченного треугольников был равен:

а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0,6.

591. Даны три отрезка a , b , c . Постройте:

а) отрезок x , равный среднему арифметическому отрезков $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{2}$ и c ; б) отрезок x , равный $\frac{ac}{b}$; в) отрезок x , равный $\frac{2ac}{b}$.

592. Углы треугольника пропорциональны числам 1, 3 и 5. Из вершины большего угла треугольника проведена его биссектриса. Получилась ли при этом хотя бы одна пара подобных треугольников?

593. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$ см, а сторона $AC = 20$ см. На стороне AB отложен отрезок $AM = 8$ см, а на стороне AC — отрезок $AE = 6$ см. Подобны ли треугольники ABC и AME ?

594. Дан произвольный треугольник. Можно ли провести прямую, не параллельную ни одной из его сторон и отсекающую от него подобный треугольник?

595. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам треугольника.

596. В треугольнике ABC BD — биссектриса, BE — медиана, $AB = 24$ мм, $BC = 42$ мм, $DE = 4,5$ мм. Найдите сторону AC .

597. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK , причем оказалось, что $\angle AKB = \angle ABC$. Найдите стороны AB и BC , если $AK = 8$ см и $CK = 10$ см.

598*. В треугольнике ABC CD — биссектриса, точка E принадлежит стороне BC , причем $DE \parallel AC$. Найдите DE , если $BC = m$ и $AC = n$.

599. На рисунке 137 дано: $AM = 1$, $AC = 2$, $MK : KN = 3 : 7$. Найдите длину отрезка BC .

600. Хорда AB окружности равна ее радиусу. На радиусах OA и OB отложены отрезки OM и OK такие, что $AM : MO = BK : KO = 2 : 1$. Найдите длину отрезка MK , если радиус окружности равен 5 см.

601. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит его в отношении 1 : 2. В каком отношении эта высота делит гипотенузу?

602. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если они имеют следующие координаты вершин:

а) $A(3; 2)$, $B(1; 3)$, $C(3; 6)$, $A_1(3; -2)$, $B_1(1; -3)$, $C_1(3; -6)$;

б) $A(-2; 1)$, $B(-4; 2)$, $C(-2; 5)$, $A_1(3; 2)$, $B_1(1; 3)$, $C_1(3; 6)$?

603. Одна из диагоналей трапеции разделена точкой пересечения диагоналей на два отрезка, длины которых относятся как 2 : 3. Найдите большее основание трапеции, если меньшее основание равно 5 см.

604. В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC = 12$ см, диагональ AC разделена второй диагональю на отрезки $OA = 12$ см и $OC = 8$ см. Найдите AD .

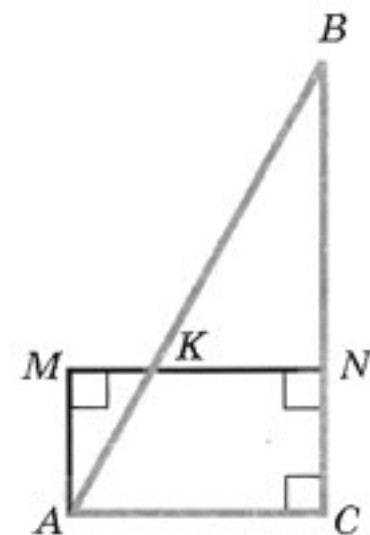


Рис. 137

§ 14. Применение подобия к решению задач

Задача 1. Доказать, что а) высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное¹ между проекциями катетов на гипотенузу.

¹ Отрезок c называют средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками a и b , если $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$.

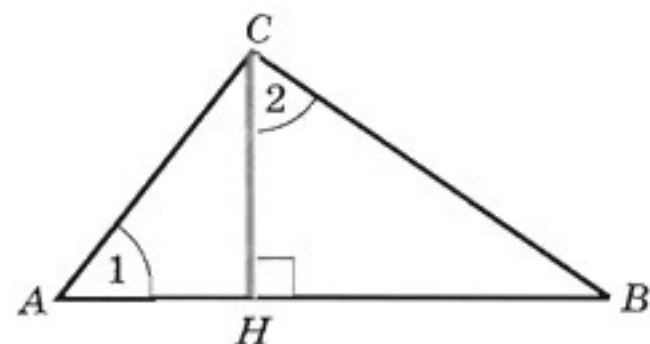


Рис. 138

Доказательство. Треугольники ACH и CBH (рис. 138) подобные как прямоугольные, в которых имеются равные острые углы ($\angle 1 = \angle 2$). Из подобия треугольников имеем: $CH : AH = BH : CH$, откуда $CH^2 = AH \cdot HB$.

б) В прямоугольном треугольнике квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.

Доказательство. Треугольники ABC , ACD , BCD подобны, поскольку $\angle DCA = \angle B$, $\angle DCB = \angle A$ (рис. 139). Из подобия треугольников ABC и BCD следует, что $\frac{c}{b} = \frac{b}{b_c}$, т. е. $b^2 = cb_c$, а из подобия треугольников ABC и ACD получаем, что $\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c}$, т. е. $a^2 = c \cdot a_c$.

Задача 2. Построить треугольник по двум его углам и медиане (рис. 140), проведенной из вершины третьего угла.

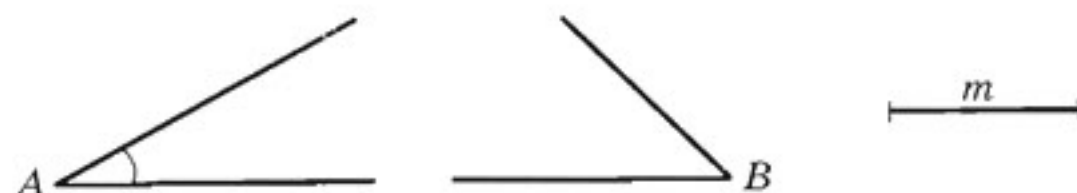


Рис. 140

Решение. Сначала строим треугольник A_1CB_1 , подобный искомого (рис. 141). Затем проводим его медиану CM_1 . Далее на луче CM_1 откладываем отрезок CM , равный данной медиане, и через точку M проводим отрезок AB параллельно A_1B_1 . В результате получается треугольник ABC , удовлетворяющий всем условиям задачи.

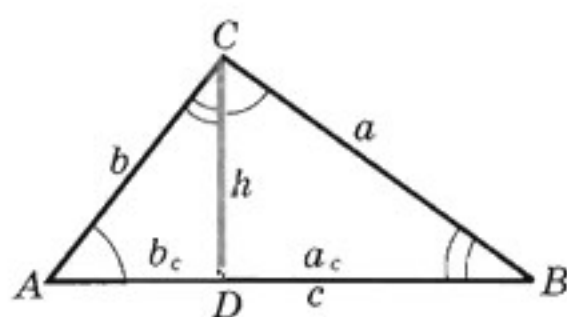


Рис. 139

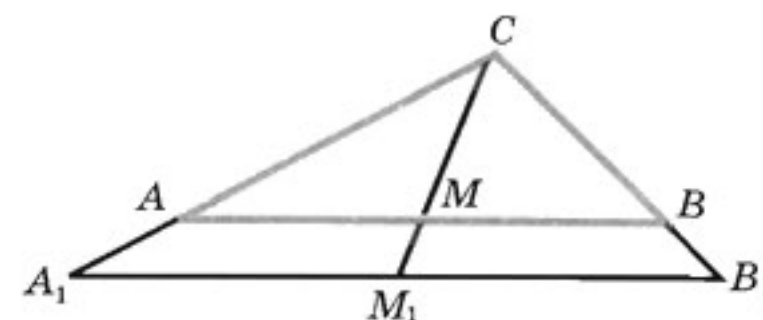


Рис. 141

Задача 3. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC , в котором AN , BM и CP — медианы (рис. 142). Пусть O — точка пересечения медиан AN и BM . Проведем среднюю линию MN треугольника ABC . Тогда имеем: $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии треугольника); $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых MN , AB и секущей NA); $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные). Поэтому $\triangle MON \sim \triangle BOA$ по первому признаку подобия треугольников, откуда заключаем, что $\frac{AO}{ON} = \frac{AB}{MN} = \frac{2}{1}$ (учитывая свойство средней линии треугольника).

Таким образом, точка O пересечения медиан AN и BM делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BM и CP делит их в отношении 2 : 1, считая от вершины, и поэтому совпадает с точкой O .

Следовательно, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Задача 4. Найти способ измерения высоты дерева, используя свойства подобных треугольников.

Решение. Для этого возьмем шест, прикрепим на его конце подвижную планку, поставим его вертикально и наведем один конец планки на вершину дерева (второй конец

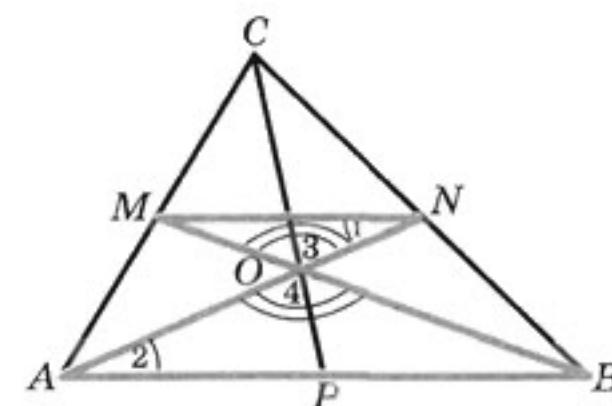


Рис. 142

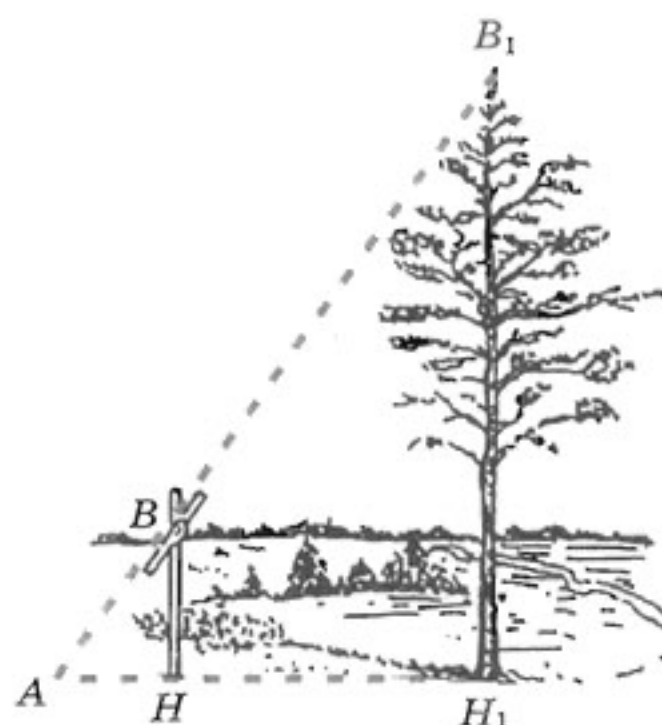


Рис. 143

угол между лучом BA этой прямой, где B — точка ее пересечения с плоскостью α , и проекцией этого луча на плоскость α .

Задача 5. Основания трапеции 6 см и 9 см, а ее высота 10 см. Найти расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 145) основание $AD = 9$ см, основание $BC = 6$ см, высота $MH = 10$ см. Так как $\angle AOD = \angle BOC$, $\angle ADO = \angle CBO$ как накрест лежащие при соответствующих параллельных прямых и секущих, то $\triangle BCO \sim \triangle DAO$. В подобных треугольниках высоты относятся как стороны, к которым они проведены. Поэтому $\frac{MO}{OH} = \frac{BC}{AD}$ или

$\frac{OM}{10 - OM} = \frac{6}{9}$, откуда $9 \cdot OM = 60 - 6 \cdot OM$, $15 \cdot OM = 60$, $OM = 4$. Тогда $10 - OM = 6$.

Ответ: 4 см и 6 см.

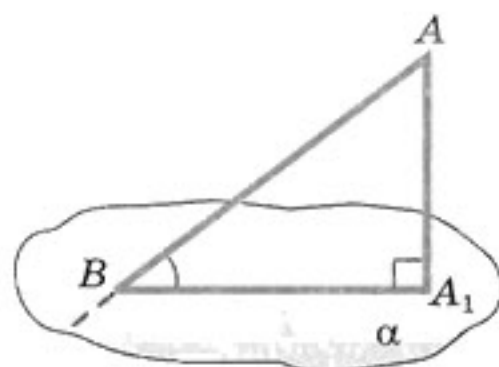


Рис. 144

при этом направлен на поверхность земли). Тогда прямоугольные треугольники ABH и AB_1H_1 подобные, так как имеют общий острый угол. Поэтому $\frac{AH}{AH_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, откуда неизвестная высота дерева $B_1H_1 = \frac{AH_1 \cdot BH}{AH}$ (рис. 143).

Отметим, что при решении этой задачи используется понятие угла, который образует прямая с плоскостью. Угол прямой AB с плоскостью α (рис. 144) определяется как

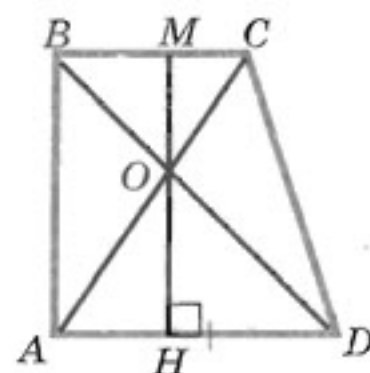
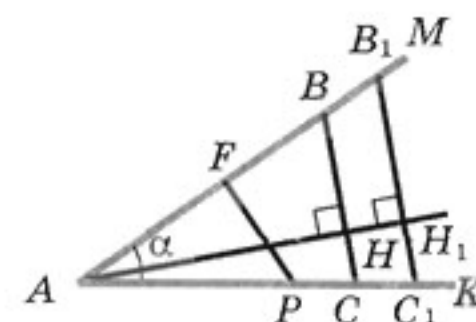


Рис. 145

с)



б)

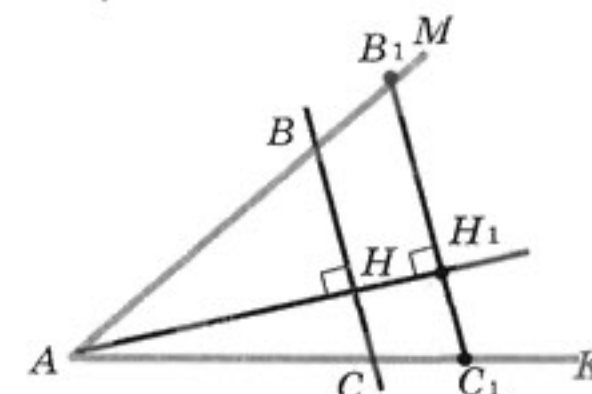


Рис. 146

Задача 6*. Построить треугольник ABC по данным: углу $BAC = \alpha$, отношению сторон $AB : AC = m : n$ и высоте $AH = h$.

1. Анализ. Если построен $\angle MAK = \alpha$ (рис. 146, а), то любой треугольник FAP ($F \in AM$, $P \in AK$) удовлетворяет первому требованию. Чтобы выделить треугольник, удовлетворяющий второму требованию, отложим на луче AM отрезок $AB_1 = m$, а на луче AK отрезок $AC_1 = n$. Тогда треугольник B_1AC_1 подобен искомому. Далее построим высоту AH_1 треугольника B_1AC_1 , отложим на луче AH_1 отрезок $AH = h$ и проведем через точку H прямую, параллельную B_1C_1 . Получим треугольник, удовлетворяющий всем требованиям условия задачи, т. е. искомый треугольник.

2. Построение (рис. 146, б).

1) Строим угол MAK , равный α .

2) На одной стороне этого угла от вершины A откладываем отрезок $AB_1 = m$ единиц, а на другой стороне отрезок $AC_1 = n$ единиц.

3) Проводим отрезок B_1C_1 и на прямую B_1C_1 опускаем из точки A перпендикуляр AH_1 .

4) На луче AH_1 откладываем отрезок AH , длина которого равна h .

5) Через точку H проводим прямую, параллельную отрезку B_1C_1 , и отмечаем точки B и C ее пересечения со сторонами AB и AC угла BAC . Треугольник ABC — искомый.

3. Доказательство. По построению в треугольнике AB_1C_1 $\angle BAC_1 = \alpha$, $AB : AC_1 = m : n$ и $BC \parallel B_1C_1$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ (прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает ему подобный треугольник), и, значит, в треугольнике

$ABC \angle BAC = \alpha$, $AB:AC = m:n$. Кроме того, в треугольнике ABC высота AH , проведенная из вершины A , равна h . Как видим, треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям условия задачи и поэтому является искомым.

При выполнении заданий параграфа, как можно заметить, используется метод решения задач, основанный на отыскании подобных треугольников и применении их свойств. Такой метод коротко будем называть *методом подобных треугольников*.

Задача 7*. Углы A и B треугольника ABC соответственно равны 30° и 50° . Доказать, что стороны такого треугольника удовлетворяют равенству $ab = c^2 - b^2$ (рис. 147).

Решение. После вычисления угла C (100°) может появиться идея — провести биссектрису (CF) треугольника ABC (рис. 147, а).

Далее ищем вариант использования свойства биссектрисы: $\frac{x}{c-x} = \frac{b}{a}$, откуда $x = \frac{bc}{a+b}$. Далее надо обнаружить еще одну пару подобных треугольников (ACF и ABC), откуда $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$, $x = \frac{b^2}{c}$. Подставляя последнее выражение для x в первую пропорцию, получим $\frac{b^2}{c} = \frac{bc}{a+b}$, откуда $ab = c^2 - b^2$, что и требовалось доказать.

Решение этой задачи будет более кратким, если умом овладеет следующая идея.

Поскольку доказываемое соотношение выражается равенством, то почему бы не попробовать переформулировать его так, чтобы в последующем использовать подобные треугольники. Понятно, что записать это равенство надо в виде пропор-

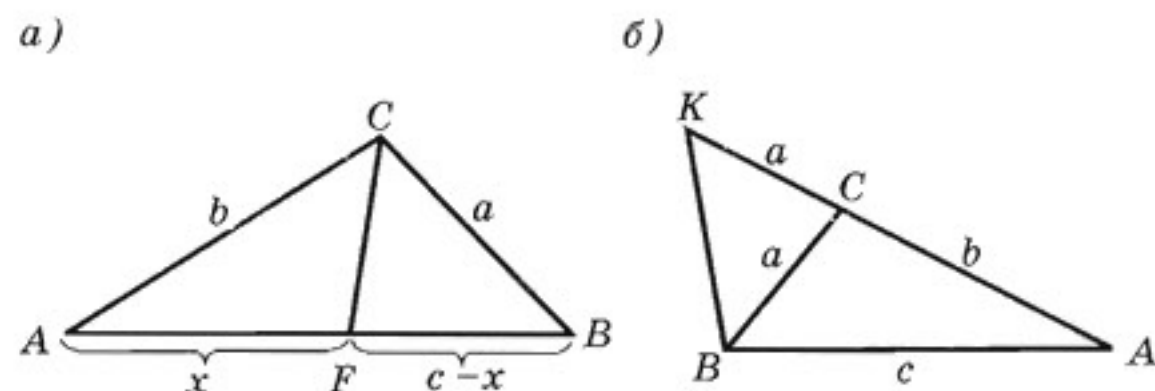


Рис. 147

ции. Действительно, если переписать условие в виде $\frac{b}{c} = \frac{c}{a+b}$, то становится ясно, какие и каким образом надо взять подобные треугольники (объясните это) (рис. 147, б), откуда $\frac{b}{c} = \frac{c}{a+b}$, $ab = c^2 - b^2$, что и требовалось доказать.

В процессе поиска решения этой задачи легко получить пропорцию $\frac{b}{c-b} = \frac{b+c}{a}$.

Однако это затруднит возможность получения подобных треугольников, рассмотрение которых привело бы к цели.

1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.
2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.
3. Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике (рис. 148):

$$h^2 = a_c b_c, h = \sqrt{a_c b_c};$$

$$a^2 = c a_c, a = \sqrt{c a_c};$$

$$b^2 = c b_c, b = \sqrt{c b_c}.$$

4. Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.
5. Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

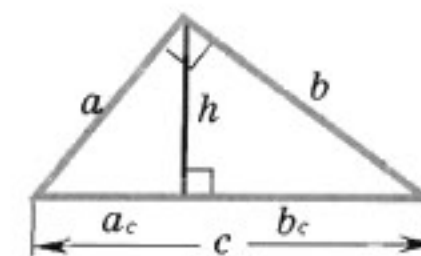


Рис. 148

Задания

605. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его высоты относятся как 5 : 7. Найдите стороны параллелограмма.

606. Прямая, проведенная через вершину ромба, отсекает на продолжениях двух его сторон отрезки 3 см и 4 см. Найдите длину стороны ромба.

607. На плане-карте участок треугольной формы, снятый в масштабе 1 см : 5 м, изображен треугольником, периметр которого равен 15 см. Какие в действительности длины сторон этого участка, если наибольшая и наименьшая стороны на плане относятся как 2 : 1, а третья сторона равна 4,5 см?

608. Длина солнечной тени от дерева равна 24 м. Вертикальный столб высотой 1,5 м отбрасывает в этот момент времени тень длиной 1,6 м. Найдите высоту дерева.

609. Постройте треугольник по двум его углам и биссектрисе, проведенной из вершины третьего угла.

610. Постройте параллелограмм, смежные стороны которого относятся как $1:2$, если даны его острый угол и большая диагональ.

611. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если расстояния от точки пересечения его медиан до сторон соответственно равны 8 дм, 8 дм и 5 дм.

612. Боковые стороны трапеции равны 10 см и 15 см, а меньшая диагональ равна 12 см и является средним пропорциональным между основаниями трапеции. Найдите основания трапеции.

613. Основания трапеции равны 4 см и 9 см, а одна из диагоналей 6 см. Найдите боковые стороны трапеции, если одна из них на 2,5 см больше другой.

614. В равнобокой трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD и делит высоту BH на отрезки $BF = 7$ см и $FH = 9$ см. Найдите меньшее основание трапеции.

615. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 10$ см. На стороне BC взята точка M так, что прямые AM и MD образуют прямой угол. Найдите отрезки BM и MC .

616*. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что они имеют общий прямой угол, а одна вершина квадрата принадлежит гипотенузе. Найдите сторону квадрата, если катеты прямоугольного треугольника равны t и $2t$.

617*. На рисунке 149 AB — диаметр окружности, равный d ; $AQ:QD = m:n$. Найдите хорду CD , параллельную диаметру.

618. Докажите теорему Пифагора, применив метод подобных треугольников.

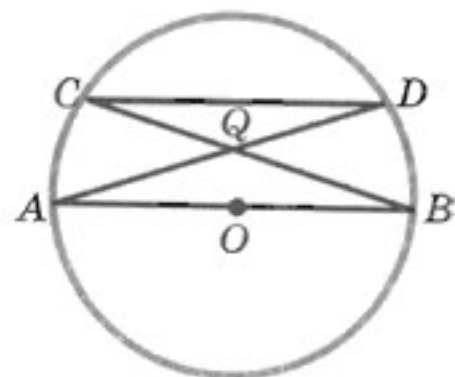


Рис. 149

619*. Основания трапеции $ABCD$ ($AD = a$ и $BC = b$) пересечены прямой PK ($P \in BC$, $K \in AD$), проходящей через общую точку O ее диагоналей. Можно ли найти длину отрезка PK , если известно, что $OP = l$?

620*. Постройте прямоугольный треугольник по его периметру и отношению $(2:1)$ катетов.

621. Постройте прямоугольный треугольник по его биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла, и острому углу.

622*. Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

623*. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K так, что $\angle AKC = \angle BAC$. Через точку K проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E . Найдите стороны треугольника AEK , если $AB = 18$, $BC = 24$ и $AC = 12$.

624*. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на одной стороне равностороннего треугольника, периметр которого равен 9, а две другие — на других сторонах треугольника.

§ 15. О подобии произвольных фигур

1. Подобие и гомотетия

Фигуры F_1 и F_2 называются *подобными*, если каждой точке фигуры F_1 можно поставить в соответствие точку фигуры F_2 так, что для любых двух точек A_1 и B_1 фигуры F_1 и поставленных в соответствие им точек A_2 и B_2 фигуры F_2 выполняется условие $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k$, где k — одно и то же положительное число. При этом имеется в виду, что и каждая точка фигуры F_2 соответствует какой-нибудь точке фигуры F_1 (рис. 150). Число k называется *коэффициентом подобия*.

