

**В. В. Шлыков**

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 7 класса  
общеобразовательных учреждений  
с русским языком обучения

*Допущено  
Министерством образования  
Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2011

Правообладатель Народная асвета

УДК 514(075.3=161.1)  
ББК 22.151я721  
Ш69

Рецензенты:

кафедра естественнонаучных дисциплин и информационных технологий государственного учреждения образования «Минский областной институт развития образования» (старший преподаватель кафедры *В. В. Казаков*); учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Гимназия № 1 г. Барановичи» *Я. А. Кобрин*

ISBN 978-985-03-1491-8

© Шлыков В. В., 2011  
© Оформление. УП «Народная  
асвета», 2011

Правообладатель Народная асвета

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава 1

### ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ

§ 1. Возникновение геометрии. Предмет геометрии . . .	7
§ 2. Плоские и пространственные фигуры . . . . .	11
§ 3. Изображение фигур . . . . .	21

## Глава 2

### НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Взаимное расположение точек и прямых . . . . .	30
§ 2. Сравнение и измерение отрезков. Окружность и круг	41
§ 3. Сравнение и измерение углов. Свойства смежных и вертикальных углов . . . . .	60

## Глава 3

### ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Треугольник. Первый признак равенства треуголь- ников . . . . .	78
§ 2. Медианы, высоты и биссектрисы треугольника. Равнобедренный треугольник . . . . .	88
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	104

## Глава 4

### ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 1. Признаки параллельности прямых . . . . .	114
§ 2. Свойства параллельных прямых . . . . .	123

## Глава 5

### СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. Сумма градусных мер углов треугольника. Внеш- ний угол треугольника . . . . .	136
§ 2. Неравенство треугольника . . . . .	144
§ 3. Признаки равенства и свойства прямоугольных треугольников . . . . .	152
§ 4. Расстояние между параллельными прямыми . . .	165
§ 5. Задачи на построение циркулем и линейкой . . .	178
§ 6. Задачи для повторения . . . . .	189
Ответы . . . . .	195

## *Уважаемые друзья!*

Данное учебное пособие предназначено для изучения школьного курса геометрии. В предыдущих классах уже состоялось ваше знакомство с некоторыми геометрическими фигурами и их свойствами. Сейчас вы продолжите изучение свойств геометрических фигур, что будет способствовать развитию логического и пространственного мышления, умений анализировать информацию, использовать полученные знания для решения различных задач.

Изучение геометрии обусловлено тем, что геометрические знания находят применение в различных областях деятельности человека, необходимы при строительстве архитектурных сооружений и создании художественных произведений. Изучение геометрии поможет увидеть красоту математики, будет способствовать более успешному изучению других школьных предметов, для усвоения которых необходима геометрическая интуиция и навыки логических рассуждений.

В учебном пособии уделено внимание иллюстративному материалу, изображениям геометрических фигур как средству развития навыков чтения графических моделей и формирования понятий о геометрических фигурах и их моделях. С целью развития пространственных представлений систематически рассматриваются плоские геометрические фигуры, расположенные в различных плоскостях.

Зарисовки геометрической графики, иллюстративный материал учебного пособия помогут увидеть эстетический потенциал предмета, будут способствовать раскрытию творческих возможностей и пробуждению интереса к изучению геометрии, во многом являющейся мерой красоты окружающего мира, произведений архитектуры и живописи. Известный архитектор XX в. Л. Корбюзье (1887—1965) отмечал, что «в основе художественных впечатлений человека лежит геометрия, которая приводит к математическому порядку и гармонии рвущиеся за пределы случайного современное искусство и современную мысль».

## ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ





*Геометрия* — неотъемлемая составляющая общей культуры, а геометрические методы служат одним из инструментов познания мира, способствуют формированию научных представлений об окружающем пространстве, раскрытию гармонии и совершенства Вселенной. На протяжении столетий считалось, что *геометрия является частью общего образования*, не связанного с приобретением определенной профессии, что *овладение геометрическими знаниями необходимо всякому образованному человеку*.

Сооружения архитекторов древности, произведения живописи художников эпохи Возрождения подтверждают точку зрения французского математика и философа Блеза Паскаля (1623—1662), который так характеризовал значение геометрии: «Того, кто владеет геометрией, эта наука продвигает настолько далеко, что он оказывается вооруженным совершенно новой силой». Благодаря внутреннему совершенству и удивительной универсальности геометрических закономерностей *геометрия является одним из ярких проявлений красоты в математике*. Она обладает огромной эстетической привлекательностью, имеет тесные связи с искусством. Именно ролью геометрии в раскрытии секретов искусства определяется интерес к геометрии многих творцов прекрасного.

Величественная архитектура греческого храма «Парфенон» и неповторимая фреска итальянского художника эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519) «Тайная вечеря» — яркие примеры из многообразия произведений архитектуры и живописи. Они убеждают в том, что геометрия в определенном смысле относится к искусству, а *гармония, присущая многочисленным шедеврам архитектуры и живописи, созданным человеком на протяжении тысячелетий, является результатом умелого применения геометрических знаний*.

# Глава 1

## ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ

### § 1. Возникновение геометрии. Предмет геометрии

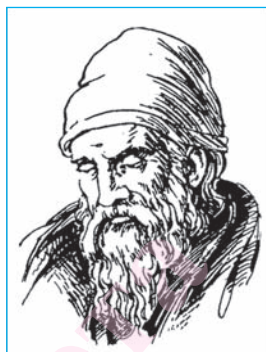
Слово «геометрия» происходит от греческих слов *gé* — *Земля* и *metreo* — *измеряю*, что означает «*землемерие*». Возникновение и развитие геометрии были обусловлены необходимостью решать различные практические задачи, а дошедшие до современников исторические сведения говорят о том, что истоки геометрии находились в Древнем Египте. Изготовление орудий труда, измерение земельных участков, строительство храмов и пирамид требовало геометрических знаний, позволяющих выполнять сложные чертежные и измерительные работы.

Многочисленные памятники письменности свидетельствуют о том, что уже около 4000 лет назад египтяне имели значительный запас геометрических сведений, первоначально представлявших собой набор правил, позволяющих измерять площади земельных участков, вычислять объемы сосудов, решать задачи, возникающие в процессе строительных работ. Сохранившиеся до наших времен и поражающие своим величием храмы и гробницы египетских фараонов (рис. 1) служат убедительным подтверждением высокого уровня геометрических знаний древних египтян.

Развитие мореплавания и торговли привело к тому, что накопленные египтянами сведения о свойствах фигур стали в начале VI в. до н. э. достоянием ученых Древней Греции. Одним из тех, кто внес огромный вклад в формирование геометрической науки, был древнегреческий философ Фалес (ок. 625—



Рис. 1



Евклид

547 до н. э.). Его многочисленные путешествия способствовали освоению знаний, которыми владели цивилизации Древнего Вавилона и Египта. Если в Древнем Египте геометрия носила прикладной характер, то благодаря ученым Древней Греции она постепенно становилась математической теорией, способствующей открытию новых геометрических фактов.

Дальнейшее развитие науки подтвердило догадку о том, что многие принципы, на которых базируется мироздание, выражаются языком математики и что геометрия является ее важной частью, служит ключом к открытию различных законов природы.

Особую роль в развитии геометрии как науки сыграл древнегреческий ученый Евклид, который жил в Александрии в III в. до н. э. Его величайшая заслуга состояла в систематизации накопленного к тому времени богатейшего геометрического материала и придании изложению геометрии довольно совершенной логической формы. Основываясь на воззрениях древнегреческого ученого Аристотеля (ок. 384—322 до н. э.), Евклид осуществил достаточно логически строгое построение геометрии. Итогом геометрических исследований, проведен-



ных ученым, стал научный труд, состоящий из 15 книг, под общим названием «Начала», который, по мнению физика XX в. А. Эйнштейна (1879—1955), дал человечеству «уверенность для всей его последующей деятельности».

Треугольник, квадрат, круг (рис. 2, а), пирамида, куб, шар (рис. 2, б) — все это примеры знакомых вам геометрических фигур. Они далеко не исчерпывают того многообразия геометрических фигур, которые служат предметом изучения **геометрии**. Курс геометрии включает в себя два раздела: **планиметрию** (лат. *planum* — *плоскость* и греч. *metreo* — *измеряю*) и **стереометрию** (греч. *stereos* — *пространственный* и греч. *metreo* — *измеряю*).

В планиметрии в основном изучаются *свойства плоских фигур*, т. е. фигур, все точки которых лежат в одной плоскости (см. рис. 2, а).

Предметом изучения стереометрии являются не только плоские фигуры, расположенные в пространстве, но также *пространственные фигуры*, т. е. такие фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости (см. рис. 2, б). Пространственные фигуры могут иметь и более сложную форму. Примерами служат фигуры, изображенные на рисунке 2, в.

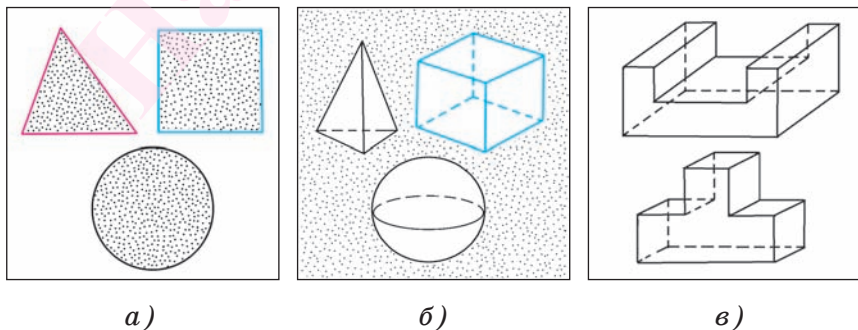


Рис. 2



*Зарождение геометрии* в истории общества относится к глубокой древности и обусловлено не только необходимостью решения различных практических задач, возникавших в процессе строительства жилищ и храмов, но и постоянным стремлением человека к познанию гармонии и красоты мира. *Владение геометрическими знаниями* имело исключительное значение на всех этапах его деятельности, *было одним из факторов, способствующих успешному развитию цивилизации.*

Поэтому не удивительно, что истоки геометрии находятся в глубинах веков, а первые геометрические понятия и сведения восходят к доисторическим временам. *Сама природа являлась источником геометрических форм*, и активное познание ее способствовало формированию представлений о свойствах геометрических фигур, накоплению и систематизации геометрических знаний.

Первенство в исследовании свойств геометрических фигур и становлении науки геометрии принадлежит мыслителям Древней Греции, которые изучили знания цивилизаций Вавилона и Египта, систематизировали известные к тому времени геометрические сведения и подвергли их логическому анализу. Отличительная особенность древнегреческой науки состояла в том, что она не только привела в систему геометрические факты, но и, что особенно важно, поставила вопрос об осмыслении и формировании логической строгости геометрических понятий и выводов, о возможности и необходимости применения геометрии для объяснения явлений природы. *Научная деятельность мыслителей Древней Греции способствовала превращению геометрии в математическую теорию.* Их исследования стали подведением итогов достижений в области геометрических знаний многих ученых древности, величайшим представителем которых был математик и философ Пифагор (ок. 580—500 до н. э.).

## § 2. Плоские и пространственные фигуры

**1. Плоские фигуры.** Предметом изучения геометрии являются свойства плоских и пространственных фигур.

Что такое геометрическая фигура? В окружающем мире существует множество различных материальных предметов: жилые дома, детали машин, украшения из дерева и металла, природные минералы и т. д. Геометрия изучает не физические свойства этих предметов (например, цвет, массу, материал, из которого сделан предмет, и т. д.), а их форму и взаимное расположение.

Отвлекаясь от физических свойств предмета, мы приходим к абстрактному понятию **геометрической фигуры**, которая представляет собой любое множество точек.

Например, страница книги дает представление о геометрической фигуре, которая называется прямоугольником; комната имеет форму прямоугоньного параллелепипеда; гробницы египетских фараонов построены в виде пирамид. Другими словами, различные предметы окружающего нас мира представляют собой **физические модели** геометрических фигур, а геометрические фигуры являются мысленными образами, к которым мы приходим, если принимаем во внимание только форму и размеры предметов.

Апельсин и шарик в шарикоподшипнике (рис. 3, а) дают представление о шаре, а теннисный шарик и футбольный мяч являются физическими моделями геометрической фигуры, которая называется **сферой** (поверхность шара).

Простейшими (*основными*) геометрическими фигурами являются *точка*, *прямая* и *плоскость*. Мыслится, что у *точки* нет никаких размеров, *прямая* не имеет толщины и ширины, простирается неограниченно в обе стороны, а *плоскость* не имеет толщины, представляется идеально ровной, гладкой и неограниченной во всех направлениях.

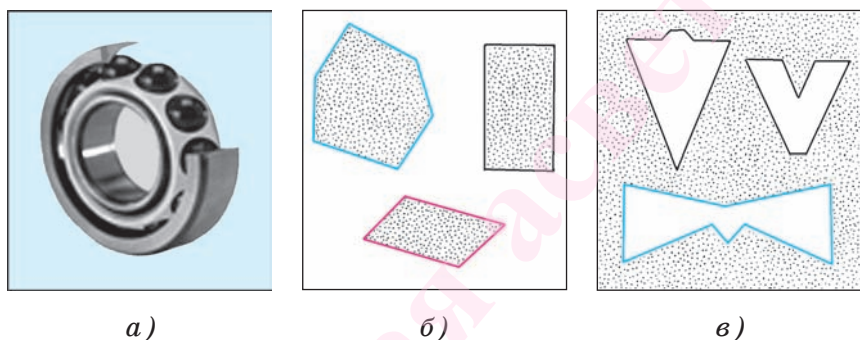


Рис. 3

Туго натянутая нить дает представление о части прямой, а гладкая поверхность письменного стола или оконного стекла — о части плоскости. Примерами геометрических фигур, которые называются *многоугольниками*, служат, например, фигуры, изображенные на рисунке 3, б, в.

Многообразие геометрических фигур очень велико. Любые известные геометрические фигуры могут служить основой для конструирования новых фигур.

Например, если от прямоугольного листа бумаги отрезать две равные части, имеющие форму прямоугольника, как показано на рисунке 4, а, б, то мы получим модель геометрической фигуры, напоминающей букву «Т» (рис. 4, в).

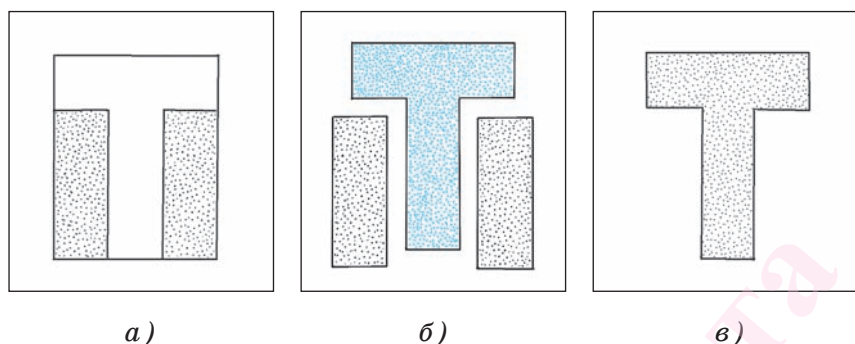


Рис. 4

Если есть несколько плоских фигур, то из них с помощью *объединения* или *пересечения* можно получить другие фигуры.

**Объединение** нескольких **фигур** — это фигура, которая состоит из всех точек данных фигур.

Например, на рисунке 5, а изображены фигуры, каждая из которых представляет собой объединение двух прямоугольников.

**Пересечение** нескольких **фигур** — это фигура, состоящая из всех общих точек данных фигур.

Например, на рисунке 5, б изображены четырехугольник и прямоугольник, которые являются пересечением прямоугольника и квадрата.

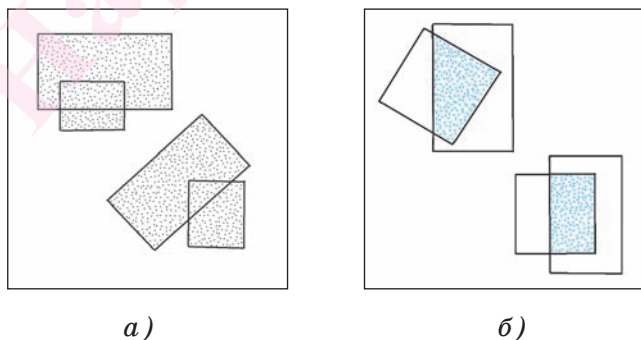


Рис. 5

**2. Пространственные фигуры.** Плоские геометрические фигуры могут быть использованы также для конструирования различных пространственных фигур.

Например, страницы книги представляют собой модели прямоугольников (рис. 6, а). На рисунке 6, б, в изображена пространственная фигура, образованная тремя прямоугольниками с одной общей стороной.

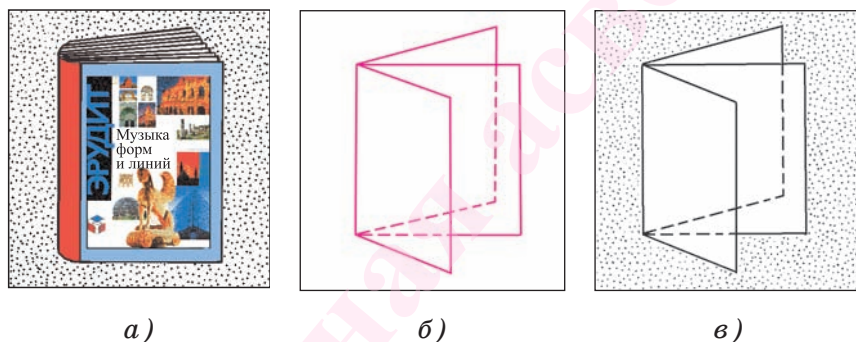


Рис. 6

Рассмотрим другие примеры моделей пространственных фигур.

Пусть из листа бумаги вырезана узкая полоска, имеющая форму прямоугольника. Склеим меньшие края этой полоски, как показано на рисунке 7, а. Тогда мы получим модель пространственной геометрической фигуры, которая изображена на рисунке 7, а.

Если же указанную полоску предварительно «перекрутить» (это более удобно сделать, если полоска достаточно длинная и узкая), а затем склеить ее меньшие края, то получим модель пространственной фигуры, которая называется *листом Мёбиуса*



(рис. 7, б). Мотивы указанной поверхности нашли художественное воплощение в графике голландского художника М. К. Эшера (рис. 7, в).

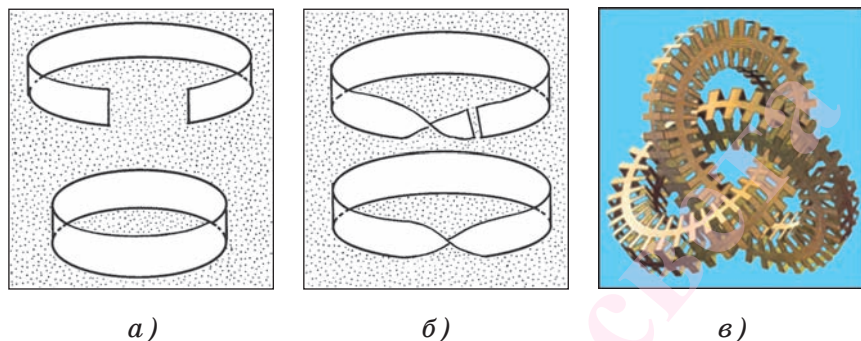


Рис. 7

Рассмотрим еще один пример. Прямоугольную полосу бумаги разделим на четыре равные части, имеющие форму прямоугольника (рис. 8, а). Перегнем полосу по отрезкам, разделяющим ее на части, и склеим меньшие края (см. рис. 8, а). После склеивания мы получим модель пространственной геометрической фигуры, которая изображена на рисунке 8, б, в.

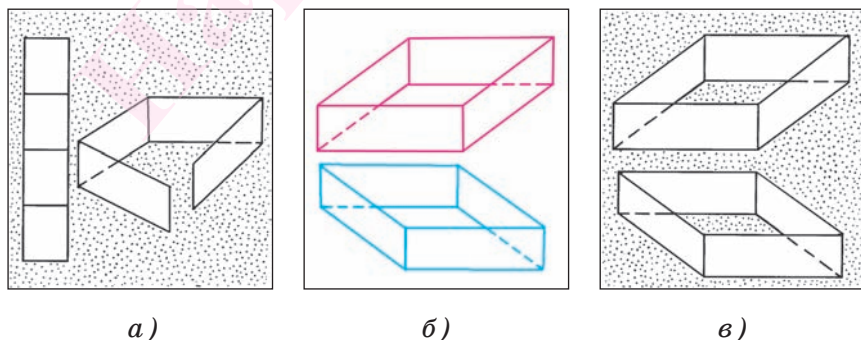
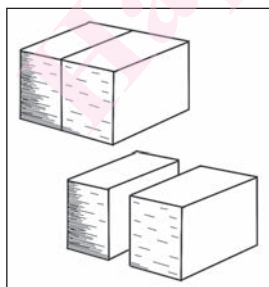


Рис. 8

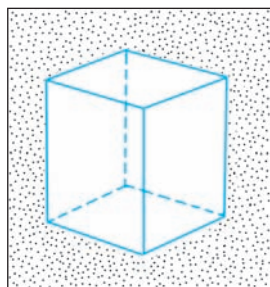
Другими примерами пространственных фигур являются **геометрические тела**. Наглядное представление о геометрическом теле дает часть пространства, которую занимает какое-либо физическое тело.

Примером еще одной пространственной фигуры, с которой вы уже знакомы, является **прямоугольный параллелепипед**. Поверхность прямоугольного параллелепипеда образована шестью прямоугольниками, которые называются его **гранями**. **Ребрами** прямоугольного параллелепипеда называются стороны прямоугольников, а их вершины — **вершинами** прямоугольного параллелепипеда.

Представление о форме прямоугольного параллелепипеда дают модели, которые получаются при распиливании модели куба, например, сделанной из дерева, на две части, как показано на рисунке 9, а. Каждая из этих частей представляет собой модель прямоугольного параллелепипеда, который изображен на рисунке 9, б. Элементы многих архитектурных сооружений имеют форму параллелепипеда (рис. 9, в).



а)



б)



в)

Рис. 9



Заметим, что куб служит примером прямоугольного параллелепипеда, у которого все грани — квадраты.

Куб и прямоугольный параллелепипед — примеры геометрических фигур, называемых **многогранниками**.

Многогранники представляют собой наиболее простые геометрические тела в пространстве, аналогично тому, как многоугольники — наиболее простые фигуры на плоскости. С геометрической точки зрения многогранники — это часть пространства, ограниченная некоторым числом многоугольников — гранями многогранника. Стороны и вершины граней называются ребрами и вершинами многогранника. Грани многогранника образуют пространственную фигуру, которая называется поверхностью многогранника. Таким образом, например, прямоугольный параллелепипед можно рассматривать как часть пространства, ограниченную шестью прямоугольниками. Этот многогранник представляет собой пространственную фигуру, аналогичную прямоугольнику на плоскости.

Реальные объекты, имеющие форму различных многогранников, довольно разнообразны. Например, форму прямоугольного параллелепипеда имеют спичечный коробок, книга, комната, многоэтажный дом с горизонтальной крышей.

Фантазия и творчество помогут вам сконструировать модели многогранников более сложной формы.

Например, если от деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилить два меньших брусочка, каждый из которых имеет форму прямоугольного параллелепипеда

(рис. 10, а, б), то в результате получится модель многогранника, изображенного на рисунке 10, в.

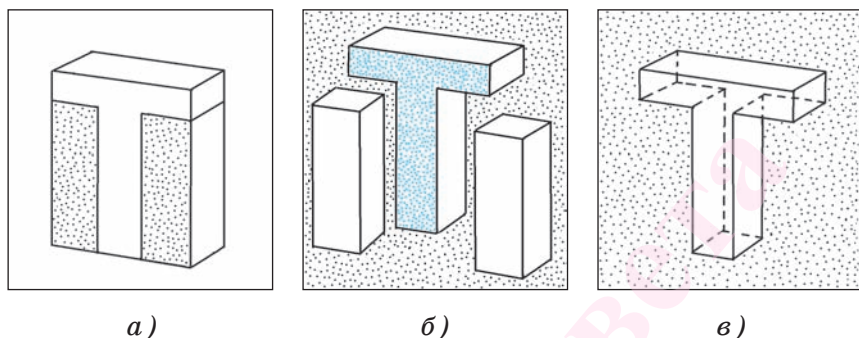


Рис. 10

**3. Прямая призма.** Количество примеров многогранников очень велико. Некоторые из многогранников имеют специальное название, например, выделяются многогранники, которые называются прямыми  $n$ -угольными призмами.

**Прямая  $n$ -угольная призма** — это многогранник, поверхность которого образована многоугольниками, два из которых — равные между собой  $n$ -угольники (**основания призмы**), а остальные  $n$  граней являются прямоугольниками (**боковые грани**).

Ребрами прямой  $n$ -угольной призмы называются стороны прямоугольников, а их вершины называются вершинами прямой призмы.

Другими словами можно сказать, что прямая  $n$ -угольная призма — это часть пространства, ограниченная двумя равными  $n$ -угольниками и  $n$  прямоугольниками. Примерами предметов, имеющих форму прямой призмы, служат, например, ограниченные карандаш, шляпка болта, гайка и др.

Представление о форме прямой призмы дают, например, модели, которые получаются в результате

распиливания деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вдоль ребра, как показано на рисунке 11, *а*.

При этом получаются две модели, одна из которых представляет собой модель прямой пятиугольной призмы, а другая — модель прямой треугольной призмы (рис. 11, *б*).

На рисунке 11, *в* изображена прямая пятиугольная призма  $ABCDF A_1 B_1 C_1 D_1 F_1$ , основаниями которой служат пятиугольники  $ABCDF$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1 F_1$ , прямоугольник  $AA_1 B_1 B$  — одна из боковых граней этой призмы, а точки  $A, B, C, D, F$  и  $A_1, B_1, C_1, D_1, F_1$  — вершины этой призмы.

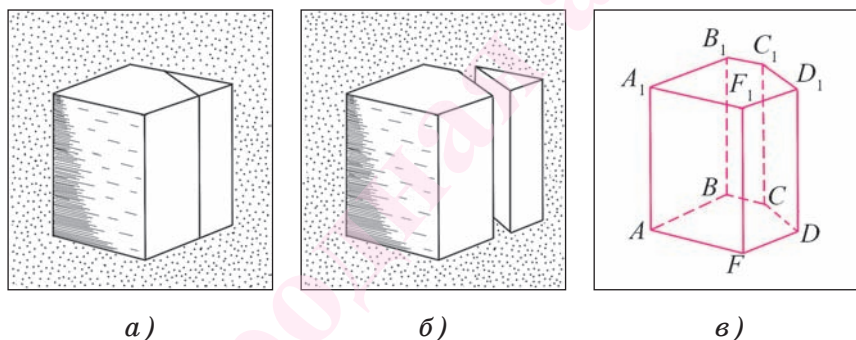


Рис. 11

Прямоугольный параллелепипед — пример прямой четырехугольной призмы, основаниями которой являются прямоугольники.

Разные виды производственной деятельности человека связаны с использованием моделей геометрических фигур.

Например, многие детали, которые используются в машиностроительном или мебельном производстве, имеют форму геометрических фигур, в частности некоторых многогранников.



*Различные рисунки и чертежи* находят применение во многих областях науки, техники, а также в изобразительном искусстве и архитектуре. История свидетельствует, что египетские пирамиды, храмы Древней Греции и Рима были построены по изображениям, которые являются прообразами современных чертежей.

Свет и тень натолкнули древнего человека на мысль о том, что теневой силуэт может передавать характерные признаки предмета и в определенной степени заменить оригинал. Художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи отмечал, что «первая картина состояла из одной линии, которая окружала тень человека, отброшенную солнцем на стену». Леонардо да Винчи был не только художником, но и математиком, механиком и инженером. В трактате «О многообразии» (1505) ученый изложил геометрический материал, необходимый в скульптуре, зодчестве и строительном искусстве.

Итальянские художники и архитекторы внесли особый вклад в создание теории изображений. Ими была разработана теория перспективы, позволяющая строить изображения, создающие наиболее полную иллюзию окружающей действительности.

*Геометрия и искусство тесно связаны уже на самом раннем этапе становления человеческого мышления.* Использование геометрических закономерностей в архитектуре и живописи было началом пути, на котором одновременно происходило зарождение искусства и геометрических представлений. *Взаимопроникновение геометрии и искусства — один из механизмов интеллектуального развития человека и его творческих способностей*, что подтверждается многочисленными примерами произведений искусства, созданными творцами прекрасного в процессе развития цивилизации.

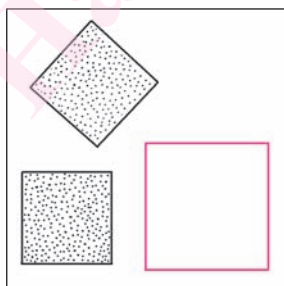
### § 3. Изображение фигур

В процессе изучения свойств геометрических фигур в качестве иллюстраций рассматриваются их различные изображения (графические модели) в тетради или на плоскости доски, что позволяет изучать геометрию более наглядно и доступно.

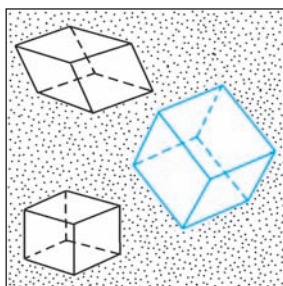
При изображении плоских фигур остаются неизменными их форма, величины углов, параллельность отрезков, отношение длин параллельных отрезков и отрезков, лежащих на одной прямой.

Например, при изучении свойств квадрата можно рассматривать любое изображение из тех, которые даны на рисунке 12, а.

Изображать пространственные фигуры несколько сложнее. Например, если мы рассмотрим модель куба, выполненную из дерева, то увидим, что все ребра куба равны между собой, а все грани представляют собой равные квадраты. На рисунке же некоторые грани куба изображаются параллелограммами и не все отрезки, изображающие ребра куба, имеют равные длины (рис. 12, б). Прямые углы рассматриваемой модели изображаются разными углами, а невидимые ребра нарисованы штриховой линией.



а)



б)

Рис. 12

Такие правила изображения пространственных фигур являются оправданными. Действительно, заметим, что тень листа бумаги, имеющего форму квадрата, в зависимости от его расположения относительно солнечных лучей, имеет различную форму. В одних случаях тень имеет форму прямоугольника, в других — параллелограмма. Если, например, на модель куба, одна из граней которого параллельна поверхности стола, солнечные лучи будут падать строго вертикально, то тень указанной грани, которая получается на поверхности стола, будет иметь форму квадрата.

Грани куба — это квадраты, лежащие в разных плоскостях, расположенных в пространстве, одни грани мы изображаем в виде квадратов, другие — в виде параллелограммов, что позволяет получить представление о кубе.

Для более полного представления о пространственных фигурах некоторые отрезки фигур изображаются штриховой линией. Подкрепим необходимость изображения некоторых отрезков штриховой линией следующим примером. Представим, что от модели куба, выполненной из дерева, отпилен уголок, как изображено на рисунке 13, а.

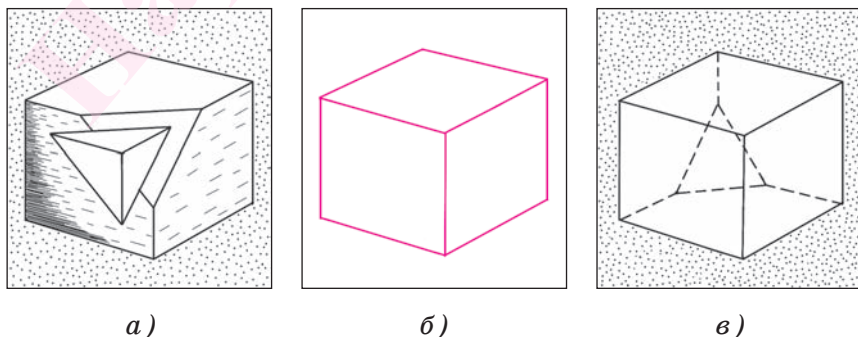


Рис. 13

Предположим, что полученная после отпиливания уголка часть модели куба расположена так, что срез нам не виден. Если невидимые ребра полученной модели не нарисованы штриховыми линиями, то изображение, данное на рисунке 13, б, не дает полного представления о фигуре (например, можно предположить, что это есть изображение куба или фигуры, образованной тремя параллелограммами). Нарисовав невидимые отрезки штриховыми линиями (рис. 13, в), мы получим достоверное представление о форме фигуры (всей фигуры, а не только о видимой части).

Подчеркнем, что изображение фигуры зависит от ее расположения в пространстве. Например, пусть дана фигура (часть квадрата), изображенная на рисунке 14, а. Если она является частью грани куба, тогда она может быть изображена, как показано на рисунке 14, б, в.

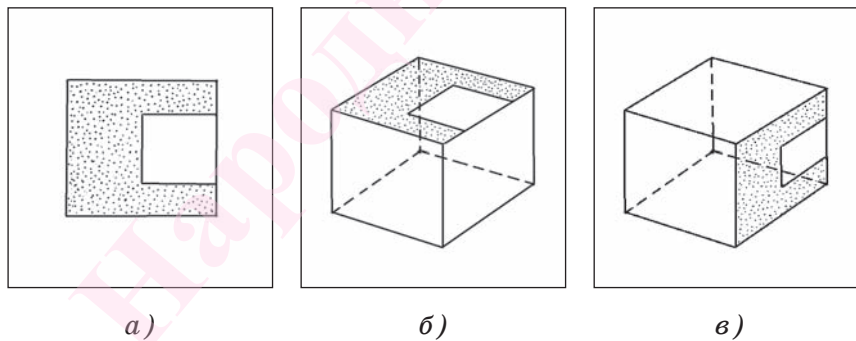


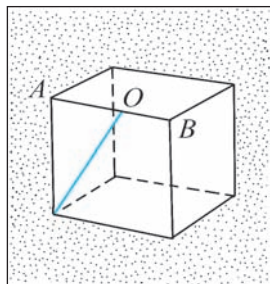
Рис. 14

В процессе изучения геометрии в школе при изображении геометрических фигур, расположенных в пространстве, учитывается, что *на изображениях фигур сохраняется параллельность отрезков, а также отношение длин параллельных отрезков*

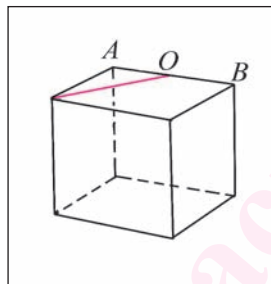


*и длин отрезков, на которые точка разбивает отрезок.*

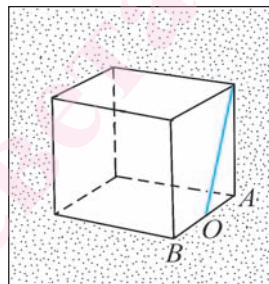
Например, если точка  $O$  является серединой ребра  $AB$  куба, то при любом изображении куба точка  $O$  есть середина отрезка, изображающего ребро куба (рис. 15, а, б, в).



а)



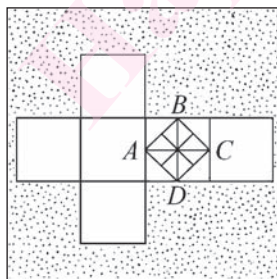
б)



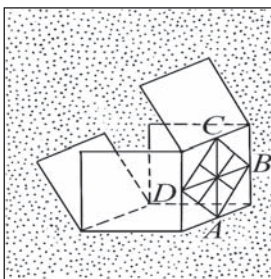
в)

Рис. 15

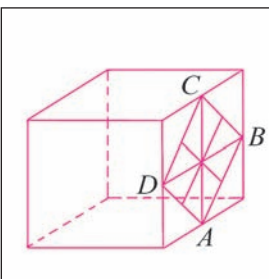
Рассмотрим еще один пример. Пусть на рисунке 16, а изображена развертка куба, а точки  $A, B, C, D$  — середины соответствующих сторон квадрата. Тогда на изображении куба, поверхность которого можно «склеить» (рис. 16, б), пользуясь данной разверткой, точки  $A, B, C, D$  являются серединами соответствующих ребер куба (рис. 16, в).



а)



б)



в)

Рис. 16



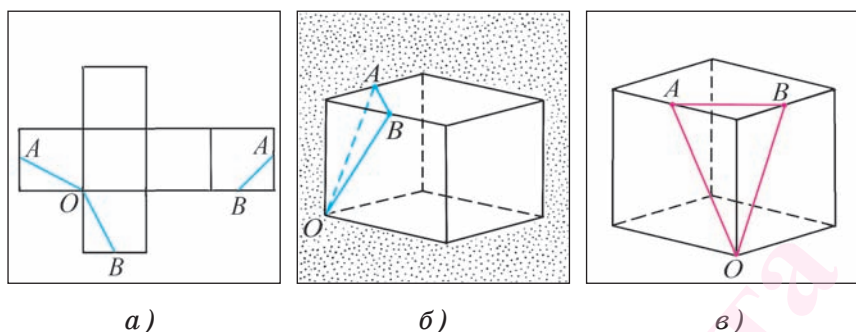


Рис. 17

Пусть на развертке куба указаны отрезки  $OA$ ,  $OB$  и  $AB$ , где точки  $A$  и  $B$  — середины сторон соответствующих квадратов (рис. 17, а). Тогда соответствующие отрезки на гранях куба будут изображаться так, как показано на рисунке 17, б, причем точки  $A$  и  $B$  — середины отрезков, изображающих ребра куба.

Заметим, что при одном изображении куба (рис. 17, б) отрезок  $OA$  изображается штриховой линией. При другом изображении куба все три отрезка могут изображаться сплошной линией (рис. 17, в).

### Задачи к § 3

1. На рисунке 18, а изображена развертка куба, точки  $E$  и  $F$  — середины сторон квадрата. На ри-

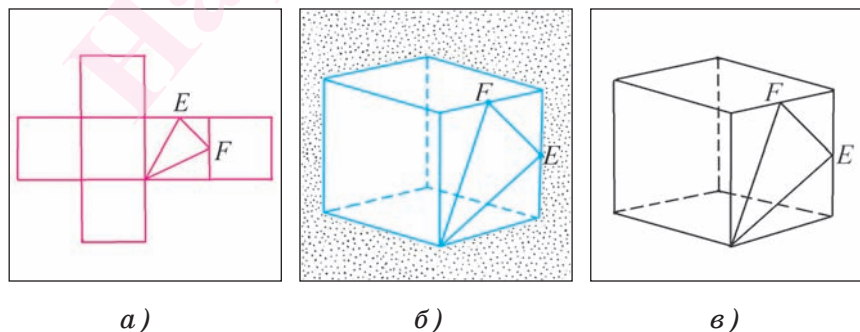


Рис. 18

сунке 18, б, в изображен куб, модель поверхности которого можно склеить, пользуясь данной разверткой. Верно ли, что точки  $E$  и  $F$  на рисунке 18, б, в должны быть серединами отрезков, изображающих ребра куба?

2. На рисунке 19, а, б изображен куб. Точки  $O, E, F, K$  — середины ребер куба. Верно ли, что точки  $O, E, F, K$  на сторонах квадрата соответствующей развертки куба должны быть серединами сторон квадрата (рис. 19, в)?

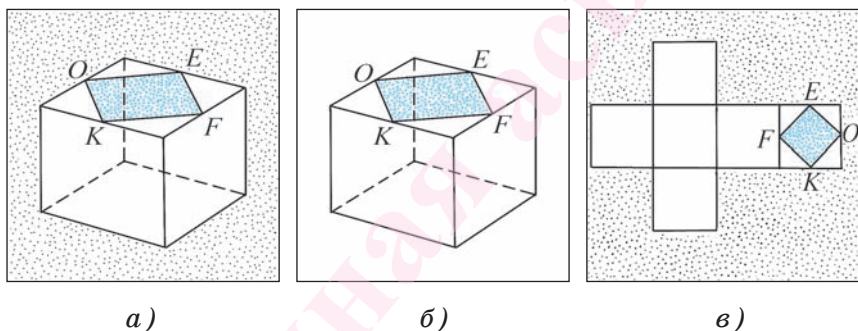


Рис. 19

3. На рисунке 20, а, б изображен прямоугольный параллелепипед и отрезки на одной из его граней, точки  $O$  и  $F$  — середины ребер. На рисунке 20, в

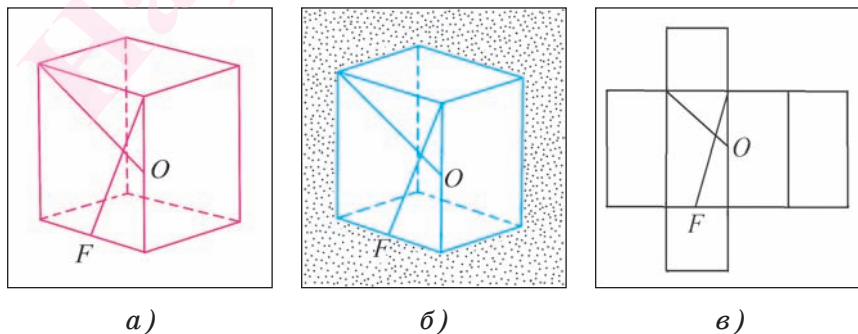


Рис. 20

изображена развертка данного прямоугольного параллелепипеда. Верно ли, что точки  $O$  и  $F$  — середины сторон соответствующего прямоугольника развертки?

4. На рисунке 21, а изображена развертка куба и на одном из ее квадратов — фигура, имеющая форму буквы «Т», причем точки  $A$  и  $B$  делят сторону квадрата на три равных отрезка. Верно ли, что точки  $A$  и  $B$  на рисунке 21, б, в должны делить отрезок, изображающий ребро соответствующего куба, на три равные части?

