



Я сдам ОГЭ!



ФИПИ

И. В. Яценко
С. А. Шестаков

МАТЕМАТИКА

ОГЭ

2018

Курс самоподготовки

Технология решения заданий

Теория | Практика | Ключи и ответы

Я сдам ОГЭ!

И. В. Яценко
С. А. Шестаков

МАТЕМАТИКА

ОГЭ

Курс самоподготовки Технология решения заданий

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2018

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
Я97

6+

Ященко И. В.

Я97 Я сдам ОГЭ! Математика. Курс самоподготовки. Технология решения заданий : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. — М. : Просвещение, 2018. — 128 с. : ил. — ISBN 978-5-09-057511-9.

Модульный курс «Я сдам ОГЭ!» создан авторским коллективом из числа членов Федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов и экспертов ОГЭ. Он включает учебные пособия «Курс самоподготовки. Технология решения заданий» и «Типовые задания».

Учебное пособие «Курс самоподготовки» посвящено методам решения задач. Оно предназначено для эффективной организации подготовки обучающихся 8—9 классов к государственной итоговой аттестации.

Для удобства подготовки и выстраивания индивидуальных образовательных траекторий материал пособия разбит на отдельные занятия по разным темам и позволяет познакомиться со всеми типами заданий ОГЭ по математике.

Пособие адресовано педагогам, школьникам и их родителям для проверки и самопроверки достижения требований образовательного стандарта к уровню подготовки выпускников.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72



Учебное издание

**Ященко Иван Валериевич
Шестаков Сергей Алексеевич**

**Я сдам ОГЭ!
Математика**

**Курс самоподготовки
Технология решения заданий**

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией математики и информатики *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Дизайн *А. Г. Бушина*
Компьютерная верстка и техническое редактирование *Т. А. Поповой*
Корректоры *Е. В. Аратова, Н. А. Ерохина, В. П. Костылева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 16.11.17. Формат
84 × 108¹/₁₆. Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 10,76. Доп. тираж 7000 экз. Заказ А-2957ТАТ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в типографии Полиграфическо-издательского
комплекса «Идел-Пресс», филиала АО «ТАТМЕДИА». 420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.
e-mail: id-press@yandex.ru <http://www.idel-press.ru>

ISBN 978-5-09-057511-9

© Издательство «Просвещение», 2018
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2018
Все права защищены

Предисловие

Настоящее издание является частью комплекта «Математика. Я сдам ОГЭ!», предназначенного для эффективной подготовки учащихся 7—9 классов к Основному государственному экзамену по математике. Пособие предназначено для использования в учебном процессе в качестве дополнения к основному учебно-методическому комплексу по предмету и может стать основой для внеурочных самостоятельных и факультативных занятий по подготовке к ОГЭ или систематического курса итогового повторения и ликвидации пробелов в знаниях учащихся основной школы.

Пособие представляет собой модульный курс, нацеленный как на снятие рисков преодоления порогового значения минимального количества баллов, необходимого для получения аттестата об общем (неполном среднем) образовании, так и на высокий экзаменационный результат, необходимый для продолжения образования в профильных классах.

В 2018 г. структура Основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике будет отлична от структуры прошлых лет. Изменения коснулись именно структуры экзамена, число заданий осталось прежним — 26 задач. Все задания модуля «Реальная математика», за исключением геометрической задачи с практическим содержанием, объединены с заданиями модуля «Алгебра», геометрическая задача включена в модуль «Геометрия». Тем самым, модуль «Алгебра» содержит 17 заданий, 3 из которых являются задачами повышенного и высокого уровней сложности и включены во вторую часть экзаменационной работы. Модуль «Геометрия» теперь состоит из 9 заданий, 3 из которых являются задачами повышенного и высокого уровней сложности и включены во вторую часть экзаменационной работы. Таким образом, вторая часть экзаменационной работы не изменилась.

В целях обеспечения преемственности задания с алгебраической составляющей упразднённого модуля «Реальная математика» выделены в данном пособии в отдельный модуль «Задачи с практическим содержанием». Таким образом, пособие включает в себя три модуля: «Задачи с практическим содержанием», «Алгебра» и «Геометрия».

Каждый из модулей пособия состоит из определённого числа занятий, в которых даётся материал на повторение основных понятий, фактов, идей и методов решения, а также приводятся примеры типовых заданий с решением и некоторыми комментариями. Некоторые занятия помечены звёздочкой, которая означает, что их материал целесообразно изучать только в случае успешного усвоения темы.

Для итогового контроля в конце пособия приводится диагностическая работа в двух вариантах в формате варианта ОГЭ.

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 1. Чтение и анализ данных, представленных в виде таблиц.
 Занятие 2. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков.
 Занятие 3. Чтение и анализ данных, представленных в виде диаграмм.
 Занятие 4. Перевод (конвертация) единиц измерений, сравнение величин, прикидка и оценка, соответствия между величинами и их значениями, запись чисел в стандартном виде.
 Занятие 5. Практические задачи на вычисления по данным формулам.
 Занятие 6. Практические арифметические задачи с текстовым условием.
 Занятие 7. Практические арифметические задачи с текстовым условием на проценты, части, доли.
 Занятие 8. Понятие вероятности. Практические задачи на вычисление вероятностей.

Общие рекомендации к занятиям

Этот модуль посвящён задачам, связанным с отработкой базовых математических навыков и умений применять эти навыки в практических ситуациях. Такие задачи составляют значительную часть заданий Основного государственного экзамена по математике (7 заданий из 26). Многие из этих задач можно встретить и в вариантах Единого государственного экзамена; в определённом смысле эти задачи обеспечивают преемственность между ОГЭ и ЕГЭ. При успешной отработке навыков решения подобных заданий в рамках подготовки к ОГЭ можно будет впоследствии потратить меньше времени для их повторения в рамках подготовки к ЕГЭ (поэтому материал модуля дополнен примерами заданий, аналогичных заданиям открытого банка задач ЕГЭ). Освободившееся время можно уделить освоению или отработке методов решения более сложных задач. Рекомендации к решению задач по планиметрии с практической составляющей включены в модуль «Геометрия».

Занятие 1. Чтение и анализ данных, представленных в виде таблиц

Бедущим каналом восприятия у большинства людей является визуальный. Отчасти именно этим объясняется стремление к наглядности при подаче той или иной информации в различных источниках — от учебных пособий до газет, журналов и интернет-контента. Кроме того, представление информации (особенно статистической) в виде таблиц, графиков, диаграмм позволяет удобно и быстро считывать эту информацию с целью её анализа, сопоставления или прогноза на будущее. Поэтому умение «читать» (кавычки в дальнейшем будем опускать) таблицы, графики и диаграммы является одним из базовых для получения многих профессий и адаптации человека в социуме.

Несмотря на это, соответствующие задания ОГЭ по математике вызывают затруднения примерно у каждого десятого школьника. Рассмотрим несколько таких задач, связанных с табличным заданием данных, начав с наиболее простой.

Пример 1. В таблице даны результаты забега мальчиков 8 класса на дистанцию 60 м. Зачёт выставляется при условии, что показан результат не хуже 10,5 с.

Номер дорожки	I	II	III	IV
Время, с	10,6	9,7	10,1	11,4

- а) Укажите время победителя.
 б) Укажите номера дорожек, по которым бежали мальчики, получившие зачёт.
 1) только I 2) только II 3) I, IV 4) II, III

Решение. а) Время победителя — наименьшее из всех, т. е. 9,7. б) Для ответа на вопрос достаточно найти в нижней строчке таблицы числа, меньшие либо равные 10,5. Это 9,7 (вторая дорожка) и 10,1 (третья дорожка).

Ответ: а) 9,7; б) 4.

Типичной ошибкой при ответе на вопрос пункта «а» является указание наибольшего времени, хотя это время соответствует худшему результату. Другой типичной ошибкой (как правило, обусловленной обычной невнимательностью при чтении условия) является указание вместо искомого значения некоторого другого, которое также может содержаться в таблице.

Пример 2. В таблице приведена информация о крупнейших городах России (по данным на 2014 г.). Какой город занимает восьмое место по площади? В ответе укажите численность населения этого города (в тыс. чел.).

Город	Население, тыс. чел.	Площадь, кв. км	Плотность, чел. / кв. км
Екатеринбург	1412	491	2866
Казань	1191	425	1560
Москва	12 108	2511	4823
Нижний Новгород	1273	410	3100
Новосибирск	1548	506	3961
Омск	1166	573	1968
Ростов-на-Дону	1110	349	3167
Самара	1172	541	2164
Санкт-Петербург	5132	1439	3566
Челябинск	1169	500	2254

Решение. Всего в таблице представлены данные по 10 городам. Расположим числа из второго столбика в порядке возрастания, ограничившись первыми тремя (восьмое место в порядке убывания будет соответствовать третьему месту в порядке возрастания): 349; 410; 425. Значит, искомым городом является Казань, а искомая численность равна 1191 тыс. чел.

Ответ: 1191.

В более сложных случаях ответ на вопрос задания требует некоторых вычислений, а иногда сравнения и сопоставления данных.

Пример 3. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше других от Солнца?

Планета	Марс	Меркурий	Нептун	Сатурн
Расстояние, км	$2,28 \cdot 10^8$	$5,79 \cdot 10^7$	$4,497 \cdot 10^9$	$1,427 \cdot 10^9$

1) Марс 2) Меркурий 3) Нептун 4) Сатурн

Решение. Числа в таблице записаны в стандартном виде. Поэтому больший показатель степени числа 10 будет соответствовать большему значению расстояния. Таким образом, достаточно сравнить числа в двух последних столбцах таблицы. По-

сколько показатели степени числа 10 в этих столбцах одинаковы, а $4,497 > 1,427$, то из четырёх данных наиболее удалённой от Солнца планетой является Нептун.

Ответ: 3.

В некоторых случаях, для того чтобы решить задачу, достаточно подсчитать стоимость товара или услуги, исходя из данных задачи, и в ответе указать наименьшую или наибольшую из них либо сделать выборку товаров или услуг, суммарная стоимость которых не превосходит определённого значения. В последнем случае задача может иметь несколько решений, и в ответе достаточно указать любое из них.

Пример 4. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчики	Языки	Стоимость услуг, р. / день
1	Немецкий, испанский	14 000
2	Английский, немецкий	12 000
3	Английский	4000
4	Английский, французский	12 000
5	Французский	6000
6	Испанский	8000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 24 000 р. в день. В ответе для собранной группы укажите в порядке возрастания номера переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение. Для решения задачи достаточно выполнить несложный перебор. Требованиям задачи удовлетворяют, например, переводчики 1, 3, 5.

Ответ: 135.

Разумеется, для ответа на вопрос последней задачи не нужно искать все возможные решения (их в подобных задачах обычно несколько) и уж тем более оптимальное по стоимости. Однако в банке задач ОГЭ есть и задания, в которых необходимо найти именно оптимальный вариант — по стоимости либо другой характеристике.

Пример 5. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена, р.	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2

Продолжение

Модель вафельницы	Средняя цена, р.	Функциональность	Качество	Дизайн
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

Решение. Задачу можно решить двумя способами, первый из которых состоит в прямом подсчёте рейтингов:

рейтинг модели А равен $R_A = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4) - 0,01 \cdot 4100 = 15$;

рейтинг модели Б равен $R_B = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2) - 0,01 \cdot 4700 = -23$;

рейтинг модели В равен $R_V = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1) - 0,01 \cdot 5500 = -19$;

рейтинг модели Г равен $R_T = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0) - 0,01 \cdot 5400 = -38$.

Второй способ основан на анализе условия, оценке и прикидке: очевидно, что при данных в таблице значениях в выражении для R уменьшаемое $4(2F + 2Q + D)$ максимально, а вычитаемое $0,01P$ минимально именно для модели А. При таком решении считать придётся только один — наилучший — рейтинг, т. е. рейтинг модели А.

Ответ: 15.

Отметим, что оценка и прикидка «работают» далеко не во всех случаях и на экзамене лучше напрямую просчитать наиболее оптимальный вариант, чем ошибиться в предположении или догадке.

Занятие 2. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков

Простейшие задачи на чтение и анализ данных, представленных в виде графиков, делятся на две чётко разграниченные группы: в первой требуется найти точку оси абсцисс, ответив на вопрос типа «Какого числа значение величины было равно данному?», во второй — найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, т. е. точку оси ординат. Ошибочные ответы обычно обусловлены невнимательностью: перепутаны наибольшее и наименьшее значения, вместо температуры в ответе указана дата и т. д.

Пример 1. На рисунке 1 изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота на уровне моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 580 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.

Решение. Одно деление на вертикальной оси соответствует 200 миллиметрам ртутного столба. Для ответа на вопрос задачи достаточно мысленно провести горизонтальную прямую через точку вертикальной оси (или использовать линейку), находящуюся на одно деление ниже отметки 600. Эта прямая пересечёт данный график в точке с абсциссой 2.

Ответ: 2.

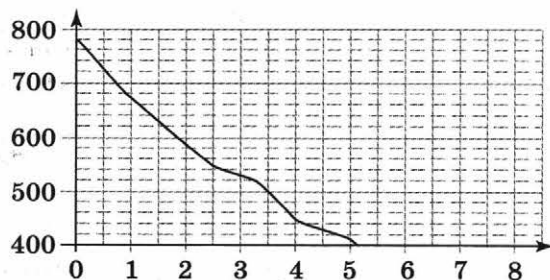


Рис. 1

Пример 2. На рисунке 2 жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

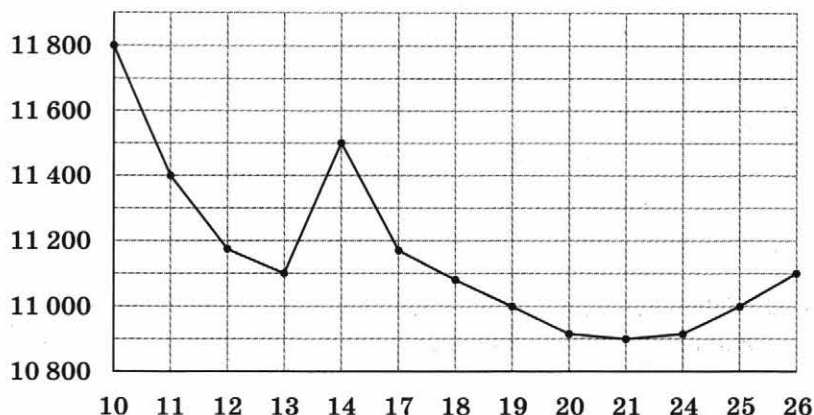


Рис. 2

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно найти самую «высокую» точку графика. Очевидно, эта точка соответствует закрытию торгов 10 ноября. Искомая цена в этот момент была равна 11 800 долларам за тонну.

Ответ: 11 800.

Типичной ошибкой при решении подобных задач является запись в ответ даты вместо стоимости.

Пример 3. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике (рис. 3) показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первый час работы фонарика.

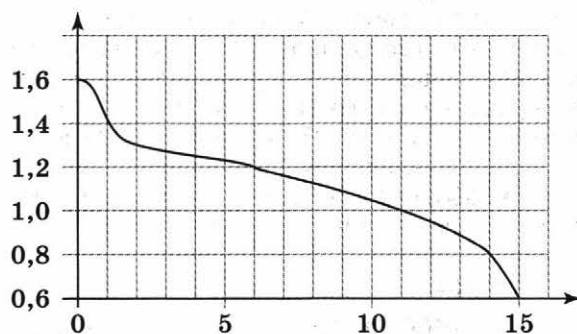


Рис. 3

Решение. Цена деления горизонтальной оси равна одному часу. За первый час работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 вольт до 1,4 вольт, т. е. падение напряжения составит 0,2 вольт.

Ответ: 0,2.

В более сложных случаях ответ на вопрос задания требует минимальных вычислений: разности наибольшего и наименьшего значения некоторой величины, расчёта стоимости или числа акций, подсчёта среднего арифметического и т. д.

Пример 4. На графике (рис. 4) показано изменение температуры воздуха (в градусах Цельсия) в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток сентября. На оси абсцисс откладывается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику разницу между наибольшим и наименьшим значениями температуры в воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.

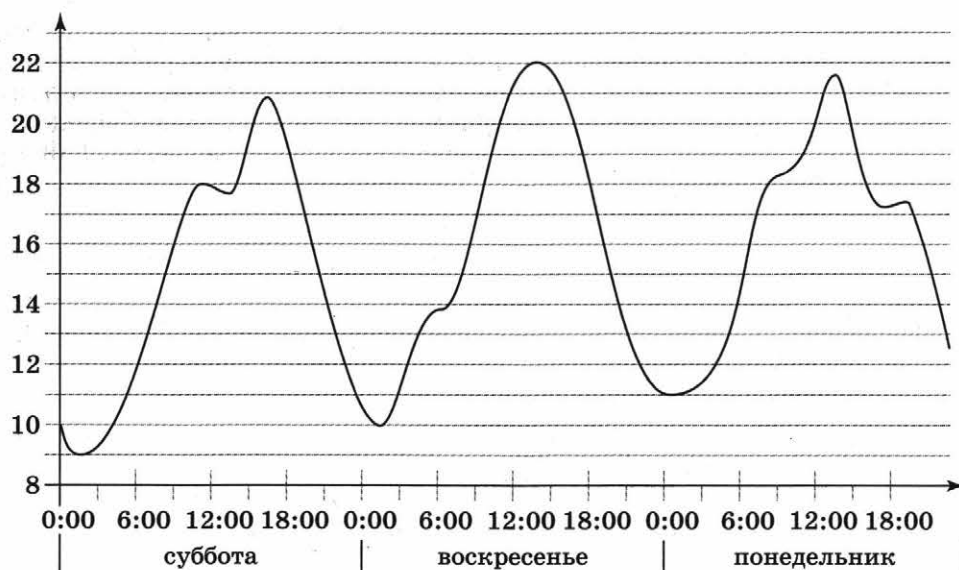


Рис. 4

Решение. Наибольшая температура в воскресенье составила 22° , а наименьшая 10° , поэтому разница температур равна 12° .

Ответ: 12.

Типичная ошибка при решении предыдущей задачи обусловлена невнимательностью при чтении условия: в ответ записывают разность наибольшей и наименьшей температуры во все три дня, забывая о том, что речь идёт именно о воскресенье.

Пример 5. На графике (рис. 5) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в $\text{Н} \cdot \text{м}$. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу числа оборотов в минуту характеристику крутящего момента.

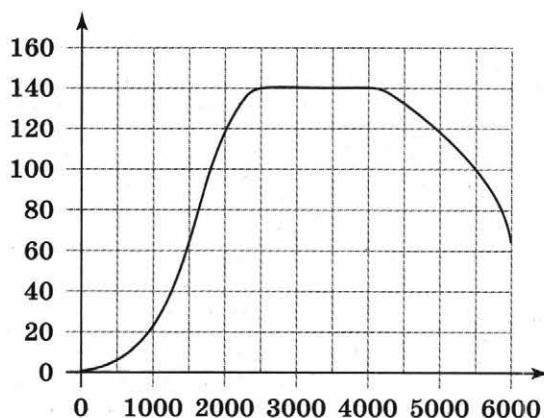


Рис. 5

Интервал

- А) 0–500 об./мин
Б) 1500–2000 об./мин
В) 3000–4000 об./мин
Г) 4000–6000 об./мин

Характеристика

- 1) при увеличении числа оборотов самый быстрый рост крутящего момента
- 2) крутящий момент не превышает $20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ на всём интервале
- 3) при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется
- 4) при увеличении числа оборотов крутящий момент падает

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Решение. На экзамене отвечать на вопросы можно, начав с самого простого для себя (для каждого такой вопрос может быть своим). Но и последовательный поиск нужного соответствия довольно быстро приводит к цели.

Начнём с первой характеристики. Рост крутящего момента происходит при росте оборотов от нуля до двух с небольшим тысяч. Этим значениям соответствуют только интервалы А) и Б). На интервале А) одному горизонтальному делению соответствует рост менее чем на одно деление по вертикали. На интервале Б) каждому горизонтальному делению соответствует рост более чем на одно деление по вертикали. Поэтому характеристике 1) отвечает интервал Б).

Характеристика 2) является одной из наиболее простых для поиска нужного соответствия: крутящий момент не превышает $20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ только при оборотах от 0 до 1000. Поэтому характеристике 2) отвечает интервал А).

Характеристика 3) не сложнее предыдущей для поиска нужного соответствия: при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется при числе оборотов от почти 3000 до 4000 с небольшим. Из двух оставшихся интервалов только интервал В) лежит в указанных пределах. Значит, характеристике 3) отвечает интервал В), а характеристике 4) — интервал Г) (в самом деле, только на этом интервале начинается падение числа оборотов двигателя). Заполним таблицу.

Ответ:	А	Б	В	Г
	2	1	3	4

Занятие 3. Чтение и анализ данных, представленных в виде диаграмм

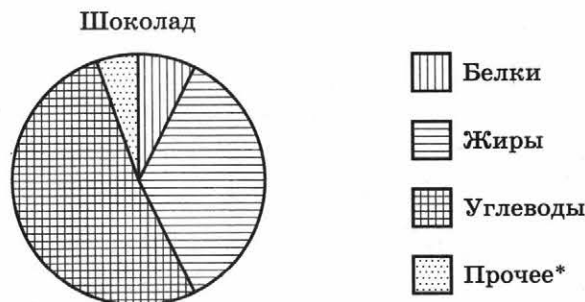
Для представления, сопоставления, интерпретации, прогнозирования и анализа информации наряду с таблицами и графиками часто используют диаграммы — круговые и столбчатые. Такие диаграммы позволяют наглядно представить различие в росте тех или иных показателей и параметров, доли тех или иных величин в общей совокупности некоторых характеристик и т. д. Задачи на чтение диаграмм не сложнее задач на чтение графиков. В простейших случаях надо определить, оценить или соотнести с условием долю, которую занимает в общей площади круговой диаграммы сектор, соответствующий одной из характеристик, подсчитать число столбиков, удовлетворяющих тому или иному требованию, либо сравнить некоторые из них по высоте. Немного сложнее задачи, требующие определённого расчёта или сопоставления данных.

Заметим, что диаграммы применяются для наглядного, качественного сравнения тех или иных показателей или характеристик. Решение подобных задач не предполагает использования транспортира (для круговых диаграмм) или линейки (для столбчатых диаграмм).

Пример 1. На диаграмме (рис. 6) показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, содержание каких веществ преобладает.

- | | |
|-------------|-----------|
| 1) Белки | 2) Жиры |
| 3) Углеводы | 4) Прочее |

В ответе запишите номер выбранного варианта ответа.



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества

Рис. 6

Решение. Наибольшая по площади часть диаграммы (она выделена штриховкой «в клетку») соответствует наибольшему содержанию вещества. В данном случае это углеводы.

Ответ: 3.

Пример 2. На диаграмме (рис. 7) показан возрастной состав населения Индонезии. Определите по диаграмме, доли населения каких возрастов составляют менее 25 % от всего населения.

- 1) 0—14 лет 2) 15—50 лет
3) 51—64 года 4) 65 лет и старше

В ответе запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Двадцати пяти процентам населения соответствует площадь четверти круга, занятого диаграммой. Ясно, что площадь каждого из секторов, отвечающих возрастам 3) и 4), меньше четверти площади круга, а площадь каждого из двух других секторов больше площади четверти круга.

Ответ: 34.

Пример 3. На диаграмме (рис. 8) представлены семь крупнейших по площади (в млн. км²) территорий стран мира.

Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Судан входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.
2) Площадь территории США составляет 9,5 млн км².
3) Площадь Австралии меньше площади Канады.
4) Площадь России больше площади Бразилии примерно вдвое.

В ответе запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Поскольку Судан не входит в семёрку представленных стран, утверждение 1) ложно. Утверждения 2), 3), 4) являются истинными, что следует из данных диаграммы.

Ответ: 234.

Пример 4. На диаграмме (рис. 9) показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе Ейске по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха в Ейске весной.

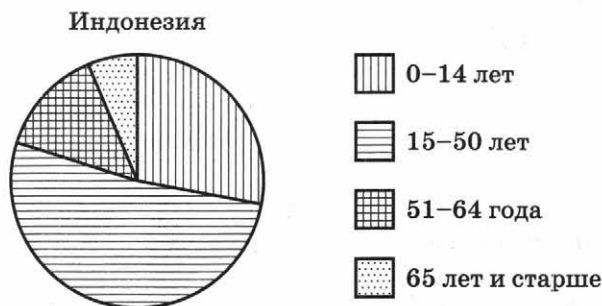


Рис. 7

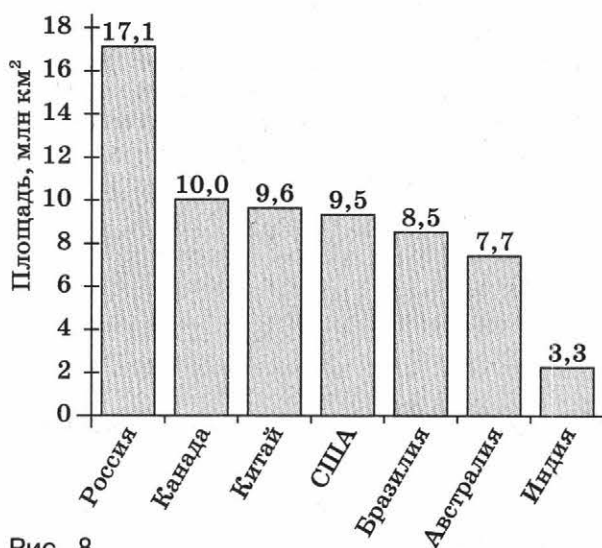


Рис. 8

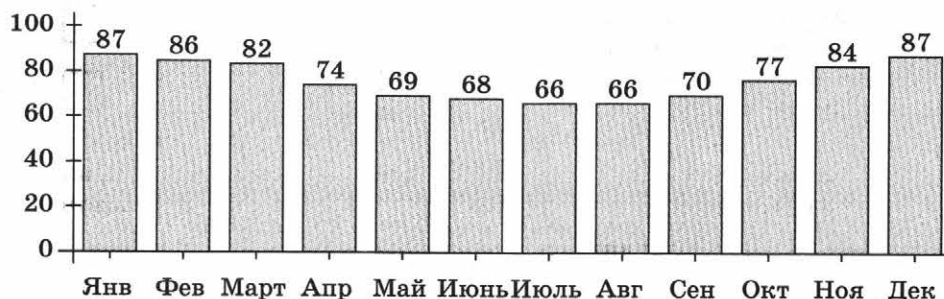


Рис. 9

Решение. Средняя относительная влажность воздуха в Ейске весной равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в марте, апреле и мае, т. е. равна $\frac{82+74+69}{3} = 75$.

Ответ: 75.

Занятие 4. Перевод (конвертация) единиц измерений, сравнение величин, прикидка и оценка, соответствия между величинами и их значениями, запись чисел в стандартном виде

Это занятие посвящено отработке навыков решения задач, связанных с конвертацией величин, т. е. переводом единиц измерения в другой формат, сравнением, сопоставлением и оценкой величин, выбором правдоподобного результата. Такие навыки непосредственно связаны ещё и с умениями решать текстовые задачи, в том числе на составление уравнений и вычисления по данным — иногда достаточно сложным — формулам.

Пример 1. В некоторых странах размер брюк указывается в дюймах, а его значение равно длине пояса. Школьница такой страны измерила свой пояс с помощью сантиметровой ленты и получила 63,5 см. Брюки какого размера она должна купить, если один дюйм равен 2,54 см?

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно найти длину пояса в дюймах, разделив её значение в сантиметрах на 2,54. Получим $\frac{63,5}{2,54} = 25$.

Ответ: 25.

Пример 2. Скорость пешехода равна 6 км/ч. Сколько метров он проходит за минуту?

Решение. По условию задачи нужно перевести километры в метры, а часы — в минуты: $6 \text{ км/ч} = \frac{6000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = 100 \text{ м/мин}$.

Ответ: 100.

Отметим, что все подобные задачи в ОГЭ и ЕГЭ связаны с реальными значениями величин. Поэтому, например, если при решении предыдущей задачи в результате ошибочного деления получили 1000 м/мин или 10 м/мин, следует выполнить проверку решения, поскольку полученные значения явно неправдоподобны.

Следующие примеры связаны с оценкой и прикидкой, выбором правдоподобного результата, установлением соответствия между величинами и их значениями. Такие навыки, помимо непосредственного решения соответствующего задания ОГЭ по математике, позволят проверять ответы, полученные при решении других задач, отбрасывать неправдоподобные результаты и находить ошибки в решениях.

Пример 3. В комнате стоит шкаф-купе. Его высота составляет:

- 1) 220 мм; 2) 220 см; 3) 220 м; 4) 220 км.

Укажите номер правильного ответа.

Решение. Ясно, что для шкафа в комнате высота 220 мм неправдоподобно мала, а высоты в 220 м и 220 км являются неправдоподобно большими. Поэтому его высота 220 см.

Ответ: 2.

Пример 4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца. В таблице ответа под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Величина**Значение**

- А) длительность полнометражного мультфильма
 Б) время обращения Марса вокруг Солнца
 В) длительность звучания одной песни
 Г) продолжительность вспышки фотоаппарата

- 1) 4 мин
 2) 75 мин
 3) 687 сут.
 4) 0,15 с

Ответ:

А	Б	В	Г

Решение. Для решения подобных задач совершенно не обязательно обладать серьёзными знаниями по астрономии. Полнометражный мультфильм длится более часа, и единственное возможное значение для его длительности в данном случае — 75 мин. Аналогичным образом, единственно возможными правдоподобными значениями из предложенных вариантов для продолжительности вспышки фотоаппарата и длительности звучания одной песни являются соответственно 0,15 с и 4 мин. Значит, время обращения Марса вокруг Солнца составляет 687 сут. Поэтому таблица заполняется так:

Ответ:

А	Б	В	Г
2	3	1	4

Занятие 5. Практические задачи на вычисления по данным формулам

Это занятие посвящено задачам на вычисления и преобразования по данным формулам. По сути, в условиях этих задач даются формулы из разных областей знаний, причём значения всех величин, за исключением одной, в этих формулах известны. Требуется найти значение именно этой величины. Есть подобные задачи и в ЕГЭ по математике — как базового, так и профильного уровня. Отметим, что для решения подобных задач вовсе не обязательно быть специалистом, например, в области физики или химии, здесь проверяется именно умение вычислять значение искомой величины по данной формуле и данным константам, т. е., по сути, это задачи на «понимание при чтении», в данном случае чтения условия. При этом в само условие можно не вникать, более того, это и не нужно: достаточно выписать данную формулу, значения данных в условии величин, подставить эти значения в выписанную формулу и найти из неё единственную неизвестную величину.

Пример 1. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 311 градусов по шкале Фаренгейта?

Решение. По условию $t_F = 311$. Поэтому $t_C = \frac{5}{9}(311 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 279 = 5 \cdot 31 = 155$.

Ответ: 155.

Пример 2. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле $E = mgh$, где m — масса тела (в килограммах), g — гравитационная постоянная, а h — высота (в метрах), на которой

находится это тело относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $h = 40 \text{ м}$, а $E = 196 \text{ Дж}$.

Решение. Найдём искомую массу, используя данную формулу и данные значения остальных величин: $m = \frac{E}{gh} = \frac{196}{9,8 \cdot 40} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Пример 3. Площадь треугольника со сторонами a , b , c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Найдите площадь треугольника, если длины его сторон равны 15, 36, 39.

Решение. Пусть $a = 15$, $b = 36$, $c = 39$. Тогда $p = \frac{15+36+39}{2} = 45$, $p - a = 45 - 15 = 30$, $p - b = 45 - 36 = 9$, $p - c = 45 - 39 = 6$. Поэтому искомая площадь $S = \sqrt{45 \cdot 30 \cdot 9 \cdot 6} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6} = \sqrt{5^2 \cdot 6^2 \cdot 9^2} = 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$.

Ответ: 270.

Занятие 6. Практические арифметические задачи с текстовым условием

Это занятие посвящено знакомству с различными формулировками задач, которые считаются одними из самых простых задач ОГЭ и ЕГЭ по математике. Для решения этих практико-ориентированных задач достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями (вычисления по действиям), деление с остатком и последующее округление с недостатком или избытком и т. д. В таких задачах желательно делать проверку, в том числе и на здравый смысл — с помощью прикидки и оценки. В некоторых случаях, когда речь идёт о небольших числах, ответ можно получить и с помощью обычного перебора.

Пример 1. Конфета стоит 8 р. 85 к. Какое наибольшее число конфет можно купить на 100 р.?

Решение. Решать задачу можно по-разному, например поделив 100 на 8,85 с остатком и получив в качестве целой части 11. Можно сделать прикидку, сообразив, что 10 конфет стоят 88 р. 50 к. и, чтобы при покупке не выйти за пределы 100 р., добавить к этим 10 конфетам можно ещё только одну.

Ответ: 11.

Пример 2. Шоколадка стоит 71 р. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 500 р. в воскресенье?

Решение. Найдём вначале, сколько шоколадок можно купить на 500 р. Как и предыдущую, эту задачу можно решать по-разному, например поделив 500 на 71 с остатком и получив в качестве целой части 7. Можно сделать прикидку, сообразив, что 8 шоколадок стоят 568 р. и, чтобы при покупке не выйти за пределы 500 р., нужно купить 7 шоколадок. Поскольку по условию акции за каждые три купленные шоколадки покупатель получает ещё одну в придачу, то за 7 купленных шоколадок покупатель получит ещё 2 по условиям специального предложения, т. е. всего можно будет получить 9 шоколадок.

Ответ: 9.

Пример 3. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 40 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение. Всего теплоход вмещает 775 человек. Задачу можно решить формально, разделив 775 на 40 с остатком и округлив результат до большего целого числа, а можно обойтись оценкой или прикидкой: понятно, что двадцати шлюпок хватит для размещения 800 человек, а если их число уменьшить на одну, то разместить 775 человек не получится.

Ответ: 20.

Пример 4. Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,4 г 4 раза в день в течение 14 дней. Упаковка содержит 15 таблеток по 0,4 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется купить на весь курс лечения?

Решение. Больному нужно принимать по 0,4 г лекарства 4 раза в день, т. е. 1,6 г в сутки. Поэтому на весь курс ему потребуется $1,6 \cdot 14 = 22,4$ г лекарства. Одна упаковка содержит 15 таблеток по 0,4 г, т. е. 6 г. Ясно, что четырёх упаковок (суммарный вес лекарства в них составляет 24 г) хватит на весь курс, а трёх окажется недостаточно.

Ответ: 4.

Пример 5. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 р. 70 к. Счётчик электроэнергии 1 июля показывал 21 433 киловатт-часа, а 1 августа — 21 615 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за июль?

Решение. Подобные задачи часто вызывают непреодолимые арифметические трудности из-за нерационального решения, когда учащийся находит стоимость электроэнергии (или воды, если речь идёт о расходе воды) за каждый месяц, получая огромные числа, а затем ищет их разность. Решение таких житейских задач предполагает, конечно же, вычисление разности показателей счётчика за два соседних месяца, а уже только после этого умножение найденного числа на стоимость единицы электроэнергии (или воды). В данном случае число киловатт-часов, которое необходимо оплатить, равно $21\,615 - 21\,433 = 182$. Значит, заплатить за израсходованную в июле электроэнергию придётся $182 \cdot 3,7 = 673,4$ р.

Ответ: 673,4.

Занятие 7. Практические арифметические задачи с текстовым условием на проценты, части, доли

Трудности, которые вызывают у многих учащихся даже несложные задачи на проценты, обычно во многом обусловлены достаточно формальным подходом к изложению темы. А ведь для решения подавляющего большинства задач на проценты достаточно понимать, что процент — это просто одна сотая часть числа, научиться «переводить» условие задачи на язык десятичных дробей, а после её решения — делать обратный «перевод». Так, например, если товар стоил a рублей, а потом его цена выросла, например, на 8, 18 или 28 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a увеличить соответственно на 8, 18 или 28 сотых. Получим $1,08a$, $1,18a$, $1,28a$ соответственно. Если же цена уменьшилась на 8, 18 или 28 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a уменьшить соответственно на 8, 18 или 28 сотых. Получим $0,92a$, $0,82a$, $0,72a$ соответственно.

Так как процент — это сотая часть числа, для того чтобы найти k % от числа a , достаточно умножить число a на k сотых. Получим $\frac{k}{100} \cdot a$.

Пример 1. Найдите 20 % от 84 килограммов. Ответ дайте в килограммах.

Решение. 20 % данной величины — это двадцать сотых (т. е. две десятых) этой величины. Поэтому 20 % от 84 килограммов — это $0,2 \cdot 84 = 16,8$ кг.

Ответ: 16,8.

Попробуем ответить на следующий вопрос: на сколько процентов товар b дороже товара a , если товар a дешевле товара b на 20 %? Кажется, ответ очевиден: на 20 %. Но это не так. В самом деле, $a = 0,8b = \frac{4}{5}b$, значит, $b = \frac{5}{4}a = 1,25a$, т. е. b больше a на двадцать пять сотых. Значит, b дороже a на 25 %. Этот «парадокс» объясняется просто: в одном случае мы выражаем a в процентах от b , в другом случае — b в процентах от a .

И ещё пример. В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 80 %, во втором — о снижении цен в 5 раз. Спрашивается, в какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми. Большинство почему-то выбирает второй магазин, хотя ответ здесь — в ближайший к дому. И действительно, уменьшение величины a на 80 % даёт $0,2a$. Но уменьшение величины a в 5 раз приводит к тому же результату — получаем $\frac{a}{5} = 0,2a$.

Пример 2. Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. После удержания налога на доходы Иван Иванович получил 26 100 р. Сколько рублей составляет заработная плата Ивана Ивановича?

Решение. Обозначим заработную плату Ивана Ивановича буквой $З$, а его получку после удержания налога — буквой $П$. Налог составляет 13 %, поэтому $П$ меньше $З$ на 13 сотых, т. е. $П = 0,87 \cdot З$. По условию $П = 26\,100$. Значит, $0,87 \cdot З = 26\,100$, откуда $З = \frac{26\,100}{0,87} = 30\,000$ р.

Ответ: 30 000.

Отметим, что последовательное увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Интересно, что в любом случае получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив a на 10 %, получим $1,1a$. Уменьшив полученную величину на 10 %, получим $0,9 \cdot 1,1a = 0,99a$ — полученная величина меньше начальной на 1 %. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить a на 10 %, а затем результат увеличить на 10 %, получим $1,1 \cdot 0,9a = 0,99a$ — ту же самую величину. В общем случае при увеличении величины a на k % получим величину $a_1 = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)$. Если же теперь уменьшить a_1 на k %, получим

$$a_2 = a_1\left(1 - \frac{k}{100}\right) = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 - \frac{k}{100}\right), \text{ т. е. } a_2 = a\left(1 - \left(\frac{k}{100}\right)^2\right) < a.$$

Пример 3. В июле товар стоил 5000 р. В ноябре цену на товар снизили на 7 %, а в декабре подняли на 8 %. Сколько рублей стоил товар после повышения цены в декабре?

Решение. Стоимость товара в ноябре уменьшилась на 7 сотых, т. е. составила $0,93 \cdot 5000 = 4650$ р. Полученная стоимость увеличилась в декабре на 8 сотых, т. е. составила $1,08 \cdot 4650 = 5022$ р.

Ответ: 5022.

Пример 4. Десять рубашек дороже куртки на 10 %. На сколько процентов одиннадцать рубашек дороже куртки?

Решение. Обозначим буквой P стоимость одной рубашки, буквой K — стоимость куртки. Из условия задачи следует, что $10P = 1,1K$, откуда $P = \frac{1,1K}{10} = 0,11K$. Следовательно, $11P = 11 \cdot 0,11K = 1,21K$. Значит, стоимость одиннадцати рубашек больше стоимости куртки на 21 сотую, т. е. одиннадцать рубашек дороже куртки на 21 %.

Ответ: 21.

Обратим внимание на то, что при изложенном подходе к решению задач на проценты не нужно запоминать никаких правил, составлять пропорции и т. п. — все решения сводятся к действиям с десятичными дробями.

В некоторых случаях, если не задана какая-то величина, например стоимость товара, её можно считать равной любому удобному для решения задачи числу.

Пример 5. Во время распродажи Паша купил четыре одинаковые по цене футболки со скидкой 40 %. Сколько таких футболок он мог бы купить на ту же сумму, если бы скидка составила 60 %?

Решение. Будем считать, что до распродажи футболка стоила 100 д. е. (денежных единиц). Тогда стоимость футболки со скидкой 40 % будет равна 60 д. е. Значит, Паша потратил на покупку четырёх футболок $4 \cdot 60 = 240$ д. е. Если скидка составит 60 %, то стоимость футболки будет равна 40 д. е. и на 240 д. е. можно будет купить $240 : 40 = 6$ футболок.

Ответ: 6.

Среди практических арифметических задач ОГЭ по математике встречаются и задачи на части и доли.

Пример 6. На птицефабрике разводят кур и уток, причём число уток относится к числу кур как 2 : 5. Сколько уток на птицефабрике, если общее число птиц на ней равно 4900?

Решение. Пусть число уток равно $2x$, тогда из условия задачи следует, что число кур равно $5x$, поэтому всего птиц на птицефабрике $7x$. Значит, $7x = 4900$, откуда $x = 700$, а $2x = 1400$.

Ответ: 1400.

Разумеется, подобные задачи можно решать, не прибегая к составлению уравнения. В самом деле, из условия рассмотренной задачи следует, что утки составляют две части от числа всех птиц, а куры — пять частей, т. е. всех птиц можно разделить на семь частей. Значит, число уток равно $\frac{2}{7}$ от числа всех птиц, т. е. равно $\frac{2}{7} \cdot 4900 = 1400$.

Занятие 8. Понятие вероятности. Практические задачи на вычисление вероятностей

Это занятие посвящено простейшим задачам на вычисление вероятностей. Для решения таких задач достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновероятных исходов. Иногда это требует определённых вычислительных навыков, а также действий с отношениями и/или процентами. При решении некоторых задач могут оказаться полезными простейшие правила и формулы вычисления вероятностей:

- формула вероятности противоположного события:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A), \quad P(A) = 1 - P(\bar{A});$$

- формула умножения вероятностей независимых событий: если события A и B независимы, то вероятность наступления обоих этих событий равна $P(A) \cdot P(B)$.

Пример 1. В коробке лежит 20 одинаковых по внешнему виду конфет, в семи из которых нет фруктовой начинки. Валя берёт одну конфету. Найдите вероятность того, что в этой конфете будет фруктовая начинка.

Решение. Число конфет с фруктовой начинкой равно 13, число всех конфет равно 20. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{13}{20} = 0,65$.

Ответ: 0,65.

