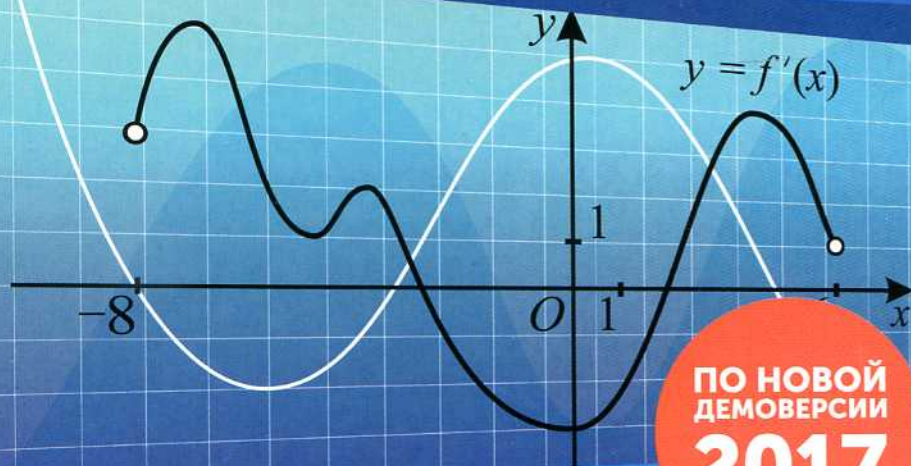


Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К **ЕГЭ-2017**



ПО НОВОЙ
ДЕМОВЕРСИИ

2017

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

40 тренировочных
вариантов



Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2017

Профильный уровень

40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2016

Рецензенты: *А. Н. Тернопол* — доцент кафедры естественно-математического образования ФГОУ АПК и ППРО, г. Москва;
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
А. П. Уваровский — кандидат педагогических наук, заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:

Авилов Н. И., Айвазян А. Ж., Войта Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Кривенко В. М., Кулабухов С. Ю., Мельников Б. Ф., Морох Е. А., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 384 с. — (ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0916-1

Учебно-методическое пособие предназначено для фундаментальной подготовки к профильному уровню ЕГЭ по математике в 2017 году. Книга содержит:

- **40 новых авторских тренировочных тестов**, составленных по проектам демоверсии и спецификации ФИПИ 2017 года профильного уровня ЕГЭ по математике, опубликованным 26.08.2016;
- **решение 10 вариантов тестов;**
- **краткий теоретический справочник.**

Книга позволит выпускникам и абитуриентам получить на ЕГЭ желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи экзамена, до максимально возможного, практически до 100 баллов.

Издание адресовано выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям, методистам.

Оглавление

От авторов	6
------------------	---

Учебно-тренировочные тесты	13
----------------------------------	----

Вариант № 1	13
Вариант № 2	18
Вариант № 3	23
Вариант № 4	28
Вариант № 5	33
Вариант № 6	38
Вариант № 7	43
Вариант № 8	48
Вариант № 9	53
Вариант № 10	58
Вариант № 11	63
Вариант № 12	68
Вариант № 13	73
Вариант № 14	78
Вариант № 15	83
Вариант № 16	88
Вариант № 17	93
Вариант № 18	98
Вариант № 19	103
Вариант № 20	107
Вариант № 21	112
Вариант № 22	117
Вариант № 23	122
Вариант № 24	127
Вариант № 25	132
Вариант № 26	137

Вариант № 27	142
Вариант № 28	147
Вариант № 29	152
Вариант № 30	156
Вариант № 31	161
Вариант № 32	166
Вариант № 33	171
Вариант № 34	176
Вариант № 35	181
Вариант № 36	186
Вариант № 37	191
Вариант № 38	196
Вариант № 39	201
Вариант № 40	206
Решение варианта 1	211
Решение варианта 5	220
Решение варианта 9	229
Решение варианта 13	239
Решение варианта 17	248
Решение варианта 21	257
Решение варианта 25	267
Решение варианта 29	276
Решение варианта 33	287
Решение варианта 37	298

Краткий теоретический справочник307

§ 1. Условные обозначения	307
§ 2. Степени и корни	308
§ 3. Модуль и его свойства	309
§ 4. Прогрессии	310
§ 5. Логарифмы	310
§ 6. Теория вероятностей	311
§ 7. Тригонометрия	312
§ 8. Многочлены и их корни	316
§ 9. Уравнения	320
§ 10. Неравенства	322

§ 11. Функции	324
§ 12. Планиметрия	337
§ 13. Стереометрия	350
Ответы к тестам	363

От авторов

Начиная с 2015 года ЕГЭ по математике разделён на 2 уровня: базовый и профильный. Данное пособие предназначено для фундаментальной подготовки к Единому государственному экзамену по математике **на профильном уровне**. Книга будет полезна учащимся выпускных классов, учителям, а также тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

► Если сдача ЕГЭ по математике нужна только для получения аттестата и по какой-то причине выбран профильный экзамен, то нужно сосредоточиться на выполнении заданий 1–8, образующих первую часть каждого варианта данной книги.

► Если необходим высокий балл на ЕГЭ для поступления на техническую или социологическую специальность, то нужно добиться уверенного выполнения заданий 1–15, а также обратить внимание на задание 17 этой книги.

► Если предполагается продолжение математического образования в вузе или поступление на престижную экономическую специальность (целью являются 90–100 баллов), то необходимо научиться решать все задания данного пособия.

Книга содержит:

- **40 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по проекту спецификации ЕГЭ–2017;
- **решение 10 вариантов теста**;
- **краткий справочник** по элементарной математике, содержащий теоретический материал, достаточный для выполнения всех заданий данного пособия.

Ко всем вариантам даны **ответы**.

Отметим, что варианты тестовых заданий носят парный характер, то есть являются попарно подобными (так, например, подобны 5-й и 6-й варианты, 7-й и 8-й и т. д.). Это позволяет учителю оптимизировать процесс подготовки: целесообразно прорешать с учащимися в классе один из нечётных вариантов, а следующий (чётный) вариант задать на дом.

Варианты в книге располагаются по возрастанию уровня сложности заданий. При этом уровень сложности и темы заданий с кратким ответом соответствуют предлагаемым заданиям открытого банка¹.

¹Доступен на сайте <http://mathege.ru>

Пособие является частью комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемого издательством «Легион».

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»: основные пособия

Пособие	Задания по темам	Варианты ЕГЭ	Теория	Решения	Уровень сложности*
Математика. ЕГЭ-2017. Тематический тренинг. 10–11 классы	+++		++	+	БПВ
Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов		+++	++	+	БПВ
Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Базовый уровень. 40 тренировочных вариантов		+++	++		БПВ
Математика. ЕГЭ. 10–11 классы. Тренажёр: базовый и профильный уровни	+++				Б
Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тригонометрия. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом)	+++				П
Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Неравенства. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом)	+++				П
Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тематические задания. Уравнения, неравенства, системы	+++			+	П
Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом. Профильный уровень	++		++	++	ПВ
Математика. 7–11 классы. Карманный справочник			++		
Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ	+		++	++	БПВ

*Б — базовый, П — повышенный, В — высокий уровень сложности.

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. ЕГЭ-2017. Тематический тренинг. 10–11 классы.
Сборник тренировочных заданий, сгруппированных по темам и предназначенных для подготовки к базовому и профильному уровню ЕГЭ.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года.
Настоящая книга.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Базовый уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года.
Сборник авторских тренировочных вариантов, составленных по проекту спецификации ЕГЭ по математике базового уровня (опубликованному 26.08.2016), дополненный теоретическим справочником и сборником задач для подготовки к экзамену.
- Математика. ЕГЭ. 10–11 классы. Тренажёр: базовый и профильный уровни.
Пособие для подготовки к решению заданий ЕГЭ с кратким ответом в форме тренажёра.
- Математика. 7–11 классы. Карманный справочник.
Пособие содержит необходимый справочный материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также к различным формам промежуточного контроля по алгебре и геометрии в 7–11 классах.
- Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ.
Пособие содержит теоретический материал, подкреплённый примерами его использования при решении заданий ЕГЭ.
- Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тематические задания. Уравнения, неравенства, системы.
Пособие содержит задания по уравнениям и неравенствам, традиционно включаемым в число заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.

- Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тригонометрия. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом).
Предлагаемое пособие содержит около 300 задач по тригонометрии, предназначенных для подготовки к выполнению первого из заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.
- Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Неравенства. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом).
Предлагаемое пособие содержит большое количество заданий по решению неравенств, предназначенных для подготовки к выполнению соответствующего задания ЕГЭ с развёрнутым ответом.
- Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом. Профильный уровень.
Самоучитель и задачник для подготовки к решению неравенств, экономически ориентированных задач, заданий с параметром, исследовательских задач, предлагаемых на ЕГЭ.

Дополнением к комплексу послужат следующие пособия:

- ▶ Математика. 11-й класс. Повторение материала средней школы и подготовка к итоговой аттестации. Интенсивный курс для учителей и обучающихся.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий повышенного и высокого уровней сложности. Решения и комментарии.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 16. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 17. Решение неравенств с одной переменной.
- ▶ Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач.
- ▶ Математика. ЕГЭ. Социально-экономические задачи: теория, задания, примеры решений. 10-11 классы.

Методика работы с основными пособиями комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Подготовку к ЕГЭ следует начинать с пособий «Математика. ЕГЭ-2017. Тематический тренинг. 10–11 классы» и «Математика. ЕГЭ. 10–11 классы. Тренажёр: базовый и профильный уровни». Оба этих пособия могут использоваться в течение двух учебных лет (10 и 11 классы), а способ организации процесса обучения зависит от преподавателя. Например, используя тренажёр, учащиеся могут выполнить на уроке большое количество заданий базового уровня сложности по определённой теме или по различным темам. Книгу «Математика. ЕГЭ-2017. Тематический тренинг. 10–11 классы» можно использовать для ознакомления с методами решения задач базового, повышенного и высокого уровня сложности, также для организации диагностики и контроля (самоконтроля). Её использование целесообразно не только на уроках, но и при самоподготовке.

Сборник «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года» следует использовать после освоения большей части материала из рассмотренных выше пособий. Предлагаемые в нём тренировочные варианты в формате профильного уровня ЕГЭ могут использоваться по принципу разбора варианта в классе и оставления парного варианта школьникам в качестве домашней работы, а могут — и для проведения репетиции экзамена или организации диагностики и контроля.

Для подготовки к сдаче базового уровня ЕГЭ следует использовать книгу «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Базовый уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года». Методика работы с этим сборником тестов та же, что и с рассмотренным выше сборником вариантов для профильного уровня ЕГЭ.

Пособия «Математика. 7–11 классы. Карманный справочник» и «Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ» удобно использовать для нахождения необходимого теоретического материала в период подготовки к ЕГЭ. Большой справочник можно, кроме того, использовать для организации повторения теории: по прилагаемым там примерам заданий можно определить важность запоминания тех или иных формул и теорем для успешной сдачи экзамена.

Следующие пособия предназначены для подготовки к заданиям с развёрнутым ответом. Начинать здесь следует с двух тренажёров: «Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тригонометрия. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом)» и «Математика. ЕГЭ. Профильный уровень.

Неравенства. Тренажёр (задание с развёрнутым ответом)». Оба этих тренажёра построены по принципу от простого — к сложному, и их следует использовать не только для тренировки и контроля, но и при изучении соответствующих тем. Например, тренажёр по тригонометрии можно использовать в качестве тренировочной тетради на уроках алгебры (математики), посвящённых изучению тригонометрии.

Книгу «Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Тематические задания. Уравнения, неравенства, системы» рекомендуется использовать совместно с тренажёрами для диагностических и контрольных работ либо при выдаче учащимся заданий на дом.

К пособию «Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом. Профильный уровень» следует переходить при работе с наиболее подготовленными учащимися, претендующими на высокий балл ЕГЭ. Рассмотренные в нём темы можно как отдавать на самостоятельное изучение отдельным школьникам, так и применять в классах или школах с углублённым изучением математики.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства
<http://f.legionr.ru>.

Замечания и пожелания можно направлять по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550 или на e-mail: legionrus@legionrus.com.

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом, 7 заданий повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в бланк ответа №1 в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Учебно-тренировочные тесты

Вариант № 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Стоимость билета в музей составляет 500 рублей, а для льготной категории посетителей — 60% от полной стоимости. Группа состоит из 8 человек, двое из которых имеют право на приобретение льготного билета. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: _____.

2. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м.

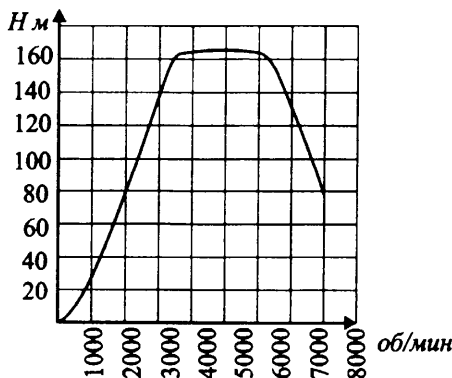


Рис. 1.

Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 80 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (см. рис. 1)?

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол (см. рис. 2). Найдите тангенс этого угла.

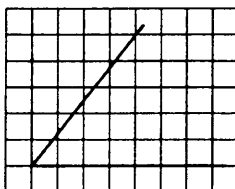


Рис. 2.

Ответ: _____.

4. В сборнике билетов по физике всего 35 билетов, в 14 из них встречается вопрос по теме «Механика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Механика».

Ответ: _____.

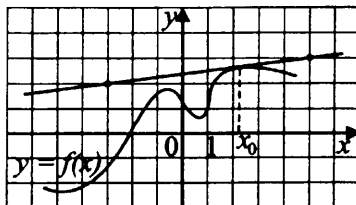
5. Найдите корень уравнения $\frac{5}{11}x = 11\frac{4}{11}$.

Ответ: _____.

6. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 16 и 22, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45° .

Ответ: _____.

7. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

Рис. 3.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 4 (все двугранные углы прямые).

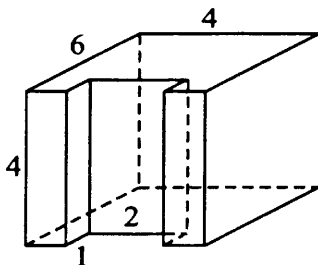


Рис. 4.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2 - 16^2}$.

Ответ: _____.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от -4 до 4 . Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность.

Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 48.

Ответ: _____.

11. Из двух городов, расстояние между которыми равно 544 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 64 км/ч и 72 км/ч?

Ответ: _____.

12. Рассмотрите функцию $y = \sqrt{x^2 + 40x + 625}$ и найдите её наименьшее значение.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3 = 2\sin^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны оснований AB и BC равны соответственно 8 и 5, а боковое ребро AA_1 равно 4. На ребре $A_1 B_1$ отмечена точка K , а на луче BC — точка F , причём $A_1 K = KB_1$ и $BF = AB$. Плоскость AKF пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке P .

а) Докажите, что $B_1 P : PC_1 = 4 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью AKF .

15. Решите неравенство $\frac{\log_2(x+5)}{2^{x+2} - 4^x - 3} \leq \log_2(x+5)$.

16. В треугольнике ABC с прямым углом C MN — средняя линия, параллельная стороне AC . Биссектриса угла A пересекает луч MN в точке K .

а) Докажите, что $\triangle BKC \sim \triangle AMK$.

б) Найдите отношение $S_{BKC} : S_{AMK}$, если $\cos \angle BAC = 0,6$.

17. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на сумму S млн рублей, где S — целое число, на 4 года. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (млн руб)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , чтобы общая сумма выплат была больше 20 млн рублей.

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3^{2x} - 5a} = 3^x - a$ имеет единственный корень.

19. На доске записаны числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... 18. За один ход разрешается стереть произвольно три числа, сумма которых меньше 32 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример последовательных трёх ходов.
- б) Можно ли сделать 5 ходов?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Стоимость билета в музей составляет 400 рублей, а для льготной категории посетителей — 60% от полной стоимости. Группа состоит из 10 человек, 5 из которых имеют право на приобретение льготного билета. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: _____.

2. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 40 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (см. рис. 5)?

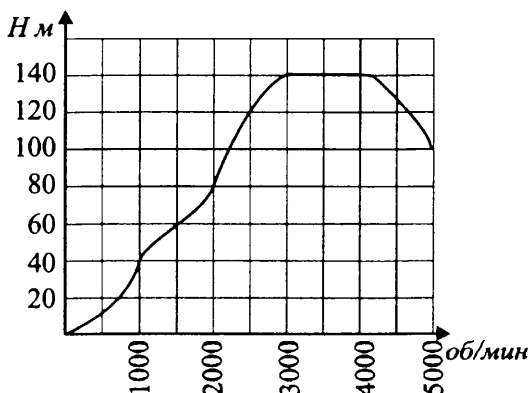


Рис. 5.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол (см. рис. 6). Найдите тангенс этого угла.

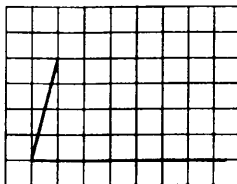


Рис. 6.

Ответ: _____.

4. В сборнике кулинарных рецептов всего 600 рецептов, в 15 из них одним из ингредиентов является арахис. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном рецепте одним из ингредиентов будет арахис.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{7}{13}x = 6\frac{6}{13}$.

Ответ: _____.

6. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 9 и 21, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45° .

Ответ: _____.

7. На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

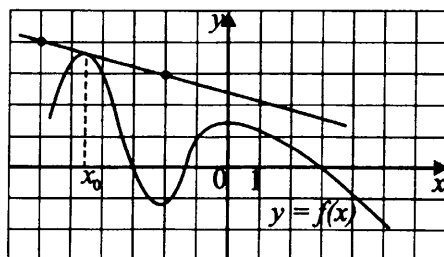


Рис. 7.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 8 (все двугранные углы прямые).

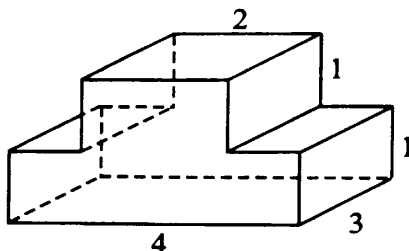


Рис. 8.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{85^2 - 84^2}$.

Ответ: _____.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от -5 до 5 . Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность.

Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 60.

Ответ: _____.

11. Из двух посёлков, расстояние между которыми 88 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста. Через сколько часов велосипедисты встретятся, если их скорости равны 18 км/ч и 22 км/ч?

Ответ: _____.

12. Рассмотрите функцию $y = \sqrt{-500 - 60x - x^2}$ и найдите её наибольшее значение.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13.) Решите уравнение $3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 2\cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны оснований AB и BC равны соответственно 6 и 4, а боковое ребро равно 3. На ребре $A_1 B_1$ отмечена точка M , а на луче BC — точка F , причём $A_1 M = MB_1$ и $BF = AB$. Плоскость AMF пересекает ребро CC_1 в точке N .

а) Докажите, что $CN : C_1 N = 2 : 1$.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

15. Решите неравенство $\frac{4 \log_2(x + 0,5)}{5^{1-\sqrt{x}} - 1} \leq 5^{\sqrt{x}} \log_2(x + 0,5)$.

16. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN . На них из точек M и N опущены перпендикуляры MK и NF соответственно:

а) Докажите, что прямые KF и AB параллельны.

б) Найдите отношение $KF : AB$, если $\angle ACB = 60^\circ$.

17. Вкладчик внёс в банк S млн рублей, где S — целое число, под 20% годовых. По истечении двух лет он увеличил вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьшее значение S , если за 4 года банк начислил ему более 6 млн рублей.

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-3a}{x+3} + \frac{x-2}{x-a} = 1 \text{ имеет единственный корень.}$$

19. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. За один ход разрешается стереть произвольно три числа, сумма которых меньше 27 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример последовательных четырёх ходов.
- б) Можно ли сделать 6 ходов?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Авиабилет для обычного пассажира стоит 7000 рублей. Стоимость авиабилета для студента составляет 50% от стоимости билета обычного пассажира. Группа состоит из 11 студентов и 4 преподавателей. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: _____.

2. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 50 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (см. рис. 9)?

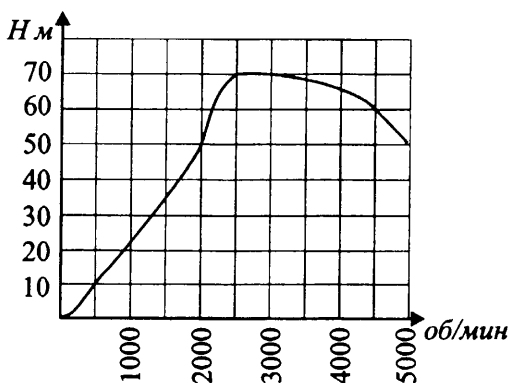


Рис. 9.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол (см. рис. 10). Найдите тангенс этого угла.

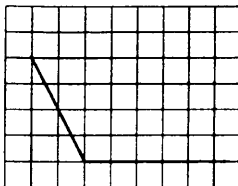


Рис. 10.

Ответ: _____.

4. В сборнике билетов по химии всего 30 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме «Щёлочь». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Щёлочь».

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $(x + 7)^3 = 27$.

Ответ: _____.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 90, а её боковые стороны равны 41. Найдите площадь трапеции.

Ответ: _____.

7. На рисунке 11 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

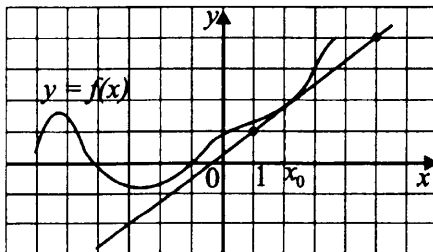


Рис. 11.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 12 (все двугранные углы прямые).

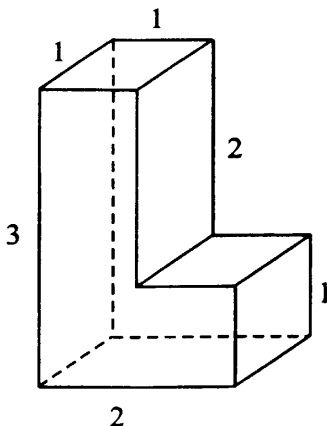


Рис. 12.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{21} - \sqrt{5})(\sqrt{21} + \sqrt{5})$.

Ответ: _____.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 5. Составители рейтинга считают, что объективность и информативность ценятся вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 63 км/ч, проезжает мимо здания вокзала, длина которого равна 150 метров, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: _____.

12. Рассмотрите функцию $y = 5x^2 - 8x + 19$ и найдите её наименьшее значение.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+4} + 405 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 6; \log_3 10]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 7, а боковое ребро — 12. На рёбрах $A_1 D_1$, $C_1 D_1$ и CB взяты точки F , K , L соответственно так, что $A_1 F = C_1 K = CL = 3$.

а) Пусть P — точка пересечения плоскости FKL с ребром AB . Докажите, что $FKLP$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью FKL .

15. Решите неравенство $(7x - 10) \log_{4x-3}(x^2 - 4x + 9) \geq 0$.

16. Точка M — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника NPK , Q — центр вписанной в него окружности, W — точка пересечения высот. Известно, что $\angle PNK = \angle MPK + \angle MKP$.

а) Докажите, что точка Q лежит на окружности, описанной около треугольника PMK .

б) Найдите угол MQW , если $\angle NPK = 47^\circ$.

17. Вклад планируется положить на три года, он составляет целое число десятков тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 30 000 рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через три года он будет меньше 96 000 рублей

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 5xy - 5y + 25}{\sqrt{x+5}} = 0, \\ y = ax \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

19. Множество чисел назовём красивым, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

- а) Является ли множество $\{500; 501; 502; \dots 599\}$ красивым?
- б) Является ли множество $\{5; 25; 125; \dots 5^{100}\}$ красивым?
- в) Сколько красивых четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 5; 6; 7; 9; 14\}$?

Вариант № 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Авиабилет для обычного пассажира стоит 5000 рублей. Стоимость авиабилета для студента составляет 50% от стоимости билета обычного пассажира. Группа состоит из 12 студентов и 5 преподавателей. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Ответ: _____.

2. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 75 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (см. рис. 13)?

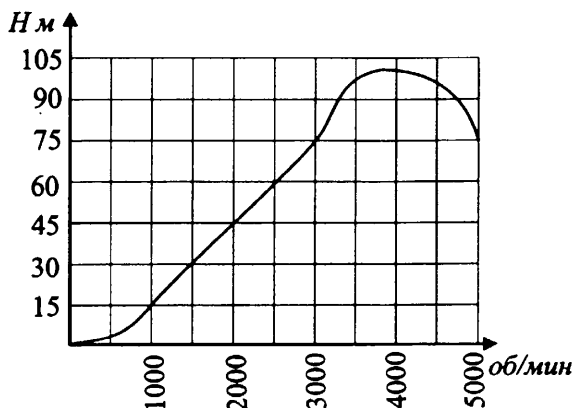


Рис. 13.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол (см. рис. 14). Найдите тангенс этого угла.

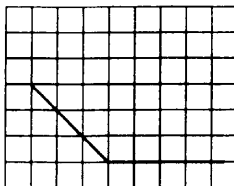


Рис. 14.

Ответ: _____.

4. В кулинарной книге всего 500 рецептов, в 35 из них одним из ингредиентов является молоко. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном рецепте среди ингредиентов не будет молока.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $(x - 17)^3 = -8$.

Ответ: _____.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 20 и 50, а её боковые стороны равны 17. Найдите площадь трапеции.

Ответ: _____.

7. На рисунке 15 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

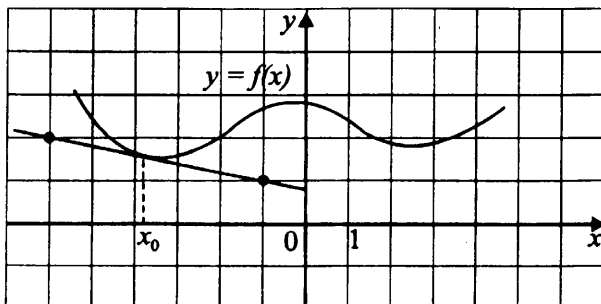


Рис. 15.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 16 (все двугранные углы прямые).

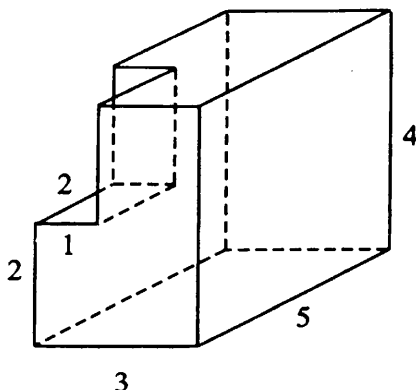


Рис. 16.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{17} - \sqrt{7})(\sqrt{17} + \sqrt{7})$.

Ответ: _____.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 5. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + Op + 4Tr + Q}{A}$.

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо semaфора за 45 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: _____.

12. Рассмотрите функцию $y = 4^{-23-10x-x^2}$ и найдите её наибольшее значение.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $125^x - 3 \cdot 25^x - 5^{x+2} + 75 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 4; \log_5 11]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро равно 15. На рёбрах M_1Q_1 , M_1N_1 и PQ взяты точки X , Y , Z , соответственно так, что $Q_1X = N_1Y = QZ = 5$.

а) Пусть C — точка пересечения плоскости XYZ с ребром PN . Докажите, что $XYZC$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью XYZ .

15. Решите неравенство $(3x - 7) \log_{5x-11}(x^2 - 8x + 17) \geq 0$.

16. Точка P — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника MNQ , K — центр вписанной в него окружности, O — точка пересечения высот. Известно, что $\angle NMQ = \angle PNQ + \angle PQN$.

а) Докажите, что точка K лежит на окружности, описанной около треугольника NPQ .

б) Найдите угол PKO , если $\angle MNQ = 42^\circ$.

17. Вклад планируется положить на пять лет, он составляет целое число сотен тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20% по сравнению с его размером в начале года, кроме этого, в начале четвёртого и пятого годов вклад ежегодно пополняется на 100 тысяч рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через пять лет он будет меньше 800 тысяч рублей.

18. Найдите все значения q , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 7xy - 7y + 49}{\sqrt{x+7}} = 0, \\ y = qx \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

19. Множество чисел назовём отличным, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

- а) Является ли множество $\{300; 301; 302; \dots 399\}$ отличным?
- б) Является ли множество $\{3; 9; 27; \dots 3^{100}\}$ отличным?
- в) Сколько отличных четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 4; 5; 7; 8; 10; 17\}$?

Вариант № 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Постоянные клиенты интернет-магазина получают при покупке скидку 5%. Покупка стоит 800 рублей. Сколько рублей заплатит постоянный клиент этого интернет-магазина за покупку, при условии, что стоимость доставки включена в стоимость покупки?

Ответ: _____.

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 40°C до температуры 60°C (см. рис. 17).

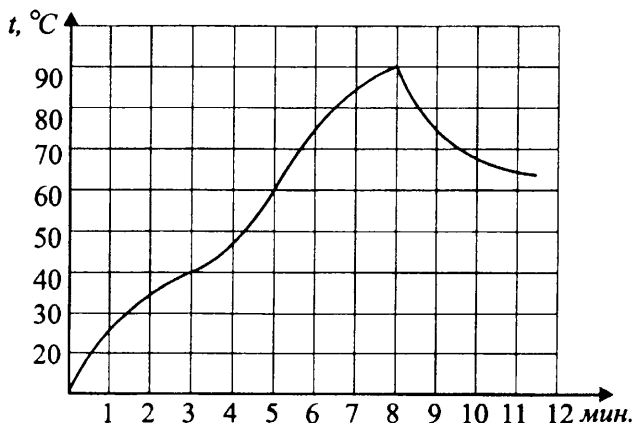


Рис. 17.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 18). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

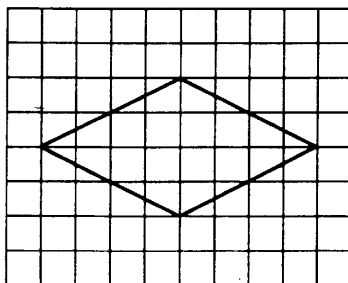


Рис. 18.

Ответ: _____.

4. Фабрика выпускает брюки. В среднем 17 брюк из 200 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленные брюки окажутся без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $x^2 - 19x + 90 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол A равен 48° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC (см. рис. 19). Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.

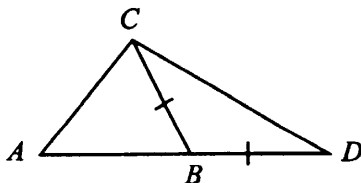


Рис. 19.

Ответ: _____.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4t^2 + t, \text{ где } x \text{ — расстояние от точки отсчета в метрах,}$$

t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 12$ с.

Ответ: _____.

8. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 4. Боковое ребро призмы равно $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы (см. рис. 20).

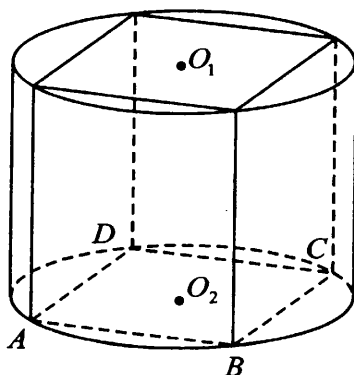


Рис. 20.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $3^{0,74} \cdot 9^{0,13}$.

Ответ: _____.

10. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1440$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 16$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m — масса

экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 225 кПа. Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Из одной точки круговой трассы, длина которой 18 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость одного из них 90 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 + 40x^2 + 200x + 79$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \log_2^2(2 \sin x) - 3 \log_2(2 \sin x) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На рёбрах AB , AC и AD соответственно отмечены точки M , N и K , такие, что $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $AK = \frac{5}{2}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC .

15. Решите неравенство $\frac{3^{2x} + 2 \cdot 3^x + 2}{3^{2x} + 2 \cdot 3^x} \leq 4 + \frac{1}{3^x} - \frac{3 \cdot 3^x + 1}{3^x - 1}$.

16. В трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, точка M — точка пересечения боковых сторон AB и CD . Прямая MN пересекает основания AD и BC в точках P и Q соответственно, точка N — точка пересечения диагоналей трапеции.

а) Докажите, что $AP = PD$ и $BQ = QC$.

б) Найдите отношение $\frac{BC}{AD}$, если $\frac{BD}{BN} = \frac{7}{5}$.

17. В июне планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей сроком на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите p , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,3 млн рублей, а наименьший — не менее 0,49 млн рублей.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + ax + 4 = \sqrt{20x^2 + 8ax + 16}$ имеет ровно три различных корня.

19. На доске записаны числа $1, 2, 3, \dots, 27$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 31 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных четырёх ходов.

б) Можно ли сделать 9 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Постоянные клиенты интернет-магазина получают при покупке скидку 5%. Покупка стоит 900 рублей. Сколько рублей заплатит постоянный клиент этого интернет-магазина, при условии, что стоимость доставки включена в стоимость покупки?

Ответ: _____.

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 30°C до температуры 70°C (см. рис. 21).

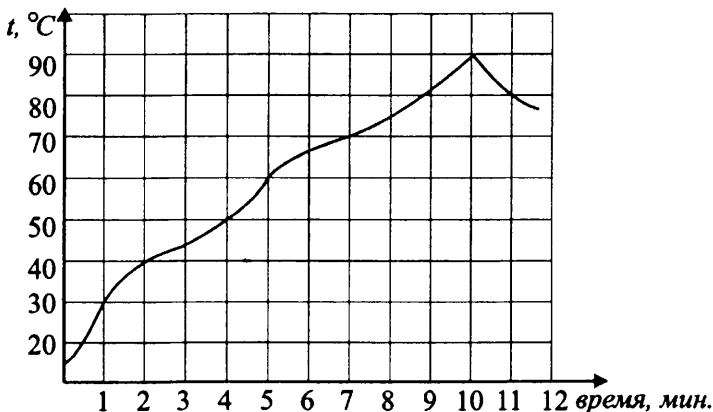


Рис. 21.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 22). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

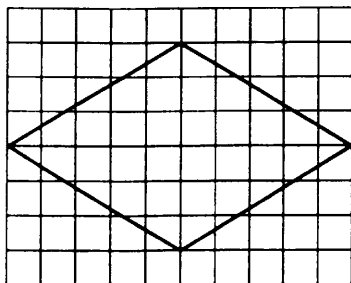


Рис. 22.

Ответ: _____.

4. Цех выпускает швейные машинки. В среднем 26 швейных машинок из 300 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная машинка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $x^2 + 23x + 60 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол A равен 65° , угол C равен 53° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC (см. рис. 23). Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.

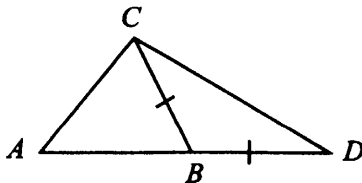


Рис. 23.

Ответ: _____.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = -t^4 + 7t^3 + 6t + 16$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 5$ с.

Ответ: _____.

8. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 6. Боковое ребро призмы равно $\frac{6}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы (см. рис. 24).

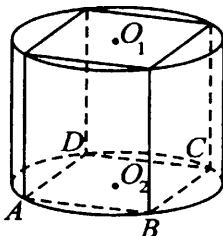


Рис. 24.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $4^{0,12} \cdot 16^{0,44}$.

Ответ: _____.

10. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 2240$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 14$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на

почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где

m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$).

Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 400 кПа. Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 10 км, одновременно в одном направлении стартовали два мотоциклиста. Скорость одного из них 72 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второго мотоциклиста на один круг. Найдите скорость второго мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 + 36x^2 + 162x + 57$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

14. В правильной треугольной пирамиде $BMNK$ с основанием MNK сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах MN , MK и MB соответственно отмечены точки F , E и P , такие, что $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $MP = \frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости FEP и NBK параллельны.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости NBK .

15. Решите неравенство $\frac{4^x + 27 \cdot 2^x + 18}{2^{2x} + 8 \cdot 2^x + 12} \geq 1 + 2^x - \frac{2^x - 3}{2^x + 6}$.

16. В трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, точка O — точка пересечения диагоналей трапеции. Через эту точку проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках M и N .

а) Докажите, что $MO = ON$.

б) Найдите отношение $\frac{BC}{AD}$, если $\frac{BD}{OB} = \frac{5}{2}$.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей сроком на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,36 млн рублей, а наименьший — не менее 0,856 млн рублей.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + ax + 2}{2} = \sqrt{4x^2 + ax + 1}$$
 имеет ровно три различных корня.

19. На доске записаны числа $1, 2, 3, \dots, 33$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 66 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример последовательных пяти ходов.
- б) Можно ли сделать 11 ходов?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Постоянные клиенты интернет-магазина получают при покупке скидку 7%. Покупка стоит 1500 рублей. Сколько рублей заплатит постоянный клиент этого интернет-магазина, при условии, что стоимость доставки включена в стоимость покупки?

Ответ: _____.

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 50°C до температуры 90°C (см. рис. 25).

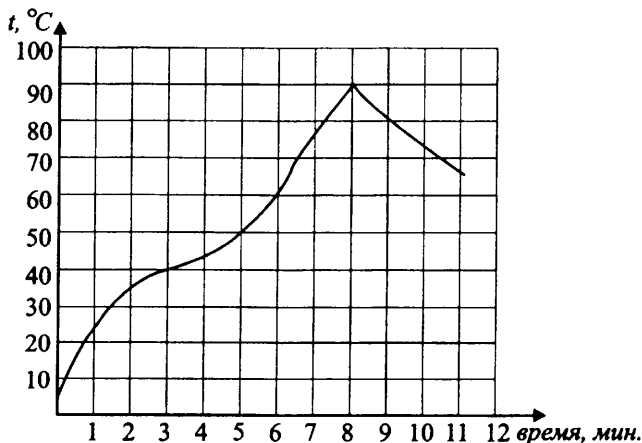


Рис. 25.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 26). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

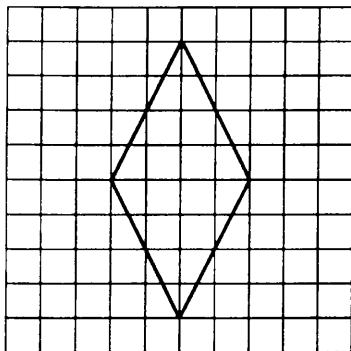


Рис. 26.

Ответ: _____.

4. Фабрика выпускает надувные бассейны. В среднем на 240 качественных бассейнов приходится 10, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленный бассейн окажется без дефектов.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $(x - 8)^2 = (x + 20)^2$.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол B равен 48° , угол C равен 95° , AD — биссектриса, E — такая точка на стороне AB , что $AE = AC$ (см. рис. 27). Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.

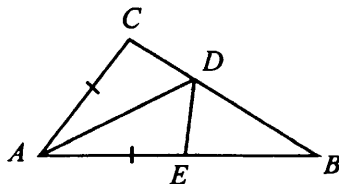


Рис. 27.

Ответ: _____.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4t^2 + t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была 13 м/с?

Ответ: _____.

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого и высота равны 5 (см. рис. 28). Найдите объём параллелепипеда.

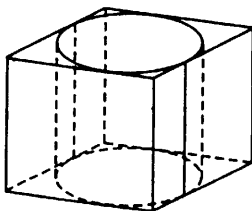


Рис. 28.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{3^{1,5} \cdot 5^{2,5}}{15^{1,5}}$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль, масса которого равна $m = 1100$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 600$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 3300 Н. Ответ выразите в секундах.

Ответ: _____.

11. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда 1100 метров. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минуты 6 секунд. Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 5$ на отрезке $[-1,5; 11]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\log_2^2\left(\frac{\sin x}{2}\right) - 7\log_2\left(\frac{\sin x}{2}\right) - 15 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна $8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 6$. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 2\sqrt{3}$. Точки K и M — середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15. Решите неравенство $\frac{35 \cdot 3^x}{4 + 10 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{2x}} \geq \frac{3^x + 2}{3^{x+1} + 1} - \frac{3^{x+1} - 1}{3^x - 2}$.

16. В трапеции $KLMN$ боковая сторона KL перпендикулярна основаниям. Из точки K на сторону MN опустили перпендикуляр KA . На стороне KL отмечена точка B так, что прямые LA и BN параллельны.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите отношение $LA : BN$, если угол LMN равен 150° .

17. Часть денег от суммы 400 млн рублей размещена в банке под 12% годовых, а другая часть инвестирована в производство, причём через год эффективность вложения ожидается в размере 250% (то есть вложенная сумма x млн рублей оборачивается в капитал $2,5x$ млн рублей), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0,0022x^2$ млн рублей. Разность между капиталом и издержками в производстве облагается налогом в 20%. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить общую максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько млн рублей составит эта прибыль?

18. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{3^x - a} + \frac{a - 1}{\sqrt{3^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

19. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 36$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 59 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 7 ходов.

б) Можно ли сделать 12 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Постоянные клиенты интернет-магазина получают при покупке скидку 7%. Покупка стоит 1200 рублей. Сколько рублей заплатит постоянный клиент этого интернет-магазина, при условии, что стоимость доставки включена в стоимость покупки?

Ответ: _____.

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 80°C (см. рис. 29).

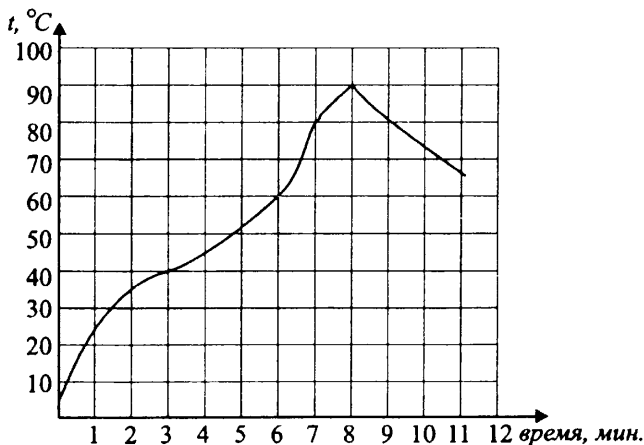


Рис. 29.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 30). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

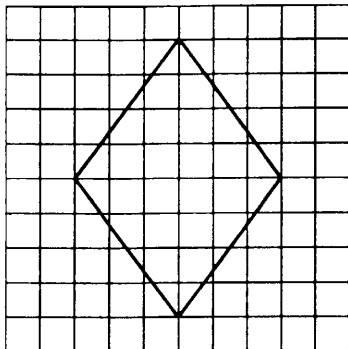


Рис. 30.

Ответ: _____.

4. Фабрика выпускает электроплиты. В среднем на 380 качественных электроплит приходится 20, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная электроплита окажется без дефектов.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $(x + 12)^2 = 48x$.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол A равен 26° , угол B равен 82° , CD — биссектриса внешнего угла при вершине C , причём точка D лежит на прямой AB (см. рис. 31). На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.

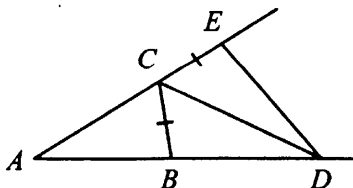


Рис. 31.

Ответ: _____.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была 26 м/с?

Ответ: _____.

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 6. Объём параллелепипеда равен 288. Найдите высоту цилиндра (см. рис. 32).

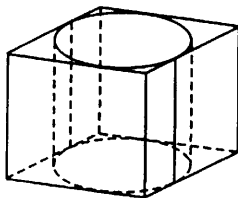


Рис. 32.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{7^{4,5} \cdot 2^{5,5}}{14^{4,5}}$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль, масса которого равна $m = 1550$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $S = 500$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 2480 Н. Ответ выразите в секундах.

Ответ: _____.

11. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 75 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда 750 метров. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 8x^3 + 21x^2 - 90x - 189$ на отрезке $[-5; 0,5]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_2^2(2 \sin x + 1) - 17 \log_2(2 \sin x + 1) + 16 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, высота $SO = 4$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и D .

а) Докажите, что расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка C , а основание — сечение данной пирамиды плоскостью γ .

15. Решите неравенство $\frac{1}{1+2^x} - \frac{2}{4^x - 2^x + 1} < \frac{1-2^{x+1}}{8^x + 1}$.

16. В трапеции $KLMN$ боковая сторона KL перпендикулярна основанию. Из точки K на сторону MN опустили перпендикуляр KA . На стороне KL отмечена точка B так, что прямые LA и BN параллельны.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите отношение $LA : BN$, если угол LMN равен 120° .

17. Часть денег от суммы 600 млн рублей размещена в банке под 14% годовых, а другая часть инвестирована в производство, причём через год эффективность вложения ожидается в размере 220% (то есть вложенная сумма x млн рублей оборачивается в капитал $2,2x$ млн рублей), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0,0031x^2$ млн рублей. Разность между капиталом и издержками в производстве облагается налогом в 20%. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить общую максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько млн рублей составит эта прибыль?

18. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{9^x - 4a} = 3^x - a$$

имеет единственный корень.

19. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 36$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 40 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 6 ходов.

б) Можно ли сделать 12 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Вариант № 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 39 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке 33 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 15 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.

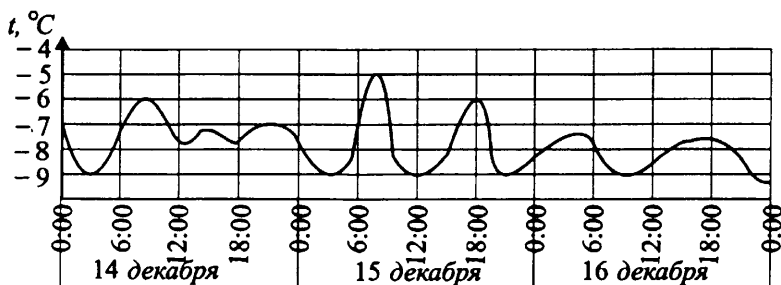


Рис. 33.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 34). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

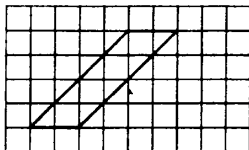


Рис. 34.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека будет отличаться от температуры $36,6^\circ\text{C}$ не больше чем на $0,2^\circ\text{C}$, равна 0,964. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется ниже, чем $36,4^\circ\text{C}$, или выше, чем $36,8^\circ\text{C}$.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{16}{x^2 - 48} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

6. Стороны параллелограмма равны 8 и 16 (см. рис. 35). Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 14. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

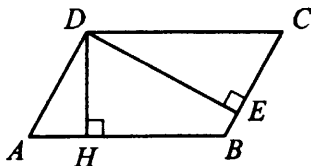


Рис. 35.

Ответ: _____.

7. На рисунке 36 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(-4; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$.

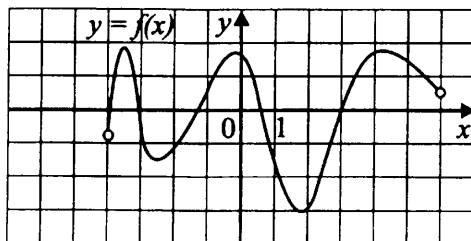


Рис. 36.

Ответ: _____.

8. Куб описан около сферы радиусом 2 (см. рис. 37). Найдите объём куба.