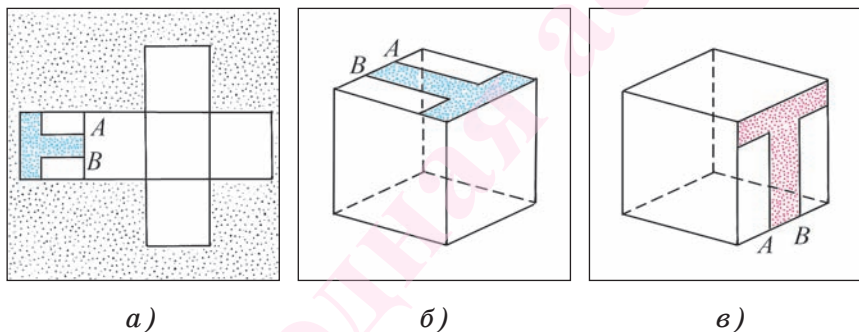


Рис. 21

5. Длина ребра кубика равна 1 см. Сколько таких кубиков нужно для того, чтобы составить из них куб, имеющий длину ребра 3 см?

6\*. Окрашенную модель куба с длиной ребра 4 см распили вдоль ребер на кубики с длиной ребра 1 см. Сколько среди полученных кубиков: а) окрашенных с трех сторон; б) окрашенных с двух сторон?

7\*. Имеется 35 равных кубиков. Как составить из них два кубика?

**8\*.** Поверхность куба образована равными квадратами. Приведите пример многогранника, поверхность которого также образована равными квадратами, но который не является кубом.

### Вопросы к первой главе

1. Чем было обусловлено возникновение и развитие геометрии?

2. Что является предметом изучения геометрии?

3. Что понимается под геометрической фигурой?

4. В чем состоит различие между геометрической фигурой и ее физической моделью?

5. Охарактеризуйте плоские и пространственные фигуры. В чем их отличие?

6. Приведите примеры геометрических фигур, представляющих собой многоугольники.

7. Приведите примеры геометрических фигур, которые являются многогранниками.

8. Верно ли, что прямоугольный параллелепипед является прямой призмой?

9. Могут ли все грани прямой призмы быть прямоугольниками?

10. С какой целью невидимые отрезки фигур на рисунке изображаются штриховой линией?

11. Верно ли, что на изображениях геометрических фигур сохраняется параллельность отрезков?

12. Сохраняется ли на изображениях фигур отношение длин параллельных отрезков и отношение длин отрезков, на которые точка разбивает отрезок?

## НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ



## Глава 2

### НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

#### § 1. Взаимное расположение точек и прямых

**1. Точки и прямые на плоскости.** На уроках математики в предыдущих классах и в главе 1 вы уже познакомились со свойствами некоторых геометрических фигур. Теперь вы приступаете к систематическому изучению геометрии.

Как уже отмечалось ранее, основными геометрическими фигурами являются *точка*, *прямая*, *плоскость*. Представление об этих фигурах вы уже имеете.

Например, туго натянутая нить дает представление о части прямой, страница книги или грань прямоугольного параллелепипеда — о части плоскости (рис. 22, а, б, в).

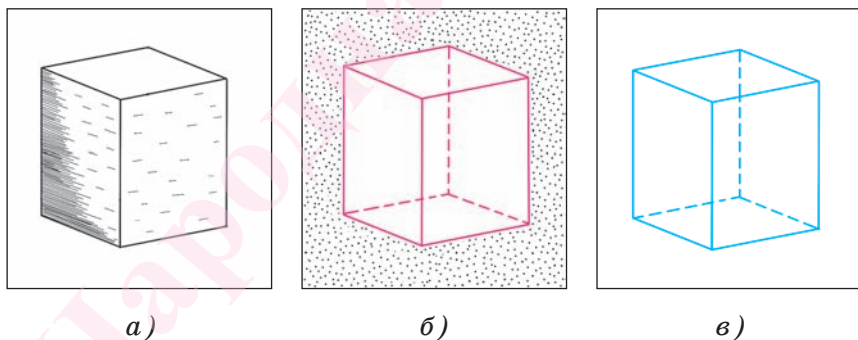


Рис. 22

Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$ , а прямые — строчными буквами  $a, b, c, \dots$  или двумя заглавными буквами  $AB, CD$  и т. д.

Если точка  $A$  принадлежит прямой  $b$ , то говорят, что прямая  $b$  проходит через точку  $A$ . Это записывают так:  $A \in b$  (читают следующим образом: «Точка



А принадлежит прямой  $b$ », «Точка  $A$  лежит на прямой  $b$ » или «Прямая  $b$  проходит через точку  $A$ »).

Если точка  $A$  не принадлежит прямой  $b$ , то говорят, что прямая  $b$  не проходит через точку  $A$ . В этом случае используется запись  $A \notin b$  (читают: «Точка  $A$  не принадлежит прямой  $b$ », «Точка  $A$  не лежит на прямой  $b$ » или «Прямая  $b$  не проходит через точку  $A$ »).

Например, на рисунке 23, *а* изображены точка  $C$  — вершина квадрата и точка  $T$ , не лежащие на прямой  $l$  ( $C \notin l$ ,  $T \notin l$ ), проходящей через вершины  $A$  и  $D$  квадрата ( $A \in l$ ,  $D \in l$ ). На рисунке 23, *б, в* изображена прямая  $l$ , проходящая через вершины  $O$  и  $F$  куба ( $O \in l$ ,  $F \in l$ ).

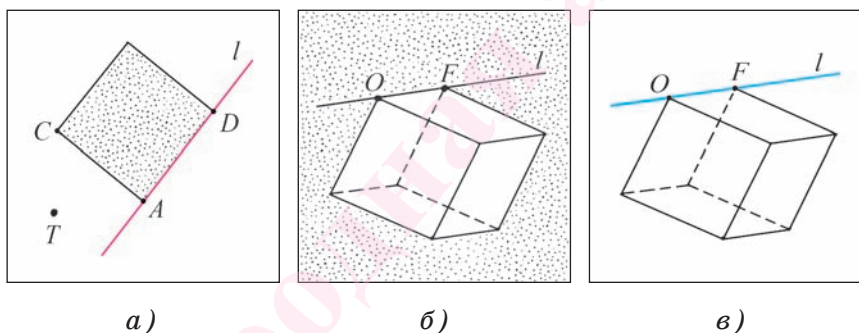


Рис. 23

В курсе геометрии понятия «точка», «прямая» и «плоскость» относятся к *основным понятиям* и принимаются без определений, другие геометрические понятия определяются через основные. К основным понятиям относятся также понятия «принадлежать» и «лежать между». Свойства геометрических фигур устанавливаются путем логических рассуждений на основе некоторых утверждений (*аксиом*), которые принимаются без доказательств. Аксиомы выражают *основные свойства* геометрических фи-

гур, которые соответствуют формам и отношениям, наблюдаемым в окружающем пространстве.

*Утверждение, которое обосновывается путем логических рассуждений, называется теоремой, а само обоснование — доказательством. Доказать теорему — это значит путем рассуждений обосновать, что она следует из некоторых аксиом или ранее доказанных теорем.*

Взаимное расположение точек и прямых на плоскости характеризуют следующие *основные свойства (аксиомы)*:

**А1.** *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

**А2.** *Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.*

**А3.** *Через любые две точки плоскости проходит единственная прямая, каждая точка которой принадлежит плоскости<sup>1</sup>.*

Прямая, которая проходит через точки  $A$  и  $B$ , обозначается  $AB$  или  $BA$ .

Например, на рисунке 24, *а* изображена прямая  $OF$ , которая проходит через точки  $O$  и  $F$ , а на рисун-

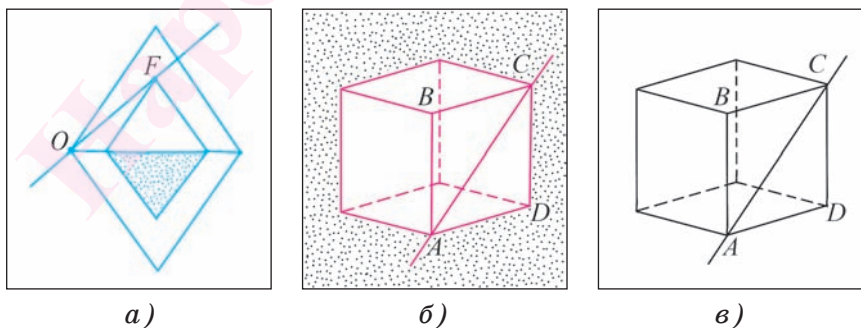


Рис. 24

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые и т. д. различны.



ке 24, б, в показана прямая  $AC$ , которая проходит через вершины  $A$  и  $C$  куба и лежит в той же плоскости, что и грань  $ABCD$  куба.

**2. Пересекающиеся и параллельные прямые.** Рассмотрим понятия пересекающихся и параллельных прямых.

**Определение.** Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют одну общую точку.

Если прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$ , то это обозначается так:  $O = a \cap b$  (читают: «Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$ »).

Например, на рисунке 25, а изображены прямые  $KE$  и  $TF$ , которые проходят через вершины прямоугольника и пересекаются в точке  $P$  ( $P = TF \cap KE$ ).

На рисунке 25, б изображены прямые  $AC$  и  $BD$ , которые проходят через вершины куба и пересекаются в точке  $O$  ( $O = AC \cap BD$ ).

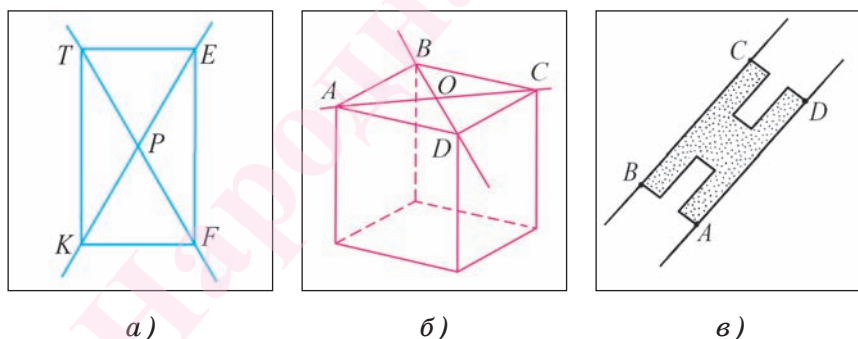


Рис. 25

**Определение.** Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  обозначаются так:  $l_1 \parallel l_2$  (читают: «Прямая  $l_1$  параллельна прямой  $l_2$ »).

Например, на рисунке 25, *в* изображены параллельные прямые  $BC$  и  $AD$  ( $BC \parallel AD$ ).

**Теорема.** *Если две прямые плоскости имеют общую точку, то она единственная.*

**Доказательство.**

Пусть две прямые  $a$  и  $b$  имеют общую точку  $O$ . Докажем, что других общих точек эти прямые не имеют. Допустим, что прямые  $a$  и  $b$  имеют еще одну общую точку  $O_1$ . Тогда получается, что через точки  $O$  и  $O_1$  проходят две прямые  $a$  и  $b$ . Но этого быть не может, так как по аксиоме А3 через две точки проходит единственная прямая. Таким образом, наше предположение неверно, и прямые  $a$  и  $b$  имеют единственную общую точку.

Теорема доказана.

### Вопросы к § 1

1. Сформулируйте аксиомы взаимного расположения точек и прямых.

2. Какие прямые называются пересекающимися?

3. Какие прямые называются параллельными?

4. Сколько общих точек могут иметь две прямые?

### Задачи к § 1

9. На рисунке 26, *а* изображены прямые и точки.

а) Назовите прямые, которые проходят через точку  $A$ .

б) Назовите прямые, пересекающиеся в точке  $C$ .

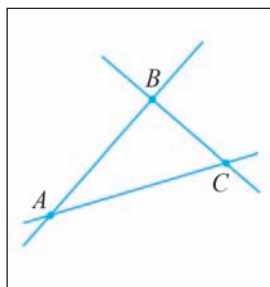
в) Верно ли, что точка  $A$  лежит на прямой  $BC$ ?

10. На рисунке 26, *б* изображены прямые и точки.

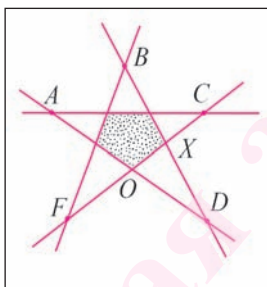
а) Назовите прямые, которые проходят через точку  $B$ . б) Верно ли, что точка  $O$  не лежит на пря-

мой  $AC$ ? в) Назовите точку пересечения прямых  $BO$  и  $AD$ . г) Верно ли, что прямые  $AX$  и  $BD$  пересекаются в точке  $X$ ?

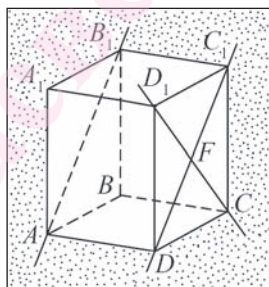
11. На рисунке 26, в изображен куб и прямые, проходящие через его вершины. а) Назовите грань куба, в плоскости которой лежит прямая  $AB_1$ . б) Назовите точку пересечения прямых  $DF$  и  $D_1C_1$ . в) Верно ли, что прямые  $DF$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $C_1$ ?



а)



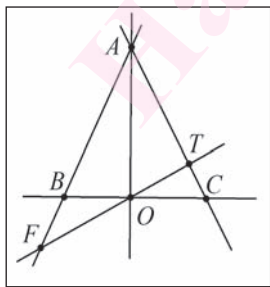
б)



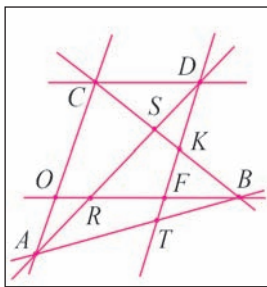
в)

Рис. 26

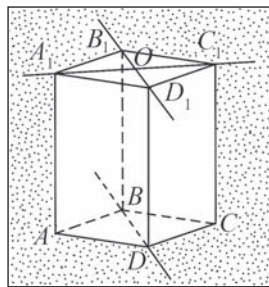
12. Рассмотрите рисунок 27, а. а) Назовите точку пересечения прямых  $OF$  и  $AC$ . б) В какой точке пересекаются прямые  $BF$  и  $AC$ ? в) Верно ли, что прямые  $FT$  и  $AB$  пересекаются в точке  $O$ ?



а)



б)



в)

Рис. 27

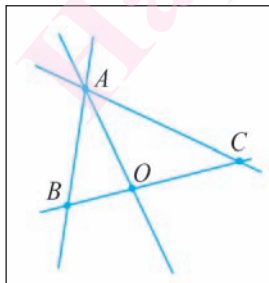
13. Рассмотрите рисунок 27, б. а) Назовите точку пересечения прямых  $KF$  и  $AB$ . б) В какой точке пересекаются прямые  $OR$  и  $DK$ ? в) Верно ли, что прямые  $SC$  и  $AT$  пересекаются в точке  $B$ ?

14. На рисунке 27, в дано изображение параллелепипеда. а) Назовите грань, в плоскости которой лежит прямая  $BD$ . б) В какой точке пересекаются прямые  $B_1O$  и  $D_1C_1$ ? в) Верно ли, что прямые  $A_1O$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $C_1$ ?

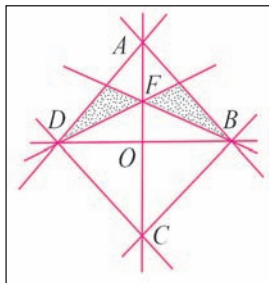
15. Проведите прямые  $a$  и  $b$ , пересекающиеся в точке  $O$ , и прямые  $c$  и  $d$ , которые пересекаются в точке  $S$  и пересекают прямые  $a$  и  $b$  соответственно в точках  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$ . Постройте точку пересечения прямых  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ .

16. Рассмотрите рисунок 28, а. а) Назовите прямые, которые не проходят через точку  $O$ . б) Верно ли, что:  $C \notin AB$ ;  $C \in AO$ ? в) Назовите точку пересечения прямых  $OC$  и  $AB$ .

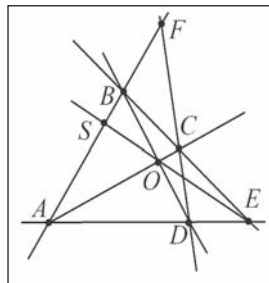
17. Рассмотрите рисунок 28, б. а) Назовите прямые, которые не проходят через точку  $B$ . б) Верно ли, что:  $C \notin AB$ ;  $B \notin AD$ ? в) Назовите точку пересечения прямых  $DO$  и  $CB$ ,  $CO$  и  $AB$ . г) В какой точке пересекаются прямые  $CO$  и  $BF$ ?



а)



б)



в)

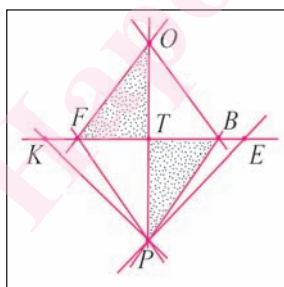
Рис. 28

18. Рассмотрите рисунок 28, в. а) Назовите точку пересечения прямых  $AS$  и  $CD$ . б) В какой точке пересекаются прямые  $OE$  и  $BF$ ? в) Верно ли, что прямая  $DE$  пересекается с прямой  $OC$  в точке  $A$ ? г) Какие прямые проходят через точку  $A$ ?

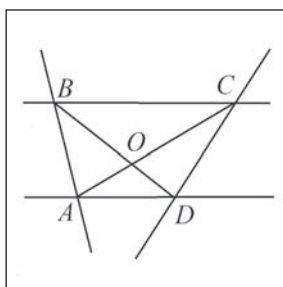
19. Отметьте пять точек  $A, B, C, D$  и  $F$ , каждые три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведите прямые. Сколько таких прямых получается?

20. Рассмотрите рисунок 29, а. а) Назовите прямые, которые проходят через точку  $F$ . б) Верно ли, что прямые  $BE$  и  $OP$  пересекаются в точке  $T$ ? в) В какой точке пересекаются прямые  $OT$  и  $KP$ ?

21. Выполните рисунок 29, б в тетради. а) Отметьте точку  $P$ , в которой пересекаются прямые  $AB$  и  $CD$ . б) Укажите точки пересечения прямой  $PO$  с прямыми  $BC$  и  $AD$ . в) В какой точке пересекаются прямые  $OC$  и  $BP$ ?



а)



б)

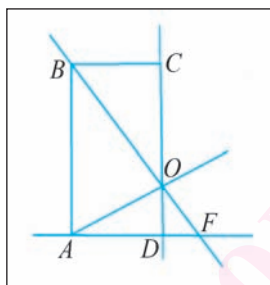
Рис. 29

22. Сколько прямых определяется четырьмя точками? Сделайте рисунки для каждого случая.

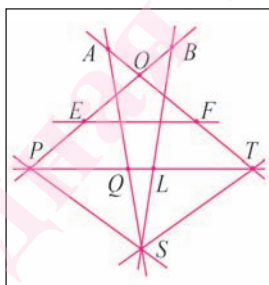
23. Рассмотрите рисунок 30, а. а) Назовите точку пересечения прямых  $BO$  и  $AD$ . б) Верно ли, что точка  $B$  не лежит на прямой  $OF$ ? в) Верно ли, что прямые  $CO$  и  $AF$  пересекаются в точке  $D$ ?

24. Рассмотрите рисунок 30, б. а) Назовите точку пересечения прямых  $SL$  и  $PE$ . б) Верно ли, что:  $Q \notin ST$ ;  $S \in BL$ ? в) В какой точке пересекаются прямые  $PE$  и  $FT$ ? г) Верно ли, что прямые  $FT$  и  $SQ$  пересекаются в точке  $A$ ?

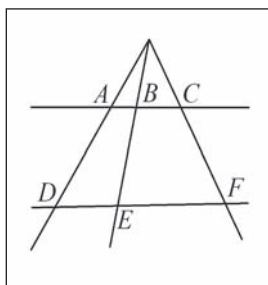
25. Выполните рисунок 30, в в тетради. Проведите прямую, которая проходит через точки пересечения прямых  $AE$ ,  $DB$  и  $BF$ ,  $EC$ .



а)



б)



в)

Рис. 30

26. Рассмотрите рисунок 31, а. а) Назовите точку пересечения прямых  $FT$  и  $SK$ . б) Верно ли, что прямые  $TE$  и  $SK$  пересекаются в точке  $L$ ? в) В какой точке пересекаются прямые  $SF$  и  $BL$ ? г) Верно ли, что:  $S \notin PA$ ;  $E \in LT$ ?

27. Выполните рисунок 31, б в тетради. а) Отметьте точку  $O$  пересечения прямых  $AC$  и  $DB$ . б) Укажите точку, в которой прямая  $DO$  пересекает

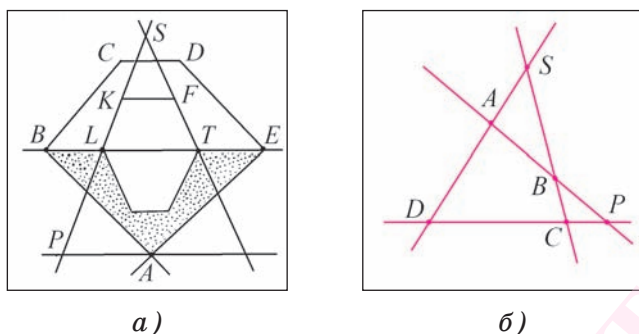


Рис. 31

прямую  $SP$ . в) В какой точке пересекаются прямые  $DC$  и  $SB$ ?

**28.** Сколько точек пересечения могут иметь четыре попарно пересекающиеся прямые? Для каждого случая сделайте рисунок.

**29.** Можно ли провести прямую, не проходящую через точку  $O$ , так, чтобы она пересекала одновременно прямые  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  и  $OF$  (рис. 32, а)?

**30.** На рисунке 32, б изображена треугольная призма и прямые, лежащие в плоскости боковой грани  $CC_1B_1B$ . а) В какой точке пересекаются прямые  $CB$  и  $TB_1$ ? б) Верно ли, что прямые  $TO$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $F$ ? в) Назовите точку пересечения прямых  $OB$  и  $TS$ .

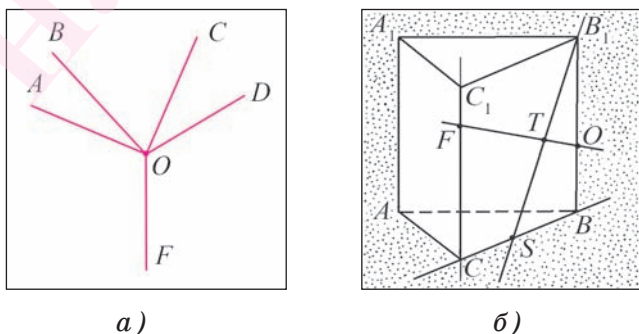


Рис. 32

**31\*.** Проведите на плоскости через шесть точек четыре прямые так, чтобы на каждой прямой лежало по три точки.

**32\*.** Проведите на плоскости через десять точек пять прямых так, чтобы на каждой прямой лежало по четыре точки.

**33\*.** Можно ли через четыре точки провести шесть прямых так, чтобы прямые пересекались в данных точках и через каждую точку проходили три прямые?



## § 2. Сравнение и измерение отрезков. Окружность и круг

**1. Отрезок.** В практической деятельности для определения расстояния между пунктами находят длину отрезка, соединяющего рассматриваемые пункты. Если не принимать во внимание физические свойства предметов, то многие из них дают представление об отрезках, например карандаши, балки различных металлических конструкций и т. д.

Рассмотрим понятие отрезка. Для определения отрезка воспользуемся основным свойством (аксиомой) расположения точек на прямой, которое формулируется следующим образом:

**А4.** Из трех точек на прямой единственная точка лежит между двумя другими.

Пусть на прямой  $q$  лежат три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 33, а). Точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ . Можно говорить также, что точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от точки  $C$  или что точки  $A$  и  $C$  лежат по одну сторону от точки  $B$ .

**Определение.** Отрезком называется геометрическая фигура, состоящая из двух точек прямой и всех ее точек, лежащих между данными точками.

Данные точки называются **концами отрезка**, остальные его точки называются **внутренними точками**.

Отрезок, концами которого являются точки  $A$  и  $B$ , обозначается  $AB$  или  $BA$ . Иногда отрезки обозначаются также строчными буквами латинского алфавита  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и т. д.

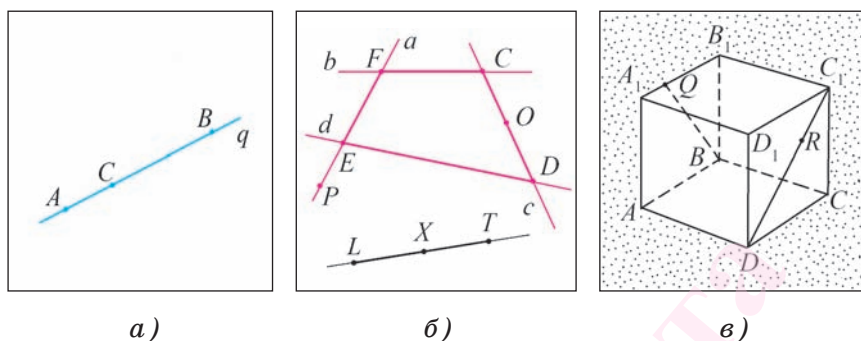


Рис. 33

Если точки  $A$  и  $B$  — концы отрезка  $AB$ , то говорят, что отрезок  $AB$  соединяет эти точки.

Можно сказать, что отрезок  $AB$  есть фигура, состоящая из двух точек  $A$ ,  $B$  и части прямой, ими ограниченной.

Подчеркнем, что отрезок  $LT$  состоит из точек  $L$ ,  $T$  и всех точек  $X$  прямой  $LT$ , лежащих между точками  $L$  и  $T$  (рис. 33, б).

Например, на рисунке 33, б изображены отрезки  $EF$ ,  $FC$ ,  $CD$  и  $DE$ , которые лежат на прямых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  соответственно.

Точка  $O$  является внутренней точкой отрезка  $CD$ , а точка  $P$  не является внутренней точкой отрезка  $EF$ . На рисунке 33, в изображены отрезки  $BQ$  и  $DC_1$ , которые лежат в гранях куба, и точка  $R$ , являющаяся внутренней точкой отрезка  $DC_1$ .

Пользуясь отрезками, мы можем конструировать новые геометрические фигуры. Например, на рисунке 34, а изображена фигура, образованная отрезками  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $DB$ ,  $DF$ ,  $EF$ ,  $FA$ .

На рисунке 34, б изображен куб и геометрическая фигура, образованная отрезками  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , которые лежат в гранях этого куба.

На рисунке 34, а изображены отрезки  $AB$  и  $CD$ , которые пересекаются в точке  $O$ . Точка  $O$  является внутренней точкой каждого из этих отрезков.

Отрезки  $FT$  и  $EA$ , изображенные на рисунке 34, в, имеют общую точку  $E$ . Точка  $E$  одновременно является внутренней точкой отрезка  $FT$  и концом отрезка  $EA$ .

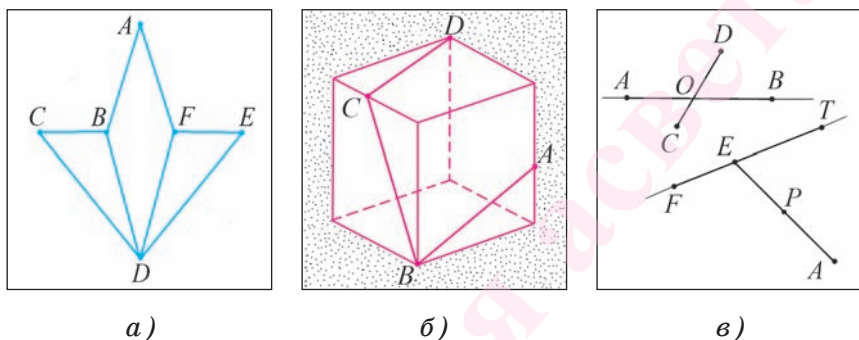


Рис. 34

Если отрезок  $AB$  не пересекает прямую  $l$ , то говорят, что точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $l$ .

Например, точки  $P$  и  $A$  лежат по одну сторону прямой  $FT$ , так как отрезок  $PA$  и прямая  $FT$  не пересекаются (см. рис. 34, в).

Если отрезок  $AB$  пересекается с прямой  $l$  во внутренней точке отрезка  $AB$ , то говорят, что точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $l$ .

Например, точки  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$  (см. рис. 34, в).

**2. Ломаная.** Среди множества геометрических фигур, образованных отрезками, выделяются такие, которые называются *ломаными*.

**Определение.** **Ломаной** называется геометрическая фигура, состоящая из отрезков  $A_1A_2$ ,

$A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ , последовательно соединяющих точки  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ .

Точки  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  называются **вершинами** ломаной, а отрезки  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  называются **звеньями** ломаной.

Точки  $A_1$  и  $A_n$  называются **концами** ломаной.

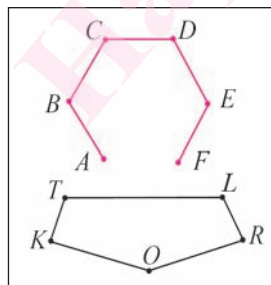
Два звена ломаной называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

Ломаная называется **простой** ломаной, если любые ее два звена, кроме смежных, не имеют общих точек и никакие два смежных звена не лежат на одной прямой.

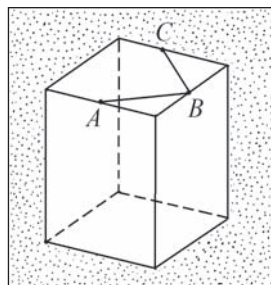
Ломаная называется **замкнутой**, если ее концы совпадают.

Например, на рисунке 35, а изображены простая ломаная  $ABCDEF$ , которая не является замкнутой, и  $OKTLR$  — простая замкнутая ломаная. На рисунке 35, б изображена незамкнутая простая ломаная  $ABC$ , звенья  $AB$  и  $BC$  которой лежат в грани параллелепипеда.

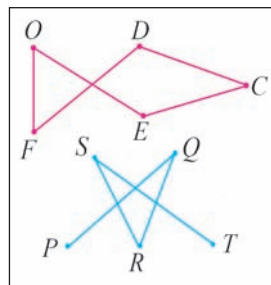
На рисунке 35, в изображены ломаные  $FOECD$  и  $PQRST$ , которые не являются простыми, так как некоторые несмежные звенья имеют общие точки.



а)



б)



в)

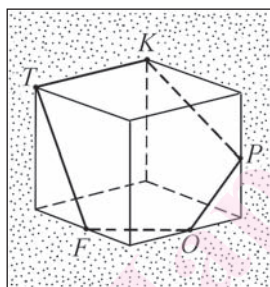
Рис. 35

Заметим, что отрезки могут образовывать ломаную, все звенья которой не лежат в одной плоскости. Такая ломаная называется *пространственной*.

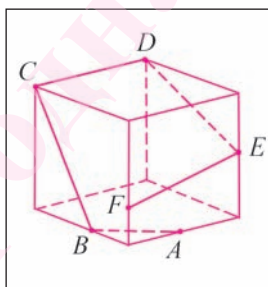
Например, на рисунках 36, а изображена замкнутая ломаная  $FTKPO$ , звенья которой лежат в гранях куба и не содержатся в одной плоскости.

Примером пространственной незамкнутой ломаной служит фигура, образованная отрезками  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  и  $EF$ , которые лежат в гранях куба (рис. 36, б).

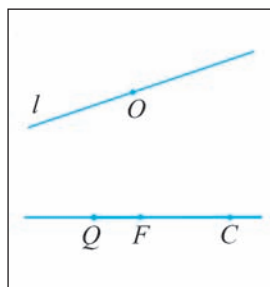
**3. Луч.** Пусть  $O$  — некоторая точка прямой  $l$ . Тогда точка  $O$  разделяет множество остальных точек прямой  $l$  на два множества, каждое из которых вместе с точкой  $O$  называется *лучом* с началом в точке  $O$  (рис. 36, в).



а)



б)



в)

Рис. 36

Луч с началом  $O$  характеризуется следующим образом. Если две точки лежат по одну сторону от точки  $O$ , то эти точки лежат на одном луче с началом  $O$ . Если две точки лежат по разные стороны от точки  $O$ , то эти точки лежат на разных лучах с началом  $O$ .

Например, точки  $F$  и  $C$  луча с началом в точке  $Q$ , изображенного на рисунке 36, в, лежат по одну сторону от начала  $Q$  этого луча.

**Определение.** Лучом называется геометрическая фигура, состоящая из точки прямой и всех ее точек, лежащих по одну сторону от данной точки.

Данная точка называется *началом луча*.

Луч обозначается либо строчной латинской буквой, например  $h$ ,  $p$ , либо двумя заглавными буквами латинского алфавита, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — некоторую другую его точку.

Например, на рисунке 37, а изображены лучи  $h$  и  $CA$ .

**Противоположными лучами** называются два различных луча одной прямой, имеющие общее начало.

Лучи  $TD$  и  $TE$  прямой  $a$ , изображенные на рисунке 37, б, являются противоположными.

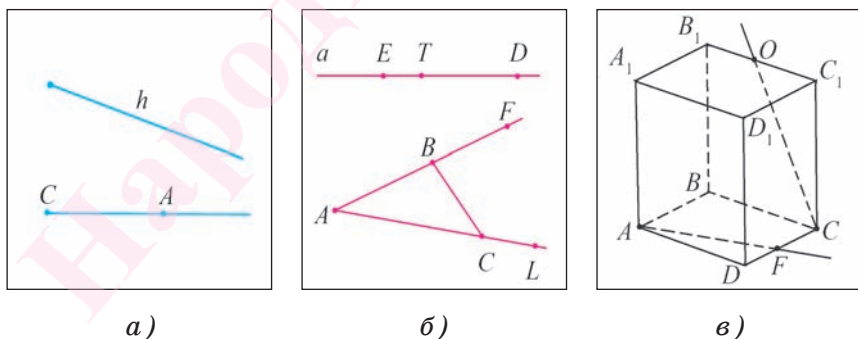


Рис. 37

На рисунке 37, б изображены лучи  $AF$  и  $AL$ , имеющие общее начало  $A$ . Отрезок  $AB$  является частью луча  $AF$ , а концы  $B$  и  $C$  отрезка  $BC$  принадлежат лучам  $AF$  и  $AL$  соответственно.

На рисунке 37, в изображены прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и луч  $CO$ , который лежит в той же плоскости, что и грань  $CB B_1 C_1$ . Луч  $AF$  лежит в плоскости грани  $ABCD$  данного параллелепипеда.

**4. Сравнение отрезков.** В практической деятельности для того, чтобы сравнить длины неторых двух предметов, их прикладывают один к другому.

Например, приложив друг к другу два деревянных бруска, мы можем выяснить, равны ли длины этих брусков или один из них длиннее другого (рис. 38, а).

Пусть даны два отрезка  $a$  и  $b$  (рис. 38, б). Для сравнения этих отрезков наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного совпал с концом другого. Если два других конца отрезков также совпадут, то эти отрезки совместятся, и, значит, они равны.

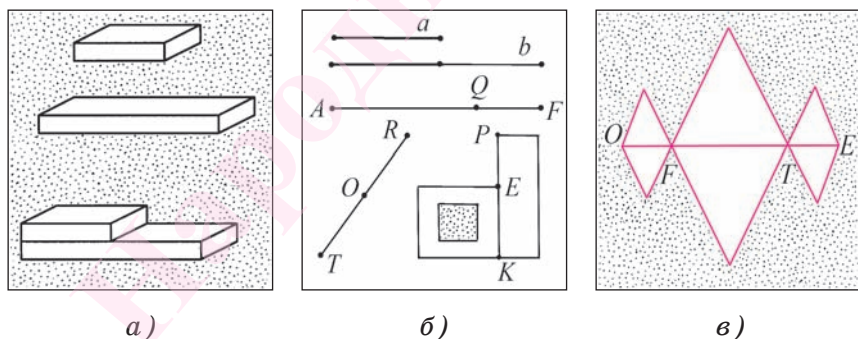


Рис. 38

**Отрезки называются равными, если при наложении они совмещаются.**

Если же два других конца отрезков не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого.



Если отрезок  $a$  равен отрезку  $b$ , то пишут  $a = b$  и говорят: «Отрезок  $a$  равен отрезку  $b$ ». Если отрезок  $a$  составляет часть отрезка  $b$ , то пишут:  $a < b$  и говорят: «Отрезок  $a$  меньше отрезка  $b$ » или пишут:  $b > a$  и говорят: «Отрезок  $b$  больше отрезка  $a$ ».

Например, на рисунке 38, б отрезок  $AQ$  составляет часть отрезка  $AF$ , отрезок  $KE$  — часть отрезка  $KP$ .

Если точка  $C$  является внутренней точкой отрезка  $AB$ , то говорят, что она разбивает, или делит, отрезок на два отрезка  $AC$  и  $CB$ .

Например, на рисунке 38, в точка  $F$  разбивает отрезок  $OE$  на отрезки  $OF$  и  $FE$ , а точка  $T$  разбивает отрезок  $EF$  на отрезки  $ET$  и  $TF$ .

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующая аксиома.

**Аксиома откладывания отрезка.** На любом луче от его начала можно отложить единственный отрезок, равный данному.

Эта аксиома означает, что если дан какой-либо отрезок  $AB$  и произвольный луч  $h$  с началом в точке  $O$ , то на луче  $h$  существует единственная точка  $X$ , такая, что отрезок  $OX$  равен отрезку  $AB$ .

**Серединой отрезка** называется точка, делящая его на два равных отрезка.

Например, на рисунке 38, б изображена точка  $O$  — середина отрезка  $TR$  ( $O \in TR$ ,  $TO = OR$ ).

**5. Измерение длин отрезков.** В практической деятельности часто необходимо измерять длины отрезков. Знание длин отрезков позволяет сравнивать их, не накладывая один на другой.

Измерение длин отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, который принимается за единицу измерения (единичный отрезок).

**Длина отрезка** — это геометрическая величина, которая показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Длина отрезка  $AB$  обозначается  $AB$ .

Длина отрезка может измеряться в миллиметрах (мм), сантиметрах (см), дециметрах (дм), метрах (м) и т. д.

Например, если за единицу измерения принять отрезок в 1 см, то для определения длины отрезка необходимо узнать, сколько раз в измеряемом отрезке укладывается сантиметр и его части.

Если в отрезке  $AB$  отрезок в 1 см укладывается 3 раза, то говорят, что отрезок  $AB$  имеет длину, равную 3 см, и пишут:  $AB = 3$  см. Если в отрезке  $CD$  сантиметр укладывается 2 раза и в остатке 5 раз укладывается десятая часть сантиметра, то длина отрезка  $CD$  равна 2,5 см, т. е.  $CD = 2,5$  см.

При выбранной единице измерения длину отрезка можно **выразить** некоторым положительным числом. Если два отрезка равны, то единичный отрезок и его части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. равные отрезки имеют равные длины.

При измерении отрезков опираются на следующие **свойства длины отрезков**.

**1)** При выбранной единице измерения каждый отрезок имеет длину, которая больше нуля.

**2)** При выбранной единице измерения для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

- 3) Равные отрезки имеют равные длины.
- 4) Отрезки, имеющие равные длины, равны.
- 5) Длина отрезка равна сумме длин отрезков, на которые он делится любой точкой.

Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

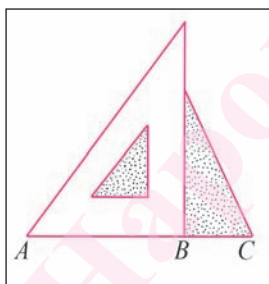
Теперь дадим определение расстояния между точками.

**Определение.** Расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, соединяющего данные точки.

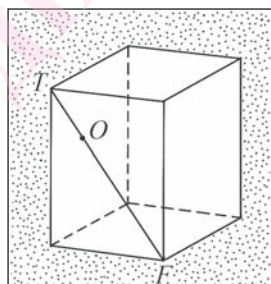
Если две точки совпадают, то расстояние между ними считается равным нулю.

Расстояние между двумя точками  $A$  и  $B$  обозначается  $AB$  или  $BA$ .

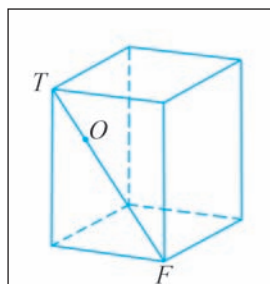
**Задача.** Точка  $B$  делит отрезок  $AC$  на два отрезка  $AB$  и  $BC$ . Вычислите длину отрезка  $AC$ , если известно, что  $AB = 2$  см, а  $BC = 1$  см (рис. 39, а).



а)



б)



в)

Рис. 39

Решение.

Длина отрезка  $AC$  равна сумме длин отрезков, на которые он делится точкой  $B$ . Следовательно,  $AC = AB + BC = 2 + 1 = 3$  (см).

Ответ: 3 см.

Пусть точка  $O$  делит отрезок  $TF$  — диагональ грани прямоугольного параллелепипеда — на отрезки  $TO$  и  $OF$  (рис. 39, б, в).

Тогда, если  $TF = 10$  см, а  $TO = 2$  см, то  $OF = 8$  см. Действительно,  $TF = TO + OF$ , значит,  $OF = TF - TO = 10 - 2 = 8$  (см).

**6. Окружность и круг.** Дадим определение еще одной геометрической фигуры.

**Определение.** **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на заданном расстоянии от данной точки этой плоскости.

Данная точка называется **центром** окружности.

**Радиусом** окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности.

Иногда радиусом окружности называют длину отрезка, соединяющего центр окружности с какой-либо ее точкой.

Из определения следует, что все радиусы окружности равны.

На рисунке 40, а изображены окружности с центрами в точках  $O$  и  $S$ . Параллели имеют форму окружностей, расположенных на поверхности земного шара (рис. 40, б).

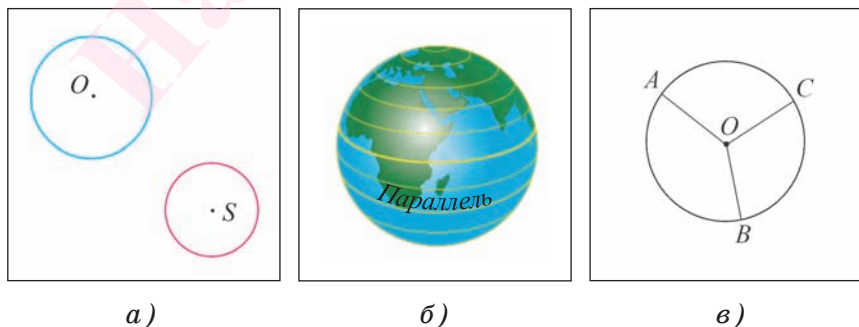


Рис. 40

Например, на рисунке 40, *в* изображены радиусы  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  обозначается  $\omega(O, R)$  (читают: «Окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ »).