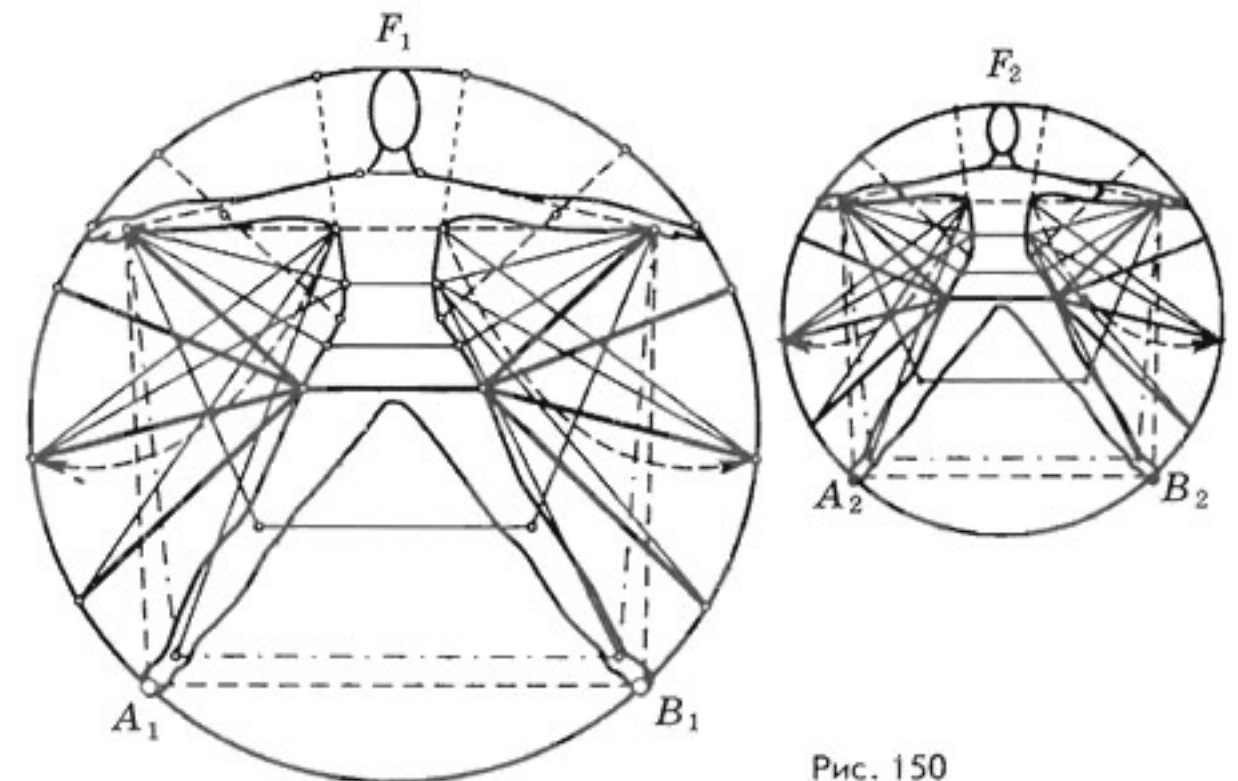


Рис. 150

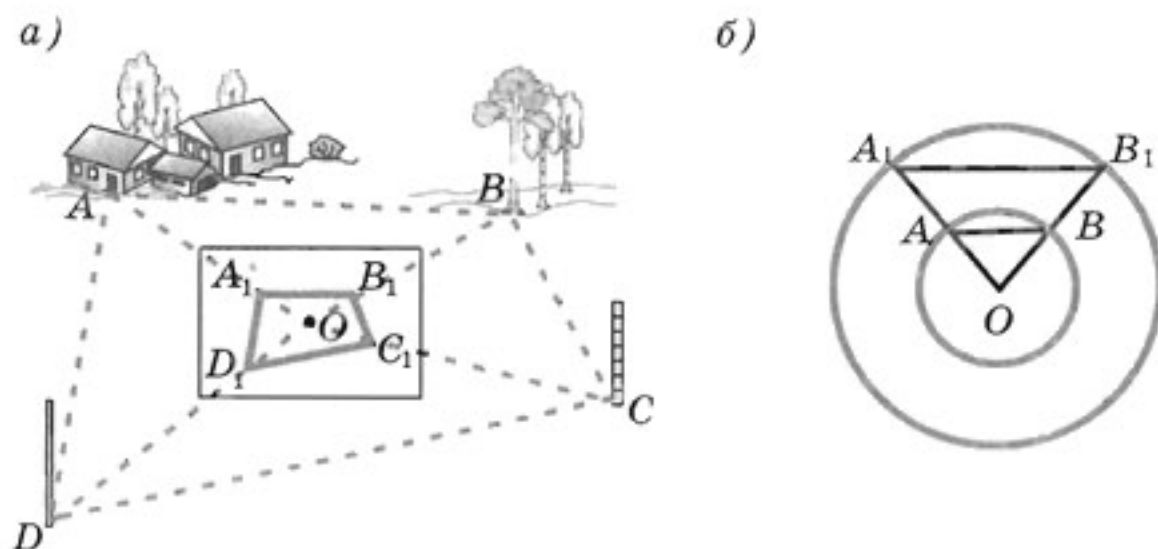


Рис. 151

Указанное сопоставление точек фигур F_1 и F_2 считают *преобразованием фигуры F_1 в фигуру F_2* . При таком преобразовании, которое называется *преобразованием подобия*, сохраняется отношение расстояний между любыми двумя точками A_1 и B_1 фигуры F_1 и сопоставленными им точками A_2 и B_2 фигуры F_2 .

Такое сопоставление точек фигур хорошо знакомо вам из практики. Например: при рассмотрении предметов под микроскопом, при съемках плана местности (рис. 151, а).

Задача. Доказать, что любые две окружности подобные. Чтобы доказать, что две окружности подобные, совместим их центры (рис. 151, б). Возьмем две произвольные точки A_1 и B_1 на одной из них и проведем отрезки OA_1 и OB_1 , пересекающие вторую окружность в точках A и B ; проведем отрезки AB и A_1B_1 . Тогда треугольники OAB и OA_1B_1 подобны по второму признаку подобия треугольников, $A_1B_1 : AB = k$, где k — постоянное число, равное отношению радиусов этих окружностей. Как видим, любым двум точкам A и B одной окружности мож-

но поставить в соответствие две точки A_1 и B_1 второй окружности так, что сохраняется отношение расстояний $A_1B_1 : AB$, поэтому окружности подобные.

Для построения подобных фигур часто используется сле-

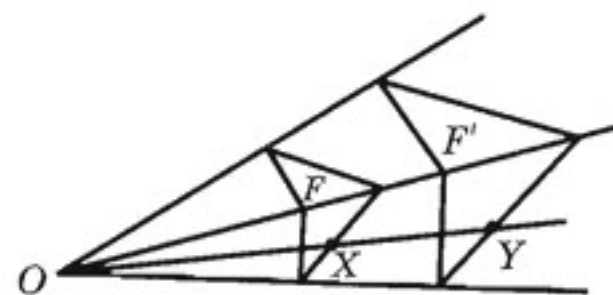


Рис. 152

дующий способ. Пусть дана фигура F (рис. 152). Возьмем некоторую фиксированную точку O . Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок $OY = k \cdot OX$, где $k > 0$ (если $k < 0$, то точку Y строим на луче, противоположном лучу OX). Тогда преобразование фигуры F в подобную фигуру, при котором каждая ее точка X переходит в точку Y и $OY = |k| \cdot OX$, называется *гомотетией относительно точки O* . При этом точку O называют *центром гомотетии*, число k — *коэффициентом гомотетии*, а сами фигуры — *гомотетичными* (см. рис. 153).

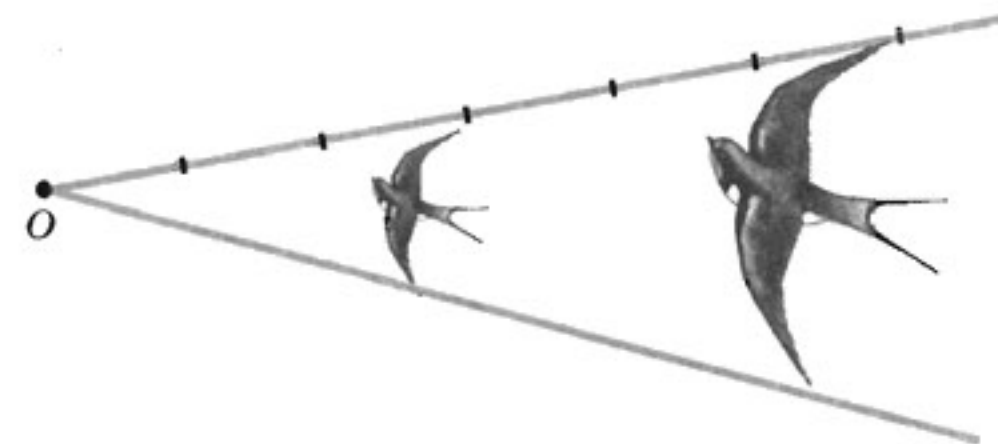


Рис. 153

2. Подобные многоугольники

Введенные понятия позволяют исследовать вопросы о подобии произвольных фигур. Например, нам придется иметь дело с подобными многоугольниками. Два многоугольника называются *подобными*, если углы одного многоугольника соответственно равны углам другого многоугольника и их стороны, между которыми заключены соответственно равные углы, пропорциональны. Подобными являются, например, два прямоугольника, в которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого. На рисунке 154 показан способ построения подобных многоугольников, когда за центр гомотетии взята одна из вершин многоугольника.

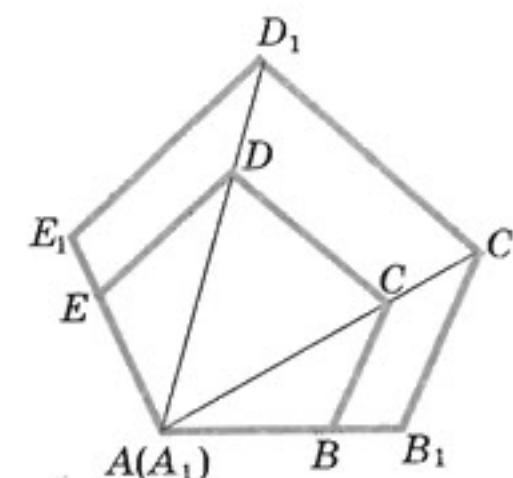


Рис. 154

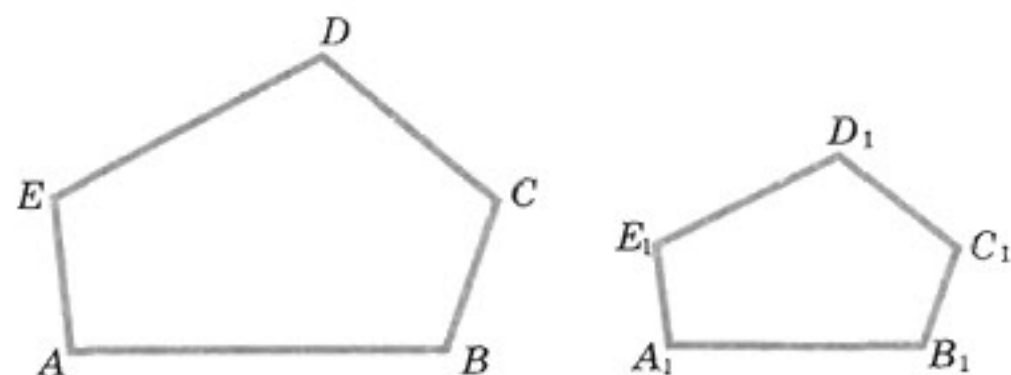


Рис. 155

Отметим, что отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия этих многоугольников.

Действительно, поскольку многоугольники подобные (рис. 155), то $AB = k \cdot A_1B_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$, ..., $EA = k \cdot E_1A_1$. Сложив левые и правые части этих равенств, имеем: $P = k \cdot P_1$, где P и P_1 — их периметры, k — коэффициент подобия.

Теорема. Отношение площадей двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия этих многоугольников.

Доказательство. Рассмотрим вначале подобные треугольники. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 156), то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Проведем в этих треугольниках из вершин B и B_1 высоты и обозначим их через h и h_1 . Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot h}{2}, \quad S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{A_1C_1 \cdot h_1}{2},$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{h}{h_1}$$

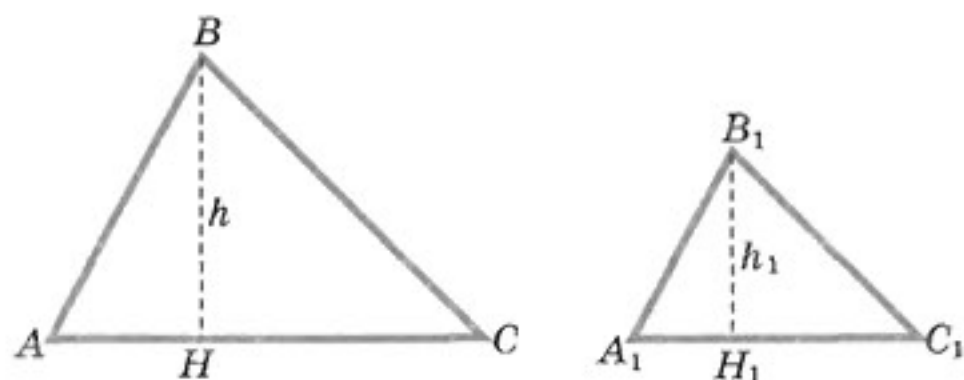


Рис. 156

Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует: $\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Поскольку $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\frac{h}{h_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Заменив в равенстве

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{h}{h_1} \quad \text{отношение } \frac{h}{h_1} \text{ равным ему отношением}$$

$$\frac{AC}{A_1C_1}, \text{ получим } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = k^2.$$

Рассмотрим теперь два произвольных подобных многоугольника F и F_1 (рис. 157), где $F \sim F_1$ (число k над знаком \sim означает коэффициент подобия этих фигур). Разбив многоугольники на треугольники, как показано на рисунке, будем иметь:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \quad \triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1,$$

$$\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1.$$

$$S_{\triangle ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}, \quad S_{\triangle ACD} = k^2 \cdot S_{\triangle A_1C_1D_1},$$

$$S_{\triangle ADE} = k^2 \cdot S_{\triangle A_1D_1E_1}.$$

Сложив левые и правые части этих равенств, имеем:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADE} &= \\ &= k^2 \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1} + k^2 \cdot S_{\triangle A_1C_1D_1} + k^2 \cdot S_{\triangle A_1D_1E_1} = \\ &= k^2 (S_{\triangle A_1B_1C_1} + S_{\triangle A_1C_1D_1} + S_{\triangle A_1D_1E_1}); \end{aligned}$$

$$S_F = k^2 \cdot S_{F_1}, \quad \frac{S_F}{S_{F_1}} = k^2.$$

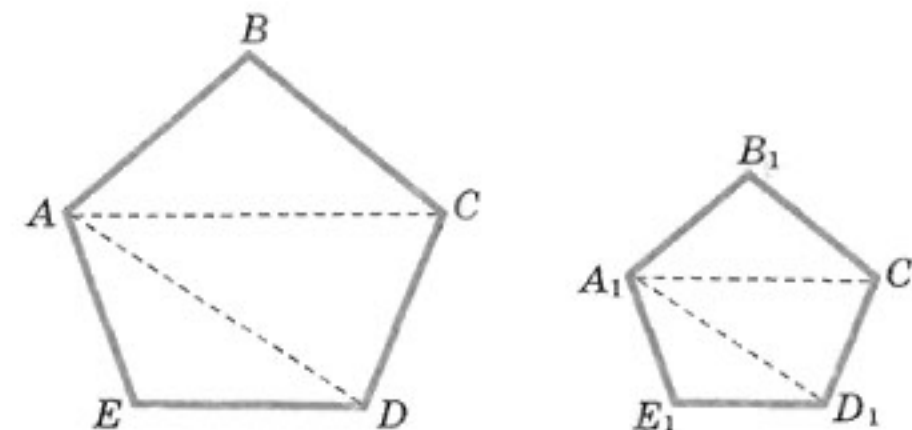


Рис. 157

- ? 1. Дайте определение подобных многоугольников.
 2. Объясните понятие подобия произвольных фигур.
 3. Что такое гомотетия? Какие фигуры считаются гомотетичными?
 4. Верно ли, что периметры подобных многоугольников относятся как их соответственные стороны, а площади — как квадраты этих сторон?

Задания

Устное упражнение 625, а.

625. Сформулируйте и обоснуйте условия подобия: а) двух ромбов; б) двух параллелограммов; в) двух трапеций.

626. Постройте треугольник, гомотетический данному: а) с коэффициентом гомотетии 2 и центром гомотетии в точке пересечения его медиан; б) с коэффициентом гомотетии $-0,5$ и центром гомотетии в точке пересечения его биссектрис.

627. На рисунке 158 дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$, $\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1$. Докажите, что пятиугольник $ABCDE$ подобен пятиугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$.

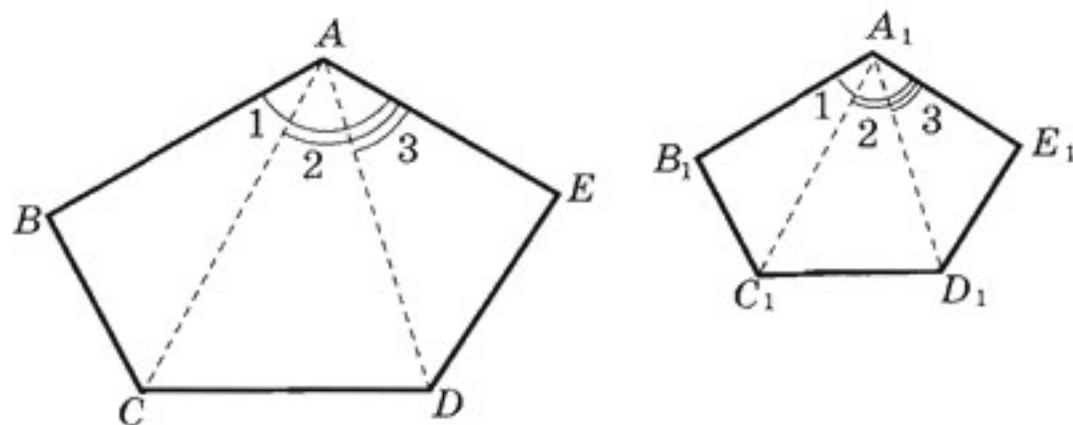


Рис. 158

628. Коэффициент подобия двух подобных многоугольников равен: а) 4; б) $\frac{1}{5}$; в) 0,4; г) 2,5. Чему равно отношение площадей этих многоугольников?

629. Отношение площадей двух подобных многоугольников равно: а) 36; б) 0,09. Чему равно отношение соответствующих сторон этих многоугольников?

630. На рисунке 159 даны подобные многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. По указанным данным найдите длину неизвестной стороны четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ и его периметр.

631. Найдите периметр равностороннего треугольника, площадь которого вдвое больше, чем площадь равностороннего треугольника со стороной, равной 10 см.

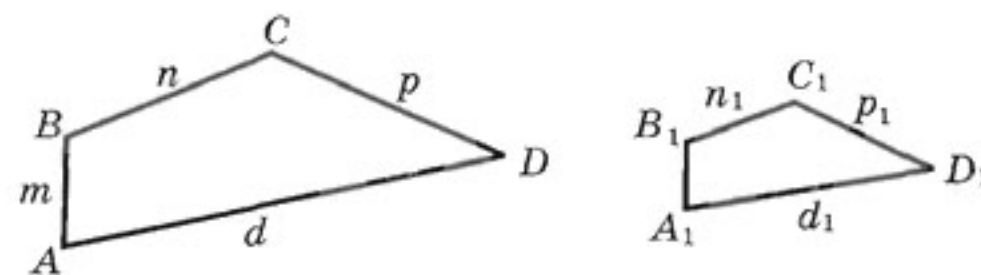


Рис. 159

632*. Сторона одного квадрата составляет: а) $\frac{1}{3}$; б) 0,6 стороны второго квадрата. На сколько процентов площадь второго квадрата больше, чем площадь первого квадрата?

633. Наименьшие стороны двух подобных многоугольников относятся как 2:5. Найдите периметр большего из этих многоугольников, если периметр меньшего равен 42 см.

634. В двух подобных многоугольниках меньшие стороны 35 см и 21 см, а разность их периметров 40 см. Найдите периметр каждого многоугольника.

635. Постройте два подобных прямоугольника с коэффициентом подобия, равным: а) 3; б) 0,3.

636. Постройте два подобных ромба с коэффициентом подобия, равным: а) 0,5; б) $\frac{2}{3}$.

637. Можно ли вырезать из бумаги прямоугольник, длина которого равна 12 см, такой, чтобы, сложив его пополам, получить два прямоугольника, каждый из которых подобен данному?

638. Прямоугольник $ABCD$ разбит на прямоугольники, как показано на рисунке 160. Подобны ли прямоугольники $ABCD$ и $AMNK$?

639. Докажите, что два любых квадрата подобны.

640. Сформулируйте и докажите признак подобия равнобоких трапеций.

641*. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны. Верно ли, что: а) биссектрисы AE и A_1E_1 ; б) медианы BM и B_1M_1 этих треугольников параллельны?

642. Площади двух подобных параллелограммов, один

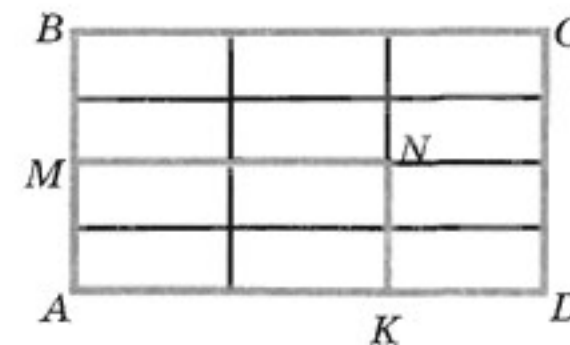


Рис. 160

из которых построен на меньшей стороне другого, равны 432 см^2 и 192 см^2 , а разность их периметров равна 40 см. Найдите высоты параллелограммов.

643*. Отрезок, заключенный между боковыми сторонами равнобедренной трапеции и параллельный ее основаниям, равен 35 см. Этот отрезок делит трапецию на две подобные между собой трапеции, площади которых равны 200 см^2 и 392 см^2 . Найдите боковую сторону трапеции.

644*. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$ ($a > b$). Отрезок EF проведен так, что прямоугольник $BCEF$ подобен прямоугольнику $ABCD$. Найдите площадь прямоугольника $ADEF$.

645. На плане в масштабе 1 : 10 000 изображен земельный участок в форме многоугольника, периметр которого равен 15 см. Сколько проволоки понадобится, чтобы огородить им участок в два ряда?

646. Площадь изображения на плане земельного участка в форме многоугольника равна 144 см^2 . Найдите площадь самого участка, если масштаб равен 1 : 10 000.

647. Постройте ромб по его данным тупому углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла.

648. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что его вершины D , E и F принадлежат соответственно сторонам AB , BC и AC . Найдите отрезки BE и EC , если $AB = 14 \text{ см}$, $BC = 12 \text{ см}$ и $AC = 10 \text{ см}$.

649. В параллелограмме $ABCD$ отрезки, последовательно соединяющие середины сторон, образуют параллелограмм $EMKP$, углы которого соответственно равны углам данного параллелограмма. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $EMKP$ подобные.

650. Даны два ромба. Диагонали одного из них равны 6 см и 8 см, а второй ромб гомотетичен первому. (Центром гомотетии является вершина одного из острых углов ромба с данными диагоналями, а коэффициент гомотетии равен 0,6.) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей второго ромба до вершины тупого угла первого ромба.

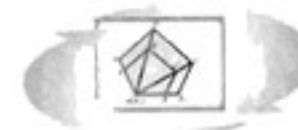
651. Дан параллелограмм со сторонами a и b , острый угол которого равен 60° . Постройте параллелограмм, гомотетичный данному, взяв за центр гомотетии вершину одного из

тупых углов параллелограмма, с коэффициентом гомотетии, равным $\frac{2}{3}$.

652*. Докажите, что медианы произвольного треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

653*. Периметр параллелограмма равен 1 м, а каждая диагональ его разделена на три равные части. Найдите периметр четырехугольника, для которого точки деления являются вершинами.

654*. Стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$). Найдите стороны подобного ему параллелограмма, большая высота которого равна меньшей высоте данного параллелограмма.



Повторение главы VI

Исторические сведения

Немецкий математик Феликс Клейн в конце XIX столетия попробовал положить геометрические преобразования (отображения) в основу классификации свойств геометрических фигур. Он предложил различать геометрические свойства по тем преобразованиям, которые эти свойства сохраняют. К одной группе при этом будут относиться те свойства, которые сохраняются лишь при движениях фигур (сюда относятся все свойства, связанные с расстояниями между точками). В другую группу попадут свойства, сохраняющиеся при преобразованиях подобия (например, все свойства, связанные с величинами углов).

Подход, предложенный Клейном, может помочь при отыскании путей доказательств тех или иных теорем геометрии, при решении задач.



Феликс Клейн
(1849—1925)

Контрольные вопросы

1. Какие отрезки называются пропорциональными?
2. Дайте определение подобных треугольников. Что такое коэффициент подобия треугольников?

3. Какие признаки подобия треугольников вы знаете?
4. Какие признаки подобия прямоугольных треугольников вы знаете?
5. Дайте определение подобных многоугольников.
6. Какое преобразование называется гомотетией? Что такое центр гомотетии? Коэффициент гомотетии?
7. Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.
8. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных многоугольников.
9. В чем суть метода подобных треугольников при решении задач? Покажите примеры его использования

Задания

655. Стороны треугольника относятся как $2:5:4$. Найдите стороны подобного треугольника, если его периметр равен $5,5$ дм.
656. Отрезки AZ и DE пересекаются в точке C , причем прямые AD и BE параллельны. Докажите, что треугольники ADC и BEC подобные.
657. В трапеции $ABCE$ с основаниями BC и AE диагонали пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники CKB и AKE подобные.
658. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 24 , а $AO:CO = 3:1$.
659. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 18$ см, $AD = 24$ см. Диагонали трапеции пересекаются в точке K , причем $AK = 20$ см. Найдите длину отрезка CK .
660. Прямая p пересекает сторону AD параллелограмма $ABCD$ в точке K , сторону BC — в точке M и диагональ BD — в точке E . Найдите BM , если $DK = 9$ см, $BE = 16$ см, $DE = 6$ см.
661. Прямая, параллельная стороне OM треугольника POM , пересекает сторону OP в точке A и сторону PM в точке B . Докажите, что треугольники ABP и OMP подобные.
662. В треугольнике OKM на стороне OK взята точка A , а на стороне KM — точка B , причем отрезок AB параллелен стороне OM . Найдите длину отрезка AB , если $OK = 18$ см, $AK = 12$ см, $OM = 15$ см.
663. Наибольшие стороны двух подобных треугольников равны 15 и 5 , разность их периметров равна s . Найдите периметры этих треугольников.

664. Постройте треугольник по его двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

665*. Постройте треугольник по трем данным точкам, являющимся серединами его сторон.

666. Стороны треугольника равны $12,6$ см, $16,5$ см и 18 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его меньшая сторона равна большей стороне данного треугольника.

667. В треугольнике ABC через точку пересечения медиан проведена прямая DE , параллельная AC ($D \in AB$, $E \in BC$). Найдите DE , если $AC = 10$ см.

668. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 , пересекающиеся в точке K . Докажите, что $\triangle AKB_1 \sim \triangle BCB_1$.

669. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AN и BM , пересекающиеся в точке O . Найдите все пары подобных треугольников, образованных при этом.

670. В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, на большую сторону опущена высота. Верно ли, что при этом образованы три пары подобных треугольников? Если верно, то укажите эти пары.