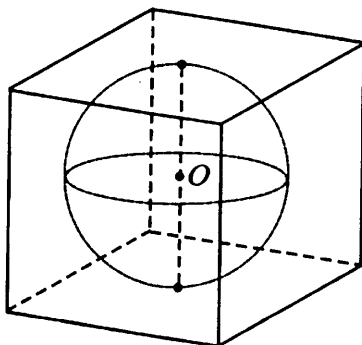


Рис. 37.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: _____.

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем $264\,600 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. В сосуд, содержащий 3 литра 14-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 144}{x}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $9 \cdot 3^{2 \cos x} - 10\sqrt{3} \cdot 3^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 16$, высота $SO = 6$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 8$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и A .

а) Докажите, что расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B , а основание — сечение данной пирамиды плоскостью γ .

15. Решите неравенство $\frac{4 \cdot 5^x - 17}{5^x - 4} + \frac{10 \cdot 5^x - 13}{2 \cdot 5^x - 3} > \frac{8 \cdot 5^x - 30}{2 \cdot 5^x - 7} + \frac{5^{x+1} - 4}{5^x - 1}$.

16. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD , точка N выбрана на стороне AB так, что площадь четырёхугольника $ANLM$ равна площади треугольника CLD , где L — точка пересечения отрезков CM и DN .

а) Докажите, что N — середина стороны AB .

б) Найдите, какую часть от площади трапеции $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника $ANLM$, если $BC = 4$, $AD = 6$.

17. В конце декабря 2016 года планируется взять кредит в банке на год в размере N млн рублей, где N — целое число. Условия его возврата таковы: в течение первого месяца каждого квартала долг увеличивается на 2% по сравнению с долгом на конец предыдущего квартала;

— в течение второго месяца каждого квартала необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— долг на начало каждого квартала должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Квартал	1	2	3	4
Долг (в млн рублей)	N	$0,8N$	$0,5N$	0

Найдите наименьшее значение N , при котором каждая из выплат будет больше 1 млн рублей.

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} = 1$ имеет единственный корень.

19. Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждое число, кроме первого и последнего, меньше среднего арифметического соседних с ним чисел.

а) Приведите пример последовательности, состоящей из пяти членов, с суммой, равной 40.

б) Может ли в последовательности из пяти членов быть два равных между собой?

в) Какая минимальная сумма может быть в последовательности из шести членов?

Вариант № 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 41 дюйму. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке 38 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 2 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

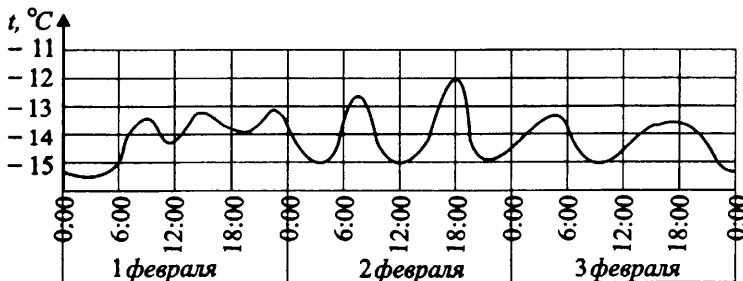


Рис. 38.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 39). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

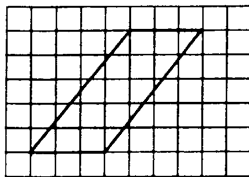


Рис. 39.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,9^{\circ}\text{C}$, равна 0,84. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,9^{\circ}\text{C}$ или выше.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{56}{x^2 + 7} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

6. Стороны параллелограмма равны 20 и 15 (см. рис. 40). Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 12. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

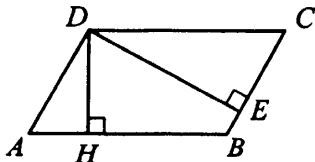


Рис. 40.

Ответ: _____.

7. На рисунке 41 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(-5; 7)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю на отрезке $[-2; 4]$.

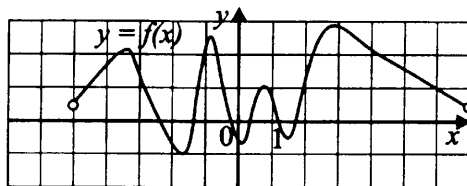


Рис. 41.

Ответ: _____.

8. Шар, объём которого равен 36π , вписан в куб (см. рис. 42). Найдите объём куба.

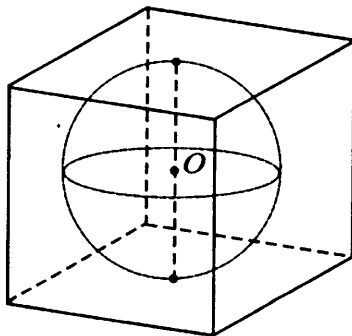


Рис. 42.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5}}{\sqrt[4]{5}}$.

Ответ: _____.

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем $153\,125 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. В сосуд, содержащий 12 литров 7%-ного водного раствора некоторого вещества, добавили 9 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 10\,000}{x}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $0,2^{2 \cos x - 1} - 26 \cdot 0,2^{\cos x - \frac{1}{2}} + 25 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 4\sqrt{2}$, боковое ребро $AA_1 = 8$, M середина ребра $A_1 B_1$. На ребре DD_1 отмечена точка L так, что $DL = 2$. Плоскость γ параллельна прямой $A_1 C_1$ и содержит точки M и A .

а) Докажите, что прямая BL перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B , а основание — сечение данной пирамиды плоскостью γ .

15. Решите неравенство $\frac{4^{x+1} + 3}{1 + 2 \cdot 4^x} + \frac{10 \cdot 4^x + 4}{5 \cdot 4^x + 4} < \frac{9 \cdot 4^x + 8}{2 + 3 \cdot 4^x} + \frac{4^{x+1}}{4^{x+1} + 3}$.

16. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD , точка N выбрана на стороне AB так, что площадь четырёхугольника $ANLM$ равна площади треугольника CLD , где L — точка пересечения отрезков CM и DN .

а) Докажите, что N — середина стороны AB .

б) Найдите, какую часть от площади трапеции $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника $ANLM$, если $BC = 5$, $AD = 8$.

17. В конце сентября 2016 года планируется взять кредит в банке на год. Условия его возврата таковы: в течение первого месяца каждого квартала долг увеличивается на 6% по сравнению с долгом на конец предыдущего квартала;

— в течение второго месяца каждого квартала необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— долг на начало каждого квартала должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Квартал	1	2	3	4
Долг (в процентах)	100	75	40	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{3x + a - x^2 + 4a^2x - x^3}{4a^2x - x^3} = 1 \text{ имеет единственный корень.}$$

19. Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждое число, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних с ним членов этой последовательности.

а) Приведите пример последовательности, состоящей из пяти членов, с суммой, равной 50.

б) Может ли в последовательности из пяти членов быть два равных между собой?

в) Какая минимальная сумма может быть в последовательности из шести членов?

Вариант № 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 55 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке 43 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 13 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.

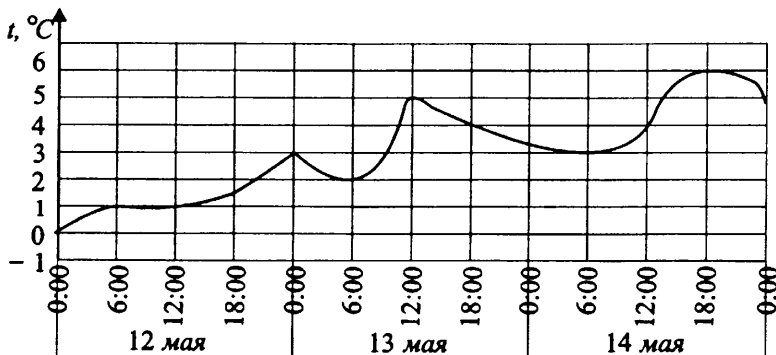


Рис. 43.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 44). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

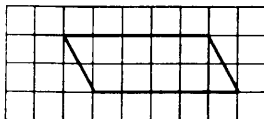


Рис. 44.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что, выполняя контрольную работу по математике, учащийся М. верно решит больше 4 задач, равна 0,52. Вероятность того, что М. верно решит больше 3 задач, равна 0,61. Найдите вероятность того, что М. верно решит ровно 4 задачи.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{x - 125}{5 - x} = -4$.

Ответ: _____.

6. Площадь параллелограмма равна 60, две его стороны равны 8 и 12. Найдите меньшую высоту этого параллелограмма.

Ответ: _____.

7. На рисунке 45 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; 3]$.

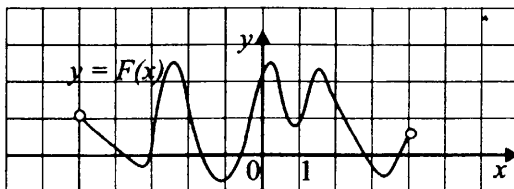


Рис. 45.

Ответ: _____.

8. Шар вписан в цилиндр (см. рис. 46). Площадь полной поверхности цилиндра равна 24. Найдите площадь поверхности шара.

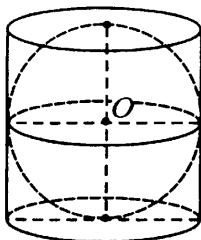


Рис. 46.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a}}{\sqrt[3]{a}}$.

Ответ: _____.

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 1 134 000 Н? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 12% железа, второй — 28% железа. Масса второго сплава больше массы первого на 2 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 21% железа. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{25}{x} + 2017$ на отрезке $[1; 25]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение: $\sin^2 x + \sin^2 \frac{\pi}{6} = \cos^2 2x + \cos^2 \frac{\pi}{3}$.

б) Укажите все корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

14. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC . Все боковые рёбра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что $AB \perp CD$.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD , если $AB = 8\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство:

$$\frac{1}{\log_{x^2+x} 0,5} + \frac{1}{\log_{x^2+x} 0,25} + \frac{1}{\log_{x^2+x} 4} \geq 1.$$

16. Две окружности различных радиусов касаются друг друга внешним образом. Их общие касательные, не проходящие через точку касания окружностей, пересекаются в точке O . При этом одна из касательных касается окружностей в точках A и C , считая от точки O , а другая — соответственно в точках B и D .

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна биссектрисе угла, образованного указанными касательными.

б) Найдите расстояние от середины отрезка AB до точки C , если радиусы окружностей равны 2 и 6.

17. Индивидуальному предпринимателю 15 марта был выдан кредит на приобретение оборудования. В нижеследующей таблице указан график его погашения. Текущий долг указывается в процентах:

Дата	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09
Текущий долг	100%	80%	65%	45%	30%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, банк увеличивает текущий долг на 5%. После этого в первой половине последующего месяца вкладчик обязан внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице текущему долгу на 15 число этого месяца. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2 = (y-1)^2, \\ (x-a)^2 + (y-1)^2 = 3a^2 - 8a + 9 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

19. Для проведения тестирования было подготовлено $4n + 3$ ($n \in N$) вопросов. Результаты тестирования заносятся на отдельную карточку в одну строку, состоящую из $4n + 3$ клеток. В случае верного ответа в соответствующую клетку записывается 1, в случае неверного — 0. Если в средней клетке этой строки 1, а в симметричных относительно неё числа одинаковые, то результат называется «особенным». Если же число единиц больше числа нулей, то — «удовлетворительным».

Найдите: а) количество всех возможных различных результатов при $n = 1$;

б) количество всех возможных «особенных» результатов при $n = 2$;

в) формулу, по которой можно находить число всех возможных различных, одновременно «особенных» и «удовлетворительных» результатов при произвольном значении n ;

г) наибольшее значение n , при котором число всех возможных различных результатов, указанных в пункте в), меньше 1500.

Вариант № 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 58 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку 47 наименьшую температуру воздуха 27 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

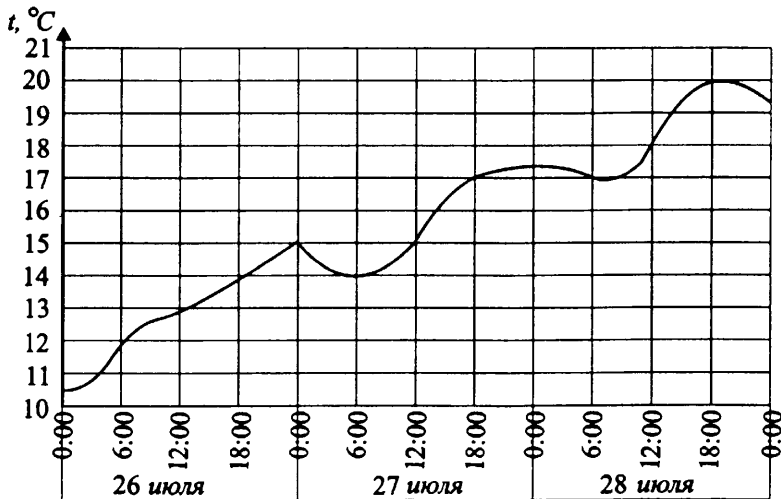


Рис. 47.

Ответ: _____.

3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 48). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

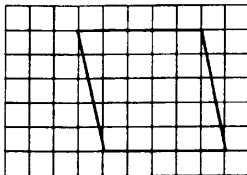


Рис. 48.

Ответ: _____.

4. Из города М. в город Р. ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,64. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,46. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 14.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{x + 109}{5 + 2x} = -2$.

Ответ: _____.

6. Площадь параллелограмма равна 160, две его стороны равны 10 и 20. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

Ответ: _____.

7. На рисунке 49 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; 4]$.

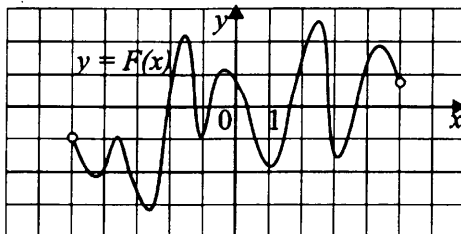


Рис. 49.

Ответ: _____.

8. Цилиндр, объём которого равен 66, описан около шара (см. рис. 50). Найдите объём шара.

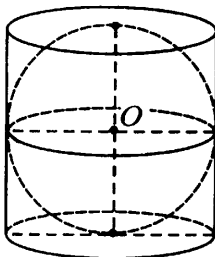


Рис. 50.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{3\sqrt[6]{m} \cdot 12\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}}$.

Ответ: _____.

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ Н/кг}$). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 141 750 Н? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 12% олова, второй — 36% олова. Масса второго сплава больше массы первого на 1 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 25% олова. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{36}{x} + 10$ на отрезке $[-10; -1]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение: $\cos^2 x + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \cos^2 2x + \sin^2 \frac{\pi}{3}$.

б) Укажите все корни, принадлежащие промежутку $\left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC . Все боковые рёбра наклонены к основанию под одним и тем же углом.

а) Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости, проходящей через середину ребра AB и ребро DC .

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD , если $AB = 6\sqrt{3}$, $AD = 5\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство:

$$\frac{1}{\log_{x^2-x} 0,5} + \frac{1}{\log_{x^2-x} 0,25} + \frac{1}{\log_{x^2-x} 4} \geq -1.$$

16. Две окружности различных радиусов касаются друг друга внешним образом. Их общие касательные, не проходящие через точку касания окружностей, пересекаются в точке O . При этом одна из касательных касается окружностей в точках A и C , считая от точки O , а другая, — соответственно в точках B и D .

а) Докажите, что прямая CD перпендикулярна биссектрисе угла, образованного указанными касательными.

б) Найдите расстояние от середины отрезка CD до точки A , если радиусы окружностей равны 3 и 9.

17. Индивидуальному предпринимателю 15 июня был выдан кредит на приобретение стройматериалов. В нижеследующей таблице указан график его погашения. Текущий долг указывается в процентах:

Дата	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10	15.11	15.12
Текущий долг	100%	85%	65%	40%	30%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с июня, банк увеличивает текущий долг на 7%. После этого в первой половине последующего месяца вкладчик обязан внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице текущему долгу на 15 число этого месяца. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^2 = (y-2)^2, \\ (x+1)^2 + (y-a)^2 = 3a^2 - 2a + 4 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

19. Стрелок ведёт стрельбу по закрывающимся $4n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) мишеням, расположенным в одну линию друг за другом. Результаты стрельбы заносятся в одну строку, состоящую из $4n - 1$ клеток. Если мишень поражена, то в соответствующую клетку заносится 1, если нет, то 0. Если в средней клетке этой строки 1, а в симметричных относительно неё числа одинаковые, то результат называется «исключительным». Если же число единиц больше числа нулей, то — «проходным».

а) Укажите число всех возможных различных результатов при $n = 3$.

б) Укажите число всех возможных различных «исключительных» результатов при $n = 2$.

в) Найдите формулу, по которой можно находить число всех возможных различных результатов, которые одновременно являются «проходными» и «исключительными».

г) Укажите наибольшее значение n , при котором число всех возможных различных результатов, указанных в пункте в), меньше 1700.

Вариант № 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 35 руб. 20 коп. за литр. Сдачи клиент получил 14 руб. 40 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ: _____.

2. На рисунке 51 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в городе N с 4 по 17 февраля 1905 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку 51, какого числа впервые выпало 4 миллиметров осадков.

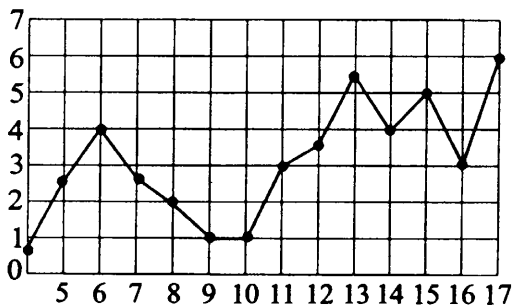


Рис. 51.

Ответ: _____.

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(-2; 1)$, $(-2; 4)$, $(-6; 1)$, $(-6; 4)$.

Ответ: _____.

4. Научная конференция проводится в 6 дней. Всего запланировано 80 докладов — первые четыре дня по 15 докладов, остальные распределены поровну между пятым и шестым днями. На конференции планируется доклад профессора Л. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Л. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{-19x + 20} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: _____.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° (см. рис. 52). Боковая сторона треугольника равна 14. Найдите площадь этого треугольника.

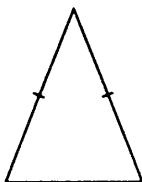


Рис. 52.

Ответ: _____.

7. На рисунке 53 изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

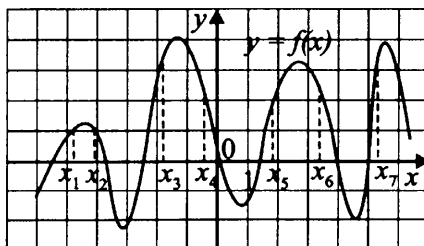


Рис. 53.

Ответ: _____.

8. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 15 см (см. рис. 54). В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

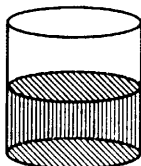


Рис. 54.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $19a^{10}a^{14} : (5a^{12})^2$.

Ответ: _____.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек,

стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 3,2 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 4,8 километров?

Ответ: _____.

11. В 2005 году в посёлке проживало 55 000 человек. В 2006 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 6%, а в 2007 году — на 10% по сравнению с 2006 годом. Сколько человек стало проживать в посёлке в 2007 году?

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x + 7)^2(x - 6) + 11$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM : MA_1 = 2 : 3$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D и M параллельно диагонали основания AC .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $AA_1 = 5\sqrt{6}$, $AB = 4$.

15. Решите неравенство $\log_{|x+2|}(12 + 4x - x^2) \leq 2$.

16. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC , касается сторон AB и AC в точках E и F .

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AEF , лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC .

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = 11$, $AC = 14$, $BK = 3,08$, где K — точка пересечения стороны BC и биссектрисы, проведённой из вершины A .

17. Предприниматель 15 мая обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10
Текущий долг	100%	80%	60%	40%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с мая, текущий долг увеличивается на 5%, а выплаты по погашению кредита должны происходить с 1 по 14 число каждого месяца, начиная с июня. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} y = \sqrt{-5 - 6x - x^2}, \\ y - ax = 2 - 3a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

19. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 9 раз больше, либо в 9 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 19 399.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Вариант № 14

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 34 руб. 70 коп. за литр. Сдачи клиент получил 28 руб. 40 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ: _____.

2. На рисунке 55 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в городе N с 4 по 17 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 6 миллиметров осадков.

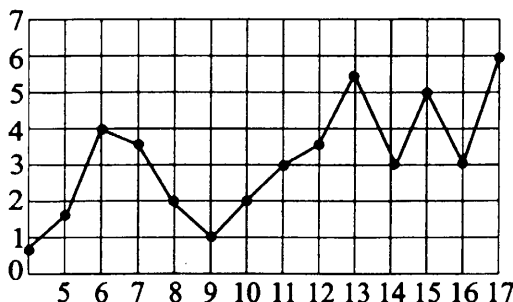


Рис. 55.

Ответ: _____.

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(-2; 1)$, $(-2; 5)$, $(-5; 1)$, $(-5; 5)$.

Ответ: _____.

4. Конкурс хоров проводится в 4 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой школы, участвующей в конкурсе. Хор из гимназии участвует в конкурсе. В последний день запланировано 5 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление хора из гимназии состоится в третий день конкурса?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{3x + 88} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 14, а угол между ними равен 30° (см. рис. 56).

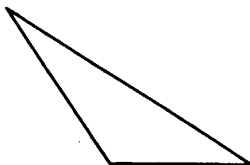


Рис. 56.

Ответ: _____.

7. На рисунке 57 изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

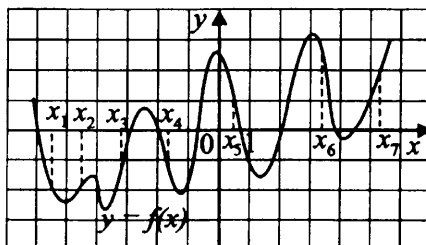


Рис. 57.

Ответ: _____.

8. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 20 см (см. рис. 58). На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в два раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

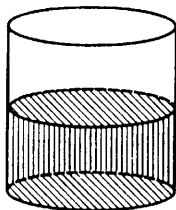


Рис. 58.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $16a^7a^{15} : (8a^{11})^2$.

Ответ: _____.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 5,6 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

Ответ: _____.

11. В 2000 году в посёлке проживало 74 000 человек. В 2001 году, в результате строительства жилых домов, число жителей в посёлке выросло на 5%, а в 2002 — на 10% по сравнению с 2001 годом. Сколько человек стало проживать в посёлке в 2002 году?

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x - 1)^2(x + 8) + 15$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos(\pi + x)} = -\sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-2\pi; -\frac{\pi}{2})$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре CC_1 взята точка K так, что $CK : KC_1 = 1 : 2$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки D и K параллельно диагонали основания AC .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $CC_1 = 4,5\sqrt{2}$, $AB = 3$.

15. Решите неравенство $\log_{|x+4|}(16 + 14x - 2x^2) \geq 2$.

16. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC , касается сторон BA и BC в точках M и N .

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник BMN , лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC .

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = 10$, $AC = 12$, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

17. Виктория Игоревна взяла в банке кредит 1 500 000 рублей на 5 лет при условии:

- долг будет возвращаться пятью платежами, производимыми в конце каждого из пяти лет;
- имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 15%;
- в конце года, уже после начисления процентов, часть долга необходимо погасить в таком объёме, чтобы остаток был равен сумме, указанной в таблице:

Год	1	2	3	4	5
Текущий долг (в руб.)	1 200 000	900 000	600 000	300 000	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{-8 - 6x - x^2}, \\ y + ax = a + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

19. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2745.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Вариант № 15

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 33 руб. 80 коп. за литр. Сдачи клиент получил 19 руб. 80 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в городе *N* с 4 по 17 февраля 1908 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку 59, какого числа впервые выпало ровно 2 миллиметра осадков.

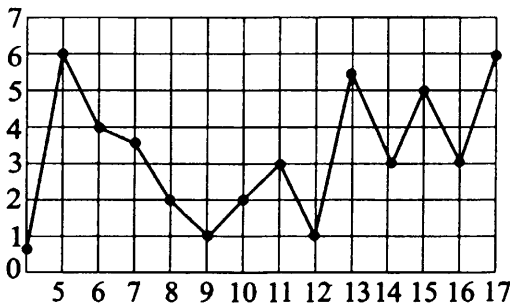


Рис. 59.

Ответ: _____.

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (4; 1), (4; 9), (10; 1), (10; 9).

Ответ: _____.

4. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 12 спортсменов из Уфы, в том числе Пётр Дроздов. Найдите вероятность того, что в первом туре Пётр Дроздов будет играть с каким-либо теннисистом из Уфы.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{3x-36}} = \frac{1}{9}$.

Ответ: _____.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° (см. рис. 60). Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 324.



Рис. 60.

Ответ: _____.

7. На рисунке 61 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -4, -1, 1$ на оси абсцисс. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

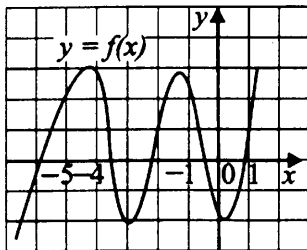


Рис. 61.

Ответ: _____.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы (см. рис. 62), налили 1800 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости поднялся с отметки 24 см до отметки 26 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

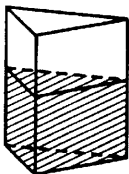


Рис. 62.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{ab^{-3}}{(5a)^3 \cdot b^{-1}} \cdot \frac{4}{a^{-2}b^{-2}}$.

Ответ: _____.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется

по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек,

стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 5,6 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 7,2 километров?

Ответ: _____.

11. Предприниматель Петров получил в 2005 году прибыль в размере 12 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 110% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Петров за 2008 год?

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 9)^2(x + 12) - 14$ на отрезке $[-11; 3]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin(\pi - x)} = \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре AD взята точка F так, что $AF : FD = 1 : 3$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B_1 и F параллельно диагонали AC .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $BB_1 = 5\sqrt{6}$, $AB = 8$.

15. Решите неравенство $\log_{|x-2|}(4 + 7x - 2x^2) \geq 2$.

16. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC , касается сторон AB и AC в точках M и N .

а) Докажите что центр окружности, вписанной в треугольник AMN , лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC .

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если

$$AB = CN = 10, BM = 6, \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

17. Предприниматель 20 июня взял кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	20.06	20.07	20.08	20.09	20.10	20.11	20.12
Текущий долг	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с июня, текущий долг увеличивается на 6%, а выплаты по погашению кредита должны происходить в первой половине каждого месяца, начиная с июля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 + 4x - x^2}, \\ y - ax = 4a + 3 \end{cases} \quad \text{имеет ровно два решения.}$$

19. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 4 раза больше, либо в 4 раза меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1284.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Вариант № 16

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 32 руб. 90 коп. за литр. Сдачи клиент получил 13 руб. Сколько литров бензина было залито в бак?

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в N с 4 по 17 февраля 1907 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку 63, какого числа впервые выпало 1 миллиметр осадков.

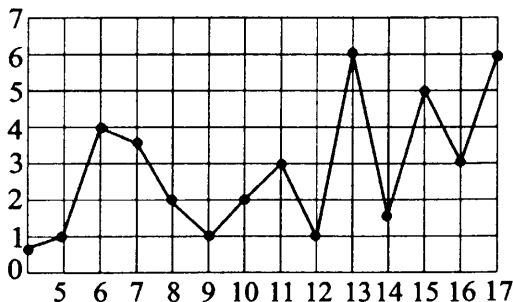


Рис. 63.

Ответ: _____.

3. Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; 1)$, $(-4; 9)$, $(2; 1)$, $(2; 9)$.

Ответ: _____.

4. Перед началом первого тура чемпионата по боксу участников разбивают на пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 46 боксёров, среди которых 10 спортсменов из Ульяновска, в том числе Иван Шилов. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Шилов встретится с каким-либо боксёром из Ульяновска.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{45}{2x-31}} = 3$.

Ответ: _____.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 121.

Ответ: _____.

7. На рисунке 64 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -6 , -1 , 1 , 4 на оси абсцисс. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

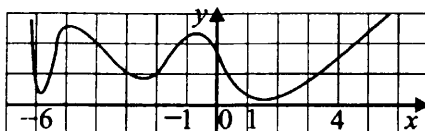


Рис. 64.

Ответ: _____.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы (см. рис. 65), налили воду. Уровень воды достигает 40 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в два раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

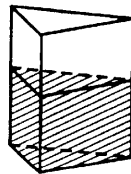


Рис. 65.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{a^6b^{-4}}{(2a^4)^3 \cdot b^{-2}} \cdot \frac{3}{a^{-6}b^{-2}}$.

Ответ: _____.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 3,2 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 8 километров?

Ответ: _____.

11. Предприниматель Добров получил в 2007 году прибыль в размере 8000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 120% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Добров за 2010 год?

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 4)^2(x + 1) + 19$ на отрезке $[-5; -3]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(3\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре CD взята точка K так, что $CK = DK$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A_1 и K параллельно диагонали BD .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если $AA_1 = 3\sqrt{3}$, $AB = 6\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство $\log_{|x-5|}(2x^2 - 10x + 8) \leq 2$.

16. Окружность, вписанная в остроугольный треугольник ABC , касается сторон BA и BC в точках E и F .

а) Докажите что центр окружности, вписанной в треугольник BEF , лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC .

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = BC$, $BE = 13$, $EF = 10$, $S_{BEF} : S_{ABC} = 4 : 9$.

17. Виктор Петрович взял в банке кредит 2 000 000 рублей на 5 лет при условии:

- долг будет возвращаться пятью платежами, производимыми в конце каждого из пяти лет;
- имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 10%;
- в конце года, уже после начисления процентов, долг необходимо погасить в такой сумме, чтобы остаток был равен сумме, указанной в таблице:

Год	1	2	3	4	5
Текущий долг (в руб.)	1 600 000	1 200 000	800 000	400 000	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}, \\ y - ax = 3 - a \end{cases}$ имеет единственное решение.

19. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 6 раз больше, либо в 6 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 848.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Вариант № 17

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Бегун пробежал 120 м за 12 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 18 по 28 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку 66 наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в период с 18 по 21 августа (в долларах США за баррель).

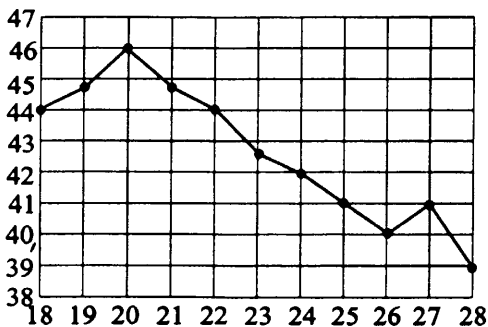


Рис. 66.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 67). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .

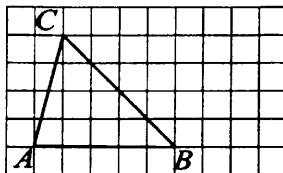


Рис. 67.

Ответ: _____.

4. На экзамене по литературе школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Творчество Пушкина», равна 0,15. Вероятность того, что это вопрос по теме «Творчество Лермонтова», равна 0,21. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $2^{48-5x} = 128$.

Ответ: _____.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 324. Точка P — середина стороны BC . Найдите площадь трапеции $APCD$.

Ответ: _____.

7. На рисунке 68 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 2$ или совпадает с ней.

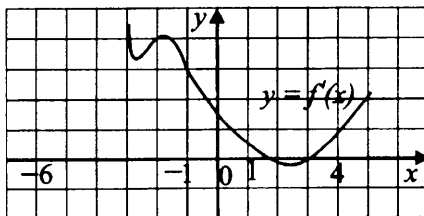


Рис. 68.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными $4\sqrt{5}$ и 8, и боковым ребром, равным 5 (см. рис. 69).

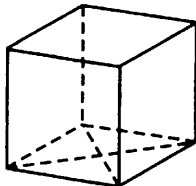


Рис. 69.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $4 \log_3(\log_5 125)$.

Ответ: _____.

10. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 15$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 11,25 м?

Ответ: _____.

11. Цена телевизора в магазине ежеквартально (в квартале — три месяца) уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый квартал уменьшалась цена телевизора, если выставленный на продажу за 50 000 рублей через два квартала был продан за 41 405 рублей?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 7)^9 - 9x$ на отрезке $[-6, 5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $8 \sin x + 4 \cos^2 x = 7$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SMNPQ$ с вершиной в точке S , сторона основания равна $5\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине пирамиды равен 60° .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ NQ основания параллельно боковому ребру PS .

б) Найдите площадь сечения.

15. Решите неравенство $7^{2x} - 7^{x+1} + 3|7^x - 5| \geq 6$.

16. В окружность с центром O вписан остроугольный треугольник ABC , в котором проведена медиана AF , причём $\angle FAC = \angle OCA$.

а) Докажите, что точка O лежит на медиане AF .

б) Найдите площадь треугольника AOC , если $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 12\sqrt{3}$.

17. В мае планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по апрель каждый год необходимо выплатить часть долга;

— в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на май предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 6 млн рублей?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = |x|, \\ (x - \sin \pi a)^2 + (y - a)^2 \leq a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения?

19. На столе перед нумизматом лежит 200 монет орлом вверх. За один ход нумизмат переворачивает любые 4 различные монеты. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах.

а) Может ли после нескольких ходов ровно 6 монет оказаться вверх решкой?

б) Может ли после нескольких ходов ровно 3 монеты оказаться вверх решкой?

в) Какое наибольшее число монет может оказаться вверх решкой, если хотя бы одна монета должна в результате быть вверх орлом?

Вариант № 18

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Бегун пробежал 320 м за 40 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 18 по 28 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку 70 наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в период с 22 по 26 августа (в долларах США за баррель).

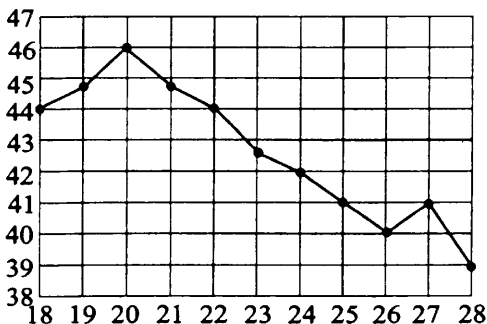


Рис. 70.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 71). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .

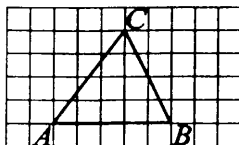


Рис. 71.

Ответ: _____.

4. На экзамене по физике студент отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Механика», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос по теме «Электричество», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене студенту достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-10} = \frac{1}{9}$.

Ответ: _____.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 226. Точка P — середина стороны AD . Найдите площадь треугольника CDP .

Ответ: _____.

7. На рисунке 72 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

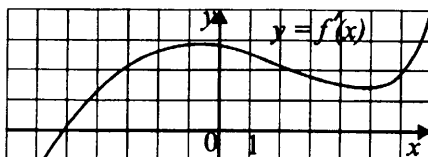


Рис. 72.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 4 и 3, и боковым ребром, равным 8 (см. рис. 73).

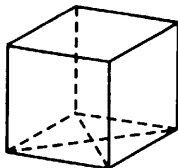


Рис. 73.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2 \log_7 \log_2 128$.

Ответ: _____.

10. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 14$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 9,8 м?

Ответ: _____.

11. Цена электрочайника в магазине ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена электрочайника, если выставленный на продажу за 4500 рублей через два месяца был продан за 3645 рублей?

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - \ln(x + 11)^7$ на отрезке $[-10,5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x + 19 \sin x + 8 = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SMNPQ$ с вершиной в точке S , сторона основания равна 7, а плоский угол при вершине пирамиды равен 90° .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ NQ основания параллельно боковому ребру PS .

б) Найдите площадь сечения.

15. Решите неравенство $3^{2x+1} + 4 \cdot 3^x + 2 \cdot |3^x - 2| \geq 5$.

16. В окружность с центром O вписан остроугольный треугольник ABC , в котором проведена медиана BK , причём $\angle KBC = \angle OCB$.

а) Докажите, что точка O лежит на медиане BK .

б) Найдите площадь треугольника AOB , если $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$.

17. В августе планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июль каждый год необходимо выплатить часть долга;

— в августе каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на август предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 5,1 млн рублей?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}|y| = 0, \\ (x - 2a)^2 + (y - \cos \pi a)^2 \leq (5a - 21)^2 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения?}$$

19. На столе перед нумизматом лежит 2025 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 6 различных монет. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах.

а) Может ли после нескольких ходов ровно 16 монет оказаться кверху решкой?

б) Может ли после нескольких ходов ровно 9 монет оказаться кверху решкой?

в) Какое наименьшее число монет может оказаться кверху орлом в результате конечного числа ходов?

Вариант № 19

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Бегун пробежал 360 м за 40 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

2. На рисунке 74 жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 7 по 17 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 7 по 13 мая (в долларах США за тонну).

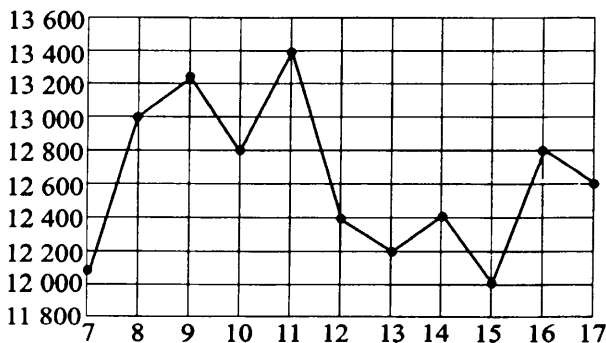


Рис. 74.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 75). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .

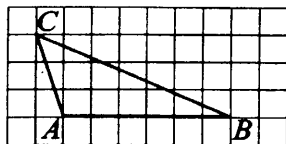


Рис. 75.

Ответ: _____.

4. В гостинице стоят два кулера. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого кулера. Найдите вероятность того, что хотя бы один кулер исправен.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $5^{12-4x} = \frac{1}{125}$.

Ответ: _____.

6. Площадь треугольника ABC равна 76, DE — средняя линия, параллельная стороне AB (см. рис. 76). Найдите площадь трапеции $ABED$.

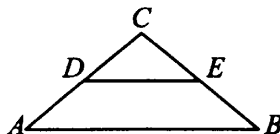


Рис. 76.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = 4x - 6$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы (см. рис. 77), сторона основания которой равна 6, а высота — 8.

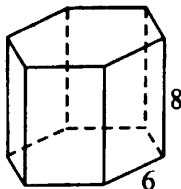


Рис. 77.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 25}{\log_3 17} + \log_{17} 0,04$.

Ответ: _____.

10. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где

$v_0 = 10$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 1 м на расстоянии 0,25 м?

Ответ: _____.

11. Елена сделала вклад в банк в размере 5500 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Через год Наталья положила такую же сумму в тот же банк на тех же условиях. Ещё через год Елена и Наталья закрыли вклады и забрали деньги, оказалось, что Елена получила на 739,2 рубля больше, чем получила Наталья. Какой процент годовых начислял банк по вкладам?

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x^2 - 19x + 11 \ln x + 715$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $KMNPQ$ со стороной основания $MNPQ$, равной 6, и боковым ребром $3\sqrt{26}$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую NF параллельно диагонали MP , если точка F — середина ребра MK .

б) Найдите величину угла между плоскостью сечения и плоскостью KMP .

15. Решите неравенство $3^{3x} - 3^{x+1} \cdot 2^{2x} + 18^x - 3 \cdot 8^x \geq 0$.

16. В треугольнике MNP проведены медианы MM_1 и NN_1 . На сторонах MN , MP и NP взяты соответственно точки F , K и E , причём $FE \parallel MM_1$, $FK \parallel NN_1$ и $MF : MN = 1 : 3$.

а) Докажите, что $MK = \frac{1}{6}MP$, $NE = \frac{1}{3}PN$.

б) Найдите площадь треугольника FEK , если площадь треугольника MNP равна 48.

17. Иван Иванович взял 910 000 рублей в кредит под 20% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Иван Иванович переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Иван Иванович выплатил долг тремя равными годовыми платежами?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y \geq -|x - 2 \sin \pi a|, \\ (x - \sin 2\pi a)^2 + (y - 4a)^2 = \frac{2a^4}{25} \end{cases} \text{ имеет ровно два решения?}$$

19. На столе перед нумизматом лежит 2017 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 5 различных монет. Разрешается переворачивать в том числе и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах.

а) Может ли после 5 ходов ровно 21 монета оказаться решкой кверху?

б) Может ли через 5 ходов ровно 20 монет оказаться решкой кверху?

в) За какое наименьшее число ходов можно сделать так, чтобы все монеты оказались решкой кверху?

Вариант № 20

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Бегун пробежал 150 м за 25 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

2. На рисунке 78 жирными точками показана цена акции на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 23 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену акции на момент закрытия торгов в период с 12 по 17 мая (в долларах США).

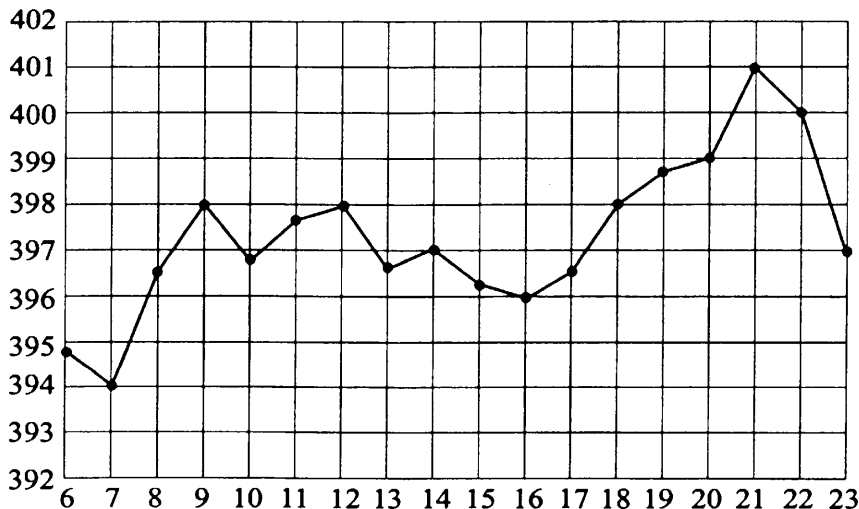


Рис. 78.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 79). Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB .

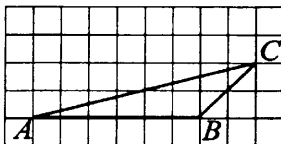


Рис. 79.

Ответ: _____.

4. Стоянка освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,4. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{8x+24} = 16$.

Ответ: _____.

6. Площадь треугольника MPE равна 68, KT — средняя линия, параллельная стороне MP (см. рис. 80). Найдите площадь трапеции $MPTK$.

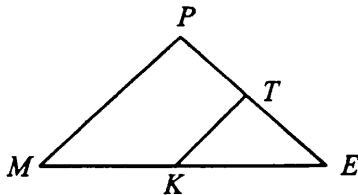


Рис. 80.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = -3x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = -x^2 + 5x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

8. Найдите площадь боковой поверхности правильной восьмиугольной призмы (см. рис. 81), сторона основания которой равна 5, а высота — 7.

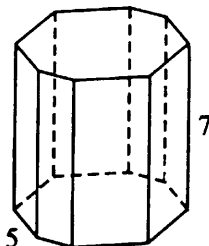


Рис. 81.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 2}{\log_5 11} + \log_{11} 0,5$.

Ответ: _____.

10. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 15$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 2 м на расстоянии $\frac{13}{16}$ м?

Ответ: _____.

11. Николай положил 8000 рублей в банк. По истечении года к его вкладу добавляются деньги, начисленные в качестве процентов. Через год его друг Михаил положил в тот же банк ту же сумму и на тех же условиях. Ещё через год оба друга сняли свои вклады и оказалось, что Николай получил на 784,8 рубля больше, чем получил Михаил. Какой процент годовых начислял банк по вкладам?

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x^2 - 12x + 2 \ln x + 37$ на отрезке $\left[\frac{3}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4 \cos^2 x = 3 \cos 2x + 1$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ со стороной основания, равной 10, и боковым ребром $5\sqrt{10}$. $ABCD$ — основание.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую BM параллельно диагонали AC , если точка M — середина ребра AP .

б) Найдите величину угла между плоскостью сечения и плоскостью PAC .

15. Решите неравенство $3^{2x^2+7} + 3^{(x+3)(x+1)} - 4 \cdot 3^{8x} \geq 0$.

16. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 . На сторонах BC , AC и AB взяты соответственно точки M , N и P , причём $MN \parallel BB_1$, $MP \parallel CC_1$ и $BM : BC = 1 : 5$.

а) Докажите, что $BP = \frac{1}{10}AB$, $CN = \frac{2}{5}AC$.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если площадь треугольника ABC равна 45.

17. Ольга Петровна взяла 1 655 000 рублей в кредит под 10% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Ольга Петровна переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Ольга Петровна выплатила долг тремя равными годовыми платежами?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y \geq -|x - 2 \cos \pi a|, \\ (x - \sin 2\pi a)^2 + (y - 6a)^2 = -99a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

19. На столе перед нумизматом лежит 1000 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 7 различных монет. Разрешается переворачивать в том числе и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах.

- а) Может ли через 10 ходов ровно 66 монет лежать решкой кверху?
- б) Может ли через 10 ходов ровно 65 монет лежать решкой кверху?
- в) За какое наименьшее число ходов можно сделать так, чтобы все монеты оказались решкой кверху?

Вариант № 21

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Клиент взял в банке кредит 155 000 рублей под 17% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Ответ: _____.

2. На рисунке 82 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 9 по 22 июля 1984 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за период с 9 по 17 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

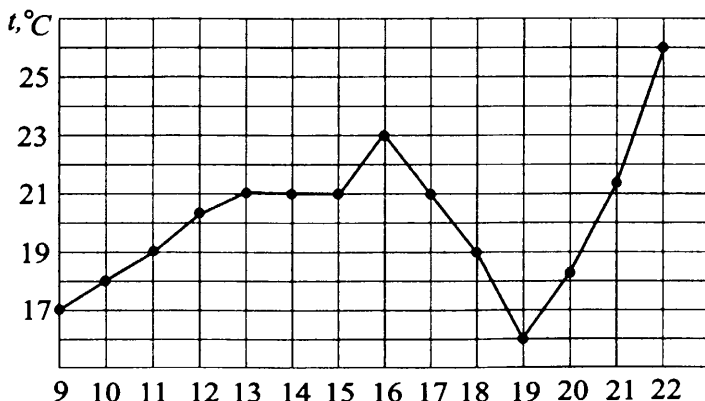


Рис. 82.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B (см. рис. 83). Найдите длину отрезка AB .

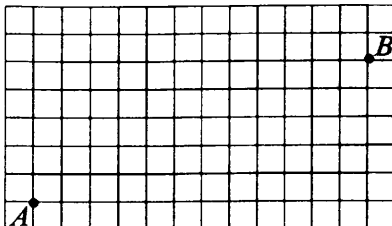


Рис. 83.

Ответ: _____.

4. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в посёлок в магазин. Какова вероятность того, что Максим, входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $x = \frac{3x - 8}{x + 9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC \simeq 8$, $\operatorname{tg} A = 0,4$. Найдите AC .

Ответ: _____.

7. На рисунке 84 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

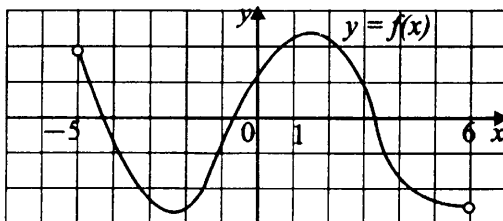


Рис. 84.