**Хордой** окружности называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Например, на рисунке 41, *а* изображены хорды  $FK$ ,  $DB$  и  $QE$ , а на рисунке 41, *б* изображена ломаная  $ABCDF$ , каждое звено которой является хордой окружности.

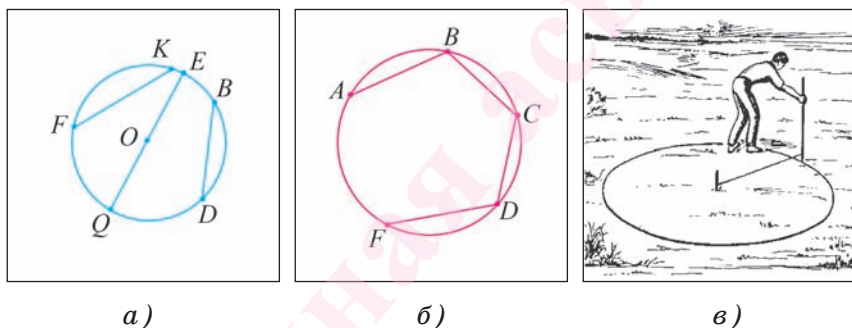


Рис. 41

**Диаметром** окружности называется хорда, проходящая через центр окружности (или длина такой хорды). Центр окружности делит любой ее диаметр на два равных отрезка.

Например, хорда  $QE$  является диаметром окружности, так как проходит через центр  $O$  этой окружности (см. рис. 41, *а*).

**Дугой** окружности называется каждая из частей, на которые делят окружность любые две ее точки.

Например, на рисунке 42 точки  $A$  и  $B$  делят окружность на две дуги  $AOB$  и  $AFB$ , которые обозначаются  $\cup AOB$  и  $\cup AFB$  (читают: «Дуга  $AOB$  и дуга  $AFB$ »).

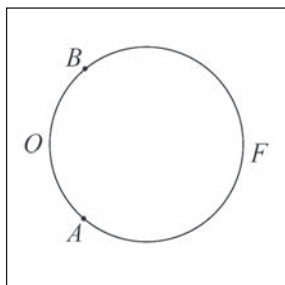


Рис. 42

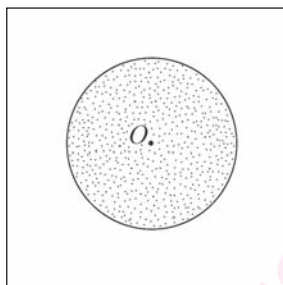


Рис. 43

Прочертить окружность на местности для разбивки цветочной клумбы можно с помощью веревки и колышка (рис. 41, в).

**Определение. Кругом называется геометрическая фигура, состоящая из окружности и части плоскости, ограниченной этой окружностью** (рис. 43).

Окружность называется границей круга.

Круг с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  обозначается  $\bar{\omega}(O, R)$  (читают: «Круг с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ »).

Окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  называется **границей круга** с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$ .

Центром, радиусом, хордой и диаметром круга называются центр, радиус, хорда и диаметр его границы.

Плоская геометрическая **фигура называется ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу, и **называется неограниченной**, если не существует круга, содержащего все точки этой фигуры.

Любой отрезок  $AB$  — ограниченная фигура, так как для него существует круг некоторого, быть может, достаточно большого радиуса, которому принадлежат все точки этого отрезка. Например, лю-

бой отрезок  $AB$  принадлежит кругу с центром в точке  $A$  и радиусом  $R = AB$ .

Примером неограниченной фигуры является любая прямая или луч. Не существует круга, которому принадлежат все точки прямой. Для круга сколь угодно большого радиуса найдутся точки прямой, которые не принадлежат этому кругу.

### Вопросы к § 2

1. Какая геометрическая фигура называется отрезком?
2. Дайте определение ломаной.
3. Что называется лучом? Какие лучи называются противоположными?
4. Сформулируйте аксиому откладывания отрезка.
5. Сформулируйте свойства длины отрезков.
6. Что называется длиной ломаной?
7. Что называется расстоянием между двумя точками?
8. Какая геометрическая фигура называется окружностью?
9. Что называется хордой, радиусом и диаметром окружности?
10. Какая геометрическая фигура называется кругом?

### Задачи к § 2

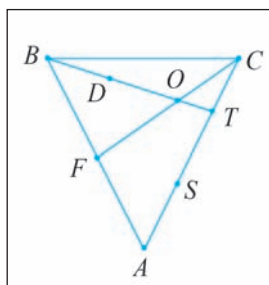
34. Рассмотрите рисунок 44, а. а) Среди отмеченных точек назовите те из них, которые являются внутренними точками отрезка  $AC$ . б) Какая из точек —  $B$  или  $O$  — является внутренней точкой отрезка  $DT$ ? в) Верно ли, что ломаная  $FBOC$  является простой?

35. Рассмотрите рисунок 44, б. а) Среди отмеченных точек назовите те, которые являются внутрен-

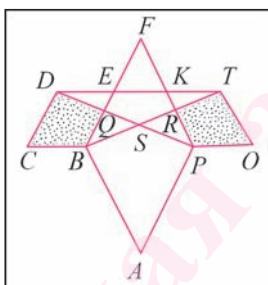


ними точками отрезка  $BT$ . б) Какая из точек —  $B$  или  $E$  — является внутренней точкой отрезка  $QF$ ? в) Верно ли, что ломаная  $RTOPABCDQ$  является простой ломаной?

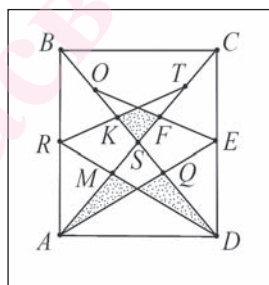
36. Рассмотрите рисунок 44, в. а) Какие из точек —  $O, K, D$  — разбивают отрезок  $BS$ ? б) Какие из точек —  $A, M, F, T$  — являются внутренними точками отрезка  $SC$ ? в) Верно ли, что ломаная  $MRKSFEQ$  является простой?



а)



б)



в)

Рис. 44

37. Точка  $O$  разбивает отрезок  $AB$  на два отрезка. Вычислите длину отрезка  $AB$ , если  $AO = 7,1$  см,  $OB = 3,2$  см.

38. Точки  $E$  и  $F$  — внутренние точки отрезка  $AC$ , а точка  $F$  — внутренняя точка отрезка  $EC$ . Вычислите длину отрезка  $AC$ , если  $AE = 3$  см,  $EF = 2,5$  см,  $FC = 3,2$  см.

39. На рисунке 45, а изображен куб и незамкнутая пространственная ломаная  $AFTROB$ . а) Назовите грань куба, которая содержит звено  $FT$  данной ломаной. б) Верно ли, что звено  $OB$  содержится в грани  $AA_1B_1B$  куба?

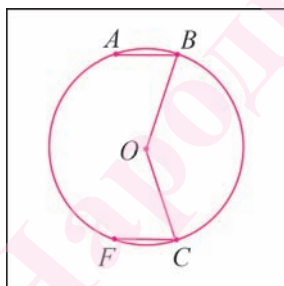


45. Точки  $C$  и  $D$  — внутренние точки отрезка  $AB$ , длина которого равна 14 см. Вычислите длину отрезка  $CD$ , если  $AC = 4$  см,  $BD = 5$  см.

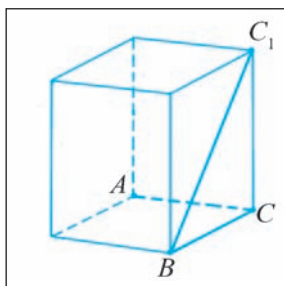
46. Точка  $F$  — внутренняя точка отрезка  $AC$ , а точка  $O$  — внутренняя точка отрезка  $FC$ . Вычислите длину отрезка  $OC$ , если  $AC = 18$  см,  $AF = 5$  см,  $FO = 7$  см.

47. Простая ломаная состоит из трех звеньев. Вычислите длины всех звеньев ломаной, если длины второго и третьего звеньев в два раза больше длины первого звена, а длина ломаной равна 18 см.

48. Вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  ломаной  $ABOCF$  лежат на окружности, центром которой является точка  $O$ ,  $AB = FC$  (рис. 46, а). Вычислите длину звена  $AB$ , если диаметр окружности равен 10 см, а длина ломаной — 16 см.



а)



б)

Рис. 46

49. На рисунке 46, б изображены прямоугольный параллелепипед и пространственная ломаная  $ACBC_1$ , длина которой равна 20 см. Вычислите длины всех звеньев ломаной, если длины отрезков  $C_1B$  и  $CA$  в два раза больше длины отрезка  $CB$ .

50. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой так, что  $AB = 21$  см,  $AC = 9$  см,  $BC = 12$  см. Верно ли, что точка  $C$  является внутренней точкой отрезка  $AB$ ?

51. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой так, что  $AB = 6$  см,  $AC = 19$  см,  $BC = 25$  см. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

52. Даны четыре различные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Назовите все отрезки с концами в этих точках.

53. Сколько внутренних точек отрезка  $AB$  нужно отметить, чтобы вместе с отрезком  $AB$  получить шесть различных отрезков?

54. Точка  $O$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ . Вычислите расстояние между серединами отрезков  $OA$  и  $OB$ , если  $OA = 8$  см,  $OB = 12$  см.

55. Отрезок  $AB$  разделен точками  $O$  и  $F$  на три равных отрезка. Вычислите расстояние между серединами крайних отрезков, если  $AB = 18$  см.

56. Точки  $F$  и  $E$  делят отрезок  $AC$  на три неравных отрезка так, что расстояние между серединами крайних отрезков равно 14 см. Вычислите длину отрезка  $FE$ , если  $AC = 22$  см.

57. Точки  $O$  и  $F$  — внутренние точки отрезка  $AB$ . Известно, что  $AB = 20$  см,  $AO = 12$  см,  $BF = 14$  см. Вычислите расстояние между точками  $O$  и  $F$ .

58. Точки  $C$  и  $D$  — внутренние точки отрезка  $AB$ , длина которого равна 14 см. Известно, что  $AC = 12$  см,  $CD = 7$  см. Вычислите длину отрезка  $BD$ .

59. Точка  $O$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ ,  $AO : OB = 2 : 3$ . Вычислите длины отрезков  $AO$  и  $BO$ , если длина отрезка  $AB$  равна 35 см.

60. Точка  $F$  делит отрезок  $AC$  так, что  $AF : FC = 3 : 4$ . Вычислите длины отрезков  $AF$  и  $FC$ , если длина отрезка  $AC$  равна 49 см.

61. Точка  $O$  — середина отрезка  $AB$ , а точка  $F$  — середина отрезка  $OB$ . Вычислите длину отрезка  $AF$ , если длина отрезка  $AB$  равна 24 см.

62. Отрезок  $AC$  делится точкой  $E$  на два равных отрезка, а точка  $O$  является серединой отрезка  $EC$ . Вычислите длину отрезка  $AO$ , если  $CO = 7$  см.

63. Точка  $C$  лежит на прямой  $AB$ . Какую длину может иметь отрезок  $AC$ , если  $AB = 12$  см, а  $BC = 7$  см?

64. Точка  $O$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ , длина которого равна 18 см. Вычислите длины отрезков  $AO$  и  $BO$ , если известно, что половина отрезка  $AO$  составляет четвертую часть отрезка  $BO$ .

65. Точка  $F$  — внутренняя точка отрезка  $AC$ . Расстояние между серединами отрезков  $AF$  и  $FC$  равно 24 см. Вычислите длину отрезка  $AC$ .

66. На прямой отложены два равных отрезка  $AC$  и  $CB$ . Точка  $D$  — внутренняя точка отрезка  $CB$ ,  $DB = 4CD$ . Вычислите расстояние между серединами отрезков  $AC$  и  $CB$ , если  $CD = 3$  см.

67. Точка  $O$  лежит на прямой  $AB$ . Какова длина отрезка  $OB$ , если  $AB = 14$  см и  $OA = 2OB$ ?

68. Длина отрезка  $AC$  равна 16 см, а точка  $F$  лежит на прямой  $AC$ . Вычислите длину отрезка  $FC$ , если известно, что  $FA = 3FC$ .

69\*. На прямой отложены два равных отрезка  $AC$  и  $CB$ . Точка  $D$  — внутренняя точка отрезка  $CB$ ,  $2CD = 3DB$ . Вычислите расстояние между серединами отрезков  $AC$  и  $DB$ , если  $CD = 18$  см.

### § 3. Сравнение и измерение углов.

#### Свойства смежных и вертикальных углов

**1. Полуплоскость.** Пусть  $l$  — некоторая прямая на плоскости. Тогда эта прямая разделяет множество остальных точек плоскости на два множества, каждое из которых вместе с прямой  $l$  называется **полуплоскостью**. Прямая  $l$  называется **границей** каждой из полуплоскостей.

Полуплоскость с границей  $l$  характеризуется следующим образом. Если две точки лежат по одну сторону от прямой  $l$ , то эти точки лежат в одной полуплоскости с границей  $l$ . Если две точки лежат по разные стороны от прямой  $l$ , то эти точки лежат в разных полуплоскостях с границей  $l$ .

Например, точки  $A$  и  $B$  лежат в одной полуплоскости с границей  $l$ , а точки  $C$  и  $D$  лежат в разных полуплоскостях с границей  $l$  (рис. 47, а).

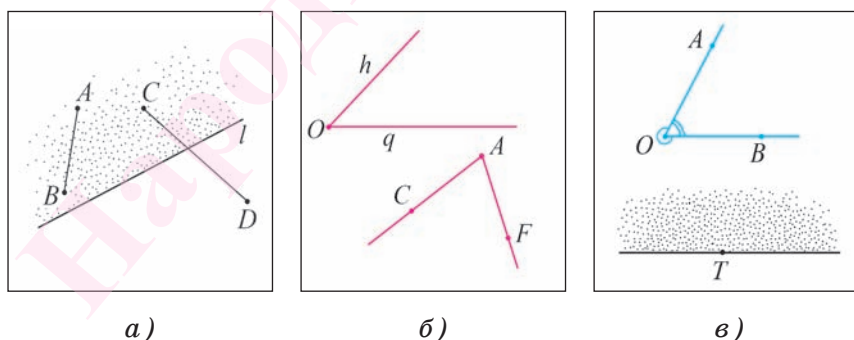


Рис. 47

**Определение.** Полуплоскостью называется геометрическая фигура, состоящая из прямой и всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от данной прямой.

Данная прямая называется **границей полуплоскости**.

**2. Угол.** Пусть на плоскости даны два луча  $h$ ,  $q$ , имеющие общее начало  $O$ . Тогда остальные точки плоскости разделяются этими лучами на две части, каждая из которых вместе с лучами  $h$  и  $q$  называется углом (рис. 47, б).

**Определение.** Углом называется геометрическая фигура, состоящая из двух лучей с общим началом и одной из частей плоскости, на которые эти лучи разделяют остальные точки плоскости.

Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

Угол с вершиной  $O$  и сторонами  $h$ ,  $q$  обозначается  $\angle hq$  или  $\angle O$  (говорят: «Угол  $hq$ » или «Угол  $O$ »).

Если на сторонах угла с вершиной  $A$  указаны, например, точки  $C$  и  $F$ , тогда этот угол можно обозначать  $\angle CAF$  или  $\angle FAC$  (см. рис. 47, б).

Заметим, что два луча с общим началом являются сторонами двух углов. Тот из углов, который хотят рассматривать, на рисунке отмечается дугой.

На рисунке 47, в дугой отмечен один из углов, а двумя дугами — другой из углов, сторонами которых служат лучи  $OA$  и  $OB$ .

**Развернутым углом** называется угол, стороны которого являются противоположными лучами. На рисунке 47, в изображен развернутый угол с вершиной  $T$ .

Если два луча с общим началом совпадают, то говорят, что они являются сторонами **нулевого угла**.

Для каждого ненулевого угла определены его **внутренняя** и **внешняя** области. **Внутренней областью** угла называется множество точек этого угла, не принадлежащих его сторонам.



*Внешней областью* угла называется множество точек плоскости, не принадлежащих углу.

На рисунке 48, *а* показаны точка  $A$ , которая лежит во внутренней области неразвернутого угла  $FOE$ , и точка  $B$ , лежащая во внешней области этого угла.

Если начало луча совпадает с вершиной угла и луч лежит во внутренней области данного угла, то говорят, что этот **луч делит угол на два угла**.

Например, на рисунке 48, *б* луч  $SF$  делит угол  $ASO$  на два угла:  $\angle ASF$  и  $\angle FSO$ .

Любой луч с началом в вершине развернутого угла, не совпадающий с его сторонами и лежащий в его внутренней области, делит этот развернутый угол на два угла.

Например, луч  $FT$ , не совпадающий с лучами  $FC$  и  $FD$ , делит развернутый угол  $CFD$  с вершиной  $F$  на два угла:  $\angle CFT$  и  $\angle TFD$  (рис. 48, *в*).

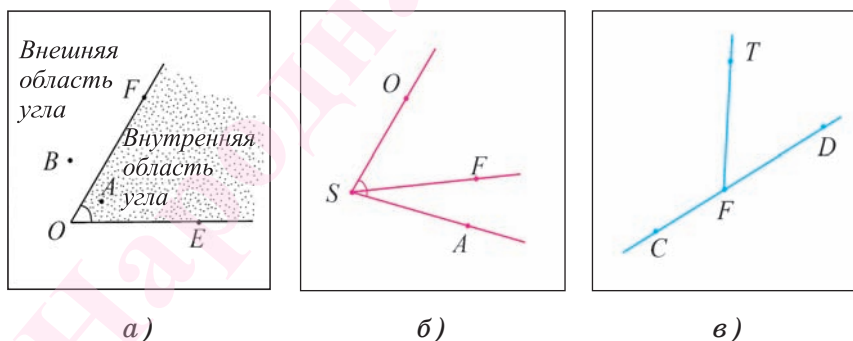


Рис. 48

**3. Сравнение углов.** Пусть  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — два неразвернутых угла (рис. 49, *а*). Для сравнения этих углов наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие стороны были расположены в одной полуплоскости.

Если две другие стороны также совместятся, то совместятся и сами углы, а следовательно, они равны. Если при наложении эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который является частью другого угла.

Например, на рисунке 49, б  $\angle 1$  составляет часть  $\angle 2$ , поэтому  $\angle 1$  меньше  $\angle 2$  (в этом случае пишут, что  $\angle 1 < \angle 2$  или  $\angle 2 > \angle 1$  и читают: «Угол 1 меньше угла 2» или «Угол 2 больше угла 1»).

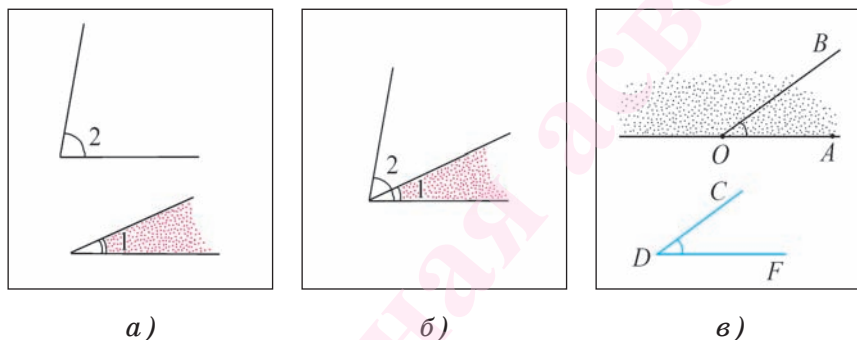


Рис. 49

Если угол неразвернутый, то он может быть меньше или больше развернутого.

В дальнейшем, если не будет оговорено иное, будем рассматривать углы, меньшие развернутого угла или развернутые.

Далее будем пользоваться следующей аксиомой.

**Аксиома откладывания угла в данную полуплоскость.** *От любого луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному неразвернутому углу.*

Эта аксиома означает, что если дан какой-либо луч  $OA$  и некоторый угол  $CDF$ , то в каждой из двух полуплоскостей, границей которой является пря-

мая  $OA$ , существует единственный луч  $OB$ , такой, что угол  $CDF$  равен углу  $AOB$  (рис. 49, в).

**Определение.** Биссектрисой угла называется луч с началом в вершине этого угла и делящий его на два равных угла.

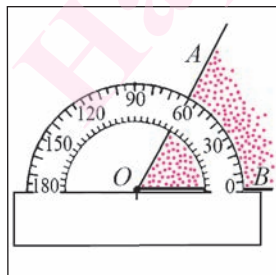
**4. Измерение углов.** Измерение углов основано на сравнении их с некоторым углом, который принимается за единицу измерения. За единицу измерения углов принят *угол в один градус (градус)* — угол, равный  $\frac{1}{180}$  части развернутого угла.

Некоторые части градуса имеют специальное название. Например,  $\frac{1}{60}$  часть градуса называется *минутой* и обозначается знаком «'», а  $\frac{1}{60}$  часть минуты называется *секундой* и обозначается знаком «''».

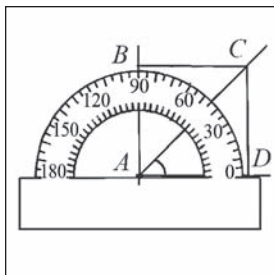
*Градусная мера угла* — это геометрическая величина, которая показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в данном угле.

Для измерения углов используется транспортир (рис. 50, а).

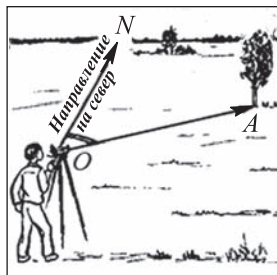
Например, на рисунке 50, а изображен угол  $AOB$ , градусная мера которого равна  $60^\circ$ . На рисунке 50, б изображен угол  $CAD$ , градусная мера которого равна  $45^\circ$  и  $\angle BAD = 90^\circ$ .



а)



б)



в)

Рис. 50

Угол, градусная мера которого равна 35 градусов 40 минут и 12 секунд, обозначают следующим образом:  $35^{\circ}40'12''$ .

Так как градус составляет  $\frac{1}{180}$  развернутого угла, то *градусная мера развернутого угла равна  $180^{\circ}$* . Градусная мера нулевого угла считается равной  $0^{\circ}$ .

Каждый угол имеет определенную градусную меру.

Если два угла равны, то угол в один градус и его части укладываются в этих углах равное число раз, т. е. равные углы имеют равные градусные меры.

Если один угол меньше другого, то угол в один градус или его части укладываются в нем меньшее число раз, чем в другом угле.

При измерении углов опираются на следующие *свойства градусной меры углов*.

1) *Каждый ненулевой угол имеет градусную меру, которая больше нуля.*

2) *Для любого числа  $0 \leq \alpha \leq 180$  существует угол, градусная мера которого равна  $\alpha^{\circ}$ .*

3) *Равные углы имеют равные градусные меры.*

4) *Углы, имеющие равные градусные меры, равны.*

5) *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится любым лучом.*

Понятие угла и его градусной меры используется на практике, например при определении курса корабля или в геодезии при определении азимута предмета — градусной меры угла между направлением на север и направлением на предмет (рис. 50, в).

Если дан угол, градусная мера которого равна  $\alpha$ , то можно говорить, что «дан угол, равный  $\alpha$ ».

Угол называется *прямым*, если его градусная мера равна  $90^{\circ}$  (рис. 51, а), *острым* — если боль-

ше  $0^\circ$  и меньше  $90^\circ$  (рис. 51, б), *тупым* — если больше  $90^\circ$  и меньше  $180^\circ$  (рис. 51, в).

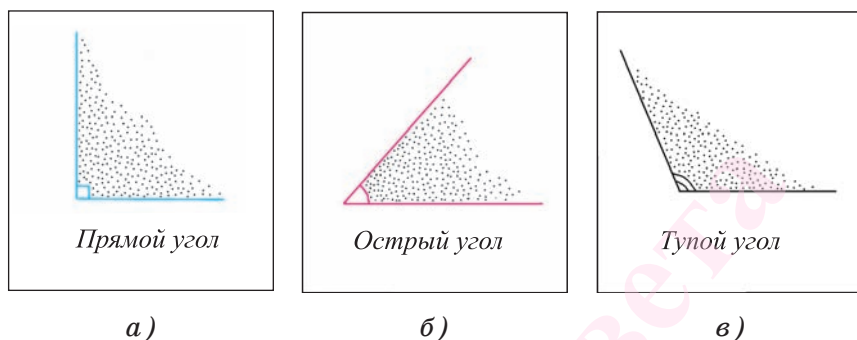


Рис. 51

Ранее мы обсуждали, что понимается под теоремой. Теперь докажем теоремы, которые характеризуют свойства смежных и вертикальных углов.

### 5. Свойства смежных и вертикальных углов.

**Два угла называются смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов являются противоположными лучами.

Например, углы  $AOB$  и  $BOC$ , изображенные на рисунке 52, а, являются смежными.

**Два угла называются вертикальными**, если они имеют общую вершину и стороны одного угла являются лучами, противоположными сторонам другого.

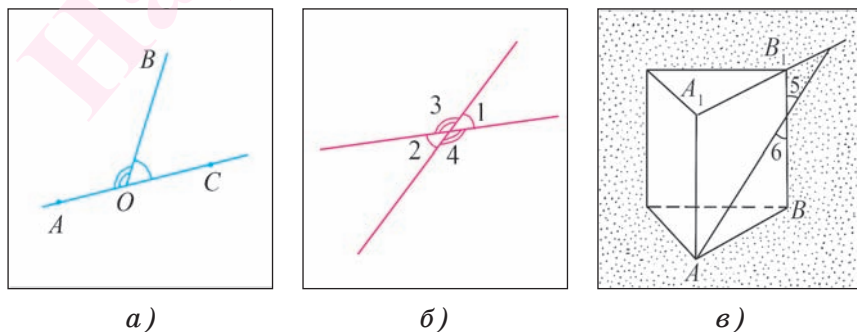


Рис. 52

Например, на рисунке 52, б изображены вертикальные углы 1 и 2, 3 и 4. На рисунке 52, в изображены вертикальные углы 5 и 6, лежащие в той же плоскости, в которой лежит грань  $ABB_1A_1$  прямой призмы.

**Теорема 1 (о свойстве смежных углов).** *Сумма градусных мер смежных углов равна  $180^\circ$ .*

Доказательство.

Пусть углы  $AOC$  и  $BOC$  смежные (рис. 53, а). Так как луч  $OC$  делит развернутый угол с вершиной  $O$  на два угла  $AOC$  и  $BOC$ , то  $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ . А поскольку  $\angle AOB = 180^\circ$ , то  $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ .

Теорема доказана.

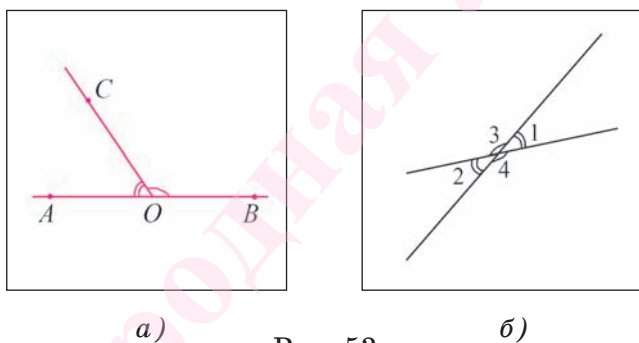


Рис. 53

**Теорема 2 (о свойстве вертикальных углов).** *Вертикальные углы равны.*

Доказательство.

Пусть  $\angle 1$  и  $\angle 2$ , а также  $\angle 3$  и  $\angle 4$  — вертикальные (рис. 53, б). Докажем, что  $\angle 1 = \angle 2$ . Угол 3 является смежным с углом 1 и смежным с углом 2. Тогда по свойству смежных углов имеем:  $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$  и  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ . Отсюда следует, что  $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$  и  $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$ . Таким образом, градусные меры углов 1 и 2 равны, значит,  $\angle 1 = \angle 2$ . Поскольку  $\angle 3$

и  $\angle 4$  дополняют  $\angle 1$  и  $\angle 2$  соответственно до развернутого угла, то  $\angle 3 = \angle 4$ .

Теорема доказана.

**6. Перпендикулярные прямые.** Теперь рассмотрим понятие перпендикулярных прямых. Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются в точке  $O$ . При этом образуются четыре неразвернутых угла, сторонами которых являются лучи данных прямых с началом в точке  $O$ . Если один из этих углов прямой (рис. 54, а), то, как следует из теорем 1 и 2, и остальные углы также прямые. В этом случае говорят, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  при пересечении образуют прямые углы.

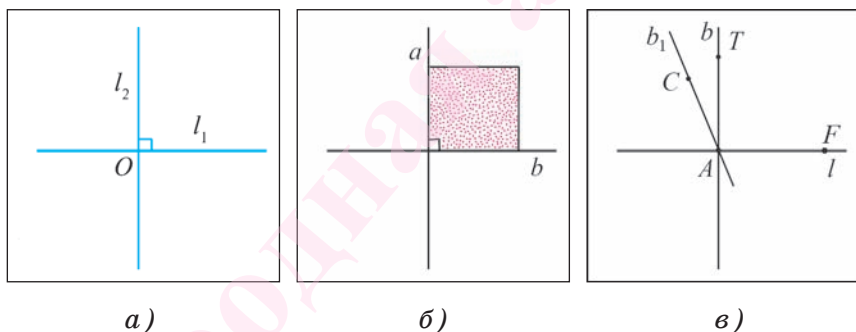


Рис. 54

**Определение.** Две прямые называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если они при пересечении образуют прямые углы.

Если прямые  $a$  и  $b$  ( $AB$  и  $CD$ ) перпендикулярные, то используется обозначение  $a \perp b$  ( $AB \perp CD$ ). Запись  $a \perp b$  читают следующим образом: «Прямая  $a$  перпендикулярна прямой  $b$ ».

Лучи и отрезки называются перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.



*Отрезок называется перпендикулярным прямой, если он лежит на прямой, перпендикулярной данной прямой.*

На рисунке 54, б изображены перпендикулярные прямые  $a$  и  $b$ , содержащие две стороны квадрата.

**Теорема 3.** *Через каждую точку прямой в плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.*

Доказательство.

1. Докажем, что такая прямая существует.

Пусть  $l$  — данная прямая,  $A$  — произвольная точка прямой  $l$ . Пусть  $AF$  — один из лучей этой прямой с началом в точке  $A$ .

На основании аксиомы откладывания угла отложим от луча  $AF$  прямой угол  $TAH$ . Тогда прямая  $b$ , содержащая луч  $AT$ , перпендикулярна прямой  $l$  (рис. 54, в).

2. Докажем, что такая прямая единственная.

Допустим, что существует еще одна прямая  $b_1$ , проходящая через точку  $A$  и перпендикулярная прямой  $l$ .

Пусть  $AC$  — луч этой прямой, лежащий в одной полуплоскости с лучом  $AT$ . Каждый из углов  $FAT$  и  $FAC$  — прямой и отложен от данного луча в одной полуплоскости.

Согласно аксиоме откладывания угла, от данного луча в данную полуплоскость можно отложить только один прямой угол. Следовательно, не может быть другой прямой, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной прямой  $l$ .

Теорема доказана.

7. Доказательство от противного. При доказательстве предыдущей теоремы применялся способ, который называется *доказательством от противного*.

Этот способ доказательства состоит в том, что сначала делают предположение о верности утверждения, противоположного тому, которое необходимо доказать. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные ранее теоремы, приходят к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме. На этом основании делают вывод, что сделанное предположение было неверным, а, следовательно, верно утверждение теоремы.

### Вопросы к § 3

1. Какая фигура называется полуплоскостью?
2. Какая фигура называется углом?
3. Какой угол называется развернутым?
4. Что называется градусной мерой угла?
5. Верно ли, что градусные меры равных углов равны?
6. Следует ли из равенства градусных мер углов равенство этих углов?
7. Сформулируйте свойства градусной меры угла.
8. Какой угол называется прямым (острым, тупым)?
9. Какие углы называются смежными?
10. Какие углы называются вертикальными?
11. Сформулируйте теорему о свойстве смежных углов.
12. Каким свойством обладают вертикальные углы?
13. Какие прямые называются перпендикулярными?
14. Какой отрезок называется перпендикуляром к прямой?

## Задачи к § 3

**70.** На прямой лежат четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ . Сколько существует на данной прямой лучей, имеющих начало в этих точках?

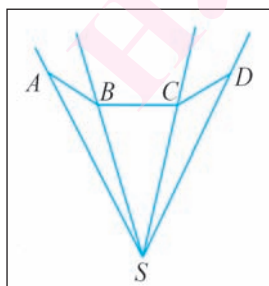
**71.** Три различных луча  $OA, OB$  и  $OC$  имеют общее начало в точке  $O$ . Сколько существует углов, меньших развернутого, сторонами которых служат данные лучи?

**72.** Три прямые лежат в плоскости и проходят через точку  $F$ . Сколько существует углов, меньших развернутого, с вершиной в точке  $F$ , сторонами которых служат лучи данных прямых с началом в точке  $F$ ?

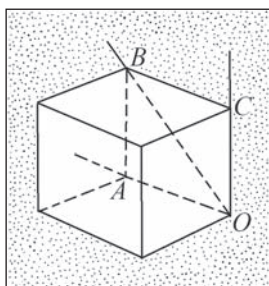
**73.** Даны четыре луча, имеющие общее начало в точке  $O$ . Сколько существует неразвернутых углов с вершиной  $O$ , для которых данные лучи служат сторонами?

**74.** Сколько лучей с началом в точке  $S$  изображено на рисунке 55, а? Сколько на рисунке изображено углов с вершиной  $S$ , для которых данные лучи являются сторонами?

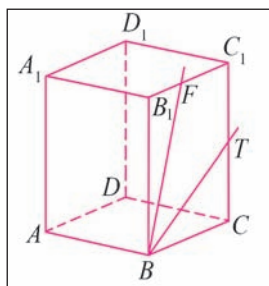
**75.** На рисунке 55, б изображен куб и лучи  $OA, OB$  и  $OC$ , которые лежат в той же плоскости, что и грань  $ABCO$  куба. Назовите все углы с вершиной  $O$ , для которых лучи  $OA, OB$  и  $OC$  служат сторонами.



а)



б)



в)

Рис. 55

76. На рисунке 55, в изображен прямоугольный параллелепипед. Точки  $T$  и  $F$  лежат на ребрах  $CC_1$  и  $C_1B_1$  соответственно. Назовите грань, в плоскости которой лежит угол  $TBF$ .

77. Пользуясь рисунком 56, а, с помощью транспортира измерьте: а)  $\angle TAB$  и  $\angle BAC$ ; б)  $\angle ACB$  и  $\angle BCF$ .

78. Транспортиром измерьте углы  $COD$ ,  $AOD$  и  $BAO$ , которые изображены на рисунке 56, б.

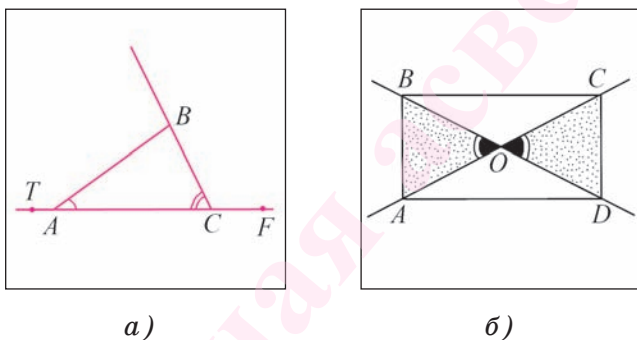


Рис. 56

79. Луч  $OS$  делит  $\angle AOB$  на два угла, один из которых в два раза больше другого. Вычислите градусную меру каждого из углов, если  $\angle AOB = 78^\circ$ .

80. Градусная мера  $\angle AOB$  равна  $120^\circ$ . Луч  $OC$  делит  $\angle AOB$  на два угла. Вычислите градусные меры  $\angle AOC$  и  $\angle COB$ , если градусная мера  $\angle AOC$  меньше градусной меры  $\angle COB$  в два раза.

81. Луч  $OC$  делит  $\angle AOB$  на два угла. Вычислите градусные меры  $\angle AOC$  и  $\angle COB$ , если известно, что градусная мера  $\angle AOC$  на  $30^\circ$  больше градусной меры  $\angle COB$ , а  $\angle AOB = 132^\circ$ .

82. Луч  $OK$  делит  $\angle BOC$ , градусная мера которого равна  $160^\circ$ , на два угла. Вычислите градус-

ные меры углов  $ВОК$  и  $КОС$ , если их разность равна  $24^\circ$  и угол  $ВОК$  больше угла  $КОС$ .

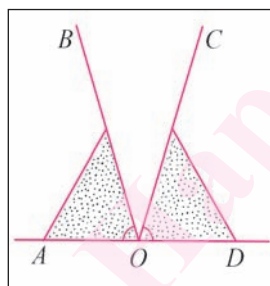
83. Луч  $ОВ$  делит угол  $АОС$  на два угла. Вычислите градусную меру угла  $АОВ$ , если она на  $10^\circ$  меньше градусной меры угла  $ВОС$ , а  $\angle AOC = 150^\circ$ .

84. Луч  $ОС$  делит прямой угол  $АОВ$  на два угла. Вычислите градусную меру угла, сторонами которого служат биссектрисы углов  $АОС$  и  $СОВ$ .

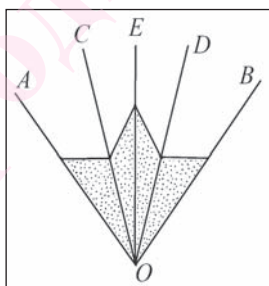
85. На рисунке 57, а углы  $АОВ$  и  $ДОС$  равны. Верно ли, что  $\angle AOC = \angle DOB$ ? Дайте обоснование ответа.

86. Луч  $ОF$  является биссектрисой угла  $АОВ$ , а луч  $ОЕ$  — биссектрисой угла  $FOB$ . Вычислите градусную меру угла  $АОВ$ , если  $\angle EOB = 12^\circ$ .

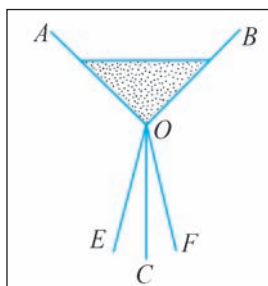
87. Луч  $ОЕ$  — биссектриса угла  $АОВ$ , а  $\angle AOC = \angle BOD$  (рис. 57, б). Докажите, что луч  $ОЕ$  является биссектрисой угла  $СОD$ .



а)



б)



в)

Рис. 57

88. Лучи  $OF$  и  $OE$  делят прямой угол  $АОВ$  на три равных угла. Вычислите градусную меру угла, сторонами которого служат биссектрисы углов  $АOF$  и  $EOB$ .

**89.** Лучи  $OF$  и  $OE$  делят развернутый угол  $AOB$  на три угла  $AOF$ ,  $FOE$  и  $EOB$  так, что  $\angle AOE = \angle BOF$ . Вычислите градусную меру угла  $FOE$ , если известно, что  $\angle AOF = 30^\circ$ .

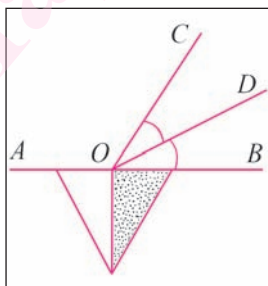
**90.** На рисунке 57, в углы  $AOC$  и  $BOC$  равны. Докажите, что луч  $OC$  является биссектрисой угла  $EOF$ , если  $\angle AOE = \angle BOF$ .

**91.** Луч  $OC$  делит угол  $AOB$  на два угла так, что  $\angle AOC = 3\angle COB$ . Луч  $OD$  проведен так, что луч  $OA$  является биссектрисой угла  $DOB$ . Вычислите градусные меры углов  $AOC$ ,  $COB$  и  $DOB$ , если  $\angle AOB = 60^\circ$ .

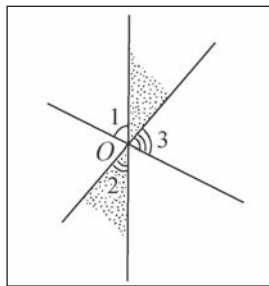
**92.** Луч  $OE$  делит угол  $AOB$  на два угла так, что  $\angle BOE = 3\angle AOE$ . Луч  $OF$  расположен так, что луч  $OE$  является биссектрисой угла  $FOB$ . Вычислите градусные меры углов  $BOE$ ,  $AOE$  и  $AOF$ , если  $\angle AOB = 100^\circ$ .

**93.** Угол  $AOB$  разделен лучом  $OC$  на два угла. Вычислите градусную меру угла  $AOB$ , если градусная мера угла, сторонами которого являются биссектрисы углов  $AOC$  и  $COB$ , равна  $60^\circ$ .

**94.** Луч  $OD$  — биссектриса  $\angle COB$ . Вычислите градусную меру  $\angle AOD$ , если  $\angle COB = 60^\circ$  (рис. 58, а).



а)



б)

Рис. 58

**95.** Градусная мера одного из смежных углов в три раза меньше градусной меры другого угла. Вычислите градусную меру каждого из углов.

**96.** Вычислите градусные меры смежных углов, если градусная мера одного из них на  $40^\circ$  больше градусной меры другого.

**97.** На рисунке 58, б изображены три прямые, которые проходят через точку  $O$ . Вычислите сумму  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ .

**98.** Вычислите градусную меру угла, сторонами которого являются биссектрисы двух смежных углов.

**99.** Луч  $OF$  делит  $\angle AOB$  на два угла. Вычислите градусные меры  $\angle BOF$  и  $\angle AOF$ , если известно, что их разность равна  $30^\circ$ , а  $\angle AOB = 140^\circ$ .

**100.** Луч  $OC$  делит угол  $AOB$  на два угла. Вычислите градусные меры  $\angle AOC$  и  $\angle COB$ , если известно, что их разность в четыре раза меньше их суммы, а  $\angle AOB = 120^\circ$ .