Пример 2. В соревнованиях по гимнастике участвуют 90 спортсменов: 35 из США, 28 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Канады.

Решение. Число спортсменов из Канады равно $90 - 35 - 28 = 27$. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 27$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 90$ всех равновозможных исходов, находим

$$P = \frac{n}{N} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Ответ: 0,3.

Пример 3. Найдите вероятность того, что случайно выбранное однозначное число делится на 3.

Решение. Всего однозначных чисел $N = 10$ (от 0 до 9). Всего четыре однозначных числа (0, 3, 6, 9) делятся на 3. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{4}{10} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

Пример 4. На конюшне есть только лошади и пони, причём число пони относится к числу лошадей как 3 : 7. Найдите вероятность того, что случайно выбранное на этой конюшне животное окажется пони.

Решение. Если обозначить число пони через $3x$, то число лошадей будет равно $7x$, а всех животных на конюшне будет $10x$. Тогда вероятность случайно выбрать пони равна $\frac{3x}{10x} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

Пример 5. На птицеферме разводят кур, уток и гусей. Известно, что уток в 1,5 раза больше, чем гусей, и на 40 % меньше, чем кур. Найдите вероятность того, что случайно увиденная на этой птицеферме птица окажется гусём.

Решение. Если обозначить число кур через x , то число уток будет равно $0,6x$, а число гусей — в полтора раза меньше, т. е. $0,4x$. Значит, всего птиц на птицеферме $x + 0,6x + 0,4x = 2x$. Поэтому вероятность случайно увидеть гуся равна $\frac{0,4x}{2x} = 0,2$.

Ответ: 0,2.

Пример 6. На фабрике керамической посуды 5 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка окажется с дефектом. Результат округлите до сотых.

Решение. Пусть всего произведено x тарелок. Тогда $0,05x$ тарелок имеют дефект, а $0,95x$ тарелок без дефекта. Из $0,05x$ дефектных тарелок при контроле качества выявляется $0,8 \cdot 0,05x = 0,04x$ тарелок, а не выявляется $0,05x - 0,04x = 0,01x$ тарелок. Эти невыявленные тарелки, а также тарелки без дефекта поступают в продажу, т. е. всего в продажу поступает $0,95x + 0,01x = 0,96x$ тарелок. При случайном выборе вероятность выбрать тарелку с дефектом равна $\frac{0,01x}{0,96x} = \frac{1}{96} \approx 0,01$.

Ответ: 0,01.

Пример 7. Поставщик заказывает одинаковые детали у двух фабрик. Первая фабрика выпускает 70 % этих деталей, вторая — 30 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных деталей, а вторая — 5 %. Найдите вероятность того, что случайно заказанная у поставщика деталь будет исправной.

Решение. Рассмотрим один из способов решения этой задачи, основанный на подборе удобных данных. При таком способе не нужно использовать формулы сложения

или умножения вероятностей. Основан он на том, что количество выпускаемых каждой фабрикой деталей не задано, и мы можем считать его равным любому удобному для решения числу. Разумеется, необходимо, чтобы эти количества согласовывались с условиями задачи и чтобы процент бракованных деталей был для каждой фабрики равен целому числу. Возникает вопрос: какое число считать удобным? Очевидно, что если один процент выпускаемых каждой фабрикой деталей будет равен целому числу, то и число дефектных деталей будет целым. Поэтому можно просто считать, что первая фабрика выпускает 700 деталей (и тогда 3 % дефектных составят 21 штуку), а вторая фабрика выпускает 300 деталей (и тогда 5 % дефектных составят 15 штук). Таким образом, общее число деталей будет равно 1000, а общее число дефектных деталей будет равно 36. Значит, исправных деталей окажется 964, и искомая вероятность составит $\frac{964}{1000} = 0,964$.

Ответ: 0,964.

Разумеется, задачу можно решить иначе, например нарисовав дерево вероятностей либо произведя подсчёт иным способом. Рассмотрим один из них. Пусть число всех выпущенных деталей равно x . Тогда первая фабрика выпускает $0,7x$ деталей, из которых 97 % не имеют дефектов, т. е. всего $0,97 \cdot 0,7x = 0,679x$ деталей без дефектов. Аналогично вторая фабрика выпускает $0,95 \cdot 0,3x = 0,285x$ деталей без дефектов, а обе фабрики выпускают $0,679x + 0,285x = 0,964x$ деталей без дефектов. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{0,964x}{x} = 0,964$.

Пример 8. Из водоплавающих животных в заповеднике обитают бобры, ондатры и выдры. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике водоплавающее животное окажется ондатрой, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

- 1) бобры составляют 44 % водоплавающих животных заповедника;
- 2) ондатры составляют 77 % водоплавающих животных заповедника;
- 3) выдры составляют 33 % водоплавающих животных заповедника.

Решение. Предположим, что утверждение 2 истинно. Тогда утверждения 1 и 3 ложны, так как общее число животных не может быть больше 100 %. По условию только одно утверждение является ложным. Получили противоречие. Значит, утверждение 2 является ложным, а утверждения 1 и 3 истинны. Поэтому ондатры составляют $100 \% - 44 \% - 33 \% = 23 \%$ водоплавающих животных заповедника, а искомая вероятность равна 0,23.

Ответ: 0,23.

Пример 9. В торговом центре стоят два кофейных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что оба автомата неисправны.

Решение. Поскольку каждый из автоматов может быть неисправен независимо от другого, для ответа на вопрос задачи достаточно применить формулу умножения вероятностей: искомая вероятность будет равна $0,12 \cdot 0,12 = 0,0144$.

Ответ: 0,0144.

1. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 9. Арифметические действия с целыми числами.
- Занятие 10. Арифметические действия с обыкновенными дробями.
- Занятие 11. Арифметические действия с десятичными дробями.
- Занятие 12. Арифметические действия с комбинациями десятичных и обыкновенных дробей.
- Занятие 13. Арифметические действия с натуральными степенями.
- Занятие 14. Арифметические действия с целыми степенями.
- Занятие 15. Арифметические действия с корнями.
- Занятие 16. Изображение чисел на числовой прямой, сравнение и оценка.
- Занятие 17. Формулы сокращённого умножения. Преобразование целых алгебраических выражений.
- Занятие 18. Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений.
- Занятие 19. Преобразование иррациональных алгебраических выражений.
- Занятие 20. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия.
- Занятие 21. Числовые последовательности. Геометрическая прогрессия.

Общие рекомендации к занятиям

Этот раздел предназначен для отработки навыков решения задач на преобразование выражений, вычисление их значений, сравнение чисел, изображение чисел на числовой прямой. Подобные задания ежегодно включаются в варианты ОГЭ по математике как самостоятельные задачи, а в дополненном за счёт числовых и алгебраических выражений других функционально-алгебраических линий виде — и в варианты ЕГЭ по математике. Кроме того, без умения выполнять такие задания будет трудно или почти невозможно решать более сложные задания — уравнения, неравенства, текстовые задачи, задачи по геометрии, требующие выполнения алгебраических преобразований.

Занятие 9. Арифметические действия с целыми числами

Умение выполнять арифметические действия с числами (в том числе и устные вычисления) — одно из необходимых для адаптации человека в социуме. Калькулятор не всегда есть под рукой, да и странно, например, просить продавца в магазине подождать, пока вы будете нажимать на кнопки, чтобы проверить названную им сумму.

Первое из занятий, предназначенных для закрепления навыков выполнения арифметических действий с числами и степенями, посвящено целым числам. Для решения соответствующих задач достаточно знать порядок выполнения арифметических операций с целыми числами и их свойства, формулы квадрата суммы и квадрата разности двух чисел: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, формулу разности квадратов двух чисел: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Любой из примеров на вычисление на ОГЭ по математике может быть решён с помощью последовательного выполнения арифметических операций.

Пример 1. Найдите значение выражения $32\,500 \cdot 40$.

Решение. Для решения задачи достаточно 325 умножить на 4 и приписать к полученному результату справа три нуля: $32\,500 \cdot 40 = 325 \cdot 4 \cdot 1000 = 1300 \cdot 1000 = 1\,300\,000$.

Ответ: 1 300 000.

Обратим внимание на решение подобных примеров, поскольку при выполнении действий с числами, содержащими несколько нулей, допускаются ошибки.

Пример 2. Найдите значение выражения $34\,400 : 80$.

Решение. Для решения задачи достаточно 3440 разделить на 8 . Получим $34\,400 : 80 = 3440 : 8 = 430$.

Ответ: 430.

В некоторых случаях вычисления существенно упростятся, если использовать навыки рационального счёта, основанного на указанных выше действиях и формулах.

Пример 3. Найдите значение выражения $6543^2 - 6542^2$.

Решение. Применим формулу разности квадратов:

$$6543^2 - 6542^2 = (6543 - 6542)(6543 + 6542) = 1 \cdot 13\,085 = 13\,085.$$

Ответ: 13 085.

Часто в задачниках и на экзаменах встречаются вычислительные примеры, в которых можно запутаться, если не увидеть простой ключ к решению. Таким ключом иногда являются обычные распределительные свойства, записанные справа налево: $ac + bc = c(a + b)$, $a : c + b : c = (a + b) : c$. Иными словами, если удастся найти общий множитель двух слагаемых, его нужно вынести за скобку. В качестве примера рассмотрим следующий.

Пример 4. Найдите значение выражения $987 \cdot 6543 - 6420 \cdot 987 - 887 \cdot 123$.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель:

$$987(6543 - 6420) - 887 \cdot 123 = 987 \cdot 123 - 887 \cdot 123.$$

Ещё раз вынесем за скобку общий множитель: $123(987 - 887) = 123 \cdot 100 = 12\,300$.

Ответ: 12 300.

Как видим, все действия производятся в уме. Рассмотрим ещё один пример, в котором рациональные вычисления позволяют получить ответ буквально за минуту.

Пример 5. Найдите значение выражения $199 \cdot 299 + 499$.

Решение. Данное выражение равно $(200 - 1) \cdot (300 - 1) + 499$. Раскрыв скобки, получим $200 \cdot 300 - 200 - 300 + 1 + 499$. Очевидно, сумма последних четырёх слагаемых равна нулю. Поэтому искомое значение равно $200 \cdot 300 = 60\,000$.

Ответ: 60 000.

Как уже отмечалось, иногда встречаются вычислительные задачи, ключ к решению которых состоит в применении одной или нескольких формул сокращённого умножения. В большинстве случаев числа, используемые в задачах, многозначные. Это сделано для того, чтобы исключить непосредственное вычисление, но именно это позволяет предположить, что способ вычисления не зависит от самих чисел. В таких задачах удобно бывает заменить какое-нибудь число или два числа переменными, затем выполнить упрощения в общем виде и снова перейти к числам.

Пример 6. Найдите значение выражения $987\,654^2 - 987\,653 \cdot 987\,655$.

Решение. Заметим, что числа $987\,653$ и $987\,655$ отличаются на единицу от числа $987\,654$. Это наводит на мысль заменить $987\,654$ на a . Тогда $987\,653 = a - 1$, $987\,655 = a + 1$. Получаем выражение $a^2 - (a - 1)(a + 1)$. Применим формулу разности квадратов: $a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$. Ответ «1» не зависит от значения a , поэтому в данном случае даже не придётся делать обратную замену.

Ответ: 1.

Занятие 10. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Это занятие посвящено арифметическим операциям с дробями. Статистика решения подобных задач на ОГЭ и ЕГЭ по математике является удручающей. Поэтому таким задачам надо уделить самое пристальное внимание, отработав как действия

с десятичными дробями, так и — особенно — действия с обыкновенными дробями и комбинациями десятичных и обыкновенных дробей.

В случае обыкновенных дробей стандартный рецепт один — приведение дробей к общему знаменателю, если знаменатели различны. Наиболее простой случай — когда знаменатели одной или двух дробей являются делителями знаменателя другой.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{2}{15} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия: $\frac{2}{15} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4$.

Ответ: 1,4.

В более сложных случаях общий знаменатель находится как произведение знаменателей данных дробей.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{3}{8} + \frac{4}{25}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия: $\frac{3}{8} + \frac{4}{25} = \frac{3 \cdot 25}{8 \cdot 25} + \frac{4 \cdot 8}{8 \cdot 25} = \frac{75}{200} + \frac{32}{200} = \frac{107}{200} = 0,535$.

Ответ: 0,535.

Если тема усвоена достаточно хорошо, лучше не просто находить произведение знаменателей данных дробей, а выбирать в качестве общего знаменателя их наименьшее общее кратное, когда это возможно.

Пример 3. Найдите значение выражения $\left(\frac{9}{28} - \frac{5}{21}\right) \cdot 30$.

Решение. Заметим, что $28 = 7 \cdot 4$, а $21 = 7 \cdot 3$. В качестве общего знаменателя дробей можно выбрать $7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия: $\left(\frac{9}{28} - \frac{5}{21}\right) \cdot 30 = \left(\frac{9 \cdot 3}{84} - \frac{5 \cdot 4}{84}\right) \cdot 30 = \frac{7}{84} \cdot 30 = \frac{1}{12} \cdot 30 = \frac{5}{2} = 2,5$.

Ответ: 2,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $\left(1\frac{5}{8} + 1\frac{2}{3}\right) \cdot 24$.

Решение. Обратим дроби в скобках в неправильные, приведём их к общему знаменателю и выполним арифметические действия: $\left(\frac{13}{8} + \frac{5}{3}\right) \cdot 24 = \frac{39 + 40}{24} \cdot 24 = 79$.

Ответ: 79.

В некоторых случаях при решении подобных задач бывает удобно выполнить действия, используя распределительные свойства. Например, при решении предыдущего примера после обращения дробей в скобках в неправильные можно было сначала умножить каждое из полученных в скобках слагаемых на 24, а затем уже приводить полученные дроби к общему знаменателю.

Пример 5. Найдите значение выражения $17\frac{17}{19} : \frac{17}{19}$.

Решение. $17\frac{17}{19} : \frac{17}{19} = \left(17 + \frac{17}{19}\right) : \frac{17}{19} = 17 : \frac{17}{19} + \frac{17}{19} : \frac{17}{19} = 19 + 1 = 20$.

Ответ: 20.

Иногда, как и в случае действий с целыми числами, можно использовать навыки рационального счёта, например не выполняя умножение двухзначных или трёхзначных чисел, поскольку на одно из них в конце решения удаётся сократить дробь.

Пример 6. Найдите значение выражения $13\frac{13}{17} : \frac{13}{17}$.

Решение. Пример можно решить, обратив первую дробь в неправильную:

$$13\frac{13}{17} : \frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 17 + 13}{17} : \frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 18}{17} : \frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 18}{17} \cdot \frac{17}{13} = 18.$$

Ответ: 18.

Занятие 11. Арифметические действия с десятичными дробями

Действия с конечными десятичными дробями обычно приводят к меньшему числу ошибок по сравнению с задачами на действия с обыкновенными дробями или комбинациями обыкновенных и смешанных дробей. Связано это, видимо, с тем, что конечные десятичные дроби как бы являются «по умолчанию» дробями «с общим знаменателем». В самом сложном случае достаточно дописать необходимое количество нулей после запятой, чтобы получить дроби с одним и тем же числом знаков после запятой. Иногда вычисления удаётся рационализировать стандартными приёмами: вынесением за скобку общего множителя, применением формул сокращённого умножения, распределительных свойств и т. д.

Пример 1. Найдите значение выражения $0,789 \cdot 999 + 0,789$.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель:

$$0,789 \cdot 999 + 0,789 = 0,789(999 + 1) = 0,789 \cdot 1000 = 789.$$

Ответ: 789.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{65^2 - (0,65)^2}{65,65}$.

Решение. Применим к числителю данной дроби формулу разности квадратов:

$$\frac{65^2 - (0,65)^2}{65,65} = \frac{(65 - 0,65)(65 + 0,65)}{65,65} = \frac{64,35 \cdot 65,65}{65,65} = 64,35.$$

Ответ: 64,35.

Занятие 12. Арифметические действия с комбинациями десятичных и обыкновенных дробей

Задания, в которых встречаются как десятичные, так и обыкновенные дроби, вызывают порой значительные затруднения у части школьников. Если знаменатели всех дробей в условии являются степенями двойки и пятёрки или произведением таких степеней, дроби лучше обратить в конечные десятичные. Если хотя бы один из знаменателей дробей отличен от степеней двойки и пятёрки или произведения таких степеней, дроби лучше обратить в обыкновенные. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Обратите $\frac{7}{40}$ в десятичную дробь.

Решение. Заметим, что $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Поэтому для того, чтобы обратить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную дробь, можно выполнить деление числителя дроби на её знаменатель столбиком либо записать её в виде дроби со знаменателем, являющимся степенью числа 10. Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на 25, получим $\frac{7}{40} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 25}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0,175$.

Ответ: 0,175.

Пример 2. Обратите 4,32 в обыкновенную дробь.

Решение. $4,32 = 4\frac{32}{100} = 4\frac{8}{25}$.

Ответ: $4\frac{8}{25}$.

Пример 3. Найдите значение выражения $(6,25 - 3\frac{1}{3}) \cdot 9,6$.

Решение. Обратим все дроби в неправильные обыкновенные дроби и раскроем скобки: $(\frac{25}{4} - \frac{10}{3}) \cdot \frac{48}{5} = \frac{25}{4} \cdot \frac{48}{5} - \frac{10}{3} \cdot \frac{48}{5} = 5 \cdot 12 - 2 \cdot 16 = 28$.

Ответ: 28.

Отметим, что, если рациональный способ вычислений не очевиден, не надо тратить время на его поиск, а следует решить задачу стандартным способом.

Пример 4. Найдите значение выражения $58 : (5\frac{37}{45} - 2,6)$.

Решение. Преобразуем выражение в скобках, приведя дроби к общему знаменателю, а затем выполним действия: $58 : (5\frac{37}{45} - 2\frac{3}{5}) = 58 : (5\frac{37}{45} - 2\frac{27}{45}) = 58 : 3\frac{10}{45} = 58 : 3\frac{2}{9} = 58 : \frac{29}{9} = 58 \cdot \frac{9}{29} = 2 \cdot 9 = 18$.

Ответ: 18.

Занятие 13. Арифметические действия с натуральными степенями

Это и следующее занятия посвящены закреплению навыков решения задач на действия с целыми степенями. Операция возведения в натуральную степень вводилась в школьном курсе математики, в сущности, как сокращённая запись умножения одинаковых чисел: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$). Затем для всех $a \neq 0$

это определение распространялось на степени с целым отрицательным показателем $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и нулевую степень $a^0 = 1$. Напомним основные свойства целых (а значит, и натуральных) степеней:

- произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

- произведение и частное степеней с одинаковыми показателями:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n;$$

- возведение степени в степень: $(a^n)^m = a^{nm}$.

При решении задач на действия со степенями обычно достаточно:

- привести степени к одному основанию;
- привести степени к одному показателю.

Пример 1. Найдите значение выражения $9^{12} : 81^5$.

Решение. Приведём степени к одному основанию и воспользуемся свойствами степеней: $9^{12} : 81^5 = 9^{12} : (9^2)^5 = 9^{12} : 9^{10} = 9^{12-10} = 9^2 = 81$.

Ответ: 81.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{4^{12} \cdot 25^6}{20^{13}}$.

Решение. Приведём степени в числителе сначала к одному показателю, а затем к одному основанию и применим свойства степеней:

$$\frac{4^{12} \cdot 25^6}{20^{13}} = \frac{4^{12} \cdot (5^2)^6}{20^{13}} = \frac{4^{12} \cdot 5^{12}}{20^{13}} = \frac{(4 \cdot 5)^{12}}{20^{13}} = \frac{20^{12}}{20^{13}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Ответ: 0,05.

Пример 3. Найдите значение выражения $4^6 \cdot 3^8 : 12^5$.

Решение. Приведём две первые степени к одному показателю:

$$4^6 \cdot 3^8 = 4^6 \cdot 3^6 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^6 \cdot 3^2 = 12^6 \cdot 9. \text{ Разделив полученное выражение на } 12^5, \text{ получим } \frac{12^6 \cdot 9}{12^5} = 12^{6-5} \cdot 9 = 12 \cdot 9 = 108.$$

Ответ: 108.

Занятие 14. Арифметические действия с целыми степенями

Свойства степеней с целыми основаниями, приведённые в занятии 13, полностью применимы к задачам на действия с целыми отрицательными степенями.

Пример 1. Найдите значение выражения $3^{-16} : 21^{-18} \cdot 7^{-17}$.

Решение. Перепишем данное выражение в виде $\frac{3^{-16} \cdot 7^{-17}}{21^{-18}}$ и воспользуемся свойствами степеней: $\frac{3^{-16} \cdot 7^{-17}}{21^{-18}} = \frac{3^{-16} \cdot 7^{-17}}{3^{-18} \cdot 7^{-18}} = 3^{-16+18} \cdot 7^{-17+18} = 3^2 \cdot 7 = 63$.

Ответ: 63.

Преобразуя суммы, в которых слагаемыми являются степени некоторого числа, бывает удобно вынести за скобки степень с наименьшим показателем.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{2 + 17 \cdot 2^{-2} - 3}{7 + 3 \cdot 5^{-1} - 177 \cdot 5^{-2}}$.

Решение. Степень с наименьшим показателем в числителе — 2^{-2} , а в знаменателе — 5^{-2} . Вынесем эти степени за скобки:

$$\frac{2 + 17 \cdot 2^{-2} - 3}{7 + 3 \cdot 5^{-1} - 177 \cdot 5^{-2}} = \frac{2^{-2}(2^3 + 17 - 3 \cdot 2^2)}{5^{-2}(7 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 177)} = \frac{2^{-2}(8 + 17 - 12)}{5^{-2}(175 + 15 - 177)}.$$

Выполнив действия с целыми числами, а затем со степенями, получим

$$\frac{2^{-2} \cdot 13}{5^{-2} \cdot 13} = \frac{2^{-2}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = (2,5)^2 = 6,25.$$

Ответ: 6,25.

Занятие 15. Арифметические действия с корнями

Напомним определение и основные свойства корня степени n .

Определение. Алгебраическим корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое число b , n -я степень которого равна a . Арифметическим корнем n -й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое неотрицательное число b , n -я степень которого равна a .

Обозначается корень степени n так: $\sqrt[n]{a}$. Знак $\sqrt[n]{}$ называется радикалом, n — показателем степени корня. Корень второй степени называется квадратным, при его обозначении степень корня не указывается: пишут \sqrt{a} , а не $\sqrt[2]{a}$. Корень третьей степени называется кубическим корнем и обозначается стандартным образом: $\sqrt[3]{a}$. Подавляющее большинство иррациональных выражений школьного курса математики связано именно с квадратными и реже с кубическими корнями. Алгебраическое выражение $a(x)$ под знаком корня в записи вида $\sqrt[n]{a(x)}$ называется подкоренным выражением.

Замечание 1. Для записи алгебраического и арифметического корня используется один и тот же символ. Понятие арифметического корня вводится для того, чтобы сделать однозначным определение корня чётной степени: ведь чётные степени двух противоположных чисел одинаковы, и, если при извлечении корня чётной степени не оговаривать, какое из них имеется в виду, это приведёт к различного рода противоречиям. Поэтому, когда говорят и пишут о корне чётной степени из числа, то всегда (если не оговорено противное) имеют в виду арифметический корень, который по определению является неотрицательным числом. Для корней нечётной степени обычно используют определение алгебраического корня. Таким образом, *корень любой степени из неотрицательного числа является неотрицательным числом, корень нечётной степени из отрицательного числа является отрицательным числом.*

Замечание 2. Краткое определение арифметического корня чётной степени можно записать так: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^{2n} \\ b \geq 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$. Отсюда следует, что арифметический

корень определён только для неотрицательных чисел. В самом деле, по определению $b \geq 0$, но $a = b^{2n}$, и, значит, $a \geq 0$. Поэтому область допустимых значений корня чётной степени $\sqrt[n]{a(x)}$ находится из условия $a(x) \geq 0$ неотрицательности подкоренного выражения. Область определения корня нечётной степени $\sqrt[n]{a(x)}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$) такого ограничения не предполагает: он определён при любом значении переменной, для которого имеет смысл выражение $a(x)$.

Укажем теперь основные свойства арифметического корня (n и k — натуральные числа, большие 1, $a \geq 0$, $b \geq 0$):

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$.
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.
5. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.
6. $\sqrt[n]{a^l} = (\sqrt[n]{a})^l$ (если $l \leq 0$; то $a \neq 0$).
7. Если $a < b$, то и $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Замечание 3. Если n и k — нечётные натуральные числа, большие 1, приведённые свойства справедливы и для отрицательных a и b . Для корня нечётной степени укажем ещё одно полезное свойство: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (знак «минус» можно выносить за знак корня нечётной степени и вносить под знак такого корня).

Замечание 4. При внесении множителя под знак корня чётной степени знак «минус» под корень не вносится, а остаётся перед корнем. При преобразовании числовых выражений проблем обычно нет: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$, а вот при преобразовании буквенных встречаются ошибки. Так, если число a отрицательно, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Пример 1. Найдите значение выражения $\sqrt{229^2 - 60^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{229^2 - 60^2} = \sqrt{(229 - 60)(229 + 60)} = \sqrt{169 \cdot 289} = 13 \cdot 17 = 221.$$

Ответ: 221.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3,4} \cdot \sqrt{11,9}}{\sqrt{0,14}}$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, воспользовавшись свойствами корня, а затем выполним необходимые преобразования:

$$\frac{\sqrt{3,4} \cdot \sqrt{11,9}}{\sqrt{0,14}} = \sqrt{\frac{3,4 \cdot 11,9}{0,14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{2 \cdot 7}} = \sqrt{17 \cdot 17} = 17.$$

Ответ: 17.

Занятие 16. Изображение чисел на числовой прямой, сравнение и оценка

Это занятие посвящено задачам, которые в последние годы включаются в большинство вариантов ОГЭ по математике. Это задачи, связанные со взаимным расположением чисел на числовой (координатной) прямой, с их сравнением и оценкой. Рассмотрим несколько типичных примеров таких заданий.

Пример 1. На координатной прямой точки A, B, C, D соответствуют числам $0,0137, 0,103, 0,03, 0,021$ (рис. 10). Какой точке соответствует число $0,03$?

- 1) A 2) B 3) C 4) D



Рис. 10

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно расположить данные числа в порядке возрастания, что для конечных десятичных дробей сделать совсем не сложно: $0,0137 < 0,021 < 0,03 < 0,103$. Следовательно, числу $0,03$ соответствует точка C и правильным является третий ответ.

Ответ: 3.

Пример 2. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{2}{9}$?

- 1) $[0,1; 0,2]$ 2) $[0,2; 0,3]$ 3) $[0,3; 0,4]$ 4) $[0,4; 0,5]$

Решение. Ясно, что $\frac{2}{9} > \frac{2}{10} = 0,2$ и $\frac{2}{9} < \frac{2}{5} = 0,4$. Поэтому первый и последний варианты ответов отпадают. Остаётся сравнить $\frac{2}{9} = \frac{20}{90}$ и $0,3 = \frac{3}{10} = \frac{27}{90}$. Поскольку $\frac{20}{90} < \frac{27}{90}$, то $\frac{2}{9} < 0,3$. Следовательно, правильным ответом является второй.

Ответ: 2.

Пример 3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (рис. 11). Одна из них соответствует числу $\sqrt{68}$. Какая это точка?

- 1) A 2) B 3) C 4) D

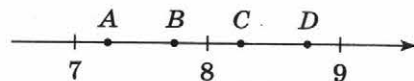


Рис. 11

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно установить, между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{68}$. Ясно, что $64 < 68 < 81$, откуда $8 < \sqrt{68} < 9$. Значит, одна из точек C или D является искомой. Кроме того, очевидно, что число 68 расположено ближе к числу 64 , чем к числу 81 . Поэтому и число $\sqrt{68}$ расположено ближе к числу 8 , чем к числу 9 . Значит, числу $\sqrt{68}$ соответствует точка C .

Ответ: 3.

В части таких задач не задано ни одно конкретное число, и отвечать на вопрос задачи приходится, исходя из взаимного расположения точек на числовой прямой и пользуясь свойствами числовых неравенств.

Пример 4. На координатной прямой отмечены числа x и y (рис. 12). Какое из приведённых утверждений для этих чисел неверно?

- 1) $xy < 0$ 3) $x + y > 0$
2) $x^2y > 0$ 4) $x - y < 0$

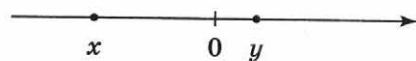


Рис. 12

Решение. Из условия задачи следует, что $x < 0$, $y > 0$ и $|x| > |y|$. Поэтому $xy < 0$, $x^2y > 0$, $x + y < 0$, $x - y < 0$. Значит, неверно третье утверждение.

Ответ: 3.

Занятие 17. Формулы сокращённого умножения. Преобразование целых алгебраических выражений

Решение задач на преобразование выражений предполагает, как правило, последовательное упрощение данных выражений. При этом используются свойства степеней и формулы сокращённого умножения. Упрощение выражений обычно сводится к приведению подобных членов и сокращению дробей после некоторых предварительных действий, важнейшим из которых является разложение на множители. Последнее, в свою очередь, заключается в выполнении одного или нескольких из следующих правил: 1) применить формулу или свойство; 2) сгруппировать слагаемые; 3) вынести общий множитель за скобки; 4) добавить и вычесть одно и то же слагаемое. Рассмотрим несколько примеров, начав с правила «применить формулу или свойство».

Пример 1. Найдите значение выражения $(3x - 7)(3x + 7) - 9x^2 + 2x + 19$ при $x = 200$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, применив формулу разности квадратов и приведя подобные слагаемые:

$$(3x - 7)(3x + 7) - 9x^2 + 2x + 19 = 9x^2 - 49 - 9x^2 + 2x + 19 = 2x - 30.$$

При $x = 200$ искомое значение равно $2 \cdot 200 - 30 = 370$.

Ответ: 370.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий правило «добавить и вычесть одно и то же слагаемое».

Пример 2. Разложите на множители выражение $4a^4 + 1$.

Решение. Дополним данное выражение до квадрата суммы, добавив к нему и вычтя из него $4a^2$. Получим $4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2$. Теперь применим формулу разности квадратов: $(2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$. Поскольку дискриминант каждого из квадратных трёхчленов в правой части последнего равенства отрицателен, разложение ни одного из них на линейные множители невозможно.

Ответ: $(2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

Занятие 18. Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений

Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений предполагает те же самые действия, что и преобразование целых алгебраических выражений, но к этим действиям добавляется приведение дробей к общему знаменателю и сокращение дробей.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{a^{27} \cdot a^{-9}}{a^{19}}$ при $a = 0,04$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней с одинаковым основанием: $\frac{a^{27} \cdot a^{-9}}{a^{19}} = a^{27 + (-9) - 19} = a^{-1} = \frac{1}{a}$. Поскольку $a = 0,04 = \frac{1}{25}$, искомое значение равно

$$1 : \frac{1}{25} = 25.$$

Ответ: 25.

Перейдём к примерам применения правил «сгруппировать слагаемые» и «вынести общий множитель за скобки».

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{19xy - 4ab - 12yx + 7ab}{7axy + 3a^2b}$ при $x = 0,23$, $y = 0,24$, $a = 0,25$, $b = 0,26$.

Решение. Прямая подстановка данных значений переменных приведёт к громоздким вычислениям. Поэтому попытаемся вначале упростить выражение. Выполним необходимую группировку в числителе дроби:

$$19xy - 4ab - 12yx + 7ab = (19xy - 12yx) + (7ab - 4ab) = 7xy + 3ab.$$

Вынесем за скобку общий множитель в знаменателе: $7axy + 3a^2b = a(7xy + 3ab)$. Получим, что данная дробь приводится к виду $\frac{7xy + 3ab}{a(7xy + 3ab)} = \frac{1}{a}$. При данных числовых значениях переменной значение выражения $7xy + 3ab$, очевидно, отлично от нуля (оно положительно), что и позволило выполнить сокращение дроби. Поскольку $a = 0,25 = \frac{1}{4}$, получим, что $\frac{1}{a} = 4$.

Ответ: 4.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{13xy - 17xz}{13y - 17z}$ при $x = 19,87$, $y = 18,76$, $z = 17,65$.

Решение. Сократим данную дробь, вынеся за скобку общий множитель: $\frac{13xy - 17xz}{13y - 17z} = \frac{x(13y - 17z)}{13y - 17z} = x$. Сокращение дроби возможно, поскольку $13y - 17z \neq 0$ хотя бы в силу того, что последние цифры чисел $13y$ и $17z$ при данных значениях y и z различны (они равны соответственно 8 и 5).

Ответ: 19,87.

Занятие 19. Преобразование иррациональных алгебраических выражений

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений и вычислении их значений используются свойства корней, формулы сокращённого умножения, приведение дробей к общему знаменателю, вынесение за скобку общего множителя и другие стандартные приёмы.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}}{x} + 2x - 5$ при $x = 7$.

Решение. Сначала приведём две первые дроби к общему знаменателю, учитывая, что данное выражение определено при $x > 0$. Получим

$$\frac{5\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}}{x} = \frac{5x + 4\sqrt{x}}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x} = \frac{5x + 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{x} = \frac{5x}{x} = 5.$$

Теперь приведём подобные: $5 + 2x - 5 = 2x$. Значение полученного выражения при $x = 7$ равно 14.

Ответ: 14.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}}{a\sqrt{a}}$ при $a = 0,2$.

Решение. Из условия задачи следует, что данное выражение определено при $a > 0$. В этом случае справедливы следующие преобразования: $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}\sqrt[6]{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{1}{a}$. Поэтому искомое значение можно вычислить так: $\frac{1}{0,2} = 1 : \frac{1}{5} = 5$.

Ответ: 5.

Занятие 20. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия

Напомним, что числовой последовательностью называется набор чисел, для которых указан порядок их следования, т. е. каждому из чисел набора приписан определённый порядковый номер, причём любые два числа из набора (даже если они равны) имеют разные номера. Иными словами, последовательность — не что иное, как функция, определённая на множестве натуральных чисел. График такой функции представляет собой множество точек с натуральными абсциссами, ординаты которых находятся по определённому правилу. Это правило, как и в случае любой другой функции, может быть дано в виде описания, таблицы, формулы либо даже сразу в виде самого графика. Обычно последовательность обозначается так: (a_n) — или так: $\{a_n\}$. Скобки указывают именно на обозначение последовательности, а их отсутствие, т. е. запись a_n , означает, что речь идёт об n -м члене последовательности. В школьном курсе математики изучаются в основном две последовательности: арифметическая и геометрическая прогрессии. Геометрической прогрессии посвящены два следующих урока, а здесь будет рассмотрена арифметическая прогрессия. Напомним основные определения и факты, связанные с ней.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом d , называемым *разностью прогрессии*. Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным, нулём. Таким образом, для того чтобы однозначно определить арифметическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и разность, т. е. арифметическая прогрессия задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её разность. На числовой прямой члены арифметической прогрессии с разностью, отличной от нуля, изображаются точками, расстояние между двумя любыми соседними из которых равно $|d|$.

Из определения арифметической прогрессии вытекают формула её n -го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и формула суммы S_n её первых n членов $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. При решении некоторых задач могут оказаться полезными следующие свойства, также вытекающие из определения арифметической прогрессии:

1) $a_k + a_l = a_p + a_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. сумма двух любых членов арифметической прогрессии равна сумме двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $a_k = \frac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$ ($k > m$), т. е. каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов этой прогрессии.

Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности верна формула 2, то эта последовательность является арифметической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством арифметической прогрессии.

Перейдём к примерам.

Пример 1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана двумя первыми членами: -10 ; -7 ; Найдите: а) разность прогрессии; б) третий член прогрессии.

Решение. а) Разность d арифметической прогрессии равна разности любого её члена, начиная со второго, и предыдущего члена. В данном случае $d = -7 - (-10) = 3$. б) Третий член прогрессии равен сумме её второго члена и разности прогрессии: $-7 + 3 = -4$.

Ответ: а) 3; б) -4 .

При решении предыдущей задачи можно было бы обойтись без формального выписывания разности, заметив, что второй член прогрессии на 3 больше первого. Значит, число 3 и есть разность прогрессии. Тогда и третий больше второго на 3, т. е. равен -4 .

Пример 2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 9n + 7$. Какое из следующих чисел является её членом: 1) 99 999; 2) 99 998; 3) 99 997; 4) 99 996?

Решение. Членами последовательности являются натуральные числа, остаток от деления которых на 9 равен 7. Таким числом среди указанных в условии является, очевидно, только 99 997.

Ответ: 3.

Обратим внимание на то, что данная в условии примера 2 последовательность является арифметической прогрессией. Это следует из того, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом одна и та же. В самом деле, если $a_n = 9n + 7$, то $a_{n+1} = 9(n+1) + 7 = 9n + 16$, откуда $a_{n+1} - a_n = 9n + 16 - 9n - 7 = 9$, т. е. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью $d = 9$.

Пример 3. Последовательность (c_n) задана условиями: $c_1 = 5$, $c_{n+1} = c_n - 7$. Найдите c_6 .

Решение. Поскольку $c_{n+1} - c_n = -7$, последовательность (c_n) является арифметической прогрессией с разностью $d = -7$. Поэтому $c_6 = c_1 + 5d = 5 + 5 \cdot (-7) = -30$.

Ответ: -30 .

Пример 4. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью, отличной от нуля.

Найдите $\frac{a_2 - a_1}{a_6 - a_4} + \frac{a_9 - a_2}{a_7 - a_3}$.

Решение. Воспользуемся формулой n -го члена арифметической прогрессии и перепишем данное выражение в виде $\frac{a_1 + d - a_1}{a_1 + 5d - a_1 - 3d} + \frac{a_1 + 8d - a_1 - d}{a_1 + 6d - a_1 - 2d}$, откуда после упрощений получим $\frac{d}{2d} + \frac{7d}{4d} = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$.

Ответ: 2,25.

Пример 5. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) , если сумма первых десяти её членов равна 640, а сумма первых тридцати её членов равна -480 .

Решение. Найдём сначала a_1 и d . По условию $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_1 + 9d) \cdot 5 = 640$, откуда $2a_1 + 9d = 128$. Аналогично $S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = (a_1 + a_1 + 29d) \cdot 15 = -480$, откуда $2a_1 + 29d = -32$. Вычтем почленно из последнего равенства равенство $2a_1 + 9d = 128$. Получим $20d = -160$, откуда $d = -8$. Но тогда $2a_1 = 128 - 9d = 128 + 72 = 200$, откуда $a_1 = 100$. Осталось найти искомую сумму:

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = (a_1 + a_1 + 19d) \cdot 10 = (2 \cdot 100 + 19 \cdot (-8)) \cdot 10 = 480.$$

Ответ: 480.

Заметим, что ответ примера 5 был получен с использованием стандартного алгоритма решения подобных задач: по данным условиям были получены два уравнения, которые позволили найти a_1 и d — базовые элементы прогрессии, после чего с их помощью была вычислена требуемая величина.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение), то, скорее всего, для решения задачи нужно воспользоваться определением прогрессии (см. пример 4) либо применить свойства 1 или 2.

Пример 6. Найдите значение выражения $\frac{a_3 + a_5 + a_7 + a_9}{a_6}$, если известно, что числовая последовательность (a_n) является арифметической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $a_6 \neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что $a_3 + a_5 = 2a_4$, $a_7 + a_9 = 2a_8$, $2a_4 + 2a_8 = 4a_6$. Поэтому искомое значение равно $\frac{4a_6}{a_6} = 4$.

Ответ: 4.

Занятие 21. Числовые последовательности. Геометрическая прогрессия

Приведём основные определения и факты, связанные с геометрической прогрессией.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность (b_n) , первый член которой отличен от нуля, а любой другой её член равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности отличное от нуля число q , называемое *знаменателем прогрессии*. Таким образом, в отличие от определения арифметической прогрессии определение геометрической прогрессии содержит ограничения на оба её базовых элемента: $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$. Из определения геометрической прогрессии следует и то, что любой её член отличен от нуля.

Таким образом, для того чтобы однозначно определить геометрическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и знаменатель, т. е. геометрическая прогрессия, как и арифметическая, задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её знаменатель. В более сложных задачах по данным условия можно составить два равенства (уравнения), которые позволяют найти b_1 и q , а уже затем с их помощью вычислить искомую величину.

Определение геометрической прогрессии позволяет найти формулу её n -го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и формулу суммы S_n её первых n членов $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (для прогрессии, знаменатель которой отличен от 1). Если же знаменатель геометрической прогрессии равен 1, то все её члены равны первому и $S_n = n \cdot b_1$.

Напомним ещё два свойства, полезные при решении ряда задач:

1) $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. произведение двух любых членов геометрической прогрессии равно произведению двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $b_k^2 = b_{k-m} \cdot b_{k+m}$ ($k > m$), т. е. каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, для прогрессии с положительными членами $b_k = \sqrt{b_{k-m} \cdot b_{k+m}}$, т. е. каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух равноотстоящих от него (в частности, соседних с ним) членов этой прогрессии.

Если для какой-то числовой последовательности верна формула 2, то эта последовательность является геометрической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством геометрической прогрессии.

Пример 1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана двумя первыми членами: -2 ; 6 ; Найдите: а) знаменатель прогрессии; б) четвёртый член прогрессии.

Решение. а) Знаменатель q геометрической прогрессии равен отношению любого её члена, начиная со второго, и предыдущего члена. В данном случае $q = \frac{6}{-2} = -3$.

б) Четвёртый член прогрессии равен произведению её второго члена и квадрата знаменателя прогрессии: $6 \cdot (-3)^2 = 54$.

Ответ: а) -3 ; б) 54 .

Пример 2. Числовая последовательность (b_n) задана условиями $b_1 = -243$, $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n$. Найдите b_4 .

Решение. Из условия задачи следует, что первый член данной последовательности отличен от нуля, а каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на число $\frac{2}{3}$. Значит, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{2}{3}$, и $b_4 = b_1 \cdot q^3 = -243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = -243 \cdot \frac{8}{27} = -9 \cdot 8 = -72$.

Ответ: -72.

Пример 3. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n) , если известно, что $b_7 = 12$, $b_{10} = 1,5$.

Решение. Из формулы n -го члена геометрической прогрессии следует, что $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Значит, $\frac{b_{10}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^9}{b_1 \cdot q^6} = q^3$, т. е. $q^3 = \frac{1,5}{12} = \frac{1}{8}$, откуда $q = \frac{1}{2}$. Тогда $b_1 = \frac{b_7}{q^6} = \frac{12}{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 12 \cdot 2^6 = 12 \cdot 64 = 768$. Поэтому

$$S_5 = b_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 768 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 768 \cdot \frac{-\frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = 768 \cdot \frac{31}{16} = 48 \cdot 31 = 1488.$$

Ответ: 1488.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение) или вовсе не предполагает этого, то, скорее всего, для решения задачи нужно применить свойства 1 или 2.