Ответ: _____.

11. Из пункта A в пункт B одновременно выехали две дорожные машины. Первая машина проехала с постоянной скоростью весь путь. Вторая проехала первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 26 км/ч большей скорости первой машины, в результате чего в пункт B обе машины прибыли одновременно. Найдите скорость первой машины. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 2000$ на отрезке $[2; 30]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3 - 2\cos^2 x + 3\sin(x - \pi) = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right)$.

14. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб с тупым углом B , равным 120° . Все рёбра этой призмы равны 10. Точки P и K — середины рёбер CC_1 и CD соответственно.

а) Докажите, что прямые PK и PB_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями PKB_1 и $C_1 B_1 B$.

15. Решите неравенство $3^x \sqrt{5x - x^2 + 14} \leq 27 \sqrt{5x - x^2 + 14}$.

16. $ABCD$ — прямоугольник. Окружность с центром в точке A радиуса AD пересекает продолжение стороны DA в точке K . Прямая KB пересекает прямую CD в точке P , а окружность во второй раз — в точке M .

а) Докажите, что $CP = CM$.

б) Найдите BD , если $AM = 15$, $MC = 8$.

17. Первый банк предлагает вклад под 8% годовых. Второй банк предлагает 6% годовых в первые два года и $p\%$ за третий год. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое p , при котором трёхлетний вклад во втором банке выгоднее, чем в первом.

18. Найдите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 9 = a^2 + 4x, \\ ||x - 3| - |x - 6|| = y \end{cases} \quad \text{имеет не менее трёх решений.}$$

19. В ряд выписаны n натуральных чисел. Сумма любых четырёх последовательных чисел равна 12.

- а) Возможно ли, что сумма всех чисел равна 6050, если $n = 2016$?
- б) Возможно ли, что сумма всех чисел равна 6050, если $n = 2017$?
- в) Для каждого n ($n \geq 4$) определите, сколько различных значений может принимать сумма n чисел с таким свойством.

Вариант № 22

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Клиент взял в банке кредит 135 000 рублей под 12% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 9 по 22 июля 1984 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку 86 разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за период с 17 по 22 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

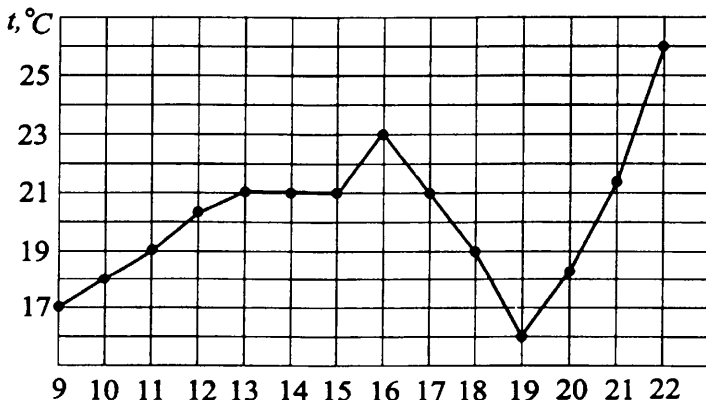


Рис. 86.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B (см. рис. 87). Найдите длину отрезка AB .

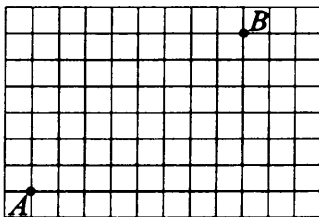


Рис. 87.

Ответ: _____.

4. В классе 25 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти на митинг. Какова вероятность того, что ученик К., который учится в этом классе, пойдёт на митинг?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\frac{x-2}{3x+17} = \frac{x-2}{2x+15}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 7$, $\operatorname{tg} B = 0,7$. Найдите BC .

Ответ: _____.

7. На рисунке 88 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

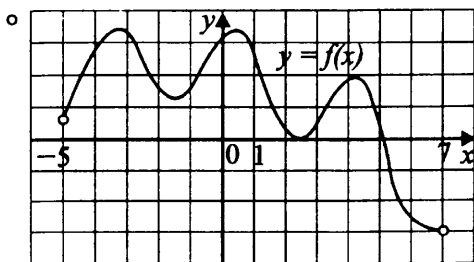


Рис. 88.

Ответ: _____.

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (см. рис. 89) (все двугранные углы прямые).

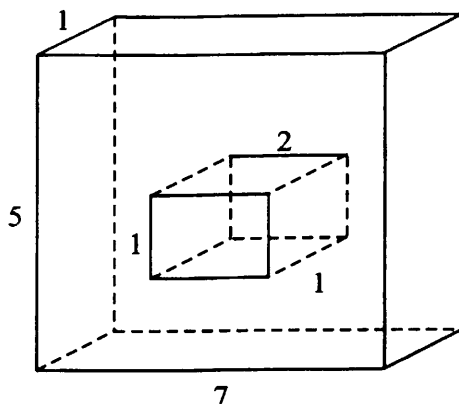


Рис. 89.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $((7x + 9y)^2 - 49x^2 - 81y^2) : 6xy$.

Ответ: _____.

10. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 185 МГц. Скорость погружения батискафа вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 20 м/с.

Ответ: _____.

11. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два лыжника. Первый прошёл с постоянной скоростью весь путь. Второй прошёл первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 3 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью $22,5 \text{ км/ч}$. В результате он пришёл в пункт B одновременно с первым лыжником. Найдите скорость первого лыжника, если известно, что она больше 15 км/ч . Ответ дайте в км/ч .

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 9x + 724$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $1 - 2\cos^2 x = \sin(\pi - x)$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right)$.

14. Основанием прямой призмы $ADCD_1B_1C_1D_1$ является ромб с острым углом A , равным 60° . Все рёбра этой призмы равны 8. Точки P и M — середины рёбер AA_1 и A_1D_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые PB и PM перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями PMB и AA_1D .

15. Решите неравенство $6^x\sqrt{15-x^2-2x} \geq 36\sqrt{15-x^2-2x}$.

16. $ABCD$ — прямоугольник. Окружность с центром в точке B радиусом AB пересекает продолжение стороны AB в точке E . Прямая EC пересекает прямую AD в точке K , а окружность во второй раз — в точке F .

а) Докажите, что $DK = DF$.

б) Найдите KC , если $BF = 20$, $DF = 21$.

17. Банк предлагает два вида вкладов: «Базовый» и «Активный». По вкладу «Базовый» начисляется 12% годовых. По вкладу «Активный» банк предлагает 8% годовых в первый год, 10% годовых во второй год и $p\%$ за третий год. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наибольшее целое p , при котором трёхлетний вклад «Базовый» выгоднее, чем «Активный».

18. Найдите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 84 = a^2 + 18x, \\ ||x - 8| - |x - 6|| = y \end{cases} \quad \text{имеет не менее трёх решений.}$$

19. В ряд выписаны n натуральных чисел. Сумма любых пяти последовательных чисел равна 20.

- а) Возможно ли, что сумма всех чисел равна 8071, если $n = 2015$?
- б) Возможно ли, что сумма всех чисел равна 8071, если $n = 2017$?
- в) Для каждого n ($n \geq 5$) определите, сколько различных значений может принимать сумма n чисел с таким свойством.

Вариант № 23

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Смартфон стоил 4200 рублей. После снижения цены он стал стоить 3738 рублей. На сколько процентов была снижена цена на смартфон?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 90) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1975 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1975 году в период с марта по июнь. Ответ дайте в градусах Цельсия.

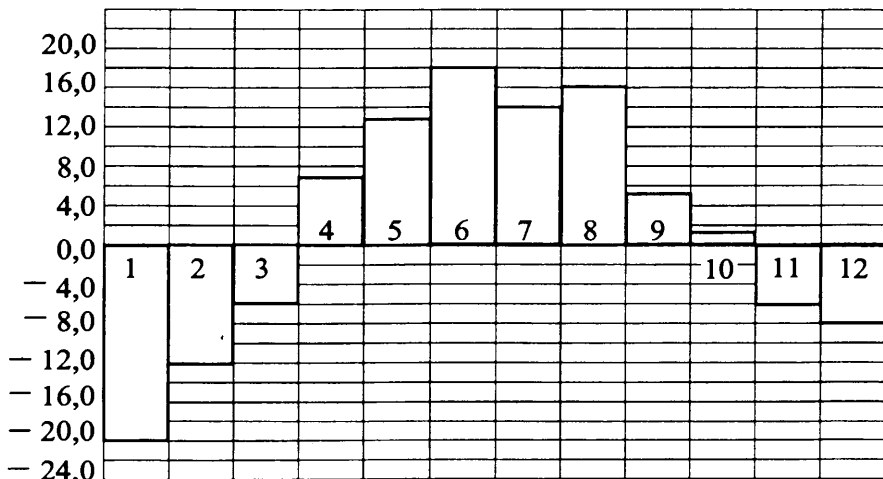


Рис. 90.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 91). Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .

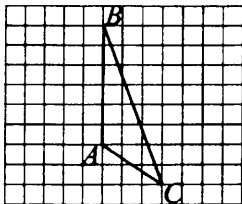


Рис. 91.

Ответ: _____.

4. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «сумма очков равна 7»?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x - 70} = 10$.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 18$, $\cos A = \frac{5\sqrt{26}}{26}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

7. На рисунке 92 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 8)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$.

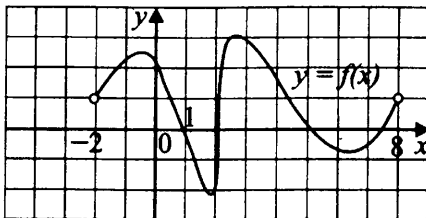


Рис. 92.

Ответ: _____.

8. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 8 (см. рис. 93). Её объём равен 64. Найдите высоту этой пирамиды.

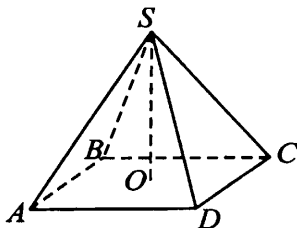


Рис. 93.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{19} + \sqrt{5})^2}{12 + \sqrt{95}}$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,7 километра, приобрести скорость 98 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответ: _____.

11. Два мотоциклиста выехали одновременно из города А в город В, расстояние между которыми 171 км. Известно, что за час первый мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем второй. Найдите скорость второго мотоциклиста, если он прибыл в пункт В на 2,5 часа позже первого мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 5x + 17$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_x^2 \sqrt{2} = 2 - \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0,8; 1]$.

14. На рёбрах AD и BD правильного тетраэдра $DABC$ взяты точки M и K соответственно так, что $MD : AM = BK : KD = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения прямой KM с плоскостью ABC . Докажите, что $AB : AL = 3$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC .

15. Решите неравенство $\frac{3^x - 5^{x+1}}{4^x - 2^{x+\log_2 5} + 4} \leq 0$.

16. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , один из углов которой равен 60° . В трапецию вписана ещё одна окружность.

а) Докажите, что центр описанной окружности трапеции лежит внутри трапеции.

б) Найдите, во сколько раз CD больше радиуса окружности, касающейся сторон AB , AD и вписанной окружности трапеции $ABCD$, если $AD > BC$.

17. Иван положил в банк некоторую сумму денег на 4 года. Перед началом каждого года он выбирает одну из двух схем начисления прибыли в наступающем году: 1) к его счёту прибавляется 10% от находящейся на счёте суммы; 2) к его счёту прибавляется 5% от находящейся на счёте суммы и 50 тысяч рублей. Известно, что по прошествии 4 лет Иван максимально может получить 417 967 рублей прибыли, если будет оптимально выбирать схему начисления прибыли. Сколько рублей положил на счёт Иван? Если возможны несколько вариантов ответов, найдите хотя бы один.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решение неравенства $\frac{(2\sqrt{x} - a)(a - x)}{\sqrt{3 - a^2 - x^2}} \geq 0$ содержит отрезок длины не менее 0,5.

19. а) Дана непостоянная арифметическая прогрессия с натуральными членами a_n . Последовательность c_n сформирована по правилу $c_n = a_n^2 + a_{n+2}^2$. Сколько простых членов подряд может быть у последовательности c_n ?

б) Дана геометрическая прогрессия b_n с натуральными членами и простым знаменателем, $S_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов последовательности S_k могут быть простыми числами?

в) Дана геометрическая прогрессия b_n с натуральными членами и простым знаменателем, $c_n = b_1 n + b_{n+1} + b_{n+2}$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов последовательности c_n могут быть простыми числами?

Вариант № 24

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Смартфон стоил 3900 рублей. После снижения цены он стал стоить 3354 рублей. На сколько процентов была снижена цена на смартфон?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 94) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1975 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1975 году в период с июля по ноябрь. Ответ дайте в градусах Цельсия.

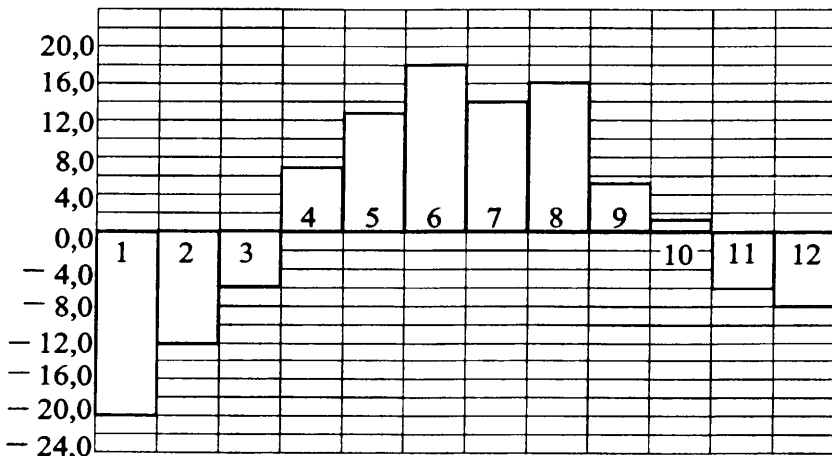


Рис. 94.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 95). Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .

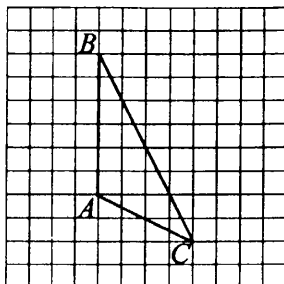


Рис. 95.

Ответ: _____.

4. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «сумма очков равна 10»?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{4x + 45} = -5$.

Ответ: _____.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 8$, $\sin A = \frac{\sqrt{207}}{16}$. Найдите высоту CH .

Ответ: _____.

7. На рисунке 96 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 8)$. Определите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

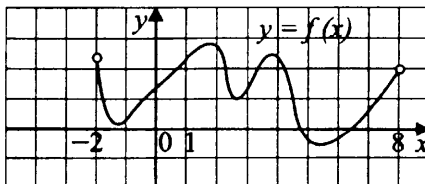


Рис. 96.

Ответ: _____.

8. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рис. 97). Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.

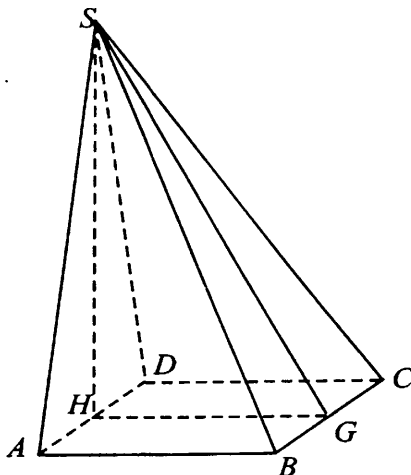


Рис. 97.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{17} + \sqrt{3})^2}{10 + \sqrt{51}}$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость 99 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответ: _____.

11. Два велосипедиста одновременно отправились из деревни А в деревню В, расстояние между которыми 21 км. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго. Найдите скорость второго велосипедиста, если он прибыл в деревню В на 10 мин позже первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = 8x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 106$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \log_x^2 \sqrt{5} = \frac{\ln 25\sqrt{5}}{\ln x} - 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1, 5; 7]$.

14. На рёбрах BS и CS правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания $AD = 10$ и боковым ребром $SA = 5\sqrt{6}$ взяты точки K и M соответственно так, что $SK : BK = CM : SM = 3 : 2$.

а) Докажите, что $KM \perp SC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью основания пирамиды.

15. Решите неравенство $\frac{9^x - 3^{x+\log_3 10} + 9}{7^x - 2^{x+3}} \leq 0$.

16. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$), один из углов которой равен 60° . В трапецию вписана ещё одна окружность.

а) Докажите, что угол ABD — острый.

б) Найдите, во сколько раз радиус вписанной окружности трапеции $ABCD$ больше радиуса большей из окружностей, касающихся внутренним образом этой вписанной окружности и диагонали BD .

17. Николай положил в банк некоторую сумму денег на 4 года. Перед началом каждого года он выбирает одну из двух схем начисления прибыли в наступающем году: 1) к его счёту прибавляется 20% от находящейся на счёте суммы; 2) к его счёту прибавляется 10% от находящейся на счёте суммы и 150 тысяч рублей. Известно, что по прошествии четырёх лет Николай максимально может получить 1 430 240 рублей прибыли, если будет оптимально выбирать схему её начисления. Сколько рублей положил на счёт Николай? Если возможны несколько вариантов ответов, найдите хотя бы один.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решение неравенства $\frac{(x-a)(a-3\sqrt{x})}{\sqrt{12-x}-2a} \geq 0$ содержит отрезок длиной не менее 2.

19. а) Дана арифметическая прогрессия с целыми неотрицательными членами a_n . Последовательность c_n сформирована по правилу $c_n = a_{n+7}^2 - a_n^2$. Сколько простых членов подряд может быть у последовательности c_n ?

б) Дана геометрическая прогрессия b_n с натуральными членами и простым знаменателем, $d_k = b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2k-1}$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов последовательности d_k могут быть простыми числами?

в) Дана геометрическая прогрессия b_n с натуральными членами и простым знаменателем, $c_n = b_1 + 2b_{n+1} + 3b_{n+2}$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов последовательности c_n могут быть простыми числами?

Вариант № 25

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Магазин закупает пакеты молока по 33 рубля за штуку и продаёт с наценкой 25%. Какое наибольшее число таких пакетов молока можно купить на 300 рублей?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 98) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1976 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в первой половине 1976 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

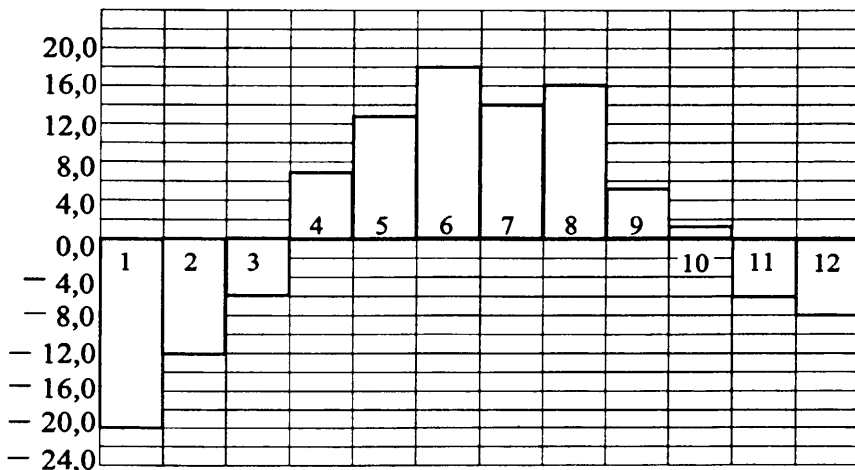


Рис. 98.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник (см. рис. 99). Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.

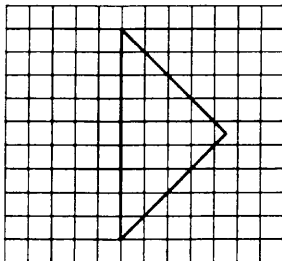


Рис. 99.

Ответ: _____.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход РО (в первый раз выпадает решка, во второй — орёл).

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $4^{4-x} = 0,8 \cdot 5^{4-x}$.

Ответ: _____.

6. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 50$, AH — высота, $CH = 40$. Найдите $\cos ACB$.

Ответ: _____.

7. На рисунке 100 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

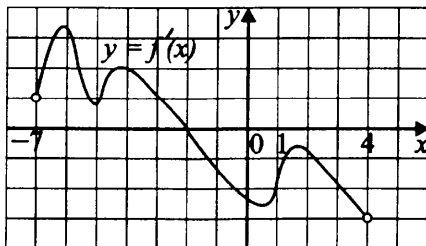


Рис. 100.

Ответ: _____.

8. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 2 и острым углом 60° . Одно из рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 4. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $2 \cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\alpha \in \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right)$.

Ответ: _____.

10. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 8t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее четырёх метров?

Ответ: _____.

11. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми 288 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге велосипедист сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути от А до В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = (8 - x)e^{x+12}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\cos 2\pi x}{1 + \operatorname{ctg} \pi x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\frac{3}{7}; 1,5\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания перпендикулярно грани SCD .

б) Найдите площадь этого сечения, если каждое ребро данной пирамиды равно 5.

15. Решите неравенство $\frac{(|2x + 1| - x - 2) \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) + 1\right)}{5x^2 + 1 - 5x} \geq 0$.

16. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E . Точки A , D , E и C лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник равнобедренный.

б) Найдите длину высоты треугольника ABC , опущенной из точки A , если длины сторон AB и AC соответственно равны 10 и 4.

17. Фермер для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться 6 единиц питательного вещества A и не менее 12 единиц питательного вещества B . Какое количество корма каждого вида надо расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты были минимальными? Используйте данные таблицы.

Питательное вещество	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	Вид I	Вид II
A	2	1
B	2	4
Цена 1 кг корма (ден. ед.)	0,2	0,3

18. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} axy + x - y + 0,5 = 0, \\ x + y + xy + 2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

19. Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x . Решите уравнения:

а) $x + S(x) = 2015$;

б) $x + S(x) + S(S(x)) = 2015$;

в) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2015$.

Вариант № 26

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Магазин закупает пакеты молока по 34 рубля за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких пакетов молока можно купить на 300 рублей?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 101) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1976 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру во второй половине 1976 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

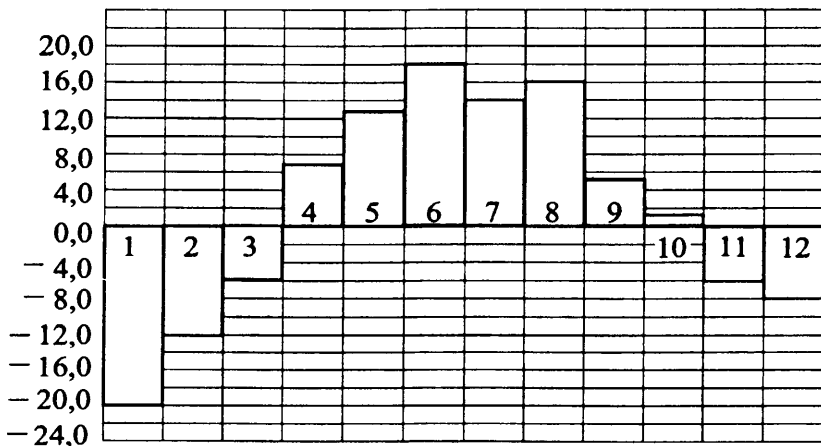


Рис. 101.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник (см. рис. 102). Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.

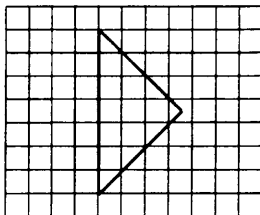


Рис. 102.

Ответ: _____.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что в первый и во второй раз выпадает решка.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $2^{2+x} = 3,5 \cdot 7^{2+x}$.

Ответ: _____.

6. В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 25$, высота AH равна 24. Найдите $\cos ACB$.

Ответ: _____.

7. На рисунке 103 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. В какой точке отрезка $[-6; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

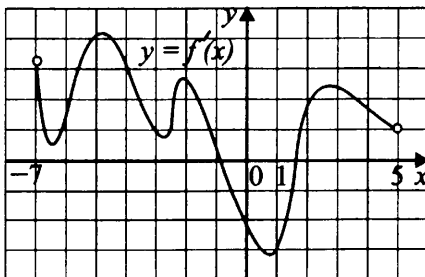


Рис. 103.

Ответ: _____.

8. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 4 и острым углом 60° . Одно из рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этой грани угол 60° и равно 8. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $3 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = -0,8$ и $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Ответ: _____.

10. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 7t - 2t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее четырёх метров?

Ответ: _____.

11. Автогонщик выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми 252 км. На следующий день он отправился обратно, увеличив скорость на 22 км/ч. По дороге он сделал остановку на 33 минуты. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько от А до В. Найдите скорость автогонщика на пути из города А в город В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x - 9)e^{2x+5}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 3\pi x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \pi x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-1\frac{2}{5}; 2,5\right]$.

14. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды.

б) Найдите площадь этого сечения, если каждое ребро данной пирамиды равно 6 и $AM : MS = 1 : 3$.

15. Решите неравенство $\frac{(|3x + 2| - x - 6) \cdot \left(\log_{\frac{1}{2}}(x + 10) + 3\right)}{2^{x^2+2} - 2^x} \geq 0$.

16. Окружность касается продолжений сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E . Точки A , D , E и C лежат на одной окружности, причём точка A лежит между точками B и D , а точка C — между точками B и E .

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если длины сторон AB и AC соответственно равны 26 и 2.

17. Финансовый консультант даёт рекомендации клиенту по оптимальному инвестиционному портфолио. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долларов) в два наименования акций крупных предприятий A и B . Цены на акции предприятия A составляют 5 долларов за акцию, предприятия B — 3 доллара за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести 6000 акций обоих наименований. По оценке консультанта прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: предприятие A — 1,1 доллара на 1 акцию, предприятие B — 0,9 доллара на 1 акцию. Сколько акций каждого предприятия должен посоветовать купить консультант клиенту, чтобы прибыль от инвестиций была максимальной?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} (a - x^2)(a + x - 2) < 0, \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$$
 не имеет решений.

19. Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x . Решите уравнения:

а) $x + S(x) = 2017$;

б) $x + S(x) + S(S(x)) = 2017$;

в) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2017$.

Вариант № 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 января составляли 19 652 киловатт-часов, а 1 февраля — 19 801 киловатт-часов. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за январь, если 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 104) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме количество месяцев, в которых среднемесячная температура была ниже 8°C .

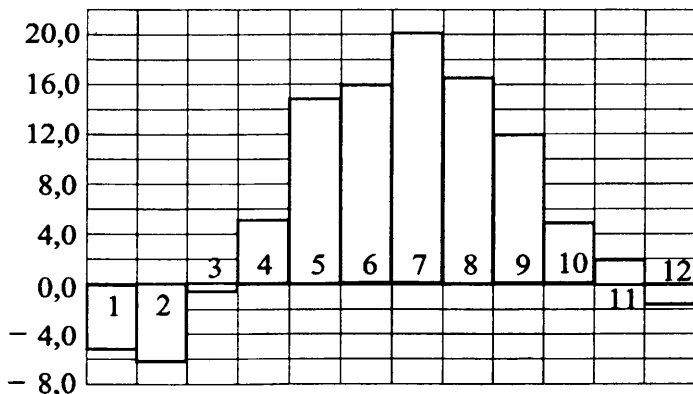


Рис. 104.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 105).

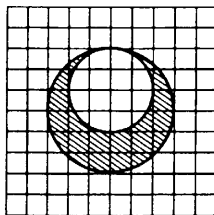


Рис. 105.

Ответ: _____.

4. В группе туристов 50 человек. Их микроавтобусом в несколько приёмов завозят к началу маршрута по 10 человек за рейс. Порядок, в котором микроавтобус перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. поедет первым рейсом микроавтобуса.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(7 - x) = 4$.

Ответ: _____.

6. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 9$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите большую высоту параллелограмма.

Ответ: _____.

7. На рисунке 106 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих промежутку $[-4; 3]$

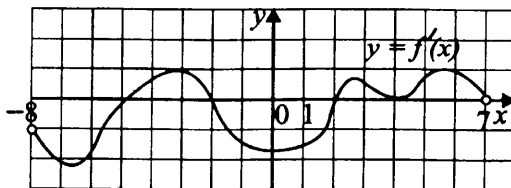


Рис. 106.

Ответ: _____.

8. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 16. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём пирамиды $EABC$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $6 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ$.

Ответ: _____.

10. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 6$ кг и радиусом $R = 12$ см и двух боковых массами $M = 2$ кг и радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг}\cdot\text{см}^2$, задан формулой

$$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $770 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

11. Два велосипедиста отправились одновременно из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 225 километров. Первый ехал со скоростью на 7 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл в пункт B на 3,5 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x + 3)^2 e^{x-2016}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $(2 \sin^2 4x - 3 \cos 4x) \cdot \sqrt{\lg x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 8, боковое ребро равно 6. Точка K принадлежит ребру $A_1 B_1$ и делит его в отношении 5 : 3, считая от вершины A_1 .

а) Постройте сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и K .

б) Найдите площадь этого сечения.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} 5 \geq \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} (7 - 2^x)$.

16. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую BC в точке P . В каком отношении прямая, проходящая через точку P и центр окружности, делит сторону AB (считая от точки A), если $AN : ND = 1 : 4$?

17. Вкладчик положил две одинаковые суммы под $r\%$ годовых в банки «А» и «Б». Через год условия по вкладу в банке «А» изменились и он понизил годовую ставку до 10% годовых, в то время как банк «Б» оставил годовую ставку на прежнем уровне. Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке «Б» через 3 года будет по крайней мере на 20% больше, чем вклад в банке «А».

18. Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{a^2 + 9}, \\ y = |2 - a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске написано более 20, но менее 30 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант № 28

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 мая составляли 12 376 киловатт-часов, а 1 июня — 12 521 киловатт-часов. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за май, если 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 107) показана среднемесячная температура воздуха в городе *N* за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме количество месяцев, в которых среднемесячная температура была ниже 0 °С.

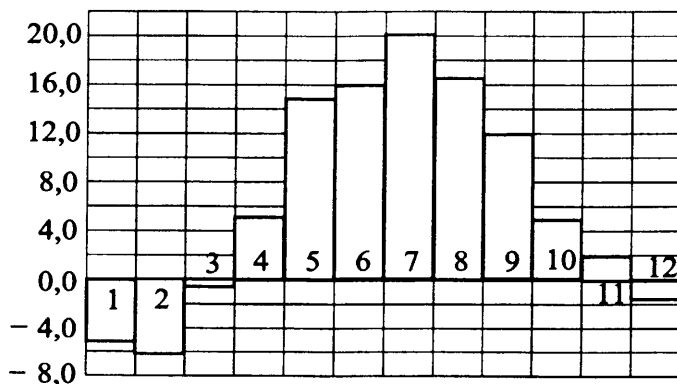


Рис. 107.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 8. Найдите площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 108).

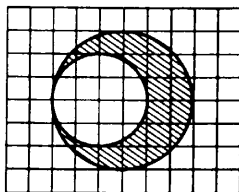


Рис. 108.

Ответ: _____.

4. В группе туристов 60 человек. Их микроавтобусом в несколько приёмов завозят к началу маршрута по 15 человек за рейс. Порядок, в котором микроавтобус перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. поедет последним рейсом микроавтобуса.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_5(18 + x) = -2$.

Ответ: _____.

6. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 12$, $AD = 16$, $\sin A = \frac{5}{8}$. Найдите меньшую высоту параллелограмма.

Ответ: _____.

7. На рисунке 109 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих промежутку $[-6; -2]$

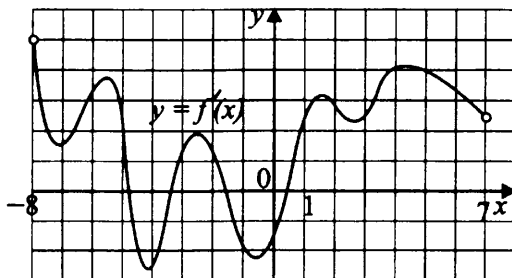


Рис. 109.

Ответ: _____.

8. Объём правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 24. Точка K — середина ребра CC_1 (см. рис. 110). Найдите объём пирамиды $KBCD$.

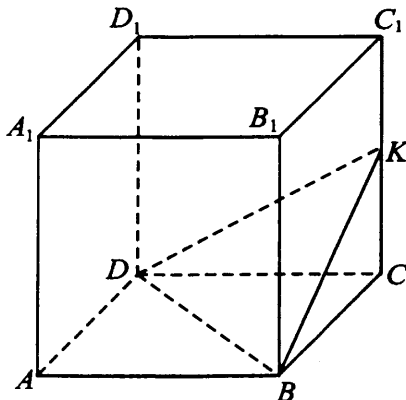


Рис. 110.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $5 \operatorname{tg} 16^\circ \cdot \operatorname{tg} 74^\circ$.

Ответ: _____.

10. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 9$ кг и радиусом $R = 9$ см и двух боковых массами $M = 1$ кг и радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, задан формулой

$$I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $485,5 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: _____.

11. Два велосипедиста отправились одновременно из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 112 километров. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл в пункт B на 40 мин раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, прибывшего в пункт B первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x + 8)^2 e^{x+52}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $(4 \cos^2 3x - 4 \sin 3x - 1) \cdot \sqrt{-\operatorname{ctg} x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 9, боковое ребро равно 14. Точка K принадлежит ребру $A_1 B_1$ и делит его в отношении 2 : 7, считая от вершины A_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и K , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt{5}-\sqrt{2}} 4 \leq \log_{\sqrt{5}-\sqrt{2}} (5 - 3^x)$.

16. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую BC в точке P . В каком отношении делит сторону AB (считая от точки B) прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AN : ND = 1 : 2$?

17. Вкладчик положил две одинаковые суммы под $r\%$ годовых в банки «А» и «Б». Через год условия по вкладу в банке «А» изменились и он понизил годовую ставку до 8% годовых, в то время как банк «Б» оставил годовую ставку на прежнем уровне. Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке «Б» через 3 года будет по крайней мере на 16% больше, чем вклад в банке «А».

18. Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{a^2 + 1}, \\ 3x = |a^2 - 4| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 11, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
- б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?
- в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Вариант № 29

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Артём отправил SMS-сообщения с приглашением на отчётный концерт 9 своим знакомым. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Артёма было 32 рубля. Сколько рублей останется у Артёма после отправки всех сообщений?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 111) показано количество посетителей сайта «Новости» во все дни с 15 по 30 августа 2011 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта «Новости» было наименьшим за период с 15 по 21 августа.

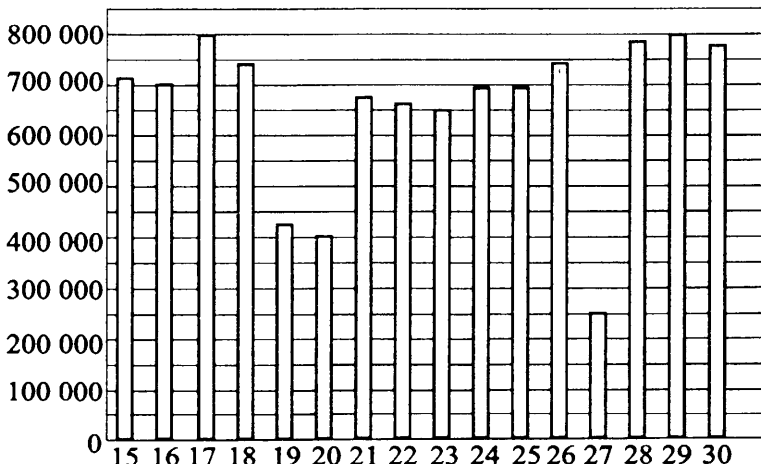


Рис. 111.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображён круг площадью 36. Найдите площадь заштрихованного сектора (см. рис. 112).

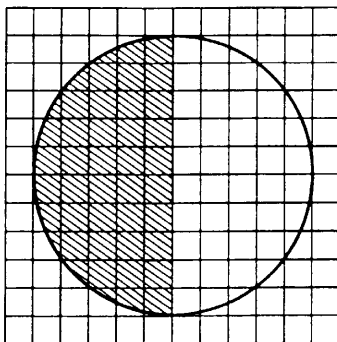


Рис. 112.

Ответ: _____.

4. В секции 21 спортсмен, среди них два друга — Андрей и Михаил. Спортсменов случайным образом делят на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Михаил окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(28 + 4x) = \log_3(18 - x)$.

Ответ: _____.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 43. Косинус острого угла трапеции равен 0,7. Найдите боковую сторону.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = 3x + 2$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 + 7x + c$. Найдите c .

Ответ: _____.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 6$ и $AA_1 = 8$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(16a^2 - 25) \cdot \left(\frac{1}{4a - 5} - \frac{1}{4a + 5} \right) + a - 13$ при $a = 143$.

Ответ: _____.

10. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 280$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с).

Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 7 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 328$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Ответ: _____.

11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 221 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения реки, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 37 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 18 \cos x + 9\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}\pi + 16 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin x(2 \sin x - 1) + \sqrt{3} \sin x + \sin \frac{4\pi}{3} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

14. В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 5. Ребро CD перпендикулярно плоскости основания. Точки K , L , и M лежат на рёбрах AD , BD и AC соответственно. Известно, что $AD = 10$, $DK = 4$, $CM = 2$ и $KL \parallel AB$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLM .

б) Найдите площадь этого сечения.

15. Решите неравенство $(x^2 + 2x - 3) \log_{2x-1}(4x^2 - 11x + 7) \leq 0$.

16. К окружности, вписанной в правильный треугольник ABC , проведена касательная, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно и касающаяся окружности в точке T .

а) Докажите, что периметр треугольника MNC равен стороне треугольника ABC .

б) Найдите $MT : TN$, если известно, что $CM : MA = 1 : 4$.

17. В июне планируется взять кредит в банке на сумму 455 000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;

— ежегодные выплаты составляют одну и ту же постоянную величину.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 648 000 рублей?

18. При каких значениях параметра a уравнение $x - a = \sqrt{a} + \sqrt{x}$ имеет единственное решение?

19. Существуют ли такие восемь различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в шесть раз;

б) ровно в пять раз;

в) ровно в четыре раза?

Вариант № 30

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Катя отправила SMS-сообщения с приглашением на отчётный концерт 14 своим знакомым. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Кати было 23 рубля. Сколько рублей останется у Кати после отправки всех сообщений?

Ответ: _____.

2. На диаграмме (см. рис. 113) показано количество посетителей сайта «Новости» во все дни с 15 по 30 августа 2011 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта «Новости» было наименьшим за период с 22 по 30 августа.

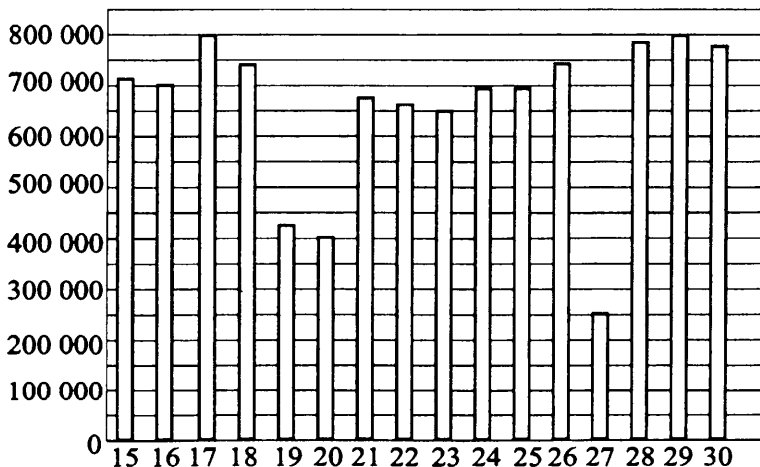


Рис. 113.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображён круг площадью 26. Найдите площадь заштрихованного сектора (см. рис. 114).

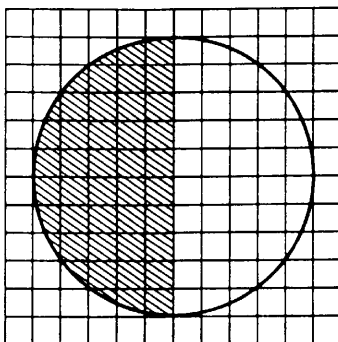


Рис. 114.

Ответ: _____.

4. В секции 16 спортсменов, среди них две подруги — Оля и Маша. Спортсменок случайным образом делят на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Оля и Маша окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_7(x^2 - 4x) = \log_7(x^2 + 6)$.

Ответ: _____.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 22. Косинус острого угла трапеции равен 0,4. Найдите боковую сторону.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = -2x + 5$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x + 7$. Найдите a .

Ответ: _____.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 5$ и $AA_1 = 4$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(25a^2 - 36) \cdot \left(\frac{1}{5a - 6} - \frac{1}{5a + 6} \right) + a - 37$

при $a = 157$.

Ответ: _____.

10. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой 400 Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка больше первого: она зависит от скорости тепловогоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек,

стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 306$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Ответ: _____.

11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 299 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 м/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 41 час после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 24 + \frac{9\pi}{4} - 9x - 9\sqrt{2} \cos x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2} \right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \cos x \left(\cos x + \cos \frac{5\pi}{4} \right) + \cos x + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right)$.

14. В правильном тетраэдре $DABC$ с ребром 5 на рёбрах AD , BD и AC выбраны точки K , L и M соответственно так, что $KD = MC = 2$, $LD = 4$.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью KLM .

б) Найдите площадь этого сечения.

15. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 7x + 3}{\log_{3x+2}(x^2 - 5x + 7)} \leq 0$.

16. К окружности, вписанной в правильный треугольник ABC , проведена касательная, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно и касающаяся окружности в точке T .

а) Докажите, что периметр четырёхугольника $KNML$ равен $2MN + BK$, где K и L — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC соответственно.

б) Найдите $CM : MA$, если известно, что $MT : TN = 6 : 1$.

17. В июне планируется взять кредит в банке на сумму 6 000 000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;

— ежегодные выплаты таковы, что сумма долга каждый год уменьшается на одну и ту же величину.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что максимальная годовая выплата составит 1 800 000 рублей?

18. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-a} - a = x$ имеет единственное решение?

19. Существуют ли такие восемьсот различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в 500 раз;

б) ровно в 400 раз?

в) Найдите наименьшее возможное натуральное число, равное отношению среднего арифметического этих чисел к их наибольшему общему делителю.

Вариант № 31

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В обменном пункте 1 тайландский бат стоит 2 рубля 20 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на баты и купили 2 ананаса по 28 бат за 1 штуку. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 8 по 21 июля 1985 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку 115, какая была температура 14 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Рис. 115.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображён круг. Найдите площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 15 (см. рис. 116).

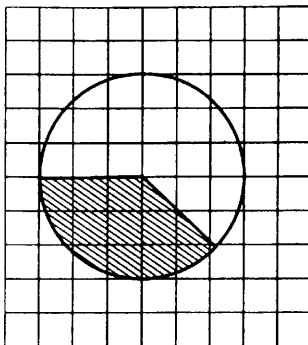


Рис. 116.

Ответ: _____.

4. На рисунке 117 изображён лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад она не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью мышка придёт к выходу Г.

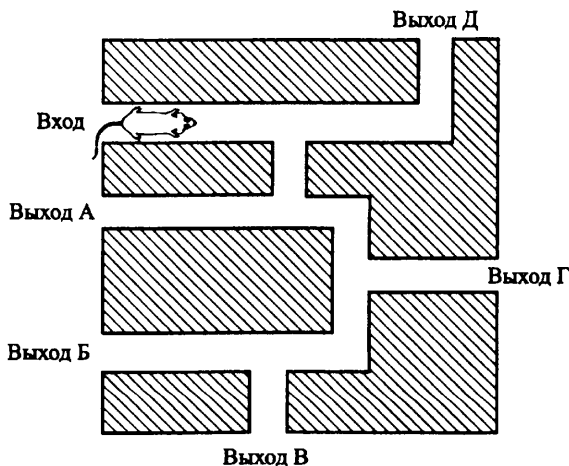


Рис. 117.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: _____.

6. Большее основание равнобедренной трапеции равно 24. Боковая сторона равна 7. Синус острого угла равен $\frac{\sqrt{33}}{7}$. Найдите меньшее основание.

Ответ: _____.

7. На рисунке 118 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

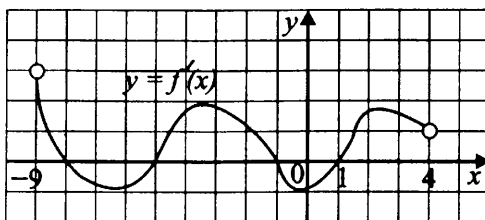


Рис. 118.

Ответ: _____.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $5 \log_{1,6} 3 \cdot \log_3 0,625$.

Ответ: _____.

10. Груз массой 0,4 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,3$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 3 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11. Моторная лодка прошла против течения реки 160 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 8 часов меньше времени. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в неподвижной воде равна 15 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 32 \operatorname{tg} x - 32x - 8\pi + 103$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2(\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 6. Точка M — середина ребра CC_1 , на ребре BB_1 отмечена точка N , такая, что $BN : NB_1 = 1 : 2$.

а) В каком отношении плоскость AMN делит ребро DD_1 ?

б) Найдите угол между плоскостями ABC и AMN .

15. Решите неравенство $\log_x 2 + 2\log_{2x} 2 \geq 2$.

16. Биссектриса острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает её основание в точке K . В этой трапеции расположены две равные окружности радиусом 2, касающиеся её сторон и друг друга, причём K — одна из точек касания.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите площадь трапеции.

17. Брокер продавал акции на бирже, которая работает ежедневно. В первый день он продал 1 акцию по 999 рублей, во второй день продал 2 акции по 998 рублей, в третий день продал 3 акции по 997 рублей, и так далее до тех пор, когда в последний день он продал 999 акций по 1 рублю. В какой по счёту день его выручка была наибольшей и какую сумму денег брокер выручил в этот день?

18. При каких значениях a система уравнений имеет ровно два решения?

$$\begin{cases} ||x| - 5| + |y - 4| = 3, \\ |x + 2| + |y + 1| = a. \end{cases}$$

19. Можно ли в бесконечно убывающей последовательности

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$ выбрать:

а) пять чисел;

б) пятьдесят чисел;

в) бесконечное множество чисел,

которые образуют арифметическую прогрессию.

Вариант № 32

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В обменном пункте 1 тайландский бат стоит 2 рубля 20 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на баты и купили 3 порции папайи по 22 бата за 1 порцию. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Ответ: _____.

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 8 по 21 июля 1985 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку 119, какая была температура 21 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Рис. 119.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге изображён круг. Найдите площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 15 (см. рис. 120).

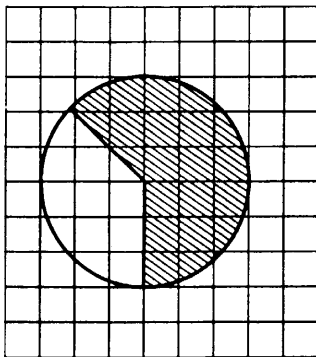


Рис. 120.

Ответ: _____.