**101.** Луч  $OC$  делит прямой угол  $AOB$  на два угла. Вычислите градусные меры углов  $AOC$  и  $COB$ , если известно, что их разность составляет половину их суммы.

**102.** Градусная мера меньшего из смежных углов в три раза меньше разности градусных мер этих смежных углов. Вычислите градусные меры смежных углов.

**103.** Сумма градусных мер вертикальных углов на  $20^\circ$  меньше градусной меры угла, смежного с



каждым из них. Вычислите градусные меры этих вертикальных углов.

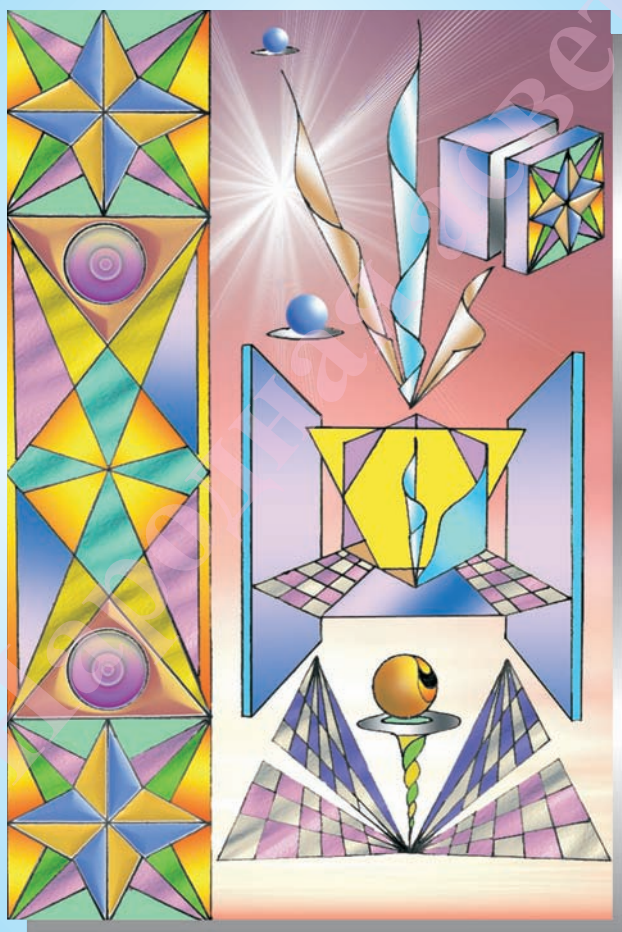
**104\*.** Градусная мера одного из четырех углов, образованных при пересечении двух прямых, в пять раз меньше суммы градусных мер трех остальных углов. Вычислите градусные меры этих четырех углов.

**105\*.** Прямой угол разделен лучом с началом в вершине угла на два угла, таких, что половина одного угла равна одной седьмой второго. Вычислите градусные меры этих углов.

**106\*.** Лучи  $OA$  и  $OB$  лежат во внутренней области угла  $COF$ , градусная мера которого равна  $150^\circ$ , а  $\angle AOB = 110^\circ$ . Вычислите градусную меру угла, сторонами которого служат биссектрисы углов  $COA$  и  $BOF$ , если луч  $OB$  лежит во внутренней области угла  $AOF$ .

**107\*.** Углы  $AOB$  и  $BOC$  — смежные, луч  $OF$  — биссектриса угла  $AOB$ , а луч  $OT$  лежит во внутренней области угла  $BOC$  и перпендикулярен лучу  $OF$ . Докажите, что луч  $OT$  — биссектриса угла  $BOC$ .

## ТРЕУГОЛЬНИКИ



## Глава 3

### ТРЕУГОЛЬНИКИ

#### § 1. Треугольник.

##### Первый признак равенства треугольников

**1. Треугольник.** Рассмотрим понятие треугольника. Пусть на плоскости дана трехзвенная замкнутая ломаная. Тогда эта ломаная разделяет множество оставшихся точек плоскости на ограниченную и неограниченную фигуры. При этом ограниченная фигура называется частью плоскости, ограниченной данной ломаной. Например, на рисунке 59, а изображена часть плоскости, ограниченная трехзвенной замкнутой ломаной  $ABC$ .

**Определение.** Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трехзвенной замкнутой ломаной и части плоскости, ограниченной этой ломаной.

Вершины ломаной называются *вершинами* треугольника, а звенья ломаной — *сторонами* треугольника.

Точки треугольника, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними*.

Треугольник, вершинами которого являются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , обозначается следующим образом:  $\triangle ABC$  (читают: «Треугольник  $ABC$ »). Этот же треугольник можно обозначать и так:  $\triangle BCA$  или  $\triangle CAB$ .

На рисунке 59, а изображен треугольник  $ABC$ . Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вершины этого треугольника, а отрезки  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  — его стороны. На рисунке 59, б показан треугольник  $AFD$ , содержащийся в грани куба.

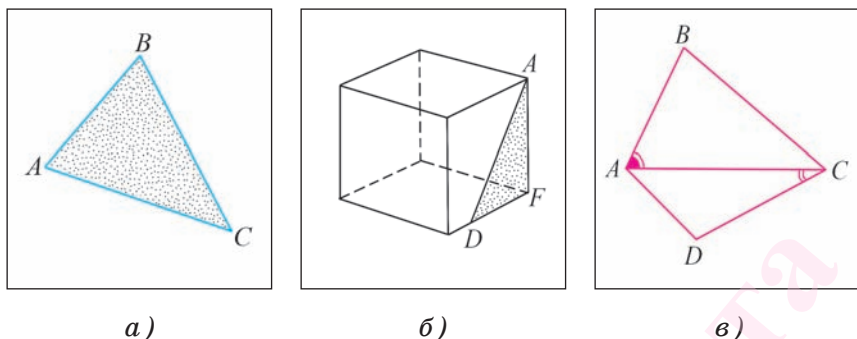


Рис. 59

Углы  $ABC$ ,  $ACB$  и  $CAB$  (см. рис. 59, а) называются **внутренними углами** треугольника  $ABC$  или просто **углами треугольника**. Иногда они обозначаются одной буквой:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ . **Стороны и углы треугольника называются его элементами.**

На рисунке 59, в изображены треугольники  $ABC$  и  $ACD$ , у которых общая сторона  $AC$ . Угол  $BAC$  — внутренний угол треугольника  $BAC$ ,  $\angle ACD$  — внутренний угол треугольника  $ACD$ .

**Периметром** треугольника называется сумма длин всех его сторон. Периметр треугольника  $ABC$  обозначается  $P_{ABC}$ .

Конструкции, имеющие треугольную форму, применяются при строительстве архитектурных сооружений, мостов и жилых зданий. Например, при постройке крыш некоторых домов используются стропила, имеющие форму треугольников (рис. 60, а).

Для треугольников, как и любых геометрических фигур, определяется понятие их равенства.

**Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением, т. е. можно совместить их вершины, стороны и углы.**

Рассмотрим пример. Если лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, разрезать на две части, как показано на рисунке 60, б, то мы получим модели равных треугольников. Непосредственно можно убедиться, что полученные части можно наложить одна на другую так, что они совместятся.

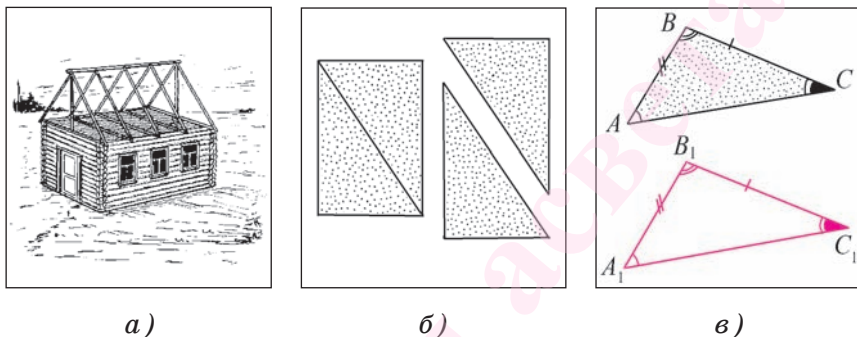


Рис. 60

Два равных треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (рис. 60, в) можно совместить так, что попарно совместятся их вершины, стороны и углы. Другими словами, если два треугольника равны, то стороны и углы одного треугольника соответственно равны сторонам и углам другого треугольника. Подчеркнем, что:

*в равных треугольниках против соответственных равных сторон лежат равные углы;*

*в равных треугольниках против соответственных равных углов лежат равные стороны.*

Например, в равных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , изображенных на рисунке 60, в, против равных сторон  $BC$  и  $B_1C_1$  лежат равные углы  $A$  и  $A_1$ . Против равных углов  $C$  и  $C_1$  лежат равные стороны  $AB$  и  $A_1B_1$ .

Если треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны, то это обозначается следующим образом:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

(читают: «Треугольник  $ABC$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ »).

Заметим, что для установления равенства треугольников необязательно их совмещать один с другим, а достаточно сравнить некоторые их элементы (стороны и углы).

Для доказательства равенства треугольников пользуются соответствующими теоремами (*признаками*), которые позволяют на основании равенства некоторых элементов треугольников делать вывод о равенстве самих треугольников.

**2. Первый признак равенства треугольников.** Докажем первый признак равенства треугольников.

**Теорема (первый признак равенства треугольников).** *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

**Доказательство.**

Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — треугольники, у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$  (рис. 61, а, б).

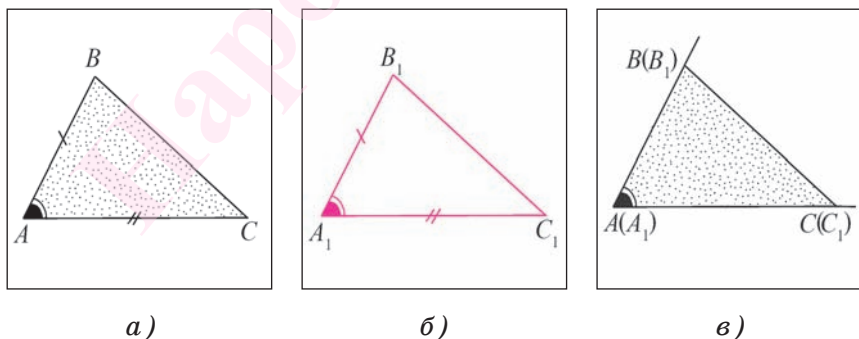


Рис. 61

1) Отложим  $\angle B_1A_1C_1$  в той же полуплоскости с границей  $AC$ , в которой лежит угол  $BAC$ , так, что-

бы сторона  $A_1C_1$  совпала со стороной  $AC$ . Это возможно в силу аксиомы откладывания отрезка на луче и условия  $AC = A_1C_1$ .

2) Так как  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ , то, согласно аксиоме откладывания угла в полуплоскость, лучи  $AB$  и  $A_1B_1$  совпадут.

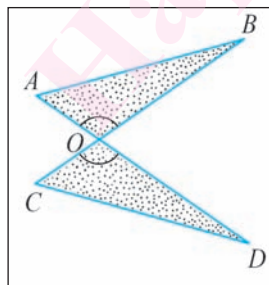
3) Так как  $AB = A_1B_1$ , то по аксиоме единственности откладывания отрезка на луче точка  $B_1$  совпадет с точкой  $B$ , кроме того, точка  $C$  совпадает с точкой  $C_1$ . С учетом того, что через две точки проходит единственная прямая, получаем, что отрезки  $BC$  и  $B_1C_1$  совпадают. Таким образом, совпадают углы и стороны треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , значит, эти треугольники равны (рис. 61, в).

Теорема доказана.

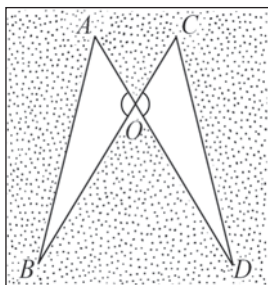
**Задача 1.** Отрезки  $AD$  и  $CB$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $AO = CO$  и  $BO = DO$ . Докажите, что треугольник  $AOB$  равен треугольнику  $COD$ .

Доказательство.

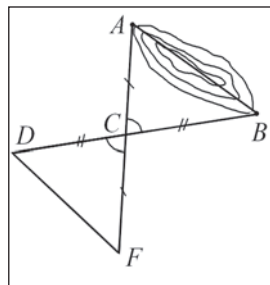
Для доказательства равенства треугольников  $AOB$  и  $COD$  воспользуемся первым признаком равенства треугольников. По условию задачи  $AO = CO$  и  $BO = DO$  (рис. 62, а, б). Кроме того,  $\angle AOB = \angle COD$ ,



а)



б)



в)

Рис. 62



так как они являются вертикальными. Таким образом, две стороны  $AO$ ,  $BO$  и угол между ними  $AOB$  треугольника  $AOB$  соответственно равны двум сторонам  $CO$ ,  $DO$  и углу  $COD$  между ними треугольника  $COD$ . Следовательно, по первому признаку равенства треугольников  $\triangle AOB = \triangle COD$ .

Что и требовалось доказать.

*Первый признак равенства треугольников можно применять при решении задач практического характера.* Рассмотрим пример решения такой задачи.

**Задача 2.** Пусть нам необходимо измерить расстояние между точками  $A$  и  $B$  на берегах озера, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 62, в).

Для этого выберем какую-нибудь точку  $C$ , для которой можно измерить расстояния  $AC$  и  $CB$ . Затем отметим еще две точки  $D$  и  $F$  так, чтобы точка  $C$  оказалась общей серединой отрезков  $AF$  и  $BD$ . Тогда расстояние между точками  $F$  и  $D$  равно искомому расстоянию. Действительно, треугольники  $ACB$  и  $FCD$  равны, так как  $AC = CF$  и  $BC = CD$  по построению, а  $\angle ACB = \angle FCD$ , так как они являются вертикальными. Следовательно,  $DF = AB$ .

## Вопросы к § 1

1. Какая фигура называется треугольником?
2. Что можно сказать о соответствующих сторонах и углах равных треугольников?
3. Какие условия должны выполняться, чтобы можно было сделать вывод о равенстве треугольников по первому признаку?

## Задачи к § 1

**108.** Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  имеют общую сторону  $AC$  и  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $AB = AD$  (рис. 63, а). Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $ADC$  равны.

**109.** На рисунке 63, б изображена треугольная призма, основания которой — треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Назовите грань, содержащую треугольник  $A_1AC$ .

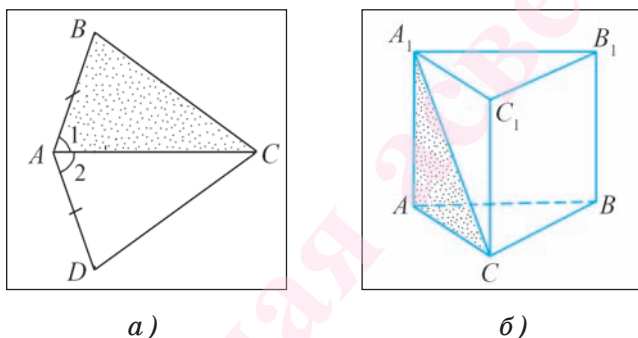


Рис. 63

**110.** Стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равны. Вычислите длину стороны  $AC$ , если периметр треугольника  $ABC$  равен 16 см, а длина стороны  $AC$  на 1 см больше длины стороны  $AB$ .

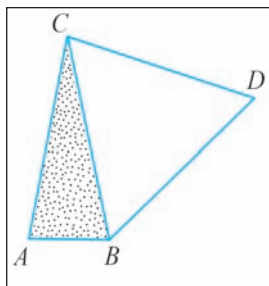
**111.** Периметр треугольника равен 22 см, а длина одной из сторон равна 8 см. Вычислите длины двух других сторон, если их разность равна 2 см.

**112.** На рисунке 64, а изображены треугольники  $ABC$  и  $BCD$ , у которых  $AC = BC$  и  $BC = BD = DC$ . Вычислите периметр треугольника  $BDC$ , если периметр треугольника  $ABC$  равен 21 см, а  $AB = 5$  см.

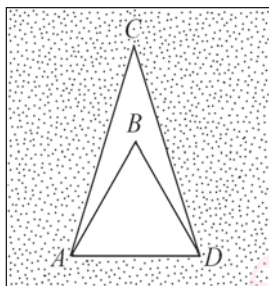
**113.** На рисунке 64, б изображены треугольники  $ADC$  и  $ABD$ . Вычислите длины сторон этих

треугольников, если известно, что  $AB = BD = AD$ ,  $AC = DC$ ,  $P_{ABD} = 18$  см,  $P_{ADC} = 20$  см.

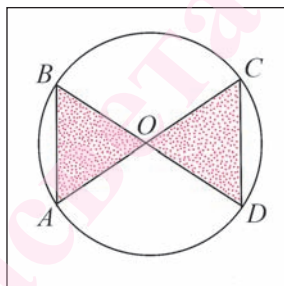
114. Отрезки  $AC$  и  $BD$  — диаметры окружности, центром которой является точка  $O$  (рис. 64, в). Докажите, что треугольники  $BOA$  и  $DOC$  равны.



а)



б)



в)

Рис. 64

115. Точка  $O$  — середина каждого из отрезков  $AF$  и  $CD$ . Докажите, что треугольники  $AOC$  и  $FOD$  равны.

116. В треугольнике  $ABC$  стороны  $AC$  и  $AB$  равны. Точки  $O$  и  $F$  лежат соответственно на сторонах  $AC$  и  $AB$  так, что  $AO = AF$ . Докажите равенство треугольников  $CAF$  и  $BAO$ .

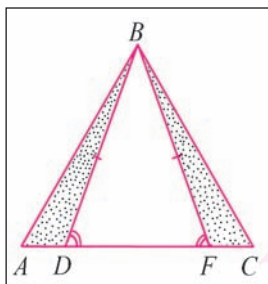
117. На равных сторонах  $AF$  и  $BF$  треугольника  $AFB$  лежат соответственно точки  $O$  и  $K$  так, что  $AO = BK$ . Докажите, что треугольник  $AFK$  равен треугольнику  $BFO$ .

118. Точка  $O$  является серединой стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ , а точка  $D$  лежит на луче  $AO$  так, что точка  $O$  является серединой отрезка  $AD$ . Докажите, что треугольники  $AOB$  и  $DOC$  равны.

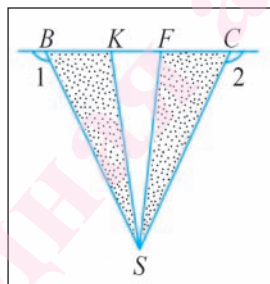
**119.** Точки  $D$  и  $F$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  так, что  $AD = FC$ ,  $\angle BDC = \angle BFA$  и  $BD = BF$  (рис. 65, а). Докажите, что треугольник  $ABD$  равен треугольнику  $CBF$ .

**120.** На рисунке 65, б  $SB = SC$ ,  $BK = CF$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .  
а) Докажите, что треугольник  $BKS$  равен треугольнику  $CFS$ . б) Верно ли, что треугольники  $BFS$  и  $CKS$  равны?

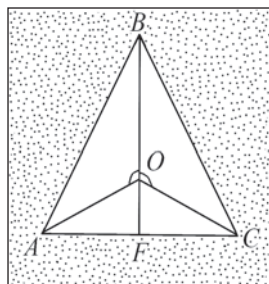
**121.** На рисунке 65, в  $AO = OC$ ,  $\angle AOB = \angle COB$ . Докажите, что  $\triangle ABF = \triangle CBF$ . Вычислите длину отрезка  $BC$ , если  $AB = 12$  см.



а)



б)



в)

Рис. 65

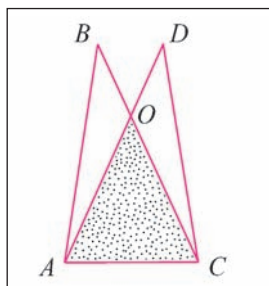
**122.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $\angle A = \angle A_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ . Точки  $O$  и  $O_1$  лежат на сторонах  $BC$  и  $B_1C_1$  соответственно,  $CO = 3BO$ ,  $C_1O_1 = 3B_1O_1$ . Вычислите длину отрезка  $A_1O_1$ , если  $AO = 5$  см.

**123.** Точка  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$  так, что треугольник  $AOB$  равен треугольнику  $COB$ ,  $AO = OC$ ,  $\angle AOC = 140^\circ$ . Докажите, что луч  $BO$  является биссектрисой угла  $ABC$ , и вычислите градусную меру угла  $AOB$ .

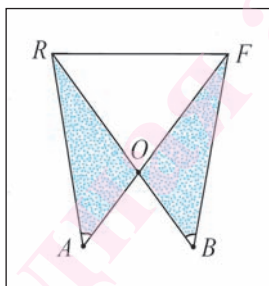
**124.** На рисунке 66, *а* изображены треугольники  $ABC$  и  $ADC$ ,  $O$  — точка пересечения сторон  $BC$  и  $DA$ ,  $\angle BAC = \angle DCA$ ,  $AO = OC$ ,  $AB = CD$ . Докажите равенство треугольников  $DOC$  и  $BOA$ .

**125.** На рисунке 66, *б* изображены равные треугольники  $AOR$  и  $BOF$ , у которых  $\angle RAO = \angle FBO$ . Вычислите периметр треугольника  $ARF$ , если  $P_{ARO} = 40$  см и  $RF = 20$  см.

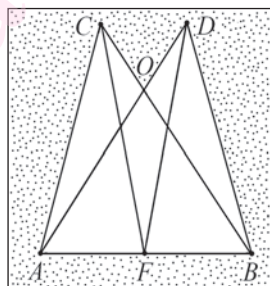
**126\*.** На рисунке 66, *в* точка  $F$  — середина отрезка  $AB$ ,  $CO = OD$  и  $AO = OB$ . Докажите, что отрезки  $CF$  и  $DF$  равны.



*а)*



*б)*



*в)*

Рис. 66

**127\*.** Точки  $F$  и  $F_1$  лежат соответственно на сторонах  $AC$  и  $A_1C_1$  треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  так, что  $AF = 2FC$  и  $A_1F_1 = 2F_1C_1$ . Кроме того,  $AB = A_1B_1$ ,  $BF = B_1F_1$  и  $\angle ABF = \angle A_1B_1F_1$ . Докажите, что  $BC = B_1C_1$ .

**128\*.** Точки  $D$  и  $D_1$  лежат соответственно на сторонах  $BC$  и  $B_1C_1$  треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  так, что  $DC = 3BD$  и  $D_1C_1 = 3B_1D_1$ . Кроме того,  $AC = A_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1$  и  $\angle A = \angle A_1$ . Докажите, что  $AD = A_1D_1$ .

## § 2. Медианы, высоты и биссектрисы треугольника. Равнобедренный треугольник

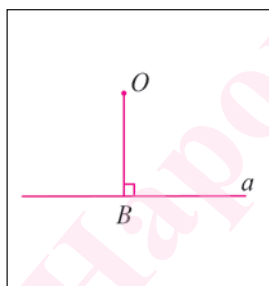
**1. Перпендикуляр и наклонная.** Рассмотрим понятия перпендикуляра и наклонной к прямой в плоскости.

Пусть точка  $O$  и прямая  $a$  лежат в плоскости, а точка  $O$  не лежит на прямой  $a$ .

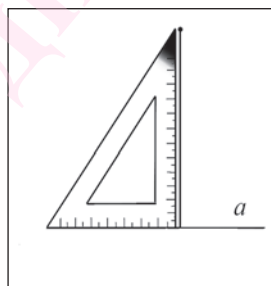
**Перпендикуляром, проведенным из точки  $O$  к прямой  $a$ ,** называется отрезок  $OB$ , такой, что точка  $B$  лежит на прямой  $a$  и отрезок  $OB$  перпендикулярен прямой  $a$ . Точка  $B$  называется основанием перпендикуляра.

На рисунке 67, а отрезок  $OB$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $O$  к прямой  $a$ .

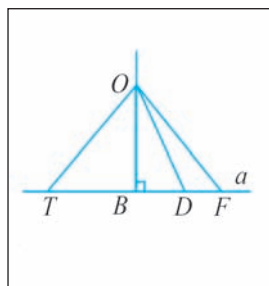
При изображении перпендикулярных прямых или перпендикуляра пользуются чертежным угольником (рис. 67, б).



а)



б)



в)

Рис. 67

Пусть точка  $B$  — основание перпендикуляра  $OB$ , проведенного из точки  $O$  к прямой  $a$ .

Отрезок, соединяющий точку  $O$  с любой точкой прямой  $a$ , не совпадающей с основанием  $B$  перпендикуляра, называется *наклонной* к прямой  $a$ .

На рисунке 67, в изображены наклонные  $OF$ ,  $OD$  и  $OT$  к прямой  $a$ .

**Теорема 1** (о существовании единственного перпендикуляра, проведенного из точки к прямой). *Из точки, не лежащей на прямой в плоскости, можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.*

Доказательство.

1. Докажем, что такой перпендикуляр существует.

Пусть точка  $A$  не принадлежит прямой  $l$ . Возьмем на этой прямой некоторую точку  $O$  и проведем луч  $OA$  (рис. 68, а). Далее от луча  $OB$  в другой полуплоскости отложим угол  $BOF$ , равный углу  $AOB$ . На луче  $OF$  отложим отрезок  $OC$ , равный отрезку  $OA$ . Пусть точка  $D$  — точка пересечения отрезка  $AC$  и прямой  $l$ . Треугольник  $AOD$  равен треугольнику  $COD$  по первому признаку равенства треугольников, т. к.  $AO = OC$ , сторона  $OD$  — общая,  $\angle AOD = \angle COD$ . Следовательно,  $\angle ADO = \angle CDO$ . Углы  $ADO$  и  $CDO$  являются смежными, значит,  $\angle ADO = \angle CDO = 90^\circ$ . Отсюда следует, что  $AD \perp l$ , т. е. перпендикуляр существует.

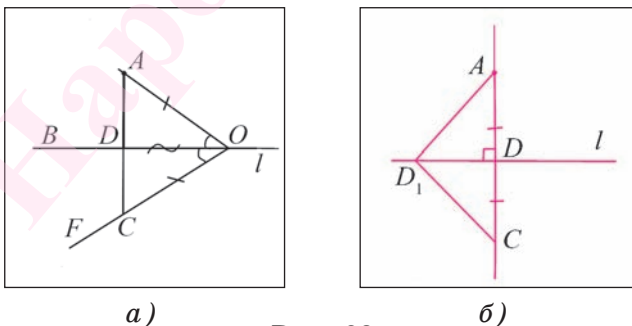


Рис. 68

2. Докажем единственность перпендикуляра.

Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что из точки  $A$  можно прове-



сти еще один перпендикуляр  $AD_1$  к прямой  $l$ . Пусть  $DC$  — луч, противоположный лучу  $DA$ , и  $DC = DA$  (рис. 68, б). Треугольники  $D_1DA$  и  $D_1DC$  равны по первому признаку равенства треугольников, так как  $DC = DA$ , сторона  $DD_1$  — общая,  $\angle ADD_1 = \angle CDD_1$ . Следовательно,  $\angle AD_1D = \angle CD_1D$ . Так как по предположению  $\angle AD_1D = 90^\circ$ , то  $\angle CD_1D = 90^\circ$ , т. е. угол  $AD_1C$  развернутый и лучи  $D_1A$  и  $D_1C$  составляют прямую. Таким образом, получаем, что через две точки  $A$  и  $C$  проходят две прямые, что противоречит аксиоме о существовании единственной прямой, проходящей через две точки. Значит, предположение о том, что из точки можно провести два перпендикуляра к прямой, неверно. Следовательно, такой перпендикуляр единственный.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если две прямые плоскости перпендикулярны третьей прямой этой плоскости, то они не пересекаются.*

Доказательство.

Пусть прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны прямой  $l$ . Докажем, что прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются. Допустим, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в некоторой точке  $O$ . Пусть прямые  $a$  и  $b$  пересекают прямую  $l$  в точках  $F$  и  $D$  соответственно. Тогда получаем, что из точки  $O$  к прямой  $l$  проведены два перпендикуляра  $OF$  и  $OD$ . Это противоречит теореме о существовании единственного перпендикуляра, проведенного из точки к прямой. Значит, наше предположение о том, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются, неверно. Прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются.

Теорема доказана.

**2. Медианы, высоты и биссектрисы треугольника.** Рассмотрим понятия медианы, высоты и биссектрисы треугольника.

**Определение.** Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположащей стороны.

Любой треугольник имеет три медианы.

Например, если точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — соответственно середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , то отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — медианы этого треугольника (рис. 69, а).

Если точки  $F$  и  $T$  — середины ребер  $B_1C_1$  и  $A_1C_1$  прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , тогда отрезки  $B_1T$  и  $A_1F$  — медианы треугольника  $A_1B_1C_1$ , служащего основанием призмы (рис. 69, б, в).

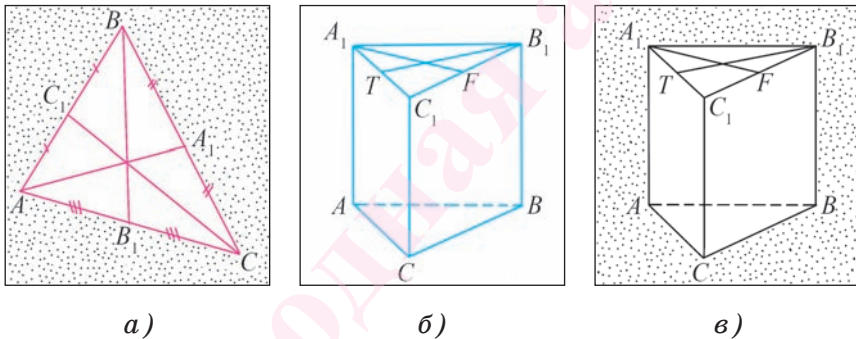


Рис. 69

Медианы, проведенные из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  (или их длины), можно обозначить  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$  соответственно.

**Определение.** Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из его вершины к прямой, содержащей противоположащую сторону.

Любой треугольник имеет три высоты. На рисунке 70, а, б, в изображены отрезки  $AF_1$ ,  $BF_2$  и  $CF_3$ , которые являются высотами треугольника  $ABC$ .

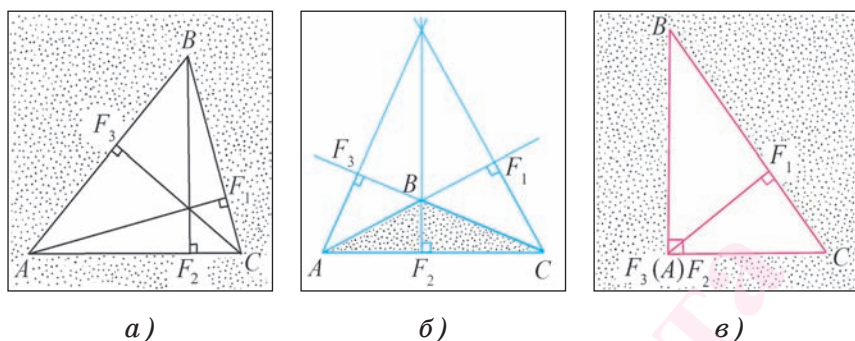


Рис. 70

Высоты, проведенные из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  (или их длины), можно обозначить  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$  соответственно.

Иногда вместо «вычислите длину высоты треугольника» можно говорить «вычислите высоту треугольника».

**Определение.** Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположащей стороны.

На рисунке 71, а изображена биссектриса  $CE$  треугольника  $ABC$ . Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 71, б изображены биссектрисы  $AE_1$ ,  $BE_2$  и  $CE_3$  треугольника  $ABC$ .

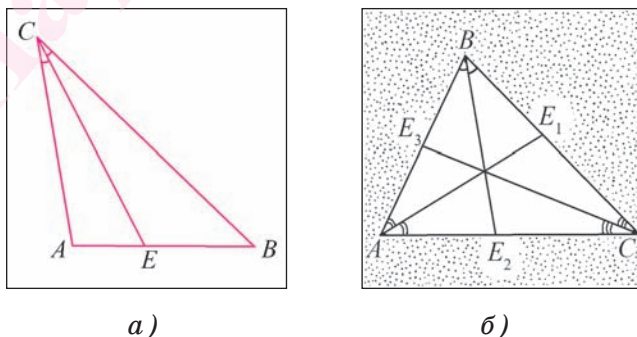


Рис. 71

Биссектрисы, проведенные из вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  (или их длины), можно обозначить  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  соответственно.

В дальнейшем будет доказано, что медианы, высоты и биссектрисы в любом треугольнике обладают следующими свойствами:

*медианы пересекаются в одной точке;*

*высоты или прямые, содержащие высоты, пересекаются в одной точке;*

*биссектрисы пересекаются в одной точке.*

**3. Равнобедренный треугольник.** Среди множества треугольников выделяются треугольники, имеющие особые свойства. К ним относятся, например, равнобедренные треугольники.

**Определение.** Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

Равные стороны равнобедренного треугольника называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* равнобедренного треугольника.

Если в равнобедренном треугольнике  $ABC$  равны стороны  $AC$  и  $AB$ , то точка  $A$  называется *вершиной равнобедренного* треугольника, а точки  $B$  и  $C$  — *вершинами при его основании*. Угол  $A$  называется *углом при вершине*, а углы  $B$  и  $C$  — *углами при основании* (рис. 72, а).

**Определение.** Треугольник, все стороны которого равны, называется равносторонним.

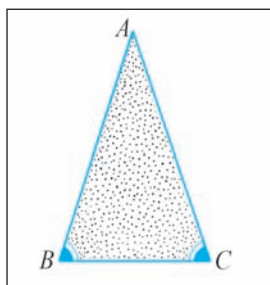
Заметим, что из данных определений следует, что любой равносторонний треугольник является также и равнобедренным.

Теперь докажем некоторые теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

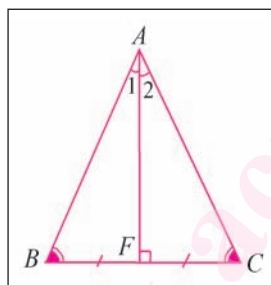
**Теорема 3** (о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника). *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Доказательство.

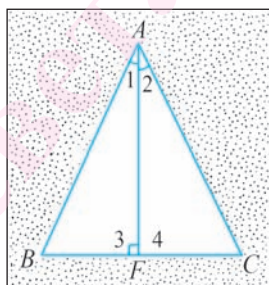
1) Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник, боковые стороны которого  $AC$  и  $AB$ . Докажем, что  $\angle B = \angle C$  (рис. 72, б).



а)



б)



в)

Рис. 72

2) Пусть отрезок  $AF$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Тогда треугольники  $ABF$  и  $ACF$  равны по первому признаку равенства треугольников ( $AC = AB$  по условию, сторона  $AF$  — общая,  $\angle 1 = \angle 2$ , так как  $AF$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ).

3) Из равенства треугольников  $ABF$  и  $ACF$  следует, что  $\angle B = \angle C$ .

Теорема доказана.

**Теорема 4** (о свойстве биссектрисы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника). *В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.*

Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник, у которого  $AC = AB$ , отрезок  $AF$  — биссектриса этого

треугольника. Докажем, что отрезок  $AF$  является медианой и высотой этого треугольника (рис. 72, в).

2) Треугольники  $ABF$  и  $ACF$  равны по первому признаку равенства треугольников ( $AC = AB$  по условию, сторона  $AF$  — общая,  $\angle 1 = \angle 2$ ).

3) Из равенства треугольников  $ABF$  и  $ACF$  следует, что  $BF = FC$ , т. е. точка  $F$  — середина стороны  $BC$ , а, значит, отрезок  $AF$  — медиана треугольника  $ABC$ .

4) Из равенства треугольников  $ABF$  и  $ACF$  также следует, что  $\angle 3 = \angle 4$ . Так как углы 3 и 4 смежные и равные, то они прямые. Отсюда следует, что отрезок  $AF$  — высота треугольника  $ABC$ .

Теорема доказана.

Из факта совпадения в равнобедренном треугольнике биссектрисы, медианы и высоты следуют утверждения.

1) *Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*

2) *Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.*

4. **Серединный перпендикуляр к отрезку.** Рассмотрим понятие серединного перпендикуляра к отрезку.

**Определение.** *Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.*

Следующая теорема характеризует свойства точек серединного перпендикуляра к отрезку.

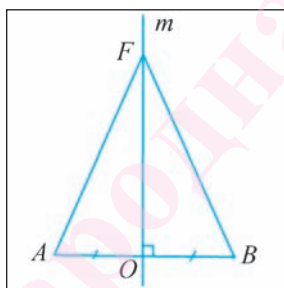
**Теорема 5** *(о серединном перпендикуляре). Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку находится на равном расстоянии от кон-*

*цов этого отрезка. Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.*

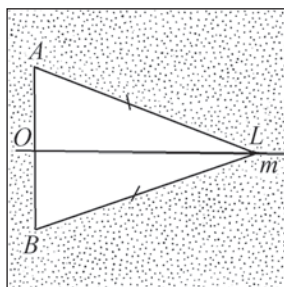
Доказательство.

1) Пусть прямая  $m$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ , точка  $O$  — середина отрезка  $AB$  (рис. 73, а).

Пусть точка  $F$  — произвольная точка серединного перпендикуляра. Докажем, что  $FA = FB$ . Если точка  $F$  совпадает с точкой  $O$ , то это равенство верно, так как точка  $O$  — середина отрезка  $AB$ . Пусть точка  $F$  не совпадает с точкой  $O$ . В этом случае треугольник  $AOF$  равен треугольнику  $BOF$  по первому признаку равенства треугольников ( $AO = OB$  по условию, сторона  $OF$  — общая,  $\angle AOF = \angle BOF = 90^\circ$ ). Отсюда следует, что  $AF = BF$ .



а)



б)

Рис. 73

2) Пусть точка  $L$  равноудалена от концов отрезка  $AB$ , т. е.  $AL = BL$  (рис. 73, б). Докажем, что точка  $L$  лежит на прямой  $m$ . Если точка  $L$  лежит на прямой  $AB$ , то она совпадает с серединой  $O$  отрезка  $AB$ , т. е. лежит на прямой  $m$ . Если точка  $L$  не лежит на прямой  $AB$ , то треугольник  $ALB$  равнобедренный. Отрезок  $LO$  — медиана этого треугольника, а сле-



довательно, и высота. Таким образом,  $LO \perp AB$ , а, значит, прямые  $LO$  и  $m$  совпадают. Отсюда вытекает, что точка  $L$  лежит на прямой  $m$ .

Теорема доказана.

### Вопросы к § 2

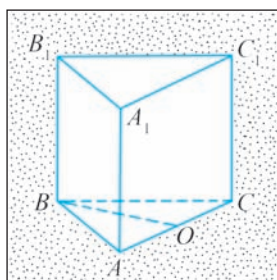
1. Какой отрезок называется перпендикуляром к прямой (наклонной к прямой)?
2. Сформулируйте теорему о единственности перпендикуляра к прямой.
3. Какой отрезок называется медианой (высотой, биссектрисой) треугольника?
4. Какой треугольник называется равнобедренным?
5. Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми, а какая — основанием?
6. Верно ли, что углы при основании равнобедренного треугольника равны?
7. Каким свойством обладает биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию?
8. Верно ли, что высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и биссектрисой?
9. Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?
10. Сформулируйте теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

### Задачи к § 2

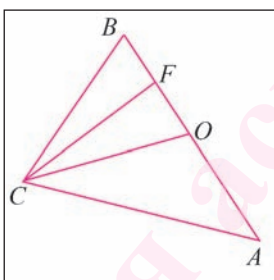
**129.** Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $p$ . Перпендикуляры  $AF$  и  $BK$  к прямой  $p$  равны, а точки  $F$  и  $K$  не совпадают. Докажите, что треугольники  $AFK$  и  $BKF$  равны.

**130.** На рисунке 74, а изображена медиана  $BO$  треугольника  $ABC$ , служащего основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . Чему равна длина отрезка  $CO$ , если  $AC = 10$  см?

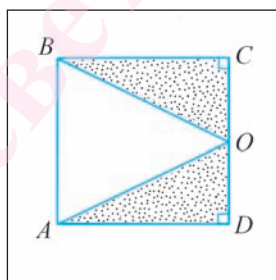
**131.** Отрезок  $CO$  — медиана треугольника  $ABC$ , а отрезок  $CF$  — медиана треугольника  $OCB$ . Чему равна длина стороны  $AB$  треугольника, если  $BF = 3$  см (рис. 74, б)?



а)



б)



в)

Рис. 74

**132.** Отрезок  $AO$  — медиана треугольника  $ABC$ , точка  $F$  лежит на луче  $AO$  так, что  $AO = OF$ . Докажите, что треугольник  $AOB$  равен треугольнику  $FOC$ .

**133.** В треугольнике  $ABC$  отрезок  $AF$  — медиана. Точка  $K$  лежит на луче  $AF$  так, что  $AF = FK$ . Вычислите градусную меру угла  $ACK$ , если известно, что  $\angle ACB = 20^\circ$ ,  $\angle ABC = 2\angle ACB$ .

**134.**  $ABC$  и  $ACD$  — равнобедренные треугольники с основаниями  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $AB = AD$ .

**135.** Точка  $O$  — середина стороны  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Докажите, что треугольник  $BOA$  является равнобедренным (рис. 74, в).

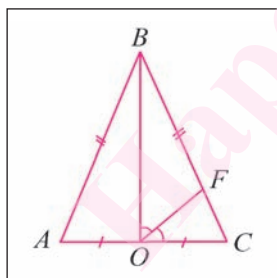
**136.** Точки  $F$  и  $T$  — середины сторон  $AB$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$  соответственно. Докажите, что треугольник  $CFT$  равнобедренный.

**137.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны, а отрезок  $BF$  — его медиана. Вычислите градусную меру угла  $ABC$ , если  $\angle ABF = 40^\circ$ .

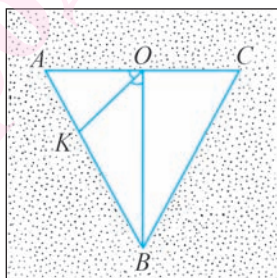
**138.** На рисунке 75, а изображен равнобедренный треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = BC$ ,  $AO = OC$ . Отрезок  $OF$  — биссектриса треугольника  $BOC$ . Вычислите градусную меру угла  $AOF$ .

**139.** На рисунке 75, б  $AB = BC$ , отрезок  $OK$  — биссектриса треугольника  $AOB$ . Докажите, что отрезок  $BO$  — биссектриса треугольника  $ABC$ , если  $\angle KOC = 135^\circ$ .