Пример 4. Найдите значение выражения $\frac{b_3 \cdot b_{17} + b_5 \cdot b_{15} + b_7 \cdot b_{13}}{10b_{10}^2}$, если известно, что числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $b_{10} \neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что каждое слагаемое числителя равно b_{10}^2 . Поэтому искомое значение равно $\frac{3b_{10}^2}{10b_{10}^2} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

Иногда для того, чтобы вычислить сумму нескольких первых членов геометрической прогрессии, удобно последовательно найти сами эти члены, а не использовать формулу суммы — с тем чтобы избежать возведения дроби (знаменателя прогрессии) в относительно высокую степень.

Пример 5. Четвёртый член геометрической прогрессии равен 16, а её седьмой член равен 0,25. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Решение. Пусть (b_n) — данная прогрессия. Тогда $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 16$, а $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{4}$. Поэтому $\frac{b_7}{b_4} = \frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3} = q^3 = \frac{1}{4} : 16 = \frac{1}{64}$, откуда $q = \frac{1}{4}$. Тогда $b_5 = b_4 \cdot q = 4$, $b_3 = b_4 : q = 64$, $b_2 = b_3 : q = 256$, $b_1 = b_2 : q = 1024$. Значит, $S_5 = 1024 + 256 + 64 + 4 + 16 = 1360$.

Ответ: 1360.

Разумеется, последнюю задачу можно было решать и с помощью формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии.

2. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 22. Линейные уравнения.
- Занятие 23. Системы линейных уравнений.
- Занятие 24. Квадратные уравнения.
- Занятие 25. Системы, содержащие квадратные уравнения.
- Занятие 26. Дробно-рациональные уравнения.
- Занятие 27. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения.
- Занятие 28*. Более сложные уравнения и системы уравнений.

Общие рекомендации к занятиям

Этот раздел посвящён повторению основных методов решения уравнений и систем уравнений: целых, дробно-рациональных и простейших иррациональных. Решение последних не предполагает знакомства с какими-либо методами решения иррациональных уравнений, а основывается только на определении арифметического корня и знании его простейших свойств. Такие уравнения включаются не только в варианты ОГЭ, но и в варианты ЕГЭ в раздел заданий с кратким ответом. Что касается рациональных уравнений, то наряду с простейшими уравнениями будут рассмотрены и методы решения более сложных уравнений, поскольку такие уравнения часто включаются в задания ОГЭ по математике повышенного и высокого, «пятёрочного» уровня.

Напомним основные понятия, определения и факты, связанные с уравнениями.

Значение любого алгебраического выражения $f(x)$ при любом допустимом значении переменной x либо положительно (пишут $f(x) > 0$), либо отрицательно (пишут $f(x) < 0$), либо равно нулю (пишут $f(x) = 0$). Любая математическая формула является высказыванием, предложением, написанным на математическом языке. Высказывание $f(x) = 0$ (читается: эф от икс равно нулю) называется уравнением с одной переменной. Высказывания $f(x) > 0$ (читается: эф от икс больше нуля), $f(x) < 0$ (читается: эф от икс меньше нуля), $f(x) \geq 0$ (читается: эф от икс больше или равно нулю, или эф от икс не меньше нуля) и $f(x) \leq 0$ (читается: эф от икс меньше или равно нулю, или эф от икс не больше нуля) называются неравенствами с одной переменной. Заметим, что правая часть уравнения (неравенства) может быть отличной от нуля. В этом случае уравнение записывается в виде $f(x) = g(x)$, строгое неравенство — в виде $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, а нестрогое неравенство — в виде $f(x) \geq g(x)$ или $f(x) \leq g(x)$.

Число называется *корнем* уравнения, если при его подстановке вместо переменной в данное уравнение получается верное числовое равенство. *Решить уравнение* — значит найти множество всех его корней. Поэтому в ответе предпочтительней указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения \cup либо просто точку с запятой. В этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x = 7$ менее удачно по сравнению с записью $\{7\}$, поскольку $x = 7$ является уравнением, а $\{7\}$ — множеством его решений. Разумеется, для задач, предполагающих полное решение, оценка на ОГЭ по математике не будет снижена при любой записи ответа: 7 , $\{7\}$ или $x = 7$.

Если уравнение не имеет ни одного корня, то множество его корней не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). Подобные ситуации время от времени встречаются — в том числе и на экзаменах, к ним надо быть готовыми. В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества \emptyset либо просто пишут: «решений нет». Ответ в форме « $x \in \emptyset$ » является математически не вполне грамотным, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента. Для записи конечных числовых множеств используют фигурные скобки $\{ \}$, в которых через точку с запятой (не через запятую — чтобы исключить

путаницу, поскольку запятой отделяются дробные части десятичных дробей) записывают числа (обычно в порядке возрастания), являющиеся корнями уравнения (решениями неравенства).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является как решением уравнения $f(x) = 0$, так и решением уравнения $g(x) = 0$, то говорят, что задана *система уравнений* $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$, а записывают систему уравнений с помощью фигурной скобки: $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$ Правые части уравнений системы могут быть

отличны от нуля, система может состоять из трёх и более уравнений, содержать наряду с уравнениями и неравенства (такие системы иногда называют *смешанными*). *Решить систему* уравнений — значит найти множество её решений. При решении систем уравнений с одной переменной часто можно обойтись без решения всех уравнений системы, решив только одно — наиболее простое — из её уравнений и выполнив проверку найденных корней путём их подстановки в остальные уравнения системы. Разумеется, это касается только систем уравнений с одной переменной; для систем уравнений с двумя и более переменными такой приём «не работает» (эти системы рассматриваются на уроках 49—50, 53—54, 57—60; основные определения и факты, связанные с такими системами, изложены на этих уроках).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является корнем уравнения $f(x) = 0$ или корнем уравнения $g(x) = 0$, то говорят, что задана *совокупность уравнений*, а записывают совокупность уравнений с помощью квадратной скобки: $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$ Правые части уравнений совокупности могут быть отличны

от нуля, совокупность может состоять из трёх и более уравнений, содержать наряду с уравнениями и неравенства. *Решить совокупность* уравнений — значит найти множество решений каждого из уравнений совокупности, а затем найти объединение полученных множеств.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей уравнения. Областью допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений будем называть пересечение областей допустимых значений каждого из уравнений системы, т. е. множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей каждого уравнения системы.

Из трёх основных типов алгебраических выражений курса математики основной школы (целые, дробно-рациональные, иррациональные) два дают ограничения на переменную. Эти ограничения и определяют ОДЗ уравнения:

Алгебраическое выражение	Ограничение
Алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
Иррациональное алгебраическое выражение $\sqrt[n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$

Если каждый корень первого уравнения является и корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого. Из этого определения вытекает, что множество корней данного уравнения содержится в множестве корней уравнения-следствия. Перейдя от данного уравнения к уравнению-следствию, найдя корни последнего и проверив, какие из них являются корнями данного (такая проверка осуществляется непосредственной подстановкой найденных корней в данное уравнение), можно найти все корни данного уравнения. Корни уравнения-следствия, не являющиеся корнями данного уравнения, часто называют *посторонними корнями*.

Таким образом, одним из методов решения уравнений является переход к уравнению-следствию, который при записи решения обозначается стрелкой \Rightarrow . Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в квадрат, освобождения от знаменателя, логарифма или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней.

Данное уравнение	Уравнение-следствие	Проверяемые неравенства
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$f(x) = 0$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$f(x) = (g(x))^2$	$g(x) \geq 0$ (неравенство $f(x) \geq 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x) = g^2(x)$, а $g^2(x) \geq 0$)
$ f(x) = g(x)$	$f(x) = \pm g(x)$	$g(x) \geq 0$

Заметим, что при почленном сложении двух данных уравнений получается уравнение, являющееся следствием данных. Поэтому корни уравнения, полученного почленным сложением двух данных, должны быть проверены подстановкой в каждое из данных уравнений, либо уравнение, являющееся следствием данных, должно быть включено в данную систему.

При решении стандартных уравнений и их систем переход к следствию в большинстве случаев не используется, а применяются преобразования, которые не приводят к изменению множества решений данного уравнения или системы (равносильные преобразования). Два уравнения называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, т. е. уравнения, не имеющие корней, равносильны).

Равносильными могут быть не только два уравнения или две системы уравнений. В определении равносильности речь идёт лишь о множестве решений уравнения. Поэтому, например, уравнение может быть равносильно неравенству, совокупности или системе, и наоборот. Переход от данного уравнения к равносильному уравнению, равносильной совокупности или равносильной ему системе называется *равносильным* и при записи решения обозначается двусторонней стрелкой \Leftrightarrow . Такой переход не приводит ни к потере корней уравнения, ни к приобретению посторонних корней, и алгебраические преобразования, которые делают такой переход возможным, также называются *равносильными*. Метод равносильных преобразований не требует проверки найденных корней путём их подстановки в данное уравнение и является одним из основных методов решения уравнений и неравенств. Приведём в виде таблицы основные равносильные преобразования уравнений, которые изучаются в курсе математики основной школы (в том числе на профильном уровне).

Данное уравнение	Равносильная система
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\begin{cases} g(x) \neq 0, \\ f(x) = 0. \end{cases}$

Данное уравнение	Равносильная система
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2. \end{cases}$
$ f(x) = g(x)$	$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$

Одной из наиболее распространённых ошибок при записи решений уравнений является использование знаков следования и равносильности при переходе от уравнения с одной переменной к уравнению с другой переменной (как правило, после выполнения замены переменной). Приведём пример такого ошибочного использования: «пусть $t = \sqrt{x}$, тогда $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$.

Ясно, что множества корней уравнений $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ и $t^2 - 5t + 6 = 0$ различны, поэтому эти уравнения не являются равносильными. Использование знака равносильности в данном случае может быть расценено экспертами, проверяющими вариант ОГЭ, как математическая ошибка, связанная с незнанием или непониманием определения равносильности. Неправильным в данном случае будет и использование знака следования: уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$ не является, очевидно, следствием уравнения $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$, поскольку множество корней иррационального уравнения не содержится в множестве корней квадратного. К сожалению, в огромном потоке литературы для подготовки к экзаменам подобные ошибки встречаются сплошь и рядом — даже в тех пособиях, где приводится определение равносильности уравнений и неравенств. Едва ли это связано с недостаточной квалифицированностью авторов, скорее, речь идёт о некритическом подходе к употреблению подобной символики и подмене знаками равносильности и следствия таких слов и словосочетаний, как «тогда», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «следовательно», «поэтому» и им подобных.

Нервносильные преобразования уравнений и неравенств с одной переменной связаны в основном с сужением или расширением ОДЗ уравнения. В случае сужения ОДЗ может произойти потеря корней уравнения, в случае расширения ОДЗ — приобретение посторонних корней. Поэтому при каждом преобразовании нужно внимательно следить за ОДЗ, не допуская сужения или расширения последней и руководствуясь следующими правилами:

1. Перенос числа или одночлена из одной части уравнения в другую с изменением знака (плюс или минус) перед этим числом или одночленом на противоположный — равносильное преобразование.
2. Приведение подобных, не ведущее к изменению ОДЗ, — равносильное преобразование.
3. Умножение обеих частей уравнения на любое отличное от нуля число — равносильное преобразование.
4. Возведение обеих частей уравнения в чётную степень (в частности, в квадрат) при условии неотрицательности каждой из этих частей и допустимых значениях переменной — равносильное преобразование.

Например, если $g(x) < 0$, то уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $|f(x)| = g(x)$ не имеют корней в силу неотрицательности их левых частей (арифметического квадратного корня и модуля). Поэтому должно выполняться условие $g(x) \geq 0$. Но в этом случае обе части

каждого из уравнений неотрицательны, и возведение их в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases} \quad \text{и} \quad |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) = g^2(x). \end{cases}$$

То, что приведение подобных не должно вести к изменению ОДЗ, также весьма существенно. Например, если просто привести подобные в уравнении $x^2 + \sqrt{2x+5} = 9 + \sqrt{2x+5}$, будут получены посторонние корни. Последнее связано с расширением ОДЗ: уравнение $x^2 = 9$ в отличие от данного не предполагает каких-либо ограничений на переменную, его корнями являются числа -3 и 3 . Равносильное

же преобразование будет таким: $x^2 + \sqrt{2x+5} = 9 + \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2,5, \\ x^2 = 9. \end{cases}$ С учётом не-

равенства системы получим правильный ответ -3 .

Разумеется, при решении простейших уравнений можно вполне обойтись без изложенного выше материала. Но в варианты ОГЭ по математике наряду с простейшими включаются уравнения повышенного и высокого уровня сложности, для решения которых эти рекомендации будут полезными.

Занятие 22. Линейные уравнения

Каждое из уравнений, которые рассматриваются на этих уроках, представляет собой линейное уравнение вида $ax + b = 0$ (откуда $ax = -b$ и $x = -\frac{b}{a}$) либо сводится к нему после элементарных преобразований: раскрытия скобок и приведения подобных. Для того чтобы успешно справиться с подобным заданием на ОГЭ, достаточно уметь решать линейные уравнения, помнить правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), обладать определёнными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{2}{7}x = 6\frac{2}{7}$.

Решение. Сначала обратим дробь в правой части уравнения в неправильную: $6\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$. Разделим обе части уравнения на число $\frac{2}{7}$. Получим $x = \frac{44}{7} : \frac{2}{7}$, откуда $x = \frac{44}{7} \cdot \frac{7}{2}$, и значит, $x = 22$.

Ответ: 22.

Отметим, что и линейное уравнение может оказаться достаточно сложным, например, если его коэффициенты иррациональны.

Пример 2. Решите уравнение $2(\sqrt{3} - x) + \sqrt{3}(2 - x) = 2\sqrt{3} + 4$.

Решение. Заметим, что степень переменной в каждом из слагаемых левой части равна 1. Раскроем скобки в левой части уравнения: $2\sqrt{3} - 2x + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x = 2\sqrt{3} + 4$. Вынесем переменную за скобки: $4\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 2)x = 2\sqrt{3} + 4$, откуда $(\sqrt{3} + 2)x = 2\sqrt{3} + 4$, и следовательно, $x = \frac{2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3} + 2}$. Вынесем в числителе 2 за скобки: $x = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3} + 2}$. Сократив дробь, получим $x = 2$.

Ответ: 2.

Занятие 23. Системы линейных уравнений

Вначале напомним основные определения. Рассмотрим уравнения $f(x; y) = 0$ и $g(x; y) = 0$ (1), левые части которых представляют собой алгебраические выражения

с двумя переменными x и y . Говорят, что дана система $\begin{cases} f(x; y) = 0, \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$ (2) двух алге-

браических уравнений с двумя неизвестными x и y , если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, каждая из которых является решением каждого из уравнений (1).

Пара чисел $(x_0; y_0)$ называется *решением системы уравнений* (2), если одновременно справедливы два числовых равенства $f(x_0; y_0) = 0$ и $g(x_0; y_0) = 0$. Решить систему уравнений (2) — значит найти множество всех её решений (если это множество является пустым, то говорят, что система не имеет решений).

Системы трёх и более уравнений с тремя и более неизвестными определяются аналогично.

Перейдём к рассмотрению систем линейных уравнений с двумя переменными. Сначала дадим графическую интерпретацию такой системы. Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой). Прояснить смысл коэффициента k удобней всего на примере прямой $y = kx$, проходящей через начало координат и точку $(1; k)$. Если $k > 0$, то тангенс угла α , который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, находится из прямоугольного треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и k . Он будет равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{1} = k$ (рис. 13).

Если $k < 0$, то угол α будет тупым, а его тангенс — отрицательным. В этом случае он дополняет острый угол β прямоугольного треугольника с теми же вершинами $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и $|k|$, до 180° (рис. 14). Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{|k|}{1} = -|k|$. Поскольку в данном случае $k < 0$, то $|k| = -k$ и $\operatorname{tg} \alpha = k$. Таким образом, и в этом случае коэффициент k равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Наконец, если $k = 0$, то уравнение прямой $y = kx + b$ принимает вид $y = b$. Эта прямая, очевидно, параллельна оси абсцисс (поскольку ординаты всех её точек одинаковы), пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 15), поэтому угол, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (а значит, и его тангенс) равен нулю. Именно поэтому коэффициент k в уравнении прямой называется угловым.

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$, её можно получить параллельным переносом прямой $y = kx$ вдоль оси ординат на b единиц вверх

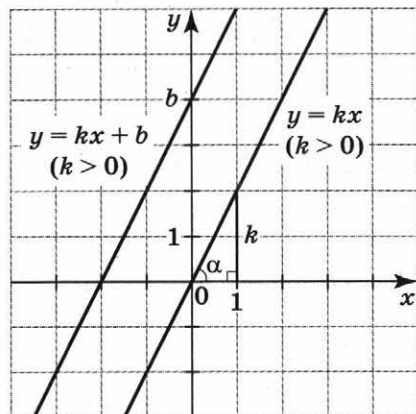


Рис. 13

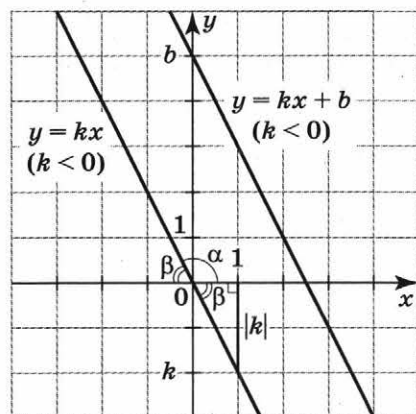


Рис. 14

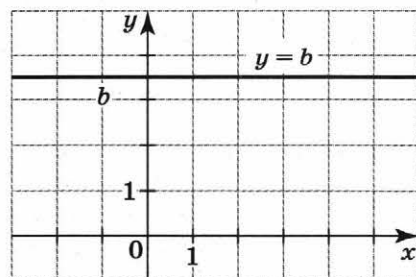


Рис. 15

(при $b > 0$) или на $|b|$ единиц вниз (при $b < 0$); угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ будет, разумеется, также равен $\operatorname{tg} \alpha$.

Итак, в любом случае коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Теперь можно дать графическую интерпретацию системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ двух ли-

нейных уравнений с двумя неизвестными. Каждое из её уравнений является уравнением прямой. Если угловые коэффициенты этих прямых различны (прямые пересекаются), то система уравнений имеет единственное решение. Если угловые коэффициенты этих прямых равны, а начальные ординаты различны (прямые параллельны), то система уравнений не имеет решений. Если же угловые коэффициенты этих прямых равны и начальные ординаты равны (прямые совпадают), то система уравнений имеет бесконечно много решений.

Напомним, что основными методами решения систем линейных уравнений являются подстановка и алгебраическое сложение уравнений системы, позволяющее исключить одну из переменных.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(5x - 4) = -7, \\ y = 20x + 7. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы не зависит от переменной y . Найдём x , раскрыв скобки в левой части этого уравнения: $10x - 8 = -7$, откуда $x = 0,1$. Подставим найденное значение во второе уравнение: $y = 20 \cdot 0,1 + 7$, откуда $y = 9$.

Ответ: (0,1; 9).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = -19, \\ 7x + 2y = 24. \end{cases}$

Решение. Чтобы исключить переменную y , нужно умножить обе части первого уравнения системы на 2, обе части второго уравнения системы на 5 и почленно сложить уравнения: $2(3x - 5y) + 5(7x + 2y) = -19 \cdot 2 + 24 \cdot 5$, откуда $41x = 82$ и $x = 2$. Теперь найдём y , подставив найденное значение x в любое из уравнений системы, например во второе: $7 \cdot 2 + 2y = 24$, откуда $y = 5$.

Ответ: (2; 5).

При решении систем трёх линейных уравнений применяются аналогичные приёмы, позволяющие последовательно исключить сначала одну из переменных, потом другую, после чего найти значение оставшейся.

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = -4, \\ x + 2y - 9z = 15, \\ 5x - 4y + 6z = -32. \end{cases}$

Решение. Если почленно вычесть из первого уравнения системы её второе уравнение, можно исключить переменную y . Получим $2x + 15z = -19$. Аналогичным образом эту переменную можно исключить, умножив обе части второго уравнения на 2 и почленно сложив полученное уравнение с третьим уравнением системы, в результате чего получим $7x - 12z = -2$. Таким образом, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} 2x + 15z = -19, \\ 7x - 12z = -2. \end{cases}$ Исключим теперь переменную

z , умножив обе части первого уравнения полученной системы на 4, а обе части второго уравнения на 5 и почленно сложив полученные уравнения: $43x = -86$, откуда $x = -2$. Для того чтобы найти z , подставим $x = -2$ в любое из уравнений последней системы, например во второе: $-14 - 12z = -2$, откуда $z = -1$. Осталось найти y , подставив $x = -2$ и $z = -1$ в любое из уравнений данной системы, например в первое: $-6 + 2y - 6 = -4$, откуда $y = 4$.

Ответ: (-2; 4; -1).

Занятие 24. Квадратные уравнения

Решение квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) обычно основывается на формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ корней квадратного уравнения. Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается буквой D . Реже применяется формула для чётного второго коэффициента: если b — чётное число, т. е. $b = 2b_1$, то $x = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a}$, откуда $x = \frac{-2b_1 \pm 2\sqrt{b_1^2 - ac}}{2a}$, т. е. $x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}$, или $x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Пример 1. Решите уравнение $2x^2 - 13x - 7 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения $D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 225$. В формуле корней квадратного уравнения меньшему корню соответствует знак «минус» перед квадратным корнем из дискриминанта. Значит, искомый корень $x = \frac{13 - 15}{4}$, откуда $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корнями которого являются числа x_1 и x_2 . Тогда справедливы формулы Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$ Эти формулы обыч-

но используются применительно к так называемому приведённому квадратному уравнению, т. е. к уравнению, старший коэффициент левой части которого равен 1. Тем не менее формулы Виета можно использовать и для вычисления корней неприведённого квадратного уравнения. Если умножить обе части первого уравнения си-

стемы $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ на a , а обе части второго уравнения на a^2 , получим систему,

которую можно записать так: $\begin{cases} ax_1 + ax_2 = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$ Таким образом, если найти два чис-

ла, произведение которых равно ac , а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2 , после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного уравнения. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на роль ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac , и, перебирая по возрастанию возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 2. Решите уравнение $8x^2 - 73x + 9 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $8 \cdot 9 = 72$, а сумма равна 73 . Уже простейший делитель числа 72 позволяет получить ответ: $1 \cdot 72 = 72$, $1 + 72 = 73$. Осталось разделить найденные числа на 8 и получить корни данного уравнения: $\frac{1}{8}$ и $\frac{72}{8} = 9$.

Ответ: 9 .

Пример 3. Решите уравнение $9x^2 - 15x + 4 = 0$.

Решение. Сначала найдём два числа, произведение которых равно $9 \cdot 4 = 36$, а сумма равна 15. Перебирая пары делителей числа 36 по возрастанию меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем шаге находим искомые числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 9, получим корни данного уравнения: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ и $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{4}{3}$.

Пример 4. Решите уравнение $4x^2 + 5x - 6 = 0$.

Решение. Для вычисления корней уравнения найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-6) = -24$, а сумма равна -5 . Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24 , 2 и -12 , На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -5 : это 3 и -8 . Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни данного уравнения: $\frac{3}{4} = 0,75$ и $\frac{-8}{4} = -2$.

Ответ: $-2; 0,75$.

Разумеется, решение неприведённых квадратных уравнений с помощью формул Виета возможно преимущественно в тех случаях, когда корни квадратного уравнения рациональны.

Если корни уравнения являются иррациональными, их поиск может вызывать значительные затруднения у большинства учащихся. Правда, такие уравнения уже не относятся к стандартным и в первую часть ОГЭ не включаются.

Пример 5. Решите уравнение $2x^2 - (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + \sqrt{6} + 2 = 0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным. Найдём дискриминант D уравнения: $D = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\sqrt{6} + 2) = 12 + 12\sqrt{6} + 18 - 8\sqrt{6} - 16 = 14 + 4\sqrt{6}$.

Дискриминант представляет собой выражение вида $p + q\sqrt{r}$. В том случае, если это выражение является полным квадратом, обычно используют рассуждения, аналогичные следующим. Предположим, что дискриминант является квадратом суммы чисел a и b : $(a + b)^2 = 14 + 4\sqrt{6}$. Пусть сумма квадратов этих чисел равна 14, а их удвоенное произведение равно $4\sqrt{6}$. Тогда $ab = 2\sqrt{6}$. Наиболее вероятными «претендентами» на роль a и b являются либо 2 и $\sqrt{6}$, либо $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Поскольку сумма квадратов искомых чисел равна 14, то это числа $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Следовательно, $\sqrt{D} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения:

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}, \\ x = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{3} + \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Иногда уравнение можно не приводить к стандартному виду $ax^2 + bx + c = 0$, а воспользоваться вынесением общего множителя за скобки или разложением на множители с помощью формул сокращённого умножения. В некоторых случаях

для приведения уравнения к квадратному требуется выполнить простейшую замену переменной (хотя можно и просто раскрыть скобки) или некоторые стандартные алгебраические преобразования. Иногда в результате таких преобразований удаётся получить уже не квадратное «по внешнему виду», а линейное уравнение. Примеры таких задач можно найти в тренировочных и домашних работах.

Занятие 25. Системы, содержащие квадратные уравнения

Основными методами решения систем, содержащих нелинейные уравнения, как и любых других систем уравнений школьного курса математики, являются следующие:

- подстановка;
- замена переменной;
- алгебраическое сложение.

Напомним некоторые основные равносильные преобразования систем уравнений (т. е. преобразования, не ведущие ни к потере решений, ни к приобретению посторонних решений):

- перенос слагаемого из одной части уравнения в другую;
- умножение обеих частей уравнения системы на одно и то же отличное от нуля число;
- почленное сложение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате сложения;
- приведение подобных, не ведущее к изменению области допустимых значений системы.

Почленное умножение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате умножения, может привести к приобретению посторонних решений. В этом случае следует сделать проверку найденных решений путём их подстановки в исходную систему. Преобразования уравнений системы (в частности, приведение подобных) не должны изменять области допустимых значений переменных. Сужение области допустимых значений может привести к потере решений, расширение области допустимых значений — к приобретению посторонних решений.

Пример 1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$$

Решение. Если почленно сложить уравнения системы, получим $5x^2 = 5$, откуда $x^2 = 1$, и $x = \pm 1$. Найдём y , подставив найденные значения x в любое из уравнений системы, например во второе, откуда $y = 2x^2 - 1$. Тогда $y = 2 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = 1$.

Ответ: $(-1; 1); (1; 1)$.

Пример 2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (x + 6y)^2 = 7y, \\ (x + 6y)^2 = 7x. \end{cases}$$

Решение. Поскольку левые части уравнений тождественно равны, то равны и их правые части, т. е. $7x = 7y$, откуда $y = x$. Подставим $y = x$ в любое из уравнений системы, например во второе: $(x + 6x)^2 = 7x$, откуда $49x^2 = 7x$, т. е. $7x^2 - x = 0$, и значит, $7x\left(x - \frac{1}{7}\right) = 0$. Таким образом, $y = x = 0$, либо $y = x = \frac{1}{7}$.

Ответ: $(0; 0); \left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

Пример 3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x^2 - 4y^2 = 35. \end{cases}$$

Решение. Разложив на множители по формуле разности квадратов левую часть второго уравнения данной системы, получим $(x - 2y)(x + 2y) = 35$, откуда в силу первого уравнения системы $(x - 2y) \cdot 5 = 35$, и $x - 2y = 7$. Сложив почленно уравнения $x - 2y = 7$ и $x + 2y = 5$, получим $2x = 12$, откуда $x = 6$. Тогда $6 + 2y = 5$, откуда $y = -0,5$.

Ответ: (6; -0,5).

Занятие 26. Дробно-рациональные уравнения

Для решения простейших дробно-рациональных уравнений достаточно уметь выполнять действия с алгебраическими дробями. Одни из таких уравнений после несложных преобразований сводятся к линейным, другие — к квадратным.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x-4}{x+3} = 2$.

Решение. Заметим, что $x \neq -3$. Умножив обе части уравнения на $x + 3$, получим $x - 4 = 2(x + 3)$, $x - 4 = 2x + 6$, откуда $x = -10$.

Ответ: -10.

Пример 2. Решите уравнение $x = \frac{7x+16}{x+7}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Заметим, что $x \neq -7$. Умножив обе части уравнения на $x + 7$, получим $x(x + 7) = 7x + 16$, $x^2 + 7x = 7x + 16$, $x^2 = 16$, откуда $x = \pm 4$.

Ответ: -4.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{8}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 3$.

Решение. Заметим, что $x \neq \pm 1$. Умножив при этих условиях обе части уравнения на $(x + 1)(x - 1)$, получим $8(x - 1) + 2(x + 1) = 3(x + 1)(x - 1)$, откуда $10x - 6 = 3x^2 - 3$, и $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются $x = \frac{1}{3}$ и $x = 3$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3.

Занятие 27. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения

Решение систем, содержащих простейшие дробно-рациональные уравнения, основывается на общих методах решения систем уравнений с двумя неизвестными: подстановке, алгебраическом сложении, замене переменной (в пределах одного уравнения или всей системы). Все алгебраические преобразования выполняются с учётом ОДЗ данной системы уравнений.

Пример 1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{(x-5)(x+6)}{y+5} = 0, \\ \frac{(y+5)(y-6)}{x+6} = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система определена, если $x \neq -6$ и $y \neq -5$. При этих условиях из первого уравнения системы получим, что $x = 5$, а из второго уравнения, что $y = 6$.

Ответ: (5; 6).

Пример 2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{25}{y} = 7, \\ \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

Решение. Данная система определена, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Обозначим $\frac{1}{x}$ буквой u , а $\frac{1}{y}$ буквой v . Получим систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 12u + 25v = 7, \\ 6u + 5v = 2. \end{cases}$$
 Умножим обе части второго уравнения последней системы на -5 и почленно сложим с полученным уравнением её первое уравнение: $-18u = -3$, откуда $u = \frac{1}{6}$, и значит, $x = 6$. Аналогично, умножив обе части второго уравнения последней системы на -2 и почленно сложив с полученным уравнением её первое уравнение, найдём $15v = 3$, откуда $v = \frac{1}{5}$, и значит, $y = 5$.

Ответ: (6; 5).

Пример 3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{x}{3x-2} = \frac{y}{3y-2}, \\ 3y^2 - 5x + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система определена, если $x \neq \frac{2}{3}$ и $y \neq \frac{2}{3}$. При этих условиях из первого уравнения системы получим, что $x(3y-2) = y(3x-2)$, откуда $y = x$. Тогда второе уравнение данной системы примет вид $3x^2 - 5x + 2 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $x = \frac{2}{3}$ и $x = 1$. В силу условия $x \neq \frac{2}{3}$ получаем, что $x = 1$. Но тогда и $y = x = 1$.

Ответ: (1; 1).

Пример 4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = 3, \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Решение. Данная система определена, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Обозначим $\frac{x}{y}$ буквой z . Тогда $z \neq 0$, и первое уравнение данной системы примет вид $z + \frac{2}{z} = 3$, откуда $z^2 - 3z + 2 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются $z = 1$ (и тогда $\frac{x}{y} = 1$, откуда $x = y$) и $z = 2$ (и тогда $\frac{x}{y} = 2$, откуда $x = 2y$). Если $x = y$, то второе уравнение данной системы принимает вид $0 = 7$ и не имеет корней. Значит, и вся система не имеет решений. Если $x = 2y$, то второе уравнение данной системы принимает вид $y = 7$, и тогда $x = 14$.

Ответ: (14; 7).

Занятие 28*. Более сложные уравнения и системы уравнений

Это занятие посвящено отработке навыков решения более сложных уравнений и систем уравнений — повышенного и высокого уровней. Для решения уравнений используются замена переменной, разложение на множители, условия равенства степеней и другие стандартные приёмы. Решение систем также основывается на мето-

дах, изложенных на предыдущих уроках, но уровень сложности рассматриваемых здесь систем несколько выше по сравнению с предыдущими уроками. Рассмотрим характерные примеры.

Уравнение вида $(g(x))^{2n+1} = (p(x))^{2n+1}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с нечётным натуральным показателем равносильно уравнению $g(x) = p(x)$. Уравнение вида $(g(x))^{2n} = (p(x))^{2n}$, где n — натуральное число, в силу свойств степенной функции с чётным натуральным показателем равносильно совокупности

$$\begin{cases} p(x) = q(x), \\ p(x) = -q(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение $(x - 3)^6 + (x^2 - 2x - 1)^3 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x - 3)^6 = -(x^2 - 2x - 1)^3$. Далее, поскольку $a^6 = (a^2)^3$, $-b^3 = (-b)^3$, получим $((x - 3)^2)^3 = (-x^2 + 2x + 1)^3$. В силу того что $c^3 = d^3 \Leftrightarrow c = d$, последнее уравнение приводится к виду $(x - 3)^2 = -x^2 + 2x + 1$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$, единственным корнем которого является 2.

Ответ: 2.

Отметим, что для решения большинства уравнений степени выше второй с целочисленными коэффициентами стандартный алгоритм решения указать не удаётся, но практически всегда в их решении можно существенно продвинуться, следуя одной из трёх инструкций или правил: «примени формулу», «добавь и вычти», «угадай корень».

Пример 2. Решите уравнение $x^4 - 2x^3 + x^2 - 9 = 0$.

Решение. Этот пример иллюстрирует применение формул сокращённого умножения. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел: $x^4 - 2x^3 + x^2 = (x^2 - x)^2$. Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2 - x)^2 - 3^2 = 0$. Применяя формулу разности квадратов, получим $(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 3) = 0$, откуда $x^2 - x - 3 = 0$, либо $x^2 - x + 3 = 0$. Корнями уравнения $x^2 - x - 3 = 0$ являются числа $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ и $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Уравнение $x^2 - x + 3 = 0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$(x - 4)^3 + (x - 4)^2 + (x - 4)(x - 3) + (x - 3)^2 + (x - 3)^3 = 6.$$

Решение. Для решения уравнения воспользуемся правилом «примени формулу». Выражение $(x - 4)^2 + (x - 4)(x - 3) + (x - 3)^2$ представляет собой неполный квадрат суммы выражений $x - 3$ и $x - 4$. Поэтому, если умножить его на разность этих выражений $(x - 3) - (x - 4)$, получим разность кубов этих выражений. Но $(x - 3) - (x - 4) = 1$, поэтому $(x - 4)^2 + (x - 4)(x - 3) + (x - 3)^2 = (x - 3)^3 - (x - 4)^3$. Теперь уравнение можно переписать так: $(x - 4)^3 + (x - 3)^3 - (x - 4)^3 + (x - 3)^3 = 6$, откуда, приведя подобные и разделив обе части уравнения на число 2, получаем $(x - 3)^3 = 3$. Значит, $x - 3 = \sqrt[3]{3}$ и $x = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Ответ: $3 + \sqrt[3]{3}$.

Дробно-рациональные уравнения обычно решаются приведением их с помощью алгебраических преобразований к простейшим.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{x^7 - 4x^5 + 4x^2 - 7x - 2}{x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4} = 1$.

Решение. Дробь равна единице, если её числитель равен знаменателю, а знаменатель имеет смысл и не обращается в нуль. Перейдём к соответствующей системе:

$$\frac{x^7 - 4x^5 + 4x^2 - 7x - 2}{x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^7 - 4x^5 + 4x^2 - 7x - 2 = x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4, \\ x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ являются $x = 1$ и $x = 2$. С помощью проверки устанавливаем, что неравенству $x^7 - 4x^5 + 3x^2 - 4x - 4 \neq 0$ удовлетворяет только $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{x - 5}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

Решение. Разложим квадратные трёхчлены в знаменателях дробей на множители. Корнями уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ являются $x = -1$ и $x = 3$. Следовательно, по теореме о разложении квадратного трёхчлена на множители получаем, что $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. По формуле разности квадратов $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Корнями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ являются $x = 1$ и $x = 3$. Следовательно, по теореме о разложении квадратного трёхчлена на множители $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Теперь уравнение можно переписать в виде $\frac{2}{(x + 1)(x - 3)} + \frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{(x - 1)(x - 3)}$. Перенесём все слагаемые в левую часть и приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{2}{(x + 1)(x - 3)} + \frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{1}{(x - 1)(x - 3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x - 1) + (x - 5)(x - 3) - (x + 1)}{(x + 1)(x - 3)(x - 1)} = 0.$$

Раскроем скобки в числителе, приведём подобные и воспользуемся условием обращения дроби в нуль:

$$\frac{2(x - 1) + (x - 5)(x - 3) - (x + 1)}{(x + 1)(x - 3)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2 + x^2 - 3x - 5x + 15 - x - 1}{(x + 1)(x - 3)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{(x + 1)(x - 3)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, \\ (x - 1)(x + 1)(x - 3) \neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ являются $x = 3$ и $x = 4$. Неравенству системы удовлетворяет только $x = 4$.

Ответ: 4.

Иррациональные уравнения, представленные в ОГЭ по математике, весьма немногочисленны, для их решения не требуются специальных знаний, нужно просто не забывать об области допустимых значений.

Пример 6. Решите уравнение $x^2 + x + \sqrt{x^2 - 64} = \sqrt{x^2 - 64} + 56$.

Решение. Левая и правая части уравнения определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2 - 64 \geq 0$, откуда $x^2 \geq 64$. При допустимых значениях переменной уравнение приводится к виду $x^2 + x - 56 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа -8 и 7 , из которых только $x = -8$ удовлетворяет неравенству $x^2 \geq 64$.

Ответ: -8 .

Как видно из рассмотренного примера, в некоторых случаях можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ. Как правило, это применимо к задачам, в которых ОДЗ нужна преимущественно для отбора корней уравнения или — в некоторых случаях — решений неравенства.

Рассмотрим теперь уравнения, которые решаются с помощью метода введения новой переменной.

Уравнения вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$ (их иногда называют трёхчленными) являются одними из наиболее распространённых. Наверное, самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (здесь $f(x) = x^2$). Заменой переменной $t = f(x)$ трёхчленное уравнение сводится к квадратному относительно переменной t уравнению $at^2 + bt + c = 0$.

Пример 7. Решите уравнение $3(2x - 1)^4 - 16(2x - 1)^2 + 16 = 0$.

Решение. Сделаем замену переменной: $z = (2x - 1)^2$, $z \geq 0$. Уравнение примет вид $3z^2 - 16z + 16 = 0$. Корни этого уравнения: $\begin{cases} z = 4, \\ z = \frac{4}{3}. \end{cases}$ Условию $z \geq 0$ удовлетворяет каждый из корней уравнения. Вернёмся к переменной x :

$$\begin{cases} (2x - 1)^2 = 4, \\ (2x - 1)^2 = \frac{4}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2, \\ 2x - 1 = -2, \\ 2x - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ 2x - 1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13x) = 53$.

Решение. Обозначим $6x^2 - 13x + 6$ через t . Тогда $6x^2 - 13x = t - 6$ и уравнение примет вид $3t^2 - 10(t - 6) = 53$, откуда $3t^2 - 10t + 7 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и $\frac{7}{3}$. Сделаем обратную замену. При $t = 1$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = 1$, откуда $6x^2 - 13x + 5 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$. При $t = \frac{7}{3}$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = \frac{7}{3}$. Откуда, умножив обе части уравнения на 3, получим $18x^2 - 39x + 18 = 7$, и значит, $18x^2 - 39x + 11 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{11}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{11}{6}$.

Пример 9. Решите уравнение $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4 + 5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 - 36 = 0$.

Решение. Пусть $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 = t$. Тогда $t \geq 0$ и уравнение примет вид $t^2 + 5t - 36 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $t = -9$ и $t = 4$, из которых только последнее удовлетворяет условию $t \geq 0$. Итак, $t = 4$. Сделаем обратную замену: $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 = 4$, откуда $\frac{2x}{x+1} = 2$ либо $\frac{2x}{x+1} = -2$. Уравнение $\frac{2x}{x+1} = 2$ корней не имеет, а единственным корнем уравнения $\frac{2x}{x+1} = -2$ является $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

Пример 10. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y + \frac{3}{3x + 2y} = 4, \\ \frac{y}{3x + 2y - 3} = 5. \end{cases}$$

Решение. Пусть $3x + 2y = t$. Тогда первое уравнение системы примет вид $t + \frac{3}{t} = 4$. Умножив обе части полученного уравнения на t и решив полученное ква-

дратное уравнение, найдём, что $t = 1$ либо $t = 3$. В последнем случае знаменатель дроби в левой части второго уравнения системы обращается в нуль, поэтому остаётся только значение $t = 1$, т. е. $3x + 2y = 1$. Подставим это значение во второе уравнение системы: $\frac{y}{1-3} = 5$, откуда $y = -10$. Тогда $3x - 2 \cdot 10 = 1$ и $x = 7$.

Ответ: (7; -10).

Решение систем уравнений этого уровня сложности часто требует повышенного внимания и аккуратности.

Пример 11. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = \frac{x}{1 - \frac{6}{x+6}}, \\ x(x^2 - y - 36) = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем правую часть первого уравнения системы:

$\frac{x}{1 - \frac{6}{x+6}} = \frac{x}{\frac{x-6+6}{x+6}} = \frac{x}{\frac{x}{x+6}}$. Поскольку знаменатель любой из дробей отличен от нуля, получаем, что $x \neq 0$, $x \neq -6$. В этом случае $\frac{x}{\frac{x}{x+6}} = x + 6$ и первое уравнение

системы принимает вид $y = x + 6$. Поскольку $x \neq 0$, из второго уравнения системы получим $x^2 - y - 36 = 0$. Подставив в это уравнение $y = x + 6$, приходим к уравнению $x^2 - x - 42 = 0$, корнями которого являются $x = -6$ (этот корень не удовлетворяет условию $x \neq -6$) и $x = 7$ (в этом случае $y = 7 + 6 = 13$).

Ответ: (7; 13).

Решение некоторых уравнений ОГЭ по математике основывается на свойствах ограниченности квадратичной функции или (в более простых случаях) на условии равенства нулю суммы нескольких неотрицательных алгебраических выражений: такая сумма равна нулю, только если каждое её слагаемое равно нулю, например:

$$f^{2n}(x) + g^{2m}(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Пример 12. Решите уравнение $(x^4 - 2x^2 + 2)^4 + (x^2 + 2x + 5)^2 = 17$.