4. На рисунке 121 изображён лабиринт. Жук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад жук не может, поэтому на каждом разветвлении он выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью жук придёт к выходу Д.

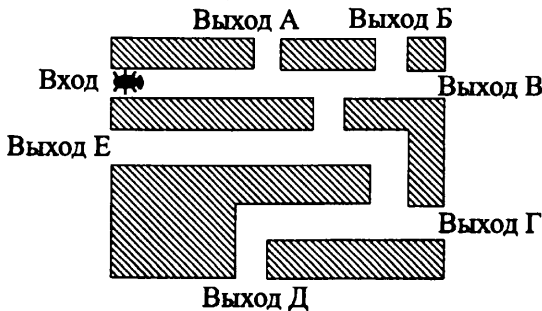


Рис. 121.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: _____.

6. Большее основание равнобедренной трапеции равно 30. Боковая сторона равна 9. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите меньшее основание.

Ответ: _____.

7. На рисунке 122 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

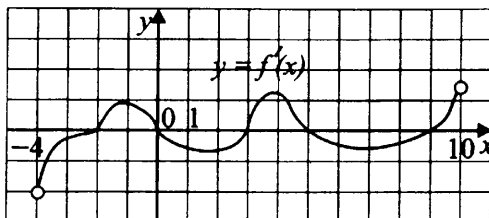


Рис. 122.

Ответ: _____.

8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A_1, B_1, B, C, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 6.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $3 \log_{0,4} 5 \cdot \log_5 2,5$.

Ответ: _____.

10. Груз массой 0,06 кг колеблется на пружине. Его скорость меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую

энергию груза через 2 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

11. Моторная лодка прошла против течения реки 105 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 12x - 12 \operatorname{tg} x - 18$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2(\sin x - \cos x) = \operatorname{tg} x - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 8, боковые рёбра равны 10. Точка M — середина ребра CC_1 , на ребре BB_1 отмечена точка N , такая, что $BN : NB_1 = 2 : 3$.

а) В каком отношении плоскость ANM делит ребро DD_1 ?

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью ANM .

15. Решите неравенство $2 \log_x 3 + 3 \log_{3x} 3 \leq 2$.

16. Биссектриса острого угла параллелограмма пересекает его сторону в точке K . Окружность радиусом 3 проходит через точку пересечения диагоналей и касается трёх сторон параллелограмма, причём K — одна из точек касания.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите площадь параллелограмма.

17. Брокер продавал акции на бирже, которая работает ежедневно. В первый день он продал 1 акцию по 99 рублей, во второй день продал 2 акции по 98 рублей, в третий день продал 3 акции по 97 рублей, и так далее до тех пор, когда в последний день он продал 99 акций по 1 рублю. Какую сумму денег брокер выручил в этот период?

18. При каких значениях a система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |x| - 3 + |y - 5| = 4, \\ |x - 2| + |y - 3| = a. \end{cases}$$

19. Можно ли в бесконечно убывающей последовательности $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4};$

$\frac{1}{5}; \dots$ выбрать:

- а) четыре числа;
- б) сто чисел;
- в) бесконечное множество чисел,

которые образуют арифметическую прогрессию.

Вариант № 33

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В октябре 1 кг апельсинов стоил 56 рублей. В ноябре апельсины подорожали на 15%. Сколько рублей стоил 1 кг апельсинов после подорожания в ноябре?

Ответ: _____.

2. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке 123 изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тонна-силах). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тонна-силах) при скорости 400 км/ч.

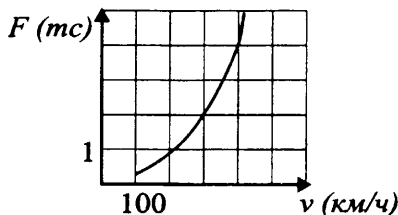


Рис. 123.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A , B и C (см. рис. 124). Найдите расстояние от точки A до прямой BC .

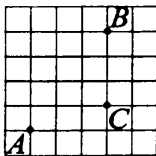


Рис. 124.

Ответ: _____.

4. За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\cos \frac{\pi(x+5)}{6} = 0,5$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: _____.

6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $\frac{1}{3}$ длины окружности (см. рис. 125). Ответ дайте в градусах.

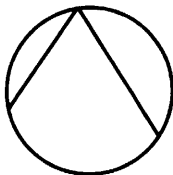


Рис. 125.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = 3x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 6x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 2. Найдите расстояние между точками A и E_1 (см. рис. 126).

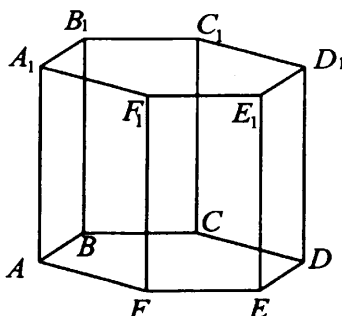


Рис. 126.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $-4 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$.

Ответ: _____.

10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 40% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

11. Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 2 детали больше?

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (51 - x)e^{x-50}$ на отрезке $[42; 70]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin x + 1}{1 - \cos 2x} = \frac{\sin x + 1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6. Через середины рёбер AC и BB_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость.

а) Докажите, что ребро BC делится секущей плоскостью в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

15. Решите неравенство $\log_3(x - 1) \leq 4 - 9\log_9(x - 1)$.

16. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 24$, $AD = 23$. К окружности, радиус которой равен 12, с центром в точке A из точки C проведена касательная, которая пересекает сторону AD в точке M .

а) Докажите, что $CM = 2AM$.

б) Найдите длину отрезка AM .

17. Мясокомбинат производит котлеты из свиного фарша и котлеты из говяжьего фарша. Ниже приведена таблица, в которой указаны себестоимость, отпускная цена, а также производственные возможности комбината по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид продукции	Себестоимость (руб. за центнер)	Отпускная цена (руб. за центнер)	Производственные возможности
Котлеты из свиного фарша	15 000	22 000	36 (центнеров в мес.)
Котлеты из говяжьего фарша	18 000	28 000	30 (центнеров в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 12 центнеров. Предполагая, что вся продукция находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить мясокомбинат от производства котлет за 1 месяц.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 + 3x^2 - x \log_3(a + 1) + 5 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 2]$.

19. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 24?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 24?

в) Для какого наибольшего натурального числа n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{3n} больше кратных 24, чем среди чисел $a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{7n}$, если известно, что разность прогрессии равна 1?

Вариант № 34

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В сентябре 1 кг яблок стоил 40 рублей. В декабре яблоки подорожали на 60%. Сколько рублей стоил 1 кг яблок после подорожания в декабре?

Ответ: _____.

2. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке 127 изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тонна-силах). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тонна-силах) при скорости 300 км/ч.

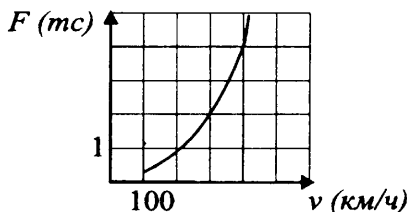


Рис. 127.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A , B и C (см. рис. 128). Найдите расстояние от точки A до прямой BC .

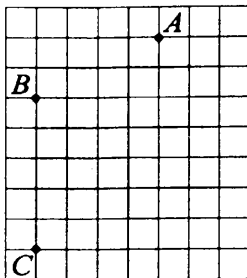


Рис. 128.

Ответ: _____.

4. За круглый стол на 21 стул в случайном порядке рассаживаются 2 мальчика и 19 девочек. Найдите вероятность того, что оба мальчика будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\cos \frac{\pi(x-9)}{6} = -0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: _____.

6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $\frac{5}{18}$ длины окружности (см. рис. 129). Ответ дайте в градусах.

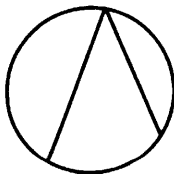


Рис. 129.

Ответ: _____.

7. Прямая $y = -2x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 11x - 3$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $\sqrt{2}$. Найдите квадрат расстояния между точками B и E_1 (см. рис. 130).

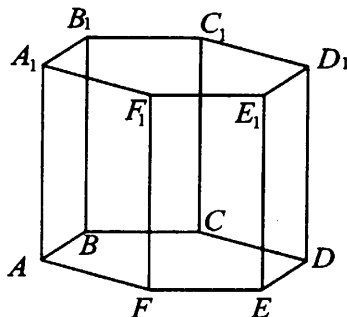


Рис. 130.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $-7 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,8$.

Ответ: _____.

10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 50% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

11. Заказ на 360 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 2 детали больше?

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 11)e^{x-10}$ на отрезке $[8; 14]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin x - 1}{1 + \cos 2x} = \frac{\sin x - 1}{1 + \cos(\pi + x)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 12. Через середины рёбер AC и BB_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость.

а) Докажите, что ребро BC делится секущей плоскостью в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

15. Решите неравенство $\frac{1}{\log_x 0,5} + 6 \geq 16 \log_{4x} 2$

16. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 16$, $AD = 22$. К окружности, радиус которой равен 8, с центром в точке A из точки C проведена касательная, которая пересекает сторону AD в точке M .

а) Докажите, что $CM = 2AM$.

б) Найдите длину отрезка AM .

17. Цех по производству полуфабрикатов выпускает вареники с вишней и картофелем. Ниже приведена таблица, в которой указаны себестоимость, отпускная цена, а также производственные возможности цеха по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид продукции	Себестоимость (руб. за центнер)	Отпускная цена (руб. за центнер)	Производственные возможности
Вишня	11 000	17 000	80 (центнеров в мес.)
Картофель	9 000	18 000	105 (центнеров в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 5 центнеров. Предполагая, что вся продукция находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которая может быть получена от производства вареников за 1 месяц.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^3 - x^2 - x \log_2(a - 1) + 12 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 3]$.

19. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 90?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{40} ровно 11 чисел делятся на 90?

в) Для какого наибольшего натурального числа n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{3n} больше кратных 90, чем среди чисел $a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{7n}$, если дополнительно известно, что разность прогрессии равна 1?

Вариант № 35

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В школе 225 выпускников 9-х и 11-х классов, из них 60% — выпускники 9-х классов. Среди выпускников 11-х классов 70% планируют сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне. Сколько выпускников планирует сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне, если выпускники 9-х классов не сдают ЕГЭ по математике?

Ответ: _____.

2. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортёрной ленте. При проектировании транспортёра необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортёра. На рисунке 131 изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортёра к горизонту при расчётной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъёма в градусах, на оси ординат — сила натяжения транспортёрной ленты (в килограмм-силах). При каком угле наклона сила натяжения достигает 200 кгс? Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция (см. рис. 132). Найдите длину средней линии этой трапеции.

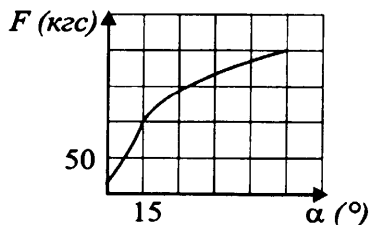


Рис. 131.

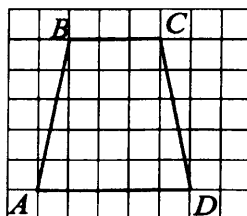


Рис. 132.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что ручка бракованная, равна 0,05. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие ручки. Найдите вероятность того, что обе ручки окажутся исправными.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения. $\log_3(4x - 8) = 2 \log_3 12$.

Ответ: _____.

6. Хорда AB делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 13 : 7 (см. рис. 133). Под каким углом видна эта хорда из точки C , принадлежащей большей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.

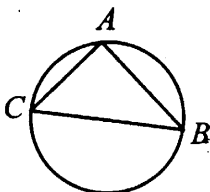


Рис. 133.

Ответ: _____.

7. На рисунке 134 изображён график функции $y = f(x)$ (являющийся ломаной линией, составленной из трёх прямолинейных отрезков). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(0)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

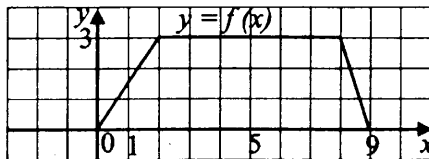


Рис. 134.

Ответ: _____.

8. На рисунке (см. рис. 135) изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 .

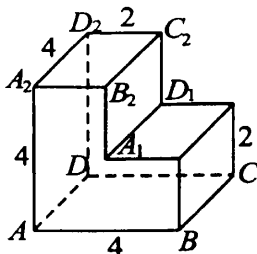


Рис. 135.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{16}{\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right)}$.

Ответ: _____.

10. После дождя уровень воды в колоде может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,4 с. Насколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,1 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 420 литров она заполняет на 15 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 280 литров?

Ответ: _____.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (5x^2 - 70x + 70)e^{x-12}$ на отрезке $[10; 15]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-2x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

14. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1D_1$, M и N — середины рёбер AB и BC соответственно, точка K — середина MN .

а) Докажите, что прямые KD_1 и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями MND_1 и ABC , если $AB = 8$, $AA_1 = 6\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство $\frac{11 \log_4 x - 28}{2 \log_4 x - 1} \geq 4 - 3 \log_4 x$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке P . Прямая MN касается первой окружности в точке M , а второй — в точке N .

а) Докажите, что $\triangle MNP$ прямоугольный.

б) Найдите площадь $\triangle MNP$, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 16.

17. 10 января 2016 года Тамара взяла в банке «Максимум» 1,5 млн рублей в кредит. Порядок выплаты кредита следующий: 10 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает оставшийся долг на 1%), затем (сразу же после начисления процентов) Тамара переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Тамара может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 000 рублей?

18. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

19. Кристина задумала трёхзначное натуральное число.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 3?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 28?
- в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Вариант № 36

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В школе 240 выпускников 9-х и 11-х классов, из них 55% — выпускники 9-х классов. Среди выпускников 11-х классов 75% планируют сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне. Сколько выпускников планирует сдавать ЕГЭ по математике на профильном уровне, если выпускники 9-х классов не сдают ЕГЭ по математике?

Ответ: _____.

2. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортёрной ленте. При проектировании транспортёра необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортёра. На рисунке 136 изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортёра к горизонту при расчётной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъёма в градусах, на оси ординат — сила натяжения транспортёрной ленты (в килограмм-силах). При каком угле наклона сила натяжения достигает 100 кгс? Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция (см. рис. 137). Найдите длину средней линии этой трапеции.

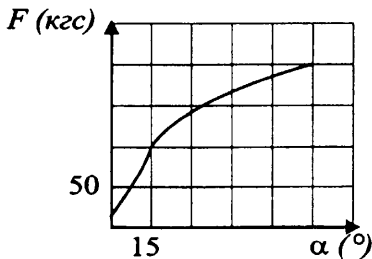


Рис. 136.

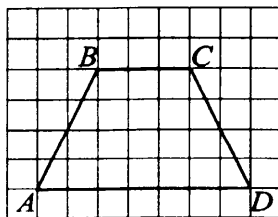


Рис. 137.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что аккумулятор не заряжен, равна 0,15. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой два таких аккумулятора. Найдите вероятность того, что оба аккумулятора окажутся заряжены.

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_5(2x + 70) = 2 + \log_5 10$.

Ответ: _____.

6. Точки A, B, C , расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 4 (см. рис. 138). Найдите больший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.

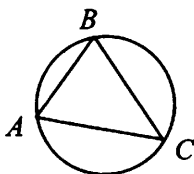


Рис. 138.

Ответ: _____.

7. На рисунке 139 изображён график функции $y = f(x)$ (являющийся ломаной линией, составленной из трёх прямолинейных отрезков). Пользуясь рисунком, вычислите $F(9) - F(5)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

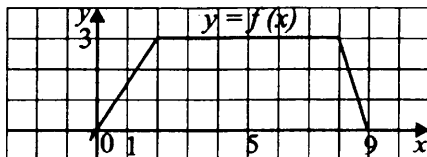


Рис. 139.

Ответ: _____.

8. На рисунке 140 изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат тангенса угла D_2BD .

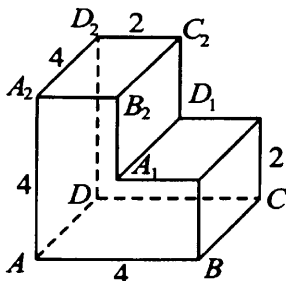


Рис. 140.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{52}{\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)}$.

Ответ: _____.

10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,5 с. Насколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,3 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: _____.

11. Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 36 литров?

Ответ: _____.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (7x^2 - 56x + 56)e^x$ на отрезке $[-3; 2]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1D_1$, точка M лежит на ребре CD , точка N лежит на ребре BC , при этом $CM = \frac{1}{3}CD$, $CN = \frac{1}{3}BC$, точка L — середина MN .

а) Докажите, что прямые A_1L и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями MNA_1 и ABC , если $AB = 6$, $AA_1 = 5\sqrt{6}$.

15. Решите неравенство $\frac{3 \log_9 x + 1}{2 \log_9 x + 3} \leq 3 - \log_9 x$.

16. Две окружности касаются внешним образом в точке T . Прямая KN касается первой окружности в точке K , а второй — в точке N . Известно, что TS — диаметр окружности, описанной около $\triangle KNT$.

а) Докажите, что прямые SN и KS перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $KTNS$, если радиусы окружностей равны 1 и 3.

17. В январе 2017 года Тимофей взял в банке «Счастливый» 2 млн рублей в кредит. Порядок выплаты кредита следующий: в январе каждого следующего года банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает оставшийся долг на 2%), затем Тимофей переводит в банк платёж (сразу же после начисления процентов). На какое минимальное число лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 400 000 рублей?

18. Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (|y|-4)^2 = 9, \\ x^2 + (y-4)^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет ровно 2 решения.}$$

19. Света задумала трёхзначное натуральное число, не кратное 100.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 40?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 84?
- в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Вариант № 37

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Для приготовления дрожжевого теста на 1 кг муки требуется 13 г сухих дрожжей. Сухие дрожжи продаются в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пакетиков сухих дрожжей нужно купить для приготовления теста из 3 кг муки?

Ответ: _____.

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первую минуту (см. рис. 141).

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 142). Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C .

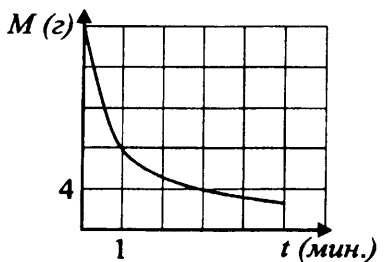


Рис. 141.

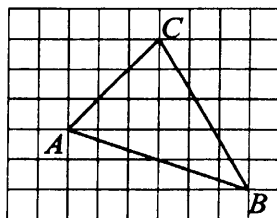


Рис. 142.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что новый планшет в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,075. В некотором городе из 800 проданных планшетов в течение года в гарантийную мастерскую поступили 72 штуки. Насколько отличается относительная частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $5^{\log_{25}(10x-8)} = 8$.

Ответ: _____.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB , BC , CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 75° , 84° , 51° , 150° (см. рис. 143). Найдите угол B этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

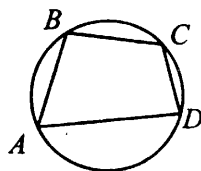


Рис. 143.

7. На рисунке 144 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 6x^2 + 13x - 5$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

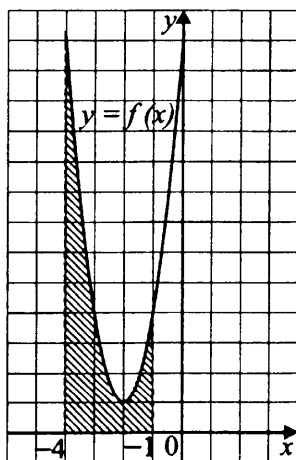


Рис. 144.

Ответ: _____.

8. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15)$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 12$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с².

За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м).

Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 16 метров. Ответ выразите в секундах.

Ответ: _____.

11. Один рабочий может выполнить заказ за 9 часов, другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят весь заказ оба рабочих вместе?

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = (4x - 5) \cos x - 4 \sin x + 12$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x - 5 \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$.

14. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.

а) Докажите, что прямые $B_1 D_1$ и AC_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми $B_1 D_1$ и AC_1 , если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

15. Решите неравенство $\frac{\log_{25}(2-x) + \log_{35} \frac{1}{2-x}}{\log_{35} x^3 - 3 \log_{49} x} \leq \log_{49} 25$.

16. Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. Из точки O_1 проведена касательная $O_1 K$ ко второй окружности (K — точка касания), а из точки O_2 проведена касательная $O_2 L$ к первой окружности (L — точка касания), точки K и L лежат по разные стороны от прямой $O_1 O_2$.

а) Докажите, что $\angle O_1 K L = \angle O_1 O_2 L$.

б) Найдите радиус меньшей окружности, если дополнительно известно, что он в 4 раза меньше радиуса большей окружности, а площадь четырёхугольника $O_1 K O_2 L$ равна $54 + 9\sqrt{6}$.

17. Тимур приобрёл ценную бумагу за 7 тысяч рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 3 тысячи рублей. По истечении любого числа лет Тимур может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. По истечении скольких лет после покупки Тимур должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 5|x| + 12|y - 2| = 60, \\ y^2 - a^2 = 4(y - 1) - x^2 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения?}$$

19. Учитель задумал несколько различных целых чисел и выписал набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д. слагаемых) на доске в порядке неубывания. Например, если бы он задумал числа 1, -5 , 6, то на доске был бы выписан набор -5 , -4 , 1, 1, 2, 6, 7.

а) На доске был выписан набор -5 , -2 , 3, 4, 7, 9, 12. Какие числа задумал учитель?

б) Для некоторых трёх задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно определить задуманные числа?

в) Дополнительно известно, что учитель задумал 4 числа. Все они не равны 0. Какое наибольшее число нулей может быть выписано на доске?

Вариант № 38

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Для приготовления дрожжевого теста на 1 кг муки требуется 14 г сухих дрожжей. Сухие дрожжи продаются в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пакетиков сухих дрожжей нужно купить для приготовления теста из 3 кг муки?

Ответ: _____.

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первые 2 минуты (см. рис. 145).

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC (см. рис. 146). Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C .

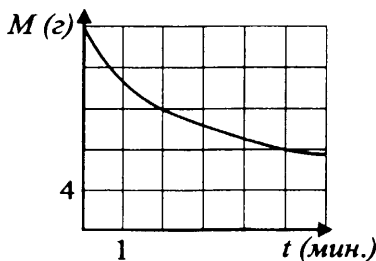


Рис. 145.

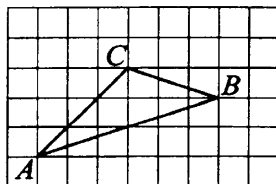


Рис. 146.

Ответ: _____.

4. Вероятность того, что новая стиральная машина в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,065. В некотором городе из 1200 проданных стиральных машин в течение года в гарантийную мастерскую поступило 72 штуки. Насколько отличается относительная частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ: _____.

5. Найдите корень уравнения $\log_{64} 4^{5x+9} = 6$.

Ответ: _____.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB , BC , CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 86° , 98° , 74° , 102° (см. рис. 147). Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

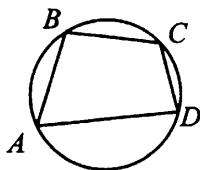


Рис. 147.

Ответ: _____.

7. На рисунке 148 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 7$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

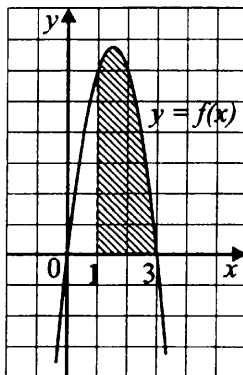


Рис. 148.

Ответ: _____.

8. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $26\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $(1 - \log_7 14)(1 - \log_2 14)$.

Ответ: _____.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 28$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 8$ м/с².

За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м).

Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 40 метров. Ответ выразите в секундах.

Ответ: _____.

11. Обе трубы наполняют бассейн за 6 часов, а первая труба — за 10 часов. За сколько часов наполнит бассейн вторая труба?

Ответ: _____.

12. Найдите точку минимума функции $y = (0,7 - x) \cos x + \sin x + 2$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x - 7 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC , если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

15. Решите неравенство
$$\frac{\log_{12}(2 - 2x) + \log_{18} \frac{1}{2 - 2x}}{\log_{29}(4x^2) - 2 \log_{14}(2x)} \geq \log_{36} \frac{1}{4}.$$

16. Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. Из точки O_1 проведена касательная $O_1 T$ ко второй окружности (T — точка касания), а из точки O_2 проведена касательная $O_2 S$ к первой окружности (S — точка касания), точки S и T лежат по одну сторону от прямой $O_1 O_2$.

а) Докажите, что треугольники SMT и $O_1 M O_2$ подобны, если M — точка пересечения $O_1 T$ и $O_2 S$.

б) Найдите отношение площади треугольника $O_1 S O_2$ к площади треугольника $O_1 T O_2$, если $\frac{O_1 S}{O_2 T} = \frac{2}{5}$.

17. Егор приобрёл ценную бумагу за 12 тысяч рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 5 тысяч рублей. По истечении любого числа лет Егор может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 5%. По истечении скольких лет после покупки Егор должен продать ценную бумагу, чтобы через 20 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 15|x - 2| + 8|y + 3| = 120, \\ x^2 - 4a^2 + 2y + 5 = 4(x - 1) - (y + 2)^2 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения?}$$

19. Учитель задумал несколько различных целых чисел и выписал набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д. слагаемых) на доске в порядке неубывания. Например, если бы он задумал числа 1, -5 , 6, то на доске был бы выписан набор -5 , -4 , 1, 1, 2, 6, 7.

а) На доске был выписан набор -9 , -7 , -5 , -3 , -2 , 2, 4. Какие числа задумал учитель?

б) Для некоторых четырёх задуманных ненулевых чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно определить задуманные числа?

в) Дополнительно известно, что учитель задумал 3 числа. Все они не равны 0. Какое наибольшее число единиц может быть выписано на доску?

Вариант № 39

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В доме, в котором живёт Антон, 12 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Антон живёт в квартире №114. В каком подъезде живёт Антон?

Ответ: _____.

2. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке 149 показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 8 до 4 ампер. На сколько омов при этом увеличилось сопротивление цепи?

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ изображён четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 150). Найдите его периметр.

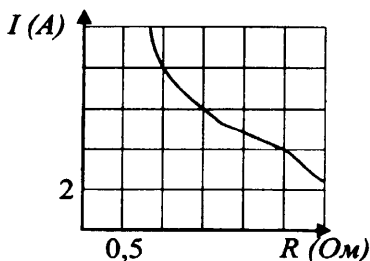


Рис. 149.

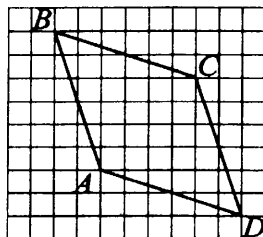


Рис. 150.

Ответ: _____.

4. На заводе керамической плитки 5% произведённых плиток имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 40% дефектных плиток. Остальные плитки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке плитка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Ответ: _____.

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC (см. рис. 151). Меньшая дуга AB равна 56° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

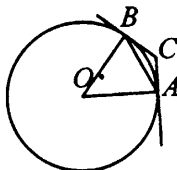


Рис. 151.

7. Прямая $y = -2x - 4$ является касательной к графику функции $y = 16x^2 + bx + 12$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше нуля.

Ответ: _____.

8. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$ (см. рис. 152).

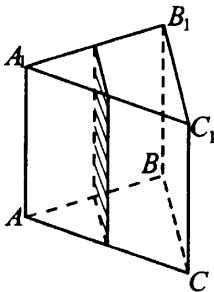


Рис. 152.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $6 \sin^2 \alpha + 8 \cos^2 \alpha = 7$.

Ответ: _____.

10. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v = 4 \sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Ответ: _____.

11. Коле надо посадить 350 кустов роз. Ежедневно он сажает на одно и то же количество кустов больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что в первый день Коля посадил 8 кустов. Определите, сколько кустов роз посадил Коля в последний день, если всю работу он выполнил за 20 дней.

Ответ: _____.

12. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{102 + 16x - x^2}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $10 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{11 + 5 \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x)}{1 + \operatorname{tg} x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$.

14. а) У трёхгранного угла каждый из плоских углов равен 90° . Докажите, что углы между любой парой биссектрис этих плоских углов равны по 60° .

б) У трёхгранного угла из пункта а) рассмотрим три биссектрисы плоских углов; будем рассматривать новый трёхгранный угол, образованный этими биссектрисами. В последний трёхгранный угол вписан шар, объём которого равен 1. Найдите расстояние его центра от вершины угла.

15. Для $x \geq 0$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x + 12 \geq 0, \\ x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 6 \leq 0 \end{cases}.$$

16. Задан треугольник ABC , каждая сторона которого равна 2. За пределами треугольника дана точка D так, что $\angle ADC = 120^\circ$. Прямая l проходит через точку A и перпендикулярна отрезку, проведённому в A из точки пересечения высот $\triangle ABC$. K — точка пересечения прямых l и BD . Длина отрезка AK равна 1.

а) Докажите, что $BK \cdot DK = 1$.

б) Найдите длину отрезка AD .

17. Из пункта A , расположенного на берегу реки, вверх против течения направились две моторные лодки. Скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость «быстрой» лодки на 3 км/ч больше скорости «медленной» лодки. Через некоторое время они повернули обратно, и «медленная» лодка пришла в пункт A раньше, чем «быстрая», на время не меньше, чем $\frac{1}{15}$ того времени, которое лодки шли от начала движения до поворота.

Найдите наибольшее целое значение скорости «быстрой» лодки, если собственные скорости лодок больше скорости течения.

18. Через точку $(a, f(a))$ графика функции $f(x) = x^2 - 6x + 9$ (где значение параметра $a \in (0, 3)$) проведена касательная к графику, пересекающаяся с осями координат в точках A и B . При каком значении параметра a достигает максимального значения площадь треугольника AOB , где O — начало координат? Чему равно это значение площади?

19. Имеется прямоугольная таблица размером $M \times N$, заполненная числами 0 и 1, обладающая следующими свойствами. Во-первых, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один элемент, равный 1. Во-вторых, нет ни одной пары одинаковых строк, а также ни одной пары одинаковых столбцов. Таблицы, обладающие этими свойствами, назовём «хорошими».

Две таблицы назовём **эквивалентными** в том (и только том) случае, если из одной из них можно получить другую путём перестановки строк и/или столбцов. Приведём пример двух эквивалентных таблиц размером 3×3 .

1	1	1
1	1	0
0	1	0

1	0	1
0	0	1
1	1	1

Вторая таблица получается из первой сначала перестановкой в ней 1-й и 3-й строк, потом 2-го и 3-го столбца в полученной таблице и, наконец, 1-й и 2-й строки в последней полученной таблице.

а) Сколько существует различных **попарно неэквивалентных** «хороших» таблиц размером 2×3 ?

б) Укажите количество всех таблиц, **эквивалентных** «хорошей» таблице.

1	1	0
1	0	1
0	1	1

в) 1. Какое максимальное число столбцов может быть в «хорошей» таблице, содержащей M строк?

2. Приведите пример «хорошей» таблицы, содержащей 3 строки и максимально возможное число столбцов в ней (в ответе запишите столбцы таблицы по убыванию десятичных чисел, соответствующих этим столбцам и рассматриваемых как числа в двоичной системе с расположением цифр сверху вниз).

Вариант № 40

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В доме, в котором живет Фёдор, 16 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Фёдор живёт в квартире №151. В каком подъезде живёт Фёдор?

Ответ: _____.

2. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке 153 показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 6 до 2 ампер. На сколько омов при этом увеличилось сопротивление цепи?

Ответ: _____.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ изображён четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 154). Найдите его периметр.

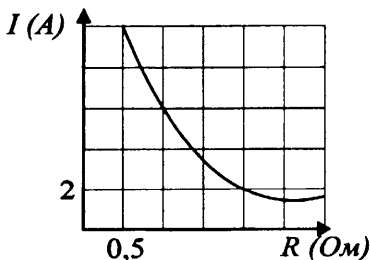


Рис. 153.

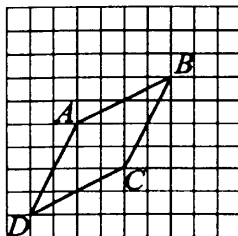


Рис. 154.

Ответ: _____.

4. На заводе керамической плитки 15% произведённых плиток имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных плиток. Остальные плитки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке плитка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\sin \frac{\pi x}{12} = 0,5$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: _____.

6. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC (см. рис. 155). Меньшая дуга AB равна 48° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

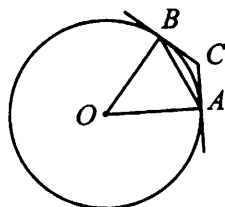


Рис. 155.

7. Прямая $y = 3x + 2$ является касательной к графику функции $y = -12x^2 + bx - 10$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше нуля.

Ответ: _____.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 6$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 (см. рис. 156).

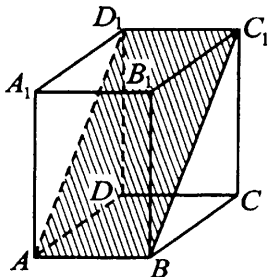


Рис. 156.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $3 \sin^2 \alpha + 7 \cos^2 \alpha = 5$.

Ответ: _____.

10. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v = 6 \sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 3 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Ответ: _____.

11. Наташе надо изготовить 300 бумажных журавликов. Ежедневно она делает на одно и то же количество журавликов больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Наташа сделала 6 журавликов. Определите, сколько журавликов изготовила Наташа в последний день, если всю работу она выполнила за 15 дней.

Ответ: _____.

12. Найдите точки минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 60x + 1000}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3 \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} = \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$.

14. а) Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Докажите, что в треугольнике AB_1C радиус вписанной окружности равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

б) Рассмотрим три биссектрисы плоских углов, выходящих из точки A , и образующийся этими биссектрисами трёхгранный угол. В него вписаны два шара: центр первого шара лежит на расстоянии $\sqrt{3}$ от A , а второй шар, большего размера, касается первого. Найдите объём второго шара.

15. Для $x \geq 0$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} 10x^4 - 3x^3 - 38x^2 - 47x + 110 \geq 0 \\ 10x^4 - 23x^3 - 8x^2 + 23x + 10 \leq 0 \end{cases}$$

16. Задан треугольник $\triangle ABC$, каждая сторона которого равна 5. За пределами треугольника дана точка D так, что $\angle ADC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $AD + CD = BD$.

б) Прямая l касается описанной окружности треугольника ABC в точке A . K — точка пересечения прямых l и BD . Длина отрезка AK равна 2. Найдите $AD \cdot DC$.

17. Из пункта A , расположенного на берегу реки, вниз по течению отправились две моторные лодки. Скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость «быстрой» лодки на 3 км/ч больше скорости «медленной» лодки. Через некоторое время они повернули обратно, и «быстрая» лодка пришла в пункт A раньше, чем «медленная» на время не менее $\frac{4}{5}$ времени, которое лодки шли от начала движения до поворота.

Найдите наибольшее целое значение скорости «быстрой» лодки (в км/ч), если собственные скорости лодок больше скорости течения.

18. Через точку $(a, f(a))$ графика функции $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ (где значение параметра $a \in (0, 4)$) проведена касательная к графику, пересекающаяся с осями координат в точках A и B . При каком значении параметра a достигает максимального значения площадь треугольника AOB , где O — начало координат? Чему равно это значение площади?

19. Имеется прямоугольная таблица размером $M \times N$, заполненная числами 0 и 1, обладающая следующими свойствами. Во-первых, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один элемент, равный 1. Во-вторых, нет ни одной пары одинаковых строк, а также ни одной пары одинаковых столбцов. Таблицы, обладающие этими свойствами, назовём «хорошими».

Две таблицы назовём **эквивалентными** в том (и только том) случае, если из одной из них можно получить другую путём перестановки строк и/или столбцов. Приведём пример двух эквивалентных таблиц размером 3×3 .

1	1	1
1	1	0
0	1	0

1	0	1
0	0	1
1	1	1

Вторая таблица получается из первой сначала перестановкой в ней 1-й и 3-й строк, потом 2-го и 3-го столбца в полученной таблице и, наконец, 1-й и 2-й строк в последней полученной таблице.

а) Сколько существует различных **попарно неэквивалентных** «хороших» таблиц размером 2×2 ?

б) Укажите количество всех таблиц, **эквивалентных** «хорошей» таблице.

1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1

в) 1. Какое минимальное число строк может быть в «хорошей» таблице, содержащей N столбцов?

2. Приведите пример «хорошей» таблицы, содержащей 4 столбца и минимально возможное число строк в ней (в ответе укажите таблицу, которая содержит максимальное число единиц, и её столбцы запишите по убыванию десятичных чисел, соответствующих этим столбцам и рассматриваемых как числа в двоичной системе с расположением цифр сверху вниз).

Решения избранных вариантов

Решение варианта 1

1. Стоимость билета в музей для льготной категории посетителей составляет 60% от полной стоимости билета, т.е. $500 \cdot 0,6 = 300$ рублей. По условию надо купить 6 билетов по 500 рублей и 2 билета по 300 рублей. Все билеты стоят $500 \cdot 6 + 300 \cdot 2 = 3600$ рублей.

Ответ: 3600.

2. Выбираем точку с ординатой 80, ближайшую к началу координат. С помощью рисунка находим соответствующую ординате точку на графике, из неё опускаем перпендикуляр на ось абсцисс и получаем точку, абсцисса которой равна 2000, это и есть наименьшее число оборотов двигателя.

Ответ: 2000.

3. Проведём BC перпендикулярно OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OBC , $\operatorname{tg} \angle BOA = \operatorname{tg} \angle BOC = \frac{BC}{OC} = \frac{5}{4} = 1,25$ (см. рис. 157).

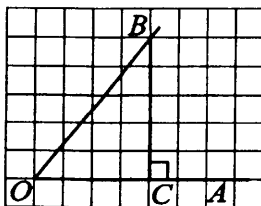


Рис. 157.

Ответ: 1,25.

4. Пусть выбор билета — исход, выбор билета, в котором есть вопрос по механике, — благоприятный исход. Общее число исходов равно 35, благоприятных исходов — 14. По определению, вероятность $\frac{14}{35} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

$$5. \frac{5}{11}x = \frac{125}{11}, x = \frac{125}{11} : \frac{5}{11}, x = \frac{125}{5}, x = 25.$$

Ответ: 25.

6. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 16$ и $AD = 22$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$ (см. рис. 158). Проведём высоту CH . $ABCH$ — прямоугольник, $BC = AH = 16$, тогда $HD = 22 - 16 = 6$.

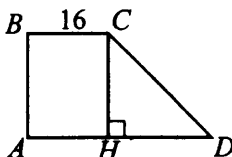


Рис. 158.

Треугольник CDH прямоугольный и равнобедренный (т. к. $\angle CHD = 90^\circ$, $\angle HCD = 45^\circ = \angle D$). $HD = HC = 6$.

$$\text{Площадь трапеции } S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{16 + 22}{2} \cdot 6 = 114.$$

Ответ: 114.

7. По рисунку 159 определяем, что касательная проходит через точки $B(5; 3)$ и $A(-3; 2)$.

Известно, что значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной.

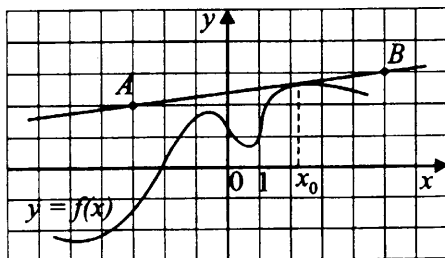


Рис. 159.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{5 - (-3)} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

8. Площадь поверхности S многогранника состоит из площади оснований и площади боковой поверхности. Площадь одного из двух равных оснований равна разности площадей двух прямоугольников, имеющих измерения 6×4 и 1×2 , то есть $6 \cdot 4 - 2 \cdot 1$. Площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания многогранника на его высоту. Отсюда, $S = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2 \cdot S_{\text{осн.}} + P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$, $P_{\text{осн.}}$ и h соответственно — площадь основания, периметр основания и высота многогранника. $S = (6 \cdot 4 - 2 \cdot 1) \cdot 2 + (2 + 1 + 1 + 6 + 4 + 6 + 1 + 1) \cdot 4 = 132$.

Ответ: 132.

$$9. \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{(65 - 16)(65 + 16)} = \sqrt{49 \cdot 81} = 7 \cdot 9 = 63.$$

Ответ: 63.

10. Выразив A из формулы $R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}$, получим

$$A = \frac{3In + Op + 2Tr}{R}. \text{ Так как все показатели максимальны, то}$$

$$In = Op = Tr = 4, \text{ откуда } A = \frac{3 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot 4}{48} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

11. Обозначим время автомобилей до встречи через x ч. Тогда первый автомобиль до встречи со вторым автомобилем пройдёт $64x$ км, а второй автомобиль пройдет до встречи $72x$ км.

Составим и решим уравнение:

$$64x + 72x = 544, 136x = 544, x = 4.$$

Автомобили встретятся через 4 часа.

Ответ: 4.

12. Для неотрицательных t функция \sqrt{t} возрастает, значит, \sqrt{t} наименьшее при наименьшем значении t . Преобразуем выражение под знаком корня.

$$\begin{aligned} & \text{Заметим, что } x^2 + 40x + 625 = x^2 + 2 \cdot 20x + 20^2 + (625 - 20^2) = \\ & = (x^2 + 40x + 400) + 225 = (x + 20)^2 + 225 \geq 225, \text{ причём при } x = -20 \text{ достигается равенство.} \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{x^2 + 40x + 625} \geq \sqrt{225} = 15. \text{ При } x = -20 \text{ имеем} \\ \sqrt{(-20)^2 + 40 \cdot (-20) + 625} = \sqrt{(-20 + 20)^2 + 225} = \sqrt{225} = 15.$$

Таким образом, наименьшее значение функции равно 15.

Ответ: 15.

13. а) Запишем исходное уравнение в виде $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 24}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4}.$$

Значит, $(\sin x)_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $(\sin x)_2 = \sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 160) отберём корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

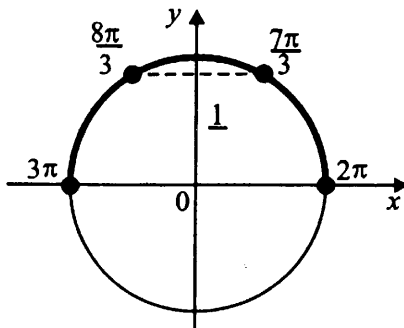


Рис. 160.

Получим числа:

$$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3};$$

$$3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$.

14. а) Построим сечение параллелепипеда плоскостью AKF (см. рис. 161).

E — точка пересечения ребра DC и отрезка AF .

В плоскости ABB_1 проведём лучи AK и BB_1 , AK пересекает BB_1 в точке Q . В плоскости BCC_1 проведём отрезок FQ , FQ пересекает B_1C_1 в точке P , а CC_1 — в точке R . Пятиугольник $AKPRE$ — искомое сечение.

$KB_1 \parallel AB$, $KB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$, значит, KB_1 — средняя линия $\triangle ABQ$, отсюда $BB_1 = QB_1$, а так как $BF \parallel B_1P$, то B_1P — средняя линия

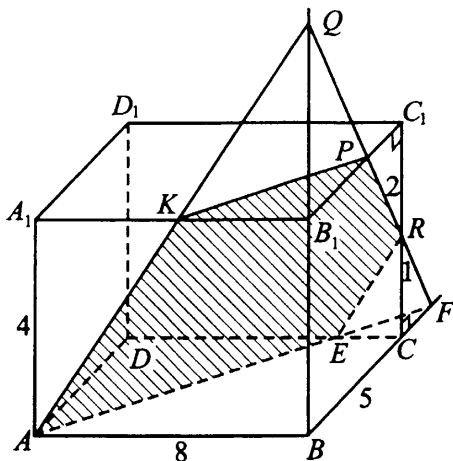


Рис. 161.

$\triangle FBQ$, $BF = 8$, $B_1P = \frac{1}{2}BF = 4$. $C_1P = B_1C_1 - B_1P = 5 - 4 = 1$, следовательно, $B_1P : PC_1 = 4 : 1$.

б) Прямоугольные треугольники ABQ , FBQ и ABF равны по двум катетам $AB = BF = BQ = 8$, откуда $AQ = AF = QF = 8\sqrt{2}$.

$S_{AQF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ как площадь равностороннего треугольника со стороной a .

$$S_{AQF} = \frac{(8\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}, S_{KQP} = \frac{1}{4}S_{AQF} = \frac{32\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}.$$

$$S_{AKPF} = S_{AQF} - S_{KQP} = 32\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

$\triangle RCF \sim \triangle RC_1P$ по первому признаку подобия ($\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Из подобия следует $\frac{CF}{PC_1} = \frac{FR}{PR}$. По доказанному в а) $PC_1 = 1$, $BF = AB = 8$, тогда $CF = 8 - 5 = 3$

и $\frac{FR}{PR} = \frac{3}{1}$. Так как KP средняя линия $\triangle AQF$, то $PF = \frac{1}{2}QF = 4\sqrt{2}$,

$$FR = \frac{3PF}{4} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 3}{4} = 3\sqrt{2}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике FCE $FC = EC = 3$, тогда $EF = 3\sqrt{2}$.

В $\triangle REF$ $FR = EF = 3\sqrt{2}$, $\angle RFE = 60^\circ$, откуда

$$\triangle REF — \text{равносторонний. } S_{REF} = \frac{(3\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{AKPE} = S_{AKPF} - S_{REF} = 24\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{39\sqrt{3}}{2}$.

$$15. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x + 5 > 0, \\ 2^{x+2} - 4^x - 3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -5, \\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -5, \\ x \neq 0, \\ x \neq \log_2 3. \end{cases}$$

$$x \in (-5; 0) \cup (0; \log_2 3) \cup (\log_2 3; +\infty).$$

$$\frac{(1 - 4 \cdot 2^x + 4^x + 3) \log_2(x + 5)}{(2^x - 1)(2^x - 3)} \geq 0,$$

$$\frac{(2^x - 2)^2 \log_2(x + 5)}{(2^x - 2^0)(2^x - 2^{\log_2 3})} \geq 0.$$

Применим метод замены множителя, учитывая, что

а) $\log_{h(x)} f(x) \rightarrow (h(x) - 1)(f(x) - 1)$, тогда

$$\log_2(x + 5) \rightarrow (2 - 1)(x + 5 - 1) = x + 4.$$

б) $h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)} \rightarrow (h(x) - 1)(p(x) - q(x))$, тогда

$$2^x - 2 \rightarrow (2 - 1)(x - 1) = x - 1, \quad 2^x - 2^0 = (2 - 1)(x - 0) = x,$$

$$2^x - 2^{\log_2 3} = (2 - 1)(x - \log_2 3) = x - \log_2 3.$$

Неравенство примет вид $\frac{(x + 4)(x - 1)^2}{x(x - \log_2 3)} \geq 0$. Решим его методом интервалов (см. рис. 162).



Рис. 162.

Учитывая ОДЗ $x > -5$, $x \neq 0$ и $x \neq \log_2 3$, получим $-4 \leq x < 0$; $x > \log_2 3$. $x = 1$.

Ответ: $[-4; 0) \cup \{1\} \cup (\log_2 3; +\infty)$.