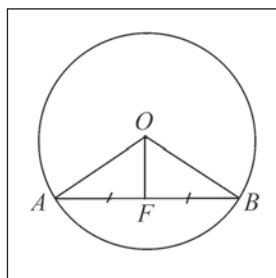
**140.** Отрезок  $AB$  — хорда окружности с центром в точке  $O$ , а точка  $F$  — середина данной хорды (рис. 75, в). Верно ли, что отрезок  $OF$  — биссектриса треугольника  $AOB$ ?



а)



б)



в)

Рис. 75

**141.** Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см, а длина боковой стороны равна 12 см. Вычислите длину основания этого треугольника.

142. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника на 2 см больше длины его основания. Вычислите длины сторон треугольника, если его периметр равен 34 см.

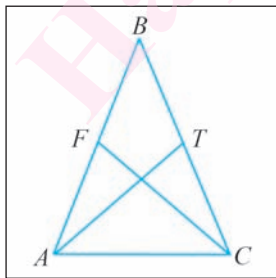
143. В равнобедренном треугольнике основание в три раза меньше боковой стороны, а периметр равен 70 см. Вычислите длины сторон треугольника.

144. Отрезок  $AF$  — медиана равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$ . Вычислите длину медианы  $AF$ , если периметр треугольника  $ABC$  равен 16 см, а периметр треугольника  $AFB$  равен 12 см.

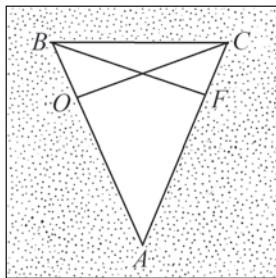
145. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны, отрезки  $AT$  и  $CF$  — медианы треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle AFC = \triangle CTA$  (рис. 76, а).

146.  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ . Точки  $O$  и  $F$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $AC$  так, что  $AO = AF$ . Докажите, что угол  $BOC$  равен углу  $CFB$  (рис. 76, б).

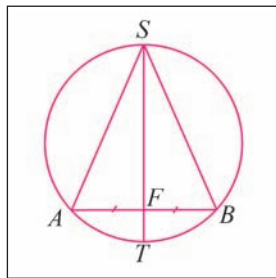
147. Диаметр  $ST$  проходит через середину  $F$  хорды  $AB$ . Докажите, что треугольник  $ASB$  является равнобедренным (рис. 76, в).



а)



б)



в)

Рис. 76

**148.** Точки  $O$  и  $F$  лежат на основании  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $BO = CF$ . Докажите, что треугольник  $OAF$  равнобедренный.

**149.** Точки  $F$  и  $T$  лежат на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $BF = TC$  и  $AF = AT$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

**150.** Серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $F$ . Вычислите длины отрезков  $AF$  и  $FC$ , если  $BF = 5$  см, а  $AC = 12$  см.

**151.** Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Вычислите длину основания  $AC$  треугольника, если периметр треугольника  $AFC$  равен 26 см, а  $CB = 18$  см.

**152.** Серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $O$ . Докажите, что  $\angle OBC = \angle OCB$ .

**153.** Серединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , которая лежит на стороне  $BC$ . Докажите, что  $BO = OC$ .

**154.** Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

**155.** Точка  $O$  лежит внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  так, что  $\angle ABO = \angle CBO$ . Докажите, что треугольник  $AOC$  равнобедренный.

**156.** Серединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , которая лежит на стороне  $BC$ . Докажите, что  $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$ .

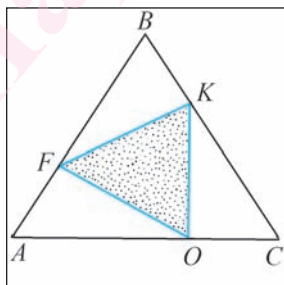
**157.** Точки  $O$  и  $F$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $CB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $AO = CF$ . Докажите, что  $\angle COB = \angle AFB$ .

**158.** Точка  $E$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $AE = EC$ , а точка  $D$  — на луче, противоположном лучу  $EA$ , так, что  $BE = ED$ . Докажите, что  $\angle ACD = \angle CAB$ .

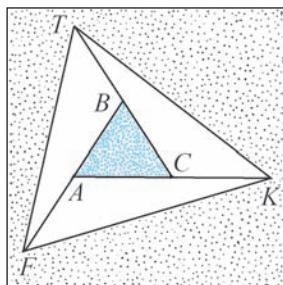
**159.** Серединный перпендикуляр  $l$  к отрезку  $AB$  пересекает прямую  $FB$  в точке  $O$  так, что точка  $O$  лежит между точками  $F$  и  $B$ . Докажите, что биссектриса угла  $FOA$  перпендикулярна прямой  $l$ .

**160.** Точки  $F$ ,  $K$  и  $O$  лежат соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  так, что  $FB = 2AF$ ,  $KC = 2BK$ ,  $OA = 2CO$ . Докажите, что треугольник  $FKO$  равносторонний (рис. 77, а).

**161\*.** Треугольник  $ABC$  равносторонний. Точки  $F$ ,  $K$  и  $T$  лежат на лучах, противоположных лучам  $AB$ ,  $CA$  и  $BC$  соответственно, так, что точка  $A$  — середина отрезка  $BF$ , точка  $C$  — середина отрезка  $AK$  и точка  $B$  — середина отрезка  $CT$ . Докажите, что треугольник  $FTK$  является равносторонним (рис. 77, б).



а)



б)

Рис. 77

**162\*.** Равнобедренные треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных полуплоскостях, границей которых служит прямая  $AC$ . Докажите, что  $BD \perp AC$ .

**163\*.** Отрезок  $CT$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Точка  $F$  лежит на луче  $AC$  так, что точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $F$ , а  $CF = BC$ , отрезок  $CL$  — медиана треугольника  $BCF$ . Докажите, что  $CT \perp CL$ .



### § 3. Второй и третий признаки равенства треугольников

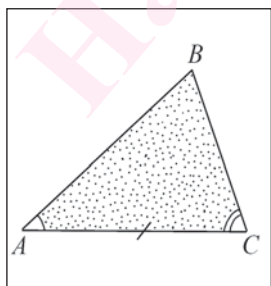
Рассмотрим еще два признака, позволяющих доказать равенство треугольников по равенству их соответствующих элементов.

**Теорема 1** (второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

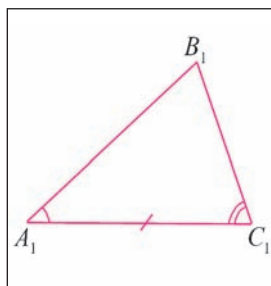
Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — два треугольника, у которых  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  и  $\angle C = \angle C_1$  (рис. 78, а, б). Докажем, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.

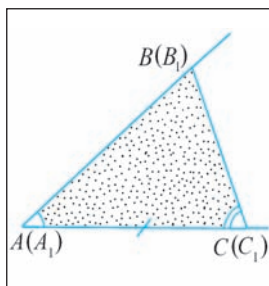
2) Отложим угол  $B_1A_1C_1$  в той полуплоскости с границей  $A_1C_1$ , в которой лежит угол  $BAC$ . Так как  $\angle A = \angle A_1$ , то на основании аксиомы откладывания угла в полуплоскость лучи  $A_1B_1$  и  $AB$  совпадут, а поскольку  $AC = A_1C_1$ , то по аксиоме откладывания отрезка на луче точка  $C_1$  совпадет с точкой  $C$ . Угол  $B_1C_1A_1$  будет отложен в ту же полуплоскость от луча  $CA$  и, согласно аксиоме откладывания угла в полуплоскость, лучи  $C_1B_1$  и  $CB$  совпадут (рис. 78, в).



а)



б)



в)

Рис. 78

3) Так как лучи  $A_1B_1$  и  $C_1B_1$  совпали соответственно с лучами  $AB$  и  $CB$ , то точка их пересечения  $B_1$  совпадает с точкой  $B$ . Следовательно, стороны и углы треугольника  $A_1B_1C_1$  совпадут со сторонами и углами треугольника  $ABC$ , а, значит,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2** (третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — два треугольника, у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  и  $CA = C_1A_1$ . Докажем, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

2) Отложим угол  $B_1A_1C_1$  в ту полуплоскость с границей  $AC$ , в которой не лежит  $\angle BAC$ , так, чтобы луч  $A_1C_1$  совпал с лучом  $AC$ . Так как  $CA = C_1A_1$ , то на основании аксиомы откладывания отрезка на луче точки  $C_1$  и  $C$  совпадут (рис. 79, а). Пусть  $F$  — точка пересечения отрезка  $BB_1$  и прямой  $AC$ . При этом возможны три случая: а) точка  $F$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ; б) точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $F$  (рис. 79, б); в) точка  $F$  совпадает с точкой  $C$  (рис. 79, в).

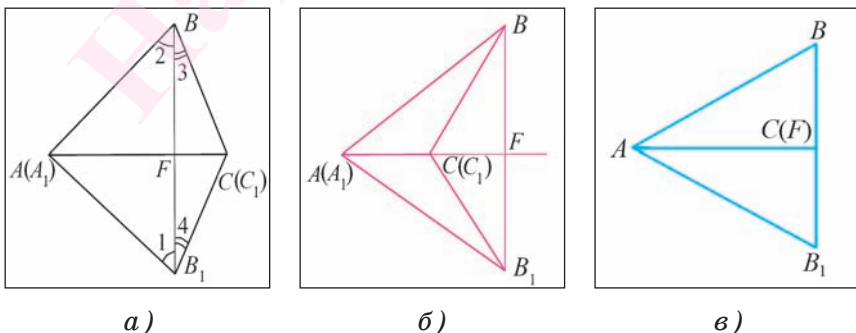
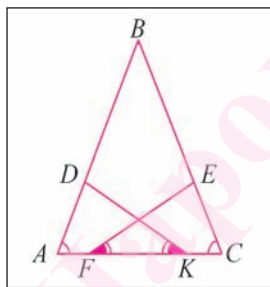


Рис. 79

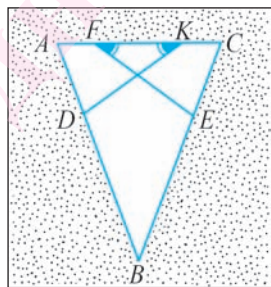
3) Проведем доказательство, когда точка  $F$  лежит между точками  $A$  и  $C$  (два других случая рассмотрите самостоятельно). По условию теоремы  $AB = A_1B_1$  и  $BC = B_1C_1$ , следовательно, треугольники  $BAB_1$  и  $BCB_1$  равнобедренные. Тогда по свойству углов при основании равнобедренного треугольника  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$ . Отсюда следует, что  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ . Таким образом,  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  и  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ , а, значит, по первому признаку равенства треугольников  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Теорема доказана.

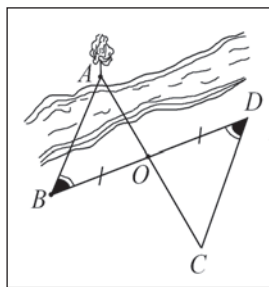
**Задача 1.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  точки  $F$  и  $K$  лежат на основании  $AC$  так, что  $AF = KC$  (рис. 80, а, б), а точки  $D$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $CB$  так, что  $\angle AKD = \angle EFC$ . Докажите, что  $AD = CE$ .



а)



б)



в)

Рис. 80

**Решение.**

1) Так как треугольник  $ABC$  равнобедренный и  $AB = BC$ , то его углы при основании равны, т. е.  $\angle A = \angle C$ .

2) Рассмотрим треугольники  $ADK$  и  $CEF$ . Прежде всего, заметим, что  $AK = AC - KC$  и  $CF = AC - AF$ ,

а так как по условию  $AF = KC$ , то  $AK = CF$ . Кроме того,  $\angle AKD = \angle EFC$ .

3) Таким образом, сторона  $AK$  и два прилежащих к ней угла треугольника  $ADK$  равны соответственно стороне  $CF$  и двум прилежащим к ней углам треугольника  $CEF$ . На основании второго признака равенства треугольников получим, что  $\triangle ADK = \triangle CEF$ . Отсюда следует, что  $AD = CE$ , что и требовалось доказать.

**Второй признак равенства треугольников можно применять при решении задач практического характера.** Рассмотрим пример решения такой задачи.

**Задача 2.** Найдите расстояние от точки  $B$  до дерева, расположенного на противоположном берегу реки (рис. 80, в).

Решение.

1) Отметим на местности точки  $O$ ,  $D$  и  $C$  так, чтобы точка  $O$  была серединой отрезка  $BD$ , а  $\angle BDC$  был равен  $\angle ABO$ . Тогда искомое расстояние равно расстоянию между точками  $C$  и  $D$ .

2) Действительно,  $\triangle AOB = \triangle COD$  по стороне и двум прилежащим к ней углам, так как  $BO = OD$  и  $\angle D = \angle B$  по построению, а углы  $AOB$  и  $COD$  равны, т. к. являются вертикальными. Из равенства треугольников следует, что  $AB = CD$ . Таким образом, для нахождения расстояния  $AB$  достаточно измерить расстояние  $CD$ .

### Вопросы к § 3

1. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

2. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

3. В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ . Верно ли, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны?

### Задачи к § 3

164. Точки  $F$  и  $T$  лежат на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$  и в разных полуплоскостях относительно прямой  $AB$ . Верно ли, что  $\triangle AOF = \triangle BOT$ , если  $\angle FAO = \angle TBO$ ? Ответ поясните (рис. 81, а).

165. Точки  $F$  и  $T$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  так, что  $\angle TBC = \angle FDA$ . Поясните, почему треугольники  $CBT$  и  $ADF$  равны (рис. 81, б).

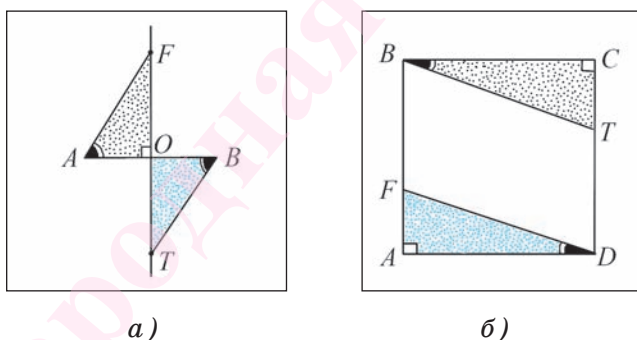


Рис. 81

166. Точка  $F$  — середина основания  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ , а точки  $E$  и  $D$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  так, что  $\angle AFE = \angle CFD$ . Докажите, что треугольник  $AFE$  равен треугольнику  $CFD$ .

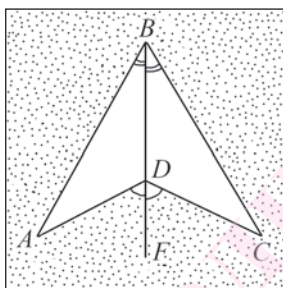
167. Точки  $O$  и  $F$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $AO = CF$ . Точка  $D$  лежит на осно-

вании  $AC$  так, что  $\angle AOD = \angle CFD$ . Докажите, что  $\triangle AOD = \triangle CFD$ .

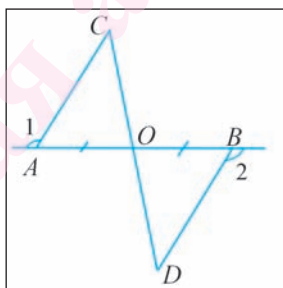
**168.** Отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ , которая является серединой отрезка  $AB$ , а  $\angle OAD = \angle OBC$ . Докажите, что  $\triangle CBO = \triangle DAO$ . Чему равна длина отрезка  $BC$ , если  $AD = 10$  см?

**169.** На рисунке 82, а луч  $BF$  — биссектриса угла  $ABC$ , а  $\angle ADF = \angle CDF$ ,  $D \in BF$ . Вычислите длину отрезка  $BC$ , если  $AB = 3$  см.

**170.** На рисунке 82, б точка  $O$  — середина отрезка  $AB$ , а  $\angle 1 = \angle 2$ . Докажите, что  $\angle ACO = \angle BDO$ .



а)



б)

Рис. 82

**171.** Точка  $O$  лежит на биссектрисе угла  $A$ , а точки  $B$  и  $C$  лежат на его сторонах так, что  $\angle AOB = \angle AOC$ . Докажите, что  $BO = CO$ .

**172.** Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла  $O$ , пересекает его стороны в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что треугольник  $OAB$  равнобедренный.

**173.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  проведены биссектрисы  $AF$  и  $CR$ . Докажите, что  $BF = BR$ .

**174.** Точки  $F$  и  $E$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $\angle BAE = \angle FCB$ . Докажите, что  $AF = CE$ .

**175.** Треугольники  $ABD$  и  $ACD$  с общей стороной  $AD$  расположены в плоскости так, что их стороны  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ , при этом  $AO = OD$  и  $\angle BAO = \angle CDO$ . Вычислите градусную меру угла  $ABD$ , если  $\angle ACD = 40^\circ$ .

**176.** На рисунке 83, а  $\angle DBC = \angle CAD$ ,  $BO = AO$ . Докажите, что  $AC = BD$ .

**177.** На рисунке 83, б треугольник  $BOC$  равнобедренный и  $AC = DB$ . Докажите, что  $AB = DC$ .

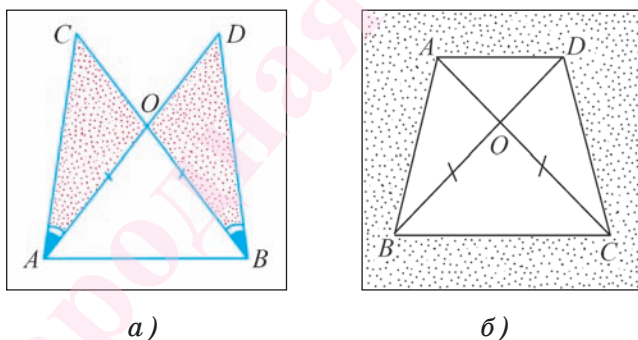


Рис. 83

**178.** Два треугольника  $ABD$  и  $ACD$  с общей стороной  $AD$  расположены в плоскости так, что стороны  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOD$  равнобедренный, если  $BO = CO$  и  $\angle ABD = \angle DCA$ .

**179.** Отрезок  $AC$  — общее основание равнобедренных треугольников  $ABC$  и  $ADC$ . Докажите, что треугольник  $BAD$  равен треугольнику  $BCD$ .



**180.** Треугольники  $ABD$  и  $ACD$  с общей стороной  $AD$  расположены в плоскости так, что их стороны  $BD$  и  $AC$  пересекаются в точке  $O$ . При этом  $AB = CD$  и  $AC = BD$ . Докажите, что  $\angle OAD = \angle ODA$ .

**181.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  медианы  $BF$  и  $B_1F_1$  равны,  $AB = A_1B_1$  и  $AC = A_1C_1$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .

**182.** Биссектрисы  $AD$  и  $A_1D_1$  треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны,  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.

**183.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  лежат соответственно точки  $O$  и  $F$  так, что  $\angle ACO = \angle CAF$ . Докажите, что треугольник  $OBF$  равнобедренный.

**184.** Отрезки  $AE$  и  $CD$  — биссектрисы равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ . Докажите, что треугольники  $ADC$  и  $CEA$  равны.

**185.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно лежат точки  $O$  и  $F$  так, что  $AO = CF$ . Отрезки  $CO$  и  $AF$  пересекаются в точке  $S$ . Докажите, что треугольник  $ASC$  равнобедренный.

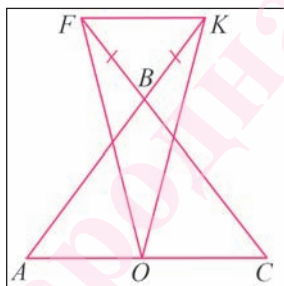
**186.** В  $\triangle ABC$  отрезки  $BO$  и  $BF$  — медиана и высота соответственно,  $\angle BAC = 20^\circ$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ . Точка  $T$  лежит на луче  $BO$  так, что  $BO = OT$ , а точка  $P$  лежит на луче  $BF$  так, что  $BF = FP$ . Вычислите градусную меру угла  $TAP$ .

**187.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  отрезки  $CF$  и  $C_1F_1$  — медианы,  $BC = B_1C_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$  и  $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ . Докажите, что треугольник  $ACF$  равен треугольнику  $A_1C_1F_1$ .

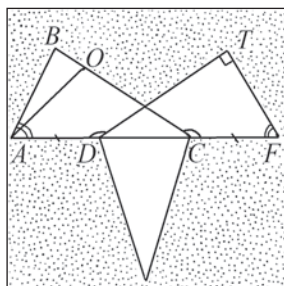
**188.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и  $\angle C = \angle C_1$ . Биссектрисы  $BK$  и  $AF$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , а биссектрисы  $B_1K_1$  и  $A_1F_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  — в точке  $O_1$ . Докажите, что треугольник  $ABO$  равен треугольнику  $A_1B_1O_1$ .

**189\*.**  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $AC$ . Вне треугольника соответственно на лучах  $AB$  и  $CB$  лежат точки  $K$  и  $F$  так, что  $BK = BF$ , точка  $O$  — середина основания. Докажите, что треугольник  $FKO$  является равнобедренным (рис. 84, а).

**190\*.** На рисунке 84, б  $\angle BAC = \angle TFD$ ,  $\angle ADT = \angle FCB$ ,  $AD = CF$ ,  $\angle DTF = 90^\circ$ ,  $TF = 35$  см. Вычислите высоту треугольника  $AOC$ , проведенную из вершины  $A$ .



а)



б)

Рис. 84

**191\*.** Отрезки  $AD$  и  $A_1D_1$  — биссектрисы треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно. Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны, если известно, что  $AB = A_1B_1$ ,  $BD = B_1D_1$  и  $AD = A_1D_1$ .

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ



## Глава 4

### ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

#### § 1. Признаки параллельности прямых

**1. Параллельные прямые, лучи, отрезки.** Ранее мы уже дали определение параллельных прямых.

Напомним, что *две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

Например, если две прямые  $a$  и  $b$  плоскости перпендикулярны прямой  $c$  этой плоскости, то они не пересекаются, т. е. параллельны (рис. 85, а). Этот факт нами был доказан в § 2 третьей главы как следствие из теоремы о существовании и единственности перпендикуляра, проведенного из точки к данной прямой.

*Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.*

Отрезок называется параллельным прямой, если он лежит на прямой, параллельной данной прямой.

Например, на рисунке 85, б изображены параллельные отрезки  $AB$  и  $CD$  (параллельность отрезков  $AB$  и  $CD$  обозначается следующим образом:  $AB \parallel CD$ ). Отрезки  $EF$  и  $AB$  не параллельны (это обозначается так:  $EF \nparallel AB$ ).

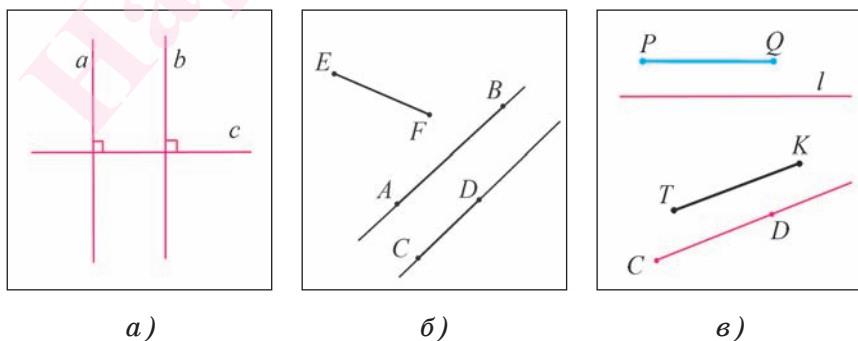


Рис. 85

Аналогично определяется параллельность двух лучей, отрезка и прямой, луча и прямой, а также отрезка и луча. Например, на рисунке 85, *в* изображены отрезок  $PQ$ , параллельный прямой  $l$ , и отрезок  $TK$ , параллельный лучу  $CD$ .

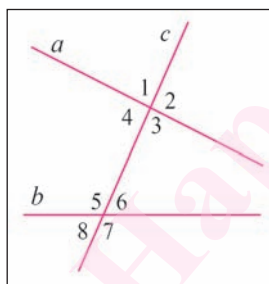
**2. Признаки параллельности двух прямых.** Прямая  $c$  называется *секущей* по отношению к прямым  $a$  и  $b$ , если она пересекает каждую из них в различных точках.

При пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  образуется восемь углов, которые на рисунке 86, *а* обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальное название:

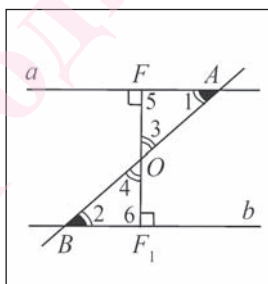
1) углы 3 и 5, 4 и 6 называются *внутренними накрест лежащими*;

2) углы 4 и 5, 3 и 6 называются *внутренними односторонними*;

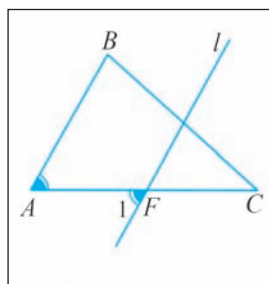
3) углы 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7 называются *соответственными*.



а)



б)



в)

Рис. 86

Рассмотрим признаки параллельности двух прямых.

**Теорема 1** (*признак параллельности прямых по равенству внутренних накрест лежащих углов*).

*Если при пересечении двух прямых секущей вну-*

**твенные накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.**

Доказательство.

1) Пусть при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $AB$  внутренние накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 86, б). Докажем, что  $a \parallel b$ .

2) Если  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ , то  $a \perp AB$  и  $b \perp AB$ . Отсюда в силу теоремы 1 (глава 3, § 2) следует, что  $a \parallel b$ .

3) Если  $\angle 1 = \angle 2 \neq 90^\circ$ , то из середины  $O$  отрезка  $AB$  проведем отрезок  $OF \perp a$ .

4) На прямой  $b$  отложим отрезок  $BF_1 = AF$  и проведем отрезок  $OF_1$ .

5) Заметим, что  $\triangle OFA = \triangle OF_1B$  по двум сторонам и углу между ними ( $AO = BO$ ,  $AF = BF_1$  и  $\angle 1 = \angle 2$ ). Из равенства этих треугольников следует, что  $\angle 3 = \angle 4$  и  $\angle 5 = \angle 6$ .

6) Так как  $\angle 3 = \angle 4$ , а точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  лежат на одной прямой, то точки  $F_1$ ,  $F$  и  $O$  также лежат на одной прямой.

7) Из равенства  $\angle 5 = \angle 6$  следует, что  $\angle 6 = 90^\circ$ . Получаем, что  $a \perp FF_1$  и  $b \perp FF_1$ , а  $a \parallel b$ .

Теорема доказана.

Например, пусть прямая  $l$  проходит через точку  $F$ , принадлежащую стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , так, что  $\angle 1$  равен углу  $BAC$ . Тогда сторона  $AB$  параллельна прямой  $l$ , так как по теореме 1 данного параграфа прямые  $AB$  и  $l$  параллельны (рис. 86, в).

**Теорема 2 (признак параллельности прямых по равенству соответственных углов).** *Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.*

Доказательство.

1) Пусть при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  соответственные углы равны, например  $\angle 1 = \angle 2$ . Докажем, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны (рис. 87, а).

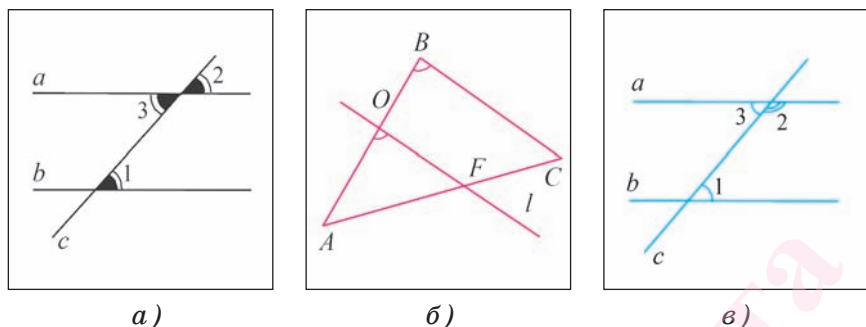


Рис. 87

2) Заметим, что  $\angle 2 = \angle 3$  как вертикальные углы.

3) Из равенств  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 2 = \angle 3$  следует, что  $\angle 1 = \angle 3$ . А поскольку углы 1 и 3 являются внутренними накрест лежащими углами, образованными при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$ , то в силу теоремы 1 получаем, что  $a \parallel b$ .

Теорема доказана.

Например, пусть прямая  $l$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $O$  и  $F$  соответственно и  $\angle AOF = \angle ABC$ . Тогда сторона  $BC$  параллельна прямой  $l$ , так как по теореме 2 прямые  $l$  и  $BC$  параллельны (рис. 87, б).

**Теорема 3 (признак параллельности прямых по сумме градусных мер внутренних односторонних углов).** Если при пересечении двух прямых секущей сумма градусных мер внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ , то прямые параллельны.

Доказательство.

1) Пусть при пересечении двух прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  сумма градусных мер внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ , например  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (рис. 87, в).

2) Заметим, что  $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ , так как углы 3 и 2 являются смежными.



3) Из равенств  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  и  $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$  следует, что  $\angle 1 = \angle 3$ .

4) Поскольку равны внутренние накрест лежащие углы 1 и 3, то прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

Теорема доказана.

### Вопросы к § 1

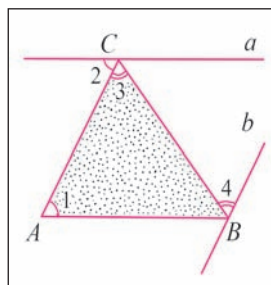
1. Какие прямые называются параллельными?
2. Охарактеризуйте взаимное расположение на плоскости двух прямых, которые перпендикулярны третьей прямой.
3. Верно ли, что отрезки параллельны, если они не пересекаются?
4. Верно ли, что прямая называется секущей по отношению к двум другим прямым, если она пересекает каждую из этих прямых?
5. Внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей, равны. Охарактеризуйте взаимное расположение прямых  $a$  и  $b$ .
6. Соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых  $a$  и  $b$  секущей, равны. Верно ли, что в этом случае прямые  $a$  и  $b$  параллельны?
7. Какому условию должны удовлетворять внутренние односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы эти прямые были параллельны?

### Задачи к § 1

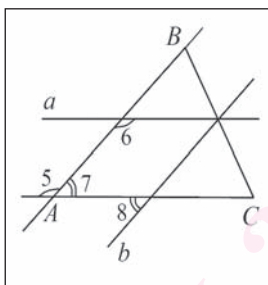
192. На рисунке 88,  $a$  прямые  $a$  и  $b$  проходят соответственно через вершины  $C$  и  $B$  треугольника  $ABC$ . Известно, что  $\angle 1 = \angle 2$ , а  $\angle 3 = \angle 4$ . а) Верно ли, что прямые  $a$  и  $AB$  параллельны? б) Докажите, что прямая  $b$  параллельна прямой  $AC$ .

**193.** На рисунке 88, б прямые  $a$  и  $b$  пересекают стороны треугольника  $ABC$  так, что  $\angle 5 = \angle 6$ , а  $\angle 7 = \angle 8$ . а) Докажите, что прямые  $a$  и  $AC$  параллельны. б) Верно ли, что  $b \parallel AB$ ?

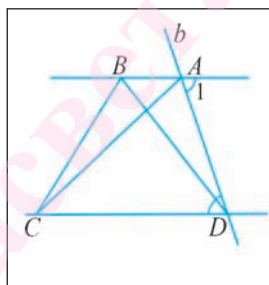
**194.** На рисунке 88, в прямая  $b$  проходит через точки  $A$  и  $D$  так, что  $\angle 1 = \angle ADC$ . Верно ли, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны?



а)



б)



в)

Рис. 88

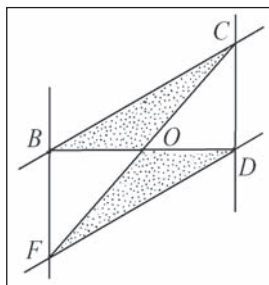
**195.** Прямая  $b$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $F$  и  $T$  так, что  $\angle BFT = \angle BAC$ . Докажите, что прямые  $FT$  и  $AC$  параллельны.

**196.** Прямая  $b$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $E$  и  $F$  так, что  $\angle EFB$  равен углу, который является вертикальным для угла  $BCA$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $AC$  параллельны.

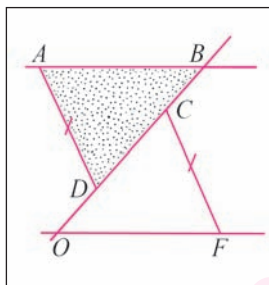
**197.** На рисунке 89, а отрезок  $BO$  равен отрезку  $OD$  и точка  $O$  — середина отрезка  $CF$ . а) Докажите, что прямые  $BC$  и  $FD$  параллельны. б) Верно ли, что прямые  $BF$  и  $CD$  параллельны?

**198.** На рисунке 89, б изображены равные треугольники  $ABD$  и  $FOC$ , у которых  $AD = CF$ . Докажите, что прямая  $AB$  параллельна прямой  $OF$ .

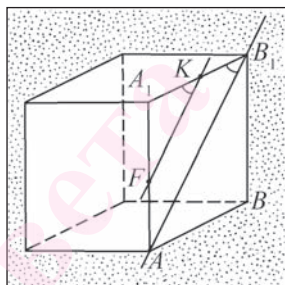
**199.** На рисунке 89, в изображены параллелепипед и прямая  $FK$ , которая лежит в плоскости его грани  $AA_1B_1B$  так, что  $\angle A_1KF = \angle A_1B_1A$ . Докажите, что прямая  $FK$  параллельна прямой  $AB_1$ .



а)



б)



в)

Рис. 89

**200.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны, а  $\angle BAC = 60^\circ$ , луч  $CF$  — биссектриса угла, смежного с углом  $ACB$ . Докажите, что прямая  $AB$  параллельна прямой  $CF$ .

**201.** Отрезок  $BF$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Через точку  $F$  проведена прямая, пересекающая сторону  $BC$  в точке  $O$  так, что  $BO = OF$ . Докажите, что  $FO \parallel AB$ .

**202.** В треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $A$  равна  $50^\circ$ , а градусная мера угла  $BCF$ , смежного с углом  $ACB$ , равна  $100^\circ$ . Докажите, что биссектриса угла  $BCF$  параллельна прямой  $AB$ .

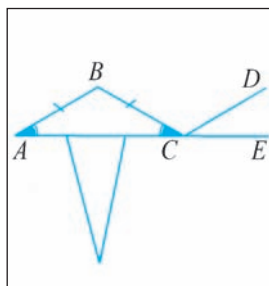
**203.** В треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $A$  равна  $30^\circ$ , а  $\angle B = 75^\circ$ . Через вершину  $B$  проведена прямая  $BD$  так, что луч  $BC$  является биссектрисой угла  $ABD$ . Докажите, что прямые  $BD$  и  $AC$  параллельны.

**204.** Отрезки  $AB$  и  $BC$  — боковые стороны равнобедренного треугольника  $ABC$ , у которого  $\angle A = 30^\circ$ .

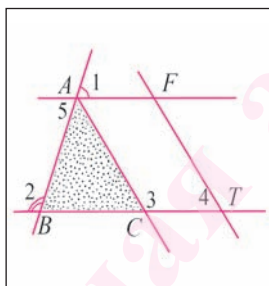
Луч  $CD$  проведен так, что  $\angle BCE = 5\angle DCE$  (рис. 90, а). Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.

**205.** На рисунке 90, б  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  и  $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ . а) Верно ли, что прямые  $AC$  и  $FT$  параллельны? б) Докажите, что прямые  $AF$  и  $BC$  параллельны.

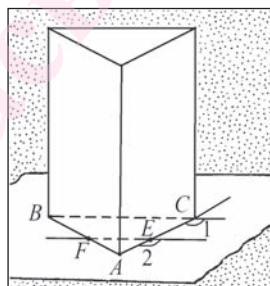
**206.** На рисунке 90, в изображены треугольная призма и прямая  $FE$ , которая лежит в плоскости ее основания так, что  $\angle 1 = \angle 2$ . Докажите, что прямые  $BC$  и  $FE$  параллельны.



а)



б)



в)

Рис. 90

**207.** Отрезок  $AB$  — основание равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точки  $F$  и  $Q$  лежат соответственно на сторонах  $AC$  и  $BC$  так, что  $AF = FQ$  и  $\angle B = 2\angle QAB$ . Докажите, что прямая  $FQ$  параллельна прямой  $AB$ .

**208.** В треугольнике  $ABC$  отрезок  $BF$  — высота и  $AF = FC$ . Луч  $AD$  проходит так, что луч  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$ . Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.

**209.** На рисунке 91, а  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $BC = DE$  и  $AC = DF$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $EF$  параллельны.

**210.** На рисунке 91, б  $\angle 3 = \angle 4$ ,  $DE = BC$ ,  $EF = AC$ . Докажите, что прямая  $DE$  параллельна прямой  $BC$ .

**211.** На рисунке 91, в изображены параллелепипед и прямая  $OF$ , которая лежит в плоскости грани  $AA_1B_1B$ , причем  $\angle AB_1O + \angle FOB_1 = 180^\circ$ . Верно ли, что прямые  $AB_1$  и  $OF$  параллельны?

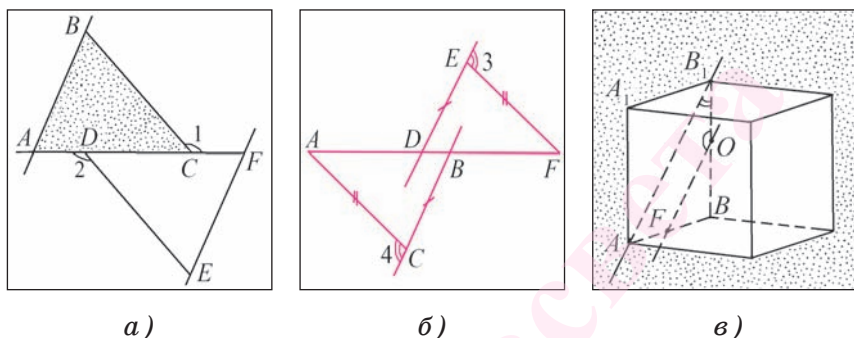


Рис. 91

**212.** Точки  $F$  и  $O$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $\angle BFO = \angle BAC$ , отрезки  $FT$  и  $AR$  — биссектрисы треугольников  $FBO$  и  $BAC$  соответственно. Докажите, что прямые  $FT$  и  $AR$  параллельны.

**213\*.** Отрезок  $AF$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AF$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $O$ . Докажите, что прямые  $OF$  и  $AC$  параллельны.

**214\*.** Отрезок  $CO$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Точка  $T$  лежит на стороне  $CA$  так, что  $CT = TO$ . Докажите, что прямые  $TO$  и  $BC$  параллельны.

**215\*.** Точки  $T$  и  $D$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $BT = BD$  и  $\angle BDA = \angle BTC$ . Луч  $AF$  лежит в полуплоскости с границей  $AC$ , которая не содержит треугольник, так, что  $AC$  — биссектриса угла  $BAF$ . Докажите, что  $AF \parallel BC$ .

## § 2. Свойства параллельных прямых

**1. Аксиома параллельных прямых.** Как уже отмечалось, при доказательстве теорем опираются на уже доказанные теоремы и некоторые исходные утверждения, которые называются *аксиомами*. Познакомимся еще с одной аксиомой, имеющей важное значение для дальнейшего построения геометрии.

Пусть в плоскости дана прямая  $a$  и не лежащая на ней произвольная точка  $O$ . Можно доказать, что через точку  $O$  в этой плоскости проходит прямая, параллельная прямой  $a$ . Действительно, проведем через точку  $O$  прямую  $c$ , перпендикулярную прямой  $a$ , затем прямую  $b$ , перпендикулярную прямой  $c$ .

Так как прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны прямой  $c$ , то они не пересекаются, т. е. параллельны (рис. 92).

Следовательно, через точку  $O \notin a$  проходит прямая  $b$ , параллельная прямой  $a$ . Возникает вопрос: сколько можно провести через точку  $O$  прямых, параллельных прямой  $a$ ? Ответ на него не является очевидным. Оказывается, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной прямой, не может быть доказано на основании остальных аксиом Евклида и само является аксиомой.

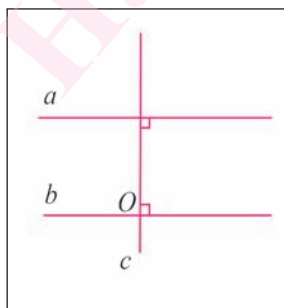


Рис. 92



Н. И. Лобачевский

Большой вклад в решение этого вопроса внес русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856).

Таким образом, в качестве одной из аксиом принимается *аксиома параллельных прямых*, которая формулируется следующим образом.

**Аксиома параллельных прямых.** *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Непосредственно из аксиомы параллельных прямых в качестве следствий получаем следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*

Доказательство.

Пусть прямые  $a$  и  $b$  параллельны прямой  $c$ . Докажем, что  $a \parallel b$  (рис. 93, а). Проведем доказательство этой теоремы методом от противного. Предположим, что верно утверждение, противоположное утверждению теоремы, т. е. допустим, что прямые  $a$  и  $b$  не параллельны, а, значит, пересекаются в некоторой точке  $O$ . Тогда через точку  $O$  проходят две прямые  $a$  и  $b$ , параллельные прямой  $c$ , что противоречит аксиоме параллельных прямых. Таким образом, наше предположение неверно, а, следовательно, прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

Теорема доказана.