Решение. Выделив полные квадраты в каждой из скобок левой части, перепишем данное уравнение в виде $((x^2 - 1)^2 + 1)^4 + ((x + 1)^2 + 4)^2 = 17$. Из неравенств $(x^2 - 1)^2 + 1 \geq 1$ и $(x + 1)^2 + 4 \geq 4$ следует, что $((x^2 - 1)^2 + 1)^4 \geq 1$, а $((x + 1)^2 + 4)^2 \geq 16$. Поэтому левая часть уравнения не меньше 17. Быть равной 17 она может только в случае, когда каждое из двух последних неравенств обращается в равенство, т. е. если $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 1 = 1, \\ (x + 1)^2 + 4 = 4. \end{cases}$ Единственным решением полученной системы является корень $x = -1$ её второго уравнения.

Ответ: -1.

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

Занятие 29. Задачи на движение. Совместное движение.

Занятие 30. Задачи на движение. Движение по воде.

Занятие 31. Задачи на движение. Движение протяжённых тел. Средняя скорость.

Занятие 32. Задачи на производительность.

Занятие 33. Задачи на концентрацию, сплавы, смеси.

Общие рекомендации к занятиям

Можно — при всей условности такого деления — выделить следующие основные группы текстовых задач по данной теме:

- арифметические (вычислительные) задачи с текстовым условием (см. занятие 6 модуля «Задачи с практическим содержанием»);
- задачи на проценты и доли (см. занятие 7 модуля «Задачи с практическим содержанием»);
- задачи на концентрацию, сплавы, смеси;
- задачи на движение;
- задачи на производительность.

Разумеется, типология текстовых задач далеко не исчерпывается приведённым списком, но умение решать именно такие задачи является ключевым при подготовке по данной теме. Кроме того, при повторении темы непосредственно используются навыки решения задач на вычисление и преобразование выражений, решение простейших и чуть более сложных уравнений, так что происходит повторение и этих тем.

Занятие 29. Задачи на движение. Совместное движение

Это и следующие два занятия посвящены текстовым задачам в той их части, которую составляют задачи на движение. Во всех таких задачах допускается определённая идеализация: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости (в том числе скорость течения) постоянны в течение определённых промежутков времени, не меняются при поворотах и т. д., движущиеся тела считаются материальными точками (если не оговорено противное), т. е. не имеющими размеров и массы (вернее, их размеры и масса несущественны для решения задачи). Даже решение задач на движение по окружности не требует применения специальных понятий — угловой скорости и т. п.; здесь точнее было бы говорить о движении по замкнутой трассе.

При решении задач на движение двух тел часто удобно считать одно тело неподвижным, а другое — приближающимся к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей (при движении вдогонку). Такая базовая модель помогает разобраться с условием задачи, получить нужные уравнения даже в таком относительно трудном случае, как движение по окружности.

Если расстояние между пунктами, из которых начинают движение два тела, не задано, иногда бывает удобно положить его равным единице.

Основными типами задач на движение являются следующие:

- задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку);
- задачи на движение по окружности (замкнутой трассе);
- задачи на движение протяжённых тел;
- задачи на движение по воде;
- задачи на среднюю скорость.

Рассмотрим каждый из типов задач, выделив, где необходимо, базовые задачи.

Движение навстречу

Если расстояние между двумя телами равно s , а их скорости — v_1 и v_2 , то время t , через которое они встретятся, находится по формуле $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$. Действительно, если одно из тел считать неподвижным, тогда второе будет приближаться к нему со скоростью, равной сумме скоростей, и пройдет при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 1. Расстояние между городами A и B равно 730 км. Из города A в город B со скоростью 75 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение. Через два часа после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно $730 - 150 = 580$ (км), поэтому автомобили встретятся через время $t = \frac{580}{75 + 70} = 4$ (ч). Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 6 часов и проедет $75 \cdot 6 = 450$ (км).

Ответ: 450.

Движение вдогонку

Если расстояние между двумя телами равно s , они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), так, что первое тело следует за вторым, то время t , через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$. Действительно, если второе тело считать неподвижным, то первое будет приближаться к нему со скоростью, равной разности скоростей, и пройдет при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 2. Два пешехода отправляются одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,2 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 360 м?

Решение. Время t в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 360 м, т. е. 0,36 км, находим по формуле $t = \frac{0,36}{1,2} = 0,3$. Следовательно, это время составляет 18 мин.

Ответ: 18.

Движение по окружности (замкнутой трассе)

Рассмотрим движение двух точек по окружности (замкнутой трассе) длины s в одном направлении при одновременном старте со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью $v_1 - v_2$, получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка поравняется в первый раз со второй. При этом первая точка пройдет расстояние, равное длине трассы, и искомая формула ничем не отличается от формулы, полученной для задачи на движение вдогонку: $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$. Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности (замкнутой трассе) в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), то первая точка приближается ко второй со скоростью $v_1 - v_2$ и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, проходит расстояние ровно на один круг больше, чем вторая.

Пример 3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 9 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого

автомобилиста равна 85 км/ч, и через 36 мин после старта он опережал второго автомобилиста на один круг. Найдите скорость второго автомобилиста. Ответ дайте в километрах в час.

Решение. Пусть скорость второго автомобилиста равна x км/ч. Поскольку 36 мин составляют $\frac{3}{5}$ ч и это то время, за которое первый автомобилист будет опережать второго на один круг, составим по условию задачи уравнение $\frac{9}{85-x} = \frac{3}{5}$, откуда $255 - 3x = 45$ и $x = 70$.

Ответ: 70.

Занятие 30. Задачи на движение. Движение по воде

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, при движении против течения — вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

Пример 1. Рыболов отправляется на лодке от пристани с намерением вернуться через 6 ч. Перед возвращением он хочет пробыть на берегу 2 ч. На какое наибольшее расстояние он может отплыть, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 5 км/ч?

Решение. Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 3 км/ч, при движении по течению равна 7 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\frac{x}{3} + \frac{x}{7}$ ч. Из условия задачи следует, что это время равно 4 ч. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 4$. Решив уравнение, получим $x = 8,4$.

Ответ: 8,4.

Пример 2. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 23 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 4 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 27 ч после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Решение. Пусть искомая величина равна $2x$. Составим по условию задачи уравнение $\frac{x}{22} + \frac{x}{24} + 4 = 27$, откуда $\frac{x}{22} + \frac{x}{24} = 23$, $\frac{11x + 12x}{22 \cdot 12} = 23$, $\frac{23x}{264} = 23$, $x = 264$.

Значит, искомое расстояние равно 528 км.

Ответ: 528.

Занятие 31. Задачи на движение. Движение протяжённых тел. Средняя скорость

Движение протяжённых тел

В задачах на движение протяжённых тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация — определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяжённой платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае — расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

Пример 1. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 110 м, второй длиной 90 м. Второй сухогруз отстаёт

от первого на 700 м, но уже через 18 мин опережает первый на 900 м. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение. Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью x м/мин, равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 18 мин второй сухогруз проходит расстояние $l = 700 + 90 + 110 + 900 = 1800$ (м). Поэтому $x = \frac{1800}{18} = 100$ (м/мин), т. е. 6 км/ч.

Ответ: 6.

Средняя скорость

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле $v = \frac{s}{t}$, где s — путь, пройденный телом, а t — время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения. Например, если путь состоял из двух участков протяжённостью s_1 и s_2 , скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2 , то $s = s_1 + s_2$, $t = t_1 + t_2$, где $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$, $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$.

Пример 2. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 10 км/ч, вторую треть — со скоростью 12 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути. Ответ дайте в километрах в час.

Решение. Обозначим длину всей трассы через $3s$. Тогда первую треть трассы велосипедист проехал за время $t_1 = \frac{s}{10}$, вторую треть — за время $t_2 = \frac{s}{12}$, последнюю треть — за время $t_3 = \frac{s}{15}$. Значит, время, потраченное им на весь путь, равно $t_1 + t_2 + t_3$, т. е. $\frac{s}{10} + \frac{s}{12} + \frac{s}{15} = \frac{15s}{60} = \frac{s}{4}$. Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле $v = \frac{3s}{\frac{s}{4}} = 3s \cdot \frac{4}{s} = 12$ (км/ч).

Ответ: 12.

Занятие 32. Задачи на производительность

В определённом смысле задачи на производительность (работу) схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния — объём работы. В тех случаях, когда объём работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице. Существенно разных задач здесь практически нет, во всех случаях речь идёт о выполнении определённой работы, меняются только сюжеты, а математическая фабула остаётся той же. Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на работу.

В некоторых случаях при решении задач на совместную работу можно обойтись без составления уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям.

Пример 1. Маша и Даша за день пропалывают 5 грядок, Даша и Глаша — 6 грядок, а Глаша и Маша — 7 грядок. Сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроём?

Решение. Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали ещё один день.

Получается, что каждая из девочек работала два дня или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополотла $5 + 6 + 7 = 18$ грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополотет вдвое меньше грядок, т. е. 9.

Ответ: 9.

Ключевой в задачах на работу является следующая задача:

Пример 2. Первый мастер может выполнить некоторую работу за a часов, а второй мастер — за b часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоём?

Решение. Поскольку объём работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную $\frac{1}{a}$, второй — $\frac{1}{b}$, а оба мастера — $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Значит, всю работу они выполнят за время $t = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Ответ: $t = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Пример 3. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 20 ч. Через 4 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение. Вдвоём рабочие за час делают $\frac{2}{20} = 0,1$ всей работы. За 4 ч первый рабочий сделал $\frac{4}{20} = 0,2$ всей работы. Оставшиеся 0,8 работы рабочие делали уже вместе и потратили на это $0,8 : 0,1 = 8$ (ч). Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 12 ч.

Ответ: 12.

Как уже отмечалось, в задачах на бассейны и трубы нет ничего специфического по сравнению с другими задачами на совместную работу. Модельная ситуация остаётся той же, только мастерам будут соответствовать трубы или насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

Пример 4. Первая труба пропускает на 8 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 480 л она заполняет на 10 мин позже, чем вторая труба?

Решение. Пусть первая труба пропускает x л воды в минуту, $x > 0$. Тогда вторая труба пропускает $x + 8$ л воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение $\frac{480}{x} = \frac{480}{x+8} + 10$, откуда, сократив на 10, получим $\frac{48}{x} = \frac{48}{x+8} + 1$, следовательно, $\frac{48}{x} - \frac{48}{x+8} = 1$. Приведём дроби в левой части к общему знаменателю: $\frac{48(x+8) - 48x}{x(x+8)} = 1$, откуда $x(x+8) = 48 \cdot 8$ и $x^2 + 8x - 384 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -24 и 16 , из которых только последнее удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 16.

Занятие 33. Задачи на концентрацию, сплавы, смеси

Задачи на концентрацию (т. е. на процентное содержание какого-то вещества в его растворе, сплаве или смеси) традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников и абитуриентов, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идёт об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем опускать).

При решении задач на концентрацию, сплавы, смеси целесообразно для наглядности использовать метод, который иногда не вполне научно называют методом банок. Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде условных банок, каждая из которых делится на две части — верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество чистого или сухого вещества для каждой банки, что позволяет почти автоматически получить нужное уравнение или даже ответ. Проиллюстрируем метод банок несколькими примерами.

Пример 1. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 10 кг её 70 %-ного и 40 кг её 40 %-ного растворов. Ответ выразите в процентах.

Решение. Используем ключевую идею, заключающуюся в отслеживании того, что происходит с чистой кислотой. Изобразим схематически данные в условии растворы и раствор, полученный при их смешивании, т. е. применим метод банок (рис. 16):

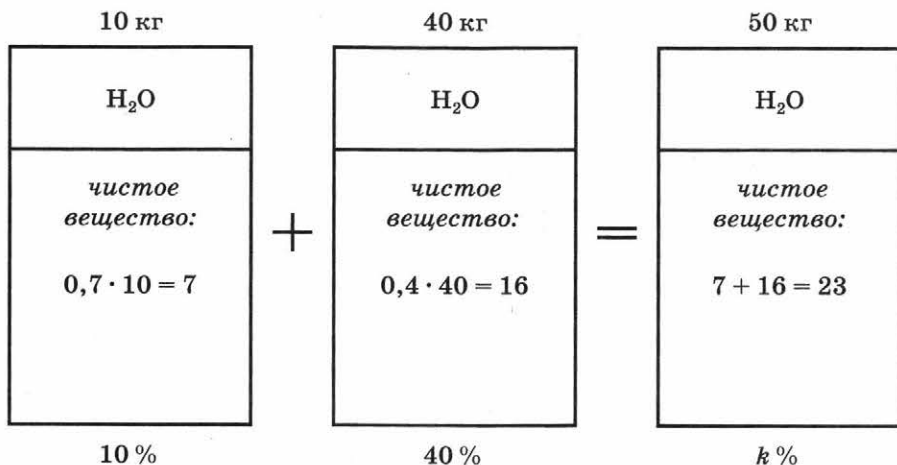


Рис. 16

Искомая концентрация $k = \frac{23}{50} \cdot 100\% = 23 \cdot 2\% = 46\%$. В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 23 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 46 кг чистой кислоты, т. е. 46 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 46 %.

Ответ: 46.

Иногда вместо «сложения» банок приходится использовать «превращение» одной банки в другую.

Пример 2. Виноград содержит 89 % влаги, а изюм — 8 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 33 кг изюма?

Решение. Используем ключевую идею: будем следить за массой чистого, т. е. в данном случае сухого вещества в винограде и изюме. Пусть для получения 33 кг изюма требуется x кг винограда. Из условия следует, что доля сухого вещества в винограде составляет 11 %, а в изюме — 92 %. Поэтому в x кг винограда будет $0,11x$ кг сухого вещества (рис. 17):

Поскольку эта масса равна массе сухого вещества в 33 кг изюма, то по условию задачи можно составить уравнение $0,11x = 0,92 \cdot 33$, откуда $11x = 92 \cdot 33$ и $x = 276$ (кг).

Ответ: 276.

Решим теперь в общем виде ключевую задачу нахождения концентрации раствора, полученного в результате смешивания двух растворов одного и того же вещества, причём эти растворы имеют разные массы и разную концентрацию.

Пример 3. Смешали a л n %-ного водного раствора некоторого вещества с b л m %-ного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси. Ответ выразите в процентах.

Решение. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было $\frac{a}{100} \cdot n = \frac{an}{100}$ л, во втором растворе — $\frac{b}{100} \cdot m = \frac{bm}{100}$ л. Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно $\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}$ л, а всего этой смеси получится $a + b$ л (рис. 18):

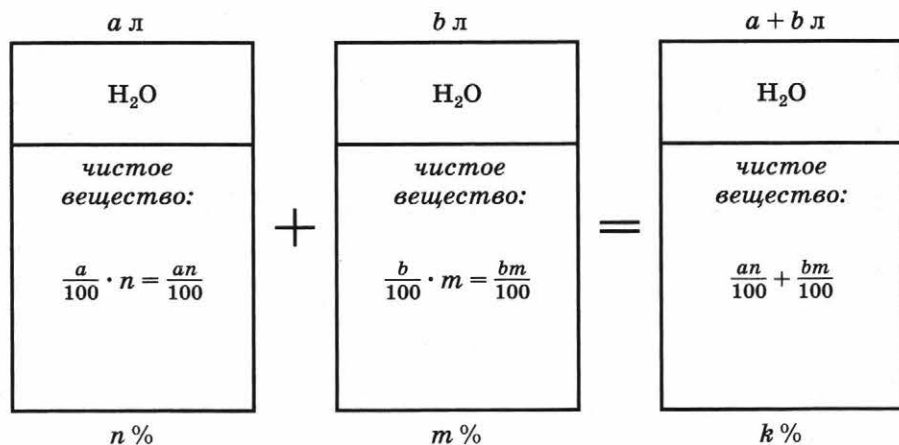


Рис. 18

Теперь найти искомую концентрацию k не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}}{a + b} \cdot 100\% = \frac{an + bm}{a + b} \%$$

Ответ: $\frac{an + bm}{a + b}$.

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

Пример 4. Первый сплав содержит 50 % меди, второй — 60 % меди, а третий сплав весит 20 кг и содержит 30 % меди. Из этих трёх сплавов получили сплав, в котором меди оказалось 49 %. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 20-килограммовый сплав, содержащий 20 % меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 47 %. Найдите массу второго сплава.

Решение. В этой задаче неизвестны массы первого и второго сплавов, но даны два варианта получения третьего сплава. Поэтому схему метода банок придётся применить дважды: для случая, когда третий сплав содержит 30 % меди, и для случая, когда он содержит 20 % меди. Массы первого и второго сплавов (в килограммах) обозначим соответственно через x и y . Тогда для первого случая получим следующую схему (рис. 19):

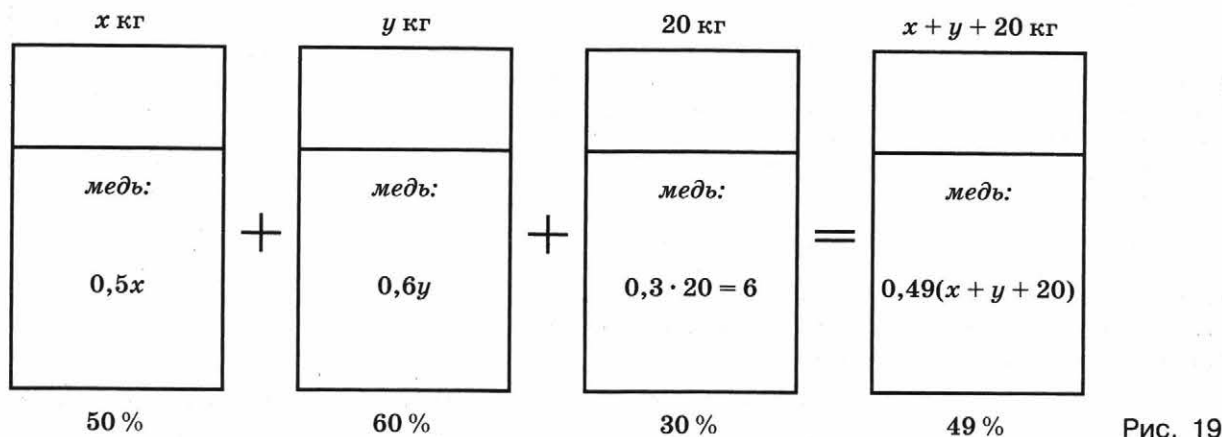


Рис. 19

Для второго случая схема выглядит так (рис. 20):

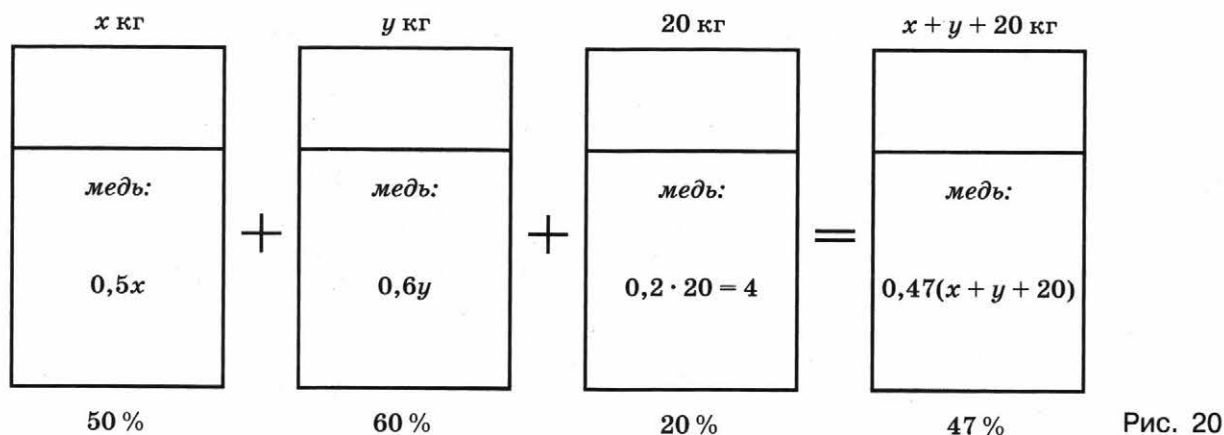


Рис. 20

Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных x и y :

$$\begin{cases} 0,5x + 0,6y + 6 = 0,49(x + y + 20), \\ 0,5x + 0,6y + 4 = 0,47(x + y + 20). \end{cases}$$

Чтобы избежать возможных и довольно распространённых ошибок в действиях с дробями, умножим обе части каждого уравнения на 100. Получим

$$\begin{cases} 50x + 60y + 600 = 49(x + y + 20), \\ 50x + 60y + 400 = 47(x + y + 20). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных приходим к системе

$$\begin{cases} x + 11y = 380, \\ 3x + 13y = 540. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение x в данной задаче находить не обязательно. Умножим обе части первого уравнения системы на -3 . Чтобы исключить переменную x , сложим почленно полученное после умножения на -3 уравнение и второе уравнение системы: $-20y = -600$, откуда $y = 30$.

Ответ: 30.

4. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 34*. Общие сведения о неравенствах. Метод интервалов.
 Занятие 35. Линейные неравенства.
 Занятие 36. Системы линейных неравенств.
 Занятие 37. Квадратные неравенства.
 Занятие 38. Системы, содержащие квадратные неравенства.
 Занятие 39. Простейшие дробно-рациональные неравенства.
 Занятие 40. Системы, содержащие простейшие дробно-рациональные неравенства.
 Занятие 41*. Более сложные рациональные неравенства.

Общие рекомендации к занятиям

Этот раздел посвящён отработке и закреплению навыков решения неравенств базового уровня. В отличие от многих других разделов, часть задач требует не только выбора ответа, установления соответствия, записи в бланк ответов целого числа или десятичной дроби, но и записи ответа в виде множеств. Сделано это с целью более эффективной подготовки по данной теме. Особое внимание уделено линейным и квадратным неравенствам (занятия 34—37). Задания занятий данного раздела частично адаптированы под формат ОГЭ, частично предполагают полное решение неравенств и систем неравенств.

Занятие 34*. Общие сведения о неравенствах. Метод интервалов

Общие сведения о неравенствах

Эти уроки не являются обязательными, их можно провести при наличии времени и достаточном уровне математической подготовки учащихся. Они посвящены систематизации сведений о неравенствах и отчасти связаны с развитием логического мышления учащихся.

В курсе математики основной школы можно выделить три основные числовые и функционально-алгебраические линии (в порядке их появления в учебниках):

- целые числа, степени с натуральным показателем, целые алгебраические выражения (многочлены), целые рациональные функции;
- дроби, степени с целым отрицательным показателем, алгебраические дроби, дробно-рациональные функции;
- корни, иррациональные алгебраические выражения, иррациональные функции.

Тем самым и любое неравенство курса математики основной школы можно однозначно отнести к одному из следующих типов в соответствии с перечисленными функционально-алгебраическими линиями: целое рациональное (слово «рациональное» в дальнейшем для экономии места будем опускать), дробно-рациональное, иррациональное. Иррациональные неравенства в общеобразовательном курсе математики не рассматриваются, но могут изучаться в профильных классах.

Напомним основные понятия, определения и факты, связанные с неравенствами.

Как уже отмечалось, значение любого алгебраического выражения $f(x)$ при любом допустимом значении переменной x либо положительно (пишут $f(x) > 0$), либо отрицательно (пишут $f(x) < 0$), либо равно нулю (пишут $f(x) = 0$). Любая математическая формула является высказыванием, предложением, написанным на математическом языке. Высказывания $f(x) > 0$ (читается: $f(x)$ больше нуля), $f(x) < 0$ (читается: $f(x)$ меньше нуля), $f(x) \geq 0$ (читается: $f(x)$ больше или равно нулю, или $f(x)$ не меньше нуля) и $f(x) \leq 0$ (читается: $f(x)$ меньше или равно нулю, или $f(x)$ не больше нуля) называют неравенствами с одной переменной, а высказывание $f(x) = 0$ (читается: $f(x)$

равно нулю) — уравнением с одной переменной. Неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ называются *строгими*, а неравенства $f(x) \geq 0$ и $f(x) \leq 0$ — *нестрогими*. Заметим, что правая часть неравенства может быть отличной от нуля. В этом случае строгое неравенство записывается в виде $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, нестрогое неравенство — в виде $f(x) \geq g(x)$ или $f(x) \leq g(x)$, а уравнение — в виде $f(x) = g(x)$.

Число называется *решением* неравенства, если при его подстановке вместо переменной в данное неравенство получается верное числовое неравенство. *Решить неравенство* — значит найти множество всех его решений. Поэтому в ответе предпочтительней указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения \cup либо просто точку с запятой. Повторим, что в этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x > 5$, менее удачно по сравнению с записью $(5; +\infty)$, поскольку $x > 5$ является неравенством, а $(5; +\infty)$ — множеством его решений.

Если неравенство не имеет ни одного решения, то множество его решений не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества \emptyset либо просто пишут «решений нет». Ответ в форме $x \in \emptyset$ является логически не вполне корректным, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента.

Важной частью общей математической культуры, необходимой для решения неравенств, являются умения делать простейший логический перебор, проводить доказательные рассуждения, отвечать на вопросы о знаках и числе решений неравенства даже в тех случаях, когда решать неравенство не требуется или найти решение не представляется возможным. Развитию и тренировке навыков логического перебора, умений анализировать условие и делать обоснованные умозаключения и выводы, находить стратегию решения посвящена значительная часть упражнений этих уроков.

Пример 1. Ася сказала, что написанное на доске неравенство имеет менее 6 целочисленных решений, а Вася — что менее 5. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

Решение. Если утверждение Васи истинно и неравенство имеет менее 5 целочисленных решений, то и утверждение Аси истинно, что противоречит условию истинности только одного из утверждений. Значит, утверждение Васи ложно, а утверждение Аси истинно, т. е. неравенство имеет не менее 5, но менее 6 целочисленных решений. Единственное целое число, отвечающее такому требованию, это 5.

Ответ: 5.

Пример 2. Неравенство $\frac{7}{x^2 + 5} > \frac{5}{x^2 + 7}$: 1) не имеет решений; 2) справедливо при всех $x \neq 0$; 3) справедливо при любом действительном x ; 4) справедливо только при $x = 0$. Укажите в порядке возрастания номера истинных утверждений без пробелов, запятых и прочих символов.

Решение. Числитель и знаменатель каждой дроби положительны при любом значении переменной. Числитель дроби в левой части неравенства больше числителя дроби в правой части неравенства, а знаменатель меньше знаменателя в правой части при любом значении переменной, поскольку $(x^2 + 5) - (x^2 + 7) = -2 < 0$. Поэтому дробь в левой части неравенства больше дроби в правой его части. Следовательно, истинно утверждение 3.

Ответ: 3.

Пример 3. Укажите номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений: 1) $(x + 1)^2(8x^8 - 3x^3 - 1) \geq 0$; 2) $3x^2 - 14x + 8 < 0$; 3) $5 + 6x^6 - 7x^7 < 0$; 4) $x^2 - 5678x - 8765 \leq 0$; 5) $x^2 - 6987x + 56789 < 0$.

Решение. Рассмотрим последовательно каждое из пяти данных неравенств. Число $x = -1$ является, очевидно, решением неравенства 1. Следовательно, это неравенство имеет по крайней мере одно отрицательное решение. Квадратное неравенство 2 легко решить стандартным способом; его решением является промежуток $\left(\frac{2}{3}; 4\right)$.

Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Неравенство 3 едва ли возможно решить школьными методами, но ответ на вопрос задачи этого и не требует. Действительно, если предположить, что какое-то отрицательное число является решением этого неравенства, получим противоречие: ведь при любом отрицательном значении переменной левая часть неравенства заведомо принимает только положительные значения. Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Решить квадратное неравенство 4, разумеется, можно, но это потребует несоразмерного ему арифметического подвига. Поскольку находить решения вовсе не обязательно, попробуем порассуждать. Графиком квадратичной функции $y = x^2 - 5678x - 8765$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $y(0) = -8765 < 0$, этот график пересекает ось абсцисс в двух точках, расположенных по разные стороны от начала координат, и при любом значении переменной, заключённом между ними, лежит ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство 4 имеет отрицательные решения. Этот же результат можно было получить, используя формулы Виета. Воспользуемся ими для ответа на вопрос о существовании отрицательных решений у неравенства 5. Если дискриминант квадратного трёхчлена в левой части неравенства 5 неположителен, то оно не имеет решений (в том числе и отрицательных). Если дискриминант положителен, то решением неравенства является интервал, концы которого — корни квадратного трёхчлена $x^2 - 6987x + 56789$. Из формул Виета следует, что оба корня этого трёхчлена (если они существуют) положительны, поскольку их произведение и сумма положительны. Поэтому и при положительном дискриминанте левой части неравенство 5 не имеет отрицательных решений. Заметим, что и в случае неравенства 2 можно было использовать рассуждения, аналогичные предыдущим.

Ответ: 235.

Навыки, полученные при решении подобных задач, помогут находить оптимальные пути решения, рассматривать меньшее число случаев, анализировать полученные ответы на предмет возможных ошибок и т. п.

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является как решением неравенства $f(x) > 0$, так и решением неравенства $g(x) > 0$, то говорят, что задана *система неравенств* $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, а записывают систему неравенств

с помощью фигурной скобки: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Знаки неравенств системы могут быть лю-

быми из четырёх возможных, правые части неравенств системы могут быть отличны от нуля, система может состоять из трёх и более неравенств, содержать наряду с неравенствами и уравнения (такие системы иногда называют *смешанными*). Решить систему неравенств — значит найти множество её решений. В большинстве случаев (но не всегда!) для этого ищут множество решений каждого из неравенств системы, а затем — пересечение (общую часть) полученных множеств.

Пример 4. Система неравенств $\begin{cases} x \geq -789, \\ 987x^{987} + 87x^{77} + 7 < 0; \end{cases}$ 1) не имеет решений;

2) не имеет положительных решений; 3) не имеет отрицательных решений; 4) имеет и отрицательные и положительные решения; 5) выполняется при любом действительном x . Укажите в порядке возрастания номера истинных утверждений без пробелов, запятых и прочих символов.

Решение. Понятно, что решение второго неравенства данной системы едва ли возможно. Попробуем доказать или опровергнуть данные утверждения, подобрав, где необходимо, соответствующие примеры. Ясно, что, например, $x = -1$ является решением каждого из неравенств системы. Поэтому утверждения 1 и 3 ложны. Далее, при любом положительном значении переменной левая часть второго неравенства системы положительна. Поэтому это неравенство не имеет положительных решений. Следовательно, и вся система не имеет положительных решений. Значит, утверждения 4 и 5 ложны, а утверждение 2 истинно.

Ответ: 2.

В некоторых пособиях, преимущественно издаваемых подготовительными отделениями университетов и других вузов (но не только), можно встретить записи

вида $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in [a; b], \end{cases}$ т. е. записи, в которых наряду с уравнениями и неравенствами в

систему включаются и другие высказывания (в приведённом примере: $x \in [a; b]$). С формальной точки зрения такую запись именно в пособиях для средней школы следует признать не вполне удачной: ведь ни в одном из учебников не вводится понятие системы высказываний, и, несмотря на то что интуитивно понятно, какой смысл вкладывается в подобные записи, их лучше избегать, заменяя высказывания вида $x \in [a; b]$ неравенствами (в данном случае, неравенством $a \leq x \leq b$).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является или решением неравенства $f(x) > 0$, или решением неравенства $g(x) > 0$, то говорят, что задана *совокупность неравенств*, а записывают совокупность неравенств с помощью

квадратной скобки: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Знаки неравенств совокупности могут быть любыми

из четырёх возможных, правые части неравенств совокупности могут быть отличны от нуля, совокупность может состоять из трёх и более неравенств, содержать наряду с неравенствами и уравнения. *Решить совокупность* неравенств — значит найти множество решений каждого из неравенств совокупности, а затем найти объединение полученных множеств. Таким образом, на языке множеств система — пересечение, совокупность — объединение. Поэтому, например, высказывание $x \in [a; b]$ можно

заменить системой неравенств $\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b, \end{cases}$ а высказывание $x \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ можно

заменить совокупностью неравенств $\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq b. \end{cases}$

При каждом допустимом значении переменной значение любого алгебраического выражения является числом, поэтому далее для краткости и экономии места будем иногда — если это не противоречит смыслу предложения — вместо словосочетания «значение выражения $g(x)$ » использовать словосочетание «число $g(x)$ ». Например, при любом допустимом значении переменной из двух чисел $f(x) - 5$ и $f(x) - 8$ меньшим, очевидно, является число $f(x) - 8$. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если это числа разных знаков, т. е. меньшее из этих чисел отрицательно, а большее — положительно. Поэтому неравенство $(f(x) - 5)(f(x) - 8) < 0$

можно заменить системой неравенств $\begin{cases} g(x) - 8 < 0, \\ g(x) - 5 > 0. \end{cases}$ Произведение двух чисел по-

ложительно в том и только том случае, если это числа одного знака, т. е. если меньшее из этих чисел положительно (тогда и большее число положительно) или большее из этих чисел отрицательно (тогда и меньшее число отрицательно). Поэтому нера-

венство $(f(x) - 5)(f(x) - 8) > 0$ можно заменить совокупностью неравенств $\begin{cases} f(x) - 8 > 0, \\ f(x) - 5 < 0. \end{cases}$

Разумеется, такие замены возможны только при допустимых значениях переменной.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей неравенства. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) системы неравенств будем называть пересечение областей допустимых значений каждого из неравенств системы, т. е. множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей каждого неравенства системы.

Из трёх основных типов алгебраических выражений курса математики основной школы два дают ограничения на переменную. Эти ограничения и определяют ОДЗ неравенства, системы или совокупности.

Алгебраическое выражение	Ограничение
Алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$g(x) \neq 0$
Иррациональное алгебраическое выражение $\sqrt[n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$

В некоторых задачах именно исследование ОДЗ даёт ключ к решению, во многих (а в случае неравенств — в большинстве) игнорирование ОДЗ ведёт к неправильному ответу.

Пример 5. Решите неравенство $x^2 + \sqrt{x^2 - 4} \leq 4 + \sqrt{x^2 - 4}$.

Решение. Левая и правая части неравенства определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2 - 4 \geq 0$, откуда $x^2 \geq 4$. При допустимых значениях переменной неравенство приводится к виду $x^2 \leq 4$. Приходим

к системе $\begin{cases} x^2 \geq 4, \\ x^2 \leq 4, \end{cases}$ откуда $x^2 = 4$, и $x = \pm 2$.

Ответ: ± 2 .

Если каждое решение первого неравенства является и решением второго, то второе неравенство называется *следствием* первого. Переход к уравнению-следствию при записи решения обозначается стрелкой \Rightarrow . Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в квадрат, освобождения от знаменателя или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней. То есть переход к уравнению-следствию является одним из возможных методов решения уравнений.

Для неравенств рекомендовать аналогичный метод решения (переход к неравенству-следствию), как правило, нельзя: число корней уравнения в большинстве случаев конечно (именно это позволяет выполнить проверку и отобрать корни данного уравнения из множества корней уравнения-следствия), число решений неравенства, как правило, бесконечно, и подобную проверку выполнить просто невозможно.

Два неравенства называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, т. е. неравенства, не имеющие решений, равносильны).

Равносильными могут быть не только два неравенства, два уравнения, две совокупности или две системы. В определении равносильности речь идёт лишь о множестве решений неравенства или множестве корней уравнения. Поэтому неравенство может быть равносильно уравнению, совокупности или системе, и наоборот. Переход от данного неравенства к равносильному неравенству, уравнению, равносильной совокупности или равносильной ему системе называется *равносильным* и при записи решения обозначается двусторонней стрелкой \Leftrightarrow . Такой переход не приводит ни к потере решений, ни к приобретению посторонних решений, и алгебраические преобразования, которые делают такой переход возможным, также называются *равносильными*. Метод равносильных преобразований не требует проверки найденных решений путём их подстановки в данное неравенство и является одним из основных методов решения уравнений и неравенств.

Как уже отмечалось, одной из наиболее распространённых ошибок при записи решений уравнений и неравенств является использование знаков следования и равносильности при переходе от неравенства (уравнения, системы) с одной переменной к неравенству (уравнению, системе) с другой переменной (как правило, после выполнения замены переменной). Приведём пример такого ошибочного использования для неравенств:

«пусть $t = x^2$, тогда $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 \geq 0$ ».

Ясно, что множества решений неравенств $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ и $t^2 - 10t + 9 \geq 0$ различны, поэтому эти неравенства не являются равносильными.

Неравносильные преобразования неравенств с одной переменной связаны в основном с сужением или расширением ОДЗ неравенства. В случае сужения ОДЗ может произойти потеря решений, в случае расширения ОДЗ — приобретение посторонних решений. Поэтому при каждом преобразовании нужно внимательно следить за ОДЗ, не допуская сужения или расширения последней и руководствуясь следующими правилами:

1. *Перенос числа или одночлена из одной части неравенства в другую с изменением знака (плюс или минус) перед этим числом или одночленом на противоположный — равносильное преобразование.*

2. *Приведение подобных, не ведущее к изменению ОДЗ, — равносильное преобразование.*

3. *Умножение обеих частей неравенства на положительное число — равносильное преобразование.*

4. *Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число с изменением знака неравенства на противоположный — равносильное преобразование.*

5. *Возведение обеих частей неравенства в чётную степень (в частности, в квадрат) при условии неотрицательности каждой из этих частей и допустимых значениях переменной — равносильное преобразование.*

То, что приведение подобных не должно вести к изменению ОДЗ, также весьма существенно. Например, если просто привести подобные в неравенстве $x + \sqrt{7-x} \geq 3 + \sqrt{7-x}$, будут получены посторонние решения. Последнее связано с расширением ОДЗ: неравенство $x \geq 3$ в отличие от данного не предполагает каких-либо ограничений на переменную, множеством его решений является $[3; +\infty)$.

Равносильное же преобразование будет таким: $x + \sqrt{7-x} \geq 3 + \sqrt{7-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 7. \end{cases}$

С учётом второго неравенства системы получим правильный ответ: $[3; 7]$.

Вообще, к изменению ОДЗ приводит не так много преобразований, поскольку алгебраических выражений, требующих ограничений на переменную, в курсе математики основной школы всего два: это алгебраические дроби и иррациональные выражения с корнями чётной степени. Поскольку иррациональные неравенства в этом курсе не рассматриваются, то остаётся, в сущности, одно такое выражение — алгебраическая дробь.

Метод интервалов

Перейдём теперь к описанию наиболее общих методов решения неравенств с одной переменной, применимых к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, начав с метода интервалов.

Любое алгебраическое выражение $f(x)$ можно использовать для задания функции $y = f(x)$. Это позволяет иногда для краткости употреблять словосочетание «функция $f(x)$ » вместо «функция $y = f(x)$ » и делает возможной наглядную интерпретацию неравенства вида $f(x) \vee 0$ (здесь знаком \vee обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств $>$, $<$, \geq , \leq). Решить такое неравенство — значит найти все значения переменной x , при которых график функции $y = f(x)$ расположен выше (ниже, не выше, не ниже — в зависимости от знака неравенства) оси абсцисс. Так, для функции $y = f(x)$, график которой, состоящий из нескольких частей, изображён на рис. 21, решением неравенства $f(x) \leq 0$ является множество $[x_1; x_2] \cup [x_3; x_4] \cup [x_5; x_6]$, а решением неравенства $f(x) > 0$ — множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; +\infty)$.

Для функции $y = g(x)$, график которой (также состоящий из нескольких частей) изображён на рис. 22, решением неравенства $g(x) \geq 0$ является множество $(-\infty; x_1] \cup (x_2; x_3] \cup \{x_4\} \cup [x_5; x_6] \cup [x_7; x_8] \cup [x_9; x_{10}]$, а решением неравенства $g(x) < 0$ — множество $(x_1; x_2) \cup (x_3; x_4) \cup (x_4; x_5) \cup (x_6; x_7) \cup (x_{10}; +\infty)$.

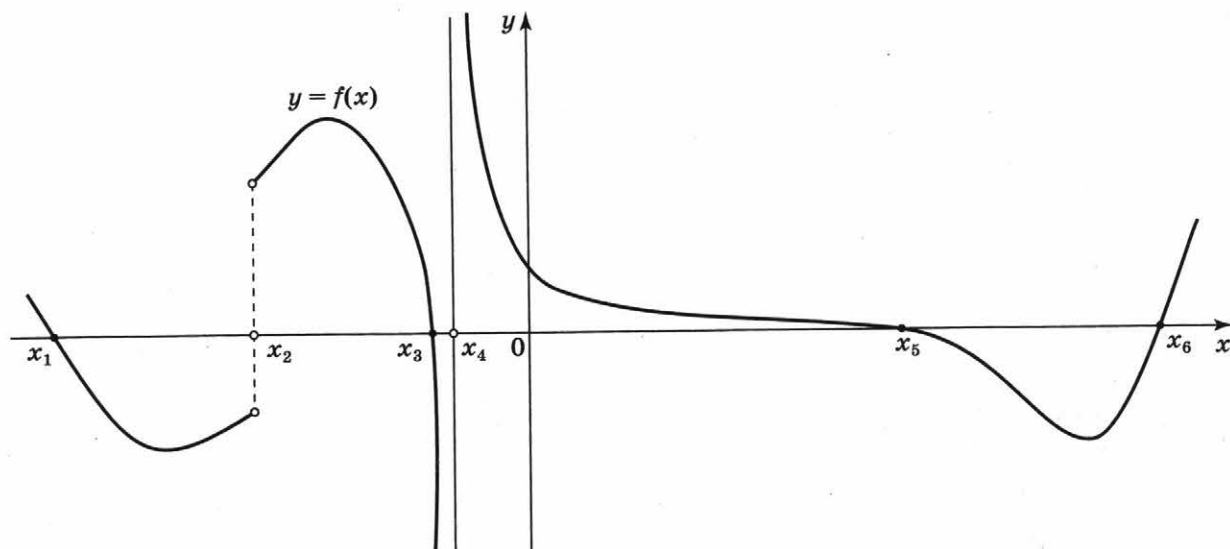


Рис. 21

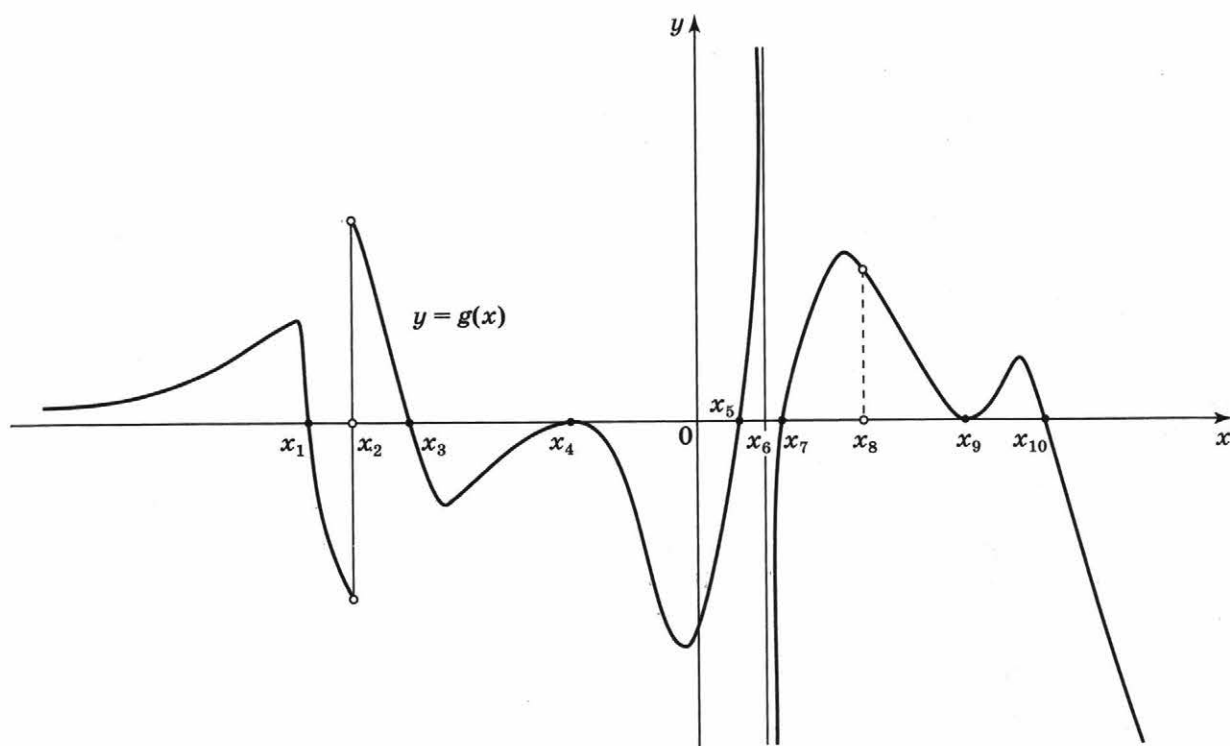


Рис. 22

Аналогичным образом, рассматривая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно наглядно интерпретировать неравенство вида $f(x) \vee g(x)$ (здесь знак \vee по-прежнему обозначает один из знаков $>$, $<$, \geq , \leq). Так, для функций, графики

которых изображены на рис. 23, множеством решений неравенства $f(x) \leq g(x)$ является объединение отрезков $[-4; -1] \cup [4; 5]$, множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$ является интервал $(-1; 4)$. Обратим внимание на то, что в данном случае области определения функций различны (это обстоятельство нужно обязательно учитывать при записи ответа): функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 6]$, функция $y = g(x)$ определена на отрезке $[-4; 5]$.