671. В прямоугольном треугольнике OMK из точки C , лежащей на гипотенузе OM , опущен перпендикуляр CD на сторону MK . Докажите, что треугольник CMD и OMK подобные.

672. Из точки M , находящейся на гипотенузе OP прямоугольного треугольника OPK , опущен перпендикуляр MN на сторону PK . Найдите гипотенузу OP , если $MP = 12$ см, $MN = 4$ см, $OK = 6$ см.

673. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 10$ см. На стороне BC взята точка M так, что прямые AM и MD образуют прямой угол. Найдите отрезки BM и MC .

674. Могут ли два подобных, но не равных многоугольника иметь равные периметры?

675. Соответственные стороны двух подобных многоугольников относятся как $\frac{a}{b}$. Площадь одного из многоугольников равна S . Найдите площадь второго многоугольника. Выполните расчет, если $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ и $S = 24$ дм².

676. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O . Подобны ли треугольники AOD и BOC ?

677. а) Может ли ось симметрии делить прямоугольник на два ему подобных прямоугольника?

б) Может ли диагональ трапеции разделить ее на два подобных треугольника?

678. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичные. Найдите отношение площадей и периметров этих треугольников, если их биссектрисы AE и A_1E_1 относятся как $2:5$.

679. AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что треугольники AA_1C и BB_1C подобные, если $AA_1 = 8$ см, $AB_1 = B_1C = 5$ см, и найдите BB_1 .

680*. По двум данным отрезкам c и p постройте отрезок x :

а) $x = \frac{cp}{c+2p}$; б) $x = \frac{c^2}{2p}$.

681. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, равные c и $2c$. Найдите стороны треугольника.

682. Докажите, что отношение квадратов катетов прямоугольного треугольника равно отношению проекций этих катетов на гипотенузу.

683*. Докажите, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты их гипотенуз, то такие треугольники подобны.

684*. Постройте треугольник по двум его сторонам и $\frac{1}{3}$ медианы, проведенной к третьей стороне.

685*. В треугольник ABC вписан параллелограмм так, что один из его углов совпадает с углом A , а остальные вершины параллелограмма лежат на сторонах треугольника. Периметр параллелограмма равен 60, а стороны треугольника равны $AB = 26$, $BC = 52$, $AC = 39$. Найдите диагональ параллелограмма, лежащую против угла A .

686*. Стороны параллелограмма имеют длины a и b ($a > b$). Проведите прямую, отсекающую от данного параллелограмма ему подобный параллелограмм.

687*. Дана окружность и проведены два ее радиуса. Проведите хорду окружности, которая делится этими радиусами на три равные части.

688*. В разностороннем треугольнике ABC проведены биссектриса AN , медиана AM и высота AH . Докажите, что точка N лежит между точками M и H .

Домашняя контрольная работа

Вариант 1

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB:A_1B_1 = 2$. Чему равно отношение периметров этих треугольников? Выберите верный ответ: а) 6; б) 4; в) 2; г) 0,5.

2. Стороны двух подобных треугольников относятся как $3:4$, а разность их площадей равна 70 см^2 . Найдите площади этих треугольников.

3. Стороны треугольника 15 дм, 20 дм и 28 дм. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону треугольника его биссектриса, проведенная из вершины меньшего угла.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH . Докажите, что $AC^2:AH = BC^2:BH$.

5. Используя метод подобия, постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе, выходящей из вершины прямого угла.

Вариант 2*

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 6. Какими будут стороны подобного ему треугольника с периметром $58,5 \text{ см}$?

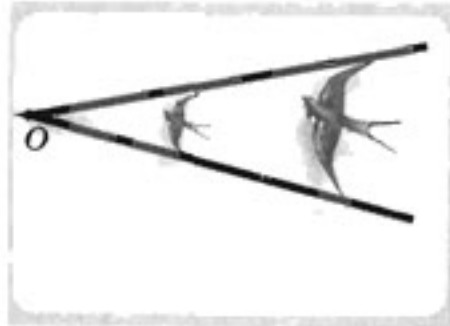
2. Площадь треугольника ABC равна 36 см^2 . Чему равна площадь треугольника MCN , если отрезок MN с концами на сторонах BC и AC параллелен стороне AB и проходит через точку пересечения медиан?

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 9,6 см. Найдите катеты треугольника.

4. В $\triangle ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. В каком отношении его биссектриса AA_1 делит биссектрису BB_1 , считая от точки B ?

5. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали, равному $2:3$.

Глава VII



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА

§ 16. Тригонометрические функции острого угла

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

Возьмем какой-нибудь произвольный острый угол, например $\angle BAC = \alpha$ (рис. 161). На стороне AB возьмем произвольную точку M и построим перпендикуляр MH на сторону AC . Получим прямоугольный треугольник MAH . Рассмотрим отношения сторон этого треугольника: $\frac{MH}{AM}$, $\frac{AH}{AM}$, $\frac{MH}{AH}$, $\frac{AH}{MH}$. Значения этих отношений не зависят от того, где на стороне AB взята точка M . Так, если вместо точки M на стороне AB взять точку M_1 , опустить перпендикуляр M_1H_1 на AC , то треугольник M_1AH_1 будет подобным треугольнику MAH и ни одно из выписанных выше отношений не изменится, по-

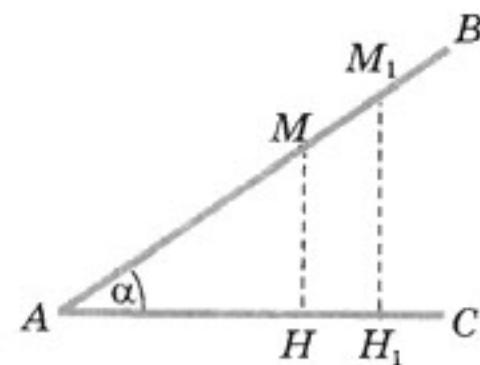


Рис. 161

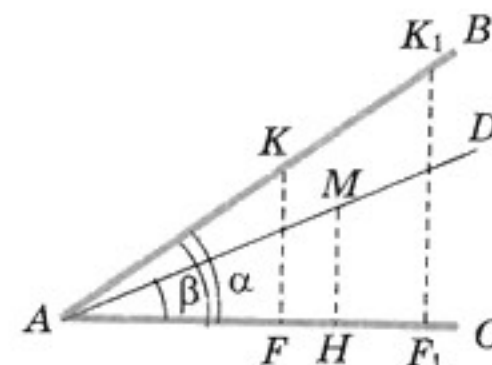


Рис. 162

скольку в подобных треугольниках соответственные стороны пропорциональны. Значит, углу α соответствуют одни и те же определенные значения каждого из данных отношений.

Взяв другой острый угол $DAC = \beta$ (рис. 162), также можно убедиться, что данные отношения не зависят от выбора точки M на стороне AD . Таким образом, как видим, каждому градусному значению острого угла можно поставить в соответствие определенное значение каждого из данных отношений. Поэтому можно сделать вывод, что отношения сторон прямоугольного треугольника являются функциями его острого угла. Эти функции называются *тригонометрическими функциями угла*. Слово «тригонометрия» происходит от слова «тригон» — что означает в переводе с греческого языка «треугольник», и «метрео» — измерять.

Определения

Отношение катета, противолежащего углу A , к гипотенузе называется синусом угла A и обозначается $\sin A$.

Отношение катета, прилежащего к углу A , к гипотенузе называется косинусом угла A и обозначается $\cos A$.

Отношение катета, противолежащего углу A , к катету, прилежащему к нему, называется тангенсом угла A и обозначается $\operatorname{tg} A$.

Отношение катета, прилежащего к углу A , к катету, противолежащему этому углу, называется котангенсом угла A и обозначается $\operatorname{ctg} A$.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} \quad (\text{рис. 163}).$$

Так как углы часто обозначаются строчными буквами греческого алфавита, то их тригонометрические функции записываются, например, так: $\sin \alpha$ (читается: синус альфа); $\cos \beta$ (читается: косинус бета); $\operatorname{tg} \gamma$ (читается: тангенс гамма); $\operatorname{ctg} \delta$ (читается: котангенс дельта).

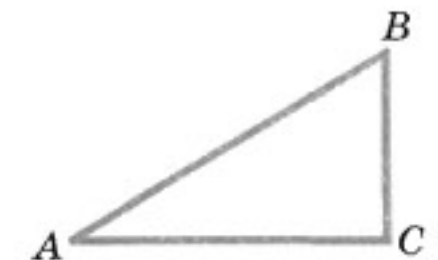


Рис. 163

2. Тригонометрические формулы

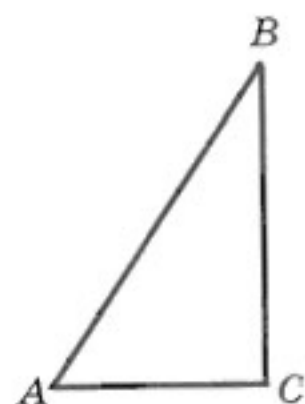


Рис. 164

Между тригонометрическими функциями угла существуют разные связи. Например, из двух первых соотношений следует, что $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$ (тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла). Из двух последних соотношений следует, что $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1$.

Используя два первых отношения и теорему Пифагора, можно доказать, что $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

$$\text{Действительно, } \sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1 \text{ (рис. 164).}$$

Равенство $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ называется *основным тригонометрическим тождеством*.

На основании определений тригонометрических функций острого угла имеем:

катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету;

катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на косинус угла, прилежащего к этому катету;

катет прямоугольного треугольника равен второму катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету;

катет прямоугольного треугольника равен второму катету, умноженному на котангенс угла, прилежащего к первому катету.

Поскольку каждый из катетов прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы, то синус и косинус любого острого угла меньше 1. Что касается тангенса и котангенса острого угла, то они могут быть выражены числами и большими 1, и меньшими 1, и равными 1, так как один из катетов может быть и больше другого, и меньше другого, и равен ему.

Можно установить, что большему острому углу соответствует большее значение его синуса; большему острому углу соответствует меньшее значение его косинуса; большему острому

углу соответствует большее значение его тангенса; большему острому углу соответствует меньшее значение его котангенса. (Докажите это самостоятельно.)

Вычислять значения некоторых тригонометрических функций углов прямоугольного треугольника удобно, применяя теорему Пифагора.

Например, $\sin 60^\circ = \frac{BC}{AB}$ (рис. 165). Поскольку $AC = 0,5 \cdot AB$ (против угла в 30° лежит катет прямоугольного треугольника, равный половине его гипотенузы), то

$$BC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot AB\right)^2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$\sin 60^\circ = \frac{AB\sqrt{3}}{2 \cdot AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таблица значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для углов α , равных 30° , 45° и 60° , приведена ниже.

Таблица 21

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Выразив $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ десятичными дробями, будем иметь: $\sqrt{2} \approx 1,414$; $\sqrt{3} \approx 1,732$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$; $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$.

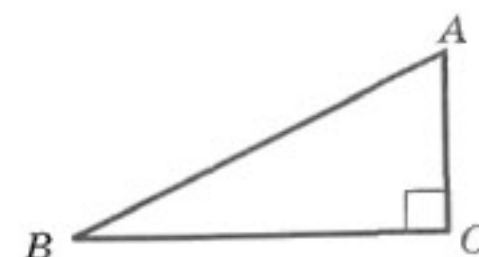


Рис. 165

Тогда таблица значений синуса, косинуса и тангенса данных углов примет следующий вид.

Таблица 22

Угол	Синус	Косинус	Тангенс
30°	0,500	0,866	0,577
45°	0,707	0,707	1,000
60°	0,866	0,500	1,732

Для вычисления значений тригонометрических функций углов имеются разные таблицы; одна из таких таблиц, которой будем пользоваться, помещена в приложении.

С помощью установленных зависимостей между тригонометрическими функциями углов прямоугольного треугольника и таблиц можно по некоторым известным элементам прямоугольного треугольника находить неизвестные.

Например, если в прямоугольном треугольнике ABC известны гипотенуза $c = 4$ и угол A , равный 42° , то неизвестные катеты можно найти так: $BC = c \cdot \sin 42^\circ$; $AC = c \cdot \cos 42^\circ$. По таблице (ограничиваясь двумя десятичными знаками после запятой) находим, что $\sin 42^\circ \approx 0,67$, а $\cos 42^\circ \approx 0,74$. Тогда $BC \approx 4 \cdot 0,67 \approx 2,7$; $AC \approx 4 \cdot 0,74 \approx 3$.

Тригонометрические функции углов часто используются в практических расчетах.

Задача 1. Объяснить, как можно найти расстояние между двумя точками, находящимися на противоположных сторонах озера (рис. 166).

Решение. Измерив расстояние AB , например, и угол A , получим $BC = AB \sin A$. Можно измерить расстояние AC и угол A , тогда $BC = AC \operatorname{tg} A$. Если, например, оказалось, что $AB = 305$ м, а $\angle A = 32^\circ$, то $BC = 305 \sin 32^\circ \approx 305 \cdot 0,53 \approx 162$ (м).

Другим способом при указанных данных расстояние BC найдите самостоятельно.

Задача 2. Самолет, находящийся над пунктом A на высоте $h \approx 400$ м, начал приземляться на аэродром, рас-

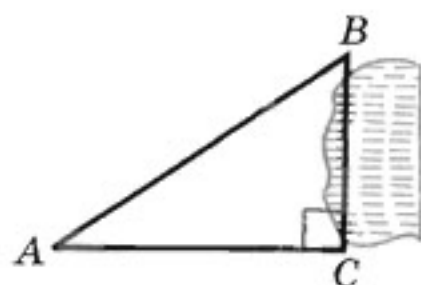


Рис. 166



Рис. 167

положенный в 2,5 км от этого пункта. Найти угол приземления самолета (рис. 167).

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC находим: $\operatorname{tg} B = \frac{CA}{AB} \approx \frac{400}{2500} = 0,16$. По таблице находим: $\angle B \approx 9^\circ$.

Отметим, что по данному значению одной из тригонометрических функций острого угла можно построить и сам этот угол. Например, для построения угла, синус которого равен $\frac{3}{4}$, можно построить прямоугольный треугольник, в котором отношение катета, противолежащего искомому углу, к гипотенузе равно $\frac{3}{4}$ (рис. 168).

Углы α , косинус которого равен 0,7, и β , тангенс которого равен 4, постройте самостоятельно.

На основании определений тригонометрических функций углов и известных тригонометрических тождеств выполняют разные тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad & \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \\ & = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \\ & = \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = -\operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

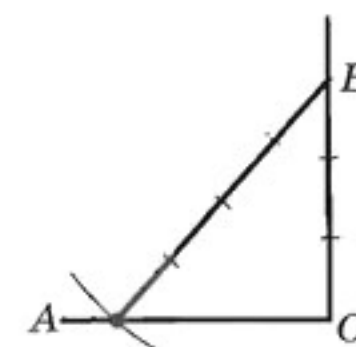


Рис. 168

Пример 2. Доказать тождество $(\sin \alpha + \sin^{-1} \alpha)^2 - (\sin \alpha - \sin^{-1} \alpha)^2 = 4$.

Доказательство. Преобразуем тождественно левую часть равенства:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \sin^{-1} \alpha)^2 - (\sin \alpha - \sin^{-1} \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + \\ &+ 2 \sin \alpha \sin^{-1} \alpha + \sin^{-2} \alpha - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \sin^{-1} \alpha + \\ &+ \sin^{-2} \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin^0 \alpha + \sin^{-2} \alpha - \sin^2 \alpha + \\ &+ 2 \sin^0 \alpha - \sin^{-2} \alpha = 4 \sin^0 \alpha = 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество доказано.

Пример 3. Найти значение выражения $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha = 60^\circ$.

Решение. $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$
 $= 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. При $\alpha = 60^\circ$ значение $\cos^2 \alpha$ равно 0,25.

Ответ: 0,25.

Пример 4. Доказать, что при всех $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ]$ выполняется неравенство $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} < -0,5$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} &= \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{-(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)} = \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{-(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)} = -1; \quad -1 < -0,5. \end{aligned}$$

Неравенство доказано.

Пример 5. Доказать, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(Сделайте это самостоятельно.)

1. Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

2. Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

3. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?

4. Докажите тождества: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

5. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° , 60° ? Объясните, как найти эти значения.

6. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол, через острый угол и другой катет?

Задания

Устные упражнения 689—690, а, б; 691, а.

689. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 см и 16 см. Найдите:

- синус большего острого угла треугольника;
- косинус меньшего острого угла;
- сумму синусов острых углов;
- сумму квадратов косинусов острых углов;
- тангенс одного из острых углов;
- произведение тангенсов острых углов;
- сумму квадратов синуса и косинуса каждого из острых углов;
- произведение тангенса и котангенса каждого из острых углов.

690. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 15 см, а один из катетов 9 см. Найдите:

- синус меньшего острого угла треугольника;
- косинус большего острого угла;
- сумму косинусов острых углов;
- сумму квадратов синусов острых углов;
- сумму тангенса и котангенса одного из острых углов;
- квадрат суммы синуса и косинуса каждого из острых углов.

691. Упростите выражение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1; & \quad \text{б) } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}; \\ \text{в) } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \alpha; & \quad \text{г) } \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}. \end{aligned}$$

692. Упростите выражение:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha; & \quad \text{д) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha; \\ \text{б) } -\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha); & \quad \text{е) } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha; \\ \text{в) } 3 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha; & \quad \text{ж*) } (1 - \cos^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha; \\ \text{г) } 4 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - 5; & \quad \text{з*) } (1 - \sin^2 \alpha) : \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

693. Вычислите:

- а) $0,75 \cos 60^\circ + 0,25 \sin 30^\circ$;
- б) $5 \sin 30^\circ - 3 \operatorname{tg} 45^\circ$;
- в) $0,(5) \operatorname{ctg} 45^\circ - 2^{-1} \sin 30^\circ \cos 60^\circ$;
- г*) $2,1(3) \sin 30^\circ - 2^{-2} \operatorname{tg} 45^\circ$.

694. Верно ли, что $\sin^2 45^\circ$ равен среднему арифметическому:

- а) $\cos^2 30^\circ$ и $\cos^2 60^\circ$; б) $\sin^2 30^\circ$ и $\sin^2 60^\circ$?

695. Постройте острый угол: а) синус которого равен 0,4; б) косинус которого равен $\frac{5}{8}$; в) тангенс которого равен 1,5; г) котангенс которого равен 0,25.

696. Постройте острый угол; а) синус которого равен 0,2; б) косинус которого равен $\frac{2}{13}$; в) тангенс которого равен 2,5; г) котангенс которого равен 0,5; д*) синус которого равен его косинусу.

697. Начертите произвольный прямоугольный треугольник, измерьте его некоторые стороны и найдите синус, косинус, тангенс и котангенс каждого из острых углов. Значения округлите до 0,1.

698. Даны гипотенуза $c = 82$ см и $\angle A = 42^\circ$ прямоугольного треугольника ABC . Найдите катеты этого треугольника.

699. Известны гипотенуза (7 см) прямоугольного треугольника и косинус (0,4) одного из его острых углов. Найдите катеты этого треугольника.

700. Известны катет прямоугольного треугольника ($\frac{5}{7}$ см) и синус (0,6) одного из его острых углов. Найдите гипотенузу и неизвестный катет этого треугольника.

701. По данным гипотенузе ($18\frac{2}{3}$ дм) и тангенсу (1,6) одного из острых углов прямоугольного треугольника найдите его катеты.

702. Известны гипотенуза (c) прямоугольного треугольника и один из его острых углов (30°). Найдите катеты этого треугольника и косинус его большего острого угла.

703. Используя рисунок 169, докажите, что функция:

а) $y = \sin \alpha$, где α — острый угол, возрастает;

б) $y = \cos \alpha$, где α — острый угол, убывает.

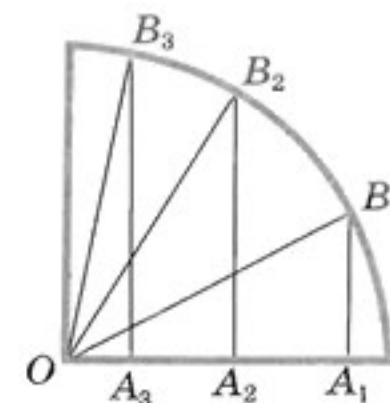


Рис. 169

704. По данным катету (m) прямоугольного треугольника и одному из его острых углов (45°) найдите гипотенузу.

705. Сравните:

- а) $\sin 20^\circ$ и $\sin 35^\circ$;
- б) $\cos 15^\circ$ и $\cos 70^\circ$;
- в) $\sin 40^\circ$ и $\cos 40^\circ$;
- г) $\operatorname{tg} 40^\circ$ и $\operatorname{ctg} 40^\circ$;
- д) $\sin \alpha$ и $\sin^2 \alpha$, где α — острый угол;
- е) $\cos \alpha$ и $\cos^{-1} \alpha$, где α — острый угол.

706. Оцените знак разности:

- а) $\sin 80^\circ - \cos 80^\circ$; в*) $\sin 40^\circ - \cos 70^\circ$;
- б) $\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ$; г*) $\sin 33^\circ - \cos 50^\circ$.

707. Что больше и почему:

- а) $\sin 60^\circ$ или $\operatorname{tg} 30^\circ$; в) $\sin 25^\circ \cdot \cos 65^\circ$ или 0,25;
- б) $\cos 45^\circ$ или $\operatorname{tg} 45^\circ$; г) $\sin 40^\circ \cdot \cos 20^\circ$ или 0,25?

708*. Найдите:

- а) синус и тангенс острого угла, косинус которого равен $\frac{12}{13}$;
- б) косинус и тангенс острого угла, синус которого равен $\frac{5}{13}$.

709. Существует ли угол:

- а) синус которого равен 0,9, а косинус — 0,3;
- б) синус которого равен 0,8, а косинус — 0,6?

710. Какие из чисел 0,2; 2,1; 0,(3); $\frac{\sqrt{3}}{3}$ могут служить: а) синусом острого угла; б) косинусом острого угла?

711. Какие из чисел 2; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; -4 могут служить тангенсом острого угла?

712. Даны катет $a = 25$ см прямоугольного треугольника и острый угол A , равный 32° . Найдите гипотенузу и второй катет этого треугольника.

713. Даны катеты $a = 21$ см и $b = 18$ см прямоугольного треугольника. Найдите его острые углы и гипотенузу.

714. Даны катет $a = 52$ см и гипотенуза $c = 67$ см прямоугольного треугольника. Найдите острые углы и второй катет этого прямоугольного треугольника.

715. Сравните $\sin^2 60^\circ$ и $2 \sin 60^\circ - 1$.

716. Упростите выражение:

а) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - 1$; б) $\left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2$.

717. Известно, что косинус острого угла равен $\frac{4}{5}$. Найдите тангенс этого угла.

718. Постройте острый угол: а) синус которого вдвое больше его косинуса; б) косинус которого втрое меньше его синуса; в*) тангенс которого составляет 30 % его котангенса.

719. Известно, что сумма синуса и косинуса острого угла равна 0,5. Найдите произведение косинуса и синуса этого угла.

720. Вершина мачты высотой 42 м видна наблюдателю под углом 36° к горизонту. На каком расстоянии от основания мачты находится наблюдатель?

721. Самолет виден под углом 40° в тот момент, когда он пролетает над пунктом, находящимся от наблюдателя на расстоянии 5 км. На какой высоте пролетает самолет и на каком расстоянии от наблюдателя он находится?

722. На расстоянии 100 м от трубы котельной ее верхний конец виден под углом 25° . Какой высоты эта котельная?

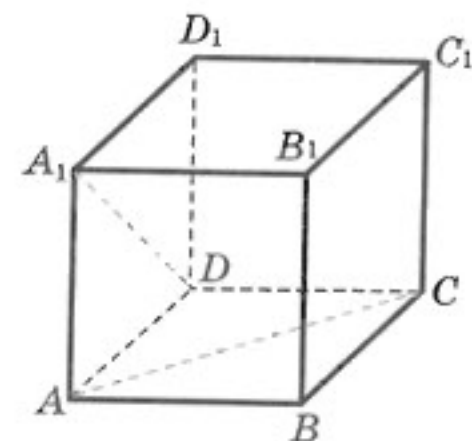


Рис. 170

723. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведены диагонали AC и $A_1 D$ двух граней (рис. 170). Что больше: $\sin \angle BAC$ или $\cos \angle ADA_1$?

724. В треугольнике ABC $AB = BC$, BH и AP — высоты, причем $AP : BH = 1 : 2$. Найдите косинус угла при основании этого треугольника.

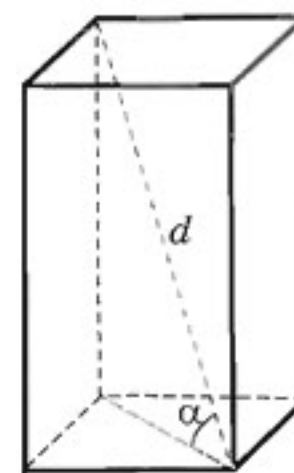


Рис. 171

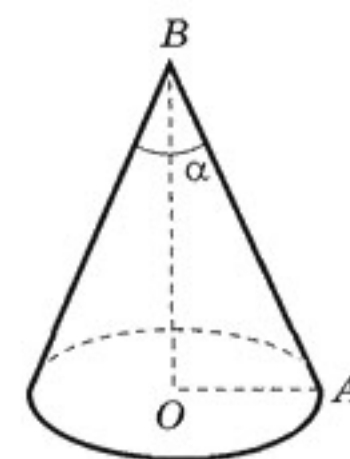


Рис. 172

725*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α (рис. 171). Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания делит его угол в отношении 1 : 2.

726*. Деталь имеет форму конуса, радиус OA основания которого равен 3 дм, а образующая BA равна 5 дм (рис. 172). Найдите угол α заточки конуса при его вершине.

727*. Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 , а тангенс одного из острых углов равен 0,28. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины прямого угла.

728. Докажите, что площадь прямоугольника равна произведению квадрата его стороны на тангенс угла между этой стороной и диагональю прямоугольника.

729. Докажите, что площадь равнобокой трапеции равна произведению ее средней линии, боковой стороны и синуса острого угла.

730. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а косинус угла при его основании равен 0,28. Найдите высоты треугольника.