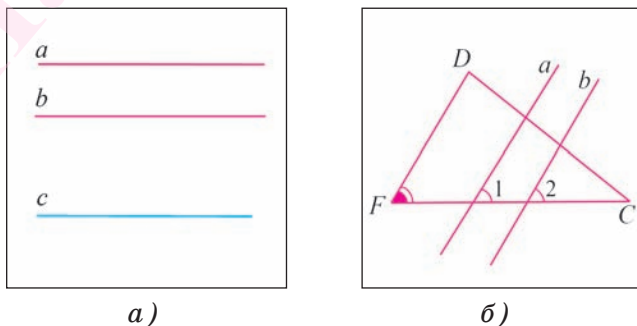


Рис. 93



Например, пусть прямые  $a$  и  $b$  пересекают сторону  $FC$  треугольника  $FDC$  так, что  $\angle 1 = \angle F$  и  $\angle 2 = \angle F$  (рис. 93, б). Тогда прямые  $a$  и  $b$  параллельны прямой  $FD$ , а, следовательно,  $a \parallel b$ .

**Теорема 2.** Пусть три прямые лежат в плоскости. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

Доказательство.

Пусть прямые  $a$  и  $b$  параллельны, а прямая  $c$  пересекает прямую  $a$  в точке  $O$  (рис. 94, а). Докажем, что прямая  $c$  пересекает прямую  $b$ . Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что прямая  $c$  не пересекает прямую  $b$ . Тогда через точку  $O$  проходят две прямые  $a$  и  $c$ , не пересекающие прямую  $b$ , т. е. параллельные ей (рис. 94, б). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, наше предположение неверно и прямая  $c$  пересекает прямую  $b$ .

Теорема доказана.

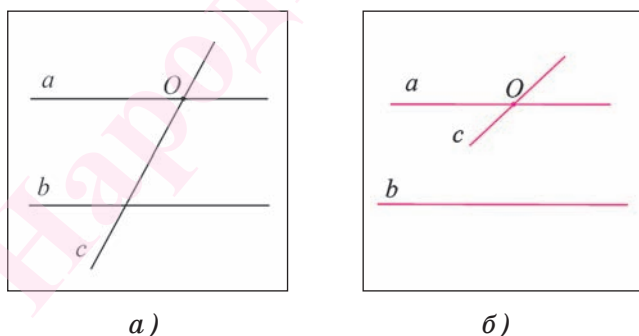


Рис. 94

## 2. Обратные теоремы. Свойства параллельных прямых.

В формулировке любой теоремы можно выделить две ее части: условие и заключение. Условие

теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать. Например, рассмотрим признак параллельности прямых: если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны (это дано), а заключением — вторая часть: прямые параллельны (это требуется доказать).

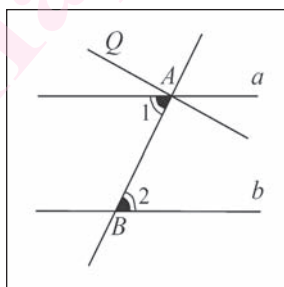
*Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы.*

Теперь докажем теоремы, обратные признакам параллельности прямых.

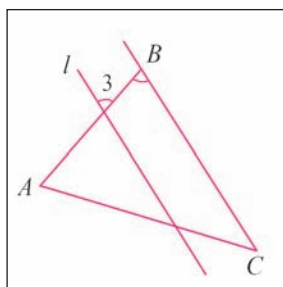
**Теорема 3** (о равенстве внутренних накрест лежащих углов). *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.*

Доказательство.

1) Пусть параллельные прямые  $a$  и  $b$  пересечены секущей  $AB$  (рис. 95, а). Докажем, что внутренние накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны.



а)



б)

Рис. 95

2) Доказательство теоремы проведем методом от противного. Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим угол  $QAB$ , равный углу 2, так, чтобы угол  $QAB$  и  $\angle 2$  были внутренними накрест лежащими при пересечении прямых  $AQ$  и  $b$  секущей  $AB$ .

3) По построению накрест лежащие углы  $QAB$  и  $\angle 2$  равны, поэтому по признаку параллельности прямых следует, что  $AQ \parallel b$ . Таким образом, получаем, что через точку  $A$  проходят две прямые  $AQ$  и  $a$ , параллельные прямой  $b$ , а это противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, наше предположение неверно, а, значит,  $\angle 1 = \angle 2$ .

Теорема доказана.

Например, пусть прямая  $l$  параллельна стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  (рис. 95, б). Тогда  $\angle 3 = \angle B$  как внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых  $l$  и  $BC$  секущей  $AB$ .

**Теорема 4** (о равенстве соответственных углов). *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.*

Доказательство.

1) Пусть параллельные прямые  $a$  и  $b$  пересечены секущей  $c$ . Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (рис. 96, а).

2) Так как прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то по теореме 3 данного параграфа накрест лежащие углы 1 и 3 равны, т. е.  $\angle 1 = \angle 3$ . Кроме того,  $\angle 2 = \angle 3$ , так как они вертикальные.

3) Из равенств  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle 2 = \angle 3$  следует, что  $\angle 1 = \angle 2$ .

Теорема доказана.

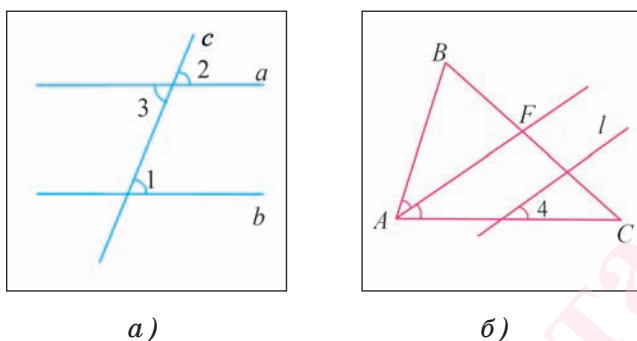


Рис. 96

Например, пусть прямая  $l$  параллельна биссектрисе  $AF$  треугольника  $ABC$  (рис. 96, б), тогда  $\angle 4 = \angle BAF$ . Действительно,  $\angle 4$  и  $\angle FAC$  равны как соответственные углы, а  $\angle FAC = \angle BAF$ , так как  $AF$  — биссектриса.

**Теорема 5** (о свойстве внутренних односторонних углов). *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма градусных мер внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ .*

**Доказательство.**

1) Пусть параллельные прямые  $a$  и  $b$  пересечены секущей  $c$ . Докажем, например, что  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (рис. 97, а).

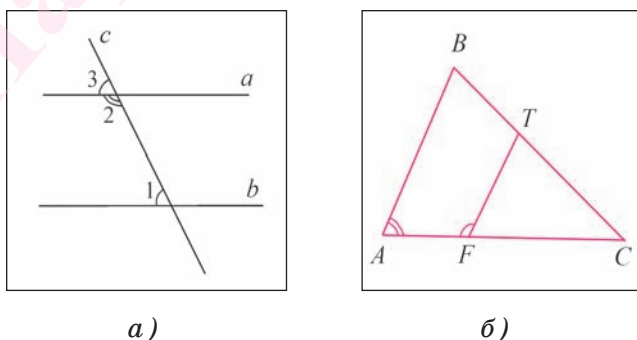


Рис. 97

2) Так как прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то по теореме 4 справедливо равенство  $\angle 1 = \angle 3$ .

3) Углы 2 и 3 смежные, следовательно,  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .

4) Из равенств  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$  следует, что  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ .

Теорема доказана.

Например, пусть отрезок  $FT$  параллелен стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 97, б). Тогда  $\angle BAF + \angle TFA = 180^\circ$ .

Заметим, если доказана какая-либо теорема, то отсюда еще не следует, что обратная теорема верна. Например, известно, что вертикальные углы равны, но если углы равны, то отсюда не вытекает, что они являются вертикальными.

**Задача.** Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

Доказательство.

1) Пусть прямые  $a$  и  $b$  параллельны и  $c \perp a$  (рис. 98).

2) Так как прямая  $c$  пересекает прямую  $a$ , то она пересекает и прямую  $b$ .

3) При пересечении параллельных прямых  $a$  и  $b$  секущей  $c$  образуются равные внутренние накрест лежащие углы 1 и 2.

Так как  $\angle 1 = 90^\circ$ , то и  $\angle 2 = \angle 1 = 90^\circ$ , а, значит,  $c \perp b$ .

Что и требовалось доказать.

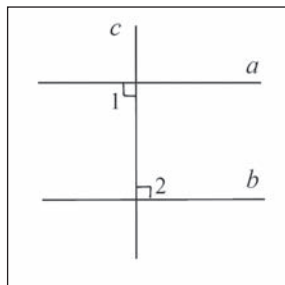


Рис. 98

### Вопросы к § 2

1. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

2. Верно ли, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой?

3. Справедливо ли утверждение о том, что если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны?

4. Каким свойством обладают соответственные углы, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей?

5. Верно ли, что при пересечении двух параллельных прямых секущей сумма градусных мер внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ ?

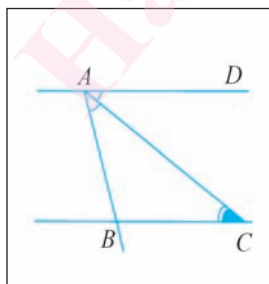
6. Справедливо ли утверждение о том, что если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой?

### Задачи к § 2

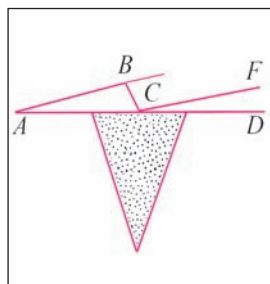
216. На рисунке 99, а прямая  $AD$  параллельна прямой  $BC$ ,  $AC$  — биссектриса угла  $BAD$ , а  $\angle ACB = 40^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $ABC$ .

217. На рисунке 99, б луч  $AB$  параллелен лучу  $CF$ , угол  $BAC$  равен  $30^\circ$ , а  $\angle BCD = 5\angle FCD$ . Вычислите градусную меру угла  $BCD$ .

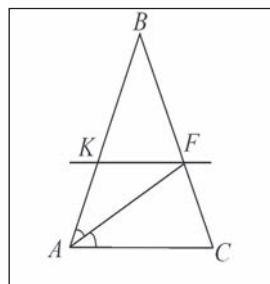
218. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  отрезок  $AC$  — его основание, а  $AF$  — биссектриса (рис. 99, в). Точка  $K$  лежит на стороне  $AB$  так, что  $KF \parallel AC$ ,  $\angle KFA = 28^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $ACB$ .



а)



б)



в)

Рис. 99

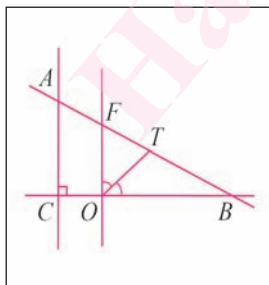
**219.** Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в четыре раза больше другого. Вычислите градусные меры этих углов.

**220.** Градусная мера одного из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, больше градусной меры другого на  $18^\circ$ . Вычислите градусные меры этих углов.

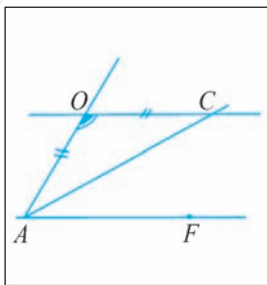
**221.** На рисунке 100, а прямая  $AC$  перпендикулярна прямой  $CB$ , а прямая  $OF$  параллельна прямой  $AC$ , отрезок  $OT$  — биссектриса треугольника  $FOB$ . Чему равна градусная мера угла  $TOB$ ?

**222.** На рисунке 100, б прямые  $OC$  и  $AF$  параллельны,  $AO = OC$  и  $\angle AOC = 120^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $CAF$ .

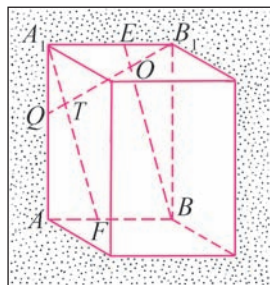
**223.** Прямые  $BE$  и  $A_1F$  лежат в плоскости грани  $AA_1B_1B$  параллелепипеда и параллельны, прямая  $B_1Q$  пересекает их в точках  $O$  и  $T$  соответственно, а угол  $B_1OE$  равен  $33^\circ$  (рис. 100, в). Вычислите градусную меру угла  $B_1TF$ .



а)



б)



в)

Рис. 100



**224.** Отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$  так, что  $AO = OB$  и  $AC \parallel BD$ . Докажите, что треугольники  $AOC$  и  $BOD$  равны.

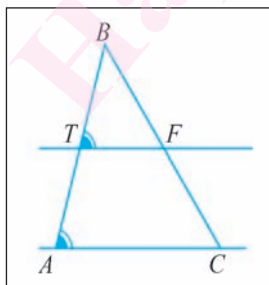
**225.** Концы отрезка  $AB$  лежат на параллельных прямых  $a$  и  $b$ . Прямая, проходящая через середину  $O$  этого отрезка, пересекает прямые  $a$  и  $b$  в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Докажите, что точка  $O$  — середина отрезка  $CD$ .

**226.** Точки  $F$  и  $E$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $AC \parallel FE$ . Отрезки  $FK$  и  $AT$  — биссектрисы треугольников  $BFE$  и  $BAC$ . Вычислите градусную меру угла  $BFK$ , если  $\angle ACB = 40^\circ$ .

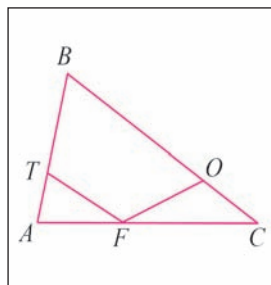
**227.** На рисунке 101, а  $\angle BTF = \angle BAC$  и  $\angle TFC = 130^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $BCA$ .

**228.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно взяты точки  $T$ ,  $O$  и  $F$  так, что  $\angle ATF = 55^\circ$  и  $\angle FOC = 118^\circ$  (рис. 101, б). Вычислите градусную меру угла  $TFO$ , если  $\angle ABC = 55^\circ$ .

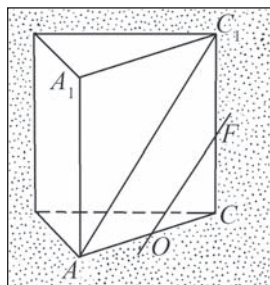
**229.** Прямая  $OF$  лежит в плоскости грани  $AA_1C_1C$  прямой треугольной призмы так, что  $\angle C_1AC = \angle FOC = 60^\circ$  (рис. 101, в). Вычислите градусную меру угла  $OFC_1$ , если  $\angle AC_1C = 30^\circ$ .



а)



б)



в)

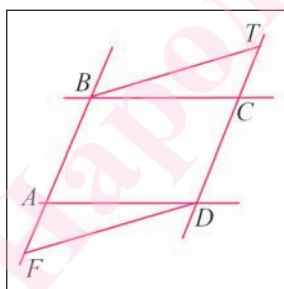
Рис. 101

**230.** Отрезок  $BF$  — высота равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ , точки  $O$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $BC$  и  $AC$  так, что  $\angle FBC = \angle EOC$ . Докажите, что  $OE \perp AC$ .

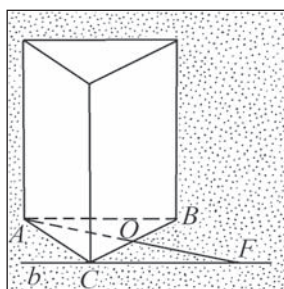
**231.** Прямая  $b$  проходит через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  и параллельна его стороне  $AC$ , точка  $O$  — середина стороны  $BC$ , и прямая  $AO$  пересекает прямую  $b$  в точке  $F$ . Докажите, что треугольник  $BOF$  равен треугольнику  $COA$ .

**232\*.** На рисунке 102, а  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $DF \parallel BT$ . Докажите, что треугольник  $FAD$  равен треугольнику  $TCB$ .

**233.** Прямая  $b$  лежит в плоскости основания  $ABC$  треугольной призмы, проходит через вершину  $C$  и параллельна прямой  $AB$ , точка  $O$  — середина отрезка  $CB$ , а точка  $F$  — точка пересечения прямых  $AO$  и  $b$  (рис. 102, б). Докажите, что треугольники  $AOB$  и  $FOC$  равны.



а)



б)

Рис. 102

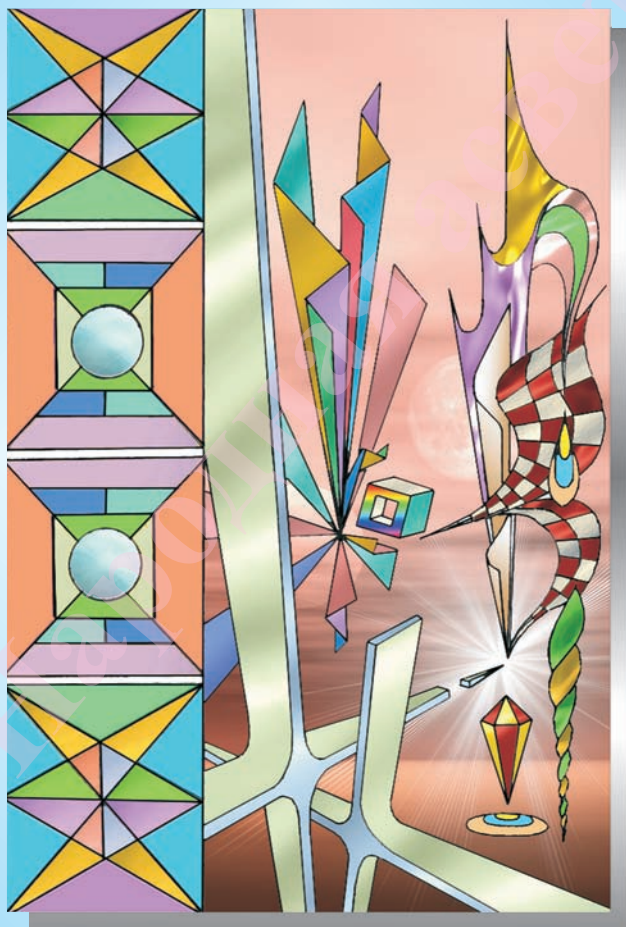
**234.** Прямые  $a$  и  $b$  являются параллельными. Точка  $A$  лежит на прямой  $a$ , а точки  $B$ ,  $O$  и  $C$  — на прямой  $b$ . Известно, что  $BO = OA = OC$ . Докажите, что  $AB \perp AC$ .

**235\*.** В разностороннем треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BO$ . Через вершину  $C$  проведена прямая, параллельная прямой  $BO$  и пересекающая прямую  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что треугольник  $BCF$  равнобедренный.

**236\*.** Точка  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , а точки  $F$  и  $T$  лежат на его стороне  $BC$  так, что  $OF \parallel AB$ ,  $OT \parallel AC$ ,  $OF = BF$  и  $OT = TC$ . Докажите, что биссектрисы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ .

**237\*.** Точки  $D$  и  $F$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что прямые  $DF$  и  $AC$  параллельны. Точка  $O$  лежит на отрезке  $DF$  так, что  $AD = DO$  и  $CF = FO$ . Докажите, что точка  $O$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ .

## СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА



## Глава 5

### СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

#### § 1. Сумма градусных мер углов треугольника. Внешний угол треугольника

Докажем теорему о сумме градусных мер углов треугольника.

**Теорема 1** (теорема о сумме градусных мер углов треугольника). *Сумма градусных мер углов треугольника равна  $180^\circ$ .*

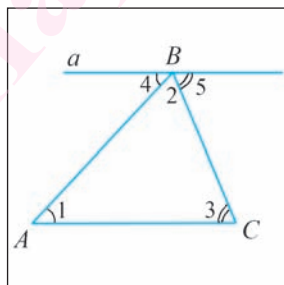
Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. Докажем, что  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ .

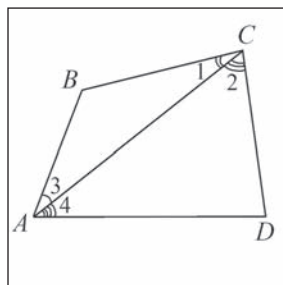
2) Проведем через вершину  $B$  прямую  $a$ , параллельную стороне  $AC$  (рис. 103, а).

3) Углы 1 и 4 являются внутренними накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых  $AC$  и  $a$  секущей  $AB$ , значит,  $\angle 1 = \angle 4$  (теорема 3, глава 4, § 2).

4) Углы 3 и 5 являются внутренними накрест лежащими углами, образованными при пересечении параллельных прямых  $AC$  и  $a$  секущей  $BC$ , следовательно,  $\angle 3 = \angle 5$ .



а)



б)

Рис. 103

5) Сумма градусных мер углов 4, 2 и 5 равна градусной мере развернутого угла с вершиной в точке  $B$ , т. е.  $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ . Но так как  $\angle 1 = \angle 4$  и  $\angle 3 = \angle 5$ , то получаем:  $\angle 3 + \angle 2 + \angle 1 = 180^\circ$ , т. е.  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ .

Теорема доказана.

Например, пусть  $ABC$  и  $ADC$  — два треугольника, имеющие общую сторону  $AC$  и лежащие в разных полуплоскостях с границей  $AC$ , тогда  $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^\circ$  (рис. 103, б). Действительно,  $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = \angle ABC + (\angle 1 + \angle 2) + \angle CDA + (\angle 3 + \angle 4) = (\angle ABC + \angle 1 + \angle 3) + (\angle CDA + \angle 2 + \angle 4) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ .

**Определение.** Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-либо углом треугольника.

Например,  $\angle 1$  — внешний угол треугольника  $ABC$ , смежный с углом  $BCA$ , а  $\angle 2$  — внешний угол, смежный с углом  $BAC$  (рис. 104, а).

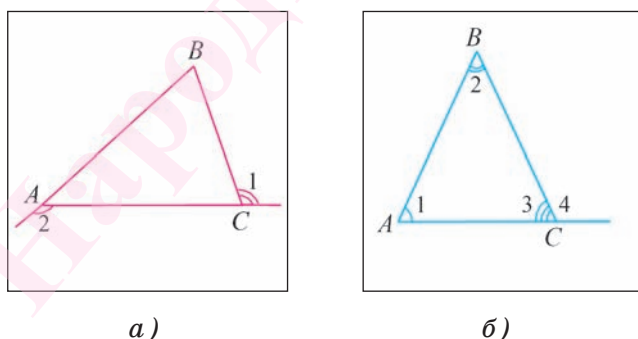


Рис. 104

**Теорема 2 (о внешнем угле треугольника).** Градусная мера внешнего угла треугольника равна сумме градусных мер двух углов треугольника, не смежных с ним.

Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. Докажем, например, что градусная мера внешнего угла 4 равна сумме градусных мер не смежных с ним углов 1 и 2 (рис. 104, б).

2) Так как сумма градусных мер углов 3 и 4 равна градусной мере развернутого угла, то  $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ , а по теореме о сумме градусных мер углов треугольника  $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180^\circ$ , следовательно,  $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ .

Теорема доказана.

Из теоремы о сумме градусных мер углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма градусных мер двух других углов не больше  $90^\circ$ , следовательно, каждый из них острый. Отсюда вытекает, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

Треугольник называется **остроугольным**, если все его углы острые (рис. 105, а). Треугольник называется **тупоугольным**, если один из его углов тупой (рис. 105, б). Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов прямой (рис. 105, в).

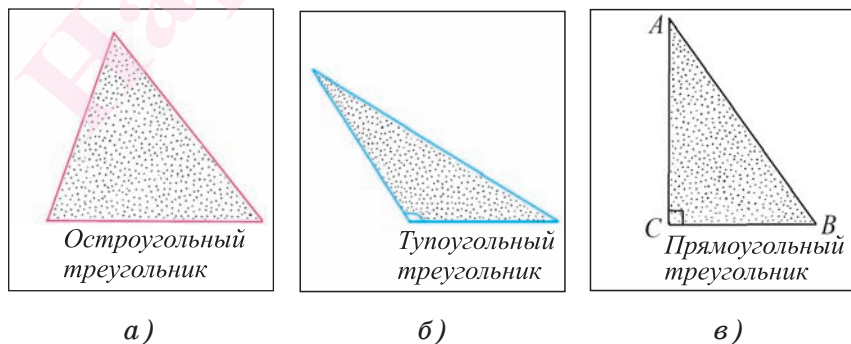


Рис. 105



Из определения прямоугольного треугольника и теоремы о сумме градусных мер углов треугольника следует, что *сумма градусных мер острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$* .

Стороны прямоугольного треугольника имеют специальное название. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами**. Например, на рисунке 105, в изображен прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Сторона  $AB$  этого треугольника является гипотенузой, а стороны  $AC$  и  $BC$  — катетами.

Две модели прямоугольного треугольника получаются, если лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, разрезать, как показано на рисунке 106, а.

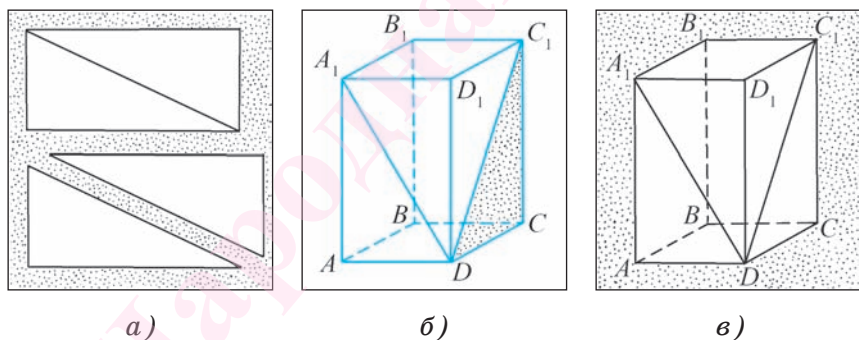


Рис. 106

На рисунке 106, б, в изображены прямоугольные треугольники  $A_1AD$  и  $DCC_1$ , которые содержатся соответственно в гранях  $AA_1D_1D$  и  $DD_1C_1C$  прямоугольного параллелепипеда.

## Вопросы к § 1

1. Верно ли, что сумма градусных мер углов треугольника равна  $180^\circ$ ?
2. Почему треугольник не может иметь двух прямых углов?
3. Может ли треугольник иметь два тупых угла?
4. Какой угол называется внешним углом треугольника?
5. Какой треугольник называется остроугольным (тупоугольным, прямоугольным)?

## Задачи к § 1

238. В треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $A$  равна  $62^\circ$ ,  $\angle B = 53^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $C$  этого треугольника.

239. В равнобедренном треугольнике угол при основании в четыре раза больше угла при вершине этого треугольника. Вычислите градусные меры углов этого треугольника.

240. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  отрезок  $BF$  является медианой. Вычислите градусные меры углов треугольника  $BFC$ , если  $\angle ABC = 40^\circ$ .

241. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  угол при его основании  $AC$  равен  $\alpha$ , отрезок  $BK$  — высота треугольника  $ABC$ . Найдите градусные меры углов треугольника  $BKC$ .

242. Докажите, что градусная мера каждого угла равностороннего треугольника равна  $60^\circ$ .

243. Отрезок  $AF$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ . Вычислите градусную меру угла  $AFC$ , если  $\angle B = 42^\circ$ .

**244.** Медиана  $AO$  треугольника  $ABC$  равна половине стороны  $BC$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

**245.** Точки  $F$  и  $K$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $FK \parallel AC$ . Вычислите градусную меру угла  $BFK$ , если  $\angle ABC = 120^\circ$ .

**246.** В треугольнике  $ABC$  биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $O$ . Вычислите градусную меру угла  $AOB$ , если  $\angle BAC = 48^\circ$ , а  $\angle ABC = 86^\circ$ .

**247.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $O$ . Вычислите градусную меру угла  $AOC$ , если  $\angle B = 20^\circ$ .

**248.** Прямая  $FB$  параллельна основанию  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Отрезок  $AQ$  — биссектриса треугольника  $ABC$  (рис. 107, а). Вычислите градусную меру угла  $AQC$ , если  $\angle ABF = 50^\circ$ .

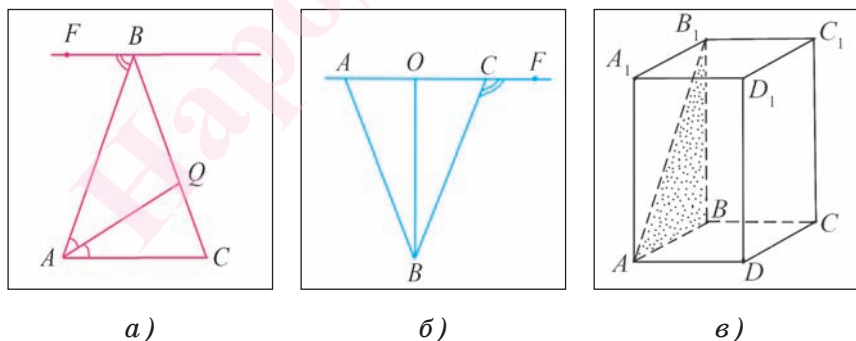


Рис. 107

**249.** На рисунке 107, б изображен равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ , точ-

ка  $O$  — середина отрезка  $AC$ . Вычислите градусные меры углов треугольника  $OBA$ , если  $\angle FCB = 110^\circ$ .

**250.** Прямоугольный треугольник  $ABB_1$  ( $\angle ABB_1 = 90^\circ$ ) расположен в боковой грани  $AA_1B_1B$  прямоугольного параллелепипеда, который изображен на рисунке 107, в. Чему равна градусная мера угла  $B_1AB$ , если  $\angle AB_1B = 30^\circ$ ?

**251\*.** Отрезок  $AC$  — диаметр окружности, точка  $B$  принадлежит этой окружности. Докажите, что  $\angle ABC = 90^\circ$ .

**252\*.** Вершины треугольника  $ABF$  лежат на окружности, отрезок  $AB$  — диаметр окружности. Вычислите градусные меры углов треугольника, если угол  $FAB$  в два раза больше угла  $FBA$ .

**253.** Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противоположной основанию, параллельна основанию.

**254.** Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  продолжена за точку  $B$ , и на продолжении отмечена точка  $D$  так, что  $BC = BD$ . Вычислите градусную меру угла  $ACD$ , если  $\angle ACB = 60^\circ$ , а  $\angle ABC = 40^\circ$ .

**255.** В треугольнике  $ABC$  биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $O$ ,  $\angle ABC = 32^\circ$ ,  $\angle AOB = 106^\circ$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  не является остроугольным.

**256\*.** На сторонах угла  $O$ , градусная мера которого равна  $46^\circ$ , лежат точки  $A$  и  $B$ , а во внутренней области угла — точка  $F$ . Вычислите градусную меру угла  $AFB$ , если  $\angle OAF = 94^\circ$ , а  $\angle OBF = 90^\circ$ .

**257.** В треугольнике  $ACB$  градусная мера угла  $C$  равна  $60^\circ$ . Внутри треугольника лежит точка  $O$ , равноудаленная от его вершин. Докажите, что треугольник  $AOB$  тупоугольный.

**258.** Треугольники  $ABC$  и  $DAC$  расположены так, что отрезки  $BD$  и  $AC$  пересекаются. Докажите, что треугольник  $ADC$  является тупоугольным, если  $BD = AD = CD$  и  $\angle ABC = 125^\circ$ .

**259\*.** В треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Биссектриса внутреннего угла образует со стороной  $AB$  угол, градусная мера которого равна  $124^\circ$ . Вычислите градусную меру угла между биссектрисой внешнего угла и прямой  $AB$ .

**260\*.** Отрезок  $BO$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Точка  $F$  лежит на луче, противоположном лучу  $BA$ ,  $BF = BC$ . Докажите, что прямая  $FC$  параллельна биссектрисе  $BO$ .

**261\*.** В равнобедренном треугольнике градусная мера угла между биссектрисой угла при вершине и биссектрисой угла при основании равна  $128^\circ$ . Вычислите градусные меры углов треугольника.

## § 2. Неравенство треугольника

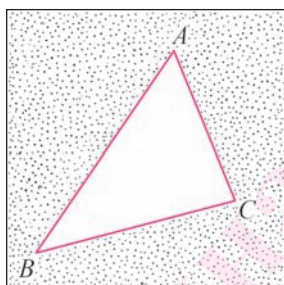
1. Теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

**Теорема 1.** *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

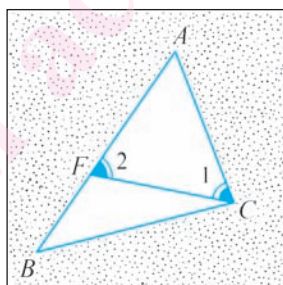
Доказательство.

1) Пусть в треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  больше стороны  $AC$ . Докажем, что  $\angle C > \angle B$  (рис. 108, а).

2) Отложим на стороне  $AB$  отрезок  $AF$ , равный стороне  $AC$  (рис. 108, б).



а)



б)

Рис. 108

3) Так как  $AF < AB$ , то точка  $F$  лежит между точками  $A$  и  $B$ . Отсюда следует, что  $\angle 1$  является частью угла  $BCA$ , а, значит,  $\angle BCA > \angle 1$ .

4) Угол 2 является внешним углом треугольника  $BFC$ , следовательно,  $\angle 2 > \angle B$ .

5) Так как треугольник  $FAC$  является равнобедренным, то  $\angle 1 = \angle 2$ .

Таким образом,  $\angle BCA > \angle 1$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 2 > \angle B$ . Отсюда получаем, что  $\angle BCA > \angle B$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.*

Доказательство.

1) Пусть в треугольнике  $ABC$   $\angle C > \angle B$ . Докажем, что  $AB > AC$  (см. рис. 108, а). Доказательство проведем методом от противного.

2) Предположим, что это не так. Тогда: либо  $AB = AC$ , либо  $AB < AC$ .

3) Если  $AB = AC$ , то данный треугольник  $ABC$  является равнобедренным, а, значит,  $\angle B = \angle C$ . Если  $AB < AC$ , то по теореме 1  $\angle B > \angle C$ .

В каждом из этих случаев получаем противоречие с условием:  $\angle C > \angle B$ . Таким образом, сделанное предположение неверно и, значит,  $AB > AC$ .

Теорема доказана.

Из данной теоремы следует утверждение: *в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы.*

Действительно, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Поскольку прямой угол больше острого, то по теореме 2 получаем, что гипотенуза больше катета.

**Теорема 3 (признак равнобедренного треугольника).** *Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.*

Доказательство.

Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны стороны, лежащие против этих углов. В самом деле, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то по теореме 1 угол, лежащий против этой стороны, будет больше угла, лежащего против другой стороны, что противоречит условию равенства углов.

Значит, наше предположение неверно и в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник является равнобедренным.

Теорема доказана.



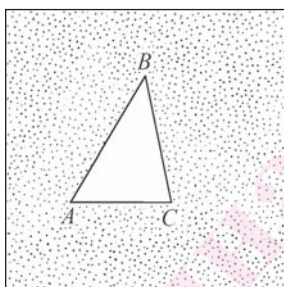
**2. Неравенство треугольника.** Докажем, что длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон.

**Теорема 4.** *Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.*

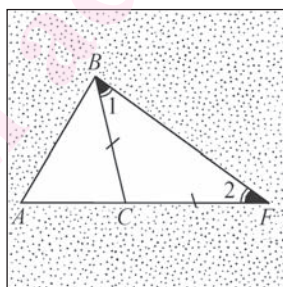
Доказательство.

1) Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. Докажем, например, что выполняется неравенство  $AB < AC + CB$  (рис. 109, а).

2) Отложим на луче  $AC$  отрезок  $CF$ , равный стороне  $BC$  (рис. 109, б).



а)



б)

Рис. 109

3) В равнобедренном треугольнике  $BCF$  угол 1 равен углу 2, а в треугольнике  $ABF$   $\angle ABF > \angle 1$ , следовательно, верно неравенство  $\angle ABF > \angle 2$ .

4) Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона (теорема 2), то  $AB < AF$ . Но так как  $AF = AC + CF$ , то  $AB < AC + CB$ .

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Для любых трех точек  $A, B, C$ , не лежащих на одной прямой, справедливы следующие три неравенства, которые называются неравенствами треугольника:*

$$AB < AC + CB; \quad AC < AB + BC; \quad AB < BA + AC.$$

**Следствие 2.** *Длина каждой стороны треугольника больше разности длин двух других его сторон.*

### Вопросы к § 2

1. Верно ли, что против большей стороны треугольника лежит больший угол?

2. Известно, что в треугольнике  $\angle A$  меньше  $\angle B$ . Какая из сторон, лежащих против этих углов, большая?

3. Верно ли, что если два угла треугольника равны, то такой треугольник является равнобедренным?

4. Против какого угла в тупоугольном треугольнике лежит большая сторона?

5. Верно ли, что длина каждой из сторон треугольника меньше суммы длин двух других его сторон?

### Задачи к § 2

262. В треугольнике  $ABC$   $AB = 5$  см, а  $BC = 10$  см. Какой из углов больший —  $A$  или  $C$ ?

263. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$ . Верно ли, что сторона  $BC$  больше каждой из сторон  $AB$  и  $AC$ ?

264. Даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1 = 6$  см,  $AC = A_1C_1 = 4$  см,  $\angle A = \angle A_1$ . Какой из углов больший —  $B$  или  $C_1$ ?

265. Даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1 = 50^\circ$ ,  $\angle C = \angle C_1 = 40^\circ$ . Сравните отрезки  $AB$  и  $B_1C_1$ .

266. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) точка  $O$  — внутренняя точка катета  $AC$ . Докажите, что  $AB > OB > CB$ .

**267.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

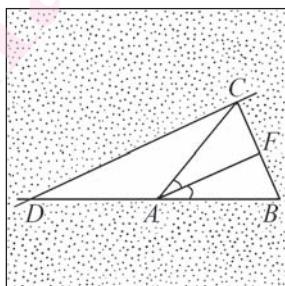
**268.** Докажите, что в треугольнике медиана больше или равна высоте, проведенной из той же вершины.

**269.**  $ABC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $AC$ . Точки  $D$  и  $F$  лежат на лучах  $AC$  и  $BC$  так, что  $DF \parallel AB$ . Докажите, что треугольник  $CFD$  является равнобедренным.

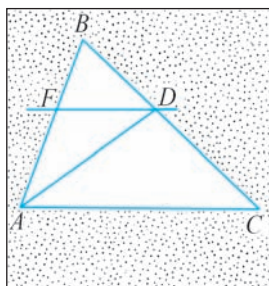
**270.** Прямая, которая параллельна основанию равнобедренного треугольника  $ABC$ , пересекает боковые стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $F$  и  $E$ . Докажите, что треугольник  $AFE$  является равнобедренным.

**271.** Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOC$  равнобедренный.

**272.** Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проходит прямая, которая параллельна его биссектрисе  $AF$  и пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$  (рис. 110, а). Докажите, что треугольник  $CAD$  равнобедренный.



а)



б)

Рис. 110

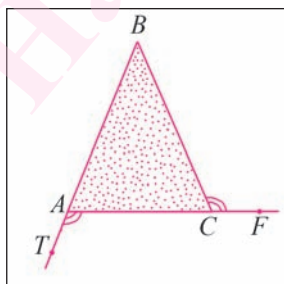
**273.** Отрезок  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$  (рис. 110, б). Через точку  $D$  проходит прямая, параллельная стороне  $AC$  и пересекающая сторону  $BA$  в точке  $F$ . Докажите, что треугольник  $AFD$  равнобедренный.

**274.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AB$  на лучах  $BC$  и  $BA$  взяты соответственно точки  $F$  и  $O$  так, что прямые  $AC$  и  $OF$  параллельны. Докажите, что треугольник  $BFO$  равнобедренный.

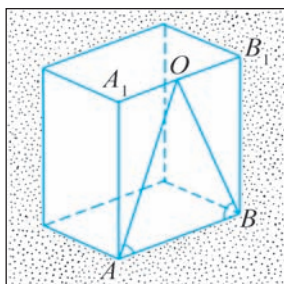
**275.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AC$  и  $CB$  равны. На лучах, противоположных лучам  $BC$  и  $BA$ , лежат соответственно точки  $F$  и  $T$  так, что  $AC \parallel TF$ . Вычислите градусные меры углов  $F$  и  $T$  треугольника  $FBT$ , если  $\angle ACB = 48^\circ$ .

**276.** В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  равны. Вычислите длину медианы  $BD$  данного треугольника, если периметры треугольников  $ABD$  и  $ABC$  равны соответственно 30 см и 40 см.

**277.** На рисунке 111, а угол  $TAC$  равен углу  $BCF$ . Вычислите длины сторон  $AB$  и  $BC$ , если  $P_{ABC} = 40$  см, а  $AC = 6$  см.



а)



б)

Рис. 111

**278.** На рисунке 111, б изображен треугольник  $AOB$ , который содержится в боковой грани  $AA_1B_1B$  прямоугольного параллелепипеда. Известно, что  $\angle OAB = \angle OBA$ . Периметр треугольника  $AOB$  равен 16 см,  $AO = 5$  см. Вычислите длины сторон  $OB$  и  $AB$ .

**279.** Выясните, существует ли треугольник, длины сторон которого 10 см, 20 см, 30 см.

**280.** В равнобедренном треугольнике длина одной стороны равна 25 см, а другой — 10 см. Докажите, что сторона, длина которой равна 10 см, не может быть боковой стороной.

**281.** Можно ли, согнув проволоку длиной 16 см, получить модель равнобедренного треугольника, длина боковой стороны которого равна 4 см? Ответ поясните.

**282.** Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Длина одной из его сторон равна 8 см, а периметр треугольника равен 37 см. Вычислите длины двух других сторон треугольника.

**283.** Через вершину  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  проведена прямая, параллельная биссектрисе  $BT$  этого треугольника и пересекающая прямую  $BC$  в точке  $F$ . Вычислите длину основания треугольника  $ABC$ , если его периметр равен 14 см, а  $BF = 6$  см.

**284.** В треугольнике  $ABC$  через вершину  $B$  проходит прямая, параллельная биссектрисе  $AF$  треугольника и пересекающая прямую  $AC$  в точке  $O$ . Сравните отрезок  $AO$  и высоту  $AT$  треугольника  $ABC$ .

**285.** Прямая  $CF$  параллельна биссектрисе внешнего угла при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Сравните сторону  $BC$  и высоту  $FO$  треугольника  $CFB$ .

**286.** Отрезок  $BO$  — медиана треугольника  $ABC$ . Докажите, что выполняется следующее неравенство  $2BO < (AB + BC)$ .

**287\*.** Отрезки  $BF$  и  $AT$  — медианы треугольника. Докажите, что  $BF + AT > \frac{1}{2}(BC + AC)$ .

**288\*.** Точка  $O$  лежит внутри равностороннего треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $AO < OB + OC$ .