Весьма существенным при записи решений приведённых выше неравенств является тот факт, что каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывна в каждой части своей области определения. Понятие непрерывности довольно сложное в смысле формального описания; для решения задач школьного курса достаточно представления о непрерывной функции как о функции, график которой в каждой части области определения может быть изображён непрерывной линией. Это означает, в частности, что изменить знак такая функция может только двумя способами: либо в тех точках, где она не определена (в некоторых из таких точек её график как бы перескакивает через ось абсцисс: на рис. 21 это точки x_2 и x_4 , на рис. 22 — точки x_2 и x_6), либо

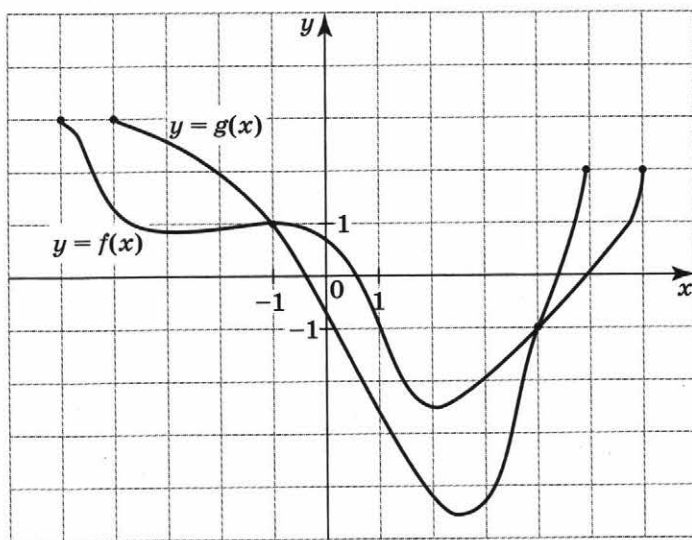


Рис. 23

в тех точках, где её график пересекает ось абсцисс (напомним, что эти точки являются корнями уравнения $f(x) = 0$ и называются *нулями функции* $y = f(x)$): на рис. 21 это точки x_1, x_3, x_5, x_6 , на рис. 22 это точки $x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_9, x_{10}$). Отсюда вытекает общий для таких функций метод решения неравенств, называемый *методом интервалов*, алгоритм которого состоит из следующих шагов.

Алгоритм метода интервалов

1. Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду $f(x) \vee 0$, где знаком \vee обозначен один из четырёх знаков неравенств: $>$, $<$, \geq , \leq (такой вид неравенства будем называть *стандартным*). В случае если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускается.

2. Находим область определения функции $y = f(x)$ (напомним, что область определения функции обозначается $D_{f(x)}$, D_f , $D(f(x))$ или $D(f)$ по первой букве слова «определение» на латыни или любом романском языке) и отмечаем её на числовой прямой (числовой оси). Заметим, что часто бывает целесообразно в начале решения сразу найти ОДЗ данного неравенства, а потом уже приводить неравенство к стандартному виду, поскольку ОДЗ неравенства и D_f в данном случае являются одним и тем же множеством (разумеется, если для приведения неравенства к стандартному виду использовать равносильные преобразования).

3. Находим нули функции $y = f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$, и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство является нестрогим, нули функции должны обязательно попасть в ответ, и чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их жирными, бросающимися в глаза кружочками (как своего рода «сигнальные фонари»). Нули функции разбивают её область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

4. Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции $y = f(x)$ в каждом из полученных интервалов — например, по её знаку в одной из точек интервала. Записываем ответ.

Замечание. Если точка является нулём функции или не принадлежит области определения функции, это не означает, что в такой точке функция автоматически меняет знак. Так, функция, график которой изображён на рис. 22, не меняет знак ни в одной из точек x_4 , x_8 , x_9 . Таким образом, промежутки знакоположительности и промежутки знакоотрицательности функции не обязательно чередуются, и на экзамене лучше подстраховаться и «честно» определить знак функции в одной из точек каждого интервала либо иными способами — например, так, как это сделано при решении следующего неравенства.

Разумеется, при решении неравенств методом интервалов не обязательно в явном виде указывать каждый шаг алгоритма решения, главное — иметь ясное представление о том, что все его шаги сделаны.

Пример 6. Решите неравенство $(2x^2 - 5x + 3)(5x^2 - x - 4) \geq 0$.

Решение. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x + 3$ являются числа 1 и 1,5. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - 1,5)$. Корнями квадратного трёхчлена $5x^2 - x - 4$ являются числа -0,8 и 1. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что $5x^2 - x - 4 = 5(x + 0,8)(x - 1)$. Следовательно, данное неравенство приводится к виду $2(x - 1)(x - 1,5) \cdot 5(x + 0,8)(x - 1) \geq 0$, откуда $(x + 0,8)(x - 1)^2(x - 1,5) \geq 0$. Применим метод интервалов (рис. 24).

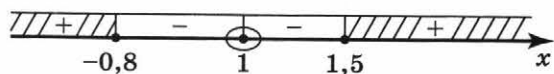


Рис. 24

Ответ: $(-\infty; -0,8] \cup \{1\} \cup [1,5; +\infty)$.

Занятие 35. Линейные неравенства

Напомним, что функция $y = ax + b$ при $a \neq 0$ называется линейной. Неравенства вида $ax + b \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком \vee обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств $>$, $<$, \geq , \leq) также называются линейными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax + b$ является многочленом первой степени. Соответственно, линейные неравенства — это целые неравенства первой степени.

Линейные неравенства обычно приводят к виду $ax \vee -b$, после чего делят обе части последнего неравенства на число a . Стандартная ошибка в решениях линейных неравенств связана именно с этим делением: если число a отрицательно, знак неравенства нужно изменить на противоположный, о чём многие забывают. При решении неравенств вида $ax + b \vee cx + d$ удобно все слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть, а все числа — в правую: $ax - cx \vee d - b$, откуда $(a - c)x \vee d - b$. Если $a \neq c$, остаётся сделать последний шаг — разделить обе части неравенства на число $a - c$ (с изменением знака неравенства на противоположный, в случае если это число отрицательно). Если $a = c$, получаем неравенство вида $0 \cdot x \vee d - b$, которое — в зависимости от знака неравенства и числа в правой части — либо не имеет решений, либо справедливо при любом действительном значении переменной.

Пример 1. Решите неравенство $3x + 7 < 7x + 3$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3x - 7x < 3 - 7$, откуда $-4x < -4$. Разделим обе части последнего неравенства на число -4 , поменяв знак неравенства на противоположный. Получим $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $2x + 9 \leq 6x + 7$ и изобразите множество его решений на числовой оси.

Решение. Приведём неравенство к виду $2x - 6x \leq 7 - 9$, откуда $-4x \leq -2$. Разделим обе части полученного неравенства на число -4 , изменив знак неравенства на противоположный: $x \geq 0,5$. Изобразим множество решений на числовой оси (рис. 25):

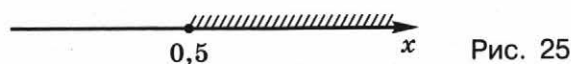


Рис. 25

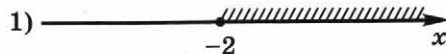
Ответ: $[0,5; +\infty)$.

Пример 3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце отвечает одно из множеств решений, отмеченных на числовой оси, в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решений.

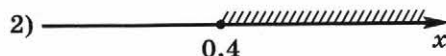
Неравенство

Множество решений

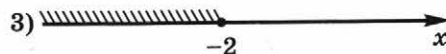
А) $6x + 12 \geq 0$



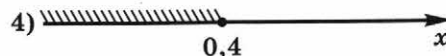
Б) $6 - 15x \geq 0$



В) $3x - 12 \geq 9x$



Г) $6x - 6 \geq -9x$



Решение. Рассмотрим последовательно решение каждого из неравенств. Неравенство А приводится к виду $x \geq -2$. Значит, множеством его решений является 1. Неравенство Б приводится к виду $x \leq 0,4$. Значит, множеством его решений является 4. Неравенство В приводится к виду $x \leq -2$. Значит, множеством его решений является 3. Неравенство Г приводится к виду $x \geq 0,4$. Значит, множеством его решений является 2.

Ответ:

А	Б	В	Г
1	4	3	2

Заметим, что последнее неравенство можно было бы не решать. Тем не менее настоятельно рекомендуется получить множества решений всех четырёх неравенств: если на последнем шаге ответ не будет соответствовать оставшемуся множеству, значит, где-то была допущена ошибка и следует проверить все сделанные преобразования.

Занятие 36. Системы линейных неравенств

Решение системы двух и более линейных неравенств обычно предполагает решение каждого из них, после чего находится пересечение полученных множеств решений.

Пример 1. Укажите множество решений системы неравенств $\begin{cases} -27 + 3x > 0, \\ 6 - 3x < -6. \end{cases}$

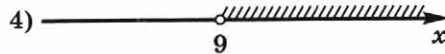
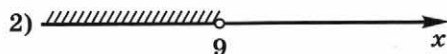


Рис. 26

Решение. Первое неравенство приводится к виду $3x > 27$, откуда $x > 9$. Второе неравенство приводится к виду $-3x < -12$, откуда $x > 4$. Значит, множеством решений данной системы является промежуток $(9; +\infty)$, изображённый на рисунке 264).

Ответ: 4.

Пример 2. Каждое из четырёх неравенств в правом столбце получено после преобразований одного из неравенств или системы неравенств в левом столбце. Установите соответствие между неравенствами и системами неравенств в левом столбце и результатами их преобразований. Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Неравенство	Результат преобразований
А) $\begin{cases} x - 4 < 3 \\ 2 - 5x < 12 \end{cases}$	1) $x < 7$
Б) $-2 < 4x + 26 < 34$	2) $-2 < x < 7$
В) $3x - 12 < -10 + 4x$	3) $x > -2$
Г) $\begin{cases} 3x + 11 < 32 \\ 5 - 2x > -13 \end{cases}$	4) $-7 < x < 2$

Решение. Система неравенств А приводится к виду $\begin{cases} x < 7, \\ x > -2, \end{cases}$ откуда $-2 < x < 7$.

Значит, результатом преобразований является 2. Двойное неравенство Б приводится к виду $-28 < 4x < 8$, откуда $-7 < x < 2$. Значит, результатом преобразований является 4. Неравенство В приводится к виду $-x < 2$, откуда $x > -2$. Значит, результатом преобразований является 3. Система неравенств Г приводится к виду $\begin{cases} x < 7, \\ x < 9, \end{cases}$

откуда $x < 7$. Значит, результатом преобразований является 1.

Ответ:

А	Б	В	Г
2	4	3	1

Пример 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7(6x + 5) - 5(6x + 7) \leq 12x + 21, \\ \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{2} \geq \frac{x+5}{4} + \frac{x+4}{5}. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Раскроем скобки в левой части этого неравенства: $42x + 35 - 30x - 35 \leq 12x + 21$. После упрощений получим $12x \leq 12x + 21$, откуда $12x - 12x \leq 21$, или $0 \cdot x \leq 21$. Решением последнего неравенства является любое действительное число. Следовательно, решением всей системы будет решение её второго неравенства. Решим второе неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на общий знаменатель всех дробей, т. е. на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Получим $20(x + 2) + 30(x + 3) \geq 15(x + 5) + 12(x + 4)$. Раскроем скобки и приведём подобные в каждой части полученного неравенства: $20x + 40 + 30x + 90 \geq 15x + 75 + 12x + 48$, откуда $50x + 130 \geq 27x + 123$. Перенесём все слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а все числа — в правую: $50x - 27x \geq 123 - 130$, откуда $23x \geq -7$. Осталось обе части последнего неравенства разделить на 23, после чего получим $x \geq -\frac{7}{23}$.

Ответ: $\left[-\frac{7}{23}; +\infty\right)$.

При решении неравенств с дробными коэффициентами ученики обычно допускают большое число ошибок. Для того чтобы снизить вероятность таких ошибок, рекомендуется по возможности сначала получить неравенство с целыми коэффициентами, умножив обе его части на общий знаменатель дробей, как это было сделано при решении последнего примера.

В некоторых случаях в процессе решения линейных и более сложных неравенств после приведения подобных получается неравенство, не содержащее переменной. Такие ситуации ставят в тупик многих учеников и выпускников, хотя ничего сложного в их интерпретации нет. Для этого достаточно ответить на вопрос: «При каких значениях переменной выполняется полученное неравенство?» Так, например, неравенство $0 > 5$ не выполняется ни при каких допустимых значениях переменной, а неравенство $0 \leq 21$ выполняется при любом действительном значении переменной. При решении примера 3 неравенство $0 \leq 21$ для большей наглядности было записано в виде $0 \cdot x \leq 21$; использовать такую запись рекомендуется в тех случаях, когда ответ на вопрос о решениях неравенств, подобных приведённым выше, вызывает определённые затруднения.

Отметим, что уровень сложности каждого из неравенств примера 2 несколько превосходит уровень сложности линейных неравенств, которые можно встретить в вариантах ОГЭ по математике базового уровня. Кроме того, в заданиях ОГЭ обычно нужно выбрать множество решений неравенства из нескольких предложенных либо поставить в соответствие каждому из нескольких данных неравенств одно из набора числовых множеств (иногда изображённого на числовой оси или заданного простейшими неравенствами), предложенных в качестве множеств их решений.

Занятие 37. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком \vee обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств $>$, $<$, \geq , \leq) называются квадратными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax^2 + bx + c$ является многочленом второй степени. Соответственно, квадратные неравенства — это целые неравенства второй степени.

Множество решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$ определяется, в сущности, знаком старшего коэффициента a и знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $a > 0$ и $D > 0$, то:

- $ax^2 + bx + c > 0$ при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
- $ax^2 + bx + c < 0$ при всех $x \in (x_1; x_2)$;
- $ax^2 + bx + c = 0$ при $x = x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x = x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Если $a > 0$ и $D = 0$, то:

- $ax^2 + bx + c > 0$ при всех $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- $ax^2 + bx + c = 0$ при $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$;
- неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ решений не имеет.

Если $a > 0$ и $D < 0$, то:

- неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c \geq 0$ выполняются при всех действительных x ;
- неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \leq 0$ решений не имеют.

Замечание. В случае отрицательного старшего коэффициента ($a < 0$) целесообразно сразу умножить обе части неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$ на -1 , поменяв знак неравенства на противоположный. Это нехитрое правило позволит решать квадратные неравенства только с положительным старшим коэффициентом и настоятельно рекомендуется к применению. Число ошибок при решении квадратных неравенств с отрицательным старшим коэффициентом на ОГЭ по математике выходит за границы разумного, причём ошибки (как в определении знаков корней квадратного трёхчлена

$ax^2 + bx + c$, так и в выписывании самих решений) совершают в большом количестве даже сильные ученики.

Квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \vee 0$ с положительным старшим коэффициентом будем в дальнейшем называть базовым. Поскольку наиболее распространённым типом квадратных неравенств являются неравенства с положительным дискриминантом, то, найдя нули квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (или, что то же самое, корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$), т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, можно, основываясь на свойствах квадратичной функции, сразу выписать множество решений неравенства. При положительном дискриминанте для базовых квадратных неравенств вида $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c \leq 0$ этим множеством является промежуток между корнями трёхчлена, т. е. $(x_1; x_2)$ или $[x_1; x_2]$ соответственно; для базовых квадратных неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c \geq 0$ множеством решений является объединение промежутков за корнями трёхчлена, т. е. $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ или $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ соответственно.

Другой способ решения квадратных неравенств связан с разложением квадратного трёхчлена на линейные множители и применением метода интервалов. Напомним, что если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ положителен, а $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ — корни трёхчлена, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Точки x_1 и x_2 разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых знак $f(x)$ легко определить по её знаку в одной из точек промежутка, после чего остаётся записать ответ. При решении неполных квадратных неравенств, т. е. неравенств вида $ax^2 + bx \vee 0$ или $ax^2 + c \vee 0$, обычно используют разложение на линейные множители путём вынесения общего множителя или применения формулы разности квадратов.

Замечание. Промежутки знакопостоянства выражения $a(x - x_1)(x - x_2)$ при $a > 0$ можно определить ещё и следующим образом. Так как $a > 0$, то при любом значении переменной x число $a(x - x_1)(x - x_2)$ будет иметь тот же знак, что и число $(x - x_1) \times (x - x_2)$. Поскольку $x_1 < x_2$, то $x - x_1 > x - x_2$ при любом значении x . Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если меньшее из них отрицательно, а большее — положительно: $\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 < 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > x_1, \\ x < x_2, \end{cases}$ т. е. $x_1 < x < x_2$, или $x \in (x_1; x_2)$. Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если меньшее из них положительно (тогда и большее положительно) или большее отрицательно (тогда и меньшее отрицательно): $\begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 > 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x < x_1, \\ x > x_2, \end{cases}$ т. е. $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Итак, если привести квадратное неравенство к базовому виду и найти корни соответствующего квадратного трёхчлена, можно практически сразу записать ответ: в случае существования двух различных корней x_1 и x_2 решением неравенства будет либо промежуток между ними, либо объединение двух числовых лучей с началами в точках x_1 и x_2 .

Пример 1. Решите неравенство $5x^2 \geq 3x$.

Решение. Приведём неравенство к базовому виду: $5x^2 - 3x \geq 0$, откуда $5x(x - 0,6) \geq 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов (рис. 27):

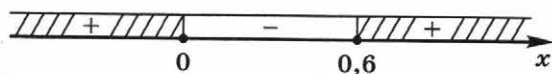


Рис. 27

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0,6; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $49 - 25x^2 \geq 0$.

Решение. Приведём неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и перегруппировав слагаемые: $-49 + 25x^2 \leq 0$, откуда $25x^2 - 49 \leq 0$. Разложим по формуле разности квадратов левую часть полученного неравенства на множители: $(5x - 7)(5x + 7) \leq 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 28):



Рис. 28

Ответ: $[-1,4; 1,4]$.

Пример 3. Укажите неравенство, множество решений которого изображено на рис. 29.



Рис. 29

- 1) $x^2 + x - 30 < 0$ 2) $x^2 - x - 30 \leq 0$
 3) $x^2 - 11x - 30 \geq 0$ 4) $x^2 + 11x - 30 > 0$

Решение. Можно последовательно решить каждое из данных неравенств и получить правильный ответ. Можно проанализировать данные неравенства и отбросить те из них, множеством решений которых не может быть данный отрезок. Сделаем это. Поскольку старший коэффициент любого из данных неравенств положителен, а множеством решений неравенства является отрезок, то нужно отбросить все строгие неравенства и все нестрогие неравенства со знаком \geq . В данном случае останется только одно неравенство 2.

Ответ: 2.

При решении квадратных неравенств, как и при решении квадратных уравнений, часто оказываются полезными формулы Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (здесь x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$). Эти формулы позволяют, подобрав два числа по их произведению и сумме, записать решение квадратного неравенства почти сразу, поскольку найденные числа и являются корнями трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Однако (за исключением случая $a = 1$) в указанном виде эти формулы использовать неудобно, так как сумма и произведение искомых чисел являются дробями и подобрать такие числа сложно. Помогут здесь следующие

простые рассуждения. Запишем формулы Виета в виде системы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$
 Если

умножить обе части первого уравнения системы на a , а обе части второго уравнения на a^2 , получим систему, которую можно записать так:
$$\begin{cases} (ax_1) + (ax_2) = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$$
 Таким об-

разом, если найти два числа, произведение которых равно ac , а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2 , после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного квадратного трёхчлена. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на роль ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac , и, перебирая по возрастанию возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 4. Решите неравенство $9x^2 - 73x + 8 \leq 0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9 \cdot 8 = 72$, а сумма равна 73. Уже простейший делитель числа 72 позволяет найти искомые числа: $1 \cdot 72 = 72$, $1 + 72 = 73$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{1}{9}$ и $\frac{72}{9} = 8$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{9}; 8\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{9}; 8\right]$.

Пример 5. Решите неравенство $4x^2 - 15x + 9 > 0$.

Решение. Найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot 9 = 36$, а сумма равна 15. Перебирая пары делителей числа 36 по возрастанию меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем шаге находим числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 4, получим корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{4} = 0,75$ и $\frac{12}{4} = 3$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена решением неравенства является множество $(-\infty; 0,75) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0,75) \cup (3; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $6x^2 + 5x - 4 < 0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $6 \cdot (-4) = -24$, а сумма равна -5 . Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24 , 2 и -12 , На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -5 : это 3 и -8 . Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является интервал $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Разумеется, рассмотренный приём применим только в тех случаях, когда корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства рациональны.

Пример 7. а) Решите неравенство $x^2 > 1,25x + 1,5$ (1). б) Решите неравенство $x + 1 \leq \frac{4}{9}x^2$ (2). в) Найдите все решения неравенства 2, не являющиеся решениями неравенства 1.

Решение. а) Решим неравенство 1. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 4. Получим $4x^2 > 5x + 6$. Приведём неравенство к виду: $4x^2 - 5x - 6 > 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства, воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-6) = -24$, а сумма равна 5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел положительна, поэтому меньший делитель числа 24 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 24, -2 и 12, -3 и 8. На третьем шаге получаем искомые числа, сумма которых равна 5: это -3 и 8. Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни квадратного трёх-

члена в левой части неравенства: $\frac{-3}{4} = -0,75$ и $\frac{8}{4} = 2$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена решение неравенства: $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$.

б) Решим неравенство 2. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 9. Получим $9x + 9 \leq 4x^2$, откуда $-4x^2 + 9x + 9 \leq 0$. Приведём неравенство к базовому виду, умножив обе его части на -1 и поменяв знак неравенства на противоположный: $4x^2 - 9x - 9 \geq 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена в левой части, вновь воспользовавшись формулами Виета. Для этого сначала найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot (-9) = -36$, а сумма равна 9. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел положительна, поэтому меньший делитель числа 36 будем брать со знаком «минус», а больший — со знаком «плюс»: -1 и 36 , -2 и 18 , -3 и 12 . На третьем шаге получаем искомые числа, сумма которых равна 9: это -3 и 12 . Разделив каждое из этих чисел на 4, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{-3}{4} = -0,75$ и $\frac{12}{4} = 3$. В силу положитель-

ности старшего коэффициента этого трёхчлена решение неравенства: $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$. в) Найдём все решения неравенства (2), не являющиеся решениями неравенства (1). Для этого нужно найти все числа из множества $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$, не принадлежащие множеству $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$. В данном случае это сделать совсем просто: единственным таким числом является $-0,75$.

Ответ: а) $(-\infty; -0,75) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -0,75] \cup [3; +\infty)$; в) $-0,75$.

Занятие 38. Системы, содержащие квадратные неравенства

Решение систем, содержащих квадратные неравенства, как и решение других систем стандартных неравенств с одной переменной, заключается в последовательном решении каждого из неравенств системы с последующим нахождением пересечения полученных множеств решений.

Пример 1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} -0,3x + 0,2 \geq 0,2x + 0,3, \\ x^2 + 3x + 1 \geq 0,2(2 - x). \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Для того чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на число 10. Получим $-3x + 2 \geq 2x + 3$, откуда $-5x \geq 1$ и $x \leq -0,2$. Решение первого неравенства данной системы — промежуток $(-\infty; -0,2]$. Решим второе неравенство данной системы. Избавимся от дроби, умножив обе части неравенства на число 5. Получим $5x^2 + 15x + 5 \geq 2 - x$. Перенесём все слагаемые в левую часть неравенства и приведём подобные: $5x^2 + 16x + 3 \geq 0$. Старший коэффициент в левой части полученного неравенства положителен, нулями квадратичной функции $y = 5x^2 + 16x + 3$ являются числа -3 и $-0,2$ (их можно найти с помощью формулы корней квадратного уравнения или с помощью формул Виета). Поэтому решение неравенства: $(-\infty; -3] \cup [-0,2; +\infty)$. Следовательно, решение данной системы: $(-\infty; -3] \cup [-0,2]$ (рис. 30).

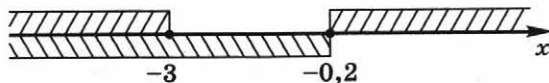


Рис. 30

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [-0,2]$.

Пример 2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \leq 0, \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0, \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 9x + 14$ являются числа 2 и 7, старший коэффициент трёхчлена положителен. Значит, множеством решений первого неравенства системы является отрезок $[2; 7]$. Решим второе неравенство данной системы. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 7x + 10$ являются числа 2 и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Значит, множеством решений второго неравенства системы является объединение промежутков $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. Следовательно, множеством решений данной системы является $\{2\} \cup [5; 7]$.

Ответ: $\{2\} \cup [5; 7]$.

Занятие 39. Простейшие дробно-рациональные неравенства

Дробно-рациональными называют неравенства вида $f(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — алгебраические дроби (т. е. отношения двух многочленов) или суммы нескольких алгебраических дробей и многочленов, знаком \vee обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств $>$, $<$, \geq , \leq . В отличие от целых неравенств, дробно-рациональные неравенства в большинстве случаев имеют смысл уже не при любом значении переменной: знаменатели всех алгебраических дробей в каждой из частей неравенства должны быть отличны от нуля — эти условия и задают ОДЗ дробно-рационального неравенства.

Наиболее простыми дробно-рациональными неравенствами являются неравенства вида $\frac{a}{f(x)} \vee 0$, где a — отличное от нуля действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. С такими неравенствами по уровню сложности схожи и неравенства вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ является множителем первой или второй степени, а другой при любых значениях переменной принимает значения одного знака (как правило, положительные). Тем самым знак либо числителя, либо знаменателя алгебраической дроби в левой части указанных неравенств не зависит от значений переменной. Поэтому знак этой дроби будет определяться знаком только одного алгебраического выражения (многочлена первой или второй степени). Таким образом, подобные неравенства решаются приведением их к линейным или квадратным неравенствам.

Пример 1. Решите неравенство $-\frac{215}{2x+15} < 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на число -1 . Получим неравенство $\frac{215}{2x+15} > 0$. Числитель дроби в левой части неравенства положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $2x + 15 > 0$, откуда $x > -7,5$.

Ответ: $(-7,5; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{37}{8x^2 - 41x + 5} \leq 0$.

Решение. Числитель дроби положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $8x^2 - 41x + 5 < 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа $\frac{1}{8}$ и 5, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, решением неравенства является интервал $(\frac{1}{8}; 5)$.

Ответ: $(\frac{1}{8}; 5)$.

В некоторых случаях, для того чтобы получить неравенство вида $\frac{a}{f(x)} \vee 0$, нужно сделать некоторые алгебраические преобразования. При решении неравенств, содержащих алгебраические дроби, распространённой ошибкой является избавление от знаменателя (т. е. умножение обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную). Например, переход от неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ к неравенству $a > b \cdot f(x)$ является обычно грубой ошибкой и приводит к неверному ответу (как правило, к потере решений). Это связано с тем, что указанный переход справедлив, только если $f(x) > 0$, и приводит к неверному неравенству в случае, когда $f(x) < 0$. Аналогично грубой ошибкой является переход от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$ к неравенству $a(x) > b(x)$, поскольку такое преобразование допустимо только при $b(x) > 0$, а случай $b(x) < 0$ при этом многие учащиеся даже не рассматривают, что приводит к потере решений. Рецепт здесь только один: перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства с последующим приведением полученной суммы (разности) к общему знаменателю. Так, для неравенства $\frac{a}{f(x)} > b$ получаем $\frac{a}{f(x)} - b > 0$, откуда $\frac{a - b \cdot f(x)}{f(x)} > 0$. Правильным началом решения неравенства $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$ является следующая цепочка преобразований: $\frac{a(x)}{b(x)} > 1$; $\frac{a(x)}{b(x)} - 1 > 0$; $\frac{a(x) - b(x)}{b(x)} > 0$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{15x - 7}{5x + 8} \leq 3$.

Решение. Приведём неравенство к виду $\frac{15x - 7}{5x + 8} - 3 \leq 0$, откуда $\frac{15x - 7 - 15x - 24}{5x + 8} \leq 0$, и $\frac{-31}{5x + 8} \leq 0$. Числитель дроби отрицателен. Значит, неравенство выполняется в том и только том случае, если знаменатель дроби положителен, т. е. если $5x + 8 > 0$, откуда $x > -1,6$.

Ответ: $(-1,6; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{x - 3}{x + 2} < \frac{x - 4}{x + 1}$.

Решение. Перенесём дробь из правой части неравенства в левую: $\frac{x - 3}{x + 2} - \frac{x - 4}{x + 1} < 0$. Приведём дроби в левой части неравенства к общему знаменателю: $\frac{(x - 3)(x + 1) - (x - 4)(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} < 0$. Раскроем скобки в числителе полученной дроби: $\frac{x^2 + x - 3x - 3 - x^2 - 2x + 4x + 8}{(x + 2)(x + 1)} < 0$. Теперь приведём подобные в числителе: $\frac{5}{(x + 2)(x + 1)} < 0$. Числитель дроби положителен, поэтому неравенство выполняется только в случае, если её знаменатель отрицателен. Приходим к неравенству $(x + 2)(x + 1) < 0$, множеством решений которого является интервал $(-2; -1)$.

Ответ: $(-2; -1)$.

Занятие 40. Системы, содержащие простейшие дробно-рациональные неравенства

Решение систем, содержащих простейшие дробно-рациональные неравенства, либо сводимых к ним, заключается в последовательном решении каждого из неравенств системы и последующем нахождении пересечения найденных множеств.

Пример 1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{10x+7}{5x+2} \geq 2, \\ \frac{x}{x-10} \leq 1. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы, приведя его к виду $\frac{10x+7}{5x+2} - 2 \geq 0$, откуда $\frac{10x+7-10x-4}{5x+2} \geq 0$, и $\frac{3}{5x+2} \geq 0$. Значит, $5x+2 > 0$, откуда $x > -0,4$. Решим второе неравенство данной системы, приведя его к виду $\frac{x}{x-10} - 1 \leq 0$, откуда $\frac{x-x+10}{x-10} \leq 0$, и $\frac{10}{x-10} \leq 0$. Значит, $x-10 < 0$, откуда $x < 10$. Поэтому множеством решений данной системы неравенств является $(-0,4; 10)$.

Ответ: $(-0,4; 10)$.

Пример 2. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2x^2-9x+9}{5x^2+8} \geq 0, \\ \frac{2x^2-5x-3}{2x^2-x+5} \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Знаменатель дроби в левой части этого неравенства принимает только положительные значения, поскольку при любом значении переменной $5x^2+8 > 0$ как сумма неотрицательного и положительного чисел. Поэтому первое неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если $2x^2-9x+9 \geq 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1,5 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; 1,5] \cup [3; +\infty)$. Решим второе неравенство данной системы. Дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2-x+5$ отрицателен, старший коэффициент положителен, следовательно, этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому второе неравенство данной системы выполняется в том и только том случае, если $2x^2-5x-3 \leq 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа -0,5 и 3, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $[-0,5; 3]$. Найдём множество решений данной системы неравенств как пересечение числовых множеств $(-\infty; 1,5] \cup [3; +\infty)$ и $[-0,5; 3]$ (рис. 31):

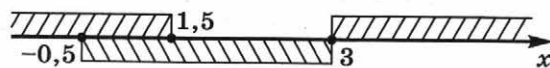


Рис. 31

Множество решений данной системы неравенств: $[-0,5; 1,5] \cup \{3\}$.

Ответ: $[-0,5; 1,5] \cup \{3\}$.

Занятие 41*. Более сложные рациональные неравенства

Перейдём теперь к более сложным целым и дробно-рациональным неравенствам, проиллюстрировав методы их решения примерами. Вычисление корней квадратных трёхчленов будет опускаться для экономии места.

Метод интервалов является одним из основных методов решения целых неравенств. Обычно он применяется после приведения неравенства к виду $p_1(x) \cdot p_2(x) \times \dots \cdot p_n(x) \vee 0$, который будем называть стандартным. Многочлены $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, как правило, являются многочленами первой или второй степени. Последние

в случае положительности дискриминанта следует представить в виде произведения линейных множителей по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ разложения квадратного трёхчлена на линейные множители; в случае неположительности дискриминанта квадратный трёхчлен принимает только неотрицательные или только неположительные значения, что и нужно учитывать при решении неравенства. Перед применением метода интервалов можно обе части неравенства разделить на полученное после разложения на множители произведение старших коэффициентов квадратных трёхчленов.

Пример 1. Решите неравенство $(3x^2 - 8x + 4)(5x^2 - 8x - 4) \leq 0$.

Решение. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2 - 8x + 4$ являются числа $\frac{2}{3}$ и 2. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что $3x^2 - 8x + 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)$. Корнями квадратного трёхчлена $5x^2 - 8x - 4$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 2. По формуле разложения квадратного трёхчлена на линейные множители получим, что $5x^2 - 8x - 4 = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 2)$. Следовательно, данное неравенство приводится к виду $3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2) \cdot 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 2) \leq 0$, откуда $\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)^2 \leq 0$. Применим метод интервалов (рис. 32):

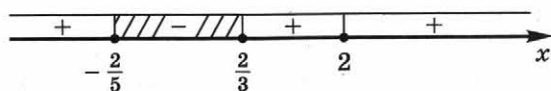


Рис. 32

Ответ: $\left[-\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (2x^2 + 9x + 4)(4x^2 + 9x + 2)(9x^2 + 2x + 4) \leq 0, \\ (1 - 16x^2)(5x^2 + 2x)(4x^2 + 20x + 25) \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Корнями квадратного трёхчлена $2x^2 + 9x + 4$ являются числа -4 и $-0,5$. Корнями квадратного трёхчлена $4x^2 + 9x + 2$ являются числа -2 и $-0,25$. Дискриминант квадратного трёхчлена $9x^2 + 2x + 4$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Следовательно, при любом действительном значении переменной этот трёхчлен принимает только положительные значения. Поэтому обе части неравенства можно разделить на $9x^2 + 2x + 4$. Таким образом, первое неравенство данной системы приводится к виду $2(x + 4)(x + 0,5) \cdot 4(x + 2)(x + 0,25) \leq 0$, откуда $(x + 4)(x + 0,5)(x + 2)(x + 0,25) \leq 0$. Применим метод интервалов (рис. 33):

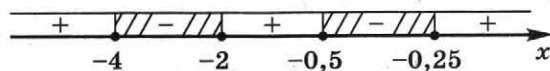


Рис. 33

Множество решений неравенства: $[-4; -2] \cup [-0,5; -0,25]$.

Решим второе неравенство данной системы. Разложим на множители каждый из многочленов в скобках: $1 - 16x^2 = -16(x + 0,25)(x - 0,25)$, $5x^2 + 2x = 5x(x + 0,4)$, а квадратный трёхчлен $4x^2 + 20x + 25$ является полным квадратом (те, кто не видит этого, могут вычислить дискриминант — он равен нулю): $4x^2 + 20x + 25 = 4(x + 2,5)^2$. Следовательно, второе неравенство данной системы примет вид $-16(x + 0,25)(x - 0,25) \cdot 5x(x + 0,4) \cdot 4(x + 2,5)^2 \geq 0$. Разделим обе части неравенства на $-16 \cdot 5 \cdot 4$, изменив знак неравенства на противоположный: $(x + 0,25)(x - 0,25) \times x(x + 0,4)(x + 2,5)^2 \leq 0$. Применим метод интервалов (рис. 34):

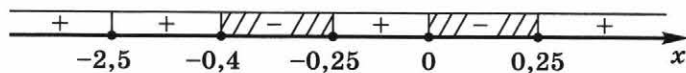


Рис. 34

Множество решений неравенства: $\{-2,5\} \cup [-0,4; -0,25] \cup [0; 0,25]$.

Для того чтобы решить данную систему, найдём пересечение полученных множеств: $\{-2,5\} \cup [-0,4; -0,25]$.

Ответ: $\{-2,5\} \cup [-0,4; -0,25]$.

Разумеется, далеко не каждое целое неравенство сразу даётся в стандартном виде. Куда чаще встречаются задачи, в которых для приведения неравенства к стандартному виду надо проделать определённые преобразования. Прежде всего это раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, вынесение общего множителя, разложение на множители (в том числе и с помощью формул сокращённого умножения). Поскольку областью допустимых значений любого целого неравенства является вся числовая прямая, указанные преобразования будут равносильными.

Пример 3. Решите неравенство $(16x^2 + 14x + 3)(2x - 1) \geq (8x^2 - 2x - 1)(2x + 1)$.

Решение. При раскрытии скобок получим в левой и правой частях неравенства многочлены третьей степени с соответственно различными старшими коэффициентами и свободными членами, т. е. придём в итоге к неравенству третьей степени. Попробуем привести неравенство к стандартному виду иными способами. Корнями квадратного трёхчлена $16x^2 + 14x + 3$ являются числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{8}$. Разложим левую часть неравенства на множители: $16\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{8}\right)(2x - 1) \geq (8x^2 - 2x - 1)(2x + 1)$. Для упрощения дальнейших преобразований избавимся от дробей в скобках:

$$(2x + 1)(8x + 3)(2x - 1) \geq (8x^2 - 2x - 1)(2x + 1).$$

Перемножим вторую и третью скобки в левой части неравенства, перенесём выражение из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $(2x + 1)$. Получим $(2x + 1)(16x^2 - 2x - 3 - 8x^2 + 2x + 1) \geq 0$, откуда $(2x + 1)(8x^2 - 2) \geq 0$. Вынесем за скобки коэффициенты при переменной: $2(x + 0,5) \cdot 8(x^2 - 0,25) \geq 0$. Разделив обе части неравенства на 16 и применив формулу разности квадратов, придём к неравенству $(x - 0,5)(x + 0,5)^2 \geq 0$. Применим метод интервалов (рис. 35):

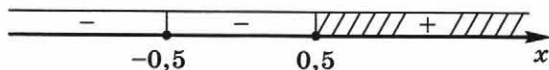


Рис. 35

Ответ: $\{-0,5\} \cup [0,5; +\infty)$.

Одним из наиболее часто встречающихся преобразований алгебраических выражений является разложение на множители. Если в предыдущем примере для этого было достаточно проделать только техническую работу, то для решения следующего уже надо проявить определённую наблюдательность.

Пример 4. Решите неравенство $x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 > 0$.

Решение. Заметим, что сумма первых трёх слагаемых левой части неравенства является полным квадратом: $x^4 + 10x^3 + 25x^2 = (x^2 + 5x)^2$. Теперь неравенство можно переписать в виде $(x^2 + 5x)^2 - 6^2 > 0$ и применить формулу разности квадратов: $(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) > 0$. Корнями квадратного трёхчлена в первой скобке являются числа -6 и 1 ; корнями квадратного трёхчлена во второй скобке являются числа -3 и -2 . Теперь левую часть последнего неравенства можно разложить на множители: $(x + 6)(x - 1)(x + 3)(x + 2) < 0$. Осталось применить метод интервалов (рис. 36):

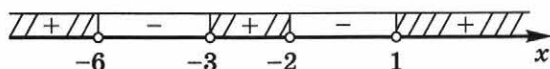


Рис. 36

Решение неравенства: $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим пример решения целых неравенств с помощью метода введения новой переменной. Напомним, что основной идеей решения неравенств этим методом является замена повторяющегося алгебраического выражения некоторой (обычно латинской) буквой, играющей роль новой переменной. Такая замена позволяет свести решение данного неравенства к последовательному решению нескольких неравенств меньшей степени (обычно квадратных) либо разложить на множители левую часть и, сделав обратную замену, воспользоваться методом интервалов (этот способ часто оказывается более коротким). В некоторых случаях замена является только вспомогательным средством, позволяющим упростить алгебраические преобразования с целью получения менее сложного по сравнению с данным неравенства.