731. Железнодорожная насыпь имеет сверху ширину 6 м, а внизу — 12 м. Найдите высоту насыпи, если с обеих сторон она наклонена к основанию под углом 35° .

732. Доска длиной 3 м опирается о стену и наклонена под углом 65° к полу. Можно ли протянуть под доской по полу прямоугольный лист размером $2 \text{ м} \times 3 \text{ м}$, не касаясь нижнего конца доски?

733. Ель бросает тень длиной 24 м при угловой высоте солнца 46° . Какова высота этой ели?

734. 30-метровая вышка находится на берегу реки и видна с другого берега под углом 32° . Найдите ширину реки, если известно, что ее берега находятся на одном уровне по отношению к горизонту.

735. Длина балки, на которую опираются стропила двускатной крыши, равна 10 м. Найдите высоту крыши, если стропила образуют с балкой углы по 38° .

736. Дорожная насыпь, вертикальный разрез которой представляет собой равнобокую трапецию, имеет в верхней части ширину 10 м. Найдите ширину дороги в ее нижней части, если угол наклона насыпи равен 60° , а ее высота равна 1,5 м.

737. Диагональ прямоугольника равна 7,5 см, а угол между диагоналями равен 44° . Найдите площадь прямоугольника.

738. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его боковой стороне, равна h , а острый угол при его основании равен α . Найдите площадь треугольника.

739. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены его высота и медиана, равные соответственно 12 и 15. Найдите стороны и синусы острых углов этого треугольника.

740. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17, а основание — 16. Найдите: а) синус угла при основании треугольника; б*) косинус угла между боковыми сторонами.

741. В остроугольном треугольнике синус одного острого угла равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а синус другого $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите величину третьего угла этого треугольника.

742. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = 5$ см и $\operatorname{tg} A = 1$.

743. Найдите углы ромба, диагонали которого равны $2\sqrt{3}$ и 2.

744. Угол между высотами, проведенными к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равен: а) 40° ; б*) α . Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.

745. Найдите площадь равнобокой трапеции с основаниями a и b ($a > b$) и углом α при большем основании.

746. Найдите площадь прямоугольной трапеции, две меньшие стороны которой равны по 5 см, больший угол 135° .

747. Найдите площадь равнобокой трапеции, если ее меньшее основание равно 10 см, высота на 50 % короче этого основания, а острый угол равен 45° .

748. Верно ли для любого острого угла α равенство:

- а) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$;
б) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$?

749*. Докажите, что для любого острого угла α выполняется неравенство $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

750. Две прямолинейные дороги пересекаются под углом 43° . На одной из них в 6,5 км от развилки находится пункт, из которого надо проложить самый короткий путь до второй дороги. Найдите длину этого пути.

751. Докажите, что: а) произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника равно единице; б*) сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника меньше, чем 2.

752*. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 5, а сумма синусов острых углов равна 0,5.

753*. Стороны треугольника выражены числами 13, 14 и 15. Найдите синус, косинус и тангенс каждого из углов треугольника.

754. Вычислите:

- а) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - 3\sqrt{5}} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 3\sqrt{5}}$, если $\alpha = 45^\circ$;
б) $\frac{\sin^2 \alpha}{2\sqrt{3}+1} - \frac{\cos^2 \alpha}{2\sqrt{3}-1}$, если $\alpha = 30^\circ$.

755*. Верно ли равенство:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{2}{\cos \alpha} ?$$

756*. Вычислите:

- а) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$;
б) $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$;
в) $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, если $\alpha = 60^\circ$.

§ 17. Тригонометрические функции углов от 0° до 180°

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0° до 180°

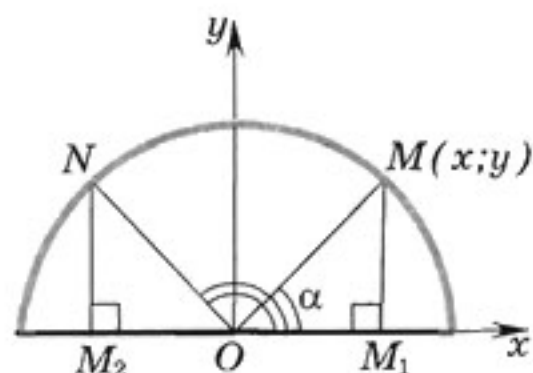


Рис. 173

До сих пор тригонометрические функции были определены только для углов, больших 0° , но меньших 90° . Теперь определим их для любого угла от 0° до 180° .

Построим прямоугольную систему координат и полуокружность радиусом 1 с центром в начале координат, которая расположена в первой и второй четвертях (рис. 173). Назовем эту полуокружность единичной и отложим от положительной полуоси Ox в полуплоскость, где $y > 0$, угол α . (Если луч OM совпадает с лучом Ox , то будем считать, что $\alpha = 0^\circ$.) Обозначим координаты точки M : через x — ее абсциссу, через y — ее ординату. Тогда значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для острого угла выражаются через координаты точки M :

$$\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \quad (1)$$

Если угол α прямой, тупой, равен 0° или развернутый, то его тригонометрические функции также определим по формулам (1). Тогда для любого угла α из промежутка $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ синусом угла α называется ордината y точки M единичной полуокружности, а косинусом угла α — абсцисса x точки M . При таком определении $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 0^\circ$ не существует, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 180^\circ$ не существует.

Заметим также, что $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, поскольку координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

2. Формулы приведения

Для любого угла α из промежутка $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ имеет место основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. (Установите это самостоятельно, используя соответствующие определения и теорему Пифагора.)

Справедливы также следующие тождества:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ;$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ;$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \text{ при } \alpha \neq 90^\circ.$$

Доказать эти тождества, которые называют формулами приведения, можно на основании соответствующих определений тригонометрических функций углов от 0° до 180° и рассмотрения некоторых треугольников. Например, формулы $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ и $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ следуют из равенства прямоугольных треугольников OMM_1 и ONM_2 (см. рис. 173). Разделив почленно последние равенства, получим $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \neq 90^\circ$.

Формулы приведения позволяют заменять значения тригонометрических функций одних углов значениями тригонометрических функций других углов, дополняющих их до 90° или до 180° .

Например: $\sin 40^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \cos 50^\circ$; $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 100^\circ = -\operatorname{tg} 80^\circ$.

Еще пример: упростить выражение $\frac{\cos 80^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$.

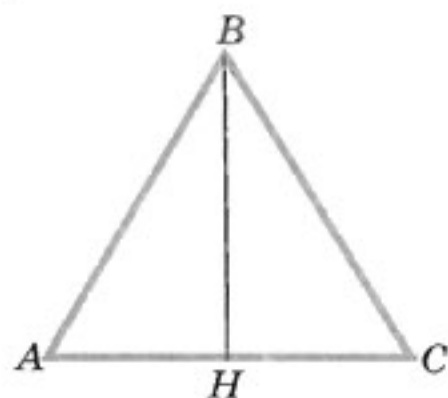
По формулам $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ и $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ получим: $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$, $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$.

$$\text{Отсюда } \frac{\cos 80^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 1.$$

Рассмотрим теперь несколько задач, для решения которых используются свойства тригонометрических функций углов от 0° до 180° .

Задача 1. Доказать, что площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.

а)



б)

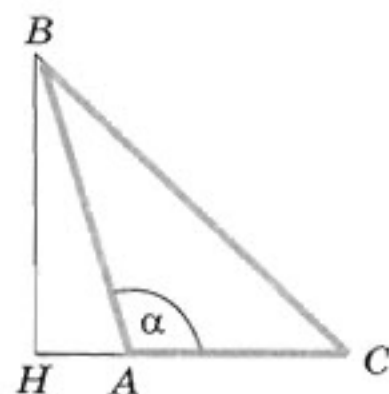


Рис. 174

Доказательство. Если треугольник остроугольный (рис. 174, а), то, проведя его высоту BH , имеем: $\frac{BH}{AB} = \sin A$, откуда $BH = AB \sin A$. Как известно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$. Подставив вместо BH выражение $AB \sin A$, получим $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \sin A$. Если треугольник тупоугольный (рис. 174, б), то его высота $BH = AB \sin (180^\circ - \alpha)$. Поскольку $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то и в этом случае $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \sin A$. Случай, когда треугольник прямоугольный, рассмотрите самостоятельно.

Задача 2. Построить параллелограмм по его данным смежным сторонам a и b ($a > b$) и синусу угла между диагональю и стороной b , равному 1.

Решение. Поскольку $1 = \sin 90^\circ$, то данный угол прямой. Тогда построение искомого параллелограмма осуществим так:

1. Строим прямоугольный треугольник $АСК$ по гипотенузе a и катету b .

2. Строим треугольник $МКС$, равный треугольнику $АСК$.

Четырехугольник $АСМК$ (рис. 175) — искомый параллелограмм, потому что, во-первых, он действительно параллелограмм,

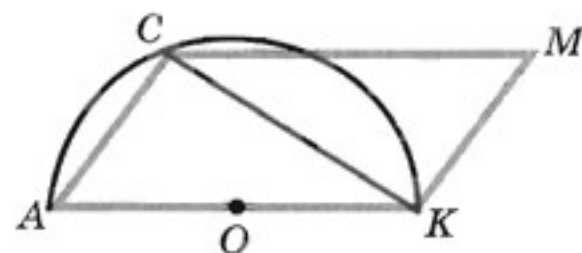


Рис. 175

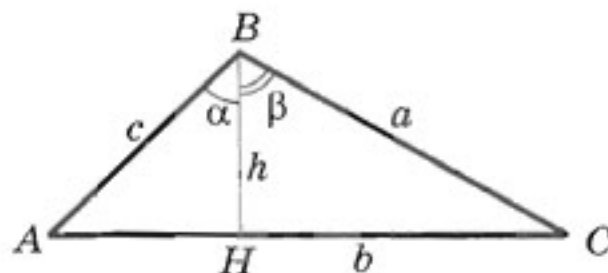


Рис. 176

лограмм, поскольку его противоположные стороны попарно равны, во-вторых, параллелограмм $АСМК$ удовлетворяет всем условиям задачи.

* Формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов

Теорема. Доказать, что

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, где α, β — острые углы.

Доказательство. $S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} ch \sin \alpha$; $S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} ah \sin \beta$ (рис. 176).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin (\alpha + \beta); S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABH} + S_{\triangle BHC};$$

$$\frac{1}{2} ac \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ch \sin \alpha + \frac{1}{2} ah \sin \beta;$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{h}{a} \sin \alpha + \frac{h}{c} \sin \beta;$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta.$$

На основе доказанной формулы и формул приведения можно получить формулу косинуса суммы двух углов:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Справедливо также, что

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta, \text{ где } \alpha > \beta;$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta, \text{ где } \alpha > \beta.$$

Эти формулы справедливы для любых углов α и β , что будет доказано в следующем классе.*

- ? 1. Начертите оси координат и постройте единичную полуокружность. Объясните, что такое синус и косинус угла α из промежутка $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
2. Что называется тангенсом угла α ? Для какого значения α тангенс не определен и почему?
3. Докажите основное тригонометрическое тождество.
4. Напишите формулы приведения.
5. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Задания

757. Составьте таблицу значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для углов: 0° , 90° , 180° .

758. Докажите, что для любого угла α , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

759. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов:
а) 120° ; б) 135° ; в) 150° .

760. Найдите: а) $\sin 160^\circ$; б) $\cos 130^\circ$; в) $\operatorname{tg} 140^\circ$.

761. Найдите угол α , для которого:

- а) $\sin \alpha = 0,2$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -0,4$;
б) $\cos \alpha = -0,6$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,7$.

762. Найдите $\sin \alpha$, если:

- а) $\cos \alpha = 0,5$; в*) $\cos \alpha = -0,6$;
б) $\cos \alpha = -1$; г) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

763. Найдите $\cos \alpha$, если: а) $\sin \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = 0,95$;
в) $\sin \alpha = 0,3$.

764. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если: а) $\cos \alpha = 1$; б) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

765. Найдите тангенс тупого угла параллелограмма, если синус острого его угла равен $0,7$.

766. Косинус одного из смежных углов равен $-0,6$. Найдите синус другого угла.

767. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол, равный 25° . Найдите отношение смежных сторон этого прямоугольника.

768. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен 20° . Верно ли, что синус угла при основании этого треугольника больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

769. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если:

- а) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; в) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
б) $\cos \alpha = -0,5$; г) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

770. Вычислите:

- а) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
б) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{8}{17}$.

771. Вычислите:

- а) $\sin 90^\circ + 2 \cos 90^\circ - \sin 0^\circ$;
б) $\cos 0^\circ - 0,5 \sin 90^\circ + 2 \sin 180^\circ$.

772. Докажите неравенство

$$(x-1)(x-3) + 10 \sin 150^\circ > 0.$$

773. Верно ли неравенство

$$(x+1)(x+3) + 10 \sin 0^\circ > 0?$$

774. Упростите выражение:

- а) $a^2 \sin 180^\circ + 2ab \cos 90^\circ + b^2 \operatorname{tg} 45^\circ$;
б) $a^2 \cos 0^\circ - 2ab \sin 90^\circ + b^2 \operatorname{tg}^2 45^\circ$.

775. Вычислите значение выражения:

- а) $\cos \alpha + \cos 3\alpha$, если $\alpha = 60^\circ$;
б) $\sin \frac{\alpha}{6} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$, если $\alpha = 180^\circ$.

776. Найдите все значения угла α из промежутка от 0° до 180° , при которых:

- а) $\sin \alpha = 1$; г) $\operatorname{tg} \alpha = 0$;
б) $\cos \alpha = -1$; д) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$;
в) $\sin \alpha = 0$; е) $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

777. Постройте угол A , если:

- а) $\sin A = \frac{2}{3}$; в) $\cos A = -\frac{2}{5}$;
б) $\cos A = \frac{3}{4}$; г) $\sin A = \frac{3}{5}$.

778. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

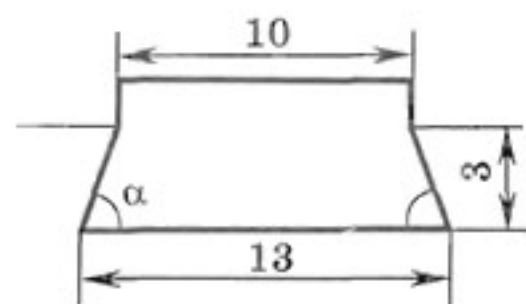


Рис. 177

779. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

780. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 2,5 дм, а угол между боковыми сторонами равен 45° .

781. Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями равен 30° .

782. Докажите, что площадь ромба равна квадрату его стороны, умноженному на синус его любого угла.

783. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, диагональ которого равна 11 см.

784. Вычислите углы ромба, диагонали которого равны 28 и 29.

785. Вычислите по указанным на рисунке 177 данным угол α .

786. Меньшее основание равнобокой трапеции равно a , боковая сторона — b , а угол при большем основании — α . Найдите периметр и площадь трапеции.

787. Постройте:

а) ромб по его данным стороне и косинусу одного из углов, равному $-0,8$;

б) параллелограмм по его данным диагоналям и тангенсу угла между ними, равному $\frac{3}{4}$.

788*. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если даны его гипотенуза c и сумма синусов острых углов d . Выясните, при каких значениях d имеет решение эта задача.

789. Докажите, что

$$\cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ = -\cos^2 90^\circ \cdot \cos^2 30^\circ.$$

790. Вычислите:

а) $2 \sin 0^\circ - 4 \cos 90^\circ + 5 \operatorname{tg} 180^\circ$;

б) $2 \cos 0^\circ - 4 \sin 90^\circ - 5 \operatorname{tg} 180^\circ$;

в) $(\sin \alpha + \sin 3\alpha)^{-1}$ при $\alpha = 30^\circ$;

г) $(\cos \alpha + \cos 3\alpha)^{-1}$ при $\alpha = 60^\circ$.

791. Упростите выражение:

а) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)$;

б) $\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha)$;

в) $\sin^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2 \alpha$;

г) $\cos^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha)$.

792. Докажите тождество:

а) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2 \cos^{-2} \alpha$;

в*) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$;

г*) $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = (\sin \alpha \cos \alpha)^2$.

793. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3\frac{3}{7}$. Чему может быть равен $\sin \alpha$?

794. Известно, что $\cos \alpha = -1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$?

795. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin \alpha}$ при $\alpha = 100^\circ$; в) $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ при $\alpha = 90^\circ$;

б) $\sqrt{\cos \alpha}$ при $\alpha = 90^\circ$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg}^{-1} \alpha}$ при $\alpha = 150^\circ$?

796*. Верно ли при любом значении $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ неравенство:

а) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} > 0$; б) $\frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} > 0$?

797. Определите знак выражения:

а) $(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)(\operatorname{tg} 60^\circ - \sin 120^\circ)$;

б) $(\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 60^\circ)(\sin 135^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ)$.

798. Решите уравнение:

а) $\frac{4x - 12}{9 - 8x} = \frac{\operatorname{ctg} 135^\circ}{\sin 30^\circ}$; б) $\frac{3x - 9}{7 \cdot 6x} = \frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ}$.

799. Решите неравенство:

а) $3(x - 2) < 6x + \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ}$; б*) $\frac{2}{x} \leq \sin 30^\circ$.

800*. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - 3 \sin \alpha \cos \alpha;$

б) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha.$

801. Углом какой четверти может быть угол α , если:

а) $\sin \alpha = |\sin \alpha|,$ в) $\operatorname{tg} \alpha = -|\operatorname{tg} \alpha|;$

б) $\cos \alpha = -|\cos \alpha|;$ г) $\operatorname{ctg} \alpha = |-\operatorname{ctg} \alpha|?$

802. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать выражение:

а) $1 + 4 \sin \alpha;$ в) $1, (4) - |\cos \alpha|;$

б) $1 - 5 \cos \alpha;$ г) $|\sin \alpha| - 1, (7).$

803. Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение:

а) $\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 2;$ б) $\cos^2 \alpha + \cos \alpha + 3.$

804*. Докажите, что если $\cos \alpha = \cos \beta$, то $\alpha = \beta$.

805*. Докажите, что если $\sin \alpha = \sin \beta$, то $\alpha = \beta$ или $\alpha = 180^\circ - \beta$.

806*. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos^2 \alpha;$ б) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha.$

807*. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Найдите синус и косинус третьего угла этого треугольника.

808*. Косинусы двух углов треугольника равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Найдите косинус, синус и тангенс третьего угла треугольника.

809. Является ли тождество равенство $(\sin \alpha + \sin^{-1} \alpha)^2 + (\sin \alpha - \sin^{-1} \alpha)^2 = 4$?

810*. Докажите неравенство:

а) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ \geq 1,2;$

б) $\sin 45^\circ + \cos 60^\circ > 1,1.$

811. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}^{-2} \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha};$

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$

в) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$

812. Докажите, что $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 0,25$, если $\alpha = 45^\circ$.

813. Является ли тождеством равенство:

а) $\frac{\operatorname{tg}^{-1} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha} = \cos^2 \alpha;$

б) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta};$

в*) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}?$

814*. Является ли тождеством равенство

$$\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{tg}^{-1} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha?$$



Повторение главы VII

Исторические сведения

Еще во II в. н. э. греческий ученый Птолемей в астрономическом сочинении, известном под арабским названием «Альмагест», изложил основы тригонометрии, дал таблицы синусов и способы решения разных задач, связанных с тригонометрией.

Выделение тригонометрии в специальный раздел теоретической математики связано с именем выдающегося персидского ученого Насирэддина Туси, написавшего «Трактат о полном четырехстороннике», где на геометрических началах развивается тригонометрия.



Мухаммед Насирэддин
Туси
(1201—1274)

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Как определяют синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0° до 180° ?
3. Покажите, что каждому значению угла от 0° до 180° соответствует только одно значение его: а) синуса; б) косинуса.
4. Верно ли, что с возрастанием острого угла его синус возрастает, а косинус убывает?
5. Какие тригонометрические тождества вы знаете? Какое из них считается основным тригонометрическим тождеством?
6. Какие тождества называются формулами приведения?
7. По какой формуле можно найти площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними?

Задания

815. Какие значения может принимать сумма:

- а) $\cos \alpha + 1$; в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
б) $\sin \alpha + 0,5$; г) $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$,

где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$?

816*. Какие из следующих равенств могут выполняться:

- а) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$; в) $\sin \alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2}$;
б) $\cos \alpha = a + \frac{1}{a}$;

где a и b — положительные числа?

817. Найдите:

- а) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ и α — острый угол;
б) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
в) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
г) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,6$ и α — острый угол.

818. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

- а) катет $a = 20$ см, гипотенуза $c = 29$ см;
б) катеты $a = 24$ см, $b = 7$ см.

819. а) В прямоугольном треугольнике с острым углом 60° и прилежащим к нему катетом, равным 10 см, найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

б) В равнобедренном прямоугольном треугольнике с катетом, равным $8\sqrt{2}$ см, найдите высоту, проведенную из вершины прямого угла.

820. а) В треугольнике ABC высота AD делит основание BC на отрезки $BD = 2\sqrt{3}$, $DC = 8$ см, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите боковые стороны и площадь треугольника.

б) В треугольнике ABC сторона BC образует с основанием AC угол, равный 30° , а высота, проведенная из вершины B , делит основание на отрезки $AD = 12$ см, $DC = 5\sqrt{3}$ см. Найдите боковые стороны и площадь треугольника.

821. а) Сторона ромба равна a , а его острый угол α . Найдите диагонали ромба.

б) Острый угол ромба равен β , а его большая диагональ равна d . Найдите сторону ромба и его вторую диагональ.

822. а) В прямоугольной трапеции основания равны a и $2a$, а острый угол равен α . Найдите неизвестные стороны трапеции.

б*) В прямоугольной трапеции бо́льшая боковая сторона равна меньшему основанию и равна a . Острый угол трапеции равен α . Найдите неизвестные стороны трапеции.

823. На расстоянии 800 м от места подъема самолета находятся деревья высотой до 20 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не коснуться вершин деревьев?

824. В прямоугольной системе координат даны точки $A(1; 2)$ и $B(2,5; 5,75)$. Какие углы образует прямая AB с осями координат?

825. Угол откоса горки из песка приблизительно равен 31° . Какой высоты можно насыпать кучу песка, если диаметр основания ее равен 3,5 м?

826. Постройте угол: а) синус которого равен $\frac{1}{3}$; б) тангенс которого равен 2,5.

827. Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b ; б) основание равно a .

828*. Вычислите значение выражения

$$\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha - 9 \cos 2\alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}.$$

829*. Вычислите:

- а) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$, если $\operatorname{tg} x = 1 \frac{3}{7}$;
 б) $\frac{4 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

830. а) Найдите отношение синусов углов A и B остроугольного треугольника ABC , если даны длины сторон BC и AC .

б) Найдите отношение сторон AB и AC остроугольного треугольника ABC , если известны синусы углов A и C .

831. Докажите, что сумма тангенсов углов равностороннего треугольника равна их произведению.

832. Докажите, что для углов треугольника ABC верно равенство:

а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

833. Объясните, как можно найти угол α подъема дороги, зная пройденное по дороге расстояние d и высоту подъема h . Найдите α , если: а) $d = 200$ м и $h = 6$ м; б) $d = 1$ км и $h = 10$ м.

834. Постройте равнобокую трапецию, в которой меньшее основание m , синус тупого угла равен $\frac{4}{5}$, а высота равна h .

835. Постройте прямоугольник, диагональ которого равна d , а тангенс угла между диагоналями равен $0,3$.

836. Найдите тангенс угла между прямыми:

а) $y = x$ и $y = 4$; б) $y = 3x$ и $y = -4$.

837*. На рисунке 178 дано: $AB = a$; $\angle CAH = \alpha$; $\angle CBH = \beta$; $CH \perp AB$. Найдите CH .

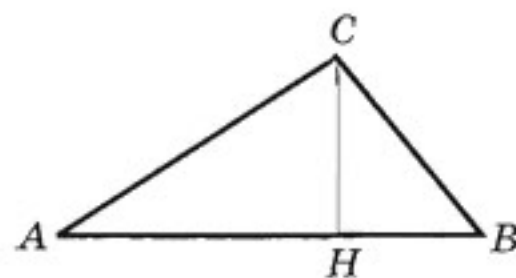


Рис. 178

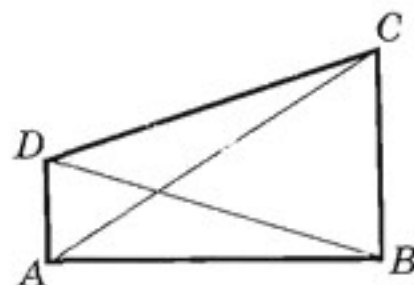


Рис. 179

838*. На рисунке 179 дано: $AB = a$; $\angle DBA = \alpha$; $\angle CAB = \beta$; $DA \perp AB$; $CB \perp AB$. Найдите CD .

839*. Докажите, что $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -\frac{10}{17}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2,7$.

840. Докажите, что для любого угла β из промежутка $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ верно равенство:

- а) $(\cos \beta - \sin \beta)(\cos \beta + \sin \beta) = 1 - 2 \sin^2 \beta$;
 б) $\cos(90^\circ - \beta) \cdot \sin(180^\circ - \beta) = \sin^2 \beta$;
 в) $\sin(90^\circ - \beta) \cdot \cos(180^\circ - \beta) = -\cos^2 \beta$.

841. Докажите, что для любого острого угла α верно равенство $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

842. Упростите выражение:

- а) $5 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; в) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$;
 б) $2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1$; г) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$.

843. В равнобедренном треугольнике косинус угла между боковыми сторонами равен $\frac{7}{25}$. Найдите синус и косинус угла при основании этого треугольника.

844*. Найдите площадь равнобокой трапеции, диагональ которой равна d и наклонена к большему основанию под углом α .

845*. По данным на рисунке 180 найдите длину отрезка CD .

846*. Упростите выражение $\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, если $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

847*. Докажите, что $\sin^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^6 \alpha = 1$ при $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

848*. Найдите $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,5$.