16. а) В треугольнике ABC AK — биссектриса, поэтому $\angle KAC = \angle AKM$ как накрест лежащие при $MN \parallel AC$ и секущей AK , $\angle KAM = \angle KAC = \angle AKM$. Поэтому треугольник AMK — равнобедренный (см. рис. 163).

$MA = MB = MK$, значит, точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC и проходящей через точку K . MN — средняя линия треугольника ABC . $MN \parallel AC$, $AC \perp BC$. Отсюда

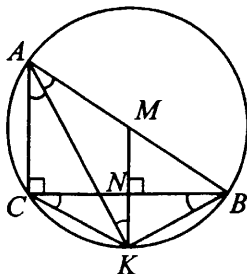


Рис. 163.

$MN \perp BC$, значит, прямоугольные треугольники BNK и CNK равны по двум катетам, поэтому $BK = CK$ и $\angle KCB = \angle KBC$. Равнобедренные треугольники BKC и AMK имеют равные углы при основаниях. $\angle MAK = \angle BAK = \angle BCK$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, они подобны по первому признаку подобия.

б) По теореме об отношении площадей подобных треугольников

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AMK}} = k^2, \text{ где } k \text{ — коэффициент подобия, } k = \frac{BC}{AK}.$$

Из $\triangle ABC$, $BC = AB \cdot \sin A = 2r \cdot \sqrt{1 - 0,36} = 1,6r$, где r — радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Из $\triangle AMK$ по теореме косинусов

$$AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2 \cdot AM \cdot MK \cdot \cos \angle AMK.$$

$$AK^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r^2 \cos(180^\circ - \angle BMK) = 2r^2 + 2r^2 \cdot \cos \angle BMK.$$

$\angle BMK = \angle BAC$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей AB , значит, $\cos \angle BMK = 0,6$.

$$AK = \sqrt{2r^2 + 2r^2 \cdot 0,6} = \sqrt{3,2r^2}, k = \frac{1,6r}{\sqrt{3,2r^2}} = \frac{1,6}{\sqrt{3,2}}.$$

$$k^2 = \frac{2,56}{3,2} = \frac{256}{320} = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AMK}} = 4 : 5.$$

Ответ: 4 : 5.

17. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — ежегодные выплаты. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

$$\text{на 2017 год} \quad 1,2S - x_1 = 0,7S,$$

$$\text{на 2018 год} \quad 1,2 \cdot 0,7S - x_2 = 0,4S,$$

$$\text{на 2019 год} \quad 1,2 \cdot 0,4S - x_3 = 0,2S,$$

$$\text{на 2020 год} \quad 1,2 \cdot 0,2S - x_4 = 0S.$$

Сложим все уравнения $1,2S \cdot (1 + 0,7 + 0,4 + 0,2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = S(0,7 + 0,4 + 0,2)$.

Пусть $X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ — общая сумма выплат. Уравнение примет вид $1,2S \cdot 2,3 - X = 1,3S$.

$$X = S(2,76 - 1,3) = 1,46S,$$

$$1,46S > 20,$$

$$S > \frac{20}{1,46}, \frac{20}{1,46} = \frac{1000}{73} = 13\frac{61}{73}.$$

Так как S — целое число, то наименьшее значение S составляет 14 млн рублей.

Ответ: 14.

$$18. \text{ Пусть } 3^x = t, t > 0, \sqrt{t^2 - 5a} = t - a.$$

При $t - a < 0$ правая часть уравнения отрицательная, а левая — неотрицательная, поэтому уравнение при $t < a$ решений не имеет.

$$\text{При } t - a \geq 0 \text{ получаем } t^2 - 5a = t^2 - 2at + a^2,$$

$$2at = a^2 + 5a.$$

При $a = 0$ $2 \cdot 0 \cdot t = 0$ — любое положительное значение t является корнем уравнения, что противоречит условию единственности корня.

$$\text{При } a \neq 0 \quad t = \frac{a+5}{2}. \text{ Для этого корня должны выполняться условия } t \geq a \text{ и } t > 0.$$

$$\text{Условие } \frac{a+5}{2} \geq a \text{ выполняется при } a \leq 5.$$

$$\text{Условие } \frac{a+5}{2} > 0 \text{ выполняется при } a > -5.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень при $-5 < a < 0$ и $0 < a \leq 5$.

$$\text{Ответ: } (-5; 0) \cup (0; 5].$$

19. а) Пример последовательных трёх ходов (стёрты тройки чисел):

$$(4, 7, 10); (5, 8, 11); (6, 9, 12).$$

б) Пусть сделано 5 ходов, стёрли $5 \cdot 3 = 15$ чисел, то есть стёрты все числа.

Сумма чисел 4, 5, 6, ..., 18 равна $\frac{4+18}{2} \cdot 15 = 165$. Каждая из сумм стираемых чисел меньше 32, значит, сумма все стёртых за 5 ходов чисел меньше $32 \cdot 5 = 160$. $160 < 165$. Следовательно, 5 ходов сделать нельзя.

в) Пусть можно сделать 4 хода. Тогда сумма стёртых за 4 хода чисел не меньше $4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = \frac{4+15}{2} \cdot 12 = 114$.

С другой стороны, эта сумма не больше суммы четырёх различных натуральных чисел, меньших $31 + 30 + 29 + 28 = 118$. Значит, можно сделать 4 хода. Пример последовательных четырёх ходов (стираются тройки чисел): (17, 10, 4); (16, 9, 5); (15, 8, 6); (14, 3, 7).

Ответ: а) (4, 7, 10); (5, 8, 11); (6, 9, 12); б) нет; в) 4.

Решение варианта 5

1. Клиент заплатит $100\% - 5\% = 95\%$ стоимости покупки, что составит $800 \cdot 0,95 = 760$ рублей.

Ответ: 760.

2. На оси ординат находим промежуток от 40°C до 60°C . Ему соответствует на оси абсцисс промежуток от 3 мин до 5 мин. То есть, двигатель нагревается две минуты.

Ответ: 2.

3. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (см. рис. 164). $AC = 8$, $BD = 4$, следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 16.$$

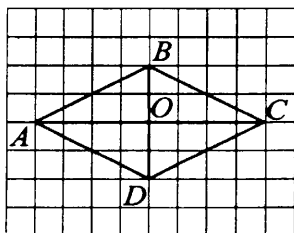


Рис. 164.

Ответ: 16.

4. Общее число исходов равно 200, неблагоприятных исходов 17. По определению, вероятность события, противоположного искомому («брюки имеют дефект»), равна $\frac{17}{200} = 0,085$. Вероятность события «брюки не имеют дефекта» равна $1 - 0,085 = 0,915 \approx 0,92$.

Ответ: 0,92.

$$5. x^2 - 19x + 90 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 90}}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 10.$$

Меньший из корней равен 9.

Ответ: 9.

6. Угол CBD является внешним углом треугольника ABC и равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Найдём угол CBD .

$\angle CBD = \angle A + \angle C = 48^\circ + 62^\circ = 110^\circ$. Треугольник BCD равнобедренный, его углы при основании равны: $\angle D = \angle DCB$. Сумма углов треугольника равна 180° . Тогда $\angle D = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ$.

Ответ: 35.

7. Согласно физическому смыслу производной необходимо найти $x'(12)$.

$$x'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 8t + 1. \quad x'(12) = \frac{3}{4} \cdot 12^2 - 8 \cdot 12 + 1 = 108 - 96 + 1 = 13.$$

Ответ: 13.

8. Рассмотрим рисунок 20, приведённый в условии. Диаметр основания цилиндра является диагональю AC квадрата $ABCD$, а радиус R основания цилиндра равен половине AC . Согласно теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$. $R = 2 \cdot \sqrt{2}$. Заметим, что высота цилиндра совпадает с высотой призмы h . Отсюда следует,

$$\text{что } V_{\text{цпл.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{4}{\pi} = 8 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 32.

$$9. 3^{0,74} \cdot (3^2)^{0,13} = 3^{0,74} \cdot 3^{0,26} = 3^{0,74+0,26} = 3^1 = 3.$$

Ответ: 3.

10. Решим неравенство $p \leq 225$; $\frac{mg}{2ls} \leq 225$, учитывая, что $s > 0$.

$$\frac{1440 \cdot 10}{2 \cdot 16 \cdot s} \leq 225, \quad \frac{45 \cdot 10}{s} \leq 225, \quad \frac{2}{s} \leq 1, \quad s \geq 2. \text{ Наименьшая возможная ширина опорных балок равна 2 метрам.}$$

Ответ: 2.

11. Пусть скорость второго автомобиля равна x км/ч, тогда за 40 минут $= \frac{2}{3}$ часа он проедет расстояние, равное $\frac{2}{3}x$ км. Первый автомобиль проедет за это время $\frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ (км). Разность между расстояниями, которые проехали автомобили за $\frac{2}{3}$ часа, и есть круг трассы, т.е. 18 км.

$$\text{Составим и решим уравнение: } 60 - \frac{2}{3}x = 18, \quad \frac{2}{3}x = 42, \quad x = 63.$$

Скорость второго автомобиля 63 км/ч.

Ответ: 63.

12. Найдём производную исходной функции: $y'(x) = 6x^2 + 80x + 200$.

$$\text{Найдём нули производной из уравнения } y'(x) = 0; 6x^2 + 80x + 200 = 0; \\ 3x^2 + 40x + 100 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 3 \cdot 100}}{3} = \frac{-20 \pm 10}{3}. \text{ Отсюда}$$

$$x_1 = -10, \quad x_2 = -\frac{10}{3}. \text{ Расставим знаки производной и определим проме-}$$

жутки монотонности исходной функции (см. рис. 165). Из рисунка видно, что значение $x = -10$ является единственной точкой максимума.

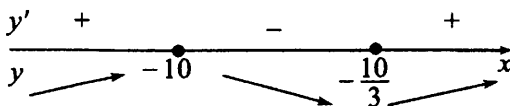


Рис. 165.

Ответ: -10 .

13. а) Решим уравнение $2 \log_2(2 \sin x) - 3 \log_2(2 \sin x) + 1 = 0$.

Обозначим $\log_2(2 \sin x) = t$ и решим получившееся уравнение.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, t = \frac{3 \pm 1}{4}; t_1 = 1; t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} \log_2(2 \sin x) = 1, \\ \log_2(2 \sin x) = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \sin x = 2, \\ 2 \sin x = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, найдём с помощью чис-

ловой окружности: $x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$; $x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$;

$x_3 = 3\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$ (см. рис. 166).

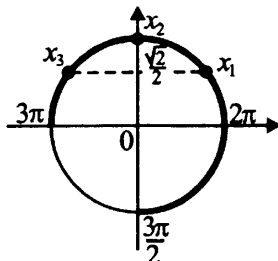


Рис. 166.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{4}$.

14. а) Плоскости MNK и DBC параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Докажем это. Рассмотрим прямые MN и KM плоскости MNK и прямые BC и BD плоскости DBC (см. рис. 167).

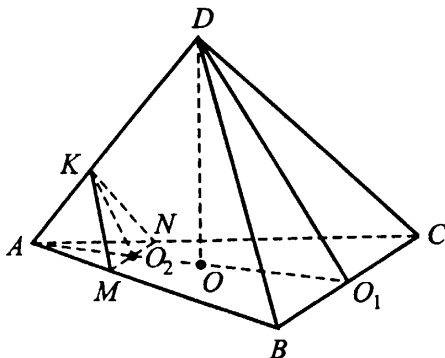


Рис. 167.

В $\triangle AOD$: $\angle AOD = 90^\circ$ и по теореме Пифагора $AD = \sqrt{DO^2 + AO^2}$. Найдём AO , используя то, что $\triangle ABC$ правильный.

$AO = \frac{2}{3}AO_1$, где AO_1 — высота $\triangle ABC$, $AO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона $\triangle ABC$.

$$AO_1 = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9, \text{ тогда } AO = 6, AD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

1. Так как $\frac{AK}{AD} = \frac{5}{2} : 10 = \frac{1}{4}$, $\frac{AM}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{2} : 6\sqrt{3} = \frac{1}{4}$ и $\angle DAB$ — общий, то $\triangle AKM \sim \triangle ADB$. Из подобия следует, что $\angle AKM = \angle ADB$. Это соответственные углы при прямых KM и BD и секущей AD . Значит, $KM \parallel BD$.

2. Так как $\frac{AN}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$, $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ и $\angle CAB$ — общий, то $\triangle ANM \sim \triangle ACB$. Из подобия следует, что $\angle ANM = \angle ACB$. Эти углы соответственные при прямых MN и BC и секущей AC . Значит, $MN \parallel BC$.

Вывод: так как две пересекающиеся прямые KM и MN плоскости MNK соответственно параллельны двум пересекающимся прямым BD и BC плоскости DBC , то эти плоскости параллельны — $MNK \parallel DBC$.

б) Найдём расстояние от точки K до плоскости DBC .

Поскольку плоскость MNK параллельна плоскости DBC , то расстояние от точки K до плоскости DBC равно расстоянию от точки O_2 до плоскости DBC и оно равно длине отрезка O_2H (см. рис. 168). Докажем это.

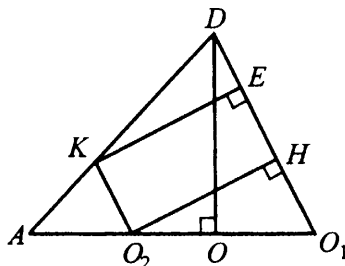


Рис. 168.

$BC \perp AO_1$ и $BC \perp DO_1$ (как высоты треугольников ABC и DBC), значит, BC перпендикулярна плоскости ADO_1 , и тогда BC перпендикулярна любой прямой этой плоскости, например O_2H . По построению $O_2H \perp DO_1$, значит, O_2H перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BCD , и тогда отрезок O_2H перпендикулярен плоскости BCD и равен расстоянию от O_2 до плоскости BCD .

В треугольнике O_2HO_1 : $O_2H = O_2O_1 \sin \angle HO_1O_2$.

$$O_2O_1 = AO_1 - AO_2. \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{1}{4}; AO_2 = \frac{AO_1}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$O_2O_1 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\sin \angle DO_1A = \frac{DO}{DO_1} = \frac{8}{\sqrt{64 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{73}}.$$

$$O_2H = \frac{27}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{54}{\sqrt{73}}.$$

Ответ: $\frac{54}{\sqrt{73}}$.

$$15. \frac{3^{2x} + 2 \cdot 3^x + 2}{3^{2x} + 2 \cdot 3^x} \leq 4 + \frac{1}{3^x} - \frac{3 \cdot 3^x + 1}{3^x - 1}.$$

Обозначим $3^x = t$, $t > 0$. Неравенство примет вид:

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 + 2t} \leq 4 + \frac{1}{t} - \frac{3t + 1}{t - 1},$$

$$1 + \frac{2}{t(t+2)} - 4 - \frac{1}{t} + \frac{3t+1}{t-1} \leq 0,$$

$$\frac{3(t+3)t}{t(t-1)(t+2)} \leq 0. \text{ Воспользуемся условием } t > 0.$$

Так как при этом $t+3 > 0$ и $t+2 > 0$, то неравенство верно при $t-1 < 0$, то есть $0 < t < 1$. Тогда $0 < 3^x < 1$, $x < 0$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

16. а) Проведём $EK \parallel BC \parallel AD$ через точку N (см. рис. 169).

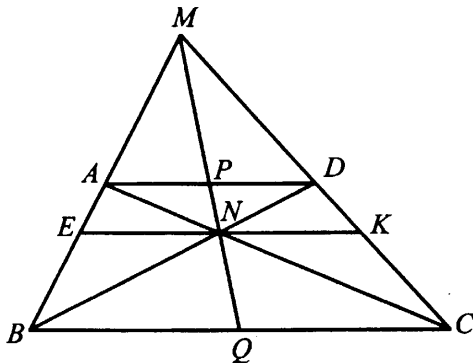


Рис. 169.

1. $\triangle AND \sim \triangle BNC$ (по двум углам): $\angle BCN = \angle CAD$, $\angle CBN = \angle NDA$). Отсюда, $\frac{BN}{ND} = \frac{NC}{AN}$. Тогда $\frac{BN}{ND} + 1 = \frac{NC}{AN} + 1$, то есть $\frac{BN+ND}{ND} = \frac{NC+AN}{AN}$, $\frac{BD}{ND} = \frac{AC}{AN}$. (1)

$$2. \triangle ABC \sim \triangle AEN \Rightarrow \frac{BC}{EN} = \frac{AC}{AN}. \quad (2)$$

Аналогично $\triangle BCD \sim \triangle NKD \Rightarrow \frac{BC}{NK} = \frac{BD}{ND}$. С учётом (1) получим $\frac{BC}{NK} = \frac{AC}{AN}$. Из последнего равенства, с учётом (2), получим $\frac{BC}{NK} = \frac{BC}{EN}$. Отсюда, $NK = EN$. (3)

$$3. \triangle APM \sim \triangle ENM \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AP}{EN} = \frac{MP}{NM}.$$

Аналогично $\frac{PD}{NK} = \frac{MP}{NM}$. Следовательно, $\frac{AP}{EN} = \frac{PD}{NK}$.

4. С учётом (3) получим $AP = PD$, что и требовалось доказать.

Аналогично $\frac{EN}{BQ} = \frac{MN}{MQ} = \frac{NK}{QC} \Rightarrow BQ = QC$, что и требовалось доказать.

$$6) \frac{BC}{AD} = \frac{BN}{ND} = \frac{BN}{BD - BN};$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BD - BN}{BN} = \frac{BD}{BN} - 1 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}. \text{ Значит, } \frac{BC}{AD} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

17. Кредит составляет 4 млн рублей. Срок возврата 10 лет. Каждый год планируется платить некоторые суммы (каждый год разные), которые состоят из двух частей:

1) $p\%$ от остатка долга;

2) фиксированная сумма в счёт погашения основного долга

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ млн рублей.}$$

Наибольший платёж будет в первый год.

$$\text{Он составит } 4 \cdot \frac{p}{100} + \frac{2}{5} \text{ млн рублей.}$$

Наименьший платёж будет в последний год.

$$\text{Он составит } \left(4 - \frac{2}{5} \cdot 9\right) \cdot \frac{p}{100} + \frac{2}{5} \text{ млн рублей.}$$

Получим систему

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{p}{100} + \frac{2}{5} \leq 1,3, \\ \left(4 - \frac{2}{5} \cdot 9\right) \cdot \frac{p}{100} + \frac{2}{5} \geq 0,49. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 4p + 40 \leq 130, \\ 0,4p + 40 \geq 49; \end{cases} \quad \begin{cases} p \leq 22,5, \\ p \geq 22,5; \end{cases} \quad p = 22,5.$$

Ответ: 22,5.

18. Уравнение $x^2 + ax + 4 = \sqrt{20x^2 + 8ax + 16}$ при $x^2 + ax + 4 < 0$ не имеет корней. При $x^2 + ax + 4 \geq 0$ (1) можно обе части уравнения возвести в квадрат.

$$(x^2 + ax + 4)^2 = 20x^2 + 8ax + 16,$$

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 + ax^3 + a^2x^2 + 4ax + 4x^2 + 4ax + 16 = 20x^2 + 8ax + 16,$$

$$x^4 + 2ax^3 + x^2(a^2 - 12) = 0,$$

$$x^2(x^2 + 2ax + a^2 - 12) = 0,$$

$$x^2((x + a)^2 - 12) = 0,$$

$$x_1 = 0, (x + a - \sqrt{12})(x + a + \sqrt{12}) = 0,$$

$$x_2 = -a + \sqrt{12}, x_3 = -a - \sqrt{12}.$$

Чтобы исходное уравнение имело три различных корня, необходимо выполнение условия (1) для чисел x_1, x_2, x_3 и выполнение условия, что эти числа различны.

$x_2 \neq 0$ и $x_3 \neq 0$, если $a \neq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $a \neq -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

Обозначим $g(x) = x^2 + ax + 4$. $g(x_1) = g(0) = 4 > 0$. Числа $x_2 = -a + \sqrt{12}$ и $x_3 = -a - \sqrt{12}$ будут корнями исходного уравнения, если выполняются условия:

$$\begin{cases} g(x_2) \geq 0, \\ g(x_3) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (-a + \sqrt{12})^2 + a(-a + \sqrt{12}) + 4 \geq 0, \\ (-a - \sqrt{12})^2 + a(-a - \sqrt{12}) + 4 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\sqrt{12} + 16 \geq 0, \\ a\sqrt{12} + 16 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq \frac{8}{\sqrt{3}}, \\ a \geq -\frac{8}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Таким образом, $a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}\right) \cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}\right) \cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right]$.

19. а) Пример четырёх ходов.

1) (27, 1, 2) — сумма $27 + 1 + 2 = 30$,

2) (20, 4, 5) — сумма $20 + 4 + 5 = 29$,

3) (7, 8, 13) — сумма $7 + 8 + 13 = 28$,

4) (6, 9, 12) — сумма $6 + 9 + 12 = 27$.

Возможны и другие примеры.

б) Предположим, что можно сделать 9 ходов. Тогда надо стереть все числа. Сумма всех чисел равна $1 + 2 + 3 + \dots + 27 = \frac{1+27}{2} \cdot 27 = 378$.

С другой стороны, сумма чисел в каждой стёртой тройке меньше 31 и все девять сумм троек различны. Значит, их общая сумма не превышает $30 + 29 + 28 + \dots + 22 = \frac{30+22}{2} \cdot 9 = 234$. Но $234 < 378$. Получили противоречие. Сделать 9 ходов невозможно.

в) Предположим, что сделано k ходов. За эти ходы вычеркнуто $3k$ различных чисел. Их общая сумма S не меньше, чем $1 + 2 + 3 + \dots + 3k = \frac{1+3k}{2} \cdot 3k$, то есть $S \geq \frac{1+3k}{2} \cdot 3k$.

С другой стороны, $S \leq 30 + 29 + 28 + \dots + (31 - k) = \frac{61-k}{2} \cdot k$. Тогда

$$\frac{1+3k}{2} \cdot 3k \leq S \leq \frac{61-k}{2} \cdot k; (1+3k) \cdot 3 \leq 61-k; 10k \leq 61-3; k \leq 5,8.$$

Но число ходов k является натуральным числом, поэтому $k \leq 5$.

Полученное ограничение ещё не означает, что 5 ходов сделать можно, оно лишь означает, что нельзя сделать больше 5 ходов. Построим пример пяти ходов. Первые 4 хода такие же, как и в пункте а). Пятый ход — $(10, 11, 3)$, с суммой $10 + 11 + 3 = 24$. Таким образом, наибольшее возможное число ходов равно 5.

Ответ: а) $(27; 1; 2)$, $(20; 4; 5)$, $(7; 8; 13)$, $(6; 9; 12)$; б) нет; в) 5.

Решение варианта 9

1. 1 дюйм = 2,54 см; 39 дюймов = $39 \cdot 2,54 \text{ см} = 99,06 \text{ см} \approx 99 \text{ см}$.

Ответ: 99.

2. На оси абсцисс выбираем отрезок, соответствующий дате 15 декабря с 0 : 00 часов до 24 : 00 часов. На этом отрезке найдём точку с наибольшей ординатой, по рисунку видим, что эта ордината равна -5 .

Ответ: -5 .

3. Проведём высоту CH параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$. $AD = 2$, $CH = 4$, $S_{ABCD} = 2 \cdot 4 = 8$ (см. рис. 170).

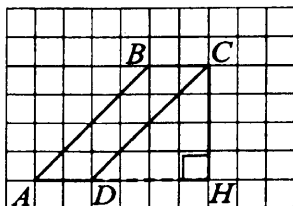


Рис. 170.

Ответ: 8.

4. Событие «температура тела будет отличаться от температуры $36,6^\circ\text{C}$ не больше чем на $0,2^\circ\text{C}$ » противоположно событию «температура окажется выше, чем $36,4^\circ\text{C}$, или ниже, чем $36,8^\circ\text{C}$ », поэтому сумма их вероятностей равна 1. Искомая вероятность равна $1 - 0,964 = 0,036$.

Ответ: 0,036.

5. Уравнения $\frac{16}{x^2 - 48} = 1$ и $x^2 - 48 = 16$ равносильны $x^2 - 48 \neq 0$. Из последнего уравнения $x^2 = 64$, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$. Меньший из корней равен -8 .

Ответ: -8 .

6. Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Для параллелограмма $ABCD$ выполняется $S = AB \cdot DH = CB \cdot DE$. Получаем $16DH = 8 \cdot 14$, $DH = 7$.

Ответ: 7.

7. Производная равна нулю в тех точках, в которых касательная к графику функции параллельна оси Ox . На заданном графике такими точками являются точки экстремума. Их на графике ровно 5.

Ответ: 5.

8. Так как куб описан около сферы, то длина диаметра этой сферы равна длине ребра куба. По условию радиус сферы равен 2, поэтому диаметр сферы в два раза больше и равен 4. Объём куба V находится по формуле $V = a^3$, где a — ребро куба. Поэтому $V = a^3 = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

9. По свойству корней выполняются равенства: $\sqrt[3]{3} = \sqrt[9]{3^2}$; $\sqrt[9]{3^2} = \sqrt{3}$. Поэтому $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[9]{3^2} \cdot \sqrt[9]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[9]{3^3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$.

Ответ: 1.

10. Решим неравенство $F_A \leq 264\,600$; $1000 \cdot 9,8 \cdot l^3 \leq 264\,600$, $98l^3 \leq 2646$, $l^3 \leq 27$, $l \leq 3$. Максимальная длина ребра куба равна 3 метрам.

Ответ: 3.

11. В 3 литрах 14%-ного водного раствора содержится $3 \cdot 0,14 = 0,42$ л некоторого вещества. Добавили 4 литра воды, стало 7 литров раствора. В этих 7 литрах нового раствора — 0,42 л некоторого вещества. Найдём концентрацию нового раствора: $0,42 : 7 \cdot 100 = 6\%$.

Ответ: 6.

12. Исходная функция определена при $x \neq 0$, при этом $y = -x - \frac{144}{x}$.

Тогда производная исходной функции $y'(x) = -1 + \frac{144}{x^2}$. Найдём нули производной: $y'(x) = 0$ при $\frac{144}{x^2} = 1$, $x^2 = 144$, $x = \pm 12$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 171).

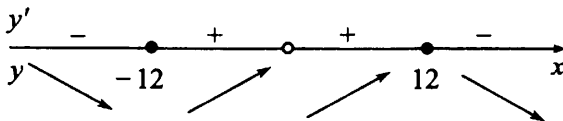


Рис. 171.

Из рисунка видно, что функция $y = -\frac{x^2 + 144}{x}$ имеет единственную точку максимума $x = 12$.

Ответ: 12.

13. а) После замены $t = 3^{\cos x}$ исходное уравнение примет вид $9t^2 - 10\sqrt{3}t + 3 = 0$. Корни этого уравнения $t = \sqrt{3}, t = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Возвращаясь к переменной x , получим

$$\begin{cases} 3^{\cos x} = \sqrt{3}, \\ 3^{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{9}; \end{cases} \begin{cases} 3^{\cos x} = 3^{\frac{1}{2}}, \\ 3^{\cos x} = 3^{-\frac{3}{2}}; \end{cases} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней. Решая первое уравнение, получим $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

б) Запишем решение уравнения в виде $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ и выясним, для каких целых значений n и k справедливы неравенства $\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 4\pi$ и $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 4\pi$.

$$\text{Получим } \frac{11}{12} \leq n \leq \frac{26}{12} \text{ и } \frac{7}{12} \leq k \leq \frac{22}{12}.$$

Откуда следует, что два целых значения $n = 1$ и $n = 2$ удовлетворяют неравенству $\frac{11}{12} \leq n \leq \frac{26}{12}$; $k = 1$ — единственное целое k , удовлетворяющее неравенству $\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{22}{12}$.

$$\text{При } n = 1 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{При } n = 2 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 2 = \frac{11\pi}{3}.$$

При $k = 1 \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{3}$. Итак, $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$ — корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$.

14. Построим сначала сечение пирамиды плоскостью γ .

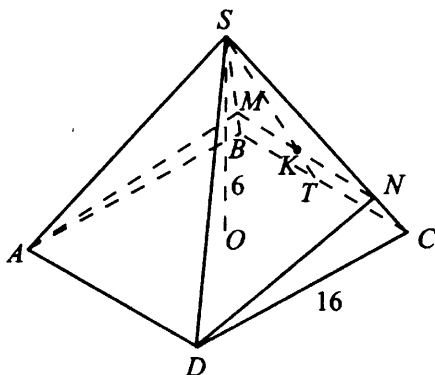


Рис. 172.

а) Плоскость γ пересекает плоскость SAD по прямой AD , а плоскость SBC — по прямой MN , проходящей через точку K , параллельной BC (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то линия пересечения параллельна этой прямой). $ADNM$ — сечение пирамиды плоскостью γ . $ADNM$ — равнобедренная трапеция (см. рис. 172).

$BC \parallel \gamma$, следовательно, все точки, принадлежащие прямой BC , равноудалены от плоскости γ . Значит, расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ . Что и требовалось доказать.

б) Так как расстояние от любой точки прямой BC до плоскости γ одно и то же, будем искать расстояние от точки T до плоскости γ , то есть нужно из точки T провести отрезок TH , перпендикулярный плоскости ADN , который равен высоте пирамиды $BADNM$. Тогда

$$V_{BADNM} = \frac{1}{3} S_{ADNM} \cdot TH.$$

K — середина отрезка MN , так как принадлежит апофеме ST . Обозначим через P середину отрезка AD , тогда $KP \perp AD$ как высота равнобедренной трапеции $ADNM$. $S_{BADNM} = \frac{AD + MN}{2} \cdot PK$.

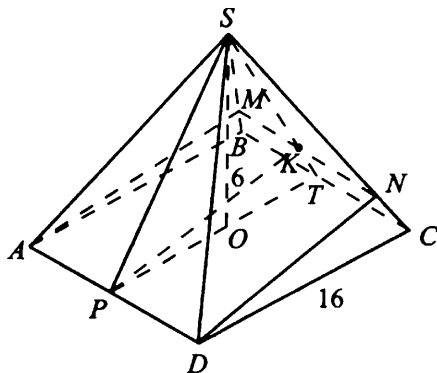


Рис. 173.

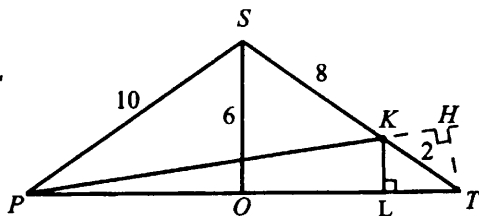


Рис. 174.

$AD \perp PST$ (см. рис. 173), действительно, $KP \perp AD$ и $PT \perp AD$, следовательно, достаточно построить отрезок $TH \perp PK$, так как тогда TH перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости γ (AD и PK).

$S_{\Delta PKT}$ выразим двумя способами: $\frac{1}{2}TH \cdot PK = \frac{1}{2}PT \cdot KL$ (см.

рис. 174), откуда $TH = \frac{PT \cdot KL}{PK}$.

Из прямоугольного треугольника SOT с катетами $OT = 8$, $SO = 6$ и гипотенузой $ST = 10$, находим KL из подобия прямоугольных треугольников SOT и KLT с общим острым углом STO :

$$\frac{SO}{KL} = \frac{ST}{KT} = \frac{OT}{LT}, \quad \frac{6}{KL} = \frac{10}{2}, \quad KL = \frac{6}{5}. \text{ Далее, } \frac{8}{LT} = \frac{10}{2},$$

$$LT = \frac{8}{5}, \quad OL = OT - LT = 8 - \frac{8}{5} = \frac{32}{5}.$$

PK найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PKL :

$$PK^2 = PL^2 + LK^2 = (PO + OL)^2 + LK^2, \quad PK^2 = \\ = \left(8 + \frac{32}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{5220}{25}. \quad PK = \frac{6\sqrt{145}}{5}.$$

$$TH = \frac{PT \cdot KL}{PK} = \frac{16 \cdot \frac{6}{5}}{\frac{6\sqrt{145}}{5}} = \frac{16}{\sqrt{145}}.$$

Основание MN равнобедренной трапеции найдём из подобия треугольников SMN и SBC , высоты которых $SK = 8$, $ST = 10$.

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SK}{ST}, \frac{MN}{16} = \frac{8}{10}, \text{ откуда } MN = \frac{64}{5} \text{ (см. рис. 173).}$$

$$V_{BADNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD + MN}{2} \cdot PK \cdot TH = \frac{1}{3} \cdot \frac{16 + \frac{64}{5}}{2} \cdot \frac{6\sqrt{145}}{5} \cdot \frac{16}{\sqrt{145}} = 92,16.$$

Ответ: 92,16.

15. С помощью замены $5^x = t$, где $t > 0$, приведём неравенство к виду

$$\frac{4t - 17}{t - 4} + \frac{10t - 13}{2t - 3} > \frac{8t - 30}{2t - 7} + \frac{5t - 4}{t - 1}.$$

Выделим целую часть в каждом слагаемом:

$$4 - \frac{1}{t - 4} + 5 + \frac{2}{2t - 3} > 4 - \frac{2}{2t - 7} + 5 + \frac{1}{t - 1},$$

$$\frac{2}{2t - 3} - \frac{1}{t - 4} + \frac{2}{2t - 7} - \frac{1}{t - 1} > 0.$$

После приведения к общему знаменателю и упрощения получим:

$$\frac{2t - 5}{(2t - 3)(t - 4)(2t - 7)(t - 1)} < 0.$$

Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 175).

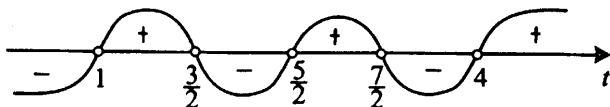


Рис. 175.

С учётом условия $t > 0$, получим

$$0 < t < 1, \frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}, \frac{7}{2} < t < 4.$$

Возвращаясь к переменной x , получим, что $5^x < 1$, $\frac{3}{2} < 5^x < \frac{5}{2}$,

$$\frac{7}{2} < 5^x < 4, \text{ откуда } x < 0, \log_5 \frac{3}{2} < x < \log_5 \frac{5}{2}, \log_5 \frac{7}{2} < x < \log_5 4.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup \left(\log_5 \frac{3}{2}; \log_5 \frac{5}{2}\right) \cup \left(\log_5 \frac{7}{2}; \log_5 4\right).$$

16. а) По условию $S_{ANLM} = S_{CLD}$ (см. рис. 176), следовательно, $S_{ANLM} + S_{LMD} = S_{CLD} + S_{LMD}$, $S_{ANLM} + S_{LMD} = S_{AND}$,

$S_{CLD} + S_{LMD} = S_{CMD}$, значит, $S_{AND} = S_{CMD}$.

$2S_{AND} = 2S_{CMD} = S_{ACD} = S_{ABD}$ (треугольники ACD и ABD имеют общее основание AD и общую высоту).

Итак, $2S_{AND} = S_{ABD} = S_{AND} + S_{BND}$, откуда следует, что

$S_{AND} = S_{BND}$, а это означает, что точка N — середина стороны AB (у треугольников AND и BND общая высота). Что и требовалось доказать.

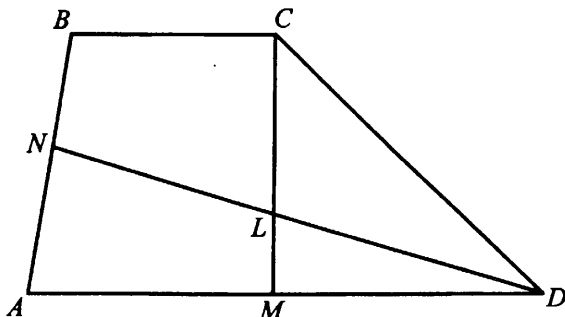


Рис. 176.

6) Пусть K — точка пересечения прямых CN и AD (см. рис. 177). $\triangle AKN = \triangle BCN$ (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому

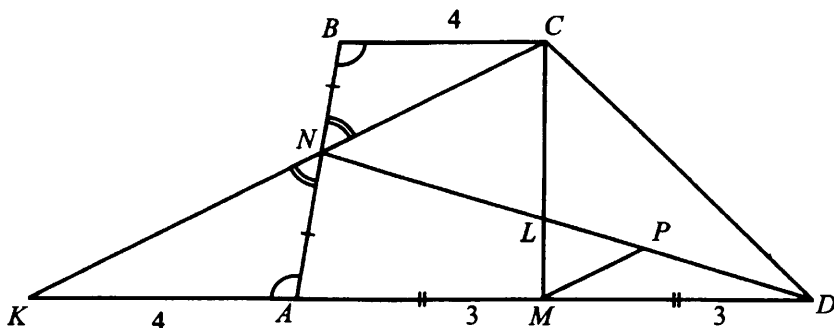


Рис. 177.

$$S_{ABCD} = S_{CKD}.$$

Проведём $MP \parallel KC$, тогда из подобия треугольников $\triangle NCL$ и $\triangle LMP$ ($\angle MLP = \angle NLC$, $\angle LPM = \angle CNL$) $\frac{CL}{LM} = \frac{CN}{MP} = \frac{KN}{MP}$.

Из подобия треугольников $\triangle KND$ и $\triangle DMP$ ($KN \parallel MP$)

$$\frac{KN}{MP} = \frac{KD}{MD} = \frac{10}{3}. \text{ Значит, } \frac{CL}{LM} = \frac{KN}{MP} = \frac{10}{3}; \frac{CL}{CM - CL} = \frac{10}{3};$$

$3CL = 10CM - 10CL$, $13CL = 10CM$, следовательно,

$$\frac{CL}{CM} = \frac{10}{13} = \frac{S_{CLD}}{S_{CMD}}, \text{ откуда } S_{CLD} = \frac{10}{13} S_{CMD}.$$

$$\frac{S_{CMD}}{S_{CKD}} = \frac{MD}{KD} = \frac{3}{10}, \text{ откуда } S_{CMD} = \frac{3}{10} S_{CKD} = \frac{3}{10} S_{ABCD}.$$

Подставляя $S_{CMD} = \frac{3}{10} S_{ABCD}$ в равенство $S_{CLD} = \frac{10}{13} S_{CMD}$, по-

лучим $S_{CLD} = \frac{10}{13} S_{CMD} = \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{10} S_{ABCD} = \frac{3}{13} S_{ABCD}$. Учитывая, что

$$S_{ANLM} = S_{CLD}, \text{ окончательно получим } S_{ANLM} = \frac{3}{13} S_{ABCD}.$$

Ответ: $\frac{3}{13}$.

17. Долг перед банком (в млн рублей) на начало каждого квартала должен быть:

$$N; 0,8N; 0,5N; 0.$$

По условию в первом месяце каждого квартала долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего квартала, значит, долг перед банком после начисления процентов в каждом квартале равен

$$1,02N; 0,816N; 0,51N.$$

Поэтому выплаты по кварталам должны быть: $1,02N - 0,8N = 0,22N$; $0,816N - 0,5N = 0,316N$; $0,51N - 0 = 0,51N$. По условию все выплаты должны быть больше 1 млн рублей. Поэтому $0,22N > 1$, $0,316N > 1$ и $0,51N > 1$.

Наименьшее целое число, удовлетворяющее всем неравенствам, равно 5. Итак, наименьшее значение N , при котором каждая из выплат будет больше 1 млн рублей, равна 5 млн рублей.

Ответ: 5.

18. В левой части уравнения выделим целую часть

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + x^2 - 16a^2x - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} &= \frac{x^3 - 16a^2x}{x^3 - 16a^2x} + \frac{x^2 - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} = \\ &= 1 + \frac{x^2 - 5x + a}{x^3 - 16a^2x}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид $\frac{x^2 - 5x + a}{x^3 - 16a^2x} = 0$.

Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x + a = 0, \\ x^3 - 16a^2x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -x^2 + 5x, \\ x \neq 0, x \neq \pm 4a. \end{cases}$$

Решим систему графически в системе координат xOa . Для этого построим графики функций $a = -x^2 + 5x$ и $a = \pm \frac{x}{4}$.

Графиком функции $a = -x^2 + 5x$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы — точка $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$, точки $(0; 0)$ и $(5; 0)$ принадлежат параболе. Графиками функций $a = \pm \frac{x}{4}$ являются прямые.

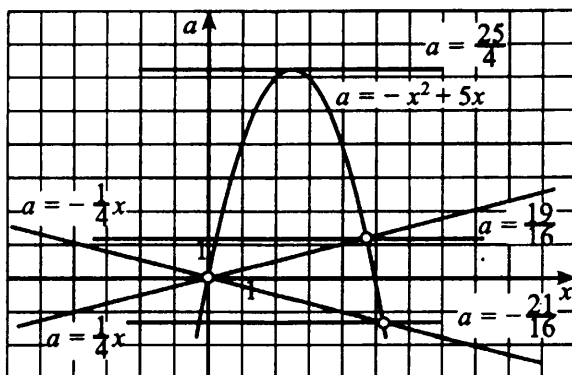


Рис. 178.

Решая уравнение $-x^2 + 5x = \frac{x}{4}$, находим точки пересечения прямой

$$a = \frac{x}{4} \text{ и параболы } a = -x^2 + 5x: x = 0, x = \frac{19}{4}, \text{ откуда } a = 0, a = \frac{19}{16}.$$

Аналогично, решая уравнение $-x^2 + 5x = -\frac{x}{4}$, находим $a = 0, a = -\frac{21}{16}$.

Выкалываем эти точки (см. рис. 178).

По рисунку видим, что ровно одна точка пересечения параболы с каждой из прямых будет при $a = -\frac{21}{16}$, $a = 0$, $a = \frac{19}{16}$, $a = \frac{25}{4}$.

Ответ: $-\frac{21}{16}; 0; \frac{19}{16}; \frac{25}{4}$.

19. а) (1, 2, 5, 9, 23).

б) (1, 1, 5, 10, 23).

в) Рассмотрим последовательность, в которой есть два члена, равные единице. В противном случае сумма членов этой последовательности увеличится. Пусть первые два числа равны 1 (наименьшие натуральные числа). Рассмотрим последовательность (1, 1, a , b , c , d).

Выберем третий член последовательности. Это наименьшее из натуральных чисел, для которых выполняется неравенство $1 < \frac{1+a}{2}$, откуда $a = 2$. Аналогично b выберем наименьшим из натуральных чисел, для которых выполняется неравенство $2 < \frac{1+b}{2}$, то есть $b = 4$, далее находим

c и d из условий $4 < \frac{2+c}{2}$, то есть $c = 7$, $7 < \frac{4+d}{2}$, то есть $d = 11$.

Получили последовательность (1, 1, 2, 4, 7, 11). Сумма её членов равна 26. Заметим:

1) три члена, равные единице, в последовательности быть не могут;

2) две единицы могут занимать только соседние места.

В случае, если обе единицы расположены на 2-м и 3-м месте, приводят последовательность (2, 1, 1, 2, 4, 7), сумма членов которой равна 17.

Если обе единицы расположены на 3-м и 4-м месте, получим последовательность (4, 2, 1, 1, 2, 4), сумма членов которой равна 14.

Остальные случаи симметричны рассмотренным ранее.

Ответ: а) (1, 2, 5, 9, 23); б) да; в) 14.

Решение варианта 13

1. Клиент заплатил за бензин $1000 - 14,4 = 985,6$ рублей.
 $985,6 : 35,2 = 28$ литров бензина было залито в бак.

Ответ: 28.

2. Выбираем на рисунке точку с ординатой 4 и абсциссой, ближайшей к началу координат. Видим, что её абсцисса равна 6, то есть впервые 4 мм осадков выпало 6 февраля.

Ответ: 6.

3. Диагонали прямоугольника равны. Диагональ AC найдём как гипотенузу прямоугольного треугольника ADC с катетами $AD = 4$, $CD = 3$:
 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см. рис. 179).

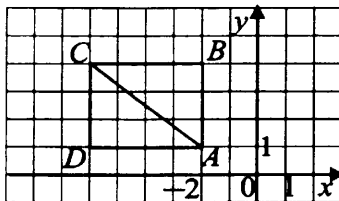


Рис. 179.

Ответ: 5.

4. Найдём, сколько докладов запланировано на последний день конференции. На первые четыре дня запланировано $15 \cdot 4 = 60$ докладов. Остаются ещё $80 - 60 = 20$ докладов, которые распределяются поровну между оставшимися двумя днями, поэтому в последний день запланировано $20 : 2 = 10$ докладов. Будем считать экспериментом выбор порядкового номера профессора Л., эксперимент имеет 80 возможных исходов.

Благоприятствуют указанному событию 10 исходов (последние 10 номеров в списке докладов). Искомая вероятность равна $\frac{10}{80} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

$$5. (\sqrt{-19x + 20})^2 = x^2, \quad -19x + 20 = x^2, \quad x^2 + 19x - 20 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot (-20)}}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -20.$$

Делаем проверку.

$\sqrt{-19 \cdot 1 + 20} = 1$, это верно, значит, $x = 1$ — корень уравнения.

$\sqrt{-19 \cdot (-20) + 20} = -20$, это неверно, значит, $x = -20$ не является корнем уравнения.

Ответ: 1.

6. Площадь треугольника можно найти как половину произведения двух его сторон на синус угла между ними. В заданном треугольнике площадь

$$S = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \sin 30^\circ = 49.$$

Ответ: 49.

7. Производная может быть положительной только в тех точках, которые принадлежат промежуткам возрастания функции (если только касательные в них не горизонтальны). Подходящих точек четыре: x_1, x_3, x_5, x_7 .

Ответ: 4.

8. Пусть R — радиус основания цилиндра, а h — уровень воды, налитой в сосуд. Тогда объём налитой воды равен объёму цилиндра с радиусом основания R и высотой h . $V_{\text{воды}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi R^2 \cdot h$. Согласно условию выполняется равенство $2000 = \pi R^2 \cdot 15$. Отсюда, $\pi R^2 = \frac{2000}{15} = \frac{400}{3}$.

Пусть H — уровень воды в сосуде после погружения в него детали. Тогда суммарный объём воды и детали равен объёму цилиндра с радиусом основания R и высотой H . По условию $H = h + 9 = 15 + 9 = 24$.

Значит, $V_{\text{воды} + \text{детали}} = \pi R^2 \cdot H = \frac{400}{3} \cdot 24 = 3200$. Следовательно,

$$V_{\text{детали}} = V_{\text{воды} + \text{детали}} - V_{\text{воды}} = 3200 - 2000 = 1200.$$

Ответ: 1200.

$$9. 19a^{10}a^{14} : (5a^{12})^2 = 19a^{10+14} : (5^2a^{12 \cdot 2}) = \frac{19a^{24}}{25a^{24}} = 0,76.$$

Ответ: 0,76.

10. Найдём высоту, на которой наблюдатель находился, подставив в формулу $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ значения $l = 3,2$, $R = 6400$; $3,2 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}}$,

$$\frac{32^2}{10^2} = \frac{64 \cdot h}{5}, h = 0,8 \text{ (м)}. \text{ Найдём высоту, на которой наблюдатель ви-}$$

$$\text{дит горизонт на расстоянии 4,8 километра. } 4,8 = \sqrt{\frac{6400 \cdot h}{500}} = \sqrt{\frac{64 \cdot h}{5}},$$

$\frac{48^2}{10^2} = \frac{64 \cdot h}{5}$, $h = 1,8$ (м). Найдём высоту, на которую нужно подняться наблюдателю: $1,8 - 0,8 = 1$ (м).

Ответ: 1.