Пример 5. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 25x^4 - 41x^2 + 16 \leq 0, \\ 7(2x^2 - x - 1) + 1 \geq (2x^2 - x)^2. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Введём новую переменную $t = x^2$. Неравенство примет вид $25t^2 - 41t + 16 \leq 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и $\frac{16}{25}$. Поэтому неравенство можно переписать в виде $25\left(t - \frac{16}{25}\right)(t - 1) \leq 0$. Разделим обе части последнего неравенства на 25 и сделаем обратную замену: $\left(x^2 - \frac{16}{25}\right)(x^2 - 1) \leq 0$, откуда $(x - 0,8)(x + 0,8)(x - 1)(x + 1) \leq 0$. Применим метод интервалов (рис. 37):

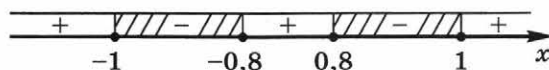


Рис. 37

Решение первого неравенства данной системы: $[-1; -0,8] \cup [0,8; 1]$. Решим второе неравенство данной системы. Пусть $z = 2x^2 - x$. Неравенство примет вид $7(z - 1) + 1 \geq z^2$. Приведём неравенство к базовому виду: $z^2 - 7z + 6 \leq 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа 1 и 6 . Разложив левую часть последнего неравенства на множители, получим $(z - 1)(z - 6) \leq 0$. Сделаем обратную замену: $(2x^2 - x - 1)(2x^2 - x - 6) \leq 0$. Корнями квадратного трёхчлена в первой скобке левой части неравенства являются числа $-0,5$ и 1 , корнями квадратного

трёхчлена во второй скобке являются числа $-1,5$ и 2 . Разложив на множители каждый из этих трёхчленов, придём к неравенству $2(x + 0,5)(x - 1) \cdot 2(x + 1,5)(x - 2) \leq 0$, откуда $(x + 0,5)(x - 1)(x + 1,5)(x - 2) \leq 0$. Вновь применим метод интервалов (рис. 38):

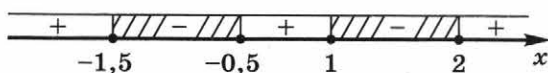


Рис. 38

Решение второго неравенства данной системы: $[-1,5; -0,5] \cup [1; 2]$. Решение данной системы найдём как пересечение числовых множеств $[-1; -0,8] \cup [0,8; 1]$ и $[-1,5; -0,5] \cup [1; 2]$. В данном случае это легко сделать и без чертежа, ведь отрезок $[-1; -0,8]$ целиком содержится в отрезке $[-1,5; -0,5]$, а не пересекающиеся с ними отрезки $[0,8; 1]$ и $[1; 2]$ имеют единственную общую точку 1 . Следовательно, решение данной системы: $[-1; -0,8] \cup \{1\}$.

Ответ: $[-1; -0,8] \cup \{1\}$.

Перейдём к примерам решения дробно-рациональных неравенств.

Следующими по уровню сложности после простейших являются дробно-рациональные неравенства, сводимые к простейшим после нескольких (обычно двух-трёх) несложных преобразований. Как правило, такими преобразованиями являются перенос всех алгебраических выражений в одну из частей неравенства, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, вынесение общего множителя.

Пример 6. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 3x - 4}{3x^2 - x - 14} \geq \frac{7 + 3x - 2x^2}{14 + x - 3x^2}$.

Решение. Знаменатели дробей в левой и правой частях неравенства различаются только знаком. Умножим числитель и знаменатель правой части на -1 и перенесём полученную дробь $\frac{2x^2 - 3x - 7}{3x^2 - x - 14}$ в левую часть неравенства: $\frac{2x^2 - 3x - 4}{3x^2 - x - 14} - \frac{2x^2 - 3x - 7}{3x^2 - x - 14} \geq 0$.

После приведения разности дробей к общему знаменателю и очевидных упрощений получим неравенство $\frac{3}{3x^2 - x - 14} \geq 0$, которое выполняется в том и только том случае, если $3x^2 - x - 14 > 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа -2 и $\frac{7}{3}$, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множество решений неравенства: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

Пример 7. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{7x + 6}{7x^2 + 6} \geq \frac{7x + 5}{7x^2 + 5}, \\ \frac{2}{3x^2 - 300} > \frac{3}{2x^2 - 200}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы. Стандартный путь: перенести дробь из правой части в левую и привести полученную разность дробей к общему знаменателю, после чего выполнить алгебраические преобразования в числителе полученной дроби. Решение можно несколько оптимизировать, учитывая то, что при любом значении переменной знаменатели дробей положительны. То есть это тот довольно редкий случай, когда обе части неравенства можно умножить на выражение, зависящее от переменной, и избавиться от дробей. Выполним умножение обеих частей неравенства на $(7x^2 + 5)(7x^2 + 6)$, получим $(7x + 6)(7x^2 + 5) \geq (7x + 5)(7x^2 + 6)$. После раскрытия скобок, переноса всех слагаемых из правой части неравенства в левую и приведения

подобных придём к неравенству $7x^2 - 7x \geq 0$, откуда $7x(x - 1) \geq 0$. Множество решений неравенства: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Решим второе неравенство данной системы.

Вынесем общие множители в знаменателях дробей: $\frac{2}{3(x^2 - 100)} > \frac{3}{2(x^2 - 100)}$. Поскольку

ку $\frac{3}{2a} - \frac{2}{3a} = \frac{5}{6a}$, последнее неравенство приводится к виду $\frac{5}{6(x^2 - 100)} < 0$, откуда

$x^2 - 100 < 0$, или $(x - 10)(x + 10) < 0$. Множество решений второго неравенства системы: $(-10; 10)$. Решение данной системы можно найти устно либо использовать числовую прямую (рис. 39):

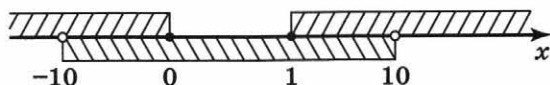


Рис. 39

Множество решений данной системы неравенств: $(-10; 0] \cup [1; 10)$.

Ответ: $(-10; 0] \cup [1; 10)$.

Наиболее простые дробно-рациональные неравенства, которые целесообразно решать методом интервалов, имеют вид $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой

или второй степени. Строгие неравенства указанного вида можно сводить к равносильным им целым неравенствам $f(x)g(x) \vee 0$ (знаком \vee обозначен один из знаков $>$, $<$). Впрочем, это будет просто ещё одним дополнительным шагом решения, никаких особых преимуществ такой шаг не даёт. Самый долгий путь — сведение неравенства $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ к двум системам, определяющим знак дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ по знакам её

числителя и знаменателя. Тем самым прямое применение метода интервалов представляется наиболее естественным и наименее трудоёмким. Область определения алгебраической дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ задаётся условием $g(x) \neq 0$. Нули числителя и знаменателя

(на числовой оси они изображаются пустыми кружочками, т. е. выкалываются) разбивают числовую ось на несколько интервалов. Найдя эти нули (нули числителя в случае нестрогого неравенства должны быть обязательно включены в ответ; в этом случае они изображаются на чертеже жирными точками) и определив знак алгебраической дроби в каждом из интервалов, получим решение неравенства. Если числитель и знаменатель обращаются в нуль в какой-то точке x_0 , то после их разложения на множители полученную алгебраическую дробь можно сократить на $x - x_0$, добавив условие $x \neq x_0$ и записав это и данное неравенства в виде системы неравенств.

Пример 8. Решите неравенство $\frac{5x^2 - 13x - 6}{3x^2 - 8x - 3} \geq 0$.

Решение. Корнями квадратного трёхчлена $5x^2 - 13x - 6$ являются числа $-\frac{2}{5}$ и 3. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2 - 8x - 3$ являются числа $-\frac{1}{3}$ и 3. Применив формулу разложения квадратного трёхчлена на линейные множители, получим не-

равенство $\frac{5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 3)}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3)} \geq 0$. Разделив обе части неравенства на $\frac{5}{3}$ и сократив дробь при условии $x \neq 3$, получим равносильную данному неравенству систему
$$\begin{cases} \frac{x + \frac{2}{5}}{x + \frac{1}{3}} \geq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Применим метод интервалов для решения первого неравенства системы (рис. 40):

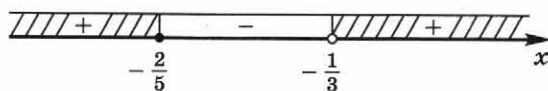


Рис. 40

Значит, множество решений системы и данного неравенства: $(-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 3) \cup (3; +\infty)$ (рис. 41):

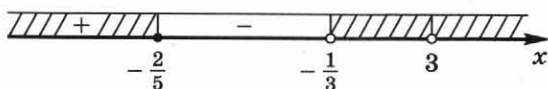


Рис. 41

Ответ: $(-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

Наиболее распространённым типом дробно-рациональных неравенств, решаемых с помощью метода введения новой переменной, является неравенство вида

$\frac{a}{f^2(x)} + \frac{b}{f(x)} + c \vee 0$ (где $f(x)$ — обычно многочлен первой или второй степени, а

знаком \vee обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств $>$, $<$, \geq , \leq).

Один из способов решения такого неравенства состоит во введении новой переменной

уже на первом шаге: обозначив $\frac{1}{f(x)}$ через t , получим квадратное неравенство $at^2 +$

$+bt + c \vee 0$. Решив это неравенство и выполнив обратную замену, получаем, как

правило, систему или совокупность двух неравенств $\frac{1}{f(x)} \vee t_1$ и $\frac{1}{f(x)} \vee t_2$, где t_1 и

t_2 — корни квадратного трёхчлена $at^2 + bt + c$. Эти неравенства приводятся к виду

$\frac{1 - t_1 \cdot f(x)}{f(x)} \vee 0$ или $\frac{1 - t_2 \cdot f(x)}{f(x)} \vee 0$ соответственно и решаются методом интервалов.

Другой способ требует некоторых предварительных преобразований, но сводится к

решению только целых неравенств. Этот способ предполагает следующую последо-

вательность действий. ОДЗ неравенства $\frac{a}{f^2(x)} + \frac{b}{f(x)} + c \vee 0$ определяется условием

$f(x) \neq 0$. При этом условии $f^2(x) > 0$. Поэтому можно обе части данного неравен-

ства умножить на $f^2(x)$. Таким образом, приходим к системе неравенств

$\begin{cases} c \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + a \vee 0, \\ f(x) \neq 0. \end{cases}$ Первое неравенство системы является квадратным отно-

сительно $f(x)$ и решается стандартным образом. Этот способ представляется более

коротким и рациональным. Ту же систему можно получить и без умножения обеих

частей неравенства на $f^2(x)$, если привести левую часть данного неравенства к общему

знаменателю: $\frac{a + b \cdot f(x) + c \cdot f^2(x)}{f^2(x)} \vee 0$ — и воспользоваться положительностью $f^2(x)$ при

условии $f(x) \neq 0$.

Пример 9. Решите неравенство $\frac{45}{(x^2 + 2x - 8)^2} + \frac{14}{x^2 + 2x - 8} + 1 \geq 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на $(x^2 + 2x - 8)^2$ при условии $x^2 + 2x - 8 \neq 0$. Получим систему неравенств $\begin{cases} (x^2 + 2x - 8)^2 + 14(x^2 + 2x - 8) + 45 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 8 \neq 0. \end{cases}$

Решим первое неравенство системы, введя новую переменную $t = x^2 + 2x - 8$. Получим неравенство $t^2 + 14t + 45 \geq 0$. Корнями квадратного трёхчлена $t^2 + 14t + 45$ являются числа -9 и -5 , поэтому неравенство можно переписать в виде $(t + 9)(t + 5) \geq 0$. Сделав обратную замену, придём к неравенству $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) \geq 0$, или $(x + 1)^2(x^2 + 2x - 3) \geq 0$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 2x - 3$ являются числа -3 и 1 , поэтому неравенство можно переписать в виде $(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) \geq 0$. Применим метод интервалов (рис. 42):



Рис. 42

Множеством решений неравенства является $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [1; +\infty)$. Второе неравенство системы выполняется при всех значениях переменной за исключением $x = -4$ и $x = 2$ (эти числа являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 2x - 8$ и именно их надо исключить из множества решений первого неравенства системы). Значит, множеством решений системы, а следовательно и данного неравенства является множество $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \{-1\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \{-1\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. ФУНКЦИЯ И ГРАФИК ФУНКЦИИ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

Занятие 42. Функция. График функции. Возрастание, убывание, точки максимума, минимума, наибольшие, наименьшие значения функции. Чтение графиков функций.

Занятие 43. График линейной функции.

Занятие 44. График квадратичной функции. Парабола.

Занятие 45. График обратной пропорциональности. Гипербола.

Занятие 46*. Графики более сложных функций.

Общие рекомендации к занятиям

Задания, связанные с функциями и их графиками, ежегодно включаются в задания ОГЭ по математике. По большей части это задания на чтение графиков функций, содержащие вопросы о свойствах функций; задания, в которых требуется установить соответствие между функциями, заданными формулами, и графиками этих функций, либо вариации последних, предполагающие ответ на вопрос, какая из нескольких данных формул задаёт функцию, график которой приведён в условии, или какой из нескольких данных графиков соответствует функции, заданной указанной в условии формулой.

Занятие 42. Функция. График функции. Возрастание, убывание, точки максимума, минимума, наибольшие, наименьшие значения функции. Чтение графиков функций

Это занятие посвящено чтению графиков, которыми заданы функции. Прежде чем переходить к решению примеров, целесообразно вспомнить основные свойства, которыми могут обладать функции, и основные понятия, связанные с этими свойствами.

Пример. На рисунке 43 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 14)$.

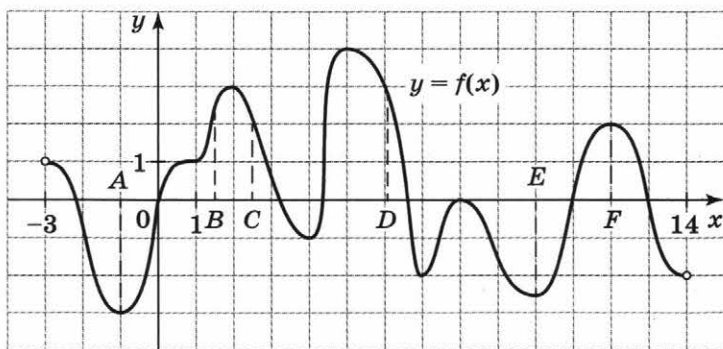


Рис. 43

С помощью рисунка ответьте на следующие вопросы и выполните задания:

- 1) В какой точке функция принимает наименьшее значение?
- 2) Чему равно наибольшее значение функции $y = f(x)$?
- 3) На рисунке отмечено 6 точек: A, B, C, D, E и F. В каких из этих точек функция $y = f(x)$ принимает значение, равное 2?

- 4) Найдите длину наибольшего из промежутков возрастания функции.
- 5) Определите число точек минимума функции $y = f(x)$.
- 6) Определите число точек экстремума функции $y = f(x)$.

Решение.

- 1) Наименьшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $x = -1$.
- 2) Наибольшее значение функции $f(x)$ равно 4 (оно достигается в точке $x = 5$).
- 3) Если провести горизонтальную прямую $y = 2$, то она пересечёт график в пяти точках, две из которых — это точки C и F , а три не обозначены. Значит, из данных точек только в точках C и F функция принимает значение $y = 2$.
- 4) Наибольшим по длине промежутком возрастания функции является отрезок $[-1; 2]$. Его длина равна 3.
- 5) Точки минимума — это точки, в которых убывание функции сменяется возрастанием. Для данного графика такими точками являются точки с абсциссами, равными $-1, 4, 7, 10$. Значит, у функции $f(x)$ всего 4 точки минимума.
- 6) Точка экстремума — это точка максимума или точка минимума. У функции $f(x)$ 4 точки минимума и 4 точки максимума, значит, у неё 8 точек экстремума.

Занятие 43. График линейной функции

Напомним, что графиком линейной функции является прямая, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек. Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой). Прояснить смысл коэффициента k удобнее всего на примере прямой $y = kx$, проходящей через начало координат и точку $(1; k)$. Если $k > 0$, то тангенс угла α , который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, находят из прямоугольного треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и k . Он будет равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{1} = k$ (рис. 44).

Если $k < 0$, то угол α будет тупым, а его тангенс — отрицательным. В этом случае он дополняет острый угол β прямоугольного треугольника с теми же вершинами $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и $|k|$, до 180° (рис. 45). Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{|k|}{1} = -|k|$. Поскольку в данном случае $k < 0$, то $|k| = -k$ и $\operatorname{tg} \alpha = k$. Таким образом, и в этом случае коэффициент k равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Наконец если $k = 0$, то уравнение прямой $y = kx + b$ принимает вид $y = b$. Эта прямая, очевидно, параллельна оси абсцисс (поскольку ординаты всех её точек одинаковы), пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 46), поэтому угол, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (а значит, и его тангенс), равен нулю. Именно поэтому коэффициент k в уравнении прямой называется угловым.

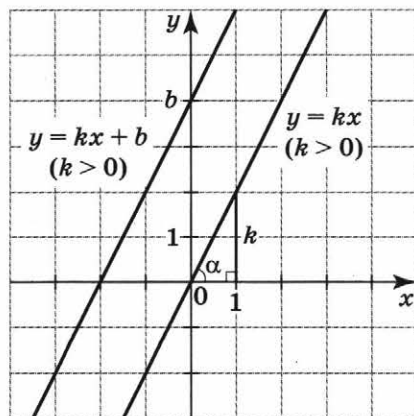


Рис. 44

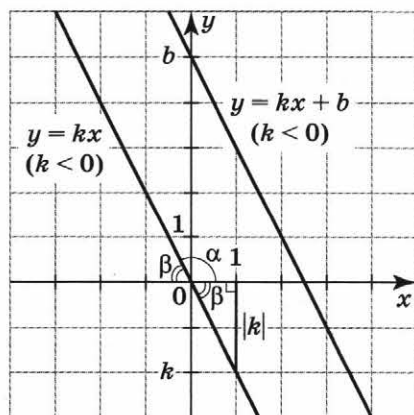


Рис. 45

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$, её можно получить параллельным переносом прямой $y = kx$ вдоль оси ординат на b единиц вверх (при $b > 0$) или на $|b|$ единиц вниз (при $b < 0$); угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ будет, разумеется, также равен $\operatorname{tg} \alpha$.

Итак, коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс. Если $k > 0$, линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей

на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$, отрицательные значения

при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{k}$ (рис. 47, а). Если $k < 0$, линейная функция является убывающей на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$, отрицательные значения при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{k}$ (рис. 47, б).

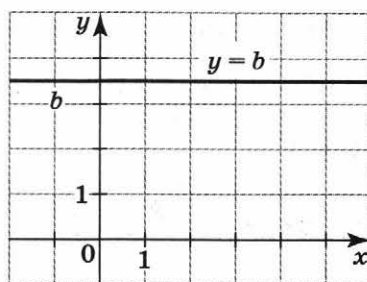


Рис. 46

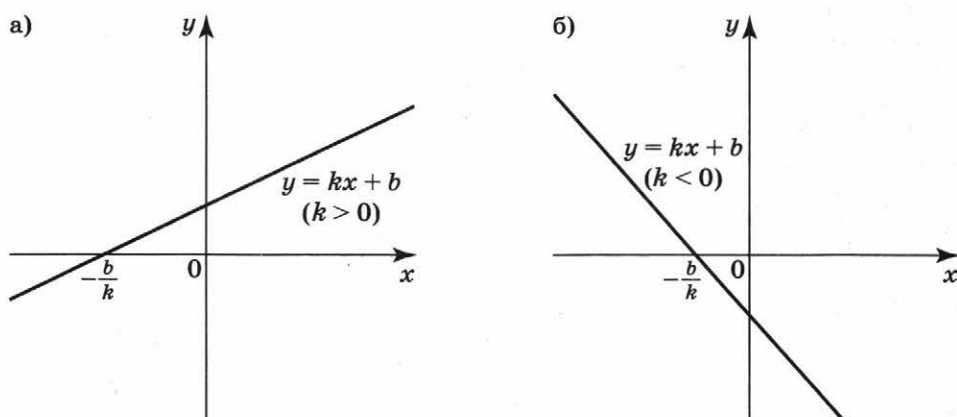


Рис. 47

Пример 1. Установите соответствие между функциями и их графиками (рис. 48).

А) $y = 2x$ Б) $y = \frac{x}{2}$ В) $y = -\frac{x}{2}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер графика.

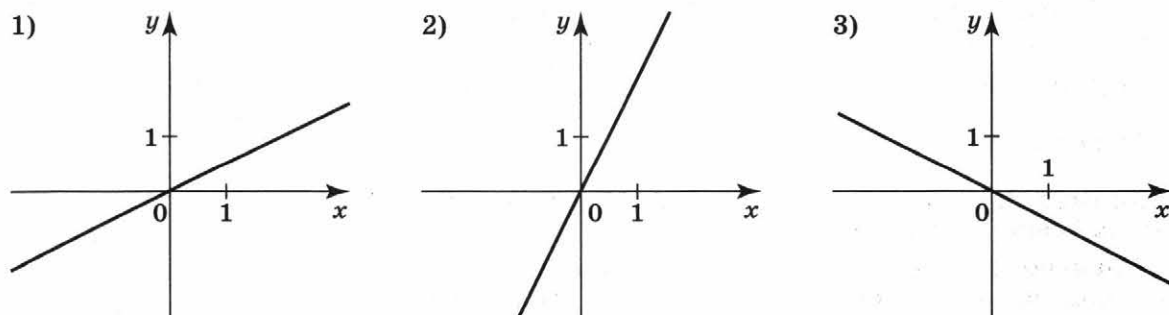


Рис. 48

Решение. Единственная прямая, угловой коэффициент которой отрицателен, это прямая В. Значит, этой прямой соответствует график 3. Из двух оставшихся прямых больший угловой коэффициент имеет прямая на графике 2. Значит, эта прямая является графиком функции А, а прямая на графике 1 является графиком функции В.

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

Решение довольно значительной части задач ОГЭ (и даже ЕГЭ), связанных с графиками функций, сводится к вычислению углового коэффициента некоторой прямой, изображённой на листе бумаги в клетку. Такие задачи решаются следующим образом: на прямой выбирают две точки, которые являются узлами клеток (т. е. точками с целочисленными координатами), и рассматривают прямоугольный треугольник, концами которого служат выбранные точки, а катеты параллельны осям координат. При этом если прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол, то искомый угловой коэффициент будет равен тангенсу соответствующего острого угла в построенном треугольнике. Если же этот угол тупой, то в ответ нужно записать число, противоположное найденному тангенсу (т. е. полученную величину со знаком «минус»). При этом лучше сразу в решении фиксировать знак углового коэффициента, чтобы потом не ошибиться, записывая ответ. Проконтролировать, правильно ли определён знак углового коэффициента, можно ещё и следующим образом: мысленно провести прямую, параллельную данной, через начало координат. Если полученная таким образом прямая лежит в первой и третьей четвертях, то угловой коэффициент положителен, если во второй и четвёртой — отрицателен.

Пример 2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке 49.

Решение. Прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол. Поэтому её угловой коэффициент k , равный тангенсу этого угла, положителен. Для его вычисления выберем на прямой две точки, расположенные в узлах сетки. Пусть это будут, например, точки А и В (рис. 50). Обозначим буквой С точку пересечения прямых, проходящих через выбранные точки параллельно осям координат, как показано на рисунке. Поскольку при параллельном переносе одной из двух прямых угол между ней и другой прямой не меняется, искомый угол α будет равен углу ABC . Но тогда $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Ответ: 1,5.

Пример 3. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке 51.

Решение. Прямая, параллельная данной и проходящая через начало координат, очевидно, будет расположена во второй и четвёртой четвертях. Поэтому её угловой коэффициент k , равный в силу параллельности

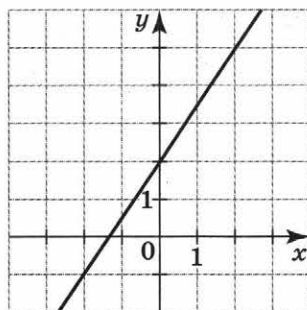


Рис. 49

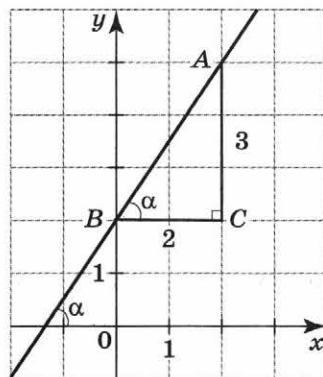


Рис. 50

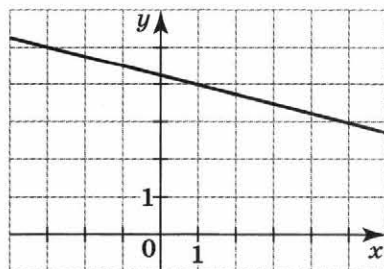


Рис. 51

угловому коэффициенту данной прямой, будет отрицателен. Значит, он будет противоположен тангенсу острого угла ABC (рис. 52), т. е. $k = -\operatorname{tg} \angle ABC$. Поскольку $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{4} = 0,25$, то $k = -0,25$.

Ответ: $-0,25$.

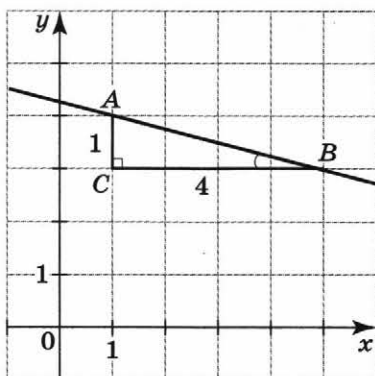


Рис. 52

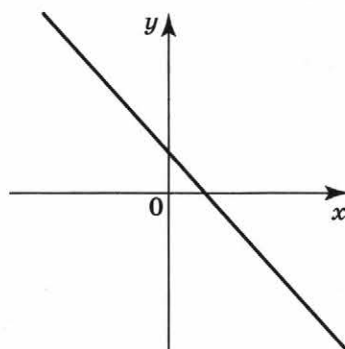


Рис. 53

Пример 4. На рисунке 53 изображён график функции $y = ax + b$. Определить знаки коэффициентов a и b .

Решение. По рисунку видно, что с ростом аргумента x значения функции уменьшаются (прямая «наклонена вниз»), значит, её угловой коэффициент отрицателен, т. е. $a < 0$. Прямая пересекает ось ординат в точке $y_0 > 0$, значит, $y_0 = y(0) = b > 0$.

Ответ: $a < 0$, $b > 0$.

Занятие 44. График квадратичной функции. Парабола

Напомним, что функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется квадратичной.

Рассмотрим случай $a > 0$. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Функция убывает на промежутке $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$, возрастает на промежутке $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ и достигает своего наименьшего значения $y_0 = -\frac{D}{4a}$ в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс связано со знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2 . Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; условимся, что здесь и далее x_1 — меньший корень, x_2 — больший корень этого уравнения, т. е. $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, а $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Таким образом, если $a > 0$ и $D > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, отрицательные значения при всех $x \in (x_1; x_2)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 54, а).

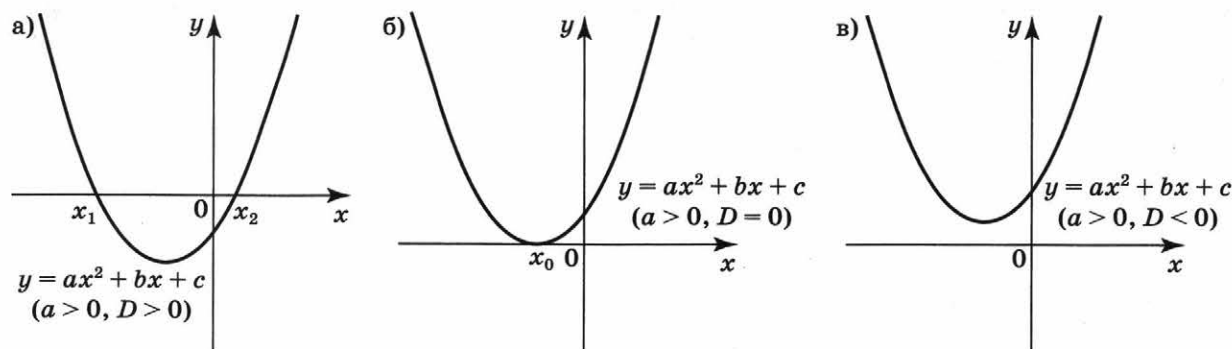


Рис. 54

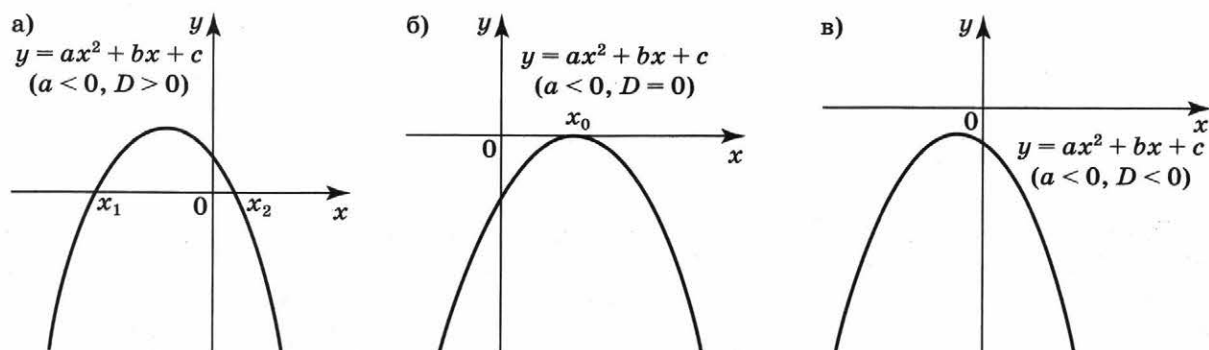


Рис. 55

Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$, т. е. график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину параболы. Таким образом, если $a > 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а отрицательных значений не принимает (рис. 54, б).

Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен выше оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только положительные значения (рис. 54, в).

Рассмотрим случай $a < 0$. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Функция убывает на промежутке $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$, возрастает на промежутке $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ и достигает наибольшего значения $y_0 = -\frac{D}{4a}$ в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2 . Таким образом, при $a < 0$ и $D > 0$ квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (x_1; x_2)$, отрицательные значения для всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 55, а).

Если $D = 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину x_0 параболы. Таким образом, если $a < 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения для всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а положительных значений не принимает (рис. 55, б).

Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен ниже оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только отрицательные значения (рис. 55, в).

Пример 1. На рисунке 56 изображён график квадратичной функции.

- Найдите значение функции при $x = 3$.
- Найдите значения x , при которых $y = 1$.
- Определите наибольшее значение функции.

Решение.

а) Проведём через точку 3 оси абсцисс прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечёт параболу в точке с ординатой 4.

б) Проведём через точку 1 оси ординат прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечёт параболу в точках с абсциссами 0 и 4.

в) Наибольшему значению функции соответствует ордината вершины параболы, она равна 5.

Ответ: а) 4; б) 0; 4; в) 5.

Заметим, что типичной ошибкой при решении задания в) является запись в ответ абсциссы вершины, а не её ординаты. Следует акцентировать внимание учащихся на этом факте.

Пример 2. На рисунке 57 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

- Найдите значение коэффициента c .
- Найдите значение коэффициента a .
- Найдите значение коэффициента b .
- Найдите значение функции при $x = 5$.

Решение.

а) График квадратичной функции пересекает ось ординат в точке $(0; c)$, т. е. в точке с ординатой c . Поэтому $c = 1$.

б) и в) Из предыдущего следует, что $y = ax^2 + bx + 1$. Точки $(1; -2)$ и $(2; -3)$ принадлежат параболы. Значит, $-2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$ и $-3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1$, откуда

$$\begin{cases} a + b = -3, \\ 2a + b = -2. \end{cases} \quad \text{Вычтя почленно из второго уравнения систе-}$$

мы её первое уравнение, найдём: $a = 1$. Подставив это значение в первое уравнение системы, получим $b = -4$.

г) Выполнить последнее задание по имеющемуся фрагменту графика невозможно, поскольку точка графика с абсциссой 5 на рисунке не изображена. Но теперь известна формула, задающая данную квадратичную функцию: $y = x^2 - 4x + 1$. Поэтому $y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 6$.

Ответ: а) 1; б) 1; в) -4; г) 6.

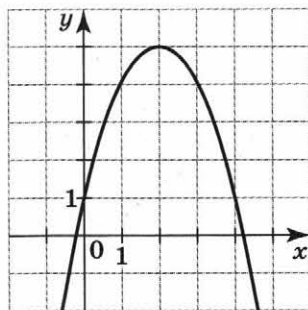


Рис. 56

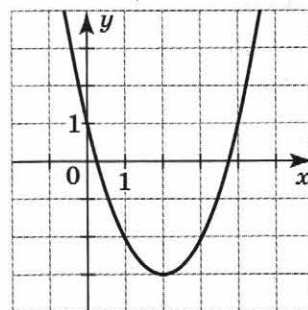


Рис. 57

Занятие 45. График обратной пропорциональности. Гипербола

Графиком обратной пропорциональности, т. е. функции $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), является гипербола, ветви которой при $k > 0$ расположены в первой и третьей координатных четвертях (рис. 58), а при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях (рис. 59). График обратной пропорциональности проходит через точку $(1; k)$.

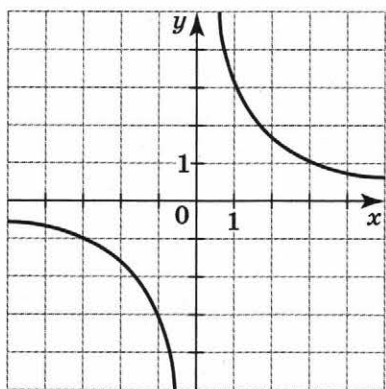


Рис. 58

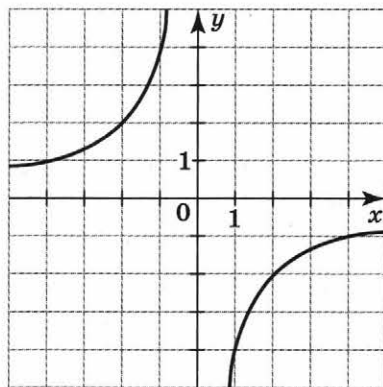


Рис. 59

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ своей области определения; при $k < 0$ возрастает на каждом из этих промежутков. Отметим, что говорить о возрастании или убывании функции $y = \frac{k}{x}$ на всей области определения нельзя, это является математической ошибкой: ведь из того, что $-2 < -1$, не следует, что $y(-2) < y(-1)$ при $k > 0$ (см. рис. 58), и, значит, функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и убывает на каждом из них. Аналогично функция $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ не является возрастающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и возрастает на каждом из них.

Пример 1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (рис. 60).

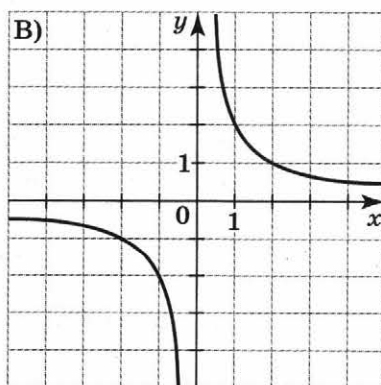
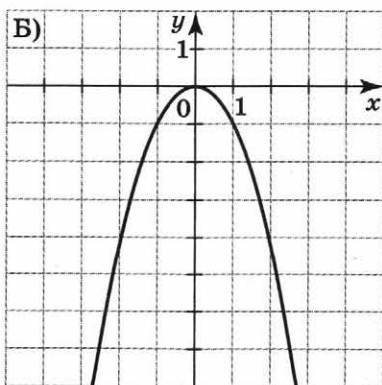
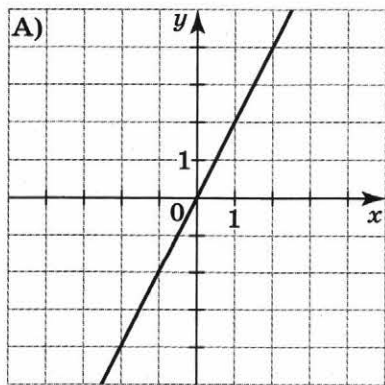


Рис. 60

- 1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = -x^2$ 3) $y = 2x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер формулы.

Решение. На рисунке А) изображена прямая, на рисунке Б) — парабола, на рисунке В) — гипербола. Значит, рисунку А) соответствует формула 3), рисунку Б) — формула 2), рисунку В) — формула 1).

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Пример 2. На рисунке 61 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите k .

Решение. Для решения подобных задач достаточно найти на графике точку с целыми координатами. В данном случае одной из таких точек является, например, точка (3; 3). Значит, $3 = \frac{k}{3}$, откуда $k = 9$.

Ответ: 9.

Пример 3. На рисунке 62 изображены графики функций вида $y = \frac{k}{x}$.

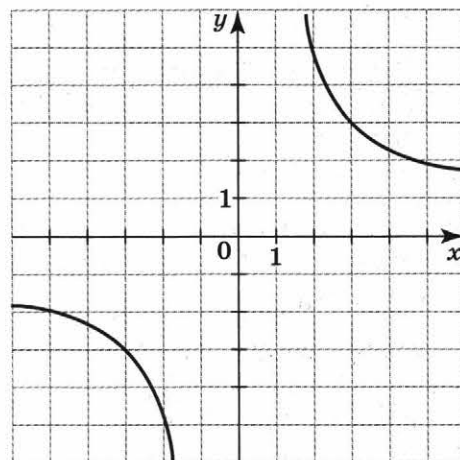


Рис. 61

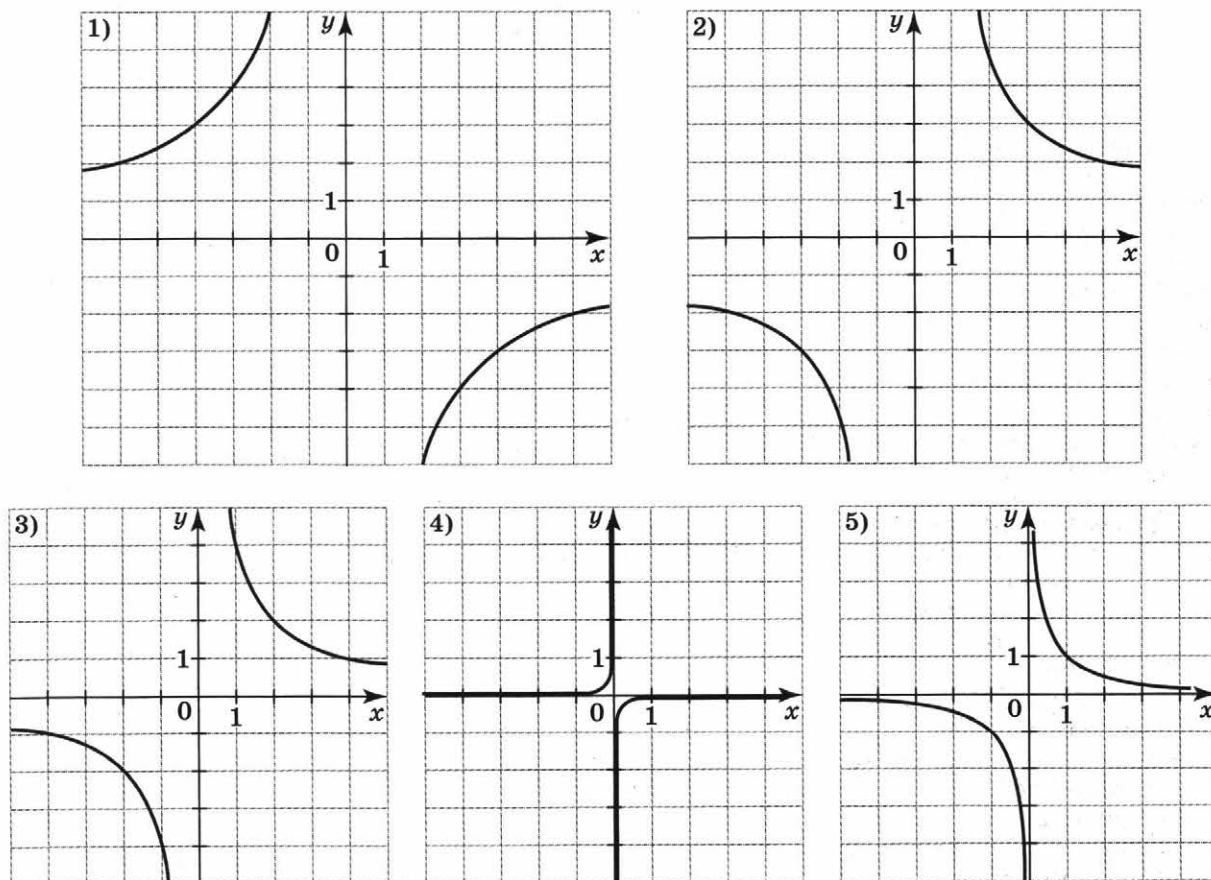


Рис. 62

На каком из них изображена гипербола, у которой значение k :

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| а) наибольшее; | г) наибольшее отрицательное; |
| б) наименьшее; | д) наибольшее по модулю; |
| в) наименьшее положительное; | е) наименьшее по модулю? |

Решение.

Поскольку график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $(1; k)$, достаточно сравнить ординаты точек с абсциссой 1, принадлежащих данным графикам. Наибольшая из ординат будет у точки $(1; k)$ графика 2), наименьшая — у точки $(1; k)$ графика 1). Наименьшая положительная ордината будет у точки $(1; k)$ графика 5), наибольшая отрицательная — у точки $(1; k)$ графика 4). Для ответа на вопрос д) достаточно сравнить графики, соответствующие наибольшему положительному значению k (график 2)) и наименьшему отрицательному значению k (график 1)). Графику 1) принадлежит, например, точка $(3; -4)$, откуда $-4 = \frac{k}{3}$ и $k = -12$. Графику 2) принадлежит, например, точка $(3; 3)$, откуда $3 = \frac{k}{3}$ и $k = 9$. Поскольку $|-12| = 12 > 9$, искомым графиком является 1). Для ответа на вопрос е) необязательно находить конкретные значения k : очевидно, что самая маленькая по модулю ордината будет у точки $(1; k)$ графика 4).

Ответ: а) 2; б) 1; в) 5; г) 4; д) 1; е) 4.

Занятие 46*. Графики более сложных функций

Это занятие посвящено более сложным графикам функций и их применению к решению задач, которые можно с некоторой степенью правдоподобия назвать исследовательскими. Отметим, что эта сложность в большей степени обусловлена либо формулой, задающей функцию, либо самим условием, требующим исследования взаимного расположения графиков двух функций и ответа на определённые вопросы о числе их общих точек в зависимости от некоторой величины. Формула, как правило, после определённых преобразований (сокращения дроби, раскрытия модуля, приведения подобных) представляет собой формулу, задающую элементарную функцию, графиком которой или частью графика которой является прямая, парабола, гипербола или их части, возможно, с удалёнными (выколотыми) точками (последние могут появиться в случае задания функции с помощью алгебраической дроби, область определения которой находят из условия неравенства нулю её знаменателя).

Пример 1. Найдите p и постройте в одной системе координат графики функций $y = -x^2 - p$ и $y = 6x + 10$, если известно, что они имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки.

Решение.