849*. Внутри угла, величина которого равна: а) 60° , б) 40° , взята точка на расстоянии 13 см и 14 см от его сторон. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

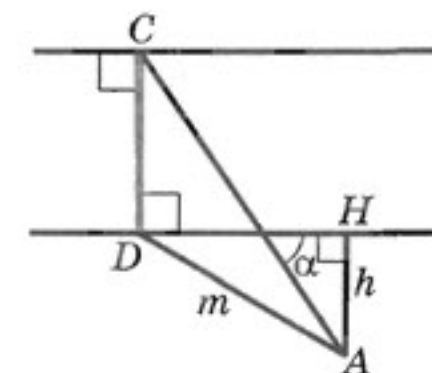


Рис. 180

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 13$ см, $BC = 12$ см. Найдите синус, косинус и тангенс угла A .

2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$;

б) $\cos 0^\circ \cdot (\cos 120^\circ \cdot \sin 150^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} 120^\circ)^2$.

3. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

4. Постройте угол, синус которого равен 0,8. Сколько решений имеет задача?

5. Катет прямоугольного треугольника равен 6 дм, а его проекция на гипотенузу равна 3,6 дм. Найдите гипотенузу, второй катет и острые углы этого треугольника.

Вариант 2*

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 25$ см, $BC = 7$ см. Найдите синус, косинус и тангенс угла B .

2. Найдите значение выражения:

а) $\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$;

б) $\cos 180^\circ \cdot (\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ)^2$.

3. Найдите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

4. Постройте прямоугольный треугольник, если тангенс одного его острого угла равен 1,5, а прилежащий к этому углу катет равен 6 см. Найдите неизвестные стороны, углы и высоты этого треугольника.

5. Сторона ромба равна m , а его острый угол равен α . Найдите диагонали, высоту и площадь ромба.

6. В треугольнике ABC $AB = BC$, BH и AE — высоты. Найдите отношение $AE : BH$, если косинус угла при основании треугольника равен 0,4.

§ 18. Упражнения для повторения курса геометрии

850. Верно ли, что:

а) равносторонние треугольники подобные;

б) тангенс 30° меньше тангенса 40° ;

в) в треугольнике со сторонами 6 см, 8 см и 10 см синус меньшего угла равен 0,6;

г) $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ = 1$;

д) движение является преобразованием подобия?

Проверьте, верно ли решение задачи (№ 851—852).

851. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 12$ см, $BC = 8$ см. Продолжения BM и BK сторон AB и CB за точку B соответственно равны 4 см и 3 см. Найдите длину отрезка MK .

Решение. Поскольку в треугольниках ABC и MKB $\angle ABC = \angle KBM$ (как вертикальные), а две пары сторон пропорциональны $\left(\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BM} = 2\right)$, то эти треугольники подобные,

поэтому $\frac{AC}{KM} = 2$, откуда $KM = \frac{AC}{2} = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

852. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b , а противолежащий ему угол равен α . Найдите второй катет и гипотенузу.

Решение. Обозначим гипотенузу через c , а неизвестный катет через a . Тогда $c = \frac{b}{\sin \alpha}$. Неизвестный катет a находим, применив теорему Пифагора:

$$a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{\sin \alpha}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2(\sin^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha}} = \frac{b \sqrt{\sin^2 \alpha + 1}}{\sin \alpha}.$$

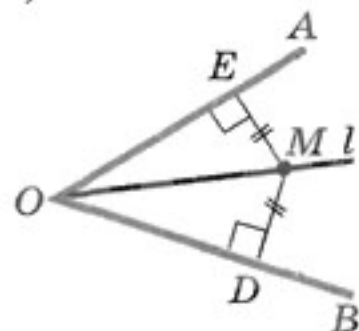
853. Верно ли, что:

а) любой треугольник можно разрезать на два подобных треугольника;

б) число диагоналей многоугольника может быть равно числу его сторон;

в) все стороны прямоугольного треугольника с целочисленными значениями их длин могут быть выражены нечетными числами?

а)



б)

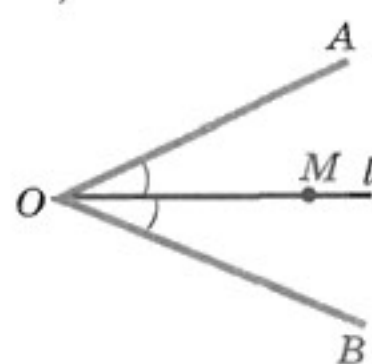


Рис 181

854*. а) Докажите, что если точка выпуклого угла равноудалена от сторон этого угла, то она принадлежит его биссектрисе.

Дано: $\angle AOB$ — выпуклый (рис. 181, а), $[ME] \perp (OA)$, $[MD] \perp (OB)$, $|ME| = |MD|$.

Доказать: $[OM]$ — биссектриса $\angle AOB$.

Доказательство: Так как $|ME| = |MD|$, то точка M принадлежит оси симметрии точек E и D (прямой l). При симметрии с осью l луч ME отображается на луч MD , а прямая OA — на прямую, содержащую точку D и перпендикулярную прямой MD , т. е. на прямую OB , значит, точка O пересечения прямых OA и OB принадлежит прямой l (рис. 181, б). Отсюда следует, что угол AOM симметричен углу MOB , а тогда $\angle AOM = \angle MOB$, т. е. $[OM]$ — биссектриса угла AOB .

б) Докажите, что если точка принадлежит биссектрисе выпуклого угла, то она равноудалена от его сторон.

855. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, у которого диагональ основания равна 3 дм, его высота 12 дм, а одна из сторон основания 4 дм.

856. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения 4, 7 и 12. Вычислите площадь его полной поверхности.

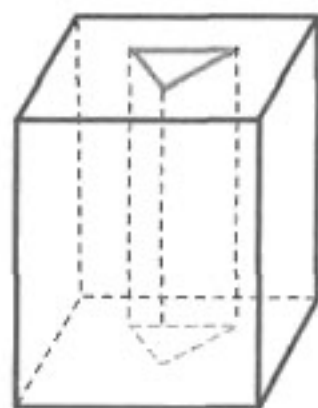


Рис. 182

857*. Основание прямоугольного параллелепипеда имеет измерения 5 и 8 (рис. 182), а высота параллелепипеда равна 12. Отверстие, идущее от верхнего основания до нижнего, имеет форму прямой треугольной призмы, основаниями которой служат равносторонние треугольники со стороной 3. Определите площадь полной поверхности тела.

858. Диагональ куба равна $16\sqrt{3}$. Найдите площадь его полной поверхности.

859. а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 , пересекающиеся в точке K . Докажите, что треугольники AKB_1 и BCB_1 подобны.

б) В прямоугольном треугольнике OMK из точки C , лежащей на гипотенузе OM , построен перпендикуляр CD на сторону MK . Докажите, что $\triangle CMD \sim \triangle OMK$.

860. а) Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC . Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC . Докажите, что четырехугольник $ABCB_1$ — ромб.

б) Треугольник ABC равнобедренный с основанием BC . Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BC . Докажите, что $\triangle ABA_1 = \triangle ACA_1$.

861. а) Из точки D , лежащей на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , опущен перпендикуляр DE на катет BC . 1) Докажите, что $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. 2) Найдите AC , если $BC = 12$, $BE = 8$, $DE = 6$.

б) Прямая MK параллельна стороне AC треугольника ABC ($M \in AB$, $K \in BC$). 1) Докажите, что $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. 2) Найдите BK , если $BC = 12$, $MK = 8$, $AC = 15$.

862. а) $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD . O — точка пересечения диагоналей. 1) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle COB$. 2) Найдите BC , если $AD = 16$, $AO = 12$, $CO = 3$.

б) Отрезок MK параллелен стороне AC треугольника ABC ($M \in AB$, $K \in BC$). 1) Докажите, что $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. 2) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 3$ см, $BM = 2$ см, а площадь треугольника MBK равна 12 см^2 .

863*. В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $BC = 6$ см, $\angle A = 150^\circ$. Определите $\angle C$.

864. В треугольнике ABC $AC = 10$ см, $\angle C = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Определите сторону AB .

865. Даны точки $A(-1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(4; 3)$. Найдите координаты точек M и K , если MK — средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AC .

866. Докажите, что треугольник ABC , где $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 9)$, является равнобедренным с основанием AC .

867. а) В трапеции $BCDE$ с основаниями CD и BE диагонали пересекаются в точке K . Докажите, что $\triangle CKD \sim \triangle EKB$.

б) Отрезки AB и DE пересекаются в точке C , причем прямые AD и BE параллельны. Докажите, что $\triangle ADC \sim \triangle BEC$.

868. а) В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 45^\circ$, а диагональ BD , равная 3 см, образует со стороной AD угол ADB , равный 30° . Найдите стороны параллелограмма.

б) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5$ см, $\angle A = 45^\circ$. Найдите длины диагоналей AC и BD .

869. В треугольнике ABC проведен отрезок DE (D на AB , E на BC), параллельный AC . Найдите DE , если $AB = 24$ см, $BC = 32$ см, $AC = 28$ см и $AD + CE = 16$ см.

870. Длина тени телевизионной вышки равна 50 м. В это же время длина тени ученика ростом 1,8 м равна 0,9 м. Вычислите высоту телевизионной вышки.

871. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

872. а) Точка M симметрична вершине D параллелограмма $ABCD$ относительно вершины C . Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

Доказательство (рис. 183).

1. По определению центральной симметрии $DC = CM$

2. Рассмотрим треугольники ABK и MCK :

а) $AB = CM$, так как $AB = DC$.

б) $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных AB и MD и секущей AM ;

в) $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных AB и MD и секущей BC .

$\triangle ABK = \triangle MCK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

3. Так как $S_{ABCD} = S_{\triangle ABK} + S_{\triangle AKC} + S_{\triangle CKD}$, $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle MCK} + S_{\triangle AKC} + S_{\triangle CKD}$, то $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

Рис. 183

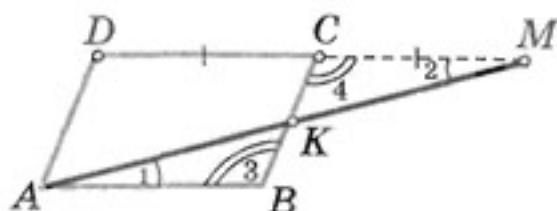
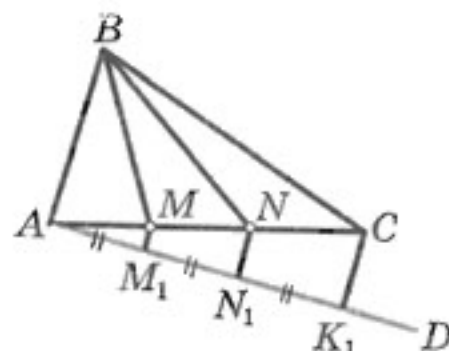


Рис. 184



б) Разделите данный треугольник на 3 равновеликих треугольника лучами, выходящими из одной вершины.

1. Анализ (рис. 184). Разделив основание данного треугольника на три равные части и соединив точки деления с вершиной, получим три равновеликих треугольника.

2. Построение. Из точки A проведем луч AD ; на нем от вершины луча отложим три равных отрезка AM_1 , M_1N_1 , N_1K_1 . Соединим точку K_1 с точкой C ; через точки M_1 и N_1 проведем прямые, параллельные K_1C , которые пересекают основание AC в точках M и N .

3. Доказательство. $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle MBN} = S_{\triangle NBC}$, так как треугольники имеют равные основания и общую высоту, проведенную из вершины B .

873*. а) Найдите площадь трапеции, два угла которой равны 30° и 60° , а основания — 2 см и 6 см.

Решение. Возможны два случая: 1. $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 30^\circ$; 2. $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.

Случай 1 (рис. 185, а). 1. Проведем $CM \parallel AB$. Тогда $\angle CMD = \angle A = 60^\circ$ (как соответственные при параллельных и секущей). Отсюда следует, что $\triangle MCD$ — прямоугольный.

2. $ABCM$ — параллелограмм, откуда $AM = BC = 2$ см. Тогда $MD = 4$ см. Из $\triangle MCD$ $MC = 2$ см, и высота

$$CH = MC \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$3. S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Случай 2 (рис. 185, б). 1. Обозначим $HD = BM = x$ см. $AH = (2-x)$ см, $MC = (6-x)$ см. Из $\triangle ABH$ $h = (2-x) \operatorname{tg} 60^\circ =$

с)

5)

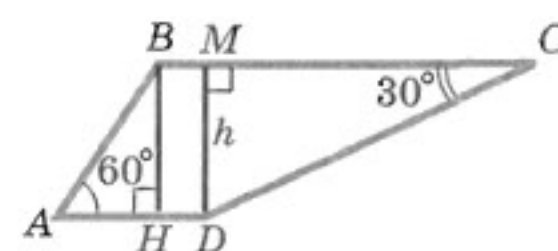
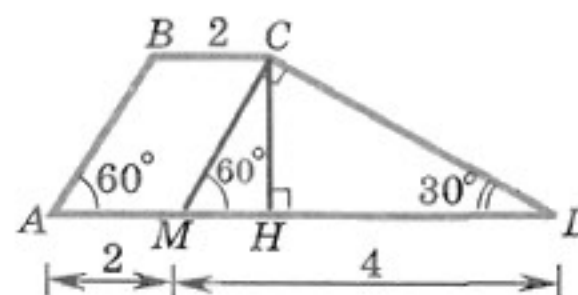


Рис. 185

$= (2-x)\sqrt{3}$. Из $\triangle CMD$ $h = (6-x) \operatorname{tg} 30^\circ = (6-x) \frac{\sqrt{3}}{3}$, имеем $(2-x)\sqrt{3} = (6-x) \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $x = 0$.

2. Тогда $h = 2\sqrt{3}$ см и $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2+6}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (см²).

Ответ: $4\sqrt{3}$ см² или $8\sqrt{3}$ см².

(Можно обе трапеции достроить, продлив боковые стороны, до треугольников. Первую — до прямоугольного, вторую — до равнобедренного. И применить свойства подобных треугольников.)

874. Найдите площадь равнобедренной трапеции, большее основание которой 30 дм, боковая сторона 10 дм и угол при большем основании 56° .

875. Найдите площадь равнобедренной трапеции, меньшее основание которой 20 см, высота 15 см и угол при большем основании 34° .

876. В треугольнике ABC отрезком прямой DE соединены основания двух его высот AD и BE . Докажем, что получившийся при этом треугольник CDE подобен данному (рис. 186).

Доказательство. $AD \perp BC$; $BE \perp AC$; $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ как прямоугольные, имеющие общий острый угол.

Из подобия треугольников следует: $\frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC}$; следовательно, $\triangle DEC \sim \triangle ABC$, так как стороны, заключающие общий угол C , пропорциональны.

877*. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в 15° произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы (рис. 187).

Доказательство. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = 15^\circ$. Построим $\angle DBF = 15^\circ$, проведем $DF \perp AB$, $AD = DB$, $AF = BF = 2a$, так как $\angle BFC = 30^\circ$, $FC = b - 2a$. Из прямо-

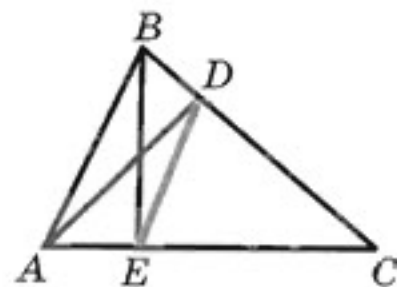


Рис. 186

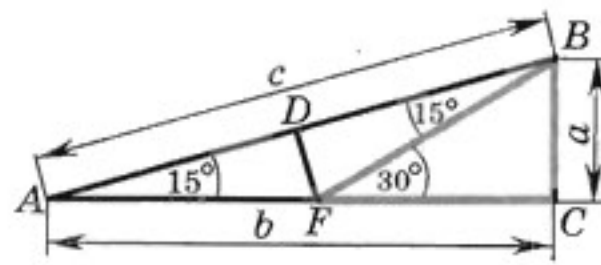


Рис. 187

угольного треугольника BCF по теореме Пифагора имеем: $BF^2 = BC^2 + CF^2$, $4a^2 = a^2 + (b - 2a)^2$ или $4a^2 = a^2 + b^2 - 4ab + 4a^2$, $a^2 + b^2 = 4ab$, $a^2 + b^2 = c^2$; значит, $c^2 = 4ab$ или $\frac{c^2}{4} = ab$.

878. а) Сторона треугольника 21 см, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся как 3 : 8. Определите эти стороны.

б) В треугольнике основание равно 12 см, один из углов при нем равен 120° , сторона против этого угла равна 28 см. Определите третью сторону.

879*. Постройте прямоугольный треугольник по сумме катетов и гипотенузы.

I способ (метод подобия). 1. Строим произвольный квадрат и затем строим отрезок, равный по длине его стороне и диагонали, т. е. $AM = m_1 = a_1 + d_1$ (рис. 188).

2. Из точки A проведем луч, от его вершины отложим отрезок $AK = m$ и разделим его в отношении $\frac{a_1}{d_1}$ на основании теоремы Фалеса. Получим отрезки a и d . На отрезке a как на стороне строим квадрат, построенный квадрат — искомый, как следует из подобия любых квадратов.

II способ (алгебраический метод). 1. Пусть a — сторона квадрата. Тогда диагональ $d = a\sqrt{2}$. По условию отрезок $m = a + d = a + a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2})$. Откуда

$$a = \frac{m}{1 + \sqrt{2}} = \frac{m(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = (\sqrt{2} - 1)m = \sqrt{2}m - m.$$

Отрезок a может быть построен по отрезку m , а затем по стороне a построен искомый квадрат (рис. 189).

Рис. 188

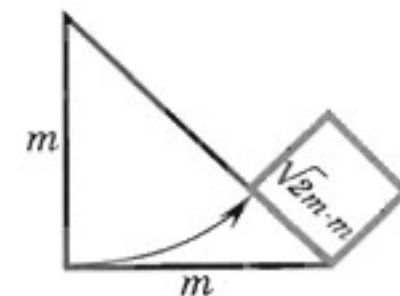
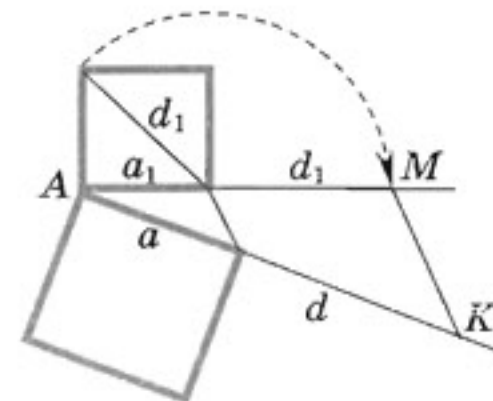


Рис. 189

2. а) Строим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом m ; его гипотенуза равна $\sqrt{2}m$; б) строим отрезок $a = \sqrt{2}m - m$; в) на отрезке a строим квадрат как на стороне.

III способ. Предложите самостоятельно.

880*. Подобны ли треугольники, на которые разбивает треугольник: а) его биссектриса; б) его высота? Рассмотрите различные случаи.

881*. Через вершину треугольника проведите прямую так, чтобы она отсекала треугольник, подобный данному.

882. Постройте центры гомотетий, переводящих данную окружность в другую данную окружность.

883*. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого находятся на трех данных параллельных прямых.

I способ (метод поворота). 1. Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник. При повороте отрезка AC вокруг точки A в положительном направлении на 60° точка C перейдет в точку B . При этом повороте прямая c перейдет в прямую c_1 , которая пересечет прямую b в точке B . Отсюда построение (рис. 190, а).

2. Построение. а) Повернем прямую c на 60° в положительном направлении. Для чего повернем на 60° две произвольные точки X и Y этой прямой. Прямая $X_1Y_1 = c_1$ — образ прямой c . б) Находим точку пересечения B прямой c_1 и прямой b . в) Соединим A и B и сделаем засечку из точки A как из центра радиусом, равным AB , на прямой c получим точку C .

3. Доказательство. Треугольник ABC — искомый, так как точка B — образ точки C при данном повороте, поэтому $\angle BAC = 60^\circ$. А из того, что $AB = AC$, следует, что треугольник ABC — равносторонний.

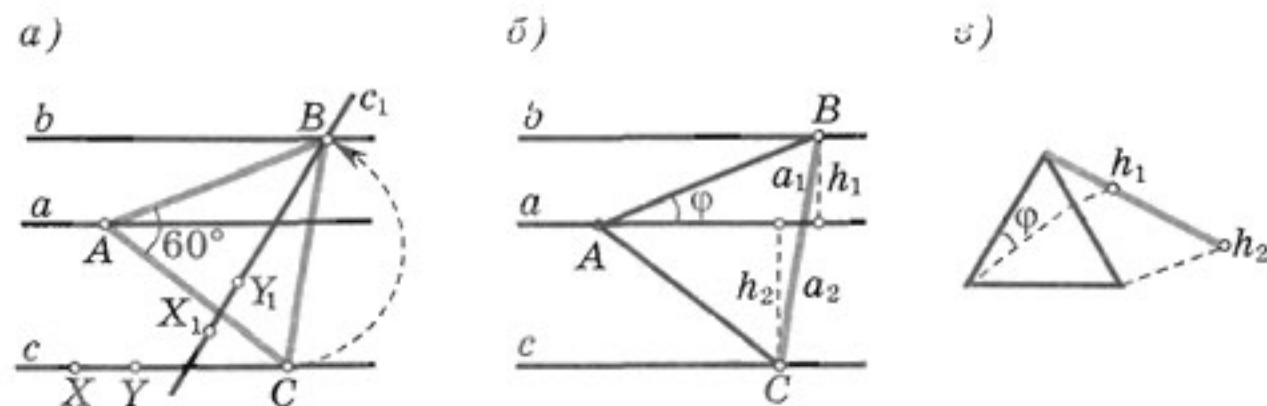


Рис. 190

II способ (метод подобия). 1. Анализ. Пусть ABC — искомый треугольник. Опустим перпендикуляры из точек C и B на среднюю прямую a (рис. 190, б). Получим два подобных прямоугольных треугольника. Прямая a делит сторону BC на части a_1 и a_2 , такие, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Тогда можно найти угол ϕ , разделив сторону произвольного равностороннего треугольника в отношении $\frac{h_1}{h_2}$. Отсюда построение (рис. 190, в).

2. Построение. а) Строим произвольный равносторонний треугольник; б) делим его сторону в отношении $\frac{h_1}{h_2}$, опираясь на теорему Фалеса, — получим угол ϕ ; г) откладываем от произвольно взятой на прямой a точки A угол ϕ , получим в пересечении с прямой b точку B ; д) делаем засечку из точки A как из центра радиусом, равным AB , на прямой c получим точку C , $\triangle ABC$ — искомый.

3. Доказательство (проведите самостоятельно).

884*. В данный сектор MON впишите квадрат так, чтобы две смежные его вершины находились на дуге MN сектора, а две другие — на радиусах, ограничивающих сектор.

885*. Из точки S , взятой вне плоскости P , проведены перпендикуляр, равный h , и две наклонные, составляющие с плоскостью P углы 30° и 45° . Определите отрезок, соединяющий основания наклонных, если угол между проекциями наклонных равен 90° .

886*. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята точка P . Докажите, что $AP \cdot CP = AB^2 - PB^2$.

887*. Докажите, что если H — точка пересечения высот треугольника ABC и C_1 — основание его высоты, проведенной из вершины C , то $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot HC_1$.

888*. Разрежьте прямоугольник со сторонами 18 и 8 так, чтобы из полученных частей можно было сложить квадрат.

§ 19. Контрольные задания по алгебре и геометрии для повторения

Из приведенных ответов выберите правильный (889—893).

889. 1) Среди функций $y = \sqrt{-x}$, $y = -x^2$, $y = -x^{-1}$, $y = \frac{1}{x-|x|}$ укажите функцию, областью определения которой является множество всех отрицательных чисел.

Ответы: а) $y = \sqrt{-x}$; б) $y = \frac{1}{x-|x|}$; в) $y = -x^{-1}$; г) $y = -x^2$.

2) В трапеции $ABCD$ основания $BC = 18$, $AD = 24$, а диагонали пересекаются в точке M , причем $AM = 20$. Найдите длину отрезка CM .

Ответы: а) 15; б) 20; в) 15 см; г) 18.

3*) Какое наименьшее положительное значение может принять выражение $\frac{20}{4-x} + \frac{20}{4+x}$?

Ответы: а) 20; б) 10; в) 40; г) такого значения нет.

4) Вычислите значение выражения: $\frac{\cos 120^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} - \frac{\sin 150^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ}$.

Ответы: а) 1; б) 0; в) 0,25; г) -1.

5) На станцию для колхоза доставили удобрения и цемент. В первый день колхоз вывез половину цемента и $\frac{1}{3}$ удобрений, что составило 8 т. Во второй день было вывезено $\frac{3}{4}$ оставшегося цемента и половина оставшихся удобрений — всего 7 т. Сколько удобрений и сколько цемента было доставлено на станцию для этого колхоза?

Ответы: а) 8 т цемента, 12 т удобрений; б) 8 т цемента, 10 т удобрений; в) 12 т цемента, 8 т удобрений; г) 10 т цемента, 10 т удобрений.

890. 1) При каком значении k график функции $y = kx + 1$ проходит через точку $M(6; -2)$?

Ответы: а) при $k = -0,5$; б) при $k = -2$; в) $k = 0,5$; г) при $k = 1,5$.

2) В треугольнике даны наименьшая сторона c и прилежащие к наибольшей стороне углы 30° и 45° . Найдите наибольшую сторону треугольника.

Ответы: а) $\frac{c(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$; б) $2c\sqrt{2}$; в) $c(\sqrt{1,5}+1)$; г) $\approx 2c$.

3) Сад имеет форму прямоугольника, длины сторон которого относятся как $16:11$, причем его ширина на 250 м меньше длины. За какое время можно обойти по краю этот садовый участок, если двигаться со скоростью 4 км/ч?

4) Через 5 лет возраст брата будет относиться к возрасту сестры как $5:3$. Сколько лет сестре теперь, если известно, что год тому назад брат был вдвое старше сестры?

Ответы: а) 13 лет; б) 14 лет; в) 15 лет; г) 16 лет.

5*) Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CH на гипотенузу. На отрезке CH как на диаметре построена окружность, которая на катетах AC и BC отсекает хорды длиной s и p . Найдите длины катетов прямоугольного треугольника ABC .

Ответы: а) $\frac{c^2+p^2}{c}$, $\frac{c^2+p^2}{p}$; б) $\frac{c+p}{c}$, $\frac{c+p}{p}$; в) $\frac{c+p}{2}$, $\frac{c-p}{2}$;

г) $\frac{p^2}{c}$, $\frac{c^2}{p}$.