11. В 2006 году число жителей посёлка выросло на 6%, т.е. стало 106%, что равно $55\,000 \cdot 1,06 = 58\,300$ (жителей). В 2007 году число жителей посёлка выросло на 10% (стало 110%) по сравнению с 2006 годом, т.е. число жителей посёлка стало $58\,300 \cdot 1,1 = 64\,130$ человек.

Ответ: 64 130.

12. Найдём производную исходной функции, используя формулу производной произведения:

$y' = ((x+7)^2)'(x-6) + (x+7)^2(x-6)' + (11)' = 2(x+7)(x-6) + (x+7)^2 = (x+7)(2x-12+x+7) = (x+7)(3x-5)$. Отыщем нули производной: $y'(x) = 0$; $(x+7)(3x-5) = 0$; $x_1 = -7$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 180).

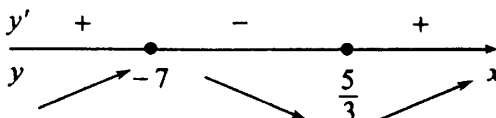


Рис. 180.

Из рисунка видно, что $x = -7$ является единственной точкой максимума.

Ответ: -7 .

$$13. \text{ а) } \frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}.$$

Применим формулу синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

$$\text{Уравнение примет вид: } \frac{2 \sin x \cos x}{-\sin x} = \sqrt{3}.$$

Учитывая, что $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, получим:
 $2 \cos x = -\sqrt{3}$,

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$, с помощью числовой окружности.

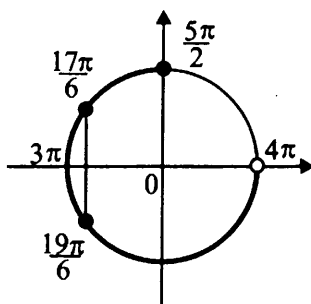


Рис. 181.

$$x = 2\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{17\pi}{6},$$

$$x = 4\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$.

14. а) По условию $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная призма, это означает, что основание $ABCD$ — квадрат и боковые грани — равные прямоугольники (см. рис. 182).

Так как плоскость сечения проходит через точки M и D параллельно диагонали AC , то для её построения в плоскости $A_1 AC$ через точку M проведём отрезок MN параллельный AC . Получим $AC \parallel (MDN)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Плоскость MDN пересекает параллельные плоскости $A_1 AD$ и $B_1 BC$, тогда, по свойству параллельных плоскостей, линии пересечения граней $A_1 ADD_1$ и $B_1 BCC_1$ плоскостью MDN параллельны.

Проведём отрезок NE параллельно отрезку MD .

Четырёхугольник $DMEN$ — искомое сечение.

б) Найдём угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Пусть плоскость сечения пересекает плоскость основания по некоторой

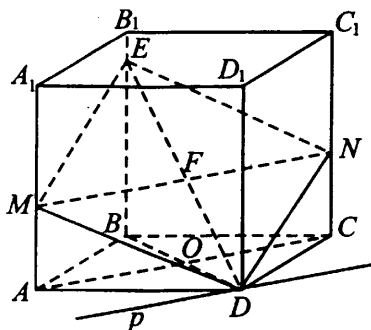


Рис. 182.

прямой p , проходящей через точку D . $AC \parallel MN$, следовательно, $AC \parallel p$ (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна этой прямой). $BD \perp AC$ как диагонали квадрата, значит, $BD \perp p$. BD — проекция ED на плоскость ABC , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $ED \perp p$, следовательно, $\angle EDB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Установим вид четырёхугольника $DMEN$. $MD \parallel EN$, аналогично $ME \parallel DN$, значит, $DMEN$ — параллелограмм, а так как $MD = DN$ (прямоугольные треугольники MAD и NCD равны по двум катетам: $AD = DC$ как стороны квадрата, $AM = CN$ как расстояния между параллельными прямыми AC и MN), следовательно, $DMEN$ — ромб. Отсюда F — середина MN .

По условию $AM : MA_1 = 2 : 3$, тогда $AM = \frac{2}{5}AA_1 = \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

$AMNC$ — прямоугольник, F — середина MN , O — середина AC . Значит, $FO \parallel MA$, $FO \perp AC$, $FO = MA = 2\sqrt{6}$.

Зная, что диагональ квадрата равна $a\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата, получим $BD = 4\sqrt{2}$. $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике FOD $\operatorname{tg} \angle FDO = \frac{FO}{OD} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Следовательно, $\angle FDO = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

$$15. \log_{|x+2|}(12 + 4x - x^2) \leq 2.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 12 + 4x - x^2 > 0, \\ x + 2 \neq 0, \\ |x + 2| \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 12 < 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 2)(x - 6) < 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq -3; \end{cases}$$

$$x \in (-2; -1) \cup (-1; 6).$$

$$\log_{|x+2|}(12 + 4x - x^2) \leq \log_{|x+2|}(x + 2)^2.$$

$$\log_{|x+2|}(12 + 4x - x^2) - \log_{|x+2|}(x + 2)^2 \leq 0.$$

На ОДЗ заменим полученное неравенство равносильными неравенствами, применив дважды метод рационализации:

1) знак $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $(a - 1)(f - g)$,

2) знак $|f| - |g|$ совпадает со знаком $f^2 - g^2 = (f - g)(f + g)$.

$$\text{Согласно 1: } (|x + 2| - 1)(12 + 4x - x^2 - x^2 - 4x - 4) \leq 0, \\ (|x + 2| - 1)(-2x^2 + 8) \leq 0.$$

Разделим обе части неравенства на -2 .

$$(|x + 2| - 1)(x^2 - 4) \geq 0.$$

$$\text{Согласно 2: } (x + 2 - 1)(x + 2 + 1)(x^2 - 4) \geq 0, \\ (x + 1)(x + 3)(x - 2)(x + 2) \geq 0.$$

Решение неравенства показано на рисунке 183.



Рис. 183.

$$x \leq -3, \quad -2 \leq x \leq -1, \quad x \geq 2.$$

Учитывая ОДЗ, получим:

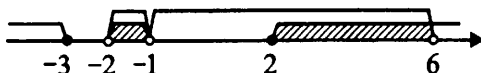


Рис. 184.

$$-2 < x < -1; \quad 2 \leq x < 6 \text{ (см. рис. 184).}$$

$$\text{Ответ: } (-2; -1) \cup [2; 6).$$

16. а) Пусть точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 185), O лежит на биссектрисе AK .

Биссектриса AK пересекает дугу EF в точке P , а отрезок EF — в точке D . $AE = AF$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки. Отсюда $\triangle EAF$ — равнобедренный, значит, биссектриса AD — медиана и высота. $\triangle PDE = \triangle PDF$ по двум катетам ($ED = DF$,

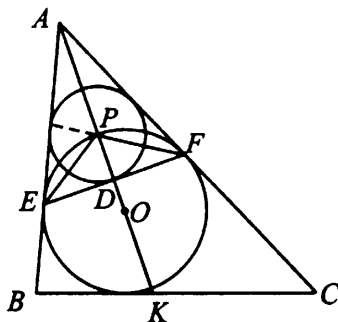


Рис. 185.

PD — общая сторона). Из равенства треугольников следует $PE = PF$, а так как равные хорды стягивают равные дуги, то $\smile PE = \smile PF$.

Докажем, что P — центр вписанной окружности треугольника AEF .

$\angle AFP = \frac{1}{2} \smile PF$ как угол между касательной AF и хордой PF .

$\angle EFP = \frac{1}{2} \smile PE$ как вписанный. Так как $\smile PF = \smile PE$, то $\angle AFP = \angle EFP$, значит, FP — биссектриса угла AFE .

Таким образом, P — точка пересечения биссектрис AD и FP треугольника AEF , следовательно, P — центр вписанной окружности.

б) По условию AK — биссектриса $\triangle ABC$, проведённая из вершины A . По свойству биссектрисы имеем $\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC}$,

$$CK = \frac{BK \cdot AC}{AB} = \frac{3,08 \cdot 14}{11} = 3,92.$$

$$BC = BK + KC = 3,08 + 3,92 = 7.$$

Пусть O — центр вписанной окружности в $\triangle ABC$, r — радиус этой окружности, p — полупериметр $\triangle ABC$.

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{11 + 7 + 14}{2} = 16.$$

$$\text{По формуле Герона } S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{16 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2} = 12\sqrt{10},$$

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{12\sqrt{10}}{16} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

Расстояние между центрами окружностей $OP = r = \frac{3\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{4}$.

17. Введём обозначения:

S — сумма кредита, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — ежемесячные выплаты, начиная с июня.

Так как текущий долг ежемесячно увеличивается на 5%, то он будет составлять 105%, то есть 1,05 от оставшейся суммы долга. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

на	15.06:	$1,05S - x_1 = 0,8S$
на	15.07:	$1,05 \cdot 0,8S - x_2 = 0,6S$
на	15.08:	$1,05 \cdot 0,6S - x_3 = 0,4S$
на	15.09:	$1,05 \cdot 0,4S - x_4 = 0,2S$
на	15.10:	$1,05 \cdot 0,2S - x_5 = 0$

Сложим левые и правые части уравнения, получим

$$1,05S(1 + 0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \\ = S(0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2).$$

Обозначим $A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ — общая сумма выплат

$$1,05S \cdot 3 - A = 2S$$

$$A = 3,15S - 2S = 1,15S$$

$$1,15S - S = 0,15S$$

0,15S составляют 15% от суммы кредита S .

Следовательно, общая сумма выплат на 15% больше суммы самого кредита.

Ответ: 15.

18. Построим график уравнения $y = \sqrt{-5 - 6x - x^2}$,

Преобразовав подкоренное выражение, получим

$$y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}, \quad y = \sqrt{2^2 - (x + 3)^2}.$$

Если $y \geq 0$, то $y^2 = 2^2 - (x + 3)^2$, $(x + 3)^2 + y^2 = 2^2$.

Если $y < 0$, точек, удовлетворяющих уравнению, нет.

Получилась полуокружность с центром в точке $(-3; 0)$ радиусом 2, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 186).

Уравнение $y - ax = 2 - 3a$ запишем в виде $y = a(x - 3) + 2$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a , проходящих через точку $M(3; 2)$.

Рассмотрим рисунок 186. Видно, что прямая и полуокружность имеют две общие точки, если $a_1 < a \leq a_2$. Прямая BM касается окружности и

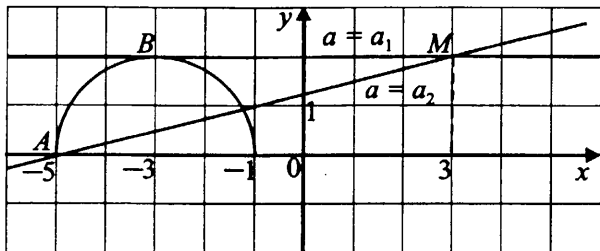


Рис. 186.

является горизонтальной, поэтому её угловой коэффициент равен 0, значит, $a_1 = 0$. Найдём a_2 из условия, что прямая AM $y = a(x - 3) + 2$ проходит через точку $A(-5; 0)$.

$$a(-5 - 3) + 2 = 0, a = \frac{1}{4}, \text{ значит, } a_2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, система имеет ровно два решения при $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

19. а) Предположим, что последовательность состоит из двух членов. Пусть меньшее из чисел последовательности a , тогда второе число $9a$. Сумма членов $a + 9a = 10a$. По условию эта сумма равна 19 399, и она должна делиться на 10 (a — натуральное число). Но 19 399 не делится на 10. Наше предположение неверно, следовательно, данная последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Например, такой является последовательность $1021 \cdot 9$; 1021 ; $1021 \cdot 9$, то есть 9189; 1021; 9189 (мы рассмотрели случай последовательности $9a$, a , $9a$ с суммой $19a$).

в) Минимальная сумма двух стоящих подряд членов последовательности равна 10 (два соседних члена равны 9 и 1).

$19\,399 = 10 \cdot 1939 + 9$, 1940 пар быть не может. Таким образом, чисел меньше чем $1940 \cdot 2$.

Значит, максимальное число членов последовательности $1939 \cdot 2 + 1 = 3879$.

В этом случае последовательность имеет вид: 9, 1, 9, 1 ..., 9.

Ответ: а) нет; б) да; в) 3879.

Решение варианта 17

1. $v_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{120}{12} \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}$. Учитывая, что 1 час равен 3600 секундам,

1 км = 1000 м, получим, что $10 \text{ м/с} = \frac{10 \cdot 3600}{1000} \text{ км/ч} = 36 \text{ км/ч}$.

Ответ: 36.

2. Определяем по рисунку наименьшую цену нефти (в долларах США за баррель) на момент закрытия торгов в период с 18 по 21 августа — на оси абсцисс она приходится на 18 августа, а ей соответствует ордината, равная 44, то есть 44 доллара США.

Ответ: 44.

3. Длина средней линии MN равна половине длины стороны AB , равной 5. $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$ (см. рис. 187).

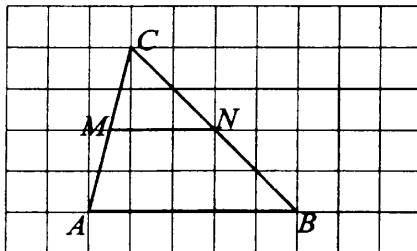


Рис. 187.

Ответ: 2,5.

4. Пусть событие A означает, что школьнику достался вопрос по теме «Творчество Пушкина», событие B — вопрос по теме «Творчество Лермонтова». По условию $P(A) = 0,15$, $P(B) = 0,21$.

По условию события A и B несовместны. Искомая вероятность события «школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем» равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15 + 0,21 = 0,36$.

Ответ: 0,36.

5. $2^{48-5x} = 2^7$, $48 - 5x = 7$, $-5x = -41$, $x = 8,2$.

Ответ: 8,2.

6. Точка P — середина стороны BC , поэтому $PC = 0,5BC$. Обозначим h высоту параллелограмма, проведённую к стороне AD (см. рис. 188). Тогда площадь параллелограмма S равна $BC \cdot h = 324$.

Площадь трапеции $APCD$ равна

$$\frac{PC + AD}{2} \cdot h = \frac{0,5BC + BC}{2} \cdot h = \frac{1,5BC}{2} \cdot h = 0,75S = 243.$$

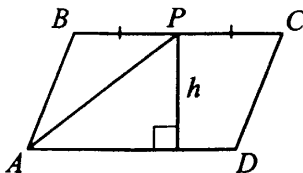


Рис. 188.

Ответ: 243.

7. Пусть x_0 — абсцисса точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 2$ или совпадает с ней. Тогда значение производной $y = f'(x)$ в точке x_0 равно 3, так как угловой коэффициент касательной $y = 3x + 2$ равен 3.

Но из графика видно, что $f'(x) = 3$ в единственной точке $x_0 = -1$.

Действительно, прямая $y = 3$ пересекает график функции $y = f'(x)$ в единственной точке $(-1; 3)$, абсцисса которой равна -1 .

Ответ: -1 .

8. Площадь боковой поверхности прямой призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 4a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h соответственно периметр основания и высота призмы, равная 5, и a — сторона ромба. Найдём сторону ромба, пользуясь тем, что диагонали ромба $ABCD$ взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам (см. рис. 189). Из треугольника BOC по теореме Пифагора находим

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 16 + 20 = 36, BC = 6.$$

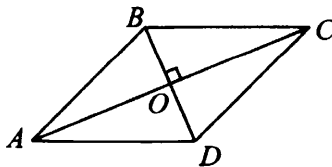


Рис. 189.

Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

$$9. 4 \log_3 (\log_5 5^3) = 4 \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

$$10. \text{ Решим неравенство } L \geq 11,25. \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \geq \frac{45}{4}, \frac{15^2}{10} \sin 2\alpha \geq \frac{45}{4},$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \geq \frac{1}{4}, \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Так как α — острый угол, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < 2\alpha < \pi$, тогда

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\alpha \leq \frac{5\pi}{6}, 2\alpha \geq \frac{\pi}{6}, \alpha \geq \frac{\pi}{12} = 15^\circ.$$

Ответ: 15

11. Цена телевизора первоначально была 50 000 руб. Через квартал она стала $50\,000 - 50\,000 \cdot 0,01x = 50\,000(1 - 0,01x)$ рублей, где x — количество процентов, на которые уменьшается ежеквартально цена телевизора.

Через два квартала его цена стала

$$50\,000(1 - 0,01x)(1 - 0,01x) = 50\,000(1 - 0,01x)^2.$$

Составим и решим уравнение:

$$50\,000(1 - 0,01x)^2 = 41\,405, (1 - 0,01x)^2 = 0,8281, 1 - 0,01x = 0,91, x = 9.$$

Итак, на 9 процентов уменьшалась цена телевизора ежеквартально.

Ответ: 9.

$$12. \text{ ОДЗ. } (x + 7)^9 > 0, x + 7 > 0, x > -7.$$

Так как на ОДЗ $\ln(x + 7)^9 = 9 \ln(x + 7)$, то исходная функция примет вид: $y = 9 \ln(x + 7) - 9x$. Найдём производную: $y' = \frac{9}{x + 7} - 9$.

$$\text{Определим нули производной } \frac{9}{x + 7} - 9 = 0, \frac{1}{x + 7} = 1, x = -6.$$

Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 190).

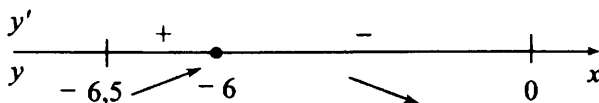


Рис. 190.

Из рисунка видно, что на отрезке $[-6,5; -6]$ исходная функция возрастает, а на отрезке $[-6; 0]$ — убывает. Таким образом, наиболь-

шее значение на отрезке $[-6, 5; 0]$ достигается при $x = -6$ и равно $y(-6) = \ln(-6 + 7)^9 - 9 \cdot (-6) = 54$.

Ответ: 54.

$$\begin{aligned} 13. \text{ а) } & 8 \sin x + 4 \cos^2 x = 7, \\ & 4(1 - \sin^2 x) + 8 \sin x - 7 = 0, \\ & -4 \sin^2 x + 8 \sin x - 3 = 0, \\ & 4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\sin x = t$, $|t| \leq 1$, уравнение примет вид $4t^2 - 8t + 3 = 0$, решим его: $t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}$.

$t_1 = \frac{1}{2}$ или $t_2 = \frac{3}{2}$. t_2 не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

$$\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдём корни уравнения на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 191).

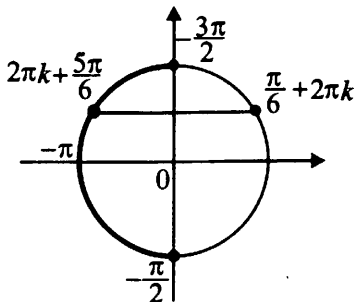


Рис. 191.

Это число $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

14. а) Обозначим через O точку пересечения диагоналей квадрата $MNPQ$ (см. рис. 192). В плоскости MSP проведём через точку O прямую $OK \parallel PS$. Точку K соединим с точкой N и точкой Q , получим сечение NKQ , которое является искомым, так как содержит $OK \parallel PS$ и диагональ основания NQ , по признаку параллельности прямой и плоскости:

плоскость NKQ параллельна ребру PS . Данное сечение представляет собой треугольник NKQ .

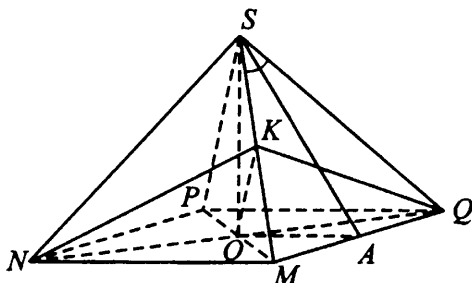


Рис. 192.

б) Треугольник NKQ — равнобедренный, $NK = KQ$. Это следует из равенства треугольников NKM и KMQ (по двум сторонам: MK — общая, $NM = MQ$ и углу: $\angle KMQ = \angle KMN$). Точка O — середина NQ , $NO = OQ$. KO — медиана и, следовательно, высота. $S_{NKQ} = \frac{1}{2}NQ \cdot KO$.

Рассмотрим $\triangle SMQ$, $\angle MSQ = 60^\circ$; значит, $\angle SMQ = \angle SQM = 60^\circ$, $SM = SQ = MQ = 5\sqrt{3}$. $\angle SOM = 90^\circ$, точка K — середина SM (так как OK — средняя линия $\triangle PSM$). Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. $OK = \frac{1}{2}SM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. NQ — диагональ квадрата со стороной $5\sqrt{3}$. $NQ = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{6}$.

$$S_{NKQ} = \frac{1}{2}OK \cdot NQ = \frac{5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6}}{4} = \frac{75\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{75\sqrt{2}}{4}$.

15. Введём обозначение $7^x = t$, $t > 0$. Неравенство примет вид $t^2 - 7t + 3|t - 5| \geq 6$.

$$\left[\begin{cases} t^2 - 7t + 3(t - 5) \geq 6, \\ t \geq 5; \\ t^2 - 7t + 3(-t + 5) \geq 6, \\ 0 < t \leq 5; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} t^2 - 4t - 21 \geq 0, \\ t \geq 5; \\ t^2 - 10t + 9 \geq 0, \\ 0 < t \leq 5; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} t \leq -3; t \geq 7, \\ t \geq 5; \\ t \leq 1; t \geq 9, \\ 0 < t \leq 5; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} t \geq 7, \\ 0 < t \leq 1. \end{cases} \right.$$

$$1) 0 < 7^x \leq 1, x \leq 0.$$

$$2) 7^x \geq 7, x \geq 1.$$

Значит, объединением решений будут промежутки $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

16. а) Докажем, что точка O лежит на медиане AF (см. рис. 193)

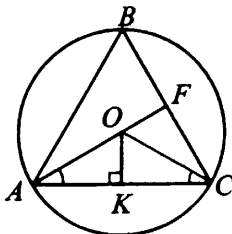


Рис. 193.

$\triangle AOC$ — равнобедренный ($AO = OC$ — как радиусы), следовательно, $\angle OAC = \angle OCA$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). По условию $\angle FAC = \angle OCA$, значит, $\angle FAC = \angle OAC$.

$\triangle ABC$ — остроугольный, значит, O лежит внутри треугольника, F и O лежат по одну сторону от AC . В этом случае из равенства $\angle FAC$ и $\angle OAC$ следует, что точка O лежит на медиане AF .

б) $\triangle BOC$ — равнобедренный, так как $OB = OC$ (как радиусы), OF — медиана, тогда OF — высота, откуда AF — высота в $\triangle ABC$, которая является медианой, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный и $AB = AC$. По условию $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$, $BC = AB$.

$\triangle ABC$ — равносторонний, $AF = AB \sin 60^\circ = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$; O — центр описанной и вписанной окружностей. Тогда $OK = OF$,

$$OF = \frac{1}{3}AF = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{12 \cdot 3}{6} = 6.$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OK = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}.$$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

17. Пусть кредит планируется взять на n лет. Ежегодный платёж состоит из двух частей — одна и та же сумма $x = \frac{5}{n}$ млн рублей, на которую каждый год уменьшается сумма кредита (долга), и плата за пользование кредитом, которая составляет 10% от оставшегося долга. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на май должен уменьшаться до нуля равномерно: $5; 5 - x; 5 - 2x; \dots 5 - (n - 1)x$.

Ежегодные выплаты процентов за пользование кредитом составят (в млн рублей): $0,1 \cdot 5; 0,1 \cdot (5 - x); 0,1 \cdot (5 - 2x); \dots 0,1 \cdot (5 - (n - 1)x)$.

Сумму выплат процентов за пользование кредитом посчитаем как сумму арифметической прогрессии.

$$0,1 \cdot 5 + 0,1 \cdot (5 - x) + 0,1 \cdot (5 - 2x) + \dots + 0,1 \cdot (5 - (n - 1)x) = \\ = 0,1(5 + (5 - x) + (5 - 2x) + \dots + (5 - (n - 1)x)) =$$

$$= 0,1 \cdot \frac{5 + 5 - (n - 1)x}{2} \cdot n = 0,1 \cdot \frac{(10 - (n - 1) \cdot \frac{5}{n}) \cdot n}{2} =$$

$$0,1 \cdot \frac{10n - 5(n - 1)}{2} = \frac{5n + 5}{20} = \frac{n + 1}{4}.$$

За n лет клиент банка должен выплатить 5 млн рублей кредита и проценты за пользование кредитом $\frac{n + 1}{4}$ млн рублей, что по условию равно 6 млн рублей.

$$5 + \frac{n + 1}{4} = 6; \frac{n + 1}{4} = 1, n = 3.$$

Кредит планируется взять на 3 года.

Ответ: 3.

18. Заметим, что при $a < 0$ неравенство системы не имеет решения, потому что левая часть неравенства неотрицательна. При $a = 0$ оно имеет вид $x^2 + y^2 \leq 0$ и имеет единственное решение $x = y = 0$.

Рассмотрим $a > 0$. Решим задачу, построив графики уравнения и неравенства. Графиком неравенства системы будет являться круг радиусом \sqrt{a} с центром в точке $(\sin \pi a; a)$.

Графиком уравнения будут стороны угла (см. рис. 194).

Ровно два решения будет, если круг касается обеих сторон угла, тогда центр круга должен лежать на биссектрисе угла, то есть на луче Oy . Значит, абсцисса центра круга должна равняться нулю, $\sin \pi a = 0$, $\pi a = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $a = k$. Значит, $a \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим $\triangle O_1MO$, где O_1 — центр круга, M — одна из точек касания. Тогда $O_1O = a$, $O_1M = \sqrt{a}$, $\angle O_1MO = 90^\circ$,

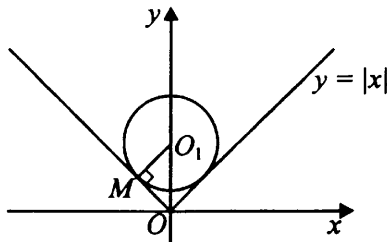


Рис. 194.

$\angle O_1OM = 45^\circ$. Отсюда, $O_1M = O_1O \sin \angle O_1OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{a}$, $\sqrt{a} = \sqrt{2}$, $a = 2$. Ясно, что $2 \in Z$.

Ответ: 2.

19. а) Да. Пусть в первый ход нумизмат переворачивает 4 монеты. Вторым ходом он переворачивает 3 ещё нетронутых монеты и 1 монету, которую перевернул за первый ход. Таким образом, окажется ровно 6 монет решкой кверху.

б) Нет, так как количество монет решкой кверху после каждого хода будет оставаться чётным. Изначально решкой кверху лежит 0 монет (чётное число).

Если за один ход нумизмат переворачивает 4 монеты, которые были решкой кверху, то количество монет кверху решкой уменьшится на 4.

Если за один ход нумизмат переворачивает 3 монеты кверху решкой и 1 монету кверху орлом, то количество монет кверху решкой уменьшится на 2.

Если за один ход нумизмат переворачивает 2 монеты кверху решкой и 2 монеты кверху орлом, то количество монет кверху решкой не изменится (можно сказать «изменяется на 0»).

Если за один ход нумизмат переворачивает 1 монету кверху решкой и 3 монеты кверху орлом, то количество монет кверху решкой увеличивается на 2.

Если за один ход нумизмат переворачивает 4 монеты, которые были кверху орлом, то количество монет кверху решкой увеличивается на 4.

Таким образом, после произвольного хода количество монет кверху решкой изменяется на 4, на 2 или на 0, то есть на чётное число. Изначально количество монет кверху решкой 0 — чётное число, следовательно, их число будет оставаться чётным числом и не может быть равно 3.

в) Число монет кверху решкой не должно равняться 200 (по условию) и не может равняться 199, так как число 199 — нечётно (см. решение б). Покажем, что число монет решкой кверху может равняться 198. Пусть первые 49 ходов нумизмат переворачивал только ранее нетронутые монеты. В итоге кверху решкой окажется $49 \cdot 4 = 196$ монет. За 50-й ход нумизмат перевернёт 3 монеты, которые лежали орлом кверху, и 1 монету, которая лежала кверху решкой. Кверху решкой окажется 198 монет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 198.

Решение варианта 21

1. Всего клиент должен вернуть банку 117% от суммы, взятой в кредит, т.е. $155\,000 \cdot 1,17 = 181\,350$ рублей. По условию он должен вносить в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, поэтому ежемесячный платеж составляет $181\,350 : 12 = 15\,112,5$ рублей.

Ответ: 15 112,5.

2. Находим по диаграмме наибольшую и наименьшую среднесуточные температуры в период с 9 по 17 июля, они равны 17°C и 23°C . Их разность равна 6°C .

Ответ: 6.

3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , в котором катет $BC = 5$, катет $AC = 12$ (см. рис. 195). Гипотенузу AB найдём по теореме Пифагора. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

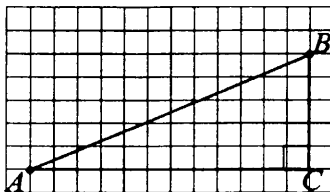


Рис. 195.

Ответ: 13.

4. Возьмём 8 карточек с написанными на них числами от 1 до 8. Перемешаем и раздадим по одной каждому участнику группы. Будем считать, что в магазин пойдёт тот участник, которому досталась карточка с числами 1 или 2.

Исходом жеребьёвки будем считать число, написанное на карточке, выданной Максиму.

Число возможных исходов равно 8, а число исходов, благоприятствующих событию «Максим пойдёт в магазин», равно двум (возможно число 1 или 2). Тогда по определению вероятность равна $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

5. $\frac{x}{1} = \frac{3x-8}{x+9}$, при $x \neq -9$ получим $x(x+9) = 3x-8$, $x^2 + 6x + 8 = 0$, $x_{1,2} = -3 \pm 1$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$.

Ответ: -2.

6. $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$ (см. рис. 196), $\frac{8}{AC} = 0,4$, $AC = 8 : 0,4 = 20$.

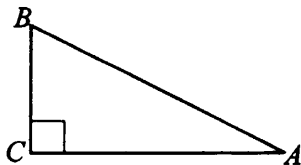


Рис. 196.

Ответ: 20.

7. Производная положительна в тех точках промежутков, на которых функция возрастает. Рассматривая график, находим четыре такие точки с целочисленными абсциссами: -2 ; -1 ; 0 ; 1 .

Ответ: 4.

8. Данный многогранник является прямой призмой и получается объединением двух прямых призм. В основании первой призмы лежит прямоугольник со сторонами 3 и 3, а её высота h_1 равна 5. Объём этой призмы V_1 находим по формуле $V_1 = S_{\text{осн.}} \cdot h_1 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$. В основании второй призмы лежит прямоугольник со сторонами 2 и 1, а её высота h_2 равна 5. Объём этой призмы V_2 находим по формуле $V_2 = S_{\text{осн.}} \cdot h_2 = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$. Объём V данного многогранника равен сумме объёмов указанных призм: $V = V_1 + V_2 = 45 + 10 = 55$.

Ответ: 55.

$$9. ((4x + 5y)^2 - 16x^2 - 25y^2) : 5xy = \\ = (16x^2 + 40xy + 25y^2 - 16x^2 - 25y^2) : 5xy = 40xy : 5xy = 8.$$

Ответ: 8.

$$10. \text{Подставим в формулу } v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0} \text{ числовые данные } c = 1500 \text{ м/с,} \\ v = 10 \text{ м/с, } f_0 = 149 \text{ МГц: } 10 = 1500 \cdot \frac{f - 149}{f + 149}, f + 149 = 150f - 150 \cdot 149, \\ 149f = 151 \cdot 149, f = 151. \text{ Частота отражённого сигнала } 151 \text{ МГц.}$$

Ответ: 151.

11. Обозначим скорость первой машины через x км/ч, путь от А до В s км, тогда путь от пункта А в пункт В она пройдёт за $\frac{s}{x}$ ч. Половина пути пройдена второй машиной со скоростью 39 км/ч за $\frac{0,5s}{39} = \frac{s}{78}$ ч. Скорость

второй машины на второй половине пути равна $(x + 26)$ км/ч, таким образом, время, затраченное на вторую половину пути второй машиной, равно $\frac{0,5s}{x + 26}$ ч.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{s}{x} = \frac{s}{78} + \frac{0,5s}{x + 26}, \quad \frac{2}{x} = \frac{2}{78} + \frac{1}{x + 26}, \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{39} - \frac{1}{x + 26} = 0,$$

$$\frac{2 \cdot 39(x + 26) - x(x + 26) - 39x}{39x(x + 26)} = 0, \quad 78x + 39 \cdot 52 - x^2 - 26x - 39x = 0,$$

$x^2 - 13x - 39 \cdot 52 = 0$, $x_1 = 52$, $x_2 = -39$. Отрицательная скорость не удовлетворяет условию. Скорость первой машины 52 км/ч.

Ответ: 52.

12. ОДЗ $x \geq 0$. Преобразуем исходную функцию $y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x + 2000$;

$$y = x^{1+\frac{1}{2}} - 6x + 2000;$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 2000.$$

Найдём производную: $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6$. Вычислим нули производной:

$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 = 0$; $x^{\frac{1}{2}} = 4$; $x = 16$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции (см. рис. 197).

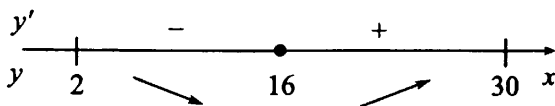


Рис. 197.

Из рисунка видно, что на отрезке $[2; 16]$ исходная функция убывает, а на отрезке $[16; 30]$ — возрастает. Таким образом, наименьшее значение на отрезке $[2; 30]$ достигается при $x = 16$ и равно $y(16) = 16\sqrt{16} - 6 \cdot 16 + 2000 = 64 - 96 + 2000 = 1968$.

Ответ: 1968.

13. а) Используя формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, преобразуем уравнение так, чтобы в нём была только одна тригонометрическая функция с одинаковым аргументом. Сделав замену $\sin x = t$, получим квадратное уравнение, решив которое, вернёмся к переменной x .

$$3 - 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin(x - \pi) = 0, \quad 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0.$$

Пусть $\sin x = t$, тогда $2t^2 - 3t + 1 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

$\sin x = 1$, тогда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\sin x = \frac{1}{2}$, тогда $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$, найдём с помощью тригонометрической окружности (см. рис. 198).

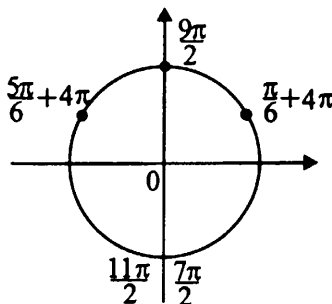


Рис. 198.

$$4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2};$$

$$4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{25\pi}{6};$$

$$4\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{29\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, б) $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{29\pi}{6}$.

14. а) Будем использовать метод координат. Найдём скалярное произведение векторов \overrightarrow{PK} и $\overrightarrow{PB_1}$, а затем косинус угла между этими векторами. Направим ось Oy вдоль CD , ось Oz вдоль CC_1 , и ось $Ox \perp CD$ (см. рис. 199). C — начало координат.

Тогда $C(0; 0; 0)$; $C_1(0; 0; 10)$; $P(0; 0; 5)$; $K(0; 5; 0)$;
 $B(BC \cos 30^\circ; BC \sin 30^\circ; 0)$, то есть $B(5\sqrt{3}; 5; 0)$, $B_1(5\sqrt{3}; 5; 10)$.

Найдём координаты векторов: $\overrightarrow{PK} = \{0; 5; -5\}$; $\overrightarrow{PB_1} = \{5\sqrt{3}; 5; 5\}$.

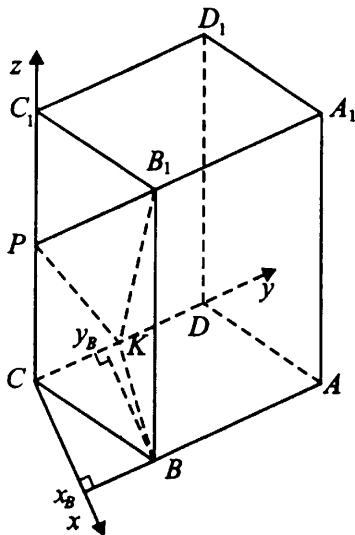


Рис. 199.

Пусть угол между \overrightarrow{PK} и $\overrightarrow{PB_1}$ равен α .

$$\text{Получаем } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PB_1}}{|\overrightarrow{PK}| \cdot |\overrightarrow{PB_1}|} = \frac{0 \cdot 5\sqrt{3} + 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5}{|\overrightarrow{PK}| \cdot |\overrightarrow{PB_1}|} = 0.$$

$\cos \alpha = 0$, значит, $\overrightarrow{PK} \perp \overrightarrow{PB_1}$ и прямые PK и PB_1 перпендикулярны.

б) Угол между плоскостями равен углу между ненулевыми векторами, перпендикулярными этим плоскостям (или, если угол тупой, смежному с ним углу). Такие векторы называют нормальными к плоскостям. Найдём их. Пусть $\vec{n}_1 = \{x; y; z\}$ перпендикулярен плоскости PKB_1 . Найдём его, решив систему

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{PK}, \\ \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{PB_1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PK} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB_1} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0x + 5y - 5z = 0, \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 5z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = z, \\ x = \frac{-y - z}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{Возьмём } y = 1; z = 1; x = \frac{-2}{\sqrt{3}}. \quad \vec{n}_1 = \left\{ \frac{-2}{\sqrt{3}}; 1; 1 \right\}.$$

Пусть $\vec{n}_2 = \{x; y; z\}$ перпендикулярен плоскости C_1B_1B . Найдём его, решив систему

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CB} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0x + 0y + 10z = 0, \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 0z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ y = -\sqrt{3}x. \end{cases}$$

Возьмём $x = 1; y = -\sqrt{3}; z = 0$. $\vec{n}_2 = \{1; -\sqrt{3}; 0\}$.

Найдём косинус искомого угла β (он равен модулю косинуса угла между \vec{n}_1 и \vec{n}_2).

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 \right|}{\sqrt{\frac{4}{3} + 1 + 1 \cdot \sqrt{1+3+0}}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{4}. \beta = \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

15. Данное неравенство равносильно неравенству $(3^x - 27)\sqrt{5x - x^2 + 14} \leq 0$. Будем использовать метод интервалов, предварительно найдя ОДЗ и нули левой части неравенства.

Найдём ОДЗ неравенства:

$$-x^2 + 5x + 14 \geq 0; x^2 - 5x - 14 \leq 0; (x - 7)(x + 2) \leq 0, x \in [-2; 7].$$

Найдём нули левой части неравенства: $(3^x - 27)\sqrt{5x - x^2 + 14} = 0$, $3^x - 27 = 0; 3^x = 3^3; x = 3$.

$$\sqrt{5x - x^2 + 14} = 0; -x^2 + 5x + 14 = 0; x_1 = -2, x_2 = 7.$$

Найдём знаки выражения $(3^x - 27)\sqrt{5x - x^2 + 14}$ (см. рис. 200).

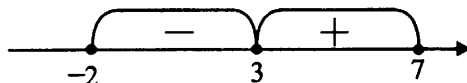


Рис. 200.

$$x \in [-2; 3] \cup \{7\}.$$

Ответ: $[-2; 3] \cup \{7\}$.

16. а) Докажем, что $DM \perp PK$ и $CD = CP$, а затем воспользуемся свойством медианы CM прямоугольного треугольника DPM . $ABCD$ — прямоугольник, поэтому его углы прямые и $CB = AD$, $CD = AB$ (см.рис. 201). $\angle PCB = \angle BAK = 90^\circ$.

$AD = AK$ как радиусы окружности. Получаем, что $CB = AK$. $\angle PBC = \angle BKA$ как соответственные углы при $CB \parallel AD$ (секущая PK).

$\triangle PBC = \triangle BKA$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), значит, $AB = CP$. Но $CD = AB$, из этого получаем $CD = CP$.

$\triangle DMK$ — вписанный, он опирается на диаметр, значит, $\angle DMK = 90^\circ$.

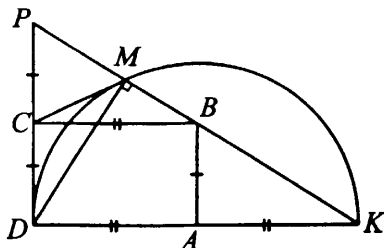


Рис. 201.

$\angle PMD = 180^\circ - \angle DMK = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике PDM медиана CM равна половине гипотенузы PD , значит, $MC = CP = CD$.

6) Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника BAD . $BD^2 = AD^2 + AB^2$ (по теореме Пифагора). $AM = AD$ (радиусы), $AD = 15$. $MC = CD = 8$ (см. пункт а)).

$$BD = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Ответ: 17.

17. Предположим, что на оба вида вклада изначально положена одинаковая сумма. Обозначим её какой-нибудь буквой (например, a). Выразим через a величину вклада через три года в обоих случаях. Запишем неравенство, обозначающее, что во втором случае сумма больше, и решим его относительно p (величина a сократится). Найдём наименьшее целое значение p , принадлежащее решению. Пусть размер вклада равен a . Вклад в первом банке через три года станет равен $(1,08)^3 a$. Вклад во втором банке через 2 года будет $(1,06)^2 a$, через 3 года — $(1,06)^2 a \cdot \frac{100+p}{100}$.

По условию вклад во втором банке выгоднее, то есть можно записать неравенство $(1,06)^2 a \cdot \frac{100+p}{100} > (1,08)^3 a$. Решаем его и находим наименьшее целое решение p .

$$(1,06)^2 \cdot \frac{100+p}{100} > (1,08)^3, \quad 100+p > \frac{(1,08)^3 \cdot 100}{(1,06)^2}, \quad 100+p > \frac{(108)^3}{(106)^2},$$

$$100+p > 112 \frac{320}{2809}, \text{ откуда } p \geq 13.$$

Наименьшее целое p равно 13.

Ответ: 13.

18. В прямоугольной системе координат Oxy построим графики обоих уравнений для некоторых значений a . Для этого заметим, что первое уравнение задаёт окружность, а для второго — построим сначала график

функции без внешнего модуля. Проанализируем, как изменяются графики в зависимости от a , и определим, в каких ситуациях графики пересекаются ровно в трёх точках. Найдём граничные значения a .

Построим графики уравнений системы.

1) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + 9 = a^2 + 4x$.

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 9 = a^2 + 4$, $(x - 2)^2 + y^2 = a^2 - 5$. При $a^2 - 5 \geq 0$ это окружность с центром $(2; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2 - 5}$.

2) $||x - 3| - |x - 6|| = y$.

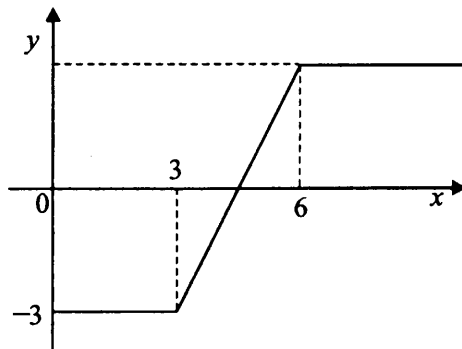


Рис. 202.

Построим сначала график уравнения $y = |x - 3| - |x - 6|$ (см. рис. 202).

При $x \leq 3$ $y = -x + 3 + x - 6$, $y = -3$;

при $3 < x \leq 6$ $y = x - 3 + x - 6$, $y = 2x - 9$;

при $x > 6$ $y = x - 3 - x + 6$, $y = 3$.

Отразим ту часть графика, где $y < 0$, относительно оси Ox , и получим график $y = ||x - 3| - |x - 6||$ (см. рис. 203).

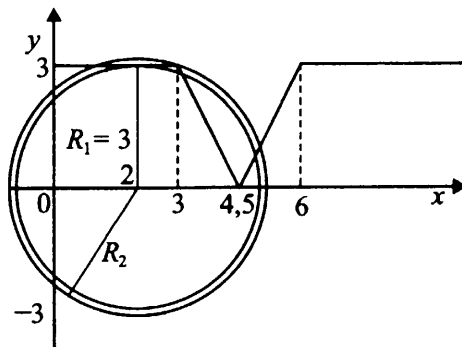


Рис. 203.

3) Система имеет не менее трёх решений, если графики имеют не менее трёх точек пересечения. По рисунку видно, что это выполняется при $R_1 \leq R \leq R_2$, где $R_1 = 3$ (окружность касается прямой $y = 3$) и R_2 — радиус окружности, которая проходит через точку $(3; 3)$. Найдём R_2 .

$$(x - 2)^2 + y^2 = R_2^2, (3 - 2)^2 + 3^2 = R_2^2, R_2 = \sqrt{10}.$$

$$\text{Получили } 3 \leq R \leq \sqrt{10}, 3 \leq \sqrt{a^2 - 5} \leq \sqrt{10}, 14 \leq a^2 \leq 15, \sqrt{14} \leq |a| \leq \sqrt{15}.$$

$$a \in [-\sqrt{15}; -\sqrt{14}] \cup [\sqrt{14}; \sqrt{15}].$$

$$\text{Ответ: } [-\sqrt{15}; -\sqrt{14}] \cup [\sqrt{14}; \sqrt{15}].$$

19. а) Невозможно. Найдём сумму всех чисел в явном виде. Разобьём ряд на группы по 4 числа. В первую группу войдут 4 крайних числа, в следующую — числа с 5-го по 8-е и так далее. 2016 делится нацело на 4, поэтому весь ряд разделится на группы, число групп равно $2016 : 4 = 504$. По условию, сумма чисел в каждой группе 12. Значит, сумма всего ряда $504 \cdot 12 = 6048$, и другая сумма получиться не может.

б) Возможно. Рассмотрим, например, ряд 2, 2, 6, 2, 2, 2, 6, 2, ..., 2, 2, 6, 2, 2, состоящий из 504 четвёрок вида 2, 2, 6, 2, 2017-е число которого равно 2. Тогда сумма всех чисел равна $(2 + 6 + 2 + 2) \cdot 504 + 2 = 6050$. Проверим, что условие выполняется. Среди любых последовательных четырёх чисел три двойки и одна шестёрка, поэтому их сумма будет равна $2 \cdot 3 + 6 = 12$.

в) Будем исследовать возможные значения суммы в зависимости от остатка при делении n на 4. Если n делится на 4, иными словами $n = 4k$, где $k \in \mathbb{N}$, то аналогично пункту а) получается $\frac{n}{4} = k$ четвёрок последовательно идущих чисел, сумма чисел в каждой такой четвёрке равна 12. Значит, сумма всех чисел равна сумме всех четвёрок и равна $k \cdot 12 = 3n$. Других сумм получиться не может.

Если n не делится на 4, то возможны случаи $n = 4k + r$, где $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{1; 2; 3\}$.

Рассмотрим 5 последовательных чисел этого ряда: $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}$. По условию $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} = 12$. Отсюда $a_i = a_{i+4}$, то есть числа в ряду повторяются через четыре.

Если в ряду k одинаковых четвёрок и ещё r чисел (r от 1 до 3), то эти r чисел равны начальным числам четвёрки. Сумма четвёрок равна $12k$.

Числа ряда натуральные, поэтому $a_i \geq 1$. При этом из четырёх последовательных чисел сумма любых трёх не меньше 3, значит, четвёртое число не больше $12 - 3 = 9$.

Для случая $n = 4k + 1$ сумма S может изменяться от $12k + 1$ до $12k + 9$ включительно, всего можно получить 9 различных сумм.