Составим уравнение по условию задачи: $-x^2 - p = 6x + 10$, откуда $x^2 + 6x + p + 10 = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь единственный корень, являющийся абсциссой общей точки графиков. Значит, дискриминант D этого уравнения равен нулю. Из условия равенства нулю дискриминанта получим $9 - p - 10 = 0$, откуда $p = -1$. Тогда уравнение примет вид $x^2 + 6x + 9 = 0$, откуда $x = -3$. Ординату общей точки найдём, подставив полученную абсциссу в уравнение прямой: $y = -8$. Данная ква-

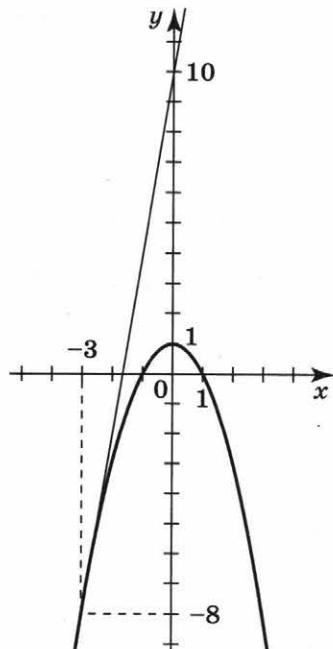


Рис. 63

двухзначная функция имеет вид $y = -x^2 + 1$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(0; 1)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(1; 0)$, $(-1; 0)$. Графиком функции $y = 6x + 10$ является прямая, проходящая через найденную точку $(-3; -8)$ и точку $(0; 10)$. Графики изображены на рисунке 63.

Ответ: $p = -1; (-3; -8)$.

Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Поскольку $\frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}$ при $x \neq -0,5$, графиком данной функции является гипербола $y = \frac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-0,5; -2)$. Прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, будет иметь с гиперболой ровно одну общую точку, только если она проходит через точку $(-0,5; -2)$. В этом случае $k = 4$ и уравнение прямой имеет вид $y = 4x$. График изображён на рисунке 64.

Ответ: 4.

Пример 3. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 4|x|$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

Решение.

При $x \geq 0$ данная функция имеет вид $y = x^2 - 6x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(3; -9)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(6; 0)$.

При $x \leq 0$ данная функция имеет вид $y = x^2 + 2x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-1; -1)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(-2; 0)$.

Прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек, если $c - 2 \geq 0$ или $-9 \leq c - 2 \leq -1$, откуда $c \in [-7; 1] \cup [2; +\infty)$. График изображён на рисунке 65.

Ответ: $[-7; 1] \cup [2; +\infty)$.

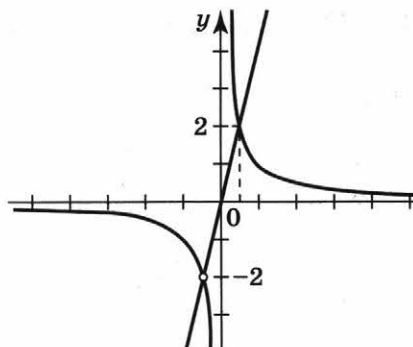


Рис. 64

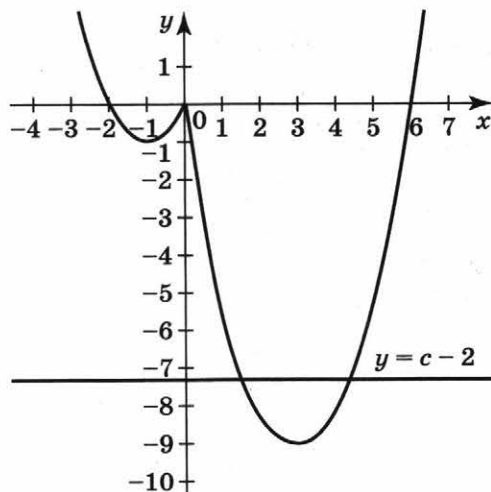


Рис. 65

1. ТРЕУГОЛЬНИКИ И МНОГУГОЛЬНИКИ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 47. Прямые, отрезки, углы.
- Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники.
- Занятие 49. Прямоугольный треугольник.
- Занятие 50. Произвольный треугольник.
- Занятие 51. Формулы площади треугольника.
- Занятие 52. Параллелограмм. Площадь параллелограмма.
- Занятие 53. Прямоугольник, квадрат, ромб, их площади.
- Занятие 54. Трапеция.
- Занятие 55. Площадь трапеции.

Общие рекомендации к занятиям

Задачи по планиметрии с кратким ответом и с развёрнутым ответом (полным решением) встречаются в вариантах ОГЭ по математике среди задач как базового, так и повышенного и высокого уровня сложности.

Задачи с кратким ответом представляют собой достаточно традиционные несложные задачи на вычисление углов, расстояний, длин и площадей плоских фигур, в том числе по готовому чертежу, в некоторых случаях сделанному на бумаге в клетку или в прямоугольной системе координат (с указанием координат данных точек в условии или на чертеже). Задачи с развёрнутым ответом (полным решением) требуют уверенного владения материалом школьной программы по геометрии и умения применять изученные теоремы в более сложных случаях.

Занятие 47. Прямые, отрезки, углы

Первое занятие этого модуля посвящено повторению начальных сведений по геометрии. Для решения приведённых здесь задач достаточно представления о том, что такое отрезок и угол, какие прямые называются параллельными, какие — перпендикулярными, какие углы называются вертикальными, какие — смежными, как называются пары углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых третьей. Помимо этих понятий, потребуется знание основных фактов, связанных с перечисленными углами:

- сумма смежных углов равна 180° ;
- вертикальные углы равны;
- соответственные углы равны;
- накрест лежащие углы равны;
- сумма односторонних углов равна 180° ;
- сумма углов треугольника равна 180° .

Пример 1. На рисунке 66 изображены параллельные прямые FE , MN и секущая AB , пересекающая FE в точке C , а MN в точке D . Выполните следующие задания:

- а) Установите соответствие между парами углов и их названиями.
В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего названия.

Пара углов	Название
А) ACF и DCE	1) Смежные
Б) FCD и CDM	2) Вертикальные
В) ACF и ACE	3) Односторонние
Г) DCF и NDC	4) Соответственные
Д) ACF и CDM	5) Накрест лежащие

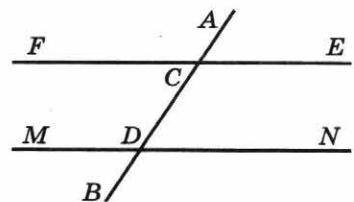


Рис. 66

б) Найдите величину угла CDM , если известно, что она вдвое больше величины угла NDC .

в) Найдите величину угла между биссектрисами углов CDM и NDC .

г) Найдите величину угла между биссектрисами углов FCD и CDM .

Решение. а) Углы ACF и DCE являются вертикальными, углы FCD и CDM — односторонними, углы ACF и ACE — смежными, углы DCF и NDC — накрест лежащими, углы ACF и CDM — соответственными. Поэтому таблицу нужно заполнить так:

А	Б	В	Г	Д
2	3	1	5	4

б) Углы CDM и NDC являются смежными, поэтому их сумма равна 180° . Из условия следует, что $3\angle NDC = 180^\circ$, откуда $\angle NDC = 60^\circ$, и, значит, $\angle CDM = 120^\circ$.

в) Угол между биссектрисами углов CDM и NDC равен сумме половин этих углов. Поскольку сумма двух смежных углов равна 180° , то сумма половин этих углов будет равна 90° (рис. 67).

г) Сумма односторонних углов FCD и CDM равна 180° , а сумма половин этих углов будет равна 90° . То есть если биссектрисы этих углов пересекаются в точке P , то сумма углов PDC и PCD будет равна 90° , поэтому и искомый угол CPD будет равен 90° (рис. 68).

Ответ: а) 23 154; б) 120; в) 90; г) 90.

Пример 2. На отрезке AB отмечена точка M , а на отрезке AM — точка P . Найдите длину отрезка AB , если $AM = 7$, $PM = 3$, $PB = 10$.

Решение. Поскольку $AM = 7$, $PM = 3$, то $AP = 4$. Поскольку $PB = 10$, $PM = 3$, то $MB = 7$ (рис. 69). Значит, $AB = AP + PM + MB = 4 + 3 + 7 = 14$.

Ответ: 14.

Пример 3. На отрезке AB отмечена точка M , а на отрезке AM — точка P . Найдите отношение длины отрезка AP к длине отрезка PB , если $AP : PM = 3 : 2$, $PM : MB = 3 : 7$.

Решение. В каждом из двух данных отношений участвует отрезок PM . Выберем обозначение для его длины так, чтобы она была кратна и 2, и 3, т. е. положим $PM = 6x$. Тогда из условия задачи следует, что $AP = 9x$, $MB = 14x$ (рис. 70). Поэтому $AP : PB = 9x : 20x = 0,45$.

Ответ: 0,45.

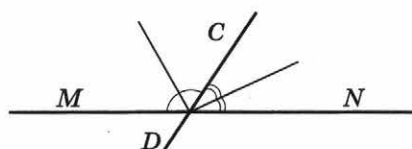


Рис. 67

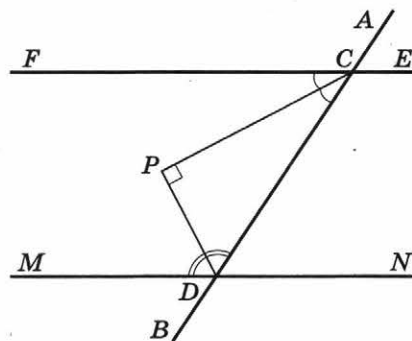


Рис. 68

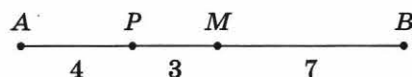


Рис. 69

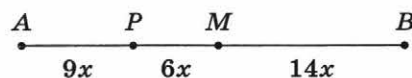


Рис. 70

Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

- сумма углов треугольника равна 180° ;
- внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной в треугольник окружности);
- серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной около треугольника окружности);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника;
- средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Важным частным случаем треугольника является равнобедренный треугольник, которому и посвящены два этих урока. В таком треугольнике углы при основании равны, а высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой, поэтому на ней и находятся центры вписанной и описанной окружностей.

Частный случай равнобедренного треугольника — равносторонний треугольник. В нём каждая высота является медианой и биссектрисой, поэтому центры вписанной и описанной окружностей совпадают и $R = 2r$.

Некоторые задания по планиметрии ОГЭ и ЕГЭ по математике представляют собой задачи на вычисление длин, площадей и углов по данным чертежам на клетчатой бумаге (сетке). Бумага в клетку играет в данном случае роль своего рода «помощника условия», позволяя найти длины отрезков, расположенных на линиях сетки, а затем с их помощью вычислить, например, длины других отрезков или площади плоских фигур.

Пример 1. Найдите угол C треугольника ABC , если $AB = BC$, а внешний угол при вершине B равен 56° . Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних, не смежных с ним углов. Поэтому сумма углов при основании данного равнобедренного треугольника равна 56° , а каждый из них равен половине этой величины, т. е. 28° .

Ответ: 28.

Пример 2. Найдите периметр равностороннего треугольника, если одна из его средних линий равна 6 см. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Поскольку все стороны равностороннего треугольника равны и каждая из них вдвое больше его средней линии, то длина стороны данного равностороннего треугольника будет равна 12 см, а его периметр — 36 см.

Ответ: 36.

Пример 3. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к его основанию, если боковые стороны треугольника равны 5 см, а основание равно 6 см. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является его медианой и, следовательно, делит основание пополам (рис. 71). Поэтому длину высоты можно найти как длину катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 5, а второй катет равен 3. Полу-

чим, что искомая длина равна $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

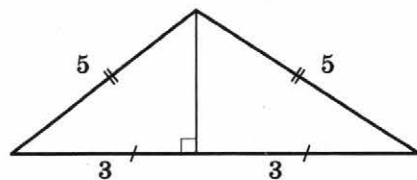


Рис. 71

Пример 4. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 14$, высота CH равна 7. Найдите синус угла ACB .

Решение. Поскольку $\angle ACB = \angle CAB$ (рис. 72), то и синусы этих углов равны:

$$\sin \angle CAB = \sin \angle ACB = \frac{CH}{AC} = \frac{7}{14} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

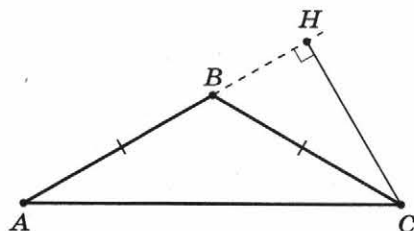


Рис. 72

Занятие 49. Прямоугольный треугольник

Среди всех треугольников особое место занимает прямоугольный треугольник. В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику. Кроме того, для прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора, а синус, косинус или тангенс его острого угла можно найти как отношение катета к гипотенузе или катета к катету. Таким образом, для прямоугольного треугольника (рис. 73) справедливы следующие основные формулы:

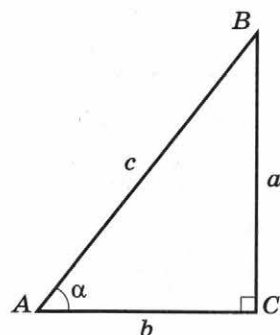


Рис. 73

- $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);
- $S = \frac{1}{2}ab$;
- $R = \frac{c}{2}$ (т. е. центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы);
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.

Пример 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12, а гипотенуза равна 13. Найдите второй катет этого треугольника.

Решение. При решении этой задачи можно обойтись без рисунка. Из теоремы Пифагора следует, что второй катет этого треугольника равен $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

Ответ: 5.

Пример 2. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника образует с его гипотенузой угол 46° . Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC , ACB — его меньший угол, а биссектриса угла ABC пересекает гипотенузу в точке M (рис. 74).

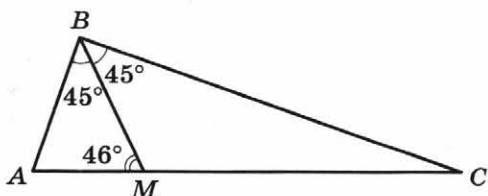


Рис. 74

Тогда угол $BMA = 46^\circ$. Поскольку этот угол — внешний угол треугольника BMC , он равен сумме углов MBC и MCB . Таким образом, $\angle MCB = \angle AMB - \angle MBC = 46^\circ - 45^\circ = 1^\circ$.

Ответ: 1.

Пример 3. Высота BH прямого угла прямоугольного треугольника ABC делит его гипотенузу на отрезки $AH = 3$ и $CH = 12$. Найдите длину этой высоты.

Решение. Обозначим острые углы A и C данного треугольника через α и γ соответственно (рис. 75). Так как эти углы дополняют друг друга до 90° , то и $\angle ABH = \gamma$, $\angle CBH = \alpha$. Для решения задачи можно воспользоваться подобием

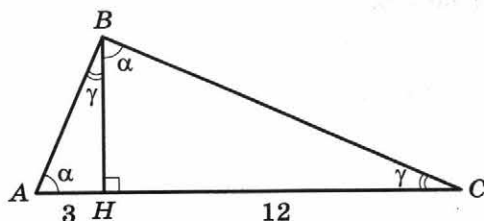


Рис. 75

треугольников ABH и BCH , откуда $\frac{BH}{CH} = \frac{AH}{BH}$, либо тригонометрическими функци-

ями острых углов прямоугольного треугольника: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{CH}{BH}$. В любом случае получаем, что $BH^2 = AH \cdot CH$ (квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу), откуда $BH^2 = 3 \cdot 12 = 36$ и $BH = 6$.

Ответ: 6.

Пример 4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{5}{13}$, $AC = 12$. Найдите BC .

Решение. Задачу можно решить несколькими способами, например так. Поскольку $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$, можно обозначить $BC = 5x$, $AB = 13x$. По теореме Пифагора $(5x)^2 + 12^2 = (13x)^2$, откуда $x = 1$ и, следовательно, $BC = 5$.

Ответ: 5.

Занятие 50. Произвольный треугольник

Пусть a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь. Справедливы следующие формулы:

- $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ — теорема синусов;
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ — теорема косинусов;
- $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ — следствие теоремы косинусов.

Пример 1. Сумма длин средних линий треугольника равна 14. Найдите периметр этого треугольника.

Решение. Поскольку сторона треугольника вдвое больше параллельной ей средней линии, то и сумма длин сторон треугольника, т. е. его периметр, также будет вдвое больше суммы длин средних линий этого треугольника. Поэтому искомый периметр равен 28.

Ответ: 28.

Пример 2. Один из углов треугольника равен среднему арифметическому двух других его углов. Найдите этот угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть α, β, γ — углы данного треугольника и $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Тогда $\beta + \gamma = 2\alpha$. Сумма углов треугольника равна 180° , поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и, следовательно, $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, т. е. $3\alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 60.

Пример 3. В треугольнике ABC (рис. 76) AD — биссектриса, угол C равен 104° , угол CAD равен 5° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

Решение. Поскольку AD — биссектриса угла A , то он вдвое больше угла CAD , т. е. равен 10° . Но тогда $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 10^\circ - 104^\circ = 66^\circ$.

Ответ: 66.

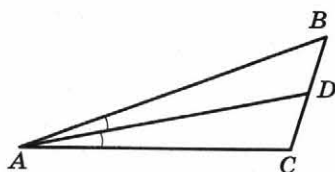


Рис. 76

Пример 4. В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

Решение. Поскольку в четырёхугольнике $ADOE$ (рис. 77) два угла прямые, то сумма двух других углов равна 180° . Поэтому $\angle DOE = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

Ответ: 124.

Пример 5. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC равны соответственно $2\sqrt{3}, 4$ и 2 . Найдите величину угла C . Ответ дайте в градусах.

Решение. Воспользуемся следствием теоремы косинусов: $\cos \angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{2^2 + 4^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$. Значит,

$\angle C = 60^\circ$.

Ответ: 60.

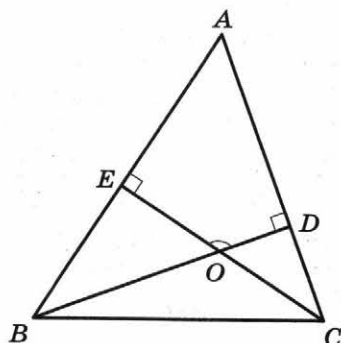


Рис. 77

Пример 6. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние AH от точки A до прямой l равно 12 см, а расстояние BQ от точки B до прямой l равно 4 см. Найдите расстояние MP от середины M отрезка AB до прямой l . Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Продолжим отрезок MP до пересечения с отрезком BH в точке N (рис. 78). Тогда $MN = \frac{1}{2}AH = 6$ (как средняя линия треугольника ABH), $PN = \frac{1}{2}BQ = 2$ (как средняя линия треугольника BQH). Следовательно, $MP = MN - PN = 6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

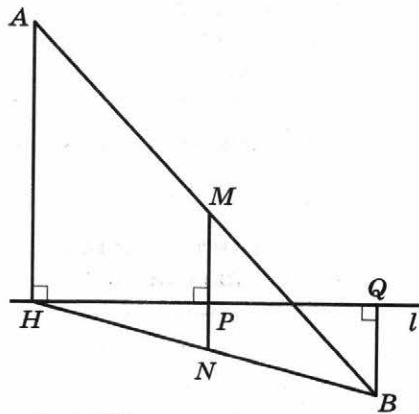


Рис. 78

Занятие 51. Площадь треугольника

Если a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы,

r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь, то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \bullet S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; & \bullet S &= \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}bcsin\alpha = \frac{1}{2}acsin\beta; \\ \bullet S &= \frac{abc}{4R}; & \bullet S &= pr; \\ \bullet S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику.

Пример 1. Стороны треугольника равны 10, 10 и 12. Найдите его площадь.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 79), у которого $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Этот треугольник равнобедренный, поэтому его высота BH является его медианой, т. е. $AH = HC = 6$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABH , найдём катет BH . Получим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Площадь S треугольника равна половине произведения его основания на высоту, проведённую к этому основанию, поэтому $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

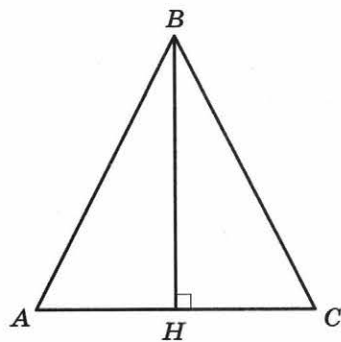


Рис. 79

Пример 2. В треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 135° , $AB = BC = 3$ (рис. 80). Найдите площадь треугольника ABC .

Решение. Из условия следует, что угол A треугольника ABC равен 45° . Поскольку $AB = BC$, треугольник ABC — равнобедренный, а значит, угол C также равен 45° . Следовательно, угол B равен $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, т. е. треугольник ABC прямоугольный и его площадь равна половине произведения катетов, т. е. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$.

Ответ: 4,5.

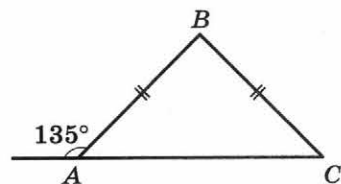


Рис. 80

Пример 3. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение. Проведём $MT \parallel AP$, точка T принадлежит BC . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BM и $TP = BP$ (рис. 81). Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK , которая, в свою очередь, равна площади треугольника AMK . Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK . Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S$, $S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}$, $S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5$.

Ответ: 3 : 5.

Пример 4. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K , длина стороны AC вдвое больше длины стороны AB . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC .

Решение. Пусть $AM = MC = 3x$ (рис. 82). Тогда $AB = 2x$. Так как AK — биссектриса треугольника ABM , то $BK : KM = AB : AM = 2 : 3$, а так как AP — биссектриса треугольника ABC , то $BP : PC = AB : AC = 1 : 3$. Обозначим площадь треугольника BKP через S . Тогда площадь треугольника KPC , имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $3S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $4S$, а площадь треугольника CMK равна $6S$ и равна площади треугольника AMK . Тогда площадь треугольника ABK равна $4S$. Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 3S$, $S_{CMK} = 6S = S_{AMK}$, $S_{ABK} = 4S$. Значит, $S_{ABK} : S_{ABC} = 4S : 20S = 1 : 5$.

Ответ: 1 : 5.

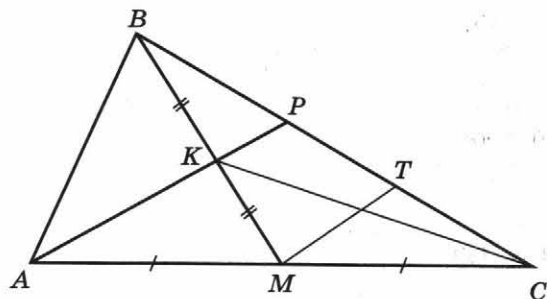


Рис. 81

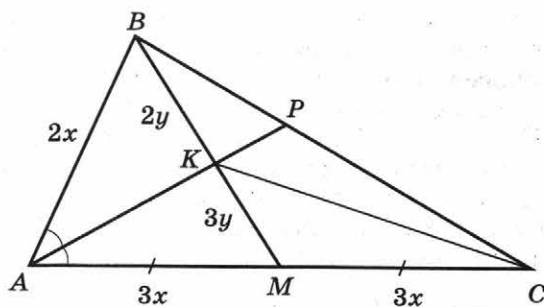


Рис. 82

Занятие 52. Параллелограмм. Площадь параллелограмма

Приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

- противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
- сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна 180° ;

- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a , h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма: $S = ah_a = bh_b$; $S = ab \sin \gamma$.

Кроме того, для параллелограмма, разумеется, справедлива и формула площади произвольного выпуклого четырёхугольника: если d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними, то площадь S этого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей четырёхугольника на синус угла между ними, т. е. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$.

Пример 1. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 130° и 40° . Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC = 130^\circ$, $\angle CAD = 40^\circ$ (рис. 83). Тогда $\angle BAD = \angle BCD = 130^\circ + 40^\circ = 170^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$. Значит, меньший угол параллелограмма равен 10° .

Ответ: 10.

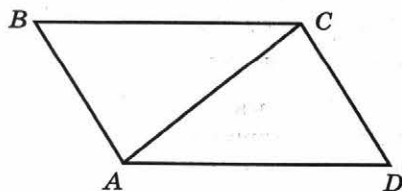


Рис. 83

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый и $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

Решение. $\sin A = \frac{3}{5}$ и угол A — острый, значит, $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$, а $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$. Углы A и B прилежат к одной стороне параллелограмма, поэтому их сумма равна 180° . Но тогда $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle A) = -\operatorname{tg} A = -0,75$.

Ответ: $-0,75$.

Пример 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = 17$, $AD = 15$, $BD = 8$.

Решение. Задачу можно решать разными способами. По следствию теоремы косинусов для треугольника ABD можно найти косинус угла B , затем его синус, после чего вычислить площадь параллелограмма как произведение двух сторон на синус угла между ними. Можно заметить, что $17^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, и, значит, $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABD — прямоугольный с прямым углом D , т. е. диагональ BD параллелограмма является его высотой (рис. 84). Поэтому площадь параллелограмма равна $S = AD \cdot BD = 15 \cdot 8 = 120$.

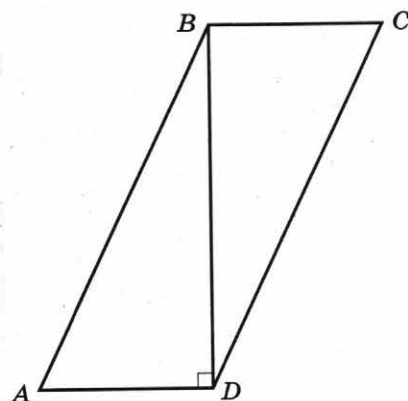


Рис. 84

Ответ: 120.

Пример 4. Стороны параллелограмма равны 12 и 20, а одна из высот равна 3. Найдите площадь параллелограмма, если известно, что другая его высота меньше 3.

Решение. Пусть h — вторая высота параллелограмма, S — его площадь. Тогда либо $S = 12h = 20 \cdot 3 = 60$, откуда $h = 5 > 3$, либо $S = 20h = 12 \cdot 3 = 36$, откуда $h = 1,8 < 3$. Условию задачи удовлетворяет только $h = 1,8$, поэтому $S = 36$.

Ответ: 36.

Занятие 53. Прямоугольник, квадрат, ромб, их площади

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

- диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны.

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b , т. е. $S = ab$. Площадь квадрата S равна квадрату его стороны a , т. е. $S = a^2$. Для вычисления площадей прямоугольника и ромба можно использовать формулу площади выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из формулы следует, что площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Не в каждый параллелограмм можно вписать окружность, и не для каждого параллелограмма существует описанная окружность. Описать окружность можно только около прямоугольника (и, следовательно, квадрата); её центром будет точка пересечения диагоналей прямоугольника. Вписать окружность можно только в ромб (и, следовательно, в квадрат); её центром будет точка пересечения диагоналей ромба.

Пример 1. Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол 10° . Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

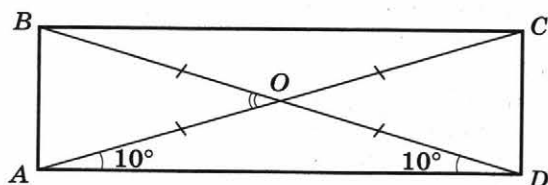


Рис. 85

Решение. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей и $\angle CAD = 10^\circ$ (рис. 85). Поскольку диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то треугольник AOD — равнобедренный, причём $\angle ODA = \angle OAD = 10^\circ$. Значит, $\angle AOD$ тупой и не может быть углом между прямыми (напомним, что угол между двумя прямыми — меньший из вертикальных углов, образуемых при их пересечении, и не превосходит 90°). Поэтому искомый угол равен внешнему углу треугольника AOD (например, углу AOB) и, значит, равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, т. е. $\angle ODA + \angle OAD = 20^\circ$.

Ответ: 20.

Пример 2. В ромбе $ABCD$ угол A равен 40° . Из вершины B проведена высота BH к стороне AD . Найдите угол HBD . Ответ дайте в градусах.

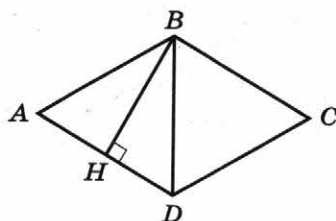


Рис. 86

Решение. В ромбе все стороны равны, значит, треугольник BAD равнобедренный и $\angle ABD = \angle ADB = \frac{(180^\circ - 40^\circ)}{2} = 70^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BHD (рис. 86). Острый угол HDB в нём равен 70° , значит, угол HBD равен 20° .

Ответ: 20.

Пример 3. Диагональ квадрата равна $5\sqrt{2}$. Найдите его площадь.

Решение. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ больше его стороны, значит, сторона этого квадрата равна 5, а площадь квадрата равна 25.

Ответ: 25.

Пример 4. Найдите площадь ромба, если его диагональ равна 8, а сторона равна 5.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, O — точка пересечения его диагоналей, $AB = BC = CD = AD = 5$, $AC = 8$ (рис. 87). Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = 4$, а треугольник AOB — прямоугольный. Из теоре-

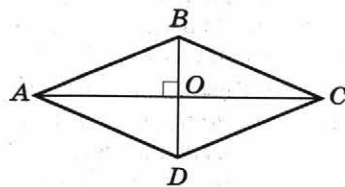


Рис. 87

мы Пифагора для этого треугольника находим $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Тогда $BD = 6$, а площадь S ромба находится как половина произведения его диагоналей: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 24$.

Ответ: 24.

Занятие 54. Трапеция

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции).

Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны).

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Пример 1. Какой из четырёхугольников на рисунке 88 является трапецией? Укажите номер правильного ответа.

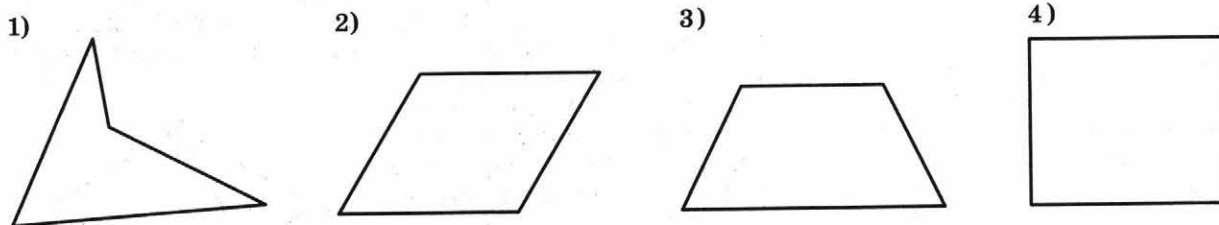


Рис. 88

Решение. Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Поэтому искомым является рисунок 3.

Ответ: 3.

Пример 2. Сумма трёх углов равнобедренной трапеции равна 234° . Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение. Сумма всех углов трапеции равна 360° , значит, её четвёртый угол равен $360^\circ - 234^\circ = 126^\circ$. Угол, прилежащий к той же боковой стороне, что и найденный, равен $180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$. Два оставшихся угла также равны 126° и 54° , поскольку в равнобедренной трапеции углы, прилежащие к основанию, равны. Значит, искомым угол этой трапеции равен 54° .

Ответ: 54.

Пример 3. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, основания которой равны 16 и 8, а меньшая боковая сторона равна 8. Ответ дайте в градусах.

Решение. В любой прямоугольной трапеции есть два прямых угла, один тупой и один острый. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$, в которой $AB = AD = 8$, $CD = 16$ (рис. 89). Искомый угол — угол C . Проведём высоту BH . Она равна AD и равна 8. Тогда $DH = AB = 8$ (как противоположные стороны прямоугольника $ABHD$), и, значит, $CH = CD - DH = 8$. Но тогда в прямоугольном треугольнике BHC катеты равны, значит, это треугольник равнобедренный и прямоугольный и угол C равен 45° .

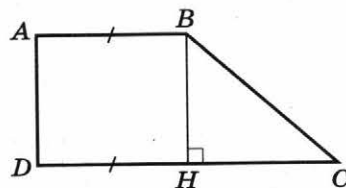


Рис. 89

Ответ: 45.

Пример 4. Основания трапеции относятся как $1 : 2$, а средняя линия равна 15. Найдите большее основание этой трапеции.

Решение. Пусть основания трапеции равны a и b , причём $a = 2b$. Тогда её средняя линия равна $\frac{a+b}{2} = \frac{2b+b}{2} = 1,5b = 15$, откуда $b = 10$. Значит, $a = 20$.

Ответ: 20.

Пример 5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD . Угол ADC равен 60° , $AC = 2\sqrt{3}$ см. Найдите периметр трапеции.

Решение. Пусть K — точка пересечения AB и DC и $BC = CD = x$. Тогда $AD = 2x$ и BC — средняя линия треугольника AKD (рис. 90). Поэтому $KC = CD = x$ и треугольник AKD равносторонний. Следовательно, AC — его медиана и высота. Значит, $AD \sin 60^\circ = AC$, т. е. $2x \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, откуда $x = 2$. Но тогда $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$ и периметр трапеции равен 10 см.

Ответ: 10.

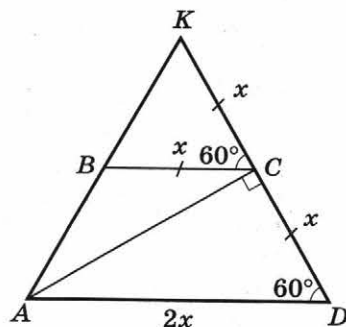


Рис. 90

Занятие 55. Площадь трапеции

Площадь S трапеции с основаниями a и b и высотой h равна произведению полусуммы оснований трапеции (т. е. её средней линии) на её высоту: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$. Разумеется, для вычисления площади трапеции можно использовать и общую формулу площади выпуклого четырёхугольника $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$, где d_1 и d_2 — диагонали выпуклого четырёхугольника, α — угол между ними.

Пример 1. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (рис. 91). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Решение. Основания трапеции равны 9 см и 5 см, высота равна 2 см. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту, т. е. $\frac{9+5}{2} \cdot 2 = 14 \text{ см}^2$.

Ответ: 14.

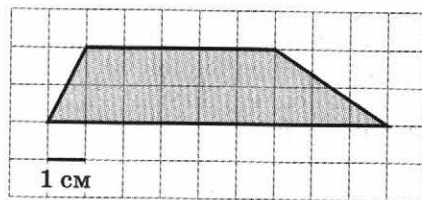


Рис. 91

Пример 2. Основания трапеции относятся как $1 : 6$. Диагональ делит трапецию на два треугольника, площадь меньшего из которых равна 2. Найдите площадь трапеции.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC , считая, что $AD = 6BC$ (рис. 92). Диагональ AC делит трапецию на два треугольника, имеющих общую высоту — высоту трапеции. Значит, их площади относятся как основания, к которым проведена эта высота, т. е. как основания трапеции. При этом треугольник меньшей площади будет иметь меньшее основание. Тогда $S_{ABC} = 2$, $S_{ACD} = 6S_{ABC} = 12$, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2 + 12 = 14$.

Ответ: 14.

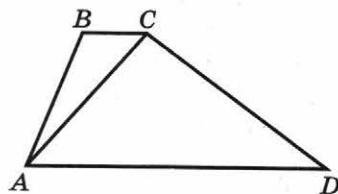


Рис. 92

2. ОКРУЖНОСТИ И КООРДИНАТЫ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

- Занятие 56. Окружность и круг. Длина окружности и площадь круга.
 Занятие 57. Углы, связанные с окружностью. Взаимное расположение окружностей.
 Занятие 58. Окружность, вписанная в треугольник.
 Занятие 59. Окружность, описанная около треугольника.
 Занятие 60. Окружность, вписанная в четырёхугольник.
 Занятие 61. Окружность, описанная около четырёхугольника.
 Занятие 62. Геометрия на клетчатой бумаге и в координатах.
 Занятие 63. Выбор верного утверждения.
 Занятие 64. Практические и прикладные задачи по планиметрии на ОГЭ по математике.
 Занятие 65. Задачи на доказательство. Более сложные задачи.

Общие рекомендации к занятиям

В этом разделе представлены занятия, посвящённые окружности и кругу, понятиям, связанным с окружностью, а также методу координат. Заключительная часть модуля предназначена для подготовки к решению задач с практическим содержанием, задач на выбор верного утверждения из нескольких данных, задач на доказательство и более сложных задач на вычисление.

Занятие 56. Окружность и круг. Длина окружности и площадь круга

Приведём основные факты по теме «Окружность и круг», необходимые для решения соответствующих заданий ОГЭ по математике с кратким ответом:

- центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;
- вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
- касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;
- отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;
- центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;
- длина окружности равна $2\pi r$, где r — радиус окружности;
- площадь круга равна πr^2 , где r — радиус круга.

Пример 1. Окружность пересекает стороны угла с вершиной C , равного 54° , в точках A , E , D и B , как показано на рисунке 93. Найдите угол ADB , если угол EAD равен 32° . Ответ дайте в градусах.

Решение. Рассмотрим треугольник ACD . Угол ADB является для него внешним при вершине D , значит, он равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним:

$$\angle ADB = \angle C + \angle EAD = 54^\circ + 32^\circ = 86^\circ.$$

Ответ: 86.

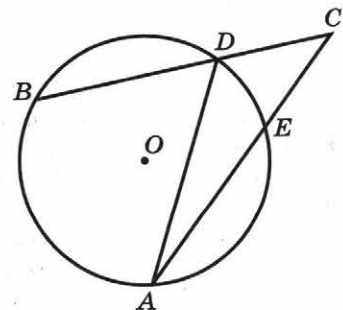


Рис. 93

Пример 2. Точки A , B , C и D , последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $1 : 3 : 5 : 9$ (дуга AB наименьшая). Найдите градусную меру дуги BD . Ответ дайте в градусах.

Решение. Обозначим градусную меру дуги AB через x (рис. 94). Тогда градусные меры дуг BC , CD и DA равны соответственно $3x$, $5x$ и $9x$. В сумме эти четыре дуги составляют окружность. Поэтому $x + 3x + 5x + 9x = 18x = 360$, откуда $x = 20$. Тогда градусная мера дуги $BD = 3x + 5x = 8x = 160$.

Ответ: 160.

Пример 3. Длина окружности равна $4\sqrt{\pi}$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Решение. Обозначим радиус окружности через r . Длина окружности равна $2\pi r = 4\sqrt{\pi}$, откуда $r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Площадь круга радиуса $r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ равна $\pi r^2 = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 4. Расстояние от центра окружности до хорды длиной 16 равно 6. Найдите радиус окружности.

Решение. Пусть AB — данная хорда окружности с центром O (рис. 95). Тогда $OA = OB$ (как радиусы). Поскольку треугольник OAB равнобедренный, его высота OH (которая является также медианой и биссектрисой) и будет расстоянием от центра окружности до хорды. Значит, $OH = 6$, $AH = 8$, а искомый радиус OA находится по теореме Пифагора для треугольника OHA : $OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.

Ответ: 10.

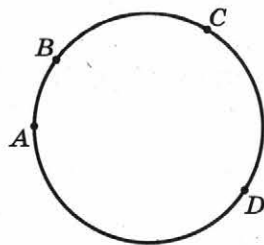


Рис. 94

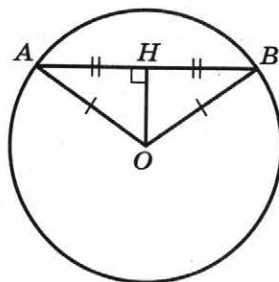


Рис. 95

Занятие 57. Углы, связанные с окружностью. Взаимное расположение окружностей

Напомним основные факты об углах, связанных с окружностью, и о взаимном расположении окружностей:

- центральный угол окружности измеряется дугой окружности, на которую он опирается;
- угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, и измеряется половиной этой дуги;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, высекаемых на окружности любой из пар вертикальных углов, образованных этими секущими;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, высекаемых на окружности любой из пар вертикальных углов, образованных этими секущими;
- касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, проведённому в точку касания;
- отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;
- центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;
- две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей;
- две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей;
- две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей

(внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание).

Пример 1. Центральный угол на 34° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите: а) вписанный угол; б) центральный угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Обозначим градусную меру вписанного угла через x , тогда градусная мера центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол, будет равна $2x$ (рис. 96). По условию $2x = x + 34$, откуда $x = 34$, а $2x = 68$.

Ответ: а) 34; б) 68.

Пример 2. Окружность с центром O_1 и радиусом $\sqrt{2}$ проходит через центр O_2 второй окружности и пересекает эту окружность в точках A и B . Найдите радиус второй окружности, если известно, что точка O_1 лежит на отрезке AB .

Решение. Несмотря на достаточно длинное условие, задача является довольно простой. Обозначим радиус первой окружности через r , радиус второй окружности через R и рассмотрим равнобедренный треугольник AO_2B : $AO_2 = O_2B = R$ (рис. 97). Из условия следует, что $O_1A = O_1B = O_1O_2 = r$, откуда $R = r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Ответ: 2.

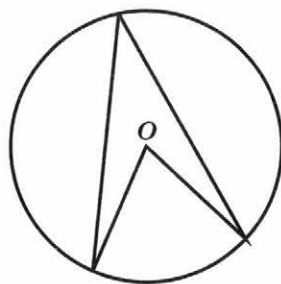


Рис. 96

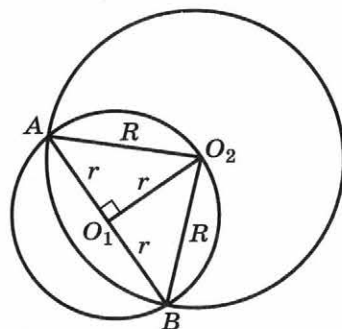


Рис. 97

Занятие 58. Окружность, вписанная в треугольник

Приведём основные факты, связанные с окружностью, вписанной в треугольник:

- в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну;
- центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника;
- радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети его биссектрисы (напомним, что она же является медианой и высотой равно-стороннего треугольника);
- площадь S треугольника равна произведению полупериметра p этого треуголь-ника на радиус r вписанной в него окружности: $S = pr$.

Пример 1. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, одна из медиан которого равна 12.

Решение. В равностороннем треугольнике все медианы равны и являются также биссектрисами и высотами. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен трети его биссектрисы, т. е. 4.

Ответ: 4.