891. 1) Точка $P(0,2; -10)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите k .

Ответы: а) -5; б) 2; в) -8; г) -2.

2) В треугольнике ABC BM — биссектриса. Площади треугольников ABM и CBM относятся как $1:3$; $AB = 4$ см. Сторона BC равна ...

Ответы: а) $\frac{4}{3}$ см; б) 12 см; в) $\frac{1}{12}$ см; г) $4\sqrt{3}$ см.

3) Решите неравенство $-1 \leq 1 - 2x \leq 4$.

Ответы: а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1,5]$; в) $[-1,5; 1]$; г) $[-1; 2,5]$.

4) Из точек A и B , расположенных по одну сторону от прямой a , опущены на нее перпендикуляры $AA_1 = m$ и $BB_1 = n$. Найдите расстояние от точки пересечения отрезков AB_1 и A_1B до прямой a .

Ответы: а) $\frac{m+n}{mn}$; б) $\frac{mn}{m+n}$; в) $\frac{2mn}{m+n}$; г) $\frac{m+n}{m-n}$.

5) Из двух пунктов M и N выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Один из них пришел в N через 1 ч 15 мин после встречи, а другой — в M через 48 мин после встречи. Расстояние между пунктами M и N равно 90 км. Найдите скорости автомобилей.

Ответы: а) 40 км/ч, 50 км/ч; б) 36 км/ч, $56\frac{1}{4}$ км/ч; в) 48 км/ч, 64,5 км/ч; г) 40 км/ч, 60 км/ч.

6*) При каких значениях k функция $f(x) = kx^2 + (k-1)x + \frac{k-1}{4}$ принимает только положительные значения при любых действительных значениях x ?

Ответы: а) $k > 0$; б) $k > \frac{1}{2}$; в) $0 < k < 1$; г) $k < \frac{1}{2}$.

892. 1) Найдите область определения функции, заданной формулой $y = \sqrt{\frac{|x|}{4-x}}$.

Ответы: а) $x > 4$; б) $(-2; 2)$; в) $x < -4$; г) $(-\infty; 4)$.

2) Периметр треугольника ABC равен 50 см. В этот треугольник вписан ромб $BKPL$ так, что вершины K, P, L лежат соответственно на сторонах AB, AC, BC . Найдите стороны AB и BC , если $AP = 6$ см, $PC = 9$ см.

Ответы: а) 14 и 21 см; б) 10 и 25 см; в) 15 и 20 см; г) нет правильного ответа.

3) При каких значениях аргумента значения функции $y = -0,5x + \frac{5}{4}$ принадлежат промежутку $[-2; 1]$?

Ответы: а) при $x \in [6,5; 0,5]$; б) при $\frac{1}{2} < x \leq \frac{13}{2}$; в) при $x > 0,5$; г) при $x \in (-\infty; 6,5)$.

4) Расстояние между поселком и городом по железной дороге равно 100 км, а по озеру — 80 км. Теплоход отправляется из поселка на 3 ч раньше и прибывает в город на 40 мин раньше, чем поезд. Найдите скорость поезда, если она больше скорости теплохода на 40 км/ч.

Ответы: а) ≈ 68 км/ч; б) ≈ 47 км/ч; в) 50 км/ч; г) нет правильного ответа.

5*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Найдите длину A_1C_1 , если $AC = 39$, $\sin B = \frac{12}{13}$.

Ответы: а) 15; б) $16\frac{1}{4}$; в) 36; г) нет правильного ответа.

893. 1) Верно ли, что сумма синусов острых углов трапеции равна сумме синусов тупых ее углов?

Ответы: а) не верно; б) верно; в) верно лишь для равнобедренной трапеции; г) верно лишь для прямоугольной трапеции.

2) Известно, что квадратный трехчлен $y = -x^2 + px + q$ принимает при $x = 1$ наибольшее значение, равное -4 . Найдите $y(-1)$.

Ответы: а) -6 ; б) 4; в) -8 ; г) нет правильного ответа.

3) В равнобедренном треугольнике ABC AC — основание, $\angle A = 30^\circ$, CD — высота. Найдите высоту, опущенную из вершины B , если $AD = 20$ см.

Ответы: а) $6\frac{2}{3}$ см; б) 20; в) 10; г) нет правильного ответа.

4) При каких значениях c система уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 3x - 3y = c \end{cases}$ имеет решение (k, p) , такое, что $k > 0$ и $p \geq 0$?

Ответы: а) $c \in (6; +\infty)$; б) $6 < c \leq 15$; в) $c \in (0; 6)$; г) $c \geq 15$.

5*) Высота и медиана, исходящие из вершины B треугольника ABC , лежат на прямых, которые заданы соответственно уравнениями $x + y - 2 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$. Определите координаты вершины C , если $A(1; -2)$.

Ответы: а) $(-9; -12)$; б) $(13; -8)$; в) $(-9; -12), (13; -8)$; г) нет правильного ответа.

894. Выполните задания, предварительно дополнив условия данными, выбранными самостоятельно.

1. Постройте график функции: а) $y = kx + 3$;

б) $y = -\frac{k}{x} + 3$, которому принадлежит точка $M(...; ...)$, и установите, возрастает или убывает эта функция на всей области определения.

2. а) Постройте треугольник, подобный данному треугольнику, такой, чтобы его площадь составляла ... % площади данного треугольника.

б) Средняя линия равнобокой трапеции равна ... дм. Одно из ее оснований на ... % меньше другого. Найдите периметр трапеции, если угол при ее большем основании равен ...

3. а) Сумма двух ребер двух кубов равна ... см, а сумма их объемов равна ... см³. Найдите длину ребра каждого куба.

б) Катет прямоугольного треугольника равен 6 дм, а его проекция на гипотенузу равна ... дм. Найдите гипотенузу, второй катет и острые углы этого прямоугольного треугольника.

4. а) Что больше: $\operatorname{tg} 150^\circ - \sin \dots$ или $\cos 120^\circ + \dots 60^\circ$?
 б) Докажите, что диагонали трапеции точкой пересечения ... пополам.

5*. а) В зале расположены рядами ... одинаковых кресел. Если в каждом ряду добавить по ... кресел, а число рядов уменьшить на ..., то общее число мест в зале останется таким же. Сколько рядов кресел в зале и сколько кресел в каждом ряду?

б) Внутри угла в ... взята точка, расстояния от которой до сторон угла равны ... и Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

6*. а) На заводе сначала работали 2 цеха, затем был пущен третий цех, в результате чего завод увеличил выпуск ежемесячной продукции в ... раза. Во сколько раз больше продукции дает третий цех по сравнению со вторым, если известно, что за ... месяца первый и третий цеха вместе выпускают столько же продукции, сколько второй за полгода?

б) На угольной шахте сначала работали 2 участка, а затем вступил в строй третий, в результате чего производительность шахты увеличилась в ... раза. Сколько процентов относительно производительности первого участка составляет производительность второго, который за год выдает столько угля, сколько первый и третий участки за ... месяца?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

АЛГЕБРА

1. а) $y = x^3$; б) $y = x + 5$.

2. а) 4,8; б) $1\frac{5}{7}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $-\frac{1}{6}$.

3. 2,5.

4. а) $(-\infty; 12) \cup (12; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$.

5. б) Область определения состоит из всех чисел, кроме 3; множество значений — из всех чисел, кроме 0.

6. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[-1; +\infty)$; в) $y \neq 0$; г) $y \neq 1$; д) $(-\infty; 2]$; е) $[0; +\infty)$; ж) $[0,75; +\infty)$; з) $[-0,25; +\infty)$; и) $(-1; +\infty)$.

7. а)

x	1	3
y	-0,5	-1,5

 . (См. рис. 191.)

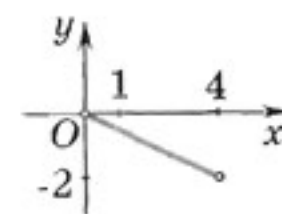


Рис. 191

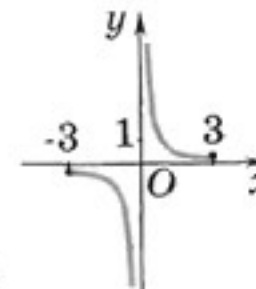


Рис. 192

г)

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

 . (См. рис. 192.)

8. а) $(-\infty; +\infty)$; в) $x \neq -7$; г) $x \neq 0$; е) $(-\infty; -9) \cup (-9; -1) \cup (-1; +\infty)$.

9. а) $(-\infty; +\infty)$; б) множество значений состоит из одного числа 3;

в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; д) $[0; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; з) $(4; +\infty)$; и) $(0; +\infty)$.

10. а), б), в) — верно; г) неверно.

11. а) при $x = 1$; б) при $x \in [0; 5]$; г) $y = 4$.

15. $y = 5x + 4$, $x \in \mathbb{N}$.

22. $y = 0,5x + 50$.

24. в) Все числа, кроме -3.

28. г) $x = -0,13$.

29. б) $x \in (0,25; +\infty)$.

30. б) $x \in (-\infty; -2,03)$.

33. а) $y = 15 + 60x$; при $x = \frac{3}{4}$ ч, $y = 60$ км.

34. $m + 10n$.

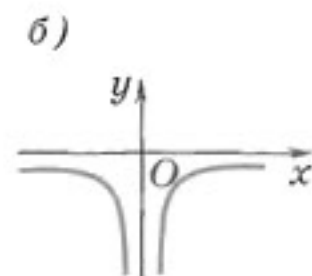
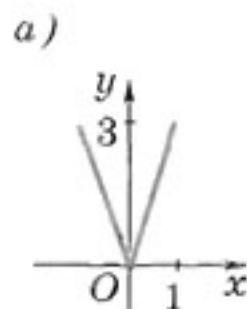


Рис. 193

36. $y = 10 \cdot x + 1$.
 37. ≈ 324 м/с; ≈ 347 м/с.
 42. а) (4; 179); б) (3; -99).
 44. Прямая пропорциональность задается формулой $y = kx$, откуда $k = y : x$.
 45. д) $y = 3|x|$, при $x \geq 0$ $y = 3x$; при $x < 0$ $y = -3x$ (рис. 193, а);
 е) $y = -\frac{4}{|x|}$, при $x > 0$ $y = -\frac{4}{x}$; при $x < 0$ $y = -\frac{4}{x}$ (рис. 193, б).
 46. а) На 20 %; б) на 25 %.
 47. 9 деталей.
 48. На 11 001 100 р.
 51. а) Две прямые $y = x$ и $y = -x$; б) две прямые $x = 0$ и $y = 1$.
 52. $m = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 2,5; \\ 10, & t > 2,5. \end{cases}$
 54. $S = 84,5$ кв. ед.
 55. $k = -0,4$; принадлежит.
 56. $y = 1,5x$.
 57. $y = 8$.
 59. д) Нет.
 63. $k = -162$.
 64. $y = \frac{4}{|x|}$, при $x > 0$ $y = \frac{4}{x}$; при $x < 0$ $y = -\frac{4}{x}$; $y > 0$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

65. а) Докажем, что функция $y = 3x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Пусть $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 — два числа из промежутка $(-\infty; 0]$, соответствующие им значения функции равны $y_1 = 3x_1^2$ и $y_2 = 3x_2^2$. Рассмотрим разность $y_1 - y_2 = 3(x_1^2 - x_2^2) = 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \geq 0$, так как $x_1 < x_2$, значит, $x_1 - x_2 < 0$, по условию $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$, значит, $x_1 + x_2 \leq 0$. Т. е. $y_1 - y_2 \geq 0$, поэтому $y_1 \geq y_2$. Получили, что меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции, значит, функция $y = 3x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

66. См. рисунок 194.

67. в) $\left[\frac{13}{18}; +\infty\right)$; з) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$;
 и) $(-\infty; +\infty)$.

69. а) (1; 1), (-1; -1); е) $\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

70. а) $\frac{2}{7}$; $\approx 7\%$.

78. б) $y = |x - 1|$.

84. а) 1); б) $\approx 0,7$; г) 0; 1.

85. б) 1; 3.

88. а) 1; б) -5; 2; 3.

89. е) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

91. и) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

95. л) $y = x^2$, где $x \in \mathbb{N}$ и $x \leq 10$. Приведите другой пример.

96. б) 6 кв. ед.

99. а) $x = 5\frac{1}{3}$; $x = 16\frac{1}{15}$.

100. л) См. рисунок 195.

100. м) $\begin{cases} \frac{1}{x} + 1, & x > 0, \\ \frac{1}{x} - 1, & x < 0. \end{cases}$

104. $k = \frac{2}{3}$; $b = \frac{5}{3}$.

110. е) График уравнения — точка (0; -1).

112. Выразите одну переменную через другую и найдите все искомые решения соответствующего уравнения с двумя переменными или рассмотрите случаи $x = y$, $x > y$ и $x < y$. а) (4; 9).

113. 4 мешка по 60 кг и 2 мешка по 30 кг.

114. Представьте левую часть уравнения в виде суммы квадратов.

116. а) Нет решений; б) всего 8 пар простых чисел.

117. а) Запишите уравнение в виде $3(x^2 - 3) = 4(y^2 + 1)$; далее, представив любое целое y в виде $3n$, или $3n + 1$, или $3n + 2$ (где $n \in \mathbb{N}$), докажите, что $y^2 + 1$ не делится на 3;

б) значение y должно быть нечетным числом; тогда значение x — четное, чего быть не может.

118. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

119. а) $x - 2y = 4$; б) $y = -\frac{1}{2}x$ Приведите другой пример.

120. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

121. $4x - 4y + 5 = 0$.

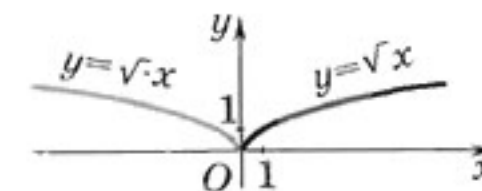


Рис. 194

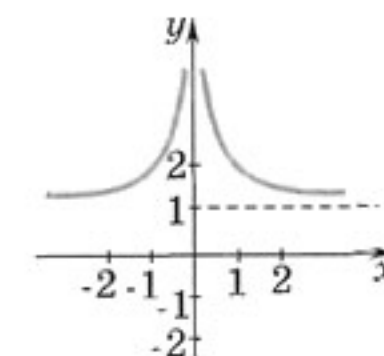


Рис. 195

122. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

123. $x^2 + y^2 = 5$.

126. Прямая $x = 0,5$ или $x = -0,5$.

131. а) (2; 12); б) выразите переменную y через переменную x и запишите в виде $y = 3 + \frac{6}{x-2}$; в) (4; 1), (8; 7); г) $x = 3n + 2$, $y = 4n + 2$, где $n \in N$ (исследуйте на делимость на 4 левой и правой частей уравнения).

133. Наименьшее количество банок 23.

134. 65 см.

136. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

137. 21 год.

140. б) (11; 55); в) $\left(3\frac{6}{13}; 5\frac{9}{13}\right)$.

146. г) (3; -2); е) $\left(\frac{10}{41}; -\frac{110}{41}\right)$.

148. а) $\left(1\frac{31}{51}; -6\frac{16}{17}\right)$.

149. б) $\left(5\frac{5}{19}; \frac{2}{19}\right)$; д) множество пар чисел, удовлетворяющих уравнению $2x + 3y = 5$; е) нет решений.

150. б) (8; 5); в) (8,1; 5,06); е) (1; 0); ж) $(7 \cdot 10^{19}; 3 \cdot 10^{19})$; з) (-4; -3); (6; 2).

151. а) (5; 1); б) нет решений; в) (-3; -4), (-4; -3), (3; 4), (4; 3); г) $\left(\frac{11}{3}; \frac{3}{4}\right)$; д) введите замену $x + y = a$, $xy = b$, тогда $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$. Решив спосо-

бом сложения систему $\begin{cases} ab = 30, \\ a(a^2 - 3b) = 35, \end{cases}$ найдем $a = 5$, $b = 6$. Отсюда получим ответ: (2; 3), (3; 2); е) нет решений.

154. а) Нет.

155. а) $y = x - 3$; б) $y = \frac{25}{7}x - 7$.

156. $8x + 15y = 149$.

159. а) Так как $x = y = 0$ не является решением этой системы, то можно разделить обе части первого ее уравнения на y^2 : $2\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 18 = 0$. Если

обозначить $\frac{x}{y} = t$, например, то получим квадратное уравнение $2t^2 + 5t - 18 = 0$, которое имеет следующие корни: $t_1 = -4,5$; $t_2 = 2$. Таким образом, данная система уравнений «распадается» на две системы:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{9}{2}, \\ xy + y^2 - 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ xy + y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Далее установите, что первая из этих систем не имеет решений, а решения второй — (4; 2), (-4; -2).

Ответ: (4; 2); (-4; -2).

б) Введите вспомогательную переменную t , например, и обозначьте $y = tx$. Тогда после подстановки уравнения системы примут следующий вид:

$$\begin{cases} x^2(2 - t - t^2) = 5, \\ x^2(1 - t + t^2) = 3. \end{cases}$$

Так как $x \neq 0$, то, разделив второе уравнение на первое, получите $\frac{1 - t + t^2}{2 - t - t^2} = \frac{3}{5}$ и найдете его корни — числа $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$. Поэтому $y = -\frac{1}{4}x$ или $y = \frac{1}{2}x$. Далее решите, применив способ подстановки, две системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = -\frac{1}{4}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Ответ: (-2; -1); (2; 1); $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}; \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$; $\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}; -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$.

в) Возведите обе части второго уравнения в квадрат, тогда получите $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 y^2 = 64. \end{cases}$

Обозначьте $x^2 = w$, $y^2 = v$, тогда $\begin{cases} w + v = 20, \\ wv = 64. \end{cases}$ Неизвестные w и v можно

принять за корни дополнительного квадратного уравнения $t^2 - 20t + 64 = 0$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, $t_1 = 16$, $t_2 = 4$. Так как система уравнений остается той же, если поменять местами переменные (такие системы называют *системами симметричных уравнений*), то ее решениями будут пары $w_1 = 16$, $v_1 = 4$, откуда соответственно $x = \pm 4$, $y = \pm 2$ или $w_2 = 4$, $v_2 = 16$, откуда $x = \pm 2$, $y = \pm 4$.

Ответ: (-4; -2); (-2; -4); (2; 4); (4; 2).

г) Приведем данную систему к равносильной

$$\begin{cases} (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 8, \\ (x+y)^2 - 2xy = 4, \end{cases}$$

введя подстановки $x + y = a$, $xy = b$, получим систему $\begin{cases} a(a^2 - 3b) = 8, \\ a^2 - 2b = 4; \end{cases}$ отсюда

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2}a^2 - 2, \\ -\frac{1}{2}a^3 + 6a - 8 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы, преобразовав его в виде:

$$(a^3 - 8) - 12(a - 2) = 0, (a - 2)(a^2 + 2a - 8) = 0, a_{1,2} = 2, a_3 = -4.$$

Итак, $\begin{cases} a = 2, \\ b = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -4 \\ b = 6. \end{cases}$ Решив системы $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 6, \end{cases}$

получим ответ: (0; 2), (2; 0).

160. Используйте графики уравнений.

161. а) При любых a , кроме 6; б) при любых a , кроме 3, 5.

162. а) При любых b , кроме $2\frac{2}{3}$; б) при $b = 2\frac{2}{3}$.

163. $c = -3$ или $c = 3$.

164. а) $a = 2, 4$.

165. Система имеет одно решение при $p = 5(\sqrt{2} - 1)$ или $p = -5(\sqrt{2} + 1)$; два решения при $-5(\sqrt{2} + 1) < p < 5(\sqrt{2} - 1)$; не имеет решений при $p > 5(\sqrt{2} - 1)$ или $p < -5(\sqrt{2} + 1)$.

170. а) (-5; -7); (7; 5); б) (2; 2); в) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right); \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; г) (5; 3); $\left(\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}\right)$; д) (4; 9), (9; 4); е) (-2; -2); (-2; 2); (2; -2); (2; 2); ж) (-3; -1); (3; 1); $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; з) (-1; -3), (3; 1).

171. а) (-6; -5), (5; 6), $\left(\frac{1-5\sqrt{5}}{2}; \frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{1+5\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+5\sqrt{5}}{2}\right)$; б) нет решений; в) (1; 2), (2; 1); г) (9; 36), (36; 9).

172. $m = n = 0$, или $m = 1, n = -2$, или $m = n = -\frac{1}{2}$.

173. а) $x^2 + 3x + 2$.

174. а) $\left(\frac{c}{2}; \frac{p}{2}\right)$. Обозначьте, например, $\frac{c}{x} = m$, $\frac{p}{y} = n$, тогда

$$\begin{cases} m + n = 4, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1. \end{cases}$$

б) $\left(\frac{m^2 + 2n + \sqrt{m^4 + 4m^2n}}{2}; \frac{m^2 + 2n - \sqrt{m^4 + 4m^2n}}{2}\right)$.

175. 7 и 5.

176. 9 и 4.

177. 320 га и 380 га.

178. 40 кг и 60 кг.

179. 2 м и 3 м.

180. 12 и 6.

181. 700 км/ч и 100 км/ч.

182. $AB = 14$ дм, $BC = 12$ дм.

185. $\frac{c+b}{10}$ рублей и $\frac{b-c}{4}$ рублей.

186. 12 км/ч, 16 км/ч.

187. 12 л, 8 л, 7 л.

189. 560 деталей и 40 деталей.

190. 10 кг и 8 кг.

191. 190 т и 114 т.

192. 9 и 15 или -9 и -15.

193. 50 рублей и 60 рублей.

194. 5 км/ч и 4,5 км/ч.

195. 12 и 8.

196. 5 дм и 15 дм.

197. 25 см.

198. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ дм.

199. При таком расчете у хозяина могут быть только гуси.

200. 36 л и 48 л.

201. 20 т и 15 т.

202. 3910 л и 3960 л.

203. Первая бригада — за 15 дней, вторая — за 30 дней.

204. Пара лыж стоит $\frac{kp - mt}{np + mg}$ тыс. рублей; пара коньков — $\frac{kg + nt}{np + mg}$ тыс. рублей.

205. Первая бригада за $\frac{c + p - k + \sqrt{(c + p - k)^2 + 4ck}}{2}$ дней, вторая — за

$\frac{c + p + k + \sqrt{(c + p - k)^2 + 4ck}}{2}$ дней.

206. $\frac{ab}{c-b}$ м и $\frac{ac}{c-b}$ м.

207. а) 6 или 11.

210. а) (-60; -50); б) $\left(-\frac{40}{9}; -\frac{50}{9}\right)$.

213. а) (0; 0); б) (-4; 0).

215. 20 пудов.

216. 2 т. и 5 к., или 5 т. и 3 к., или 8 т. и 1 к.

217. 2, или 5, или 8, или 11 комплектов шахмат.

218. 2, или 5, или 8 тарелок.

220. $m = \frac{1}{4}$, $n = 1,5$.

221. $a = -\frac{2}{7}$; $b = 3\frac{3}{4}$.

224. б) (0; 1); в) $(\frac{408}{61}; \frac{200}{61})$; г) $(-19\frac{1}{3}; -105\frac{1}{3})$.

225. 1 800 000 рублей и 2 700 000 рублей.

226. -9 и -15 или 15 и 9.

227. -9,6 и 3,2.

228. $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$.

229. $\frac{5}{7}$.

230. а) (11; -2); (-3; 5); б) (-4; -3), (-3; 0).

231. а) $(\frac{12+4\sqrt{29}}{5}; \frac{-9+2\sqrt{29}}{5})$, $(\frac{12-4\sqrt{29}}{5}; \frac{-9-2\sqrt{29}}{5})$; б) (-2; 1),
в) (-1; -1), (2; 2); г) $(-2\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$, (-2; -8), $(2\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

236. а) (3; 2); б) (-3; -2), (-2; -3), (2; 3), (3; 2); в) (-36; 11,5), (-3; -5),
(3; 5), (36; -11,5); г) (1; 2), (2; 1); д) (-2; 3), (3; -2); е) (1; -2), (2; -1);

ж) (-2; -1), (2; 1), $(-\frac{5}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}})$, $(\frac{5}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{3}})$; з) (2; 1); и) (2; 4), (4; 2);

к) (-3; -1), (-1; -3), (1; 3), (3; 1).

237. Если обозначить число обезьян через x , а количество собранных каждой из них орехов через y , то получится, что обезьяны собрали xy орехов. Каждая обезьяна бросила по $(x-1)$ орехов; всего же было брошено $x(x-1)$ орехов. Таким образом, они принесли $xy - x(x-1)$ орехов, и мы получаем уравнение $x(y-x+1) = 33$. Отсюда следует, что x — делитель числа 33. Так как $x \neq 1$ и $x \neq 33$, то $x = 3$ или $x = 11$. В первом случае $y-x+1 = 11$ и $y = 13$, во втором случае $y-x+1 = 3$ и y тоже равно 13.

238. а) 8 лошадей и 30 дней; б) 9, 10 и 11 птиц.

239. 25; 10.

256. а) $x \in \mathbb{R}$; б) $y \in [-2; +\infty)$; в) (1; 0) и (5; 0); г) возрастает при $x \in [3; +\infty)$, убывает при $x \in [-\infty; 3]$; д) $y_{\min} = -2$; е) $y > 0$ при $x \in (-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (1; 5)$.

260. $c = -31$.

261. $b = 9\frac{2}{13}$.

262. $y = x^2 - 2x + 3$.

265. 1) $k = 2$ или $k = 6$. Указание: составьте уравнение $x^2 + 4x + 1 = kx$ и выясните, когда оно имеет один корень.

2) $y(0) = -3$.

3) $y(-1) = -8$.

4) $a = -3$; $b = 6$; $c = 0$.

5) а) $a = 4$, $b = -2$, $c = -6$; б) $a = b = -1$; $c = 2$.

267. Обозначьте неизвестные числа через x и y . например, запишите сумму их кубов в виде $x^3 + y^3 = (x+y)((x+y)^2 - 3xy)$ и примените теорему о наибольшем произведении двух положительных чисел при их постоянной сумме.