Сумму $S = 12k + t$ ($t \in N, 1 \leq t \leq 9$) можно получить, например, так:
 $\underbrace{t, 10 - t, 1, 1, \dots, t, 10 - t, 1, 1, t.}_{k \text{ четвѐрок } (t, 10-t, 1, 1)}$

k четвѐрок $(t, 10-t, 1, 1)$

Из четырёх последовательных чисел сумма любых двух не меньше 2, значит, третье и четвёртое числа в сумме не больше $12 - 2 = 10$. Поэтому для случая $n = 4k + 2$ сумма S может изменяться от $12k + 2$ до $12k + 10$ включительно, всего можно получить 9 различных сумм.

Сумму $S = 12k + t$ ($t \in N, 2 \leq t \leq 10$) можно получить, например, так:
 $\underbrace{t - 1, 1, 1, 11 - t, \dots, t - 1, 1, 1, 11 - t, t - 1, 1.}_{k \text{ четвѐрок } (t-1, 1, 1, 11-t)}$

k четвѐрок $(t-1, 1, 1, 11-t)$

Из четырёх последовательных чисел любое число не меньше 1, значит, три остальных числа в сумме не меньше 3 и не больше $12 - 1 = 11$. Поэтому для случая $n = 4k + 3$ сумма S может изменяться от $12k + 3$ до $12k + 11$ включительно, всего можно получить также 9 различных сумм.

Сумму $S = 12k + t$ ($t \in N, 3 \leq t \leq 11$) можно получить, например, так:
 $\underbrace{t - 2, 1, 1, 12 - t, \dots, t - 2, 1, 1, 12 - t, t - 2, 1, 1.}_{k \text{ четвѐрок } (t-2, 1, 1, 12-t)}$

k четвѐрок $(t-2, 1, 1, 12-t)$

Ответ: а) нет; б) да; в) 1, если n делится на 4; 9, если n не делится на 4.

Решение варианта 25

1. Наценка 25% означает, что цена продажи составляет $100\% + 25\% = 125\% = 1,25$ от закупочной цены. Магазин продаёт пакет молока за $33 \cdot 1,25 = 41,25$ руб.

Найдём число пакетов, которое можно купить на 300 рублей.

$300 : 41,25 = \frac{80}{11} = 7\frac{3}{11}$. Значит, наибольшее число пакетов равно 7.

Ответ: 7.

2. Находим по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в первой половине 1976 года, то есть с января по июнь, она равна 18°C .

Ответ: 18.

3. Длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна половине гипотенузы (см. рис. 204). Гипотенуза $AB = 9$. Медиана $CM = 4,5$.

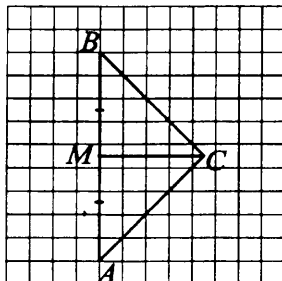


Рис. 204.

Ответ: 4,5.

4. В рассматриваемой задаче возможны 4 исхода: РР, РО, ОР, ОО. Благоприятствует событию «наступит исход РО» 1 исход. Искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

$$5. 4^{4-x} = \frac{4}{5} \cdot 5^{4-x}, \frac{4^{4-x}}{5^{4-x}} = \frac{4}{5}, \left(\frac{4}{5}\right)^{4-x} = \frac{4}{5}, 4-x = 1, x = 3.$$

Ответ: 3.

6. $\angle ACB = 180^\circ - \angle ACH$ (см. рис. 205), поэтому

$$\cos \angle ACB = -\cos \angle ACH = -\frac{CH}{AC}.$$

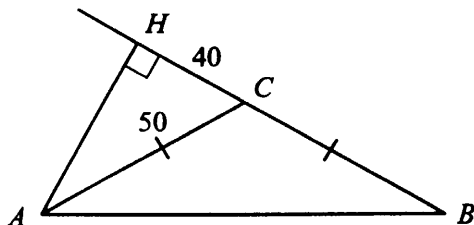


Рис. 205.

По условию $CH = 40$, $AC = 50$.

$$\cos \angle ACB = -\frac{40}{50} = -0,8.$$

Ответ: $-0,8$.

7. Из графика видно, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ меньше нуля во всех точках промежутка $[-1; 3]$. Значит, на этом промежутке функция $f(x)$ убывает. Поэтому наибольшее значение функции будет на левом конце промежутка, то есть в точке -1 .

Ответ: -1 .

8. Примем указанную в условии грань параллелепипеда за его основание. Тогда параллелепипед будет наклонной призмой, объем V которой находим по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, где $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания, а h — высота призмы. Опустим из точки A_1 верхнего основания перпендикуляр A_1K на нижнее основание (см. рис. 206).

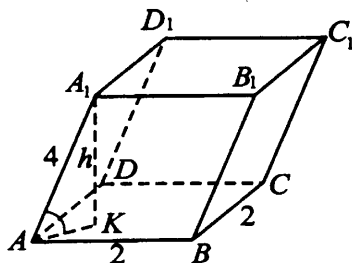


Рис. 206.

Тогда A_1K будет высотой призмы, $A_1K = h$. $\angle A_1AK$ является углом между ребром AA_1 и плоскостью основания, по условию он равен 60° .

$$\text{Тогда } A_1K = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Площадь основания, являющегося ромбом, находим по формуле

$$S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Отсюда, $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12$.

Ответ: 12.

9. Если $\alpha \in \left(\frac{7\pi}{2}; 4\pi\right)$, то $\sin \alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (0,6)^2} = -\sqrt{0,64} = -0,8.$$

$$2 \cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = 2 \sin \alpha = 2 \cdot (-0,8) = -1,6.$$

Ответ: -1,6.

10. Решим относительно t неравенство $h(t) \geq 4$. $-5t^2 + 8t + 1 \geq 4$, $5t^2 - 8t - 1 \leq -4$, $5t^2 - 8t + 3 \leq 0$. Найдём корни уравнения $5t^2 - 8t + 3 = 0$:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{5}, t_1 = \frac{3}{5}, t_2 = 1.$$

$5\left(t - \frac{3}{5}\right)(t - 1) \leq 0$, откуда $\frac{3}{5} \leq t \leq 1$. Мяч будет находиться на высоте

не менее четырёх метров в течение $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$ секунды.

Ответ: 0,4.

11. Обозначим скорость велосипедиста на пути от А до В через x км/ч, $x > 0$. Тогда его скорость на обратном пути будет $(x + 6)$ км/ч. Время, затраченное велосипедистом на путь от А до В, равно $\frac{288}{x}$ ч, время движения на обратном пути $\frac{288}{x + 6}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\frac{288}{x} - \frac{288}{x + 6} = 4$, $288(x + 6 - x) = 4x(x + 6)$,

$$72 \cdot 6 = x^2 + 6x, x^2 + 6x - 432 = 0, x_1 = 18, x_2 = -24.$$

Отрицательная скорость не удовлетворяет условию задачи. Скорость второго велосипедиста равна 18 км/ч.

Ответ: 18.

12. Найдём производную исходной функции, воспользовавшись формулой производной произведения:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (8 - x)'e^{x+12} + (8 - x)(e^{x+12})' = -e^{x+12} + (8 - x)e^{x+12} = \\ &= (7 - x)e^{x+12}. \end{aligned}$$

$y'(x) = 0$ при $x = 7$. При этом $y'(x) > 0$ при $x < 7$, $y'(x) < 0$ при $x > 7$ (см. рис. 207).

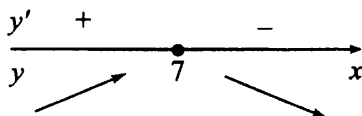


Рис. 207.

Таким образом, $x = 7$ является единственной точкой максимума.

Ответ: 7.

13. а) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2\pi x = 0, \\ 1 + \operatorname{ctg} \pi x \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg} \pi x \neq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg} \pi x \neq -1. \end{cases}$$

Если $n = 2m$, то $x = \frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z}$

$$\text{и } \operatorname{ctg} \pi x = \operatorname{ctg} \left(\pi \left(\frac{1}{4} + m \right) \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \pi m \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Значит, числа $\frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z}$ являются решениями исходного уравне-

ния. Если $n = 2m - 1$, то $x = \frac{1}{4} + \frac{2m-1}{2} = -\frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z}$ и

$$\operatorname{ctg} \pi x = \operatorname{ctg} \left(\pi \cdot \left(-\frac{1}{4} + m \right) \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} + \pi m \right) = \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1.$$

Следовательно, ни одно из чисел $-\frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z}$ не входит в область допустимых значений переменной исходного уравнения.

Множество решений данного уравнения состоит из чисел $\frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z}$.

б) Найдём корни в промежутке $\left[-2\frac{3}{7}; 1,5 \right]$.

$$-2\frac{3}{7} \leq \frac{1}{4} + m \leq 1,5; m \in \mathbb{Z}.$$

$-2\frac{19}{28} \leq m \leq 1\frac{1}{4}$, $m \in Z$. Отсюда находим $m_1 = -2$ и $x_1 = -\frac{7}{4}$; $m_2 = -1$ и $x_2 = -\frac{3}{4}$; $m_3 = 0$ и $x_3 = \frac{1}{4}$; $m_4 = 1$ и $x_4 = \frac{5}{4}$.

Ответ: а) $\frac{1}{4} + m$, $m \in Z$; б) $-\frac{7}{4}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$.

14. а) Пусть K — середина ребра SC (см. рис. 208). Так как треугольники SDC и SBC равносторонние, то $SC \perp DK$ и $SC \perp BK$ (медиана равностороннего треугольника является его высотой). Значит, прямая SC перпендикулярна плоскости DKB . Так как $SC \perp DKB$ и $SC \subset CSD$, то плоскость DBK перпендикулярна плоскости CSD . Треугольник DKB — искомое сечение.

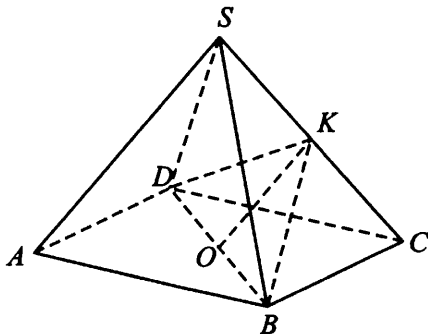


Рис. 208.

б) Найдём площадь сечения. Высоты DK и BK в равносторонних треугольниках равны $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Диагональ BD квадрата $ABCD$ равна $5\sqrt{2}$. В равнобедренном треугольнике DKB высота $OK = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$. Площадь треугольника DKB равна $\frac{1}{2}DB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{25\sqrt{2}}{4}$.

15. Найдём область определения неравенства.

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 5^{x^2+1} - 5^x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -4, \\ x^2 + 1 \neq x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -4, \\ x^2 - x + 1 \neq 0; \end{cases} \quad x > -4.$$

Для решения данного неравенства применяем метод интервалов.

а) Пусть $f(x) = \frac{(|2x+1| - x - 2) \cdot (\log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 1)}{5x^2+1 - 5x}$.

б) Область определения функции $f(x)$: $D(f) = (-4; +\infty)$.

в) Нули функции $f(x)$: $f(x) = 0$.

$$\frac{(|2x+1| - x - 2) \cdot (\log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 1)}{5x^2+1 - 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|2x+1| - x - 2) \cdot (\log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 1) = 0, \\ x > -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+1| - x - 2 = 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 1 = 0 \\ x > -4. \end{cases}$$

Уравнение $|2x+1| - x - 2 = 0$ или $|2x+1| = x+2$ равносильно системе

$$\begin{cases} (2x+1)^2 = (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 1, \end{cases} \\ x+2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) + 1 = 0$ имеет корень $x = -1$.

г) Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. На каждом из промежутков $(-4; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак. Так как $f(-2) > 0$, $f(0) > 0$, $f(2) < 0$, то $f(x) \geq 0$ при всех значениях $x \in (-4; 1]$.

Ответ: $(-4; 1]$.

16. а) Так как $DB = BE$ по свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, то треугольник DBE — равнобедренный (см. рис. 209).

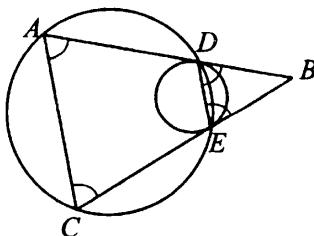


Рис. 209.

Значит, $\angle BDE = \angle BED$. Четырёхугольник $DACE$ вписан в окружность, поэтому $\angle ACE + \angle ADE = 180^\circ$, откуда $\angle ACB = 180^\circ - \angle ADE = \angle BDE$. Аналогично $\angle BAC = \angle DEB$. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный и $AB = BC$.

6) Пусть длины высот треугольника ABC , опущенных из точек A и B соответственно, равны h_a и h_b .

$$\text{Найдём } h_b = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6}. \text{ Пло-}$$

щадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AC \cdot h_b = \frac{1}{2}BC \cdot h_a$. Отсюда

$$h_a = \frac{AC \cdot h_b}{BC} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{6}}{10} = \frac{8\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: 6) $\frac{8\sqrt{6}}{5}$.

17. Обозначим через x кг количество первого корма, через y кг количество второго корма. Согласно условию задачи составим систему ограничений

$$\text{на переменные } x \text{ и } y: \begin{cases} 2x + y = 6, \\ 2x + 4y \geq 12, \\ x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Расходы на одно животное составят $f = 0,2x + 0,3y$ (ден. ед.). Из уравнения системы выразим $y = 6 - 2x$ и подставим в неравенство $2x + 4y \geq 12$ и выражение $f = 0,2x + 0,3y$. Получим линейную убывающую функцию $f(x) = 1,8 - 0,4x$ при условии $0 < x \leq 2$. Наименьшее значение функции достигается при $x = 2$: $f_{\text{наим.}} = 1,8 - 0,4 \cdot 2 = 1$. Тогда $y = 6 - 2 \cdot 2 = 2$.

Нужно расходовать 2 кг корма первого вида и 2 кг корма второго вида на одно животное; минимальные затраты 1 ден. ед.

Ответ: 2 кг и 2 кг.

18. Преобразуем второе уравнение системы $x(1 + y) = -2 - y$. Если $y = -1$, то получаем неверное равенство $0 = -1$. При $y \neq -1$ имеем $x = \frac{-2-y}{1+y}$. Подставим полученное значение x в первое уравнение:

$$(2a + 2)y^2 + (4a + 3)y + 3 = 0.$$

1) Пусть $2a + 2 = 0$, то есть $a = -1$. Тогда получаем единственное решение системы $x = -\frac{5}{4}$, $y = 3$.

2) Если $a \neq -1$, то имеем квадратное уравнение.

а) Квадратное уравнение имеет единственный корень, а следовательно, система имеет единственное решение, если дискриминант равен нулю:

$$D = 16a^2 - 15 = 0. \text{ Отсюда } a = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ (условие } a \neq -1 \text{ выполняется).}$$

б) Система имеет единственное решение, если один из двух корней квадратного уравнения равен (-1) . Пусть корень

$$\frac{-4a - 3 + \sqrt{16a^2 - 15}}{4a + 4} = -1. \text{ Отсюда получаем иррациональное}$$

уравнение $\sqrt{16a^2 - 15} = -1$, которое не имеет корней. Пусть корень

$$\frac{-4a - 3 - \sqrt{16a^2 - 15}}{4a + 4} = -1. \text{ Отсюда получаем иррациональное уравне-}$$

ние $\sqrt{16a^2 - 15} = 1$, которое имеет два корня $a = \pm 1$, один из которых не удовлетворяет условию $a \neq -1$.

Заметим, что найти a , при котором $y = -1$ — корень, можно подставив $y = -1$ в квадратное уравнение. Получим уравнение $(2a + 2) \cdot (-1)^2 + (4a + 3) \cdot (-1) + 3 = 0$, откуда $a = 1$. Мы получи-

ли, что система имеет единственное решение при $a = \pm 1$, $a = \frac{\pm\sqrt{15}}{4}$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}; -1; 1.$$

19. а) Если десятичная запись числа x содержит не более трёх цифр, то сумма этих цифр не превосходит 27. Следовательно, $x + S(x) < 2015$. Таким образом, x — четырёхзначное число, первая цифра которого равна 1 или 2, то есть $1 \leq S(x) \leq 28$, значит, $1987 \leq x \leq 2014$. Согласно признаку делимости на 3 числа x и $S(x)$ имеют одинаковые остатки от деления на 3. Если число x кратно 3, то $x = 3k$, $k \in N$ и $S(x) = 3m$, $m \in N$ и сумма $x + S(x)$ кратна 3. Но число 2015 не кратно 3. В данном случае уравнение не имеет решений.

Пусть $x = 3k + 1$ и $S(x) = 3m + 1$, тогда сумма $x + S(x)$, как и число 2015, при делении на 3 имеет остаток 2. Среди чисел от 1987 до 2014 остаток 1 при делении на 3 дают числа 1987, 1990, 1993, 1996, 1999, 2002, 2005, 2008, 2011, 2014. Проверив эти числа, убеждаемся, что подходят только 1993 и 2011. Пусть $x = 3k + 2$ и $S(x) = 3m + 2$, тогда сумма $x + S(x)$ при делении на 3 имеет остаток 1, а число 2015 при делении на 3 имеет остаток 2. В этом случае уравнение не имеет решений.

б) Согласно признаку делимости на 3 числа x , $S(x)$ и $S(S(x))$ имеют одинаковые остатки от деления на 3. Значит, сумма $x + S(x) + S(S(x))$ делится на три. Число 2015 на 3 не делится, поэтому решений нет.

в) Число $x < 2015$. Среди чисел, меньших 2015, наибольшую сумму цифр 28 имеет число 1999. Так как $S(x) \leq 28$, $S(S(x)) \leq S(19) = 10$, $S(S(S(x))) \leq 9$, то

$$x = 2015 - S(x) - S(S(x)) - S(S(S(x))) \geq 2015 - 28 - 10 - 9 = 1968.$$

Согласно признаку делимости на 9 числа x , $S(x)$ и $S(S(x))$ и $S(S(S(x)))$ имеют одинаковые остатки от деления на 9. Число 2015 при делении на 9 даёт остаток 8, поэтому число x должно давать остаток 2. Среди чисел от 1968 до 2015 остаток 2 при делении на 9 дают 1973, 1982, 1991, 2000, 2009. Проверив эти числа, убеждаемся, что подходит только 1991.

Ответ: а) 1993; 2011; б) нет решений; в) 1991.

Решение варианта 29

1. У Артёма останется $32 - 1,2 \cdot 9 = 21,2$ руб.

Ответ: 21,2.

2. Находим нужный нам период с 15 по 21 августа. Далее, используя диаграмму, в этом периоде определяем самый низкий столбец, он соответствует 20 августа.

Ответ: 20.

3. Площадь заштрихованного сектора равна половине площади всего круга, т.е. его площадь равна $0,5 \cdot 36 = 18$.

Ответ: 18.

4. Сформируем группы, последовательно помещая спортсменов на свободные места, при этом начнём с Андрея и Михаила. Сначала поместим Андрея на любое случайно выбранное место из 21. Теперь помещаем на свободное место Михаила (исходом этого эксперимента будем считать выбор места для него). Всего имеется 20 свободных мест (одно уже занял Андрей), поэтому всего возможны 20 исходов. В одной группе с Андреем остаётся 6 свободных мест, поэтому событию «Андрей и Михаил в одной группе» благоприятствуют 6 исходов. Вероятность этого события равна $\frac{6}{20} = 0,3$.

Ответ: 0,3.

5. $\log_3(28 + 4x) = \log_3(18 - x)$, $28 + 4x = 18 - x$, $5x = -10$, $x = -2$.

Сделаем проверку. $\log_3(28 + 4 \cdot (-2)) = \log_3(18 - (-2))$, $\log_3 20 = \log_3 20$. Верно, значит, $x = -2$ — корень уравнения.

Ответ: -2 .

6. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $BC = 15$, $AD = 43$ — основания, $AB = CD$ (см. рис. 210).

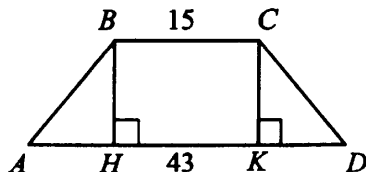


Рис. 210.

Проведём высоты CK и BH . $BCKH$ — прямоугольник, $BC = KH = 15$. Треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и острому углу, откуда $AH = KD = (43 - 15) : 2 = 14$. Треугольник ABH

прямоугольный, $\cos A = \frac{AH}{AB}$.

Боковая сторона трапеции $AB = AH : \cos A = 14 : 0,7 = 20$.

Ответ: 20.

7. Пусть $(x_0; y_0)$ — точка, в которой прямая $y = 3x + 2$ касается графика функции $y = 4x^2 + 7x + c$. Тогда угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 4x^2 + 7x + c$ в точке x_0 равен $y'(x_0)$. Но $y' = 8x + 7$, значит, $y'(x_0) = 8x_0 + 7$. Угловой коэффициент касательной $y = 3x + 2$, указанной в условии, равен 3. Поэтому $8x_0 + 7 = 3$.

Кроме того, точка $(x_0; y_0)$ лежит на прямой $y = 3x + 2$ и на графике функции $y = 4x^2 + 7x + c$. Значит, выполняется равенство $y_0 = 3x_0 + 2 = 4x_0^2 + 7x_0 + c$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 8x_0 + 7 = 3, \\ 3x_0 + 2 = 4x_0^2 + 7x_0 + c; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -0,5, \\ -4x_0^2 - 4x_0 + 2 = c. \end{cases}$$

Отсюда, $c = 3$.

Ответ: 3.

8. Указанный в условии многогранник является треугольной пирамидой, в основании которой лежит треугольник ABC , а высотой является боковое ребро призмы BB_1 , так как $BB_1 \perp ABCD$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ (см. рис. 211). От-

сюда, $V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 8 = 48$.

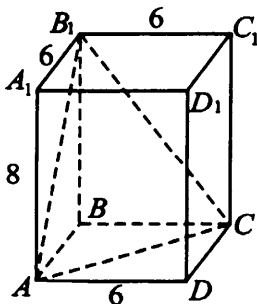


Рис. 211.

Ответ: 48.

$$\begin{aligned}
 & 9. (16a^2 - 25) \cdot \frac{4a + 5 - (4a - 5)}{(4a - 5)(4a + 5)} + a - 13 = \\
 & = (16a^2 - 25) \cdot \frac{4a + 5 - 4a + 5}{(4a - 5)(4a + 5)} + a - 13 = \\
 & = \frac{(4a)^2 - 5^2}{1} \cdot \frac{10}{(4a - 5)(4a + 5)} + a - 13 = \\
 & = \frac{(4a - 5)(4a + 5) \cdot 10}{(4a - 5)(4a + 5)} + a - 13 = 10 + a - 13 = a - 3 = 143 - 3 = 140.
 \end{aligned}$$

Ответ: 140.

10. Решим неравенство $f(v) - f_0 \geq 7$, используя условие $v < 328$.

$$\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 7, \quad \frac{280}{1 - \frac{v}{328}} - 280 \geq 7, \quad \frac{1}{1 - \frac{v}{328}} - 1 \geq \frac{1}{40}, \quad \frac{1}{1 - \frac{v}{328}} \geq \frac{41}{40},$$

$1 - \frac{v}{328} \leq \frac{40}{41}, \quad \frac{v}{328} \geq \frac{1}{41}, \quad v \geq 8$. Следовательно, минимальная скорость теплового равна 8 м/с.

Ответ: 8.

11. Обозначим скорость течения через x км/ч, тогда скорость теплохода по течению реки равна $(15 + x)$ км/ч, скорость теплохода против течения $(15 - x)$ км/ч. Время движения теплохода равно $37 - 7 = 30$ ч.

Составим и решим уравнение: $\frac{221}{15 + x} + \frac{221}{15 - x} = 30$,

$$221(15 - x + 15 + x) = 30(15 - x)(15 + x), \quad 221 = 225 - x^2, \quad x^2 = 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2.$$

Скорость течения положительна, она равна 2 км/ч.

Ответ: 2.

12. Найдём производную исходной функции: $y' = -18 \sin x + 9\sqrt{3}$. Вычислим нули производной: $y' = 0; -18 \sin x + 9\sqrt{3} = 0; \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ этому уравнению удовлетворяет только $x = \frac{\pi}{3}$. Расставим знаки производной и определим промежутки монотонности исходной функции на рассматриваемом отрезке (см. рис. 212).

Из рисунка видно, что при $x < \frac{\pi}{3}$ выполняется $y'(x) > 0$ и исходная функция возрастает. Аналогично при $x > \frac{\pi}{3}$ выполняется $y'(x) < 0$ и ис-

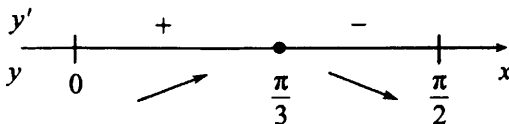


Рис. 212.

ходная функция убывает. Значит, наибольшее значение достигается при $x = \frac{\pi}{3}$ и равно $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 18 \cos \frac{\pi}{3} + 9\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 3\sqrt{3}\pi + 16 = 9 + 16 = 25$.

Ответ: 25.

13. а) Решим уравнение $\sin x(2 \sin x - 1) + \sqrt{3} \sin x + \sin \frac{4\pi}{3} = 0$.

Так как $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

уравнение примет вид $\sin x(2 \sin x - 1) + \sqrt{3} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Отсюда

$$2 \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0; (2 \sin x + \sqrt{3}) \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Тогда $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, найдём с помощью числовой окружности: $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$ (см. рис. 213).

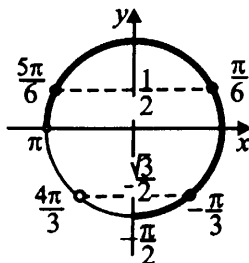


Рис. 213.

Ответ: а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

14. а) Построим $MN \parallel AB$ (см. рис. 214). Так как $KL \parallel AB$ по условию, то $KL \parallel MN$. Это означает, что точки K, L, N и M лежат в одной плоскости, то есть $KLNM$ — искомое сечение.

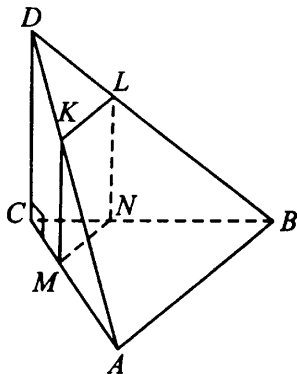


Рис. 214.

6) 1. $\triangle MNC \sim \triangle ABC$, так как $MN \parallel AB$, то есть соответственные углы равны: $\angle CAB = \angle CMN$ и $\angle CBA = \angle CNM$. Значит, $\triangle MNC$ равнобедренный, то есть $CN = MN = CM = 2$.

2. Аналогично можно доказать, что $\triangle DKL \sim \triangle DAB$, так как $KL \parallel AB$. Значит, $\frac{KL}{AB} = \frac{DK}{DA} = \frac{2}{5}$, $KL = \frac{2}{5}AB = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2$.

3. Так как $KL \parallel MN$ и $KL = MN$, то $KLNM$ — параллелограмм.

4. $\triangle AMK \sim \triangle ACD$, так как угол при вершине A общий и $\frac{AK}{AD} = \frac{AM}{AC} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $MK \parallel CD$, так как соответственные углы равны (например, $\angle AKM = \angle ADC$). Отсюда, $MK \perp ABC$, так как $CD \perp ABC$. Значит, $MK \perp MN$, то есть параллелограмм $KLNM$ является прямоугольником.

5. По теореме Пифагора $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$.

Так как $\frac{MK}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{3}{5}$, то $MK = \frac{3}{5}CD = 3\sqrt{3}$.

6. $S_{KLNM} = MK \cdot MN = 3\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

$$15. (x^2 + 2x - 3) \log_{2x-1}(4x^2 - 11x + 7) \leq 0.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ 4x^2 - 11x + 7 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > \frac{7}{4}; \end{cases} \end{cases} \quad x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right).$$

Применяя метод рационализации, получим, что на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2 + 2x - 3)(2x - 1 - 1)(4x^2 - 11x + 7 - 1) \leq 0;$$

$$(x - 1)(x + 3)(2x - 2)(4x^2 - 11x + 6) \leq 0;$$

$$(x - 1)^2(x + 3)(x - 2)\left(x - \frac{3}{4}\right) \leq 0.$$

Из рисунка 215 следует, что $\frac{3}{4} \leq x < 1$; $\frac{7}{4} < x \leq 2$.

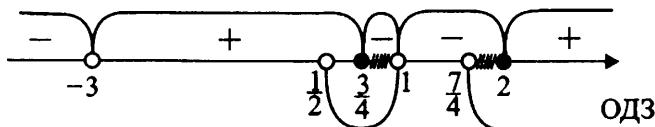


Рис. 215.

$$\text{Ответ: } \left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right].$$

16. а) Пусть K и L — точки касания окружности и сторон BC и AC соответственно (см. рис. 216).

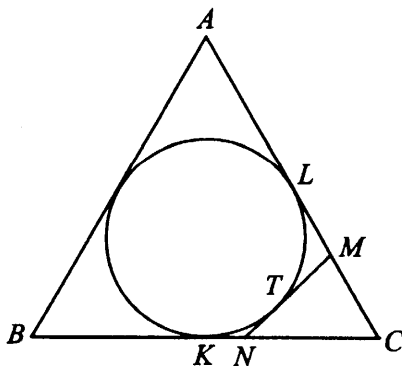


Рис. 216.

Так как $MT = ML$ и $NK = NT$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки, то

$$P_{MNC} = CM + MT + TN + NC = CM + ML + KN + NC = CL + KC.$$

Так как ABC — правильный треугольник, то $CL = KC = \frac{AC}{2}$. Следовательно, $P_{MNC} = AC$, что и требовалось доказать.

б) 1. Обозначим $TN = x$, $CM = a$. Так как $CM : MA = 1 : 4$ по условию, то $MA = 4a$ и $AC = 5a$.

$$\text{Тогда } CL = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}a \text{ и } ML = CL - CM = \frac{5}{2}a - a = \frac{3}{2}a. \text{ Так как}$$

$$ML = MT, \text{ то } MT = \frac{3}{2}a. \text{ Тогда } MN = MT + TN = \frac{3}{2}a + x.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } NT = NK, \text{ то } NK = x. \text{ Тогда } CN = CK - NK &= \frac{BC}{2} - x = \\ &= \frac{5}{2}a - x. \end{aligned}$$

2. По теореме косинусов для треугольника MNC
 $MN^2 = CN^2 + CM^2 - 2 \cdot CN \cdot CM \cdot \cos \angle NCM$. Подставляя в это уравнение выражения для сторон треугольника MNC , получим:

$$\left(\frac{3}{2}a + x\right)^2 = \left(\frac{5}{2}a - x\right)^2 + a^2 - 2\left(\frac{5}{2}a - x\right)a \cos 60^\circ;$$

$$\frac{9}{4}a^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}ax + x^2 = \frac{25}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}ax + x^2 + a^2 - 2\left(\frac{5}{2}a - x\right)a \cdot \frac{1}{2};$$

$$7ax = \frac{5}{2}a^2;$$

$$x = \frac{5}{14}a.$$

$$\text{Таким образом, } TN = x = \frac{5}{14}a.$$

$$3. \text{ Тогда } MT : TN = \frac{3}{2}a : \frac{5}{14}a = 21 : 5.$$

Ответ: б) 21 : 5.

17. Пусть $k = 455$ тыс. рублей — сумма кредита, x тыс. рублей — сумма ежегодного платежа, n — число лет, на которые планируется взять кредит. Из условия следует таблица:

Год	Платёж	Остаток
1	x	$1,2k - x$
2	x	$1,2(1,2k - x) - x = 1,2^2k - 1,2x - x$
3	x	$1,2(1,2^2k - 1,2x - x) - x = 1,2^3k - 1,2^2x - 1,2x - x$
...
n	x	$1,2^nk - 1,2^{n-1}x - \dots - 1,2x - x$

Из этой таблицы и условия задачи следует система уравнений:

$$\begin{cases} nx = 648, \\ 1,2^nk - 1,2^{n-1}x - \dots - 1,2x - x = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы можно записать в виде

$$1,2^nk - x(1,2^{n-1} + 1,2^{n-2} + \dots + 1,2 + 1) = 0.$$

Так как $1,2^{n-1} + 1,2^{n-2} + \dots + 1,2 + 1$ — сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем 1,2, то

$$1,2^{n-1} + 1,2^{n-2} + \dots + 1,2 + 1 = \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1} = \frac{1,2^n - 1}{0,2}.$$

Тогда, учитывая, что $x = \frac{648}{n}$ из первого уравнения системы, для второго уравнения получим:

$$1,2^nk - \frac{648}{n} \cdot \frac{1,2^n - 1}{0,2} = 0;$$

$$1,2^n \cdot 455 \cdot n \cdot 0,2 - 648(1,2^n - 1) = 0;$$

$$1,2^n \cdot 91n - 648(1,2^n - 1) = 0;$$

$$(648 - 91n) \cdot 1,2^n = 648.$$

Так как $648 - 91n > 0$, то $91n < 648$. Отсюда, $n \leq 7$.

Перепишем последнее уравнение в виде

$$(648 - 91n) \cdot 6^n = 648 \cdot 5^n;$$

$$6^n - 5^n = \frac{91n \cdot 6^n}{648};$$

$$6^n - 5^n = 7 \cdot 13 \cdot n \cdot 2^{n-3} \cdot 3^{n-4}.$$

Так как справа от знака равенства должно быть целое число, то $n \geq 3$.

Перебором находим единственный целый корень уравнения $n = 3$.

Замечание.

Можно ограничить n , если использовать свойства делимости. Выразим n из последнего уравнения:

$$n = \frac{(6^n - 5^n) \cdot 3^4 \cdot 2^3}{7 \cdot 13 \cdot 3^n \cdot 2^n}.$$

Это натуральное число, значит, число множителей 2 в знаменателе не больше числа множителей 2 в числителе, то есть $n \leq 3$.

Ответ: 3.

18. Исходное уравнение равносильно уравнению $a + \sqrt{a + \sqrt{x}} = x$.

Рассмотрим функцию $f(x) = a + \sqrt{x}$, определённую при $x \geq 0$. Тогда полученное уравнение можно записать в виде $f(f(x)) = x$. Это уравнение равносильно уравнению $f(x) = f^{-1}(x)$, где $f^{-1}(x)$ — функция, обратная к $f(x)$. Если $y = a + \sqrt{x}$, то $x = (y - a)^2$. Тогда обратной к функции $f(x)$ является функция $f^{-1}(x) = (x - a)^2$, определённая при $x \geq a$. Проверим это:

$$f(f^{-1}(x)) = a + \sqrt{f^{-1}(x)} = a + \sqrt{(x - a)^2} = a + |x - a| = a + x - a = x;$$

$$f^{-1}(f(x)) = (f(x) - a)^2 = (a + \sqrt{x} - a)^2 = x.$$

Возможны три случая.

1. При $a > 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ имеет единственный корень x_0 (см. рис. 217).

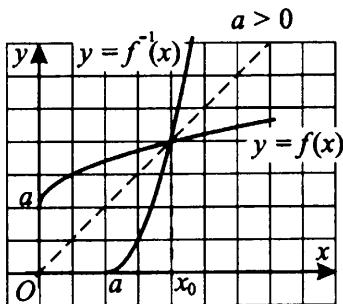


Рис. 217.

2. При $a = 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ принимает вид $\sqrt{x} = x^2$ и имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ (см. рис. 218).

3. При $a < 0$ уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ будет иметь единственный корень x_0 , только если прямая $y = x$ будет общей касательной к графикам функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ в точке с абсциссой x_0 (см. рис. 219).

В этом случае в точке x_0 выполняются условия:

$$\begin{cases} f(x_0) = f^{-1}(x_0), \\ f'(x_0) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a + \sqrt{x_0} = (x_0 - a)^2, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x_0 = \frac{1}{4}$ и подставляем это значение в первое уравнение:

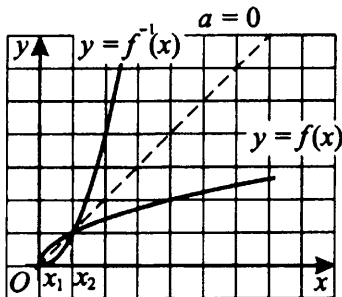


Рис. 218.

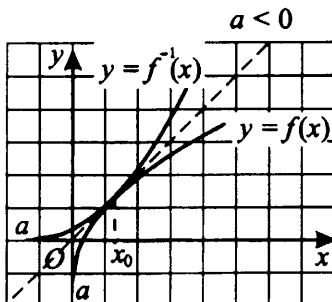


Рис. 219.

$$a + \sqrt{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4} - a\right)^2;$$

$$a + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{a}{2} + a^2;$$

$$a^2 - \frac{3}{2}a - \frac{7}{16} = 0;$$

$$16a^2 - 24a - 7 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня: $a_1 = -\frac{1}{4}$ и $a_2 = \frac{7}{4}$. Так как

$$a < 0, \text{ то } a = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (0; +\infty)$.

19. а) Да. Например, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 19. Сумма этих чисел равна 48, среднее арифметическое равно 6, наибольший общий делитель равен 1.

б) Да. Например, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11. Сумма этих чисел равна 40, среднее арифметическое равно 5, наибольший общий делитель равен 1.

в) Пусть НОД восьми чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_8$ равен d . Тогда $a_1 \geq d, a_2 \geq 2d, \dots, a_8 \geq 8d$. Следовательно, $a_1 + a_2 + \dots + a_8 \geq 36d$, а среднее арифметическое $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_8}{8} \geq \frac{36}{8}d = 4,5d$. Значит, среднее арифметическое не может быть больше НОД ровно в 4 раза.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

Решение варианта 33

1. В ноябре стоимость 1 кг апельсинов составляла 115% стоимости 1 кг апельсинов в октябре. Значит, после подорожания 1 кг апельсинов стоил $56 \cdot 1,15 = 64,4$ рубля.

Ответ: 64,4.

2. Находим на горизонтальной оси число 400, на оси ординат этому числу соответствует отметка 4. То есть подъёмная сила равна 4 тс.

Ответ: 4.

3. Расстояние от точки A до прямой BC равно 3 (см. рис. 220).

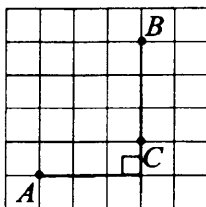


Рис. 220.

Ответ: 3.

4. Первая девочка займёт одно из 17 мест. После этого для второй девочки останется 16 свободных мест, из которых два рядом с первой девочкой. Всего исходов (способов занять определённое место) 16, из них благоприятных 2. По определению, вероятность равна $\frac{2}{16} = 0,125$.

Ответ: 0,125.

$$5. \cos \frac{\pi(x+5)}{6} = 0,5, \quad \frac{\pi(x+5)}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

а) $\frac{\pi(x+5)}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{x+5}{6} = \frac{1}{3} + 2k, \quad x+5 = 2 + 12k, \quad x = -3 + 12k,$
наибольший отрицательный корень данного вида $x = -3$.

б) $\frac{\pi(x+5)}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{x+5}{6} = -\frac{1}{3} + 2k, \quad x+5 = -2 + 12k,$
 $x = -7 + 12k,$ наибольший отрицательный корень данного вида $x = -7$.
Значит, наибольший отрицательный корень уравнения $x = -3$.

Ответ: -3 .

6. Угловая величина всей окружности составляет 360° , дуга составляет треть окружности, то есть $360^\circ : 3 = 120^\circ$. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то есть $120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Ответ: 60.

7. Угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ в произвольной точке x_0 равен $y'(x_0)$. Но $y' = 3x^2 + 6x - 6$, значит, $y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 6$. Угловым коэффициентом касательной $y = 3x - 7$, указанной в условии, равен 3. Поэтому находим такое значение x_0 , что $3x_0^2 + 6x_0 - 6 = 3$, $3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0$. По формулам корней квадратного уравнения получаем, что либо $x_0 = -3$, либо $x_0 = 1$.

Заметим, что $y(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 2 = 16$, а $y(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 2 = -4$. Получаем две возможные точки касания: $(-3; 16)$; $(1; -4)$. Выясним, через какую из них проходит касательная $y = 3x - 7$. Координаты точки $(-3; 16)$ не удовлетворяют уравнению касательной, так как равенство $16 = 3 \cdot (-3) - 7$ не является верным. Но равенство $-4 = 3 \cdot 1 - 7$ является верным. Поэтому касательная проходит через точку $(1; -4)$ с абсциссой, равной 1.

Ответ: 1.

8. Треугольник $AE E_1$ — прямоугольный, так как ребро EE_1 перпендикулярно плоскости основания призмы, прямым углом будет угол $AE E_1$. Тогда по теореме Пифагора $AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2$. Найдём AE из треугольника AFE по теореме косинусов. Каждый внутренний угол правильного шестиугольника равен 120° . Тогда $AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos 120^\circ = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$. Отсюда, $AE^2 = 4 + 4 + 4 = 12$, $AE_1^2 = 12 + 4 = 16$, $AE_1 = 4$ (см. рис. 221).

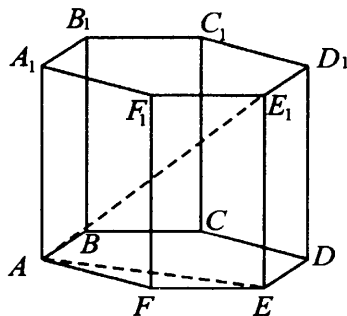


Рис. 221.

Ответ: 4.

$$9. -4 \cos 2\alpha = -4 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = -4 \cdot (2 \cdot (-0,6)^2 - 1) = -4 \cdot (-0,28) = 1,12.$$

Ответ: 1,12.

10. Решим неравенство $I \leq 0,4 \cdot I_{кз}$ при условии, что $r = 2$ Ом.

$\frac{\varepsilon}{R+r} \leq 0,4 \cdot \frac{\varepsilon}{r}; \frac{1}{R+2} \leq \frac{4}{10 \cdot 2}; \frac{1}{R+2} \leq \frac{1}{5}; R \geq 3$. Итак, наименьшее сопротивление цепи, при котором сила тока будет составлять не более 40% от силы тока короткого замыкания, равно 3 Ом.

Ответ: 3.

11. Пусть x деталей делает второй рабочий за один час. Тогда первый рабочий за один час делает $(x+2)$ деталей. Время, за которое первый рабочий выполнит заказ на изготовление 180 деталей, равно $\frac{180}{x+2}$ ч, второй рабочий — $\frac{180}{x}$ ч.

Составим и решим уравнение: $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+2} = 3$,

$$180(x+2-x) = 3x(x+2),$$

$120 = x^2 + 2x$, $x^2 + 2x - 120 = 0$, $x_1 = -12$, $x_2 = 10$. Отрицательное значение не удовлетворяет условию. Второй рабочий делает 10 деталей в час.

Ответ: 10.

12. Найдём производную исходной функции по формуле производной произведения

$y' = (51-x)'e^{x-50} + (51-x)(e^{x-50})' = -e^{x-50} + (51-x)e^{x-50} = (50-x)e^{x-50}$. Найдём нули производной: $y' = 0$; $(50-x)e^{x-50} = 0$; $x = 50$. Заметим, что при $x < 50$ выполняется неравенство $y' > 0$, при $x > 50$ выполняется неравенство $y' < 0$. Значит, функция $y = (51-x)e^{x-50}$ возрастает при $x < 50$ и убывает при $x > 50$ (см. рис. 222).

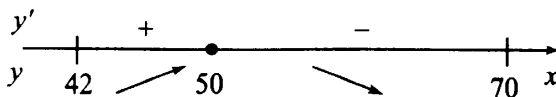


Рис. 222.

Значение $x = 50$ принадлежит отрезку $[42; 70]$, наибольшее значение на указанном отрезке достигается при $x = 50$ и равно $y(50) = (51 - 50)e^{50-50} = 1$.

Ответ: 1.

13. а) Найдём ОДЗ уравнения: $\cos 2x \neq 1, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \neq -1$.

Учитывая, что $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, получим уравнение $\frac{\sin x + 1}{2 \sin^2 x} - \frac{\sin x + 1}{1 - \sin x} = 0, (\sin x + 1)\left(\frac{1}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{1 - \sin x}\right) = 0$.

На ОДЗ уравнение примет вид $(\sin x + 1)(1 - \sin x - 2 \sin^2 x) = 0, (\sin x + 1)(2 \sin^2 x + \sin x - 1) = 0$.

Решим уравнение $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ как квадратное относительно $\sin x$.

$$\sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2}, \text{ тогда } (\sin x + 1)^2 \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$1. \sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \sin x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что корни уравнений $\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$ принадлежат ОДЗ, так как $\sin^2 x \neq 0$ и $1 - \sin x \neq 0$.

$$\text{б) Решим неравенства: 1) } -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$2) -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{\pi}{2}, 3) -\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2}, m, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi m \leq -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2} \leq \frac{1}{6} + 2m \leq -\frac{1}{2}, -\frac{5}{3} \leq 2m \leq -\frac{2}{3},$$

$$-\frac{5}{6} \leq m \leq -\frac{1}{3}. \text{ Нет целых чисел, принадлежащих промежутку } \left[-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}\right].$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2} \leq \frac{5}{6} + 2n \leq -\frac{1}{2}, -\frac{7}{3} \leq 2n \leq -\frac{4}{3},$$

$$-\frac{7}{6} \leq n \leq -\frac{2}{3}. \text{ Единственное целое число, принадлежащее этому проме-}$$

$$\text{жутку, } n = -1. \text{ Тогда } x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq -\frac{1}{2}, -1 \leq 2k \leq 0, \\ -\frac{1}{2} \leq k \leq 0. \text{ Этому неравенству удовлетворяет } k = 0, \text{ тогда } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi m; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, m, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$.

14.

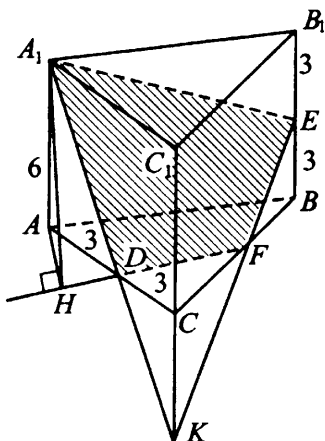


Рис. 223.

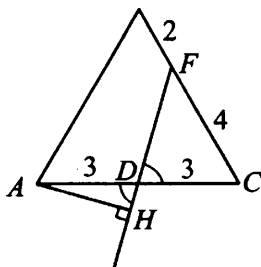


Рис. 224.

а) Пусть D и E — середины рёбер AC и BB_1 соответственно. В плоскости AA_1C_1 проведём прямую A_1D , которая пересекает прямую CC_1 в точке K (см. рис. 223), в плоскости BB_1C_1 — прямую KE , которая пересекает ребро BC в точке F . Соединяя точки A_1 и E , лежащие в плоскости AA_1B_1 , а также D и F , лежащие в плоскости ABC , получим сечение A_1EFD .

$\triangle AA_1D = \triangle CDK$ по катету $AD = DC$ и острому углу.
 $\angle ADA_1 = \angle CDK$ — как вертикальные, откуда следует, что
 $AA_1 = CK = 6$. $\triangle CKF$ и $\triangle BFE$ подобны по двум углам
 $\angle FBE = \angle KCF = 90^\circ$, $\angle BFE = \angle CFK$ — как вертикальные.

$\frac{CK}{BE} = \frac{6}{3} = 2$, то есть коэффициент подобия равен 2, откуда следует, что
 $CF : FB = 2 : 1$.