**289\*.** Через точку пересечения биссектрис углов  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, параллельная стороне  $BC$  и пересекающая стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $O$  и  $Q$ . Докажите, что  $OQ = BO + CQ$ .

**290\*.** Точки  $F$  и  $D$  лежат на гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  так, что  $AF = AC$ ,  $BD = BC$ . Вычислите градусную меру угла  $DCF$ .

### § 3. Признаки равенства и свойства прямоугольных треугольников

**1. Признаки равенства прямоугольных треугольников.** На основании первого и второго признаков равенства треугольников можно доказать следующие *признаки равенства прямоугольных треугольников*.

**Теорема 1** (о равенстве прямоугольных треугольников по двум катетам). *Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство.

Так как в прямоугольном треугольнике угол между катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то по первому признаку равенства треугольников следует утверждение данной теоремы.

Теорема доказана.

Например, пусть  $ABCD$  — квадрат, а точки  $O$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $AD$  соответственно (рис. 112, а). Тогда прямоугольные треугольники  $OAD$  и  $FAB$  равны. Действительно, поскольку каж-

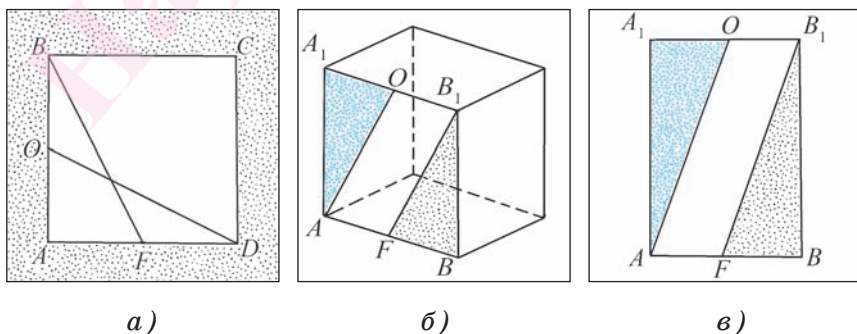


Рис. 112



дый угол квадрата прямой, а его стороны равны, то  $AD = AB$  и  $AO = AF$ , т. е. эти треугольники равны по двум катетам.

Пусть точки  $O$  и  $F$  — середины ребер  $A_1B_1$  и  $AB$  соответственно прямоугольного параллелепипеда (рис. 112, б). Тогда равны прямоугольные треугольники  $AA_1O$  и  $B_1BF$ , содержащиеся в грани  $AA_1B_1B$  прямоугольного параллелепипеда. Действительно, так как каждый угол прямоугольника  $AA_1B_1B$  прямой (рис. 112, в), а противоположные стороны равны, то верны равенства  $\angle AA_1O = \angle FBB_1 = 90^\circ$ ,  $AA_1 = BB_1$  и  $A_1O = BF$ , т. е. треугольники равны по двум катетам.

**Теорема 2** (о равенстве прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу). *Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство.

Учитывая условие теоремы и тот факт, что прямые углы равны, получаем, что катет и два прилежащих к нему угла одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и двум прилежащим к нему углам второго прямоугольного треугольника. Следовательно, по второму признаку равенства треугольников эти треугольники равны.

Теорема доказана.

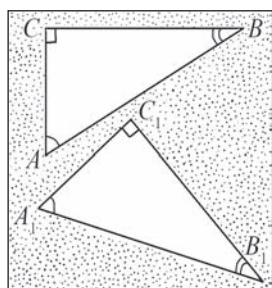
Докажем еще два признака равенства прямоугольных треугольников.

**Теорема 3** (о равенстве прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу). *Если ги-*

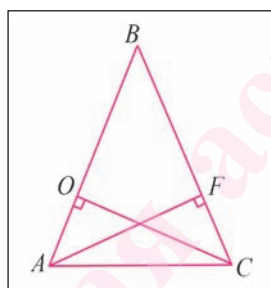
*потенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство.

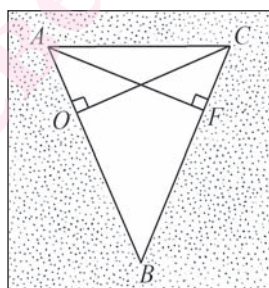
1) Пусть в прямоугольных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны гипотенузы  $AB$  и  $A_1B_1$ , а также  $\angle A = \angle A_1$ . Докажем, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны (рис. 113, а).



а)



б)



в)

Рис. 113

2) Так как сумма градусных мер углов любого треугольника равна  $180^\circ$ , то в треугольнике  $ABC$   $\angle B = 90^\circ - \angle A$  и в треугольнике  $A_1B_1C_1$   $\angle B_1 = 90^\circ - \angle A_1$ . Так как  $\angle A = \angle A_1$ , то  $\angle B = \angle B_1$ .

3) Таким образом, гипотенуза  $AB$  и два прилежащих к ней угла треугольника  $ABC$  соответственно равны гипотенузе  $A_1B_1$  и двум прилежащим к ней углам треугольника  $A_1B_1C_1$ . Следовательно, на основании второго признака равенства треугольников получаем, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Теорема доказана.

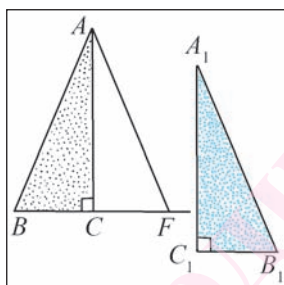
Например, пусть отрезки  $CO$  и  $AF$  — высоты равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ . Тогда  $\triangle AOC = \triangle CFA$  по гипотенузе и острому углу.

Действительно,  $AC$  — общая гипотенуза этих треугольников, а  $\angle OAC = \angle FCA$ , поскольку углы при основании равнобедренного треугольника  $ABC$  равны (рис. 113, б, в).

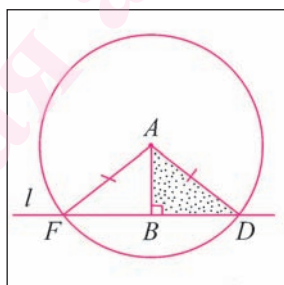
**Теорема 4** (о равенстве прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету). *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство.

1) Пусть в прямоугольных треугольниках  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$   $\angle C = \angle C_1$ ,  $AB = A_1B_1$  и  $AC = A_1C_1$  (рис. 114, а).



а)



б)

Рис. 114

2) На луче, противоположном лучу  $CB$ , отложим отрезок  $CF$ , равный отрезку  $C_1B_1$ . Тогда треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ACF$  равны по двум катетам.

3) Следовательно,  $AF = A_1B_1 = AB$ , т. е. треугольник  $ABF$  является равнобедренным и  $\angle B = \angle F$ . Таким образом, прямоугольные треугольники  $ACB$  и  $ACF$  равны по гипотенузе и острому углу. Кроме того,  $\triangle ACF = \triangle A_1C_1B_1$ , значит, треугольник  $ACB$  равен треугольнику  $A_1C_1B_1$ .

Теорема доказана.

Например, пусть прямая  $l$  пересекает окружность, центром которой является точка  $A$ , в точках  $D$  и  $F$  (рис. 114, б). Отрезок  $AB$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $A$  к прямой  $l$ . Тогда треугольники  $ABF$  и  $ABD$  равны по гипотенузе и катету. Действительно,  $AF = AD$  как радиусы окружности, отрезок  $AB$  — общий катет этих треугольников.

**2. Свойства прямоугольного треугольника.** Рассмотрим свойства прямоугольного треугольника, которые следуют из теоремы о сумме градусных мер углов треугольника.

**Свойство 1** (свойство катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ). *Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы.*

Доказательство.

1) Пусть  $ACB$  — прямоугольный треугольник, в котором  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ . Докажем, что катет  $BC$  равен половине гипотенузы  $AB$  (рис. 115, а).

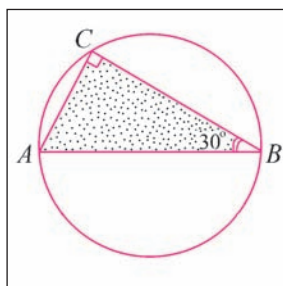
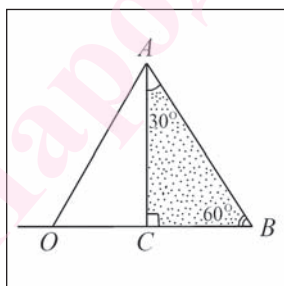


Рис. 115

2) Так как сумма градусных мер углов треугольника равна  $180^\circ$ , то в прямоугольном треугольнике  $ACB$   $\angle ABC = 60^\circ$ .

3) Пусть точка  $O$  лежит на луче  $BC$  так, что  $CO = CB$ . Тогда прямоугольные треугольники  $ACO$  и  $ACB$  равны по двум катетам (катет  $AC$  — общий,  $CO = CB$ ), следовательно,  $\angle AOB = 60^\circ$ .

4) В треугольнике  $AOB$  выполняются равенства  $\angle AOB = \angle OAB = 60^\circ$ , а, значит, стороны, лежащие против этих углов, равны, т. е.  $AB = OB$ . Так как  $CB = \frac{1}{2}OB$ , следовательно,  $CB = \frac{1}{2}AB$ .

Свойство доказано.

Например, пусть отрезок  $AB$  — диаметр окружности, а точка  $C$  принадлежит окружности и  $\angle ABC = 30^\circ$ , тогда  $AC = \frac{1}{2}AB$ . Действительно, в треугольнике  $ACB$  угол  $C$  прямой (см. задачу 251, § 1, глава 5). Тогда в прямоугольном треугольнике  $ACB$  катет  $AC$  равен половине гипотенузы  $AB$ , т. е.

$AC = \frac{1}{2}AB$  (рис. 115, б).

**Свойство 2.** Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то градусная мера угла, лежащего против этого катета, равна  $30^\circ$ .

Доказательство.

1) Пусть в прямоугольном треугольнике  $ACB$  катет  $BC$  равен половине гипотенузы  $AB$ . Докажем, что градусная мера угла  $CAB$  равна  $30^\circ$  (рис. 116).

2) Пусть точка  $D$  лежит на луче  $BC$  так, что  $CD = CB$ . Тогда треугольники  $ACB$  и  $ACD$  равны по двум катетам. Отсюда следует,

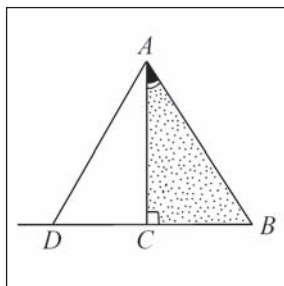
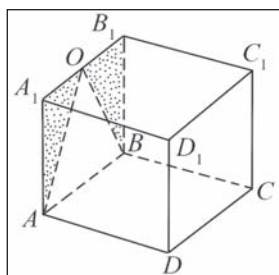


Рис. 116

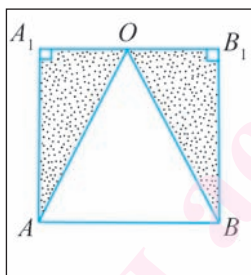
что  $AD = AB$ , а поскольку  $DB = 2CB = AB$ , то треугольник  $ADB$  равносторонний и градусная мера каждого его угла равна  $60^\circ$ . Так как  $\angle DAB = 2\angle CAB = 60^\circ$ , то  $\angle CAB = 30^\circ$ .

Свойство доказано.

**Задача.** Точка  $O$  — середина ребра  $A_1B_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что треугольник  $AOB$  — равнобедренный (рис. 117, а).



а)



б)

Рис. 117

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб,

$O \in A_1 B_1$ ,

$A_1 O = O B_1$ .

Доказать:

$\triangle AOB$  — равнобедренный.

**Доказательство.**

Для доказательства равенства каких-либо отрезков достаточно доказать равенство некоторых треугольников, сторонами которых являются эти отрезки.

1) Рассмотрим треугольники  $AA_1O$  и  $BB_1O$  (см. рис. 117, а). Так как гранями куба служат квадраты, то  $\angle AA_1O = \angle BB_1O = 90^\circ$ , т. е. треугольники  $AA_1O$  и  $BB_1O$  — прямоугольные.

2) Докажем равенство прямоугольных треугольников  $AA_1O$  и  $BB_1O$ . Поскольку стороны квадрата равны, то  $AA_1 = BB_1$  (см. рис. 117, а, б). Кроме того, по условию  $A_1O = OB_1$ . Таким образом, прямоугольные треугольники  $AA_1O$  и  $BB_1O$  равны по двум катетам. Из равенства этих треугольников следует, что  $AO = OB$ , т. е. треугольник  $AOB$  — равнобедренный.

## Вопросы к § 3

1. Верно ли, что два прямоугольных треугольника равны, если катеты одного треугольника равны катетам другого треугольника?

2. Сформулируйте теорему о равенстве прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.

3. Верно ли, что два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого треугольника?

4. Сформулируйте теорему о равенстве прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

5. Чему равна длина катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ?

6. В прямоугольном треугольнике  $ACB$  с гипотенузой  $AB$  градусная мера угла  $A$  равна  $60^\circ$ . Верно ли, что катет  $AC$  равен половине гипотенузы?

## Задачи к § 3

291. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.

292. Отрезки  $AO$  и  $BF$  — перпендикуляры, проведенные из точек  $A$  и  $B$  к прямой  $a$ . Докажите, что треугольники  $AOF$  и  $BFO$  равны, если  $AO = BF$ .

293. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  отрезки  $AF$  и  $CO$  — высоты, проведенные к боковым сторонам. Чему равна длина отрезка  $BO$ , если  $BC = m$  и  $FC = a$ ?

294. Точки  $O$  и  $F$  — середины ребер  $AA_1$  и  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно (рис. 118, а). Докажите, что треугольники  $OAB$  и  $FBA$  равны.



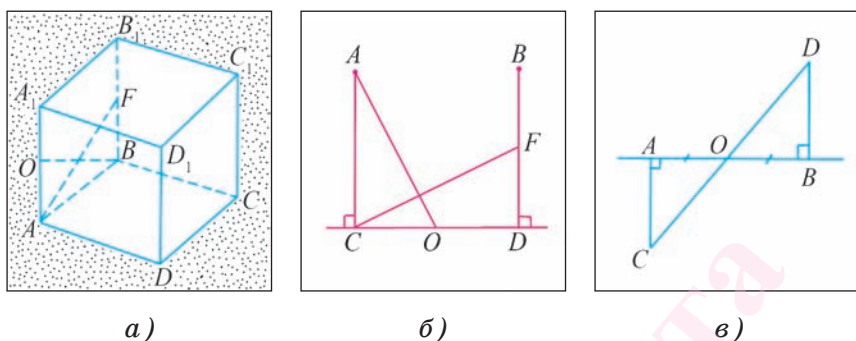


Рис. 118

**295.** На рисунке 118, б отрезки  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны прямой  $CD$ ,  $AC = CD = DB$ , а точки  $O$  и  $F$  — середины отрезков  $CD$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что  $AO = CF$ .

**296.** На рисунке 118, в отрезки  $CA$  и  $DB$  перпендикулярны прямой  $AB$ ,  $AO = OB$ . Докажите, что  $CA = DB$ .

**297.** В прямоугольных треугольниках  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$   $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ . Отрезки  $AO$  и  $A_1O_1$  — их медианы. Докажите, что треугольники  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$  равны, если  $AC = A_1C_1$  и  $\angle COA = \angle C_1O_1A_1$ .

**298.** Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и высоте, проведенной к гипотенузе.

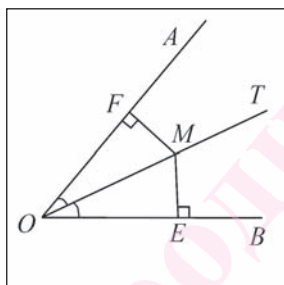
**299.** В треугольниках  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$  углы  $C$  и  $C_1$  — прямые, отрезки  $AO$  и  $A_1O_1$  — биссектрисы. Докажите равенство треугольников  $ACB$  и  $A_1C_1B_1$ , если  $AO = A_1O_1$  и  $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ .

**300.** Из середин  $O$  и  $F$  боковых сторон  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  к основанию треугольника проведены перпендикуляры  $OK$  и  $FD$ . Докажите, что  $OK = FD$ .

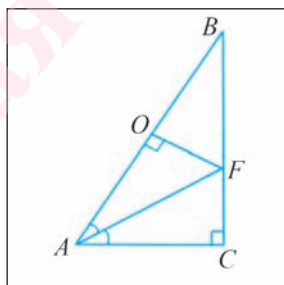
**301.** Отрезок  $AF$  — биссектриса треугольника  $ABC$ , отрезки  $FO$  и  $FK$  — перпендикуляры, проведенные к сторонам  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что  $FO = FK$ .

**302.** На рисунке 119, а точка  $M$  — произвольная точка биссектрисы  $OT$  неразвернутого угла  $AOB$ . Докажите, что перпендикуляры  $MF$  и  $ME$ , проведенные к сторонам угла, равны.

**303.** На рисунке 119, б отрезок  $AF$  — биссектриса прямоугольного треугольника  $ABC$ , а отрезок  $FO$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $F$  к стороне  $AB$ . Вычислите длину отрезка  $AO$ , если  $AC = 4$  см.



а)



б)

Рис. 119

**304.** Вершины треугольника  $ABC$  лежат на окружности, центром которой является точка  $O$ . Отрезок  $AC$  — диаметр окружности,  $AB = 5$  см и  $\angle ACB = 30^\circ$ . Вычислите расстояние от вершины  $B$  до центра окружности.

**305.** На рисунке 120, а отрезки  $AF$  и  $BO$  перпендикулярны прямой  $DC$ ,  $AC = BD$  и  $AF = BO$ . Докажите, что  $DF = OC$ .

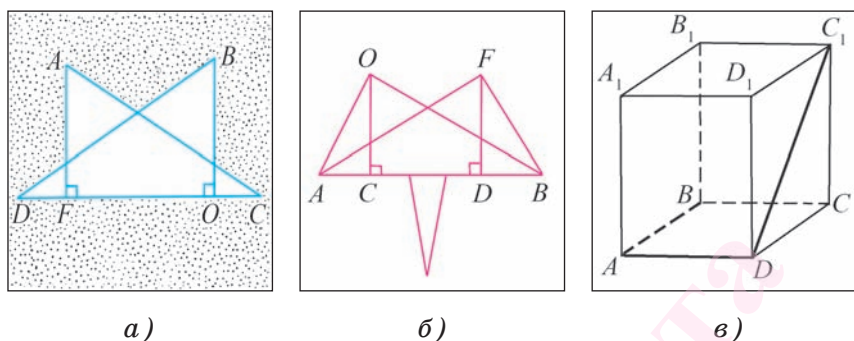


Рис. 120

**306.** На рисунке 120, б отрезки  $OC$  и  $FD$  перпендикулярны прямой  $AB$ ,  $OC = FD$  и  $OB = AF$ . Докажите, что  $AO = FB$ .

**307.** Отрезок  $CF$  — высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника  $ACB$ . Докажите, что  $\angle CAB = \angle FCB$ .

**308.** В прямоугольном треугольнике  $ACB$  градусная мера угла  $C$  равна  $90^\circ$ , а  $\angle CAB = 60^\circ$ . Вычислите длину катета  $BC$ , если высота  $CF$  треугольника  $ACB$  равна 6 см.

**309.** Один из острых углов прямоугольного треугольника в два раза больше другого. Вычислите длину гипотенузы, если сумма длин гипотенузы и меньшего катета равна 18 см.

**310.** В равнобедренном треугольнике градусная мера угла при его вершине, лежащей против основания, равна  $120^\circ$ . Вычислите высоту, проведенную к боковой стороне, если длина основания данного треугольника равна 16 см.

**311.** На рисунке 120, в изображен прямоугольный параллелепипед, основаниями которого слу-

жат квадраты  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ . Вычислите длину ломаной, образованной отрезками  $BA$ ,  $AD$  и  $DC_1$ , если  $DC_1 = 12$  см и  $\angle D_1C_1D = 60^\circ$ .

**312.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  градусная мера внешнего угла при вершине  $A$  равна  $120^\circ$ , а сумма длин катета  $AC$  и гипотенузы  $AB$  равна 30 см. Вычислите длины сторон  $AC$  и  $AB$ .

**313.** В треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $C$  прямой, а градусная мера внешнего угла при вершине  $B$  равна  $150^\circ$ . Вычислите длину гипотенузы треугольника, если  $AC = 4$  см.

**314.** Отрезок  $CF$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$ ,  $BC = 2BF$ . Докажите, что  $AB = 4BF$ .

**315.** Серединный перпендикуляр к гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  пересекает катет  $BC$  в точке  $F$ . Вычислите расстояние от точки  $F$  до середины гипотенузы, если  $AF = 16$  см,  $\angle B = 30^\circ$ .

**316.** Через середину стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, перпендикулярная стороне  $AB$  и пересекающая отрезок  $BC$  в точке  $E$ . Вычислите длину стороны  $AC$ , если  $BC = 48$  см, а периметр треугольника  $AEC$  равен 60 см.

**317\*.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $B$  точка  $O$  — точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $C$ . Вычислите градусную меру угла  $AOC$ .

**318\*.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  прямой. Из точки  $D$ , лежащей на стороне  $BC$ , проведен отрезок  $DE$ ,

перпендикулярный отрезку  $BC$  и пересекающий  $AC$  в точке  $O$ ,  $\angle DOC = 70^\circ$ ,  $\angle DEC = 45^\circ$ ,  $\angle BAD = 50^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $AED$ .

**319\*.** Точка  $O$  лежит на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ . Через точку  $O$  проходит прямая, перпендикулярная отрезку  $AB$  и пересекающая сторону  $AC$  в точке  $F$  так, что  $\angle OFA = \angle OFB$ . Вычислите периметр треугольника  $BFC$ , если  $AC = 60$  см,  $BC = 30$  см.

## § 4. Расстояние между параллельными прямыми

**1. Расстояние от точки до прямой.** Введем теперь понятие расстояния от точки до прямой. Пусть точка  $A$  не лежит на прямой  $b$  и отрезок  $AO$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $A$  к прямой  $b$  (рис. 121,  $a$ ).

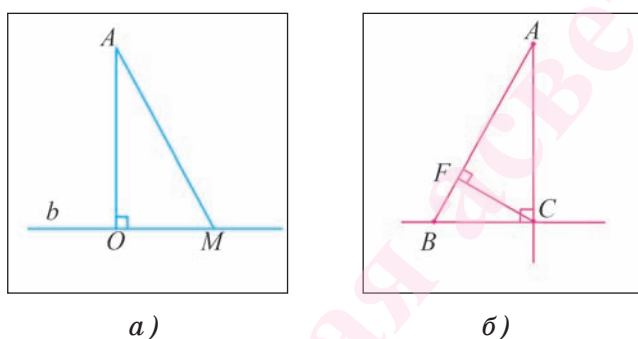


Рис. 121

Наклонной к прямой  $b$  называется отрезок  $AM$ , где  $M$  — произвольная точка прямой  $b$ , не совпадающая с точкой  $O$  (см. рис. 121,  $a$ ). В прямоугольном треугольнике  $AOM$  катет  $AO$  меньше гипотенузы  $AM$ . Таким образом, перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к данной прямой.

**Определение.** Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к прямой.

Расстояние от точки  $A$  до прямой  $b$  обозначается  $d(A, b)$  (читают следующим образом: «Расстояние от точки  $A$  до прямой  $b$ »).

Например, если в прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой, то расстояние от вершины  $A$  до прямой  $BC$  равно длине катета  $AC$ , а расстояние

от вершины  $B$  до прямой  $AC$  равно длине катета  $BC$  (рис. 121, б). Длина отрезка  $CF$ , являющегося высотой этого треугольника, есть расстояние от вершины  $C$  до прямой  $AB$ .

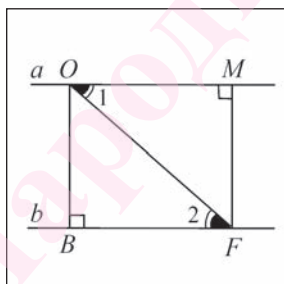
Воспользовавшись понятием расстояния от точки до прямой, можно определить понятие расстояния между параллельными прямыми.

**2. Расстояние между параллельными прямыми.** Предварительно докажем еще одно свойство параллельных прямых.

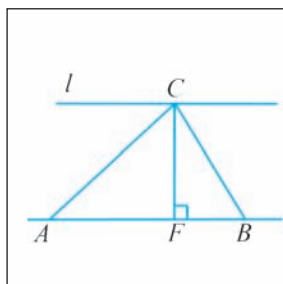
**Теорема.** *Все точки каждой из двух параллельных прямых находятся на равном расстоянии от другой прямой.*

Доказательство.

1) Пусть  $a$  и  $b$  две параллельные прямые, отрезок  $OB$  — перпендикуляр, проведенный из произвольной точки  $O$  прямой  $a$  к прямой  $b$  (рис. 122, а). Докажем, что расстояние от любой точки  $M$  прямой  $a$  до прямой  $b$  равно длине отрезка  $OB$ .



а)



б)

Рис. 122

2) Проведем из точки  $M$  перпендикуляр  $MF$  к прямой  $b$ . Так как  $MF \perp b$ , а прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то  $MF \perp a$ .

3) Прямоугольные треугольники  $OBF$  и  $OMF$  равны по гипотенузе и острому углу (сторона  $OF$  — общая,



и равны внутренние накрест лежащие углы 1 и 2 при пересечении параллельных прямых  $a$  и  $b$  секущей  $OF$ ). Из равенства треугольников следует, что  $MF = OB$ . Аналогично доказывается, что каждая точка прямой  $b$  находится на том же расстоянии от прямой  $a$ .

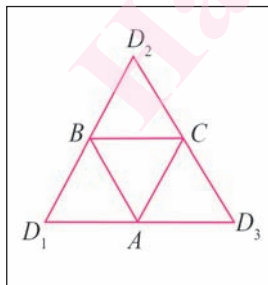
Теорема доказана.

**Определение.** Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

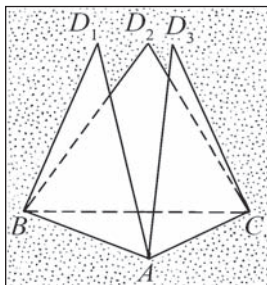
Например, пусть прямая  $l$  проходит через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  и параллельна его стороне  $AB$ . Тогда расстояние между прямыми  $l$  и  $AB$  равно длине отрезка  $CF$ , являющегося высотой треугольника  $ABC$  (рис. 122, б).

**3. Правильная треугольная пирамида.** Рассмотрим еще одну пространственную фигуру.

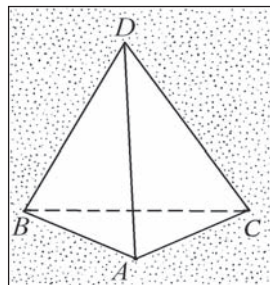
Проведем мысленный эксперимент. Представим, что часть листа бумаги, имеющая форму равностороннего треугольника, разбита на четыре части, каждая из которых имеет форму равностороннего треугольника (рис. 123, а). Такое разбиение осуществляют отрезки  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , которые соединяют середины сторон модели равностороннего тре-



а)



б)



в)

Рис. 123

угольника. Перегнем данную модель равностороннего треугольника по отрезкам  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и склеим так, чтобы вершины  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  совпали (рис. 123, б, в).

Фигура, состоящая из части пространства, ограниченной четырьмя равными равносторонними треугольниками  $DAB$ ,  $DBC$ ,  $DAC$  и  $ABC$ , и точек этих треугольников, называется **тетраэдром** (или **правильным тетраэдром**), который обозначается  $DABC$  (см. рис. 123, в). Равносторонние треугольники  $DAB$ ,  $DBC$ ,  $DAC$  и  $ABC$  называются **гранями** тетраэдра, а их вершины и стороны — **вершинами и ребрами** тетраэдра.

**Правильная треугольная пирамида** — это многогранник, у которого одна грань  $ABC$  — равносторонний треугольник, а остальные три грани — равные равнобедренные треугольники  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SAC$ , имеющие общую вершину  $S$  (рис. 124, а). Равносторонний треугольник  $ABC$  называется **основанием** правильной треугольной пирамиды, а треугольники  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SAC$  — ее **боковыми гранями**. Общая вершина  $S$  треугольников  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SAC$  называется **вершиной** пирамиды, стороны  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  — **боковыми ребрами** правильной треуголь-

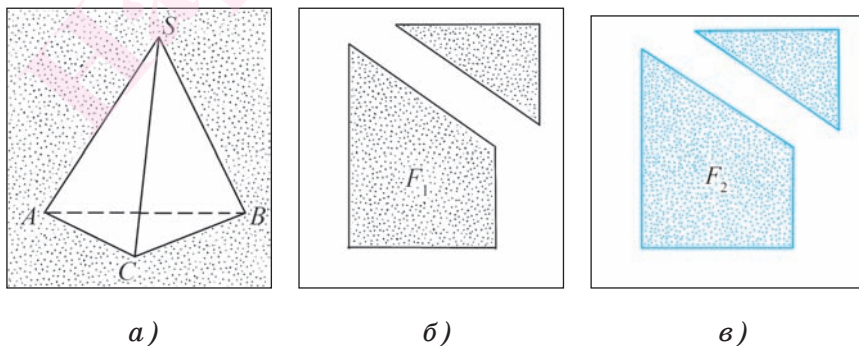


Рис. 124

ной пирамиды, а вершины  $A, B, C$  называются вершинами при основании пирамиды. Треугольная пирамида, основанием которой служит равносторонний треугольник  $ABC$ , а вершиной — точка  $S$ , обозначается  $SABC$ .

Так как равносторонний треугольник является равнобедренным, то понятно, что любой тетраэдр служит примером правильной треугольной пирамиды.

**4. Равенство фигур.** Ранее мы изучили понятия равенства отрезков, углов и треугольников. Треугольники называются равными, если они совмещаются при наложении. Аналогично определяется и равенство произвольных геометрических фигур.

Представление о моделях двух равных прямоугольников дают, например, два одинаковых листа писчей бумаги или два листа одной и той же книги. Модели равных фигур более сложной формы получим, если от одинаковых листов бумаги прямоугольной формы ототрежем части, имеющие форму равных прямоугольных треугольников, как показано на рисунке 124, б, в.

Легко проверить, что части  $F_1$  и  $F_2$ , оставшиеся после отрезания, можно совместить наложением, что служит подтверждением их одинаковой формы и размеров.

Как и в случае треугольников, можно говорить о равенстве двух произвольных фигур в случае их совмещения при наложении.

Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

В общем случае при рассмотрении равных фигур пользуются следующими свойствами равных фигур:

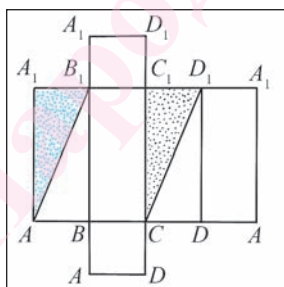
- 1) *любая фигура равна самой себе;*

2) если фигура  $F_1$  равна фигуре  $F_2$ , то фигура  $F_2$  равна фигуре  $F_1$ ;

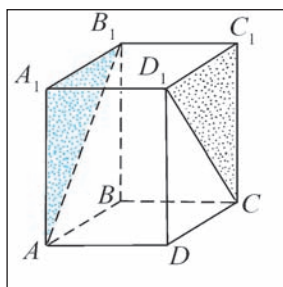
3) если фигура  $F_1$  равна фигуре  $F_2$ , а фигура  $F_2$  равна фигуре  $F_3$ , то фигура  $F_1$  равна фигуре  $F_3$ .

В предыдущих главах были изучены признаки равенства треугольников, расположенных в одной и той же плоскости. Заметим, что эти признаки справедливы и для треугольников, которые лежат в разных плоскостях.

Рассмотрим некоторые примеры. Пусть у нас есть развертка прямоугольного параллелепипеда, основаниями которого служат квадраты (рис. 125, а). На рисунке одинаковыми буквами обозначены точки, которые «склеиваются» в одну вершину параллелепипеда. Нетрудно понять, что отмеченные на развертке прямоугольные треугольники равны по двум катетам, а соответствующие им равные прямоугольные треугольники  $AA_1B_1$  и  $D_1C_1C$  лежат в разных гранях прямоугольного параллелепипеда, а значит, — в разных плоскостях (рис. 125, б).



а)



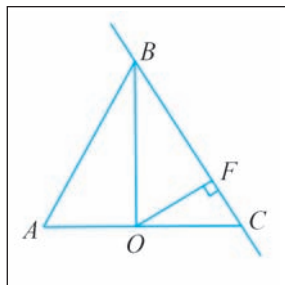
б)

Рис. 125

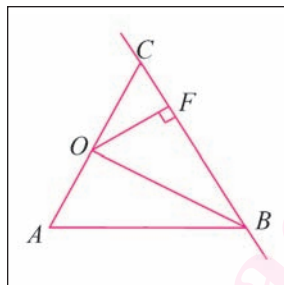
В дальнейшем при решении некоторых задач мы будем пользоваться утверждением о том, что **признаки равенства треугольников справедливы и**

для треугольников, расположенных в разных плоскостях.

**Задача 1.** Точка  $O$  — середина стороны  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$ . Вычислите расстояние от точки  $O$  до прямой  $BC$ , если  $BO = 8$  см (рис. 126, а, б).



а)



б)

Рис. 126

Дано:  
 $\triangle ABC$ ,  
 $AB = BC = CA$ ,  
 $O \in AC$ ,  
 $AO = OC$ ,  
 $BO = 8$  см.  
 Вычислить:  
 $d(O, BC)$ .

**Решение.**

Расстояние от точки  $O$  до прямой  $BC$  равно длине перпендикуляра, проведенного из точки  $O$  к прямой  $BC$ .

1) Пусть  $OF$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $O$  к прямой  $BC$ , тогда  $d(O, BC)$  равно длине отрезка  $OF$ , который является катетом прямоугольного треугольника  $BFO$ .

2) Так как треугольник  $ABC$  равносторонний, а значит, и равнобедренный ( $AB = BC$ ), то его медиана  $BO$  является биссектрисой. Так как градусная мера каждого угла равностороннего треугольника равна  $60^\circ$ , то  $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$ .

3) В прямоугольном треугольнике  $BFO$  ( $\angle OFB = 90^\circ$ ) катет  $OF$  лежит против угла в  $30^\circ$ , следовательно,  $OF = \frac{1}{2} BO = 4$  см, т. е.  $d(O, BC) = 4$  см.

Ответ:  $d(O, BC) = 4$  см.

**Задача 2.** Точки  $O$  и  $F$  — соответственно середины ребер  $BC$  и  $AB$  тетраэдра  $DABC$ . Докажите, что  $DO = CF$  (рис. 127, а, б).

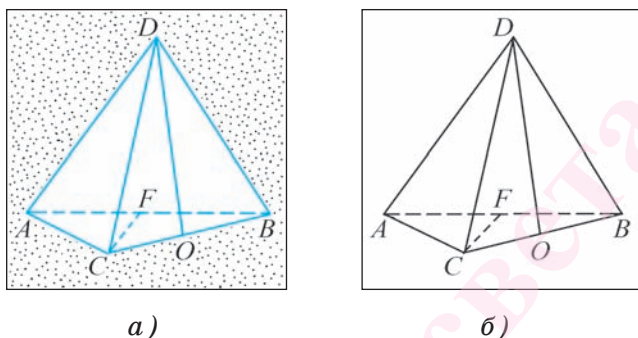


Рис. 127

**Доказательство.**

Для доказательства равенства отрезков достаточно доказать равенство треугольников, сторонами которых являются эти отрезки. В данном случае можем рассмотреть треугольники  $AFC$  и  $BOD$ .

1) Так как точки  $O$  и  $F$  — середины сторон  $CB$  и  $AB$  равносторонних треугольников  $CBD$  и  $ACB$  соответственно, то медианы  $DO$  и  $CF$  этих треугольников являются также и высотами. Следовательно, треугольники  $BOD$  и  $AFC$  являются прямоугольными.

2) Поскольку треугольники  $CBD$  и  $ACB$  — равные и равносторонние, то  $AC = BD$  и  $\angle CAB = \angle DBC = 60^\circ$ .

3) Таким образом, прямоугольные треугольники  $BOD$  и  $AFC$  равны по гипотенузе и острому углу ( $AC = DB$ ,  $\angle FAC = \angle OBD = 60^\circ$ ). Из равенства этих треугольников следует, что  $DO = CF$ , что и требовалось доказать.

## Задачи к § 4

**320.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  градусная мера угла при основании  $AC$  равна  $15^\circ$  и  $AB = 6$  см. Вычислите расстояние от вершины  $A$  до прямой  $BC$ .

**321.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от прямых, содержащих боковые стороны треугольника.

**322.** В треугольнике  $ABC$  градусная мера угла при вершине  $C$  равна  $30^\circ$ ,  $AC = 20$  см,  $BC = 16$  см.  
а) Вычислите расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AC$ . б) Вычислите расстояние от вершины  $C$  до прямой  $a$ , которая проходит через вершину  $A$  и параллельна прямой  $BC$ .

**323.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  градусная мера угла, лежащего против основания  $AC$ , равна  $120^\circ$ . Вычислите расстояние от вершины  $B$  до прямой, проходящей через вершину  $A$  и перпендикулярной прямой  $BC$ , если расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AC$  равно 2 см.

**324.** Через концы  $O$  и  $F$  отрезка  $OF$  проходят параллельные прямые  $a$  и  $b$ , причем прямая  $OF$  не перпендикулярна прямым  $a$  и  $b$ . Докажите, что середина  $S$  отрезка  $OF$  находится на равном расстоянии от прямых  $a$  и  $b$ .

**325.** Прямая проходит через середину отрезка. Докажите, что концы отрезка находятся на равном расстоянии от этой прямой.

**326.** Прямая  $b$  проходит через середину  $O$  отрезка  $AB$ . Вычислите длину перпендикуляра, проведенного из точки  $A$  к прямой  $b$ , если расстояние от точки  $B$  до прямой  $b$  равно 8 см.



**327.** Прямая  $c$  пересекает параллельные прямые  $a$  и  $b$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Вычислите расстояние между прямыми  $a$  и  $b$ , если  $AB = 8$  см, а градусная мера одного из углов, образованных при пересечении прямых  $a$  и  $c$ , равна  $150^\circ$ .

**328.** Градусная мера одного из углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна  $30^\circ$ . Вычислите расстояние между точками пересечения прямых, если расстояние между параллельными прямыми равно 12 см.

**329.** Докажите, что все точки, расположенные по одну сторону от данной прямой и находящиеся на равном расстоянии от нее, лежат на прямой, параллельной данной.

**330.** В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра  $AB$  и  $CD$ . Точки  $F$  и  $K$  лежат на диаметре  $AB$  и на равном расстоянии от прямой  $CD$ . Докажите, что отрезки  $CF$  и  $DK$  равны.

**331.** Отрезки  $AB$  и  $CD$  — диаметры окружности. Докажите, что  $CB = AD$  и  $AC = DB$ .

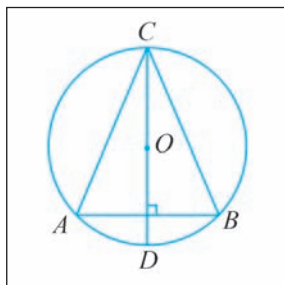
**332.** В окружности с центром  $O$  и радиусом 10 см проведены радиусы  $OA$  и  $OB$  так, что  $\angle OAB = 30^\circ$ . Вычислите расстояние от центра окружности до прямой  $AB$ .

**333.** Точка  $F$  — середина хорды  $AB$  окружности, центром которой является точка  $O$ . Вычислите радиус окружности, если известно, что  $OF = 21$  см, а  $\angle OFB = 30^\circ$ .

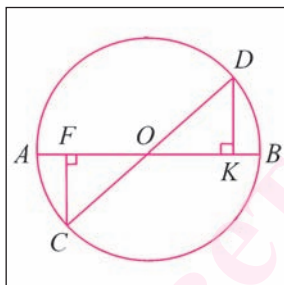
**334.** Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде окружности, делит эту хорду пополам.



**335.** Диаметр  $CD$  окружности перпендикулярен ее хорде  $AB$  (рис. 128, а). Докажите, что треугольник  $ACB$  является равнобедренным.



а)



б)

Рис. 128

**336.** Отрезки  $AB$  и  $CD$  — диаметры окружности с центром в точке  $O$  и радиусом 16 см,  $DK$  и  $CF$  — перпендикуляры, проведенные к прямой, содержащей диаметр  $AB$ . Вычислите длину отрезка  $KB$ , если  $OF = 12$  см (рис. 128, б).

**337.** Отрезок  $AB$  — диаметр окружности, точка  $C$  принадлежит окружности и  $AB = 2AC$ . Докажите, что в треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $CAB$  равна  $60^\circ$ .

**338.** На окружности, радиус которой 16 см, лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что отрезок  $AB$  — диаметр окружности, а  $\angle ABC = 30^\circ$ . Вычислите длину хорды  $AC$ .

**339.** Из точки  $A$ , лежащей на окружности, проведен перпендикуляр  $AF$  к прямой, содержащей диаметр  $CD$  этой окружности. Вычислите длину отрезка  $FD$ , если радиус окружности равен 8 см,  $CD = 2AD$ .

**340.** Точка  $C$  окружности находится на равных расстояниях от центра  $O$  окружности и от точки  $A$  ее диаметра  $AB$ . Вычислите диаметр окружности, если известно, что  $AC = 12$  см.

**341.** Отрезок  $AC$  — диаметр окружности, а точка  $B$  окружности равноудалена от точки  $A$  и центра  $O$  окружности. Вычислите расстояние от центра окружности до прямой  $BC$ , если известно, что  $AB = 18$  см.

**342.** Точка  $O$  — середина ребра  $DD_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , основаниями которого служат квадраты  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 129, а). а) Докажите, что треугольники  $C_1 D_1 O$  и  $CDO$  равны. б) Верно ли, что  $\triangle ADO = \triangle CDO$ ?

**343.**  $ABCA_1 B_1 C_1$  — прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник. Докажите, что треугольники  $CC_1 A_1$  и  $CB B_1$  равны (рис. 129, б).