Пример 2. Расстояние от вершины A равнобедренного треугольника ABC до центра O вписанной в него окружности равно 13, а длина основания AC треугольника равна 10. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

Решение. Пусть BH — медиана, высота и биссектриса данного равнобедренного треугольника (рис. 98). Тогда

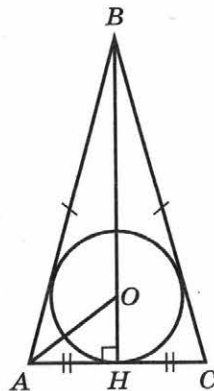


Рис. 98

$O \in BH$, $AO = 13$, $AN = 5$ и искомый радиус OH можно найти по теореме Пифагора для треугольника AON . Получим $OH = \sqrt{AO^2 - AN^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

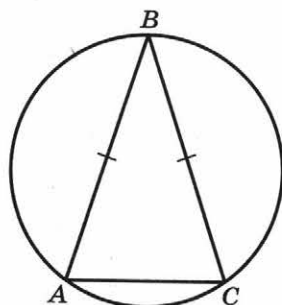
Ответ: 12.

Занятие 59. Окружность, описанная около треугольника

Напомним основные факты, связанные с окружностью, описанной около треугольника:

- около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну;
- центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен двум третям его высоты (напомним, что она же является медианой и биссектрисой равностороннего треугольника);
- центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы, а радиус окружности равен половине гипотенузы;
- площадь S треугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a , b , c — длины сторон треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника.

Пример 1. Найдите угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , если сторона AB треугольника стягивает дугу описанной около него окружности, равную 140° . Ответ дайте в градусах.



Решение. По условию стороны AB и BC равны, значит, они стягивают равные дуги (рис. 99). Но тогда градусная величина дуги AC , не содержащей точки B , будет равна $360^\circ - 2 \cdot 140^\circ = 80^\circ$. Вписанный угол ABC равен половине дуги, на которую он опирается, т. е. равен 40° .

Ответ: 40.

Пример 2. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8. Рис. 99

Решение. Поскольку центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы, а радиус R окружности равен половине гипотенузы, то для решения задачи достаточно с помощью теоремы Пифагора найти длину гипотенузы и поделить её на 2. Получим $R = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Медиана BM треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей сторону BC в её середине. Длина стороны AC равна 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Решение. Пусть K — середина BC . Тогда угол BKM прямой (как вписанный угол, опирающийся на диаметр). Значит, MK является медианой и высотой треугольника BMC (рис. 100). Поэтому треугольник BMC равнобедренный. Следовательно, $MB = MC$ и точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC , радиус которой равен $MC = 0,5AC = 2$ см.

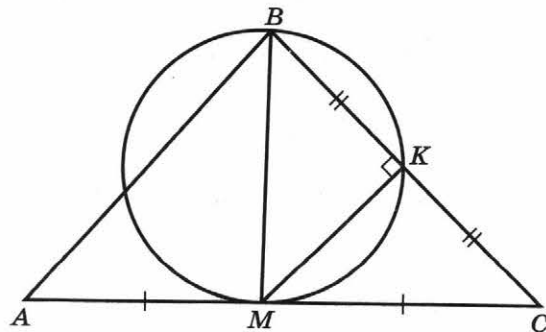


Рис. 100

Ответ: 2.

Занятие 60. Окружность, вписанная в четырёхугольник

Напомним факты, связанные с окружностью, вписанной в четырёхугольник:

- в четырёхугольник можно вписать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы длин противоположных сторон четырёхугольника равны;
- центром окружности, вписанной в четырёхугольник, является точка пересечения биссектрис углов четырёхугольника;
- в параллелограмм можно вписать окружность, только если он является ромбом;
- в ромб (а значит, и в квадрат) можно вписать окружность, центром этой окружности является точка пересечения диагоналей ромба;
- радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата;
- если в трапецию можно вписать окружность, то диаметр этой окружности равен высоте трапеции;
- площадь S четырёхугольника, в который можно вписать окружность (описанного четырёхугольника), равна произведению полупериметра p этого четырёхугольника на радиус r вписанной окружности этого четырёхугольника: $S = pr$.

Пример 1. Найдите периметр трапеции, в которую вписана окружность, если средняя линия трапеции равна 22.

Решение. По свойству описанного четырёхугольника сумма оснований данной трапеции равна сумме её боковых сторон. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, значит, сумма оснований равна 44, как и сумма боковых сторон. Следовательно, периметр трапеции равен $44 + 44 = 88$.

Ответ: 88.

Пример 2. В ромб с диагоналями 12 и 16 вписана окружность. Найдите её радиус.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, $AC = 12$, $BD = 16$. Точка O пересечения диагоналей ромба является центром вписанной в него окружности, $AO = 6$, $BO = 8$. Длину стороны ромба можно найти по теореме Пифагора для треугольника AOB (рис. 101).

Получим $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Пусть окружность касается стороны AB ромба в точке H . Тогда $OH = r$, где r — радиус окружности, вписанной в ромб. Его можно найти, записав двумя способами площадь S треугольника AOB . Получим $S = \frac{1}{2}AB \cdot r = \frac{1}{2}AO \cdot OB$, откуда $r = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Ответ: 4,8.

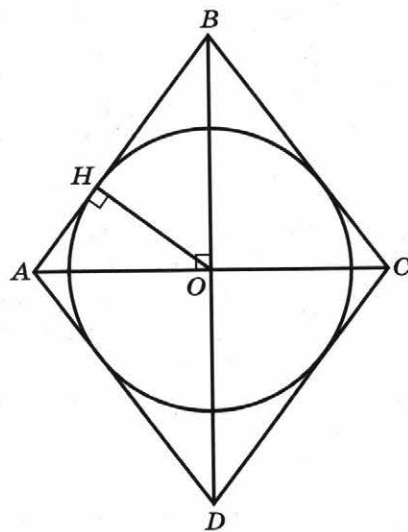


Рис. 101

Занятие 61. Окружность, описанная около четырёхугольника

Приведём вначале основные факты, связанные с окружностью, описанной около четырёхугольника:

- около четырёхугольника можно описать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных углов равны (т. е. каждая из этих сумм равна 180°);
- центром окружности, описанной около четырёхугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;

- около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником;
- около любого прямоугольника (а значит, и квадрата) можно описать окружность, центром этой окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника, а её радиус равен половине диагонали прямоугольника;
- около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобедренная.

Пример 1. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 63° и 76° . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Решение. Поскольку сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180° , то меньший из двух других его углов равен $180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

Ответ: 104.

Пример 2. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, три стороны которой равны 7, а четвёртая равна 14.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = 14$, $AB = BC = CD = 7$. Если продолжить боковые стороны AB и CD трапеции до их пересечения в точке H , получим треугольник AHD , в котором $BC = \frac{1}{2}AD$, т. е. является средней линией треугольника (рис. 102). Значит, $AH = 2AB = 14$, $HD = 2CD = 14$, т. е. треугольник AHD равносторонний. Пусть O — середина основания AD трапеции. Тогда $OA = AB = 7$, $OD = CD = 7$ и каждый из равнобедренных треугольников OAB и ODC является равносторонним, поскольку углы OAB и ODC равны 60° . Значит, точка O удалена от каждой из вершин трапеции на расстояние 7, т. е. является центром описанной около трапеции окружности, радиус которой равен 7.

Ответ: 7.

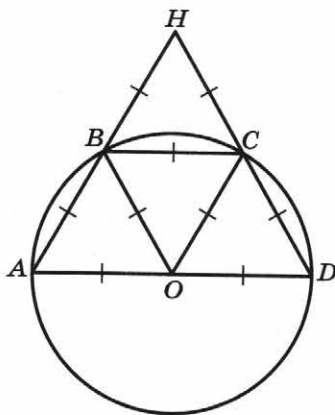


Рис. 102

Занятие 62. Геометрия на клетчатой бумаге

Среди задач по планиметрии особое место в вариантах ОГЭ и ЕГЭ занимают задачи на клетчатой бумаге. В таких задачах данные даются в виде чертежа на бумаге в клетку, причём размеры клеток одинаковы и заданы условием. Это задачи на вычисление углов, расстояний, площадей, связанные со всеми изучаемыми в школьном курсе фигурами. Клетки в таких задачах, по сути, выполняют роль линейки: посчитав по клеточкам необходимые длины и используя известные геометрические факты и свойства, можно довольно быстро получить ответ на вопрос задачи. К этим задачам вплотную примыкают задания на вычисление элементов плоских фигур по готовому чертежу, на котором указаны координаты некоторых точек фигуры (например, вершин треугольника или четырёхугольника), позволяющие после выполнения несложных вычислений ответить на вопрос задачи. При этом, как правило, не требуется применения дополнительных формул метода координат. Отметим, что подобные задачи включались в предыдущие занятия. Занятие 62 посвящено повторению, обобщению и более полному знакомству с такими задачами.

Пример 1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (рис. 103). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Решение. Длина стороны треугольника, расположенной на горизонтальной линии сетки, равна 9 см, а длина проведённой к ней высоты равна 5 см. Поэтому искомая площадь равна $0,5 \cdot 9 \cdot 5 = 22,5 \text{ см}^2$.

Ответ: 22,5.

Пример 2. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см (рис. 103). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Решение. Площадь квадрата равна квадрату его стороны, а квадрат стороны в данном случае можно найти по теореме Пифагора, он будет равен $4^2 + 2^2$, т. е. 20.

Ответ: 20.

Пример 3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 105.

Решение. Основания трапеции равны 2 и 4, а высота равна 4. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(2 + 4) \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12.

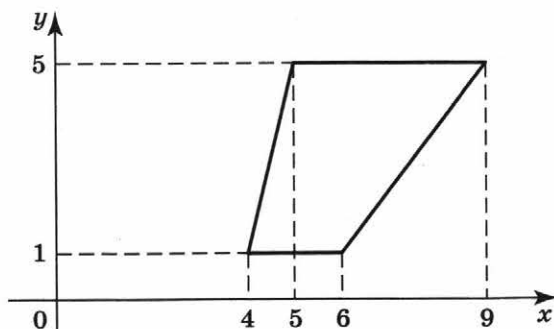


Рис. 105

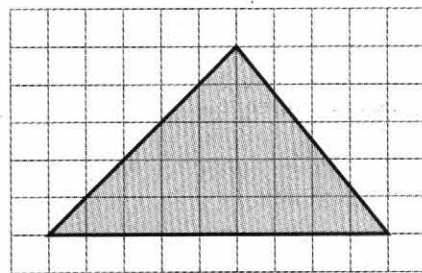


Рис. 103

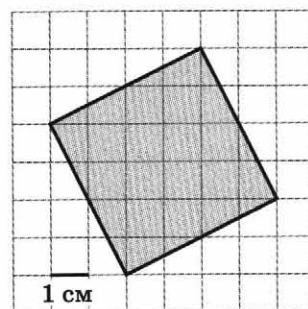


Рис. 104

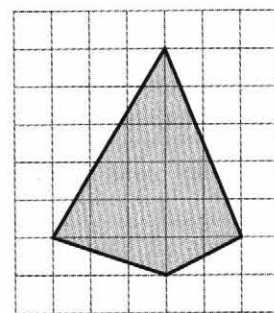


Рис. 106

Пример 4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник (рис. 106). Найдите его площадь.

Решение. Диагонали изображённого на рисунке четырёхугольника взаимно перпендикулярны, их длины равны 5 и 6. Поэтому площадь четырёхугольника будет равна половине произведения его диагоналей: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$.

Ответ: 15.

В некоторых случаях подобные задачи можно решить, разбив данную фигуру на прямоугольные треугольники и квадраты, площади которых легко вычислить (рис. 107).

Если четырёхугольник не является выпуклым или если угол между его диагоналями отличен от прямого, но вершины четырёхугольника являются

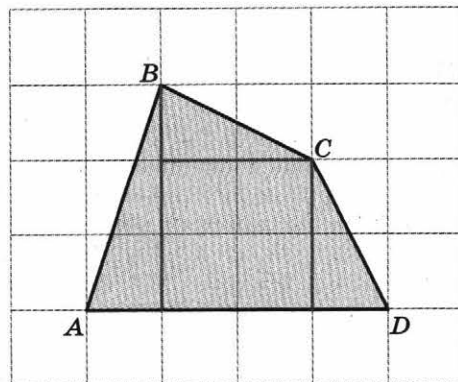


Рис. 107

линиями сетки, можно дополнить его до прямоугольника, проведя через его вершины прямые по линиям сетки. После этого из площади полученного прямоугольника нужно вычесть площади дополняющих фигур, которыми будут прямоугольные треугольники и квадраты. Эту же идею можно использовать и при вычислении площадей треугольников с вершинами в узлах сетки, если стороны треугольника не лежат на линиях сетки (рис. 108).

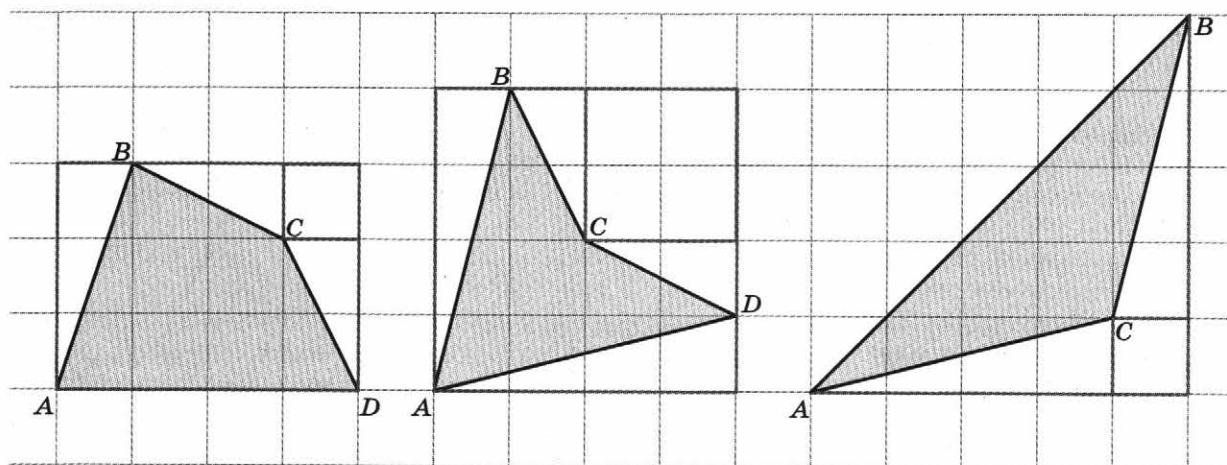


Рис. 108

Пример 5. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 109.

Решение. Применим идею, о которой говорилось выше: дополним данный треугольник до прямоугольника, проведя через его вершины прямые, параллельные координатным осям (рис. 110).

Искомая площадь S равна площади полученного прямоугольника за вычетом площадей прямоугольных треугольников, отмеченных цифрами I, II и III и дополняющих данный треугольник до прямоугольника:

$$S = 4 \cdot 5 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \right) = 20 - 11 = 9.$$

Ответ: 9.

Теперь рассмотрим задачу на применение формулы площади круга.

Пример 6. Найдите площадь кольца, изображённого на рисунке 111, если площадь круга, ограниченного большей окружностью, равна 112.

Решение. Радиусы кругов различаются в два раза: у внутреннего радиус равен 2 клеткам, а у внешнего — 4. Значит, площадь меньшего круга меньше площади большего в 4 раза, т. е. равна $\frac{112}{4} = 28$. Площадь кольца равна разности площадей большего и меньшего кругов: $112 - 28 = 84$.

Ответ: 84.

В заключение рассмотрим задачу на вычисление тангенса угла, изображённого на бумаге в клетку.

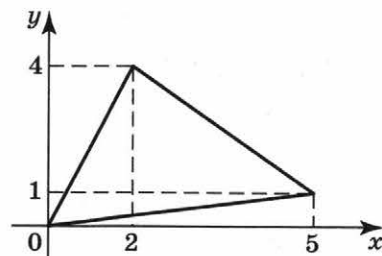


Рис. 109

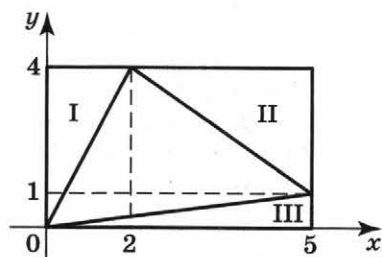


Рис. 110

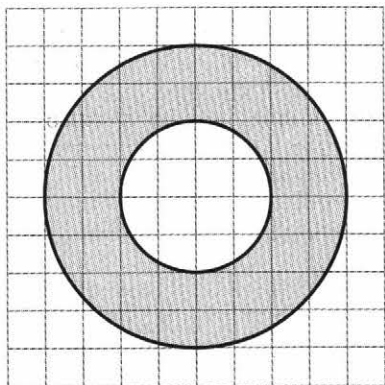


Рис. 111

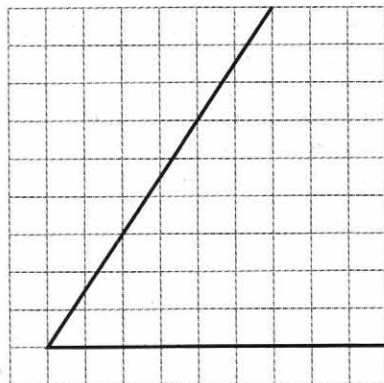


Рис. 112

Пример 7. Найдите тангенс угла, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (рис. 112).

Решение. Если построить прямоугольный треугольник, каждый из катетов которого измеряется целым числом делений сетки, так, чтобы данный угол был острым углом этого треугольника, то решить задачу удастся без труда. Для этого достаточно на наклонной стороне угла выбрать точку, являющуюся пересечением горизонтальной и вертикальной линий сетки (такие точки называют узлами сетки). Выберем одну из них, обозначим её буквой B , опустим из неё перпендикуляр BH на горизонтальную сторону угла, а вершину угла обозначим буквой A (рис. 113).

Искомый тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \angle BAH = \frac{BH}{HA} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

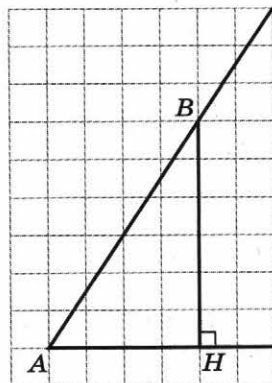


Рис. 113

Занятие 63. Выбор верного утверждения

Это занятие нацелено на отработку навыков решения задач, связанных с выбором одного или нескольких верных утверждений из множества данных. В большинстве случаев правильный ответ на вопрос задачи связан со знанием простейших геометрических фактов и утверждений. Такие задачи позволяют организовать экспресс-повторение большинства определений и теорем школьного курса геометрии с целью быстрой диагностики имеющихся пробелов в знаниях и последующего их устранения.

Пример 1. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих символов номера верных утверждений.

- 1) В любом прямоугольнике диагонали равны.
- 2) Существует прямоугольник, диагонали которого различны.
- 3) В любом ромбе диагонали равны.
- 4) Существует ромб, диагонали которого различны.
- 5) В любой трапеции диагонали равны.
- 6) Существует трапеция, диагонали которой различны.

Решение. По свойству прямоугольника первое утверждение является верным, второе нет. Аналогично из оставшихся утверждений верными являются 4 и 6.

Ответ: 146.

Пример 2. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих символов номера верных утверждений.

- 1) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы острые.
- 2) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого острые.
- 3) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы прямые.
- 4) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого прямые.
- 5) В любом выпуклом четырёхугольнике все углы тупые.
- 6) Существует выпуклый четырёхугольник, все углы которого тупые.

Решение. Первое утверждение не является верным, пример — квадрат. Второе утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх острых углов меньше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. Третье утверждение не является верным, пример — трапеция. Четвёртое утверждение является верным, пример — прямоугольник. Пятое утверждение не является верным, поскольку сумма любых четырёх тупых углов больше 360° — суммы углов выпуклого четырёхугольника. По этой же причине не является верным и шестое утверждение.

Ответ: 4.

Занятие 64. Практические и прикладные задачи по планиметрии на ОГЭ по математике

Это занятие посвящено практическим задачам с геометрической составляющей. Как правило, это текстовые задачи (иногда с рисунком), которые предполагают достаточно очевидную геометрическую интерпретацию и решение полученной несложной планиметрической задачи, связанной с вычислением углов, расстояний, площадей.

Пример 1. В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты — $3 \text{ м} \times 9 \text{ м}$, а размеры второй комнаты — $4 \text{ м} \times 7 \text{ м}$. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь меньшей комнаты в квадратных метрах.

Решение. Площадь первой комнаты равна $3 \cdot 9 = 27 \text{ м}^2$, площадь второй комнаты равна $4 \cdot 7 = 28 \text{ м}^2$.

Ответ: 27.

Пример 2. Проектор P полностью освещает экран AB высотой 70 см, расположенный на расстоянии 200 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран MK высотой 140 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

Решение. Из условия следует, что AB — средняя линия треугольника PMK (рис. 114), поэтому наименьшее расстояние от точки P до экрана MK будет вдвое больше расстояния от точки P до экрана AB , т. е. будет равно 400 см.

Ответ: 400.

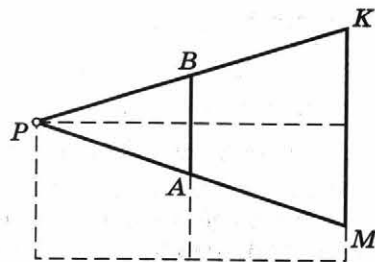


Рис. 114

Пример 3. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 120 м. Затем повернул на север и прошёл 160 м. На каком расстоянии (в метрах) от дома оказался мальчик?

Решение. Для решения задачи достаточно применить теорему Пифагора к изображённому на рисунке 115 прямоугольному треугольнику. Чтобы избежать громоздких вычислений, вспомним, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5. Каждый из катетов данного треугольника в 40 раз больше одного из катетов тре-

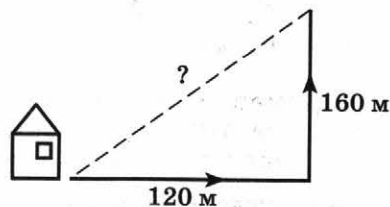


Рис. 115

угольника со сторонами 3, 4 и 5. Поэтому искомая гипотенуза также в 40 раз больше числа 5, т. е. равна 200 м.

Ответ: 200.

Занятие 65. Задачи на доказательство. Более сложные задачи

Это занятие посвящено геометрическим задачам из второй части ОГЭ по математике. Одна из этих задач является задачей на доказательство, другая — задачей на вычисление.

Пример 1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M (рис. 116). Докажите, что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна половине площади параллелограмма $ABCD$.

Доказательство. Проведём через точку M перпендикуляр PQ к параллельным прямым AB и CD (пусть $P \in AB$, $Q \in CD$, рис. 117). Тогда $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2}MP \cdot AB + \frac{1}{2}MQ \cdot CD$. По свойству параллелограмма $AB = CD$. Значит, $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2}MP \cdot AB + \frac{1}{2}MQ \cdot AB$. Вынесем за скобки $\frac{1}{2}AB$ и учтём, что $MP + MQ = PQ$, получим $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2}AB(MP + MQ) = \frac{1}{2}AB \cdot PQ$. Но отрезок PQ является высотой параллелограмма, поэтому $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2}AB \cdot PQ = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 25 см^2 и 16 см^2 . а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны. б) Найдите площадь трапеции.

Решение. а) Площади треугольников ABD и ACD равны (поскольку эти треугольники имеют общее основание AD (рис. 118) и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции). Поэтому $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}$.

б) Треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k . Поэтому $k = \frac{5}{4} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B , то отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{4}$. Значит, $S_{\triangle ABO} = \frac{5}{4}S_{\triangle CBO} = \frac{5}{4} \cdot 16$. Поэтому и $S_{\triangle COD} = 20$. Но тогда $S_{ABCD} = 25 + 16 + 20 + 20 = 81 \text{ см}^2$.

Пример 3. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 8 см, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

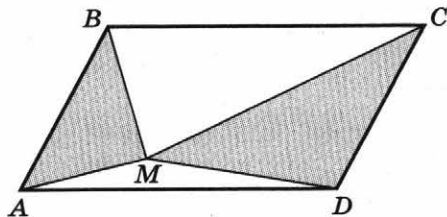


Рис. 116

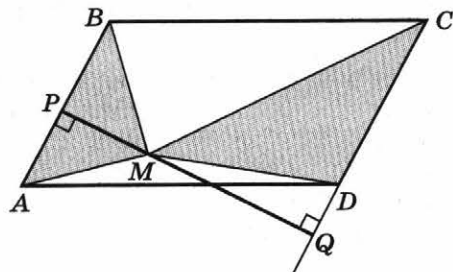


Рис. 117

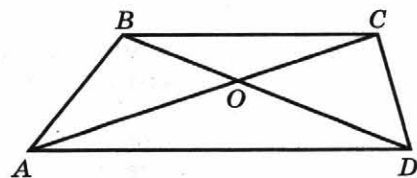


Рис. 118

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC , CBP и ACP через r , r_1 и r_2 соответственно. Треугольники ABC , CBP и ACP подобны по двум углам (рис. 119). Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, т. е. отношению сходственных сторон. Значит, $\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}$, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} BAC = \frac{4}{3}$. Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, откуда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Но $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$, следовательно, но, $r_2 = \frac{3}{4}r_1 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Тогда $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см.

Ответ: 10.

Пример 4. Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом друг друга и касаются некоторой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

Решение. Рассмотрим вначале вспомогательную задачу: найдём расстояние между точками касания с некоторой прямой l двух окружностей радиусов r_1 (с центром O_1) и r_2 (с центром O_2), касающихся друг друга внешним образом (рис. 120), считая, что $r_1 > r_2$.

Поскольку окружности касаются внешним образом, то расстояние O_1O_2 между их центрами равно сумме их радиусов. Длина отрезка O_1P равна разности радиусов, а искомое расстояние ME равно длине отрезка PO_2 , которую можно найти по теореме Пифагора:

$$PO_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Возможны два случая касания искомой окружности с центром O_3 и двух данных окружностей (рис. 121 и рис. 122).

Для случая, изображённого на рисунке 121, получаем $MP = EF = EO_3 + O_3F$, откуда в соответствии с рассмотренной выше вспомогательной задачей (через r_3 обозначен искомый радиус) получаем равенство: $2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_2 r_3} + 2\sqrt{r_3 r_1}$, откуда $\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} = \frac{6}{5}$. Аналогично для случая, изображённого на рисунке 122, находим $2\sqrt{r_1 r_3} = 2\sqrt{r_1 r_2} + 2\sqrt{r_2 r_3}$.

Значит, $\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}} = 6$. Таким образом, $r_3 = \frac{36}{25} = 1,44$ либо $r_3 = 36$.

Ответ: 1,44 или 36.

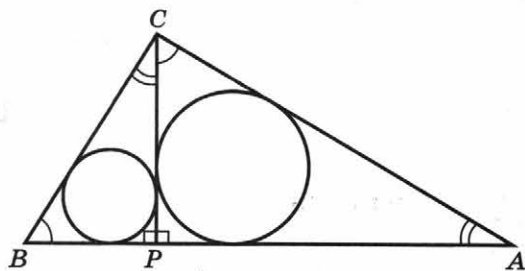


Рис. 119

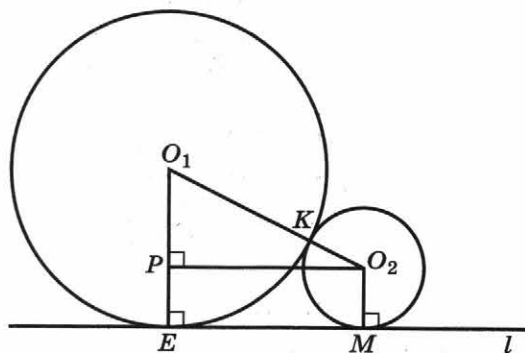


Рис. 120

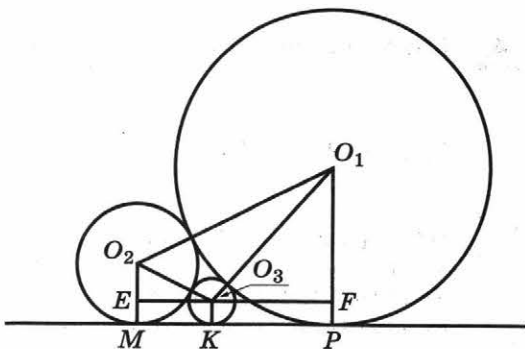


Рис. 121

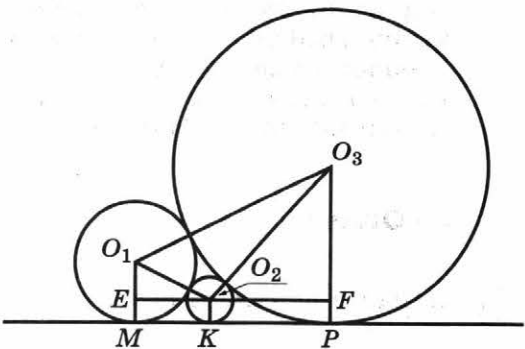


Рис. 122

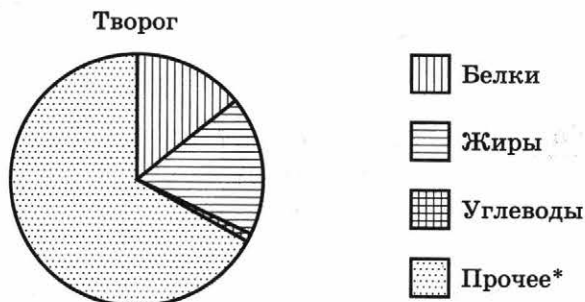
7. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Боря, равен 60 кг. Вес Бори составляет 75 % среднего веса. Сколько килограммов весит Боря?

Ответ:

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в твороге. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание белков.

- 1) 0—10 % 2) 10—20 %
3) 25—35 % 4) 35—45 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.



Ответ:

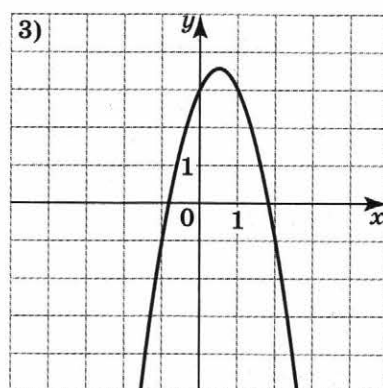
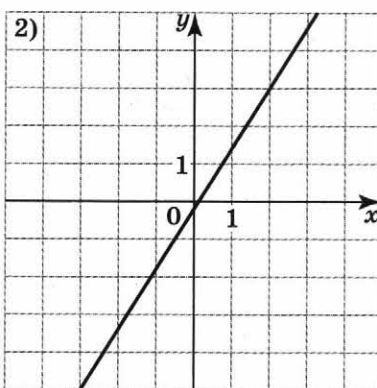
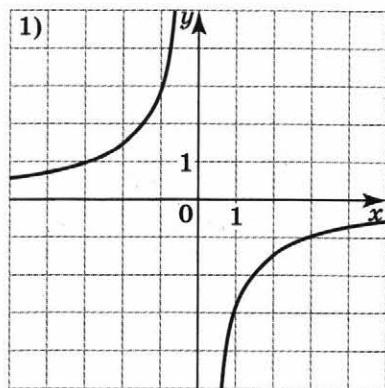
*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества

9. В среднем из 80 карманных фонариков, поступивших в продажу, шесть неисправны. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ:

10. Установите соответствие между функциями и их графиками.

А) $y = -2x^2 + 2x + 3$ Б) $y = -\frac{3}{x}$ В) $y = \frac{5}{3}x - 1$



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: $-7; -4; -1; \dots$. Найдите сумму первых шести её членов.

Ответ:

12. Найдите значение выражения $\frac{a-8x}{a} : \frac{ax-8x^2}{a^2}$ при $a = 27, x = 45$.

Ответ:

- 21.** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5x^2 - 9x = y, \\ 5x - 9 = y. \end{cases}$$

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 22.** Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 23.** Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 24.** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 33$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 1$.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 25.** Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB , AD и CD .

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

- 26.** В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 7 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--	--

Вариант 2

- 1.** Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{18} - \frac{1}{21}}$.

Ответ:

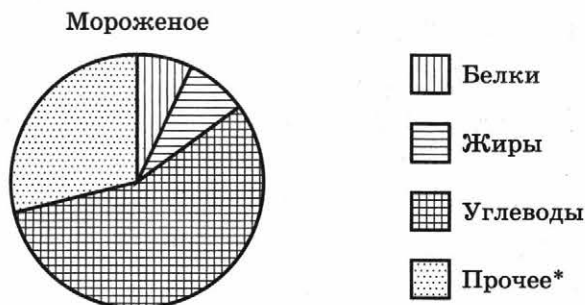
--	--	--	--	--	--	--	--

- 2.** Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 72,5 г.

- 8.** На диаграмме показано содержание питательных веществ в мороженом. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание белков.

- 1) 0—10 % 3) 20—30 %
2) 10—20 % 4) 30—40 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.



Ответ:

--	--	--	--	--	--	--

*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества

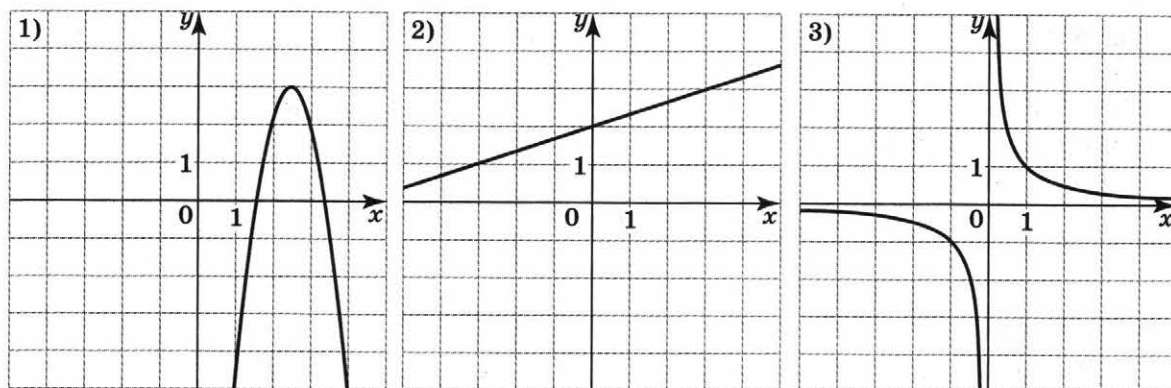
- 9.** В среднем из 150 карманных фонариков, поступивших в продажу, пятнадцать неисправны. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--

- 10.** Установите соответствие между функциями и их графиками.

А) $y = \frac{1}{3}x + 2$ Б) $y = -4x^2 + 20x - 22$ В) $y = \frac{1}{x}$



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

- 11.** Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: $-1; 2; 5; \dots$. Найдите сумму первых пяти её членов.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--

- 12.** Найдите значение выражения $\frac{a+x}{a} : \frac{ax+x^2}{a^2}$ при $a = 56, x = 40$.

Ответ:

--	--	--	--	--	--	--

- 13.** Центробежное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с^{-1}), R — радиус окружности (в м). Пользуясь этой формулой, найдите R , если угловая скорость равна $7,5 \text{ с}^{-1}$, а центробежное ускорение равно $393,75 \text{ м/с}^2$. Ответ дайте в метрах.

Ответ:

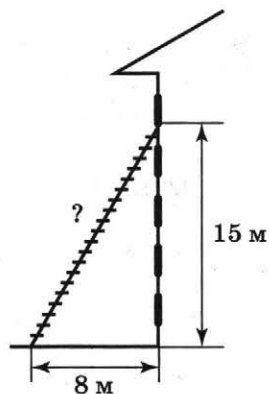
- 14.** Укажите неравенство, которое не имеет решений.

- 1) $x^2 - 3x - 11 < 0$ 2) $x^2 - 3x + 11 < 0$
3) $x^2 - 3x + 11 > 0$ 4) $x^2 - 3x - 11 > 0$

Ответ:

- 15.** Пожарную лестницу приставили к окну, расположенному на высоте 15 м от земли. Нижний конец лестницы отстоит от стены на 8 м. Какова длина лестницы? Ответ дайте в метрах.

Ответ:

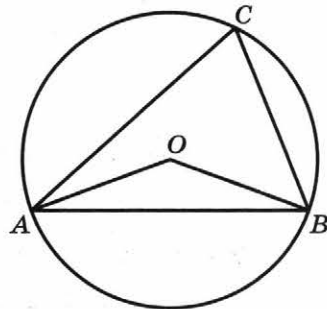


- 16.** В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны, угол ABC равен 126° . Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.

Ответ:

- 17.** Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Найдите угол ACB , если угол AOB равен 173° . Ответ дайте в градусах.

Ответ:

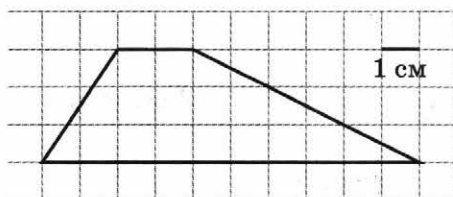


- 18.** Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 20 и 6.

Ответ:

- 19.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.

Ответ:



20. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является ромбом.

2) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .

3) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.

Запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

21. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y. \end{cases}$$

Ответ:

22. Моторная лодка прошла против течения реки 132 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 5 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ:

23. Постройте график функции $y = -1 - \frac{x-4}{x^2-4x}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Ответ:

24. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 50$, $BC = 30$, $CF : DF = 7 : 3$.

Ответ:

25. Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .

Ответ:

26. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC . Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC . Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 6 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ:

Предисловие	3
-------------------	---

МОДУЛЬ «ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ»

Темы занятий	4
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 1. Чтение и анализ данных, представленных в виде таблиц	—
Занятие 2. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков	7
Занятие 3. Чтение и анализ данных, представленных в виде диаграмм	10
Занятие 4. Перевод (конвертация) единиц измерений, сравнение величин, прикидка и оценка соответствия между величинами и их значениями, запись чисел в стандартном виде	12
Занятие 5. Практические задачи на вычисления по данным формулам	13
Занятие 6. Практические арифметические задачи с текстовым условием	14
Занятие 7. Практические арифметические задачи с текстовым условием на проценты, части, доли	15
Занятие 8. Понятие вероятности. Практические задачи на вычисление вероятностей	17

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

1. Вычисления и преобразования

Темы занятий	20
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 9. Арифметические действия с целыми числами	—
Занятие 10. Арифметические действия с обыкновенными дробями	21
Занятие 11. Арифметические действия с десятичными дробями	23
Занятие 12. Арифметические действия с комбинациями десятичных и обыкновенных дробей	23
Занятие 13. Арифметические действия с натуральными степенями	24
Занятие 14. Арифметические действия с целыми степенями	25
Занятие 15. Арифметические действия с корнями	25
Занятие 16. Изображение чисел на числовой прямой, сравнение и оценка	27
Занятие 17. Формулы сокращённого умножения. Преобразование целых алгебраических выражений	28
Занятие 18. Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений	28
Занятие 19. Преобразование иррациональных алгебраических выражений	29
Занятие 20. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия	30
Занятие 21. Числовые последовательности. Геометрическая прогрессия	32

2. Уравнения и системы уравнений

Темы занятий	34
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 22. Линейные уравнения	38
Занятие 23. Системы линейных уравнений	39
Занятие 24. Квадратные уравнения	41
Занятие 25. Системы, содержащие квадратные уравнения	43
Занятие 26. Дробно-рациональные уравнения	44
Занятие 27. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения	—
Занятие 28*. Более сложные уравнения и системы уравнений	45

3. Текстовые задачи

Темы занятий	50
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 29. Задачи на движение. Совместное движение	—
Занятие 30. Задачи на движение. Движение по воде	52
Занятие 31. Задачи на движение. Движение протяжённых тел. Средняя скорость	—
Занятие 32. Задачи на производительность	53
Занятие 33. Задачи на концентрацию, сплавы, смеси	55

4. Неравенства и системы неравенств

Темы занятий	58
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 34*. Общие сведения о неравенствах. Метод интервалов.	—
Занятие 35. Линейные неравенства	66
Занятие 36. Системы линейных неравенств	67
Занятие 37. Квадратные неравенства	69
Занятие 38. Системы, содержащие квадратные неравенства	73
Занятие 39. Простейшие дробно-рациональные неравенства	74
Занятие 40. Системы, содержащие простейшие дробно-рациональные неравенства	75
Занятие 41*. Более сложные рациональные неравенства	76

5. Функция и график функции

Темы занятий	84
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 42. Функция. График функции. Возрастание, убывание, точки максимума, минимума, наибольшие, наименьшие значения функции. Чтение графиков функций	—
Занятие 43. График линейной функции	85
Занятие 44. График квадратичной функции. Парабола	88
Занятие 45. График обратной пропорциональности. Гипербола	91
Занятие 46*. Графики более сложных функций	93

III. МОДУЛЬ «ГЕОМЕТРИЯ»

1. Треугольники и многоугольники

Темы занятий	95
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 47. Прямые, отрезки, углы	—
Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники	97
Занятие 49. Прямоугольный треугольник	98
Занятие 50. Произвольный треугольник	99
Занятие 51. Площадь треугольника	100
Занятие 52. Параллелограмм. Площадь параллелограмма	102
Занятие 53. Прямоугольник, квадрат, ромб, их площади	103
Занятие 54. Трапеция	105
Занятие 55. Площадь трапеции	106

2. Окружности и координаты

Темы занятий	107
Общие рекомендации к занятиям	—
Занятие 56. Окружность и круг. Длина окружности и площадь круга	—
Занятие 57. Углы, связанные с окружностью. Взаимное расположение окружностей	108
Занятие 58. Окружность, вписанная в треугольник	109
Занятие 59. Окружность, описанная около треугольника	110
Занятие 60. Окружность, вписанная в четырёхугольник	111
Занятие 61. Окружность, описанная около четырёхугольника	—
Занятие 62. Геометрия на клетчатой бумаге	112
Занятие 63. Выбор верного утверждения	115
Занятие 64. Практические и прикладные задачи по планиметрии на ОГЭ по математике	116
Занятие 65. Задачи на доказательство. Более сложные задачи	117
Итоговая диагностика	119

ОТВЕТЫ К ИТОГОВОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

Вариант 1. 1. 12. 2. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 140. 6. $-0,4$. 7. 45. 8. 2. 9. 0,925. 10. 312.
11. 3. 12. 0,6. 13. 0,54. 14. 3. 15. 12. 16. 17. 17. 57,5. 18. 30. 19. 4. 20. 1. 21. (1; -4);
(1,8; 0). 22. 16. 23. 3; $\frac{16}{5}$. 24. 28. 26. 720.

Вариант 2. 1. 126. 2. 1. 3. 3. 4. 2. 5. 580. 6. -5 . 7. 79,2. 8. 1. 9. 0,9. 10. 213.
11. 25. 12. 1,4. 13. 7. 14. 2. 15. 17. 16. 27. 17. 86,5. 18. 60. 19. 6. 20. 23. 21. (1; -6);
(2,2; 0). 22. 17. 23. -1 ; $-\frac{5}{4}$. 24. 44. 26. 1320.