268. Не может. Указание. I способ. Обозначьте сторону и высоту соответственно через a и h , выразите h через a из условия $a+h=15$, подставьте это выражение в формулу площади треугольника и решите соответствующее квадратное уравнение. II способ. Примените теорему о наибольшем произведении двух положительных чисел при их постоянной сумме.

271. $50\sqrt{2}$ м и $50\sqrt{2}$ м.

272. $p = 3$.

273. $\frac{2c}{\pi}$.

274. Существует, $a = 15$ км/ч.

275. а) Тело не сможет подняться на такую высоту; б) через 0,4 с.

276. $8\sqrt{2}$ м.

277. $a = b = 48,75$ м.

278. 30×15 см, через 10 с.

279. Квадрат со стороной 8 дм.

280. 2 см.

281. $r\sqrt{2} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2}$, $S = 2r^2$.

282. Через 1,4 часа.

283. $\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

284. $2\sqrt{3} \cdot 8$ см.

285. Нужно провести среднюю линию треугольника.

295. Пусть в $\triangle ABC$ сторона $AC = a$, высота $BH = h$, а в прямоугольнике $MNPO$ $MO = x$, $MN = y$. $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, значит, $\frac{y}{a} = \frac{h-x}{h}$, откуда

$y = a - \frac{a}{h}x$. Площадь прямоугольника $MNPO$ равна $x \cdot (a - \frac{a}{h}x) =$

$= -\frac{a}{h}(x^2 - hx) = -\frac{a}{h}(x^2 - 2 \cdot \frac{h}{2}x + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4}) = -\frac{a}{h}(x - \frac{h}{2})^2 + \frac{ah}{4}$. Наиболь-

шее значение это выражение принимает при $x = \frac{h}{2}$. То есть MN — средняя линия треугольника ABC .

306. $a = 1$.

307. б) 1.

308. $y_{\min} = 10$.

309. $\frac{|bv_1 - av_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

311. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 6x - 9$.

314. а) 2; б) $\pm\sqrt{5}$; в) ± 1 ; г) 2.

319. а) 3; б) 5.

321. а) 50,95; б) $\approx 9,4$; в) $\approx 13,46$; г) $13\frac{3}{19}$; д) $\approx 15,86$.

324. а) -2; 1; б) нет корней.

326. 14 дней.

327. 9 часов.

333. 3 кв. ед.

340. а) (0,5; 3); б) нет решений; в) $(3\frac{6}{11}; 1\frac{8}{11})$; г) любые пары чисел, удовлетворяющих уравнению $y = 4x - 2$.

341. а) (-2; -7), (7; 2); б) (20; 15); в) $(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}})$; г) (6; 4), (4; 6).

342. а) (-2; -1), (-2; 1), $(-\frac{1}{7}; -\frac{\sqrt{10}}{7})$, $(-\frac{1}{7}; \frac{\sqrt{10}}{7})$; б) (-1; -2), (1; 2), $(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}})$, $(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}})$; в) $(-9; -\frac{9}{2})$, $(-\frac{9}{2}; -9)$, (3; 6), (6; 3); г) (4; 9), (9; 4).

343. а) (0; 1), (1,5; -0,5), (1,5; 2,5), (3; 1); б) (1; 2), (2; 1); в) (-3; -2), (-1; -4), (4; 5), (6; 3); г) (0; 0), (-2; 2), (2; -2), $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$, $(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}; \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}; \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2})$.

344. 7 пряников.

345. 61 тетрадь.

346. 0,91р рублей.

347. 35,2 %.

348. 18 см и 12 см.

349. 90 см³, 80 см³.

350. Одинаковое количество.

351. 4411.

352. 85 книг.

353. 210 приборов.

355. 20.

356. 51.

357. 80 долларов.

358. 1 ч 15 мин, 75 км.

359. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$.

360. 12 и 17.

361. $v_p = \frac{8v_a}{v_a - 8}$ км/ч.

362. Более 80 км/ч.

363. $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ и $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

364. $\frac{\sqrt{t^2k^2 + 4tkn} + tk}{2t}$, $\frac{\sqrt{t^2k^2 + 4tkn} - tk}{2t}$.

365. $\frac{c - \sqrt{c^2 - 4h^2}}{2}$, $\frac{c + \sqrt{c^2 - 4h^2}}{2}$.

366. Через $\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ часов.

367. $\sqrt{m^2 + n^2}$.

368. $\frac{2at}{\sqrt{b^2t^2 + 4abt} - bt}$ часов.

ГЕОМЕТРИЯ

374. Используйте свойство биссектрис, проведенных из вершин односторонних углов (при их пересечении образуется прямоугольный треугольник).

379. $\frac{p-2c}{2}$.

380. а) 30°, 60°, 120°, 150°; б) 90°, 90°, 36°, 144°.

382. 8 + 2a.

383. 4a + 2b.

384. $\alpha + \beta$; 180 - ($\alpha + \beta$).

385. 80°.

386. 13 см.

387. 2 α , 180 - 2 α .

388. α , 180 - α .

390. 266°.

391. 55°, 125°, 55°, 125°.

396. (125 - α)°.

398. 10.

400. 60°, 120°, 60°, 120°.

401. Можно.

402. 90°.

403. $\frac{p-c}{2}$.

404. 60°, 120°, 120°, 60°.

405. 50 см.

406. Пусть дан $\angle BAC = \alpha$ и отрезок $m = AC + BD$ (рис. 196).

1. Постройте $\triangle AKN$ такой, чтобы $\angle A = \alpha$, $AN = \frac{1}{2}m$, $\angle N = 90^\circ$.

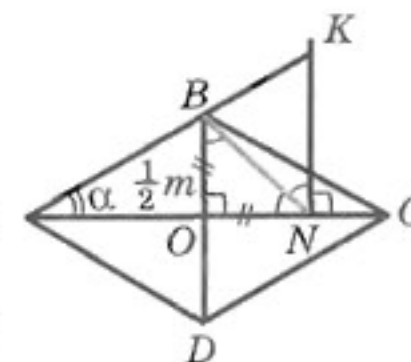


Рис. 196

2. Постройте биссектрису угла N , найдите точку пересечения этой биссектрисы со стороной AK , точку B .

3. Из точки B опустите перпендикуляр на AN , основание перпендикуляра O — точка пересечения диагоналей ромба.

407. 20 см или 22 см.

408. 20.

411. Проведите вторую диагональ квадрата и используйте свойства медиан треугольника.

414. 8 см.

415. 4 см.

416. 1 дм.

418. Неверно.

419. Постройте $\triangle AFD$, в котором $\angle A = 90^\circ$, $AD = a$, $AF = b + d$. Далее, построив серединный перпендикуляр к стороне FD , найдите точку пересечения этого перпендикуляра со стороной AF — точку B (рис. 197).

$$422. bc + \frac{1}{2}(a - c)^2.$$

428. Площадь квадрата больше.

429. В миллион раз.

430. Уменьшится на 4 %.

431. 12 кв. ед.

432. 60 см^2 .

433. 9 см.

434. 6 дм.

435. $p(p + k)$.

436. 4 см.

437. $\approx 9 \text{ см}$.

438. $2\sqrt{6} \text{ дм}$.

439. $p \cdot h$.

440. а) 60; б) $17\frac{1}{2}$.

442. $\sqrt{7}$.

443. См. рисунок 198.

444. Докажите способом от противного.

451. 12,5 кв. ед.

458. 120 см^2 .

461. Проведите диагональ BK и используйте свойство медиан $\triangle ABK$.

$$462. \frac{140\sqrt{11}}{3}.$$

463. $12\frac{12}{13}$, 12, 11, 2.

465. 70, 47.

$$470. \frac{Pd}{2}.$$

474. Проведите $MN \perp AC$ и сравните $\triangle MNP$ и $\triangle POD$.

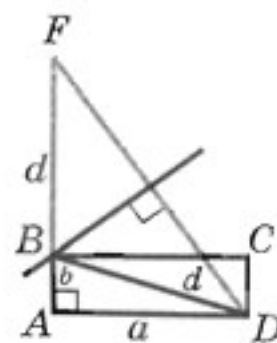


Рис. 197

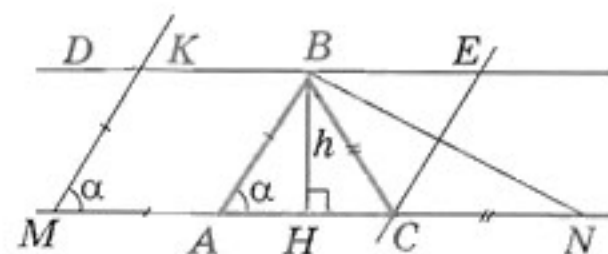


Рис. 198

484. в) Используйте центральную симметрию.

486. Не могут.

488. $BC = 2$, $AD = 1$.

495. $x = 72^\circ \cdot k$, $k = 0; 1; 2$; $\angle AKB = 72^\circ$.

500. а) Прямая, равноудаленная от этих прямых.

501. На угол AOO_1 , где O и O_1 — центры окружностей, а A — одна из точек пересечения.

502. Замените одну из данных точек ее образом при симметрии относительно данной прямой.

503. Прямая MN перпендикулярна биссектрисе данного угла.

504. Используйте симметрию относительно точки C .

505. Постройте образ отрезка TX при симметрии относительно прямой AB . Лучи SA и SB будут высекать на отрезке $T'X$ ту часть, которую увидит наблюдатель.

506. Установите, что данная прямая является осью симметрии трапеции.

507. Установите, что прямая, содержащая середины параллельных хорд, является осью симметрии окружности.

508. Прямая, содержащая точки пересечения продолжений боковых сторон трапеции и ее диагоналей, является осью симметрии окружности.

509. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

510. Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны и равны.

511. Установите, что точка пересечения диагоналей данного параллелограмма есть центр симметрии четырехугольника $MNLK$.

512. Перенесите параллельно каждую из боковых сторон в направлении оснований так, чтобы их общим концом была середина меньшего основания. Далее рассмотрите образовавшийся при этом прямоугольный треугольник.

513. Пусть в треугольнике ABC медианы AM и CD равны. Параллельный перенос $D \rightarrow M$ отобразит DC на MC' , тогда $\triangle AMC'$ — равнобедренный. Далее установите равенство отрезков CM и AD .

514. Постройте образ A' точки A при скользящей симметрии, осью l которой служит прямая, изображающая железную дорогу, а расстояние переноса равно a . Точка пересечения отрезка BA' с прямой l совпадает с искомой точкой K . Точка L является прообразом точки K при указанной скользящей симметрии.

(Скользящей симметрией считается преобразование — результат последовательного выполнения осевой симметрии и параллельного переноса в направлении, параллельном оси симметрии.)

515. Используйте поворот вокруг центра треугольника на 120° .

516. Поворот вокруг центра квадрата на 90° отобразит четырехугольник, вершинами которого являются центры построенных треугольников, на себя.

517. Поворот вокруг центра данного треугольника на 120° отображает точку N на точку M , следовательно, $OM = ON$ и $\angle MON = 120^\circ$.

518. Постройте равносторонний треугольник ABC с заданной длиной его стороны так, чтобы две его вершины A и B принадлежали соответственно прямым a и b . Искомым треугольником является образ треугольника ABC при параллельном переносе в направлении прямой a и отображающем вершину C на точку прямой c .

519. Рассмотрите параллельный перенос в направлении оснований трапеции, при котором одна из ее боковых сторон отображается на отрезок, имеющий с другой ее боковой стороной общий конец. Образовавшийся при этом треугольник — равносторонний. Длина меньшего основания трапеции равна 12 см.

520. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD + BC = 21$ см, $AC = 13$ см, $BD = 20$ см. Постройте образ отрезка BD при параллельном переносе $B \rightarrow C$. Тогда $T(D) = D_1$ и $S_{\triangle ACD_1} = S_{ABCD}$.

521. Серединый перпендикуляр отрезка, соединяющего центры окружностей.

522. Поверните сторону AC вокруг вершины A на 120° .

523. а) $A'(2; 3)$, $B'(5; 0)$, $C'(0; 7)$; в) $A_1(-3; 2)$, $B_1(0; 5)$, $C_1(-7; 0)$.

524. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — точки, симметричные точке A относительно оси Ox , оси Oy , биссектрисы I и III координатных углов и биссектрисы II и IV координатных углов соответственно. Тогда $A_1(a; -b)$, $A_2(-a; b)$, $A_3(b; a)$ и $A_4(-b; -a)$.

530. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Прямая, содержащая точку пересечения прямых AC и BD и перпендикулярная прямой m , также является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.

532. Установите, что прямые, содержащие диагонали этого параллелограмма, являются его осями симметрии.

533. Параллелограмм.

534. Используйте тот факт, что поворот не изменяет расстояния между двумя точками.

535. $y = 2x - 5$.

536. $y = 3x + 4$, $y = 3x - 4$.

537. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ($y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$).

538. а) На отрезке $B'C'$ отметить точку M' так, чтобы $B'M' = BM$; б) на отрезке BC отметить точку N так, чтобы $BN = B'N'$.

539. Воспользуйтесь тем, что центр окружности является ее центром симметрии, соответствующие при центральной симметрии прямые параллельны.

540. Ось симметрии данных точек; далее, можно воспользоваться угольником с углом в 60° или построить при луче AB угол, величина которого была бы равна 60° .

541. 120° .

542. Центр поворота есть точка пересечения осей симметрии точек A и B и центров окружностей.

543. Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы его основание принадлежало прямой m . Затем рассмотрите параллельный перенос в направлении m , при котором вершина треугольника отобразится на точку прямой l .

545. Имеет. Середина отрезка секущей, заключенного между параллельными прямыми.

558. Проведите диагональ AC ромба и поверните $\triangle ABC$ на 60° вокруг вершины A .

559. а) $x = \frac{35}{4}$; б) $x = \frac{20}{7}$; д) $x = 13,5$; е) $x = 4\frac{1}{3}$.

562. а) Верно; б) неверно.

563. б) $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см.

565. 6 м, 2 м, 7,5 м.

566. 22 см, 26 см.

567. 4 см.

568. а) 14 см; б) 9 дм.

571. 1 дм, 1,2 дм.

572. 25 мм, 30 мм и 40 мм.

575. 6,3 см.

577. 20 см, 15 см, 25 см.

578. 13,6 см.

579. а) Верно; б) неверно.

580. 1,26 дм.

582. а) 20; б) $4\frac{1}{6}$.

584. Нет (достаточно привести один пример).

585. Нет.

587. 24 см, 12 см.

592. Да.

593. Подобны.

594. Можно.

595. Используйте рисунок 199.

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$$

596. 33 мм.

597. 12 см и 15 см.

598. $\frac{mn}{m+n}$.

599. $\frac{10}{3}$.

600. $1\frac{2}{3}$ см.

601. 1 : 3.

602. б) Подобны.

603. 7,5 см.

604. 18 см.

605. 10 см, 14 см.

606. $2\sqrt{3}$ см.

607. 17,5 м, 22,5 м, 35 м.

608. 22,5 м.

611. 25 дм, 25 дм, 40 дм.

612. 8 см и 18 см.

613. 5 см и 7,5 см.

614. $9\frac{1}{3}$ см.

615. 8 см и 2 см.

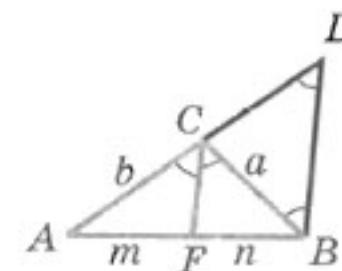


Рис. 199

616. $\frac{2}{3} t$.

617. $\frac{dn}{m}$.

618. Используйте теоремы о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике.

619. $PK = \frac{l(a+b)}{b}$.

620. Используйте метод подобия и теорему об отношении периметров подобных треугольников.

622. См. указание к заданию 620.

623. 4,5; 9; 9.

624. $6\sqrt{3} - 9$.

628. а) 16.

629. а) 6.

631. $30\sqrt{2}$ см.

632. а) 800%; б) $177\frac{7}{9}\%$.

633. 105 см.

634. 100 см, 60 см.

637. Можно вырезать прямоугольник, ширина которого равна $6\sqrt{2}$ см или $12\sqrt{2}$ см.

638. Нет.

642. 12 см и 18 см; 8 см и 12 см.

643. 20 см.

644. $S = \frac{(a^2 - b^2)b}{a}$.

645. 300 м.

646. 144 га.

648. $BE = 7$ см, $EC = 5$ см (используйте свойство биссектрисы AE).

650. 3,4 см.

653. $\frac{1}{3}$ м.

654. $b, \frac{b^2}{a}$.

655. 1 дм, 2,5 дм, 2 дм.

658. 36 и 12.

659. 15 см.

660. 24 см.

662. 10 см.

663. 0,5 с; 1,5 с.

666. 18 см, $23\frac{4}{7}$ см, $25\frac{5}{7}$ см.

667. $6\frac{2}{3}$ см.

672. 18 см.

673. 45 см, 5 см.

675. $66\frac{2}{3}$ дм² или 8,64 дм².

677. а) Может (установите, при каком условии).

679. $6\frac{2}{3}$ см.

681. $c\sqrt{3}, c\sqrt{6}, 3c$.

684. Пусть нужно построить $\triangle ABC$, в котором

$AB = b, AC = a, AO$ — медиана, $\frac{1}{3}AO = m$. Продлив медиану и отложив отрезок $OD = AO$, получим четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому построение можно начать с построения $\triangle ACD$ по трем сторонам $AC = a, CD = b, AD = 6m$.

685. 24 см.

686. Например, проведем прямую, параллельную стороне параллелограмма, равной b , и отсекающую на другой его стороне отрезок x такой, что $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

687. См. рисунок 200.

689. а) 0,8; б) 0,8; в) 1,4; г) 1; е) 1; ж) 2; з) 1.

690. а) 0,6; б) 0,6; в) 1,4; г) 1; д) $\frac{25}{12}$; е) 7,84.

691. а) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$, б) $\frac{1}{\cos \alpha}$; в) $-2\operatorname{ctg} \alpha$; г) $\frac{2}{\cos \alpha}$.

692. а) $\cos^2 \alpha$; б) $-2\cos^2 \alpha$; в) $3\sin^2 \alpha$; г) $4\cos^2 \alpha$; д) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; е) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

ж) $-\operatorname{tg} \alpha$; з) -1 .

693. а) 0,5; б) $-0,5$; в) 0,430(5); г) 0,81(6).

694. а) Верно.

698. ≈ 55 см, ≈ 61 см.

699. 2,8 см, $1,4\sqrt{21}$ см $\approx 6,4$ см.

700. $\frac{25}{21}$ см, $\frac{20}{21}$ см.

701. $\frac{280}{3\sqrt{89}} \approx 9,9$ (дм), $\frac{448}{3\sqrt{89}} \approx 16$ (дм).

702. $\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

704. $m\sqrt{2}$.

705. в) Сравните $\sin 40^\circ$ с $\sin 45^\circ$, а $\cos 40^\circ$ с $\cos 45^\circ$; г) оцените знак разности $\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ$, используя вывод, полученный при решении задания в). д), е) — используйте свойство $0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1$, где α — острый угол.

706. в) Сравните $\sin 40^\circ$ и $\cos 70^\circ$ с $\frac{1}{2}$; г) сравните $\sin 33^\circ$ и $\cos 50^\circ$ с $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

708. а) $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$.

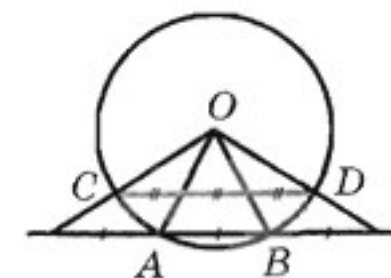


Рис. 200

709. Проверьте выполнение основного тригонометрического тождества.
 712. $c \approx 47$ см, $b \approx 40$ см.
 713. $\approx 49^\circ$, $\approx 41^\circ$, ≈ 28 см.
 714. $\approx 51^\circ$, $\approx 39^\circ$, ≈ 42 см.
 716. а) $-2 \cos^2 \alpha$; б) 0.
 717. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.
 718. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.
 719. Возведите в квадрат правую и левую части равенства
 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$.
 720. ≈ 34 м.
 721. $\approx 4,2$ км, $\approx 6,5$ км.
 722. $\approx 46,6$ м.
 724. $\frac{1}{4}$.
 725. $\frac{\sqrt{3}}{4} \alpha^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.
 726. $\approx 74^\circ$.
 727. ≈ 4 см.
 730. 24 см, 13,44 см, 13,44 см.
 731. $\approx 2,1$ м.
 732. Нельзя.
 733. ≈ 25 м.
 734. ≈ 48 м.
 735. $\approx 3,9$ м.
 736. $\approx 11,7$ м.
 737. ≈ 19 см².
 738. $S = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h^2}{2 \sin 2\alpha}$.
 739. $c = 30$, $b = 6\sqrt{5}$, $a = 12\sqrt{5}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
 740. а) $\frac{15}{17}$; б) $\cos \beta \approx 0,559$.
 741. 75° .
 742. 25 см².
 743. 60° , 120° .
 744. а) 40° или 140° .
 745. $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
 746. 37,5 см².
 747. 75 см².
 748. а) Верно.

749. Возведите в квадрат обе части неравенства.
 750. $\approx 4,6$ км.
 752. 0,3125.
 753. $\sin A \approx 0,8615$, $\sin B \approx 0,9231$, $\sin C = 0,8$, $\cos A \approx 0,8793$, $\cos B \approx 0,3846$, $\cos C = 0,6$, $\operatorname{tg} A \approx 0,9798$, $\operatorname{tg} B \approx 2,4$, $\operatorname{tg} C = 1,3$.
 754. а) $-\frac{1}{44}$; б) $-\frac{\sqrt{3}+1}{11}$.
 756. Верно.
 756. а) Разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos \alpha$; 9; б) 1,5;
 в) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$.
 760. а) $\approx 0,34$; в) $\approx -0,84$.
 761. а) $\alpha \approx 12^\circ$ или $\alpha \approx 168^\circ$; б) $\alpha \approx 127^\circ$.
 762. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.
 763. а) ± 1 ; в) $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 764. а) 0; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $-\frac{3}{4}$.
 765. $\approx -0,98$.
 767. $\approx 0,5$.
 770. а) $-2,4$; б) $\frac{8}{15}$.
 773. Неверно.
 780. $\frac{25\sqrt{2}}{16}$ дм²; 2,2 дм².
 781. 25 см².
 783. 60,5 см².
 784. 92° и 88° .
 785. $\approx 63^\circ$.
 786. $P = 2(a + b + b \cos \alpha)$, $S = b(a + b \cos \alpha) \sin \alpha$.
 788. $\frac{c^2(d^2 - 1)}{4}$, $d > 1$.
 791. а) $\cos \alpha + \sin \alpha$; б) $2 \cos \alpha$; в) 1; г) 0.
 793. $\frac{24}{25}$.
 796. а) Верно; б) верно.
 798. а) 0,5; б) корней нет.
 799. а) $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.
 800. а) $1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.
 802. а) 1 и 5; б) -4 и 6.
 803. а) 0; б) 5.
 807. $\sin \gamma \approx 0,97$; $\cos \gamma \approx -0,22$.
 808. $\cos \gamma \approx 0,48$; $\sin \gamma \approx 0,87$; $\operatorname{tg} \gamma \approx 1,8$.

809. После упрощения левой части равенства получим $2\left(\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)$, а так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, то делаем вывод: равенство не является тождеством.

813. а) Да; б) является; в) да.

814. Является.

816. Сравните правые части равенства с 1.

817. а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$; б) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

г) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; г) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

818. а) $b = 21$ см, $\beta \approx 47^\circ$; б) $c = 25$ см, $\alpha \approx 74^\circ$, $\beta \approx 16^\circ$.

819. а) $5\sqrt{3}$; б) 8.

820. а) $AB = 4\sqrt{3}$ см, $AC = 10$ см, $S = (24 + 6\sqrt{3})$ см²; б) $AB = 13$ см, $BC = 10$ см, $S = (30 + 12,5\sqrt{3})$ см².

821. а) $2a \sin \frac{\alpha}{2}$; $2a \cos \frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{d}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$; $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

822. а) $\operatorname{tg} \alpha$, $\frac{a}{\cos \alpha}$; б) $\alpha \sin \alpha$, $a(1 + \cos \alpha)$.

823. Не меньше $1,5^\circ$.

824. $\approx 68^\circ$, $\approx 22^\circ$.

825. ≈ 1 м.

828. 1.

829. а) $\frac{70}{51}$; б) -9 или $-\frac{1}{9}$.

830. а) $\sin A : \sin B = BC : AC$; б) $AB : AC = \sin C : \sin(A + C)$.

836. а) 1; б) 3.

837. $\frac{a \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

838. $a \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}$.

843. $\sin \alpha \approx 0,8$, $\cos \alpha \approx 0,6$.

844. $d^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

845. $CD = \sqrt{m^2 - h^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha - h$.

846. Умножьте числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1 - \sin \alpha$.

848. Возведите в квадрат левую и правую части данного равенства.

849. а) 27 см; б) 40 см.

855. 192 дм².

856. 320.

857. $500 - 4,5\sqrt{3}$.

858. 1536.

863. $\angle C \approx 14^\circ$. (Найдите $\operatorname{tg} C$, используя разные формулы площади треугольника.)

864. $5\sqrt{2}$ см.

865. $M(0,5; 4,5)$, $K(3; 5)$.

868. а) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см, $\frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}$ см; б) $BD = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$ см, $AC = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$ см.

869. 20 см.

870. 100 м.

874. ≈ 202 дм².

875. ≈ 633 см². (Используйте формулы площади параллелограмма $S = ah$, $S = ab \cdot \sin \alpha$ для отыскания боковой стороны трапеции.)

879. а) 9 см, 24 см; б) 20 см.

885. $2h$.

ДОМАШНИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

АЛГЕБРА

Глава I. Функции

В-1 3. (4; 179).

4. $S = 20 - 5 \cdot t$, $0 < t \leq 4$.

5. а) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

б) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

В-2 4. (0; -1), (5; 0).

5. При $a = \pm 4$; (2; 2) или (-2; -2).

Глава II. Системы уравнений

В-1 1. $c_1 = 20$, $c_2 = 31$.

2. $y = x + 1$.

3. (-2; 4), (4; -2).

4. 360 га, 450 га.

5. $a = 2$.

В-2 1. (1; 2).

2. Да.