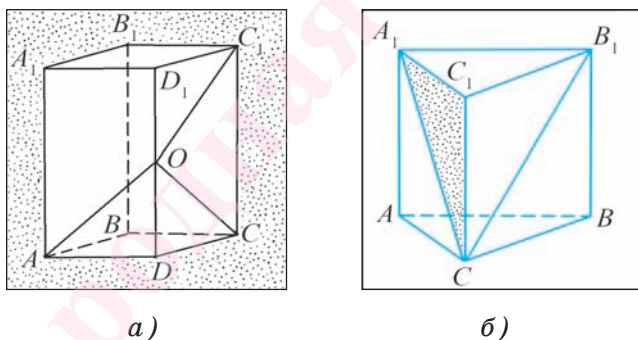


Рис. 129

**344.** Точки  $O$  и  $F$  — соответственно середины ребер  $DC$  и  $DB$  тетраэдра  $DABC$ . Докажите, что треугольники  $OAC$  и  $FCB$  равны.

**345.** Точка  $O$  — середина ребра  $AC$  тетраэдра  $DABC$ . Докажите равенство треугольников  $DAO$  и  $BAO$ .

**346.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед, основаниями которого служат квадраты  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $F$  и  $O$  — середины ребер

$B_1C_1$  и  $DC$  соответственно. Докажите, что треугольник  $FCC_1$  равен треугольнику  $OC_1C$ .

**347.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $B$ , лежащего против основания, равна  $120^\circ$ , а отрезок  $BF$  — медиана этого треугольника. Прямая  $b$  проходит через точку  $F$  и параллельна стороне  $BC$ . Найдите расстояние между прямыми  $BC$  и  $b$ , если известно, что  $AF = a$ .

**348.** В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 65^\circ$ ,  $\angle B = 85^\circ$ . Точка  $F$  — внутренняя точка отрезка  $AC$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до прямой  $BC$ , если  $CF = a$ .

**349.** Отрезок  $AD$  — диаметр окружности, отрезки  $AB$  и  $AC$  — равные хорды этой окружности. Докажите, что  $\angle BDA = \angle CDA$ .

**350.** Отрезок  $CD$  — диаметр круга, а отрезок  $CB$  — его хорда, равная радиусу круга. Найдите диаметр круга, если  $d(C, BD) = a$ .

**351\*.** Точка  $F$  принадлежит ребру  $DB$  тетраэдра  $DABC$ . Докажите, что  $\triangle AFC$  равнобедренный.

**352\*.**  $DABC$  — тетраэдр. Точка  $O$  лежит на луче  $AB$  так, что  $AB = BO$ , а точка  $F$  — на луче  $BC$  так, что  $BC = CF$ . Докажите, что  $\triangle ADO$  и  $\triangle ABF$  равны.

**353\*.** Отрезок  $BO$  — медиана треугольника  $ABC$ ,  $AO = BO = CO = a$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Найдите расстояние между прямой  $BC$  и прямой, которая проходит через точку  $O$  и параллельна прямой  $BC$ .

**354\*.** Точка  $T$  лежит на окружности, отрезок  $AB$  — диаметр этой окружности. Точка  $F$  лежит на луче, противоположном лучу  $BA$ , так, что  $BF = BT$ . Точка  $L$  лежит на луче, противоположном лучу  $AB$ , так, что  $AL = AT$ . Вычислите градусную меру угла  $FTL$ .

## § 5. Задачи на построение циркулем и линейкой

### 1. Основные задачи на построение циркулем и линейкой.

В данном параграфе рассмотрим вопрос о построении геометрических фигур. Вы уже знаете, что геометрические построения можно осуществлять с помощью масштабной линейки, циркуля, транспортира и чертежного угольника. В то же время оказывается, что многие геометрические фигуры можно построить, пользуясь только циркулем и линейкой без масштабных делений.

При построении геометрических фигур с помощью циркуля и линейки без масштабных делений учитывается, что:

1) с помощью линейки можно провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две точки;

2) с помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.

Теперь рассмотрим основные задачи на построение циркулем и линейкой: построение угла, равного данному; построение серединного перпендикуляра к отрезку; построение биссектрисы угла.

#### Задача 1 (построение угла, равного данному).

От данного луча  $OF$  отложите угол, равный данному углу  $ABC$ .

Поиск решения.

Предположим, что угол  $DOF$ , удовлетворяющий условию задачи, построен (рис. 130, а). Пусть

$\omega_1(B, R)$  и  $\omega_2(O, R)$  — окружности некоторого равного радиуса  $R$  с центрами в точках  $B$  и  $O$  соответственно. Обозначим буквами  $A_1$  и  $C_1$  точки пересечения окружности  $\omega_1(B, R)$  с лучами  $BA$  и  $BC$ , а буквами  $D_1$  и  $F_1$  — точки пересечения окружности  $\omega_2(O, R)$  с лучами  $OD$  и  $OF$  соответственно. Нетрудно понять, что  $\triangle A_1BC_1 = \triangle D_1OF_1$  (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда следует, что отрезок  $D_1F_1$  равен отрезку  $A_1C_1$ . Иначе говоря, точка  $D_1$  находится от точки  $F_1$  на расстоянии, равном длине отрезка  $A_1C_1$ , т. е. она принадлежит окружности  $\omega(F_1, A_1C_1)$ . Теперь понятно, как осуществить построение.

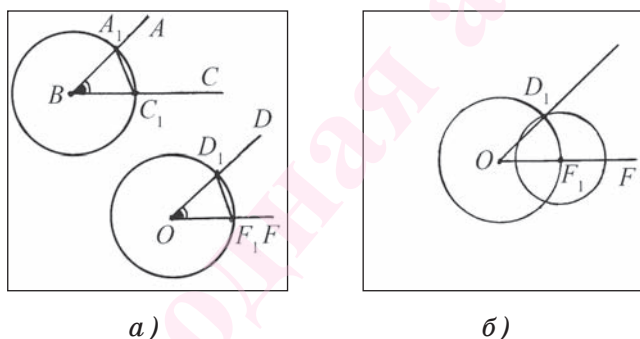


Рис. 130

**Построение.**

1) Строим окружность  $\omega_1(B, R)$ , где  $R$  — произвольный радиус, и отмечаем точки  $A_1$  и  $C_1$  пересечения ее со сторонами угла  $ABC$ .

2) Строим окружность  $\omega_2(O, R)$  с центром в точке  $O$  того же радиуса  $R$  и отмечаем ее точку пересечения  $F_1$  с лучом  $OF$ .

3) Строим окружность  $\omega(F_1, A_1C_1)$ .

4) Пусть  $D_1$  — одна из точек пересечения окружностей  $\omega_2(O, R)$  и  $\omega(F_1, A_1C_1)$  (рис. 130, б). Тогда угол  $D_1OF$  — искомый. Докажем, что  $\angle D_1OF = \angle ABC$ .

Доказательство.

Равенство  $\angle D_1OF = \angle ABC$  следует из равенства треугольников  $A_1BC_1$  и  $D_1OF_1$ . Действительно, по построению  $A_1B = D_1O = C_1B = F_1O$ . Кроме того, по построению  $F_1D_1 = A_1C_1$ , следовательно, треугольники  $A_1BC_1$  и  $D_1OF_1$  равны по трем сторонам. Отсюда следует, что  $\angle D_1OF_1 = \angle A_1BC_1$ , т. е. построенный угол  $D_1OF_1$  равен данному углу  $ABC$ .

**Задача 2 (построение серединного перпендикуляра к отрезку).** Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку  $AB$ .

Поиск решения.

Проведем рассуждения, которые помогут осуществить необходимое построение. Предположим, что серединный перпендикуляр  $a$  к отрезку  $AB$  построен (рис. 131, а). Пусть точки  $F$  и  $D$  лежат на серединном перпендикуляре так, что  $OF = OD$ . Прямоугольные треугольники  $FOB$  и  $DOB$  равны по двум катетам, следовательно,  $BF = BD$ . Иначе говоря, точки  $F$  и  $D$  лежат на окружности  $\omega(B, BF)$  и  $BF > OB$ . Аналогично  $AF = AD$ , так как треугольник  $FOA$  равен треугольнику  $DOA$ . Кроме того, легко увидеть, что  $AF = BF$ . Таким образом, точки  $F$  и  $D$  лежат также и на окружности  $\omega(A, BF)$ .

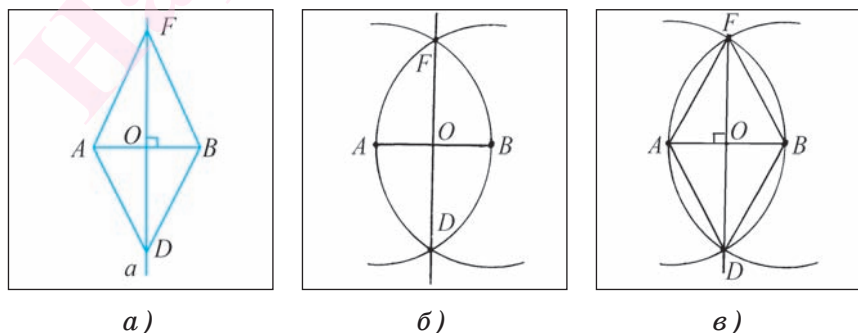


Рис. 131

Построение.

1) Строим окружности  $\omega(A, R)$  и  $\omega(B, R)$ , где  $R \geq \frac{1}{2}AB$ . Пусть, например,  $R = AB$ :  $\omega(A, AB)$  и  $\omega(B, AB)$  (рис. 131, б).

2) Отмечаем точки  $F$  и  $D$  пересечения окружностей  $\omega(A, AB)$  и  $\omega(B, AB)$ .

3) Тогда прямая  $FD$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ . Докажем это.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники  $FAD$  и  $FBD$  (рис. 131, в). Указанные треугольники равны по трем сторонам. Следовательно,  $\angle AFD = \angle BFD$ . Отсюда следует, что в равнобедренном треугольнике  $AFD$  отрезок  $FO$  является биссектрисой, а значит, и высотой и медианой, т. е. прямая  $FO$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

**Задача 3 (построение биссектрисы угла).**

Постройте биссектрису данного угла  $ABC$ .

Поиск решения.

Допустим, что биссектриса  $BE$  данного угла  $ABC$  построена (рис. 132, а). Пусть точки  $F$  и  $D$  лежат на сторонах угла так, что  $BF = BD$ ,  $O = FD \cap BE$ , а точка  $T$  лежит на луче, противоположном лучу  $OB$ . Из равенства прямоугольных треугольников

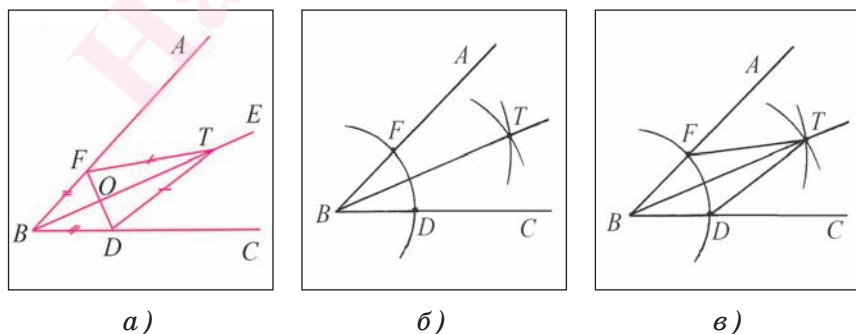


Рис. 132



$FOT$  и  $DOT$  ( $FO = OD$ , катет  $OT$  — общий) следует, что  $FT = DT$ , т. е. точка  $T$  принадлежит окружностям равных радиусов с центрами в точках  $F$  и  $D$ . Построив точку  $T$ , мы построим биссектрису  $BT$  данного угла.

**Построение.**

1) Строим окружность  $\omega(B, R_1)$  произвольного радиуса  $R_1$  с центром в вершине  $B$  данного угла (рис. 132, б).

2) Отмечаем точки  $F$  и  $D$ , в которых окружность  $\omega(B, R)$  пересекает соответственно стороны  $BA$  и  $BC$  данного угла.

3) Строим окружности  $\omega(F, R_2)$  и  $\omega(D, R_2)$ , где  $R_2 > \frac{1}{2}FD$ . Отмечаем точку  $T$  их пересечения, которая лежит внутри данного угла.

4) Проводим луч  $BT$ . Луч  $BT$  — искомый. Докажем это.

**Доказательство.**

Рассмотрим треугольники  $BFT$  и  $BDT$  (рис. 132, б). Эти треугольники равны по трем сторонам ( $BF = BD$  и  $FT = DT$  — по построению,  $BT$  — общая сторона). Из равенства этих треугольников следует, что  $\angle FBT = \angle DBT$ , т. е. луч  $BT$  — биссектриса угла  $ABC$ .

## **2. Построение треугольника по трем элементам.**

В данном пункте рассмотрим задачи на построение треугольника по: а) двум сторонам и углу между ними; б) стороне и двум прилежащим к ней углам; в) трем сторонам.

**Задача 4 (построение треугольника по двум сторонам и углу между ними).** Постройте треугольник, две стороны которого равны двум данным

отрезкам  $a$  и  $b$ , а угол между этими сторонами равен данному углу  $hk$ .

Даны два отрезка  $a$ ,  $b$  и угол  $hk$  (рис. 133, а). Требуется с помощью циркуля и линейки построить треугольник  $ABC$ , две стороны которого, например,  $AB$  и  $AC$ , равны соответственно отрезкам  $a$  и  $b$ , а угол  $BAC$  равен углу  $hk$ .

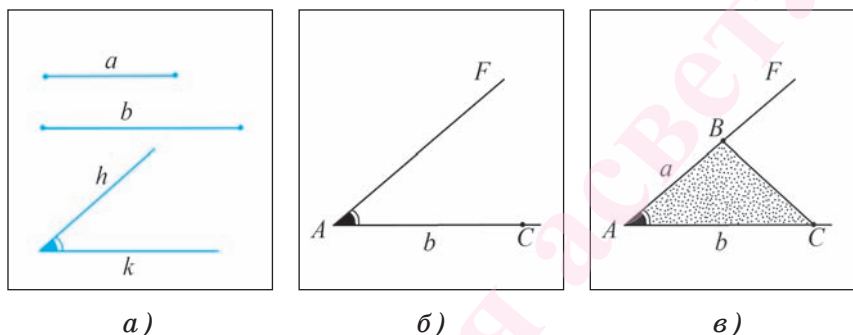


Рис. 133

Построение.

1) Проведем прямую, на ней отложим отрезок  $AC$ , равный отрезку  $b$  (рис. 133, б).

2) Строим угол  $CAF$ , равный углу  $hk$ .

3) На луче  $AF$  отложим отрезок  $AB$ , равный отрезку  $a$ , и проведем отрезок  $BC$ . Треугольник  $ABC$  — искомый (рис. 133, в).

Доказательство.

По построению имеем, что  $AC = b$ ,  $AB = a$  и  $\angle BAC = \angle hk$ .

Исследование.

При любых данных отрезках  $a$  и  $b$  и неразвернутом угле  $hk$  каждое из построений 1) — 3) выполнимо, т. е. искомый треугольник можно построить. Треугольники, которые удовлетворяют условию задачи и строятся при различном выборе прямой и отрезка  $AC$ , равны между собой по двум сторонам и

углу между ними, поэтому говорят, что *данная задача имеет единственное решение*.

**Задача 5 (построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам).** Постройте треугольник, сторона которого равна данному отрезку  $a$ , а углы, прилежащие к этой стороне, равны данным углам  $hk$  и  $mq$ .

Дан отрезок  $a$  и два угла  $hk$  и  $mq$  (рис. 134, а). Требуется с помощью циркуля и линейки построить треугольник  $ABC$ , сторона которого, например  $AC$ , равна отрезку  $a$ , а углы  $BAC$  и  $BCA$  равны соответственно углам  $hk$  и  $mq$ .

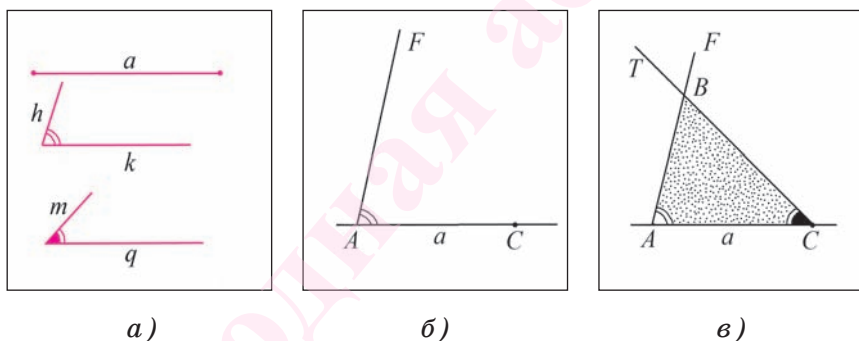


Рис. 134

**Построение.**

1) Проведем прямую и на ней отложим с помощью циркуля отрезок  $AC$ , равный отрезку  $a$  (рис. 134, б).

2) Строим угол  $CAF$ , равный углу  $hk$ .

3) Строим угол  $ACT$ , равный углу  $mq$ .

4) Отмечаем точку  $B$  пересечения лучей  $AF$  и  $CT$ . Треугольник  $ABC$  — искомый (рис. 134, в).

**Доказательство.**

По построению имеем, что  $AC = a$ ,  $\angle BAC = hk$  и  $\angle ACB = \angle mq$ .

Исследование.

Для любого данного отрезка  $a$  и неразвернутых углов  $hk$  и  $mq$  каждое из построений 1) — 4) выполнимо, т. е. искомый треугольник можно построить. Треугольники, которые удовлетворяют условию задачи и строятся при различном выборе прямой и отрезка  $AC$ , равны между собой по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому говорят, что *данная задача имеет единственное решение*.

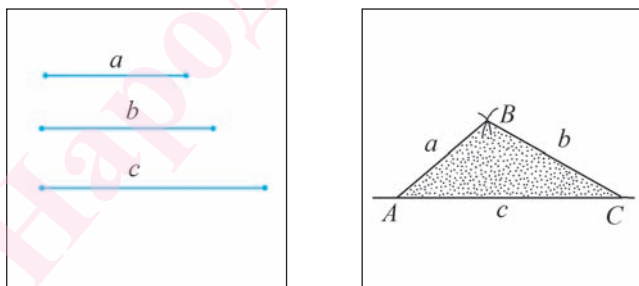
**Задача 6 (построение треугольника по трем сторонам).** Постройте треугольник, стороны которого равны данным отрезкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Даны отрезки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 135, а). Требуется с помощью циркуля и линейки построить треугольник  $ABC$ , стороны которого  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  равны соответственно отрезкам  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Построение.

1) Проведем прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок  $AC$ , равный отрезку  $c$  (рис. 135, б).

2) Строим окружность  $\omega(A, a)$ .



а)

б)

Рис. 135

3) Строим окружность  $\omega(C, b)$ .

4) Пусть  $B$  — одна из точек пересечения окружностей  $\omega(A, a)$  и  $\omega(C, b)$ . Тогда треугольник  $ABC$  — искомый.

Доказательство.

По построению  $AC = c$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ .

Исследование.

Данная задача не всегда имеет решение. Известно, что в любом треугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин двух других его сторон. Таким образом, если длина какого-либо из данных отрезков больше суммы длин двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.

### Задачи к § 5

**355.** Постройте прямую, проходящую через середину  $O$  отрезка  $AB$  и перпендикулярную этому отрезку.

**356.** На данной прямой  $a$  постройте точку, которая равноудалена от концов данного отрезка  $AB$ .

**357.** На данной прямой  $b$  постройте точку, которая равноудалена от сторон данного угла  $hk$ .

**358.** Постройте прямоугольный треугольник, катет которого равен данному отрезку  $a$ , а прилежащий к нему острый угол равен данному углу  $hk$ .

**359.** Постройте прямоугольный треугольник, катет которого равен данному отрезку  $a$ , а противолежащий ему острый угол равен данному углу  $hk$ .

**360.** С помощью циркуля и линейки постройте угол, градусная мера которого равна  $45^\circ$ .

**361.** Дан отрезок  $AB$  и две пересекающиеся прямые  $c$  и  $b$ . На прямой  $c$  постройте точку, находящуюся от прямой  $b$  на расстоянии  $AB$ .

**362.** Даны два отрезка  $TF$ ,  $KO$  и угол  $hk$ . Постройте треугольник, одна из сторон которого равна отрезку  $TF$ , прилежащий к ней угол равен углу  $hk$ , а биссектриса треугольника, проведенная из вершины этого угла, равна отрезку  $KO$ .

**363.** Даны отрезки  $a$ ,  $b$  и угол  $hk$ . Постройте треугольник, сторона которого равна  $a$ , прилежащий к ней угол равен углу  $hk$ , а высота, проведенная к этой стороне, равна отрезку  $b$ .

**364.** Постройте равносторонний треугольник, сторона которого равна половине данного отрезка  $a$ .

**365.** Постройте равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна данному отрезку  $a$ , а его основание составляет четвертую часть боковой стороны.

**366.** Постройте равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна данному отрезку  $a$ , а его периметр равен данному отрезку  $b$ .

**367.** Постройте равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна данному отрезку  $a$ , а медиана, проведенная к основанию, равна данному отрезку  $b$ .

**368.** Постройте прямоугольный треугольник, катет которого равен данному отрезку  $a$ , а медиана, проведенная к другому катету, равна отрезку  $m$ .

**369.** Постройте прямоугольный треугольник, высота которого, проведенная из вершины прямого угла, равна отрезку  $h$ , а острый угол равен данному углу  $mk$ .

**370.** Постройте треугольник  $ABC$ , у которого угол  $A$  равен данному углу  $mk$ , а высоты, проведенные к сторонам угла  $A$ , равны данным отрезкам  $h_1$  и  $h_2$ .

**371.** Дан треугольник  $ABC$ . Постройте прямую, которая параллельна стороне  $AC$  и пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $F$  и  $K$  так, что  $AF = FK$ .

## § 6. Задачи для повторения

### 1. Сравнение и измерение отрезков.

**372.** Точка  $O$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ ,  $AB = 14$  см. Вычислите расстояние между серединами отрезков  $AO$  и  $BO$ .

**373.** Расстояние между серединами отрезков  $AO$  и  $OC$ , на которые точка  $O$  разбивает отрезок  $AC$ , равно 16 см. Вычислите длину отрезка  $AC$ .

**374.** Точки  $O$ ,  $F$  и  $C$  лежат на одной прямой. Известно, что  $OF = 14$  см,  $FC = 20$  см. Какой может быть длина отрезка  $OC$ ?

**375.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, а длины отрезков  $BC$  и  $AC$  равны 24 см и 18 см соответственно. Вычислите длину отрезка  $AB$ , если расстояние между серединами отрезков  $BC$  и  $AC$  равно 3 см.

**376.** Точка  $F$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ , длина которого равна 24 см. Вычислите расстояние между серединами отрезков  $AF$  и  $FB$ .

**377.** Точка  $C$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ , длина которого 30 см. Вычислите расстояние между серединами отрезков  $AC$  и  $BC$ .

**378.** Три различные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой. Известно, что  $AB = 3$  см,  $BC = 9$  см. Найдите отношение длин отрезков  $AB$  и  $AC$ .

**379.** Точка  $O$  — основание перпендикуляра, проведенного из вершины  $A$  к прямой, содержащей сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ . Вычислите расстояние



от точки  $O$  до середины стороны  $BC$ , если длина стороны  $BC$  равна 16 см, а  $BO = 4$  см.

**380.** Отрезок  $BO$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $\angle BAO = 60^\circ$ ,  $AB = 10$  см,  $AC = 20$  см. Вычислите расстояние между серединой стороны  $AC$  и серединой отрезка  $AO$ .

## 2. Сравнение и измерение углов.

**381.** Отрезок  $AC$  — основание равнобедренного треугольника  $ABC$ . Сумма градусных мер вертикальных углов, образованных при пересечении прямых  $AB$  и  $AC$ , равна  $200^\circ$ . Вычислите градусную меру внутреннего угла при вершине  $B$  треугольника  $ABC$ .

**382.** Прямая пересекает боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  в точках  $T$  и  $O$  соответственно, а прямую  $AC$  в точке  $F$  так, что  $OC = CF$  и  $\angle CFO = 40^\circ$ . Вычислите градусную меру внутреннего угла треугольника  $ABC$  при вершине  $B$ .

**383.** Через середину  $T$  боковой стороны  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  проходит прямая, которая пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$  и прямую  $AC$  в точке  $E$  так, что точка  $A$  лежит между точками  $E$  и  $C$ ,  $\angle ETA = 40^\circ$ . Вычислите длину отрезка  $AE$ , если  $\angle ABC = 20^\circ$ , а  $BC = 18$  см.

**384.** Градусная мера угла при вершине  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  равна  $120^\circ$ , а  $\angle CAF = 100^\circ$ . Чему равна градусная мера угла  $BAF$ ?

**385.** Вычислите периметр равнобедренного треугольника  $ABC$ , длина основания  $AC$  которого равна 10 см, а внутренний угол при вершине основания

треугольника в два раза меньше внешнего угла при этой вершине.

**386.** Точка  $F$  лежит на основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $\angle BAC = 30^\circ$ , а сумма градусных мер углов  $CBF$  и  $ABF$  в пять раз больше разности градусных мер этих углов. Вычислите градусные меры углов  $CBF$  и  $ABF$ .

**387.** Отрезок  $AC$  — основание равнобедренного треугольника  $ABC$ . Градусная мера внешнего угла треугольника при вершине основания равна  $150^\circ$ . Точка  $O$  лежит на основании  $AC$  так, что разность градусных мер углов  $CBO$  и  $ABO$  меньше суммы их градусных мер в 4 раза. Вычислите градусные меры углов  $CBO$  и  $ABO$ .

### 3. Смежные и вертикальные углы.

**388.** В треугольнике  $ABC$  длина стороны  $AB$  равна 22 см, а градусная мера одного из четырех углов, образованных при пересечении прямых  $AB$  и  $AC$ , в 11 раз меньше суммы градусных мер трех остальных углов. Вычислите расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AC$ .

**389.** Внешний угол при вершине  $B$  равнобедренного треугольника  $BAC$  с основанием  $BC$  в пять раз больше внутреннего угла при этой же вершине. Биссектриса  $BF$  внешнего угла при вершине  $B$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $O$ . Вычислите градусную меру угла  $AOB$ .

**390.** Внутренний угол при вершине  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  в четыре раза меньше внешнего угла при этой же вершине. Биссектриса  $AF$  внешнего угла при вершине

А пересекает прямую  $BC$  в точке  $T$ . Найдите расстояние между точками  $B$  и  $T$ , если  $AT = a$ .

**391.** Вычислите градусные меры углов, образованных при пересечении двух прямых, если сумма градусных мер двух из этих углов в три раза меньше суммы градусных мер двух других углов.

**392.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  лежит точка  $O$  так, что  $OC = OB = AB$ . Вычислите градусную меру угла  $BAC$ , если  $\angle FOC = 50^\circ$ , где точка  $F$  — середина стороны  $BC$ .

**393.** Градусная мера угла  $ABC$  равна  $152^\circ$ . Луч  $BD$  делит данный угол на два угла, градусные меры которых относятся как  $3 : 5$ , считая от  $BA$ . Вычислите градусную меру угла, сторонами которого служат луч  $BD$  и биссектриса угла, смежного с углом  $ABC$ .

**394.** Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ , причем  $\angle AOC = 50^\circ$ . Луч  $OF$  проходит так, что  $\angle FOD = 40^\circ$ . Вычислите градусную меру угла  $AOF$ .

#### 4. Равнобедренный треугольник.

**395.** Точка  $O$  принадлежит медиане  $AF$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle B = \angle C$ . Докажите, что треугольник  $BOF$  равен треугольнику  $COF$ .

**396.** Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см, а длина одной из сторон равна 6 см. Вычислите длины всех сторон треугольника.

**397.** В равнобедренном треугольнике длина одной стороны равна 10 см, а длина второй стороны равна 12 см. Вычислите периметр треугольника.

**398.** Точки  $F$  и  $T$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $BF = BT$ . Докажите, что  $\angle BAT = \angle BCF$ .

**399.** Сумма длин двух сторон равнобедренного треугольника равна 30 см, а его периметр равен 40 см. Вычислите длины сторон треугольника.

**400.** Периметр равнобедренного треугольника равен 55 см. Вычислите длины сторон треугольника, если длины двух из них относятся как 3 : 4.

**401.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — середина основания  $AC$ . На лучах  $AB$  и  $CB$  вне треугольника  $ABC$  лежат соответственно точки  $T$  и  $F$  так, что  $BT = BF$ . Докажите, что треугольник  $BOF$  равен треугольнику  $BOT$ .

**402.** Точки  $T$  и  $F$  лежат соответственно на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $AT = CF$ . Отрезки  $AF$  и  $CT$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOC$  равнобедренный.

#### 5. Сумма углов треугольника.

**403.** В треугольнике  $ABC$  точки  $D$  и  $F$  лежат на стороне  $AC$  так, что точка  $D$  — внутренняя точка отрезка  $AF$ . Вычислите градусную меру угла  $ABC$ , если  $\angle BDF = 38^\circ$  и  $\angle BFD = 64^\circ$ ,  $AD = DB$ ,  $CF = FB$ .

**404.** Какими могут быть градусные меры углов равнобедренного треугольника, если градусная мера одного из них в пять раз меньше суммы градусных мер двух других?

**405.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  в 4 раза меньше угла  $B$ , а градусная мера внешнего угла при вершине  $A$  больше градусной меры внешнего угла при вершине  $B$  на  $30^\circ$ . Вычислите градусные меры углов треугольника  $ABC$ .

**406.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  градусная мера угла  $B$  равна  $80^\circ$ . На катете  $AC$  отложен отрезок  $CD$ , равный катету  $CB$ . Вычислите градусные меры углов треугольника  $ABD$ .

**407.** Отрезок  $AF$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ . Через точку  $F$  проведена прямая, параллельная стороне  $AC$  и пересекающая сторону  $AB$  в точке  $D$ . Вычислите градусные меры внутренних углов треугольника  $ADF$ , если  $\angle ABC = 64^\circ$ .

**408.** В равнобедренном треугольнике градусная мера одного из внешних углов равна  $140^\circ$ . Какими могут быть градусные меры углов треугольника?

**409.** Прямоугольные треугольники  $ABD$  и  $ACD$  с прямыми углами при вершинах  $B$  и  $C$  соответственно лежат в одной полуплоскости с границей  $AD$ . Катеты  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AB = CD$  и  $\angle AOB = 40^\circ$ . Вычислите градусные меры углов треугольника  $AOD$ .

# ОТВЕТЫ

## Глава 2

### § 1

9. а)  $AB$  и  $AC$ ; б)  $BC$  и  $AC$ ; в) нет. 10. а)  $BF$ ,  $BD$ ,  $BA$ ,  $BC$ ,  $BO$ ; б) да; в) точка  $O$ ; г) да. 11. а)  $AA_1B_1B$ ; б) точка  $C_1$ ; в) да. 12. а) Точка  $T$ ; б) точка  $A$ ; в) нет. 13. а) Точка  $T$ ; б) в точке  $F$ ; в) да. 14. а) В плоскости грани  $ABCD$ ; б) в точке  $D_1$ ; в) да. 16. а)  $AB$  и  $AC$ ; б) да; нет; в) точка  $B$ . 17. а)  $AD$ ,  $AF$ ,  $DC$ ,  $DF$ ; б) да, да; в) точка  $B$ , точка  $A$ ; г) в точке  $F$ . 18. а) Точка  $F$ ; б) в точке  $S$ ; в) да; г)  $AS$ ,  $AO$ ,  $AD$ . 20. а)  $FO$ ,  $FT$ ,  $FP$ ; б) да; в) в точке  $P$ . 23. а) Точка  $F$ ; б) нет; в) да. 24. а) Точка  $B$ ; б) да, да; в) в точке  $O$ ; г) да. 26. а) Точка  $S$ ; б) да; в) в точке  $T$ ; г) да, да. 29. Да. 30. а) В точке  $S$ ; б) да; в) точка  $B_1$ .

### § 2

35. а)  $S$ ,  $R$ ; б) точка  $E$ ; в) да. 36. а) Точки  $O$  и  $K$ ; б) точки  $F$  и  $T$ ; в) да. 37.  $AB = 10,3$  см. 38.  $AC = 8,7$  см. 39. а)  $DD_1C_1C$ ; б) да. 40. а)  $BB_1C_1C$ ; б) да. 41.  $AB = 12$  см. 42.  $AF = 9,5$  см,  $FB = 6,5$  см. 43.  $AO = 13,5$  см,  $OB = 4,5$  см. 44.  $AS = 7,5$  см и  $SB = 4,5$  см или  $AS = 4,5$  см и  $SB = 7,5$  см. 45.  $CD = 5$  см. 46.  $OC = 6$  см. 47. 3,6 см, 7,2 см, 7,2 см. 48.  $AB = 3$  см. 49.  $CB = 4$  см,  $C_1B = 8$  см,  $CA = 8$  см. 50. Да. 51. Точка  $A$ . 53. Две. 54. 10 см. 55. 12 см. 56.  $EF = 6$  см. 57.  $OF = 6$  см. 58.  $BD = 9$  см. 59.  $AO = 14$  см,  $OB = 21$  см. 60.  $AF = 21$  см,  $FC = 28$  см. 61.  $AF = 18$  см. 62.  $AO = 21$  см. 63. 5 см или 19 см. 64.  $AO = 6$  см,  $BO = 12$  см. 65.  $AC = 48$  см. 66. 15 см. 67.  $\frac{14}{3}$  см или 14 см. 68\*.  $FC = 4$  см или  $FC = 8$  см. 69\*. 39 см.

### § 3

70. 8. 71. 3. 72. 12. 74. 4 луча, 6 углов. 75.  $\angle AOB$ ,  $\angle AOC$ ,  $\angle BOC$ . 76. Грань  $BB_1C_1C$ . 79.  $26^\circ$  и  $52^\circ$ . 80.  $\angle AOC = 40^\circ$ ,  $\angle COB = 80^\circ$ . 81.  $\angle AOC = 81^\circ$ ,  $\angle COB = 51^\circ$ . 82.  $\angle BOK = 92^\circ$ ,  $\angle KOC = 68^\circ$ . 83.  $\angle AOB = 70^\circ$ . 84.  $45^\circ$ . 85. Да. 86.  $\angle AOB = 48^\circ$ . 88.  $60^\circ$ . 89.  $\angle FOE = 120^\circ$ . 91.  $\angle AOC = 45^\circ$ ,  $\angle COB = 15^\circ$ ,  $\angle DOB = 120^\circ$ .

92.  $\angle AOE = 25^\circ$ ,  $\angle BOE = 75^\circ$ ,  $\angle AOF = 50^\circ$ . 93.  $\angle AOB = 120^\circ$ .  
94.  $\angle AOD = 150^\circ$ . 95.  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ . 96.  $70^\circ$ ,  $110^\circ$ . 97.  $180^\circ$ . 98.  $90^\circ$ .  
99.  $\angle AOF = 85^\circ$ ,  $\angle BOF = 55^\circ$  или  $\angle AOF = 55^\circ$ ,  $\angle BOF = 85^\circ$ .  
100.  $\angle AOC = 45^\circ$ ,  $\angle COB = 75^\circ$  или  $\angle AOC = 75^\circ$ ,  $\angle COB = 45^\circ$ .  
101.  $\angle COB = 22^\circ 30'$ ,  $\angle AOC = 67^\circ 30'$  или  $\angle AOC = 22^\circ 30'$ ,  
 $\angle COB = 67^\circ 30'$ . 102.  $36^\circ$ ,  $144^\circ$ . 103.  $53^\circ 20'$ . 104.  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  
 $120^\circ$ ,  $120^\circ$ .

### Глава 3

#### § 1

110. 6 см. 111. 6 см, 8 см. 112.  $P_{BDC} = 24$  см. 113. 6 см, 6 см,  
6 см и 6 см, 7 см, 7 см. 121. 12 см. 123.  $\angle AOB = 110^\circ$ .  
125.  $P_{ARF} = 60$  см.

#### § 2

133.  $\angle ACK = 60^\circ$ . 137.  $\angle ABC = 80^\circ$ . 138.  $\angle AOF = 135^\circ$ .  
140. Да. 141. 8 см. 142. 12 см, 12 см, 10 см. 143. 10 см,  
30 см, 30 см. 144. 4 см. 150.  $AF = 7$  см,  $FC = 5$  см.  
151.  $AC = 8$  см.

#### § 3

168. 10 см. 169. 3 см. 175.  $40^\circ$ . 186.  $25^\circ$ . 190\*. 35 см.

### Глава 4

#### § 1

192. а) Да. 193. б) Да. 197. б) Да. 211. Да.

#### § 2

216.  $100^\circ$ . 219.  $36^\circ$  и  $144^\circ$ . 220.  $81^\circ$  и  $99^\circ$ . 221.  $45^\circ$ . 222.  $30^\circ$ .  
223.  $147^\circ$ . 226.  $20^\circ$ . 227.  $50^\circ$ . 228.  $118^\circ$ .

### Глава 5

#### § 1

238.  $65^\circ$ . 239.  $20^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $80^\circ$ . 240.  $20^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $90^\circ$ .  
241.  $90^\circ$ ,  $\alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$ . 243.  $76^\circ 30'$ . 245.  $30^\circ$ . 246.  $113^\circ$ .

247.  $100^\circ$ . 248.  $105^\circ$ . 249.  $20^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $90^\circ$ . 250.  $60^\circ$ .  
252.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . 254.  $80^\circ$ . 256.  $130^\circ$ . 259\*.  $34^\circ$ . 261\*.  $28^\circ$ ,  
 $76^\circ$ ,  $76^\circ$ .

## § 2

262.  $\angle A$ . 263. Нет. 264.  $\angle C_1$ . 265.  $B_1C_1 > AB$ . 275.  $\angle F = 48^\circ$ ,  
 $\angle T = 66^\circ$ . 276. 10 см. 277.  $AB = 17$  см,  $BC = 17$  см. 278.  $OB = 5$  см,  
 $AB = 6$  см. 279. Нет. 283. 2 см. 284.  $AO > AT$ . 285.  $BC > FO$ .  
290.  $45^\circ$ .

## § 3

293.  $m - a$ . 303. 4 см. 304. 5 см. 308. 12 см. 309. 12 см.  
310. 8 см. 311. 24 см. 312.  $AC = 10$  см,  $AB = 20$  см.  
313. 8 см. 315. 8 см. 316. 12 см. 317\*.  $135^\circ$ . 318\*.  $65^\circ$ .  
319\*. 90 см.

## § 4

320. 3 см. 322. а) 8 см; б) 10 см. 326. 8 см. 327. 4 см. 328. 24 см.  
332. 5 см. 333. 42 см. 336. 4 см. 338. 16 см. 339. 4 см. 340. 24 см.  
341. 9 см. 347.  $\frac{a}{2}$ . 348.  $\frac{a}{2}$ . 350.  $2a$ . 353.  $\frac{a}{2}$ . 354.  $135^\circ$ .

## § 6

372. 7 см. 373. 32 см. 374. 34 см или 6 см. 375.  $AB = 6$  см.  
376. 12 см. 377. 15 см. 378.  $AB : AC = 1 : 4$  или  $AB : AC =$   
 $= 1 : 2$ . 379. 4 см или 12 см. 380. 7,5 см. 381.  $\angle B = 20^\circ$ .  
382.  $\angle B = 20^\circ$ . 383. 9 см. 384.  $\angle BAF = 130^\circ$  или  
 $\angle BAF = 70^\circ$ . 385. 30 см. 386.  $\angle ABF = 48^\circ$ ,  $\angle CBF = 72^\circ$  или  
 $\angle ABF = 72^\circ$ ,  $\angle CBF = 48^\circ$ . 387.  $\angle CBO = 45^\circ$ ,  $\angle ABO = 75^\circ$   
или  $\angle CBO = 75^\circ$ ,  $\angle ABO = 45^\circ$ . 388. 11 см. 389.  $\angle AOB = 45^\circ$ .  
390.  $a$ . 391.  $45^\circ$  и  $135^\circ$ . 392.  $80^\circ$ . 393.  $71^\circ$  или  $109^\circ$ .  
394.  $170^\circ$  или  $90^\circ$ . 396. 6 см, 7 см, 7 см или 8 см, 6 см, 6 см.  
397. 32 см или 34 см. 399. 15 см, 15 см, 10 см. 400. 20 см,  
20 см, 15 см или 16,5 см, 16,5 см, 22 см. 403.  $129^\circ$ .  
404.  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$  или  $75^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $30^\circ$ . 405.  $\angle A = 10^\circ$ ,  
 $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 130^\circ$ . 406.  $\angle DBA = 35^\circ$ ,  $\angle BAC = 10^\circ$ ,  
 $\angle BDA = 135^\circ$ . 407.  $\angle DAF = \angle AFD = 29^\circ$ ,  $\angle ADF = 122^\circ$ .  
408.  $40^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $100^\circ$  или  $70^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $40^\circ$ . 409.  $20^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $140^\circ$ .



Учебное издание  
**Шлыков Владимир Владимирович**  
**ГЕОМЕТРИЯ**

Учебное пособие для 7 класса  
общеобразовательных учреждений  
с русским языком обучения

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. В. Гринкевич*. Художник  
обложки *Е. В. Шлыков*. Художник *Е. В. Шлыков*. Художественный  
редактор *Л. В. Павленко*. Технический редактор *Е. Ю. Гурченюк*.  
Корректоры *Т. Н. Ведерникова*, *Д. Р. Лосик*, *В. С. Бабеня*,  
*А. В. Алешко*.

Подписано в печать 15.02.2011. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсет-  
ная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 12,5.  
Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 90 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная  
асвета» Министерства информации Республики Беларусь.  
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.  
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Республиканское унитарное предприятие «Минская фабрика  
цветной печати». ЛП № 02330/0494156 от 03.04.2009.  
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.

**Шлыков, В. В.**

**Ш69** Геометрия : учеб. пособие для 7-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — Минск : Нар. асвета, 2011. — 197 с. : ил.

ISBN 978-985-03-1491-8.

Предыдущие издания под названием «Геометрия, 8» выходили в издательстве «Адукацыя і выхаванне» в 2004—2005 гг.

УДК 514(075.3=161.1)  
ББК 22.151я721

Народная асвета

---

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользо- вание учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			