3. $(x; 2)$, где x — любое число, кроме $x = -1$, и $(-1; y)$, где y — любое число.

4. 10 км/ч.

5. $b = 1$.

Глава III. Квадратичная функция

В-1 3. $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. При $x \in (-\infty; 1]$ функция убывает, при $x \in [1; +\infty)$ функция возрастает.

4. Пересекаются в точках $A(3; 3)$ и $B(15; 75)$.

5. 128. Рассмотрите функцию $f(x) = x^2 + (16 - x)^2$.

В-2 2. $x_1 = -2$, $x_2 = 9$.

3. $b = -6$.

4. $c = 8$, $f(x) < 0$ при $x \in (2; 4)$, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

5. $a = -\frac{1}{3}$. Длина отрезка, параллельного оси Oy , находится по формуле $|y_2 - y_1|$. Рассмотрите функцию $f(a) = 2a^2 + (a + 1)^2$.

Глава IV. Многоугольники и их площади

- В-1 2. 4,8.
3. б) 8 см.
4. 16 см^2 .
В-2 2. 2,4 см.
4. $2\sqrt{66}$.

Глава V. Движения на плоскости

- В-1 5. Центр поворота O — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AC и BD . Докажите, что $\angle AOC = \angle BOD$.
В-2 5. Любая точка на серединном перпендикуляре к отрезку O_1O_2 , соединяющему центры окружностей. а) Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку O_1O_2 и биссектрисы угла O_2O_1M , равного 135° .

Глава VI. Подобные фигуры

- В-1 2. 90 см^2 и 160 см^2 .
3. 6,25 дм и 8,75 дм.
4. Используйте утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.
В-2 2. 16 см^2 .
3. 12 см и 16 см.
4. $\frac{a+c}{b}$.

Глава VII. Тригонометрические функции угла

- В-1 2. а) $0,25 - \sqrt{3}$; б) $\frac{19 \cdot 8\sqrt{3}}{48}$.
3. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
5. 10 дм, 8 дм, $\approx 53^\circ$, $\approx 37^\circ$.
В-2 2. а) $\frac{9-4\sqrt{3}}{12}$; б) $-\frac{57 \cdot 24\sqrt{3}}{16}$.
3. $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \alpha = -0,8$.
4. 9 см, $\sqrt{117}$ см, $\approx 56^\circ$, $\approx 34^\circ$, $h_c = \frac{54\sqrt{117}}{117} \approx 5$ (см).
5. $d_1 = 2m \sin \frac{\alpha}{2}$, $d_2 = 2m \cos \frac{\alpha}{2}$, $h = m \sin \alpha$, $S = m^2 \sin \alpha$.
6. $AE : BH = 4 : 5$. Обозначив длину основания, например x , выразите через x длину боковой стороны треугольника. Далее используйте подобие треугольников AEC и BHC .

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

<i>Aa</i>	а	<i>Nn</i>	эн
<i>Bb</i>	бэ	<i>Oo</i>	о
<i>Cc</i>	цэ	<i>Pp</i>	пэ
<i>Dd</i>	дэ	<i>Qq</i>	ку
<i>Ee</i>	э	<i>Rr</i>	эр
<i>Ff</i>	эф	<i>Ss</i>	эс
<i>Gg</i>	же	<i>Tt</i>	тэ
<i>Hh</i>	аш	<i>Uu</i>	у
<i>Ii</i>	и	<i>Vv</i>	вэ
<i>Jj</i>	йот (жи)	<i>Ww</i>	дубль-вэ
<i>Kk</i>	ка	<i>Xx</i>	икс
<i>Ll</i>	эль	<i>Yy</i>	игрек
<i>Mm</i>	эм	<i>Zz</i>	зэт

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

α альфа	ι йота	ρ ро
β бета	κ каппа	σ ς сигма
γ гамма	λ ламбда	τ тау
δ дельта	μ мю	υ ипсилон
ϵ эпсилон	ν ню	ϕ фи
ζ дзета	ξ кси	χ хи
η эта	\omicron омикрон	ψ пси
θ тета	π пи	ω омега

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

N	— множество натуральных чисел
Z	— множество целых чисел
Q	— множество рациональных чисел
R	— множество действительных чисел
\in	— знак принадлежности элемента множеству
\cup	— знак объединения множеств
\cap	— знак пересечения множеств
$=$	— знак равенства
\approx	— знак равенства (равно приближенно)
\neq	— знак неравенства
$>$	— знак неравенства (больше)
$<$	— знак неравенства (меньше)
\geq	— знак неравенства (больше или равно)
\leq	— знак неравенства (меньше или равно)
$ x $	— абсолютная величина (модуль) числа x
$f(x)$	— функция $f(x)$
a^n	— степень числа a с целым показателем n
\sqrt{a}	— арифметический квадратный корень из числа a
$m\%$	— число (m) процентов (%)
c°	— число (c) градусов ($^\circ$)
AB	— прямая AB (луч AB , отрезок AB)
$AB, AB $	— расстояние от точки A до точки B
$\angle A, \angle ABC$	— угол A , угол ABC
\perp	— знак перпендикулярности (прямых, лучей, отрезков)
\parallel	— знак параллельности (прямых, лучей, отрезков)
\sim	— знак подобия фигур; S — площадь фигуры
P	— периметр фигуры; V — объем

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десят- ки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Числовой промежуток	Рисунок на числовой прямой	Обозначение
$x_1 < x < x_2$		$(x_1; x_2)$
$x_1 \leq x < x_2$		$[x_1; x_2)$
$x_1 < x \leq x_2$		$(x_1; x_2]$
$x_1 \leq x \leq x_2$		$[x_1; x_2]$
$x \geq a$		$[a; +\infty)$
$x \leq b$		$(-\infty; b]$
$x > c$		$(c; +\infty)$
$x < p$		$(-\infty; p)$

Числовое выражение — запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий. Например, $1,2 \cdot (-3) - 9^3 : 0,5$ — числовое выражение.

Буквы в алгебре используются для обозначения различных чисел. Например, если $2(a + b)$ — периметр прямоугольника со сторонами a и b , то под буквами a и b понимаются любые положительные числа.

Алгебраическое выражение — выражение, состоящее из чисел, букв, обозначающих некоторые числа, и знаков действий. Примеры алгебраических выражений:

$$2(a + b); 13a + 2ab - 11; (a - b)^2; \frac{2x + y}{y^2 - 4x^2}.$$

Числовое значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены букв числами. Например, числовое значение выражения $13a + 2ab - 1$ при $a = 2$, $b = -1$ равно $13 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 = 21$.

Одночленами называются произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени с натуральными показателями. Например, $15a^2x$; $-3a^2b^3$; $4,4x$; y^5 — одночлены.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней переменных, входящих в одночлен. Например, степень одночлена $0,8a^2b^{12}$ равна 14.

Многочленом называется сумма одночленов. Например, $3x^5 - 4x^3 + 1$, $17a^3b - ab^2 + ab + 16$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $15x^3y + 3x^2y^6 - xy$ равна степени одночлена $3x^2y^6$, т. е. равна 8.

Степенью многочлена, не записанного в стандартном виде, называется степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например, $(5x^2 - 3xy) + (4xy - 2x^2 + 1) = 5x^2 - 3xy + 4xy - 2x^2 + 1 = 3x^2 + xy + 1$.

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно

опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки, на противоположный. Например, $(8a^2 - 3ab) - (7a^2 - 4ab + 5) = 8a^2 - 3ab - 7a^2 + 4ab - 5 = a^2 + ab - 5$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $2x^2(3x^3 - xy + 5y^2) = 6x^5 - 2x^3y + 10x^2y^2$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(2a - 3)(3a^2 + a - 4) = 6a^3 + 2a^2 - 8a - 9a^2 - 3a + 12 = 6a^3 - 7a^2 - 11a + 12$.

ФОРМУЛЫ (ТОЖДЕСТВА) СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. Квадрат суммы двух выражений:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Квадрат разности двух выражений:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Произведение разности двух выражений и их суммы:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

4. Куб суммы двух выражений:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

5. Куб разности двух выражений:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

6. Произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

7. Произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

СВОЙСТВА ДЕЙСТВИЙ НАД ДРОБЯМИ

$$1. \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

$$2. -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}, b \neq 0.$$

$$3. -\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}, b \neq 0.$$

$$4. \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0.$$

$$5. \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0.$$

$$6. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0.$$

$$7. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0.$$

$$8. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0.$$

$$9. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Понятие степени a^n с целым показателем n определяется следующим образом:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителей}}, & \text{если } a \in R, n - \text{натуральное число больше 1;} \\ a, & \text{если } a \in R, n = 1; \\ 1, & \text{если } n = 0, a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{если } n - \text{целое отрицательное число, } a \neq 0. \end{cases}$$

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \neq 0, m \in Z, n \in Z.$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0, m \in Z, n \in Z.$$

$$3. (ab)^n = a^n \cdot b^n, b \neq 0, a \neq 0, m \in Z, n \in Z.$$

$$4. (a^m)^n = a^{mn}, a \neq 0, m \in Z, n \in Z.$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a \neq 0, b \neq 0, n \in Z.$$

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a :

$$\sqrt{a} = b, b^2 = a.$$

$$1. \sqrt{a^2} = |a|, a \in R.$$

Напомним, что по определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

$$2. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0.$$

$$3. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0.$$

$$4. \sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ если } a > b \geq 0.$$

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, а a и b — некоторые действительные числа, решается в общем виде так:

1. Если $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$ — единственный корень уравнения.
2. Если $a = 0$ и $b = 0$, то множеством корней уравнения является множество действительных чисел R .
3. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.

Формулы корней квадратного уравнения:

1. Если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
2. Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Линейное неравенство с одной переменной

Линейное неравенство с одной переменной — неравенство одного из следующих видов: $ax + b < 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$.

Например, решение неравенства $ax + b > 0$ сводится к исследованию следующих случаев:

1. Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$, т. е. $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
2. Если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.
3. Если $a = 0$ и $b > 0$, то множеством решений неравенства является множество действительных чисел R .
4. Если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство не имеет решений.

ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ

Названия формул. Формулы	Обозначения
Сумма углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	$\angle A, \angle B, \angle C$ — величины углов треугольника
Площадь квадрата $S = a^2$	a — длина стороны
Площадь прямоугольника $S = ab$	a, b — длины сторон
Площадь параллелограмма $S = ah$	a — длина стороны, h — высота, проведенная к этой стороне
Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} ah$	a — длина основания, h — высота, проведенная к этому основанию
Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$	a, b — длины сторон, γ — величина угла между a и b
Площадь трапеции $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$	a, b — длины оснований, h — высота
Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$	c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника; a, b — длины катетов
Расстояние между двумя точками $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$(x_1; y_1)$ — координаты точки A , $(x_2; y_2)$ — координаты точки B

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; | 6) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; |
| 2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; | 7) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$; |
| 3) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; | 8) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; |
| 4) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; | 9) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. |
| 5) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; | |

Таблица значений квадратных корней

n	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	n	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	n	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$
1	1,000	3,162	35	5,916	18,708	68	8,246	26,077
2	1,414	4,472	36	6,000	18,974	69	8,307	26,268
3	1,732	4,477	37	6,083	19,235	70	8,367	26,458
4	2,000	6,325	38	6,164	19,494	71	8,426	26,646
5	2,236	7,071	39	6,245	19,748	72	8,485	26,833
6	2,449	7,746	40	6,325	20,000	73	8,544	27,019
7	2,646	8,365	41	6,403	20,248	74	8,602	27,203
8	2,828	8,944	42	6,481	20,494	75	8,660	27,386
9	3,000	9,487	43	6,557	20,736	76	8,718	27,568
10	3,162	10,000	44	6,633	20,976	77	8,775	27,749
11	3,317	10,488	45	6,708	21,213	78	8,832	27,928
12	3,464	10,954	46	6,782	21,448	79	8,888	28,107
13	3,606	11,402	47	6,856	21,679	80	8,944	28,284
14	3,742	11,832	48	6,928	21,909	81	9,000	28,460
15	3,873	12,247	49	7,000	22,136	82	9,055	28,636
16	4,000	12,649	50	7,071	22,361	83	9,110	28,810
17	4,123	13,038	51	7,141	22,583	84	9,165	28,983
18	4,243	13,416	52	7,211	22,804	85	9,220	29,155
19	4,359	13,784	53	7,280	23,022	86	9,274	29,326
20	4,472	14,142	54	7,348	23,238	87	9,327	29,496
21	4,583	14,491	55	7,416	23,452	88	9,381	29,665
22	4,690	14,832	56	7,483	23,664	89	9,434	29,833
23	4,796	15,166	57	7,550	23,875	90	9,487	30,000
24	4,899	15,492	58	7,616	24,083	91	9,539	30,166
25	5,000	15,811	59	7,681	24,290	92	9,592	30,332
26	5,099	16,125	60	7,746	24,495	93	9,644	30,496
27	5,196	16,432	61	7,810	24,698	94	9,695	30,659
28	5,292	16,733	62	7,874	24,900	95	9,747	30,822
29	5,385	17,029	63	7,937	25,100	96	9,798	30,984
30	5,477	17,321	64	8,000	25,298	97	9,849	31,145
31	5,568	17,607	65	8,062	25,495	98	9,899	31,305
32	5,657	17,889	66	8,124	25,690	99	9,950	31,464
33	5,745	18,166	67	8,185	25,884	100	10,000	31,623
34	5,831	18,439						

Таблица тригонометрических функций углов от 0° до 90°

Гра- дусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Гра- дусы
0	0,00000	1,00000	0,00000		90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78139	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Гра- дусы	Косинусы	Синусы	Котангенсы	Тангенсы	Гра- дусы

Преобразование подобия 194	— прямоугольный 142
Призма прямая 93, 236	— равнобедренный 121
Признаки параллелограмма 128	— равносторонний 166
— параллельных прямых 128	— остроугольный 142
— подобия треугольников 179	— тупоугольный 142
— равенства треугольников 128	
Проекция (точки, отрезка) на прямую (плоскость) 188	Угол
Пропорциональные отрезки 176	— внешний (многоугольника) 133
Пространство 146, 169	— многоугольника 125
Прямая 124	— между прямыми 139
Прямоугольник 127	— острый 207
	— поворота 156
Радиус (круга, окружности) 175	— прямой 224
Развертка призмы 93	— развернутый 224
Расстояние от точки до фигуры 140	— треугольника 139
— между двумя точками 49	— тупой 224
Ромб 127	Фигура симметричная 153
Свойства площади 141	— — относительно оси 154
Симметрия осевая 154	— — — центра 153
— центральная 153	Фигуры гомотетичные 195
Синус угла 207	— подобные 193
Средняя линия трапеции 132	— равновеликие 145
— — треугольника 132	— равные 145
Тангенс угла 207	Формулы 274
Теорема	— тригонометрические 208, 221
— обратная 129	Хорда окружности 167
— Пифагора 142	
— Фалеса (обобщенная) 184	Центр (круга, окружности) 154
Трапеция 127	— гомотетии 195
— прямоугольная 127	— поворота 156
— равнобедренная 127	— симметрии 27
Треугольник	Четырехугольник 126

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
----------------------	---

Алгебра

Глава I. Функции	6
§ 1. Понятие функции и способы ее задания	—
1. Понятие функции	—
2. Способы задания функции	9
§ 2. Функции $y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x $, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$	
и их графики	16
1. Возрастание и убывание, четность и нечетность функций	—
2. Линейная функция и ее график	18
3. Прямая пропорциональность	19
4. Обратная пропорциональность	21
5. Функция $y = x $ и ее график	23
6. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график	24
7. Функция $y = x^2$ и ее график	25
8. Функция $y = x^3$ и ее график	26
9*. Степенная функция	27
Повторение главы I	34
Глава II. Системы уравнений	46
§ 3. Уравнения с двумя переменными	—
1. Уравнение с двумя переменными и его график	—
2. Уравнения линий на плоскости	49
§ 4. Системы двух уравнений с двумя переменными	56
1. Понятие о системе двух уравнений с двумя переменными и ее решение	—
2. Способы решения систем двух уравнений с двумя переменными	57
3. Решение текстовых задач с применением систем уравнений	70
Повторение главы II	79
Глава III. Квадратичная функция	90
§ 5. Квадратичная функция и ее свойства	—
Квадратичная функция и ее график	—
§ 6. Решение задач с применением свойств квадратичной функции	102
Повторение главы III	107
§ 7. Упражнения для повторения курса алгебры	115

Геометрия

Глава IV. Многоугольники и их площади	124
§ 8. Многоугольники и их свойства	—
1. Понятие многоугольника	—

2. Определения четырехугольников	126
3. Свойства четырехугольников	128
§ 9. Площади многоугольников	141
Повторение главы IV	147
Глава V. Движения на плоскости	152
§ 10. Основные виды движений	—
1. Понятие движения	—
2. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)	153
3. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)	154
4. Параллельный перенос	155
5. Поворот около данной точки	156
6. Свойства движений	157
§ 11. Применение движений к решению задач	163
Повторение главы V	169
Глава VI. Подобные фигуры	176
§ 12. Подобные треугольники	—
Определение подобных треугольников	—
§ 13. Признаки подобия треугольников	179
§ 14. Применение подобия к решению задач	185
§ 15. О подобии произвольных фигур	193
1. Подобие и гомотетия	—
2. Подобные многоугольники	195
Повторение главы VI	201
Глава VII. Тригонометрические функции угла	206
§ 16. Тригонометрические функции острого угла	—
1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла	—
2. Тригонометрические формулы	208
§ 17. Тригонометрические функции углов от 0° до 180°	220
1. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0° до 180°	—
2. Формулы приведения	221
Повторение главы VII	229
§ 18. Упражнения для повторения курса геометрии	235
§ 19. Контрольные задания по алгебре и геометрии для повторения	244
Ответы и указания	249
Приложения	271
Предметный указатель	282

Учебное издание
Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

МАТЕМАТИКА

Алгебра и геометрия

Учебное пособие для 9 класса
учреждений, обеспечивающих получение
общего среднего образования,
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Зав. редакцией В. Г. Бехтина. Редактор Л. А. Тимофеева. Художник
Е. В. Костыка. Художественный редактор Л. В. Павленко. Технический ре-
дактор З. В. Романкевич. Корректоры В. С. Бабеня, З. Н. Гришели, А. В. Алеш-
ко, А. Л. Штейнман.

Подписано в печать с диапозитивов 25.01.2006. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Бумага
офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. $18 + 0,25$
форз. Усл. кр.-отт. 36,8. Уч.-изд. л. $13,81 + 0,43$ форз.

Тираж 1650 экз. Заказ 283.

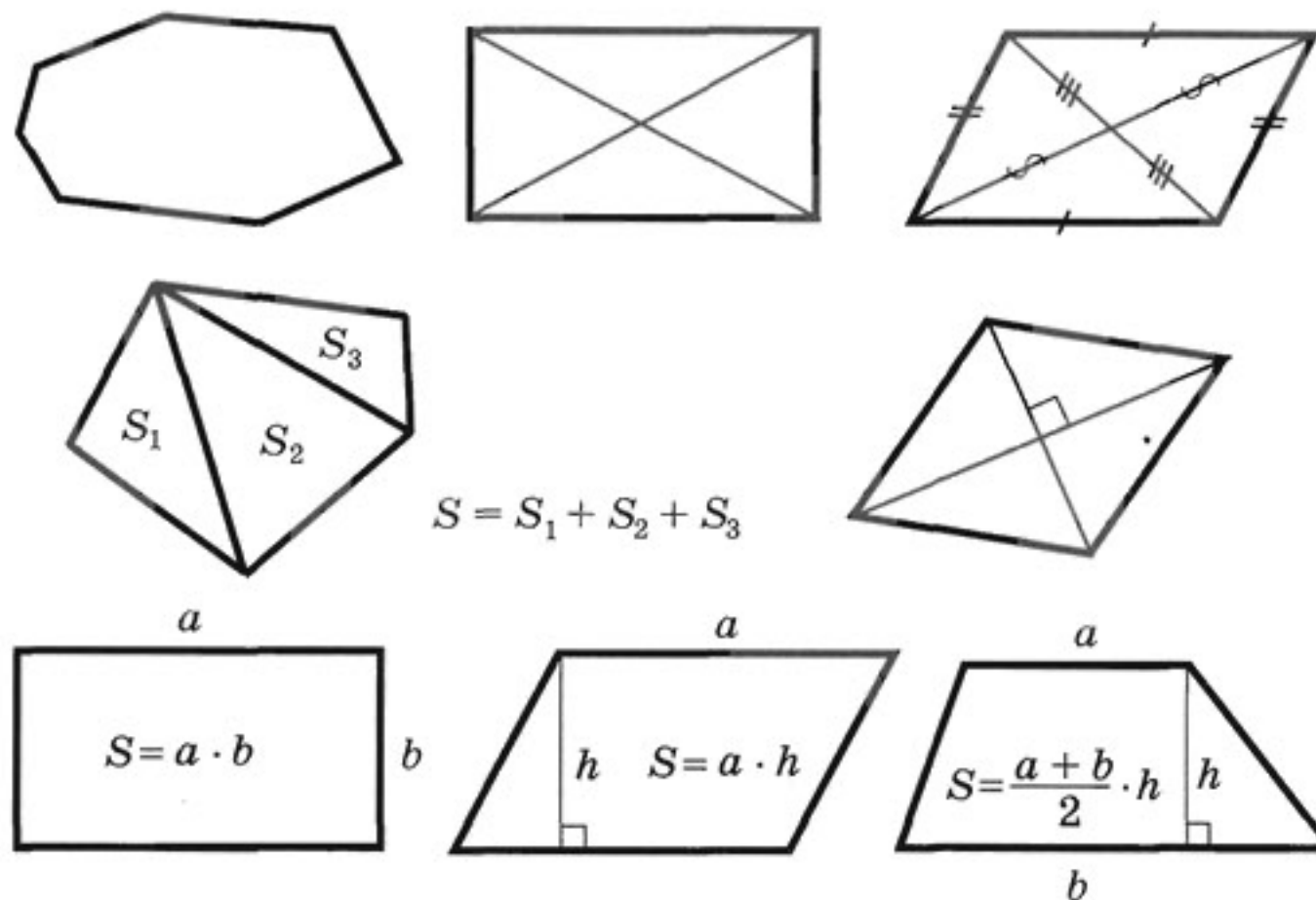
Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.

ЛП № 02330/0056915 от 01.04.2004.

220004, Минск, проспект Победителей, 11.

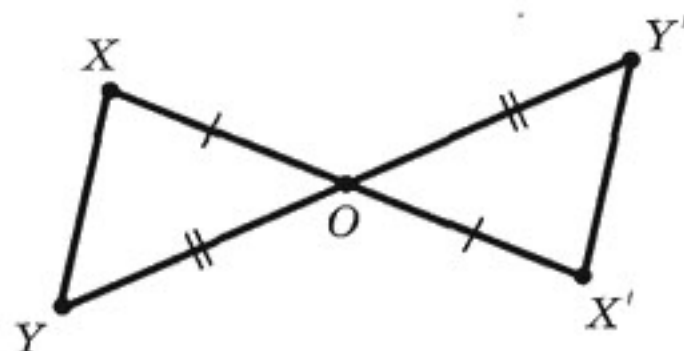
ОАО «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа».
220600, Минск, Красная, 23.

Многоугольник. Четырехугольники



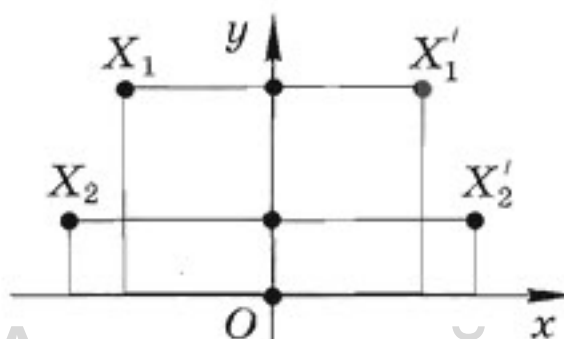
Преобразование симметрии относительно точки

$$\begin{aligned} OX' &= OX \\ OY' &= OY \\ X'Y' &= XY \end{aligned}$$



Преобразование симметрии относительно прямой

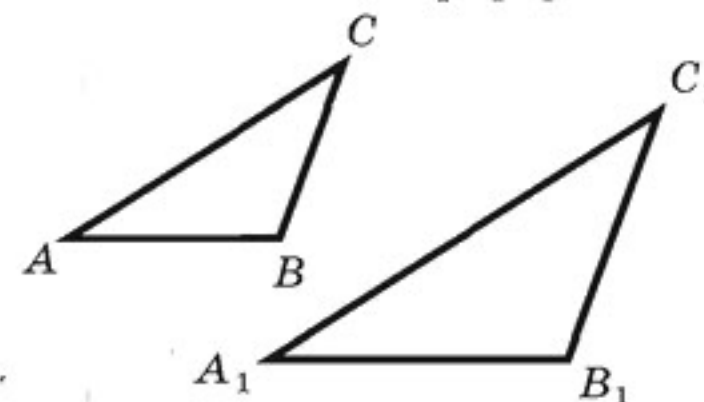
$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow X'_1 \\ X_2 &\rightarrow X'_2 \\ X'_1 X'_2 &= X_1 X_2 \end{aligned}$$



Признаки подобия треугольников

1. По двум углам
2. По двум сторонам и углу между ними
3. По трем сторонам

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$$

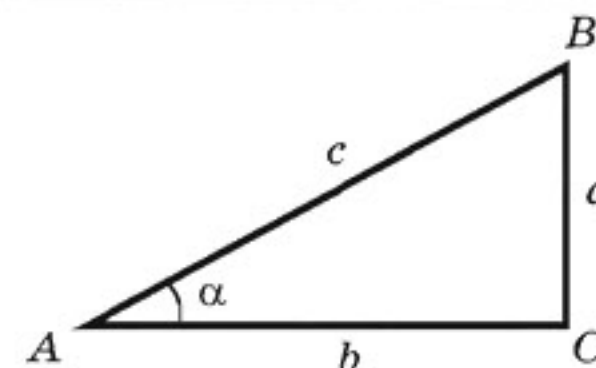


$$1. \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$$

$$2. \angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1}$$

$$3. \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1}$$

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике



$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha \\ b &= c \cos \alpha \\ a &= b \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Формулы приведения

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ:$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$$