б) Проведём $AH \perp DF$. Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен углу AHA_1 . Действительно, отрезок $AH \perp DF$

(DF — линия пересечения этих плоскостей) и является проекцией отрезка A_1H на плоскость основания, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах, $A_1H \perp DF$. $\angle AHA_1 = \arctg \frac{AA_1}{AH}$. $AA_1 = 6$.

Найдём AH . $\angle ADH = \angle FDC$ (как вертикальные) (см. рис. 224).

По теореме косинусов в $\triangle DFC$:

$$DF^2 = FC^2 + DC^2 - 2FC \cdot DC \cdot \cos 60^\circ, DF^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$

$$FC^2 = DF^2 + DC^2 - 2DF \cdot DC \cdot \cos \angle FDC,$$

$$4^2 = 13 + 9 - 2\sqrt{13} \cdot 3 \cdot \cos \angle FDC, \cos \angle FDC = \frac{6}{2\sqrt{13} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

По следствию из основного тригонометрического тождества

$$\sin \angle FDC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}. \text{ Из } \triangle ADH \text{ найдём } AH:$$

$$AH = AD \cdot \sin \angle ADH, (\angle FDC = \angle ADH). AH = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

$$\angle AHA_1 = \arctg \frac{AA_1}{AH} = \arctg \frac{6 \cdot \sqrt{13}}{6\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arctg \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

$$15. \text{ ОДЗ уравнения } \begin{cases} x-1 > 0, \\ 9(x-1) \neq 1, \end{cases} \text{ то есть } x > 1, x \neq \frac{10}{9}.$$

Используя формулу $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, получаем

$$\log_{9(x-1)} 3 = \frac{1}{\log_3(x-1) + 2}.$$

Неравенство примет вид $\log_3(x-1) \leq 4 - \frac{9}{\log_3(x-1) + 2}$. Пусть

$$\log_3(x-1) = t, \text{ тогда } t - 4 + \frac{9}{t+2} \leq 0, \frac{(t-1)^2}{t+2} \leq 0, t = 1 \text{ или } t < -2.$$

$\log_3(x-1) = 1$, откуда $x-1 = 3$, $x = 4$ или $\log_3(x-1) < -2$, откуда $x-1 < \frac{1}{9}$, $x < \frac{10}{9}$. Учитывая ОДЗ, получим $1 < x < \frac{10}{9}$, $x = 4$.

$$\text{Ответ: } \left(1; \frac{10}{9}\right), 4.$$

16. а) Используя условие задачи, выполним рисунок (см. рис. 225). Проведём радиус AF в точку касания. $AF \perp CF$. $\triangle AFM \sim \triangle MCD$ по двум углам ($\angle AFM = \angle CDM = 90^\circ$, $\angle AMF = \angle CMD$ как вертикальные). $AF : CD = 12 : 24 = 1 : 2$, откуда следует, что $AM : MC = 1 : 2$, то есть $MC = 2AM$.

б) Пусть $AM = x$, тогда $CM = 2x$, $MD = 23 - x$. Для прямоугольного треугольника CDM справедлива теорема Пифагора: $CM^2 = CD^2 + MD^2$, т.е. $4x^2 = 24^2 + (23 - x)^2$, $3x^2 + 46x - 1105 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $x = 13$. Итак, $AM = 13$.

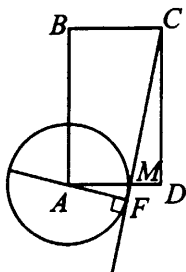


Рис. 225.

Ответ: 13.

17. Пусть x — доля мощностей мясокомбината, занятых под производство котлет из свиного фарша, а y — доля мощностей, занятых под производство котлет из говяжьего фарша. Тогда $x + y = 1$, при этом котлет из свиного фарша производится $36x$ центнеров, а котлет из говяжьего фарша — $30y$ центнеров. Кроме того, из условия ассортиментности следует,

что $36x \geq 12$, $30y \geq 12$, откуда $x \geq \frac{1}{3}$, $y \geq \frac{2}{5}$. Тогда $\begin{cases} y = 1 - x, \\ x \geq \frac{1}{3}, y \geq \frac{2}{5} \end{cases}$ или

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Т.к. каждый центнер котлет из свиного фарша даёт прибыль 7000 руб. (22 000 – 15 000), а центнер котлет из говяжьего фарша — 10 000 руб. (28 000 – 18 000), то общая прибыль от произведённой за месяц продукции равна $7000 \cdot 36x + 10\,000 \cdot 30y = 6000(42x + 50y)$.

По условию задачи нужно найти максимально возможную прибыль, которую может получить мясокомбинат от производства котлет за 1 мес.

Значит, необходимо найти наибольшее значение выражения $6000(42x + 50y)$ при условии

$$\begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$6000(42x + 50y) = 6000(42x + 50(1 - x)) = 6000(50 - 8x).$$

Пусть $g(x) = 6000(50 - 8x)$. Очевидно, $g(x)$ — убывающая функция, которая принимает наибольшее значение в левом конце промежутка $[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}]$:

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 6000\left(50 - 8 \cdot \frac{1}{3}\right) = 6000 \cdot \frac{142}{3} = 284\,000. \text{ Поэтому максимально}$$

возможная прибыль за месяц равна 284 000 рублей.

Ответ: 284 000 рублей.

18. Уравнение $x^3 + 3x^2 - x \log_3(a+1) + 5 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 2]$, если графики функций $y = x^3 + 3x^2$ и $y = x \log_3(a+1) - 5$ имеют единственную точку пересечения на отрезке $[0; 2]$.

Построим графики этих функций.

1) $y = x^3 + 3x^2$.

Найдём стационарные точки: $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$. $y' = 0$ при $x = 0$, $x = -2$ (см. рис. 226).

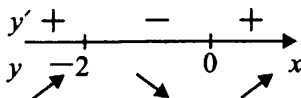


Рис. 226.

$y(-2) = -8 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$, $y(0) = 0$. Отсюда получаем график $y = x^3 + 3x^2$ (см. рис. 227).

2) $y = x \log_3(a+1) - 5$. Графиком функции является прямая, угловой коэффициент которой $k = \log_3(a+1)$. Прямая $y = kx - 5$ проходит через точку $(0; -5)$.

Найдём точку x_0 , в которой прямая $y = kx - 5$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2$.

Уравнение касательной $y = (x_0^3 + 3x_0^2) + (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0)$ проходит через точку $(0; -5)$, следовательно, $-5 = (x_0^3 + 3x_0^2) - x_0(3x_0^2 + 6x_0)$, $2x_0^3 + 3x_0^2 - 5 = 0$. $x_0 = 1$ — точка касания.
 $2x_0^3 + 3x_0^2 - 5 = (x_0 - 1)(2x_0^2 + 5x_0 + 5)$.

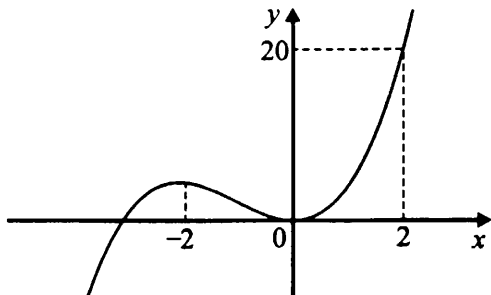


Рис. 227.

Других точек касания нет, так как уравнение $2x_0^2 + 5x_0 + 5 = 0$ корней не имеет.

Если $x = 1$, то $y = 4$, тогда $4 = k - 5$, откуда $k = 9$.

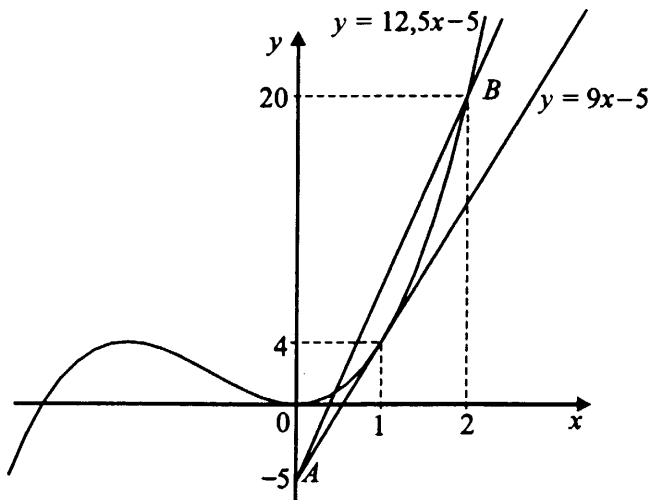


Рис. 228.

Найдём значение k , при котором прямая $y = kx - 5$ проходит через точку $(2; 20)$. $20 = 2k - 5$, $k = 12,5$, $y = 12,5x - 5$.

Для $k = 9$ и $k > 12,5$ графики функций $y = x^3 + 3x^2$ и $y = kx - 5$ имеют на отрезке $[0; 2]$ единственную общую точку (см. рис. 228). Найдём значения a .

$$\log_3(a+1) = 9, a+1 = 3^9, a = 3^9 - 1.$$

$$\log_3(a+1) > 12,5, a+1 > 3^{\frac{25}{2}}, a > 3^{12,5} - 1.$$

Итак, если $a = 3^9 - 1$ или $a > 3^{12,5} - 1$, то уравнение $x^3 + 3x^2 - x \log_3(a + 1) + 5 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: $a = 3^9 - 1$, $a > 3^{12,5} - 1$.

19. а) Да. Приведём пример: 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72.

б) Предположим, что такая прогрессия существует. Очевидно, она возрастающая. Обозначим a_l — наименьший, кратный 24, член прогрессии. Тогда $a_l, a_{l+i}, \dots, a_{l+8i}$ — 9 первых членов прогрессии, кратных 24, причём $l + 8i \leq 30$, откуда $i \leq 3$, так как $l \geq 1$, а $l + 9i > 30$, тогда $30 - 9i < l \leq 30 - 8i$.

Если $i = 3$, $3 < l \leq 6$;

Если $i = 2$, $12 < l \leq 14$;

Если $i = 1$, $21 < l \leq 22$.

В каждом из этих случаев получаем противоречие с предположением, что a_l — наименьший, кратный 24, член прогрессии (достаточно рассмотреть хотя бы a_{l-i}).

Итак, предположение неверно, значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 24.

в) Среди любых 24 подряд идущих членов ровно один делится на 24. Пусть $3n = 24s + r$, где $s, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $0 \leq r \leq 23$ (r — остаток от деления n на 24). Тогда среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{3n} на 24 делятся s или $(s + 1)$ чисел. Среди чисел $a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{6n}$ на 24 тоже делятся не менее s чисел. Если $n \geq 24$, то среди чисел $a_{6n+1}, a_{6n+2}, \dots, a_{7n}$ хотя бы одно делится на 24. Тогда среди чисел a_{3n+1}, \dots, a_{7n} на 24 делятся хотя бы $(s + 1)$, значит, не меньше, чем среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{3n} .

Далее, среди чисел a_1, \dots, a_{3n} на 24 делится чисел не более, чем частное $\frac{3n}{24} = \frac{n}{8}$, округлённое с избытком, и среди чисел a_{3n+1}, \dots, a_{7n} не ме-

нее, чем частное $\frac{4n}{24} = \frac{n}{6}$, округлённое с недостатком. Если $18 \leq n < 24$,

то $\frac{n}{6} \geq 3$, и частное, округлённое с недостатком, равно 3. При этом

$\frac{n}{8} < \frac{24}{8} = 3$, и частное $\frac{n}{8}$, округлённое с избытком, равно 3. Значит, среди членов a_1, \dots, a_{3n} чисел, делящихся на 24, не может быть строго больше, чем среди чисел a_{3n+1}, \dots, a_{7n} при $n \geq 18$.

Таким образом, $n \leq 17$. Приведём пример подходящей последовательности для $n = 17$. Пусть $a_1 = 22$. Тогда среди чисел a_1, \dots, a_{51} на 24 делятся a_3, a_{27} и a_{51} , а среди чисел a_{52}, \dots, a_{119} — числа a_{75} и a_{99} .

Ответ: а) да; б) нет; в) 17.

Решение варианта 37

1. Для приготовления теста из 3 кг муки потребуется $3 \cdot 13 = 39$ г сухих дрожжей, поэтому нужно купить $39 : 10 = 3,9$ пакетиков сухих дрожжей, значит, 4 пакетика.

Ответ: 4.

2. За первую минуту реакции масса оставшегося реагента уменьшилась с 20 до 8 г, значит, в реакцию вступило 12 г.

Ответ: 12.

3. M — середина стороны AB , следовательно, CM — медиана, $CM = 4$ (см. рис. 229).

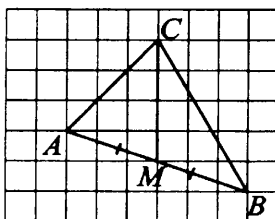


Рис. 229.

Ответ: 4.

4. Относительная частота события «планшет в течение года поступит в гарантийный ремонт» равна $\frac{72}{800} = 0,09$. От вероятности она отличается на $0,09 - 0,075 = 0,015$.

Ответ: 0,015.

5. Найдём ОДЗ: $10x - 8 > 0$.

$$5^{\log_{25}(10x-8)} = 5^{\log_5 8}, \log_{25}(10x-8) = \log_5 8, \log_{5^2}(10x-8) = \log_5 8,$$

$$\frac{1}{2} \log_5(10x-8) = \log_5 8, \log_5(10x-8) = 2 \log_5 8, \log_5(10x-8) = \log_5 8^2,$$

$10x - 8 = 64$, значит, условие $10x - 8 > 0$ выполняется. $10x = 72$, $x = 7,2$.

Ответ: 7,2.

6. Угол B четырёхугольника $ABCD$ опирается на дугу AC , которая равна сумме дуг AD и DC . Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. $\angle B = (\sphericalangle AD + \sphericalangle DC) : 2 = (51^\circ + 150^\circ) : 2 = 100,5^\circ$.

Ответ: 100,5.

7. Заштрихованная фигура является криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = -4$ и $x = -1$. По формуле Ньютона-Лейбница её площадь S равна разности

$F(-1) - F(-4)$, где $F(x)$ — указанная в условии первообразная функции $f(x)$.

Поэтому $S = F(-1) - F(-4) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 13(-1) - 5 - ((-4)^3 + 6(-4)^2 + 13(-4) - 5) = -13 - (-25) = 12$.

Ответ: 12.

8. Обозначим вершину конуса через A , а центр основания через O . Проведём через AO плоскость. В этой плоскости будет находиться диаметр сферы CB (см. рис. 230), AB — образующая конуса. Тогда треугольник AOB — прямоугольный с прямым углом AOB . При этом $AO = OB = R$, где R — радиус сферы. По теореме Пифагора $(AO)^2 + (OB)^2 = (AB)^2$, $R^2 + R^2 = (5\sqrt{2})^2$, $2R^2 = 25 \cdot 2$, $R^2 = 25$, $R = 5$.

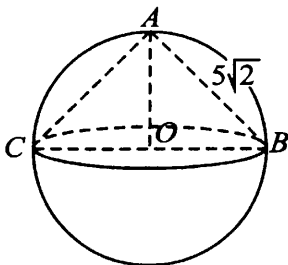


Рис. 230.

Ответ: 5

$$\begin{aligned} 9. & (1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15) = (1 - \log_3(3 \cdot 5))(1 - \log_5(3 \cdot 5)) = \\ & = (1 - (\log_3 3 + \log_3 5))(1 - (\log_5 3 + \log_5 5)) = \\ & = (1 - (1 + \log_3 5))(1 - (\log_5 3 + 1)) = \\ & = -\log_3 5 \cdot (-\log_5 3) = \log_3 5 \cdot \frac{1}{\log_3 5} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

10. Подставим данные задачи в формулу $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$, $16 = 12t - \frac{4t^2}{2}$, $t^2 - 6t + 8 = 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = 2$. С помощью формулы скорости при равнозамедленном движении $v = v_0 - at$ найдём время движения автомобиля до остановки: $v = 0$, $v_0 = 12$ м/с, $a = 4$ м/с²; $0 = 12 - 4t$, откуда $t = 3$. Итак, автомобиль остановится через 3 секунды после начала торможения.

Учитывая, что $t \leq 3$, получим, что от момента начала торможения прошло 2 секунды.

Ответ: 2.

Замечание.

Формулу $v = v_0 - at$ можно найти дифференцированием равенства $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

11. Весь заказ примем за 1, тогда $\frac{1}{9}$ — часть работы, выполненная первым рабочим за 1 час, $\frac{1}{6}$ — часть работы, выполненная вторым рабочим за 1 час. Тогда часть работы, выполненная двумя рабочими за 1 час, равна $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$. Всю работу оба рабочих выполняют за $1 : \frac{5}{18} = \frac{18}{5} = 3,6$ часа.

Ответ: 3,6.

12. Найдём производную исходной функции: $y' = (4x - 5)' \cos x + (4x - 5)(\cos x)' - 4(\sin x)' + (12)' = 4 \cos x + (4x - 5) \cdot (-\sin x) - 4 \cos x = -(4x - 5) \sin x$. Найдём нули производной на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, учитывая, что на этом множестве $\sin x > 0$. Имеем $-(4x - 5) \sin x = 0$; $4x - 5 = 0$; $x = \frac{5}{4}$. Значение $x = \frac{5}{4}$ принадлежит интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$. При $x \in (0; \frac{5}{4})$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. При $x \in (\frac{5}{4}; \frac{\pi}{2})$ выполняется неравенство $y'(x) < 0$. Отсюда $x = \frac{5}{4} = 1,25$ является единственной точкой максимума на рассматриваемом интервале (см. рис. 231).

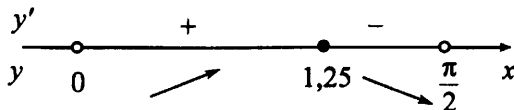


Рис. 231.

Ответ: 1,25.

13. а) Преобразуем уравнение, согласно формуле приведения

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x:$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0.$$

Обозначим $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$, получим $2t^2 + 5t + 2 = 0$.

$$t_1 = \frac{-5-3}{2 \cdot 2} = -2 \text{ — не удовлетворяет условию } -1 \leq t \leq 1.$$

$$t_2 = \frac{-5+3}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, найдём с помощью единичной окружности (см. рис. 232). Получаем числа $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

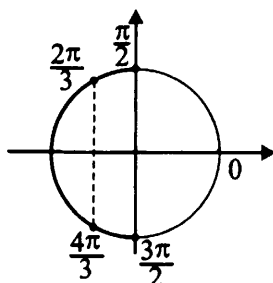


Рис. 232.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

14. а) Ясно, что $CC_1 \perp A_1B_1C_1$, так как $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — прямая призма (см. рис. 233). Тогда A_1C_1 — проекция AC_1 на плоскость $A_1B_1C_1$. При этом $B_1D_1 \perp A_1C_1$ по свойству диагоналей ромба. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B_1D_1 \perp AC_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба A_1C_1 и B_1D_1 (см. рис. 233). В плоскости AA_1C_1 проведём $OK \perp AC_1$, где точка K принадлежит AC_1 . Но $A_1C_1 \perp B_1D_1$, $B_1D_1 \perp AC_1$, следовательно, $B_1D_1 \perp AA_1C_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда B_1D_1 перпендикулярна любой прямой в плоскости (AA_1C_1) .

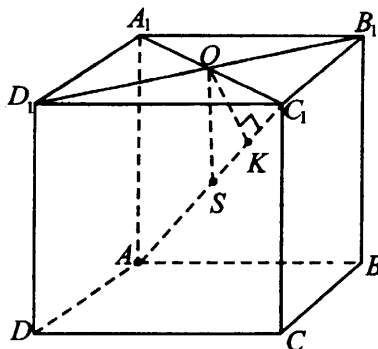


Рис. 233.

В частности, $B_1D_1 \perp OK$. Значит, длина отрезка OK равно расстоянию между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1D_1 .

В треугольнике AA_1C_1 проведём среднюю линию OS . Тогда $OS = \frac{1}{2}AA_1 = 10$ и $OS \parallel AA_1$, значит, $OS \perp A_1C_1$ и $\triangle OSC_1$ —

прямоугольный. $C_1O = \frac{1}{2}A_1C_1 = 5$, $S_{SOC_1} = \frac{1}{2}SO \cdot OC_1 = \frac{1}{2}C_1S \cdot OK$.

$$\text{Отсюда } OK = \frac{C_1O \cdot OS}{C_1S} = \frac{5 \cdot 10}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

15. Найдём ОДЗ неравенства.

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x > 0, \\ \log_{35} x^3 - 3 \log_{49} x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0, \\ \frac{3 \ln x}{\ln 35} - \frac{3 \ln x}{\ln 49} \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > 0, \\ \ln x \left(\frac{1}{\ln 35} - \frac{1}{\ln 49} \right) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0, \\ \ln x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad (0; 1) \cup (1; 2).$$

Исследуем знак левой части неравенства.

При $0 < x < 1$:

$$\log_{35} x^3 - 3 \log_{49} x = 3 \log_{35} x - 3 \log_{49} x = \frac{3}{\log_x 35} - \frac{3}{\log_x 49} < 0$$

(так как $\log_x 49 < \log_x 35 < 0$).

$$\begin{aligned} \log_{25}(2-x) + \log_{35}\left(\frac{1}{2-x}\right) &= \log_{25}(2-x) - \log_{35}(2-x) = \\ &= \frac{1}{\log_{2-x} 25} - \frac{1}{\log_{2-x} 35} > 0 \quad (\text{так как } 2-x > 1, \text{ и значит,} \\ &0 < \log_{2-x} 25 < \log_{2-x} 35). \end{aligned}$$

При $1 < x < 2$:

$$\log_{35} x^3 - 3 \log_{49} x = 3 \log_{35} x - 3 \log_{49} x = \frac{3}{\log_x 35} - \frac{3}{\log_x 49} > 0$$

(так как $0 < \log_x 35 < \log_x 49$);

$$\begin{aligned} \log_{25}(2-x) + \log_{35}\left(\frac{1}{2-x}\right) &= \log_{25}(2-x) - \log_{35}(2-x) = \\ &= \frac{1}{\log_{2-x} 25} - \frac{1}{\log_{2-x} 35} < 0 \quad (\text{так как } 2-x < 1, \text{ и значит,} \\ &\log_{2-x} 35 < \log_{2-x} 25 < 0). \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть исходного неравенства отрицательна при всех значениях x из ОДЗ. С другой стороны, $\log_{49} 25 > 0$. Значит, левая часть исходного неравенств не превосходит $\log_{49} 25$ при любом значении x из ОДЗ.

Следовательно, решение исходного неравенства: $(0; 1) \cup (1; 2)$.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2)$.

16. а) По свойству касательной к окружности $O_1L \perp O_2L$ и $O_1K \perp O_2K$. Прямоугольный $\triangle O_1O_2K$ вписан в некоторую окружность с диаметром O_1O_2 (см. рис. 234).

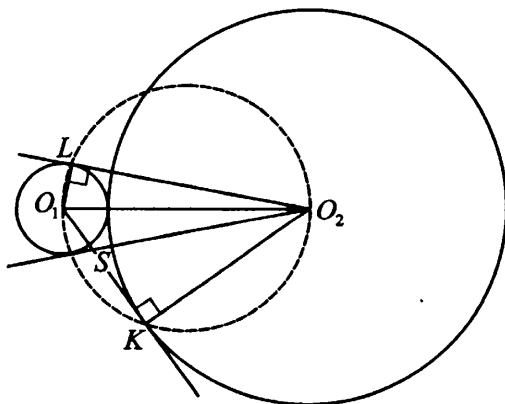


Рис. 234.

Аналогично прямоугольный $\triangle O_1 O_2 L$ вписан в некоторую окружность с тем же диаметром. Следовательно, $\triangle O_1 O_2 K$ и $\triangle O_1 O_2 L$ вписаны в одну и ту же окружность, то есть точки O_1, O_2, K, L лежат на окружности с диаметром $O_1 O_2$. Значит, $\angle O_1 O_2 L$ и $\angle O_1 K L$ — вписанные и опираются на одну и ту же дугу $O_1 L$. Отсюда $\angle O_1 K L = \angle O_1 O_2 L$.

6) Пусть $O_1 L$ — радиус меньшей окружности. Обозначим его через r . Следовательно, $O_2 K = 4r$. Тогда $O_1 O_2 = r + 4r = 5r$. Отсюда из $\triangle O_1 L O_2$ по теореме Пифагора $O_2 L = \sqrt{(5r)^2 - r^2} = 2\sqrt{6}r$. Из $\triangle O_1 K O_2$ по теореме Пифагора $O_1 K = \sqrt{(5r)^2 - (4r)^2} = 3r$.

$$S_{O_1 L O_2} = \frac{1}{2} O_1 L \cdot L O_2 = \sqrt{6} r^2.$$

$$S_{O_1 K O_2} = \frac{1}{2} O_2 K \cdot O_1 K = 6r^2.$$

$$S_{O_1 K O_2 L} = S_{O_1 L O_2} + S_{O_1 K O_2} = (6 + \sqrt{6})r^2.$$

Из условия следует, что $S_{O_1 K O_2 L} = 54 + 9\sqrt{6}$. Тогда $(6 + \sqrt{6})r^2 = 54 + 9\sqrt{6}$, $(6 + \sqrt{6})r^2 = 9(6 + \sqrt{6})$, $r = 3$.

Ответ: 3.

17. Если Тимур продаст бумагу по истечении i -го года, то через 15 лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(3i + 7) \cdot (1,1)^{15-i}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_i = (3i + 7) \cdot (1,1)^{15-i}$, где i пробегает целые значения от 1 до 15.

Попробуем выяснить, при каких i последовательность a_i возрастает, а при каких — убывает. Для этого рассмотрим приращение $b_i = a_i - a_{i-1}$. Найдём a_{i-1} .

$$a_{i-1} = (3(i-1) + 7) \cdot 1,1^{15-(i-1)} = (3i + 4) \cdot 1,1^{15-i} \cdot 1,1 \quad (i \geq 1).$$

$$b_i = a_i - a_{i-1} = (1,1)^{15-i}(3i + 7 - 3,3i - 4,4) = (1,1)^{15-i}(2,6 - 0,3i).$$

Отсюда $b_i > 0$ при $1 \leq i \leq 8$ и $b_i < 0$ при $i > 8$. Следовательно, $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8 > a_9 > \dots > a_{15}$. Отсюда наибольшее значение последовательность a_i принимает при $i = 8$.

Ответ: 8 лет.

18. Преобразуем второе уравнение системы, выделив полный квадрат $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$.

$$\begin{cases} 5|x| + 12|y - 2| = 60, \\ y^2 - a^2 = 4(y - 1) - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x| + 12|y - 2| = 60, \\ x^2 + (y - 2)^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменных $t = y - 2$, получим систему

$$\begin{cases} 5|x| + 12|t| = 60, & (1) \\ x^2 + t^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

При такой замене число решений новой и старой системы одинаково. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt (см. рис. 235).

График уравнения (1) — ромб, диагонали которого, равные 24 и 10, лежат соответственно на осях Ox и Ot , а графиком уравнения (2) является семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$.

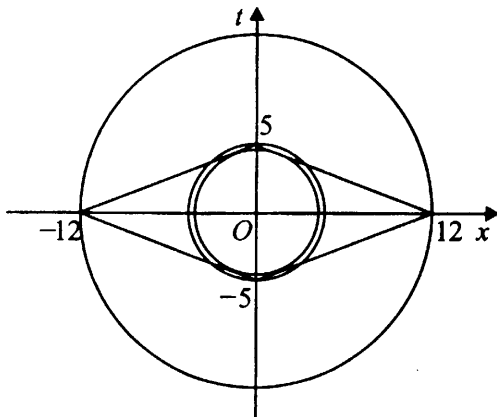


Рис. 235.

Графики уравнений системы имеют ровно 4 общие точки, и следовательно, система имеет ровно 4 решения тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо её радиус удовлетворяет условию $5 < r < 12$.

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12, откуда

$$r = |a| = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}, a = \pm 4\frac{8}{13}.$$

Во втором случае получаем $5 < |a| < 12$, откуда $-12 < a < -5$ или $5 < a < 12$.

Ответ: $a \in (-12; -5) \cup \left\{ \pm 4\frac{8}{13} \right\} \cup (5; 12)$.

19. а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрица-

тельное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть -5 . Наибольшее число в наборе является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 3 и 9 дают в сумме 12. Значит, были задуманы числа -5 , 3 и 9.

б) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -5 , 2, 3 и -3 , -2 , 5 на доске будет выписан один и тот же набор -5 , -3 , -2 , 0, 2, 3, 5.

в) Если учитель задумал 4 числа (a, b, c, d) , то на доске выписано 15 чисел: сами задуманные числа (4 штуки), суммы по 2 слагаемых — 6 штук, суммы по 3 слагаемых — 4 штуки, а также сумма всех чисел. Разобьём выписанные числа на 3 группы.

Группа A — это сами задуманные числа, группа B — это суммы по 2 слагаемых, C — суммы по 3 и 4 слагаемых.

В группе A нулей нет по условию.

Рассмотрим группу B . Пусть сумма каких-то двух чисел равна 0, то есть $a + b = 0$. Если предположить, что $a + c = 0$, то $a + b = a + c$, $b = c$, а это противоречит тому, что все задуманные числа различны. Значит, $a + c \neq 0$. Аналогично $a + d \neq 0$, $b + c \neq 0$, $b + d \neq 0$. Возможно, что $c + d = 0$. Других сумм по 2 слагаемых нет. Значит, в группе B не более двух нулей. Рассмотрим группу C . Покажем, что в ней не более одного нуля. Предположим противное. Тогда найдётся хотя бы два нуля. В этом случае хотя бы один нуль является суммой некоторых трёх задуманных чисел, то есть можно считать, что $a + b + c = 0$. Если $a + b + c + d = 0$, то $d = 0$, что противоречит условию. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств: $a + b + d = 0$, $a + c + d = 0$, $b + c + d = 0$. В первом случае $a + b + c = a + b + d = 0$, тогда $c = d$. Во втором случае $b = d$, в третьем $a = d$. Значит, все три случая противоречат условию, и наше предположение неверно. Следовательно, в группе C не более одного нуля.

Таким образом, общее число нулей не превышает $0 + 2 + 1 = 3$. Приведём пример задуманных чисел, для которых на доске будет выписано ровно 3 нуля. Пусть учитель задумал числа 2, -2 , 3, -3 . Тогда $2 + (-2) = 0$; $3 + (-3) = 0$; $2 + (-2) + 3 + (-3) = 0$. На доске выписано ровно 3 нуля.

Ответ: а) -5 , 3 и 9; б) нет; в) 3.

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные действующей программой для общеобразовательных учреждений.

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться общепринятыми математическими обозначениями. Перечислим их.

N — множество всех натуральных чисел.

N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.

Z — множество всех целых чисел.

Q — множество всех рациональных чисел.

R — множество всех действительных (вещественных) чисел.

R^+ — множество всех положительных действительных чисел.

\Rightarrow — следует.

\Leftrightarrow — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.

$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.

const — постоянная величина.

\in — принадлежит, содержится; например:

$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.

$n : m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m .

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R$, $n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}};$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$0^0 \text{ не определено;}$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geq 0 \text{ при } n \text{ чётном;}$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном.}$$

2. Пусть $a \in R^+$; $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N$, $m, n > 1$; $a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q$, $a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q}; \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad (ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для $p, q \in R$.

Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$$11^2 = 121$$

$$16^2 = 256$$

$$21^2 = 441$$

$$26^2 = 676$$

$$12^2 = 144$$

$$17^2 = 289$$

$$22^2 = 484$$

$$27^2 = 729$$

$$13^2 = 169$$

$$18^2 = 324$$

$$23^2 = 529$$

$$28^2 = 784$$

$$14^2 = 196$$

$$19^2 = 361$$

$$24^2 = 576$$

$$29^2 = 841$$

$$15^2 = 225$$

$$20^2 = 400$$

$$25^2 = 625$$

$$30^2 = 900$$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O .

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0; \quad *|x^n| = |x|^n, \quad n \in Z, \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|.$

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n -й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n -й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_1 \neq 0, q \neq 0; \quad b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени y , в которую нужно возвести a , чтобы получить число x : $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0;$$

$$\log_a x^k = k \log_a |x|, k — \text{чётное целое}.$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, p \neq 0;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b, k \neq 0, k — \text{чётное целое}.$$

$$5^*. a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей**Классическое определение вероятности**

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A .

Противоположные события

Событие, противоположное событию A , обозначают \bar{A} . При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B .

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B .

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B .

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия

Радианное измерение углов

Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Основные тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1; & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \end{aligned}$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$* \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

$$* \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$* \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} * \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; & * \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{y - x}{2};$$

$$* \sin x + \cos y = 2 \sin \left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$* \sin x - \cos y = 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$* \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(x - \alpha)$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y));$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ и } 0 \leq y \leq \pi;$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \text{ и } 0 < y < \pi.$$

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$$D(\arcsin x) = [-1; 1]; E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$D(\arccos x) = [-1; 1]; E(\arccos x) = [0; \pi];$$

$$D(\arctg x) = R; E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$D(\operatorname{arcctg} x) = R; E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi);$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\arctg(-x) = -\arctg x; \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arcsin(\sin x) = x_0, \text{ где } x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin x_0 = \sin x;$$

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arccos(\cos x) = x_0, \text{ где } x_0 \in [0; \pi] \text{ и } \cos x_0 = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(\arctg x) = x, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\arctg(\operatorname{tg} x) = x_0, \text{ где } x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0, \text{ где } x_0 \in (0; \pi) \text{ и } \operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x.$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}; \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a; \quad |a| \leq 1; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a; \quad |a| \leq 1; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in N_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{Теорема Виета}).$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$$f(x) = ax^2 + 2kx + c, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

$$\text{то } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать

большой буквой D . Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

*Теорема Безу и схема Горнера

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0) q(x) + f(x_0) \quad (\text{Теорема Безу}),$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} &= x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \dots, \quad b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \dots \\ \dots, \quad b_1 &= x_0 b_2 + a_2, \quad b_0 = x_0 b_1 + a_1, \quad f(x_0) = x_0 b_0 + a_0. \end{aligned}$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу (**схему Горнера**).

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\cdots	a_{i+1}	a_i	\cdots	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\cdots	b_i	b_{i-1}	\cdots	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно, $f(x) = (x - x_0)q(x)$ (**следствие из теоремы Безу**).

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём ещё одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

$$1) a_n \div q;$$

$$2) a_0 \div p.$$

Следствие. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0 .

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий, их использование существенно сэкономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1 ; ± 2 . Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	-3	-2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
-1	1	3	2	0		корень
-1	1	2	0			корень (кратности 2)

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2).$$

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; -1; -2, причём -1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 \vdots q$, $3 \vdots p$.

Делители 3: ± 1 ; ± 3 .

Делители 6: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6 .

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1 ; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{1}{6}$; ± 3 ; $\pm \frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3 ; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $(x + \frac{1}{3})(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$$x_1 = -\frac{1}{3}; 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Делители 3: ± 1 ; ± 3 .

Делители 2: ± 1 ; ± 2 .

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1 ; $\pm \frac{1}{2}$; ± 3 ; $\pm \frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3 ; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$,
 $x^2 + x + 1 = 0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x , соединённых знаком равенства:

$$f(x) = g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f) \cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a) = g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B , если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным*, если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Всё сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geq 0, b \geq 0$:

$$a \leq \frac{a^2 + 1}{2}; \quad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ при } a > 0; \quad a + \frac{1}{a} \leq -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0) , подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0) , являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, \geq , $<$, \leq , \neq .

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) — значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равно-

сильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.

2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись

$$\text{вида } \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ h(x) < u(x). \end{cases}$$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

$$\text{Поскольку } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \frac{6x - 9}{x + 1} \leq 1$.

$$\text{Решение. } \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \frac{6x - 9}{x + 1} - 1 \leq 0,$$

$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x + 1) + (6x - 9)(x - 3) - (x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \leq 0,$$

$\frac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \leq 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 22x + 40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x - 2$, получаем $x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x - 2) \cdot (x^2 + x - 20) = (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 1) \leq 0, \\ (x - 3) \cdot (x + 1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 236) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ

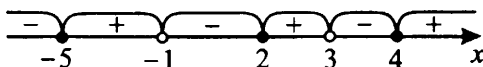


Рис. 236.

$$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4].$$

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x , для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. В данном случае $D(y) = [0; \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0; \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается

функция $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок от-

носительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y) = [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R .

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \quad D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R. \quad D(\log_a x) = (0; +\infty).$$

$$D(\sin x) = D(\cos x) = R. \quad D(a^x) = R.$$

$$*D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1].$$

$$*D(\arctg x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R.$$

$$D(\operatorname{tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right), k \in Z.$$

$$\text{Или } D(\operatorname{tg} x) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$D(\operatorname{ctg} x) = (2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), \quad k \in Z.$$

$$\text{Или } D(\operatorname{ctg} x) : x \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0 , для каждого из которых найдётся такое число x_0 , что $f(x_0) = y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R .

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \quad E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$

$$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R. \quad E(a^x) = (0; +\infty).$$

$$E(\log_a x) = R. \quad E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1].$$

$$*E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad *E(\arccos x) = [0; \pi].$$

$$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R. \quad *E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$*E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$$

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведём одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$.

Тогда $y = f(t) = f(t(x))$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f(t(x))$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2 \cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1; 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1; 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1; 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1; 2 \cdot 1 + 1] = [-1; 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число, или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x , достаточно близких к a , величина $\frac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\frac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x , стремящемся к a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\frac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\frac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, причём при всех x , достаточно близких к a , функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\frac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\frac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ +0 & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ -\infty & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy .

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 237–242 изображены графики основных элементарных функций.

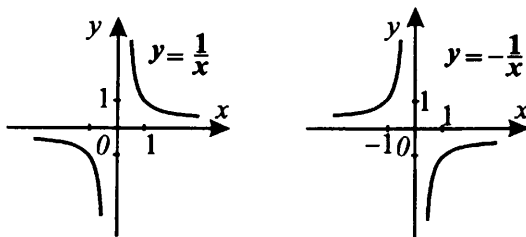


Рис. 237.

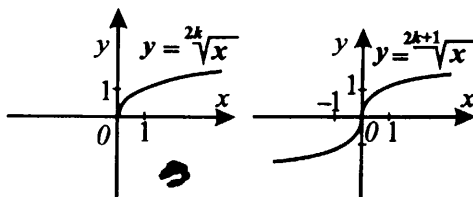


Рис. 238.

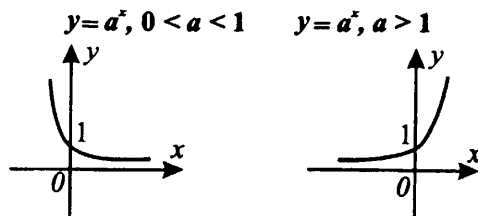


Рис. 239.

$y = \log_a x, 0 < a < 1$ $y = \log_a x, a > 1$

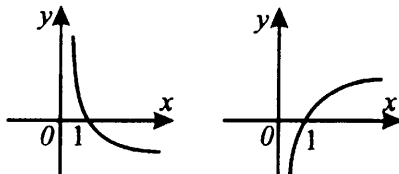


Рис. 240.

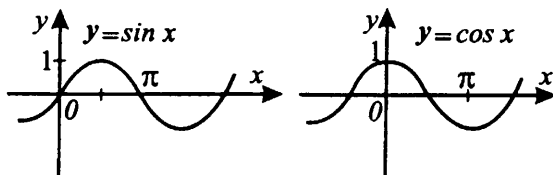


Рис. 241.

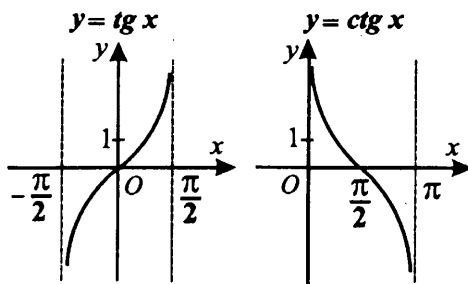


Рис. 242.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 243).

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 244).

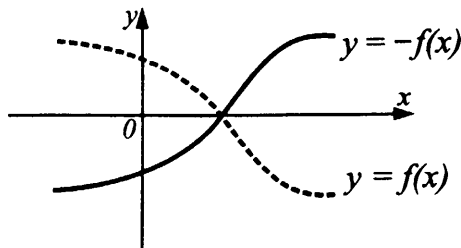


Рис. 243.

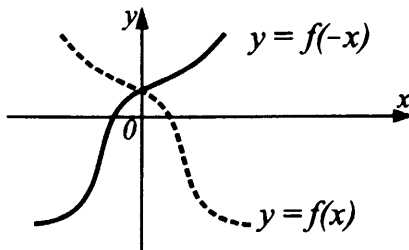


Рис. 244.

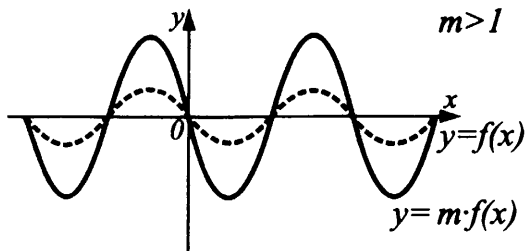


Рис. 245.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 245).

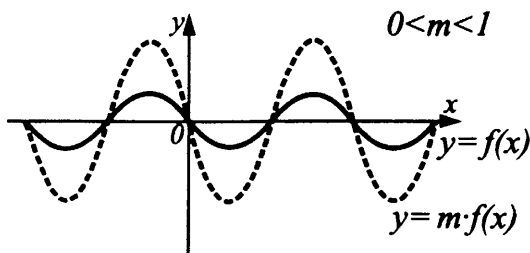


Рис. 246.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 246).

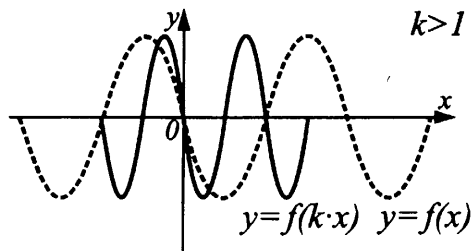


Рис. 247.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 247).

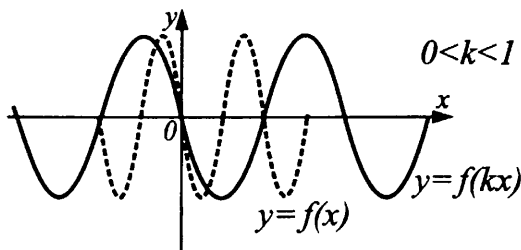


Рис. 248.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 248).

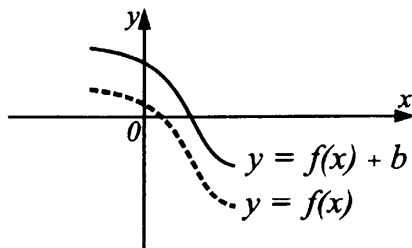


Рис. 249.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 249).

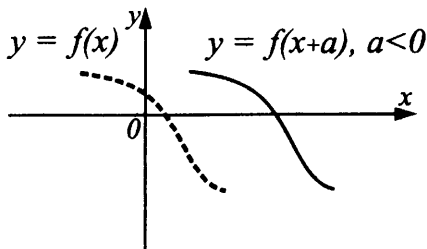


Рис. 250.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 250).

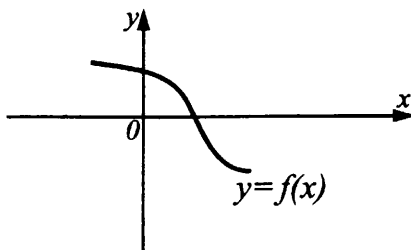


Рис. 251.

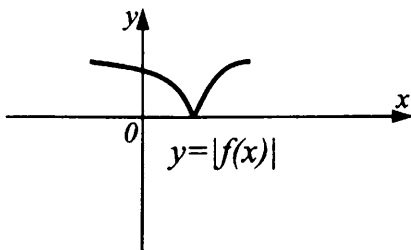


Рис. 252.

График функции $y = |f(x)|$ (см. рис. 252) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 251) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox .

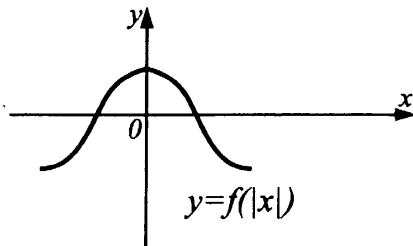


Рис. 253.

График функции $y = f(|x|)$ (см. рис. 253) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 251) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy , с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy .

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдём соответствующее приращение функции

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует

предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$$(c)' = 0 \quad (c - \text{const}); \quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha - \text{const});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$*(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad *(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c = \text{const}; \quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \quad \text{где } u = g(x).$$

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox . Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t . $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t .

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает)* на множестве A , если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно: если на каком-то промежутке $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «-» (с «-» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f(g(x))$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «-» — убывание.

$f(x)$	+	+	-	-
$g(x)$	+	-	+	-
$f(g(x))$	+	-	-	+

Наибольшее и наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется *наибольшим* (*наименьшим*) значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений
$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A . Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A .

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И обратно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c ($c = \text{const}$) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведём таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$$F(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1). \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln |x| + c.$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + c, \quad x > 0. \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c, \quad x < 0.$$

$$F(\sin x) = -\cos x + c. \quad F(\cos x) = \sin x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \text{tg } x + c. \quad F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\text{ctg } x + c.$$

$$F(a^x) = \frac{a^x}{\ln a} + c. \quad F(e^x) = e^x + c.$$

$$*F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \text{arctg } x + c. \quad *F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$$

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$ и вычисляется по формуле

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ где } F(x) \text{ — первообразная для функции } f(x).$$

Кроме того, при нахождении интегралов можно пользоваться формулами:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ где } k \in R.$$

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ можно найти по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ если } f(x) \text{ непрерывна на } [a; b], \text{ а}$$

$F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Для приведённой формулы используется сокращённая запись:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Справедливы формулы: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, где $k \in R$;

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 254) можно вычислить по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

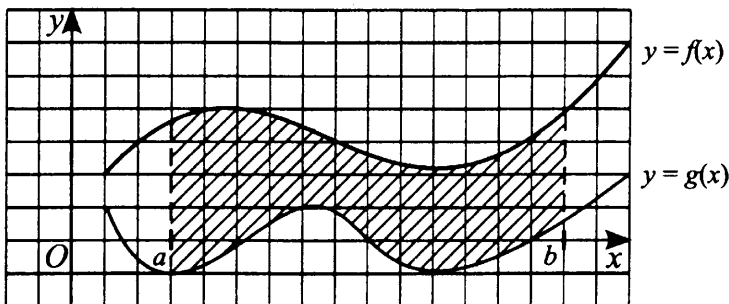


Рис. 254.

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180° .

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.
4. Сумма внешних углов n -угольника равна 360° .
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то
 - 1) перпендикуляр короче наклонных;
 - 2) большей наклонной соответствует бо́льшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c , то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. Обобщённая теорема синусов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a . Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n -угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром окружности.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.
2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.
6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.
7. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.
8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.
9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .
2. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .
3. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .
4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
2. Если прямая a , проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности в точках A и B , то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними касательными. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, отсекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, отсекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, отсекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.
2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E , равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.
3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .
5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.
6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.
8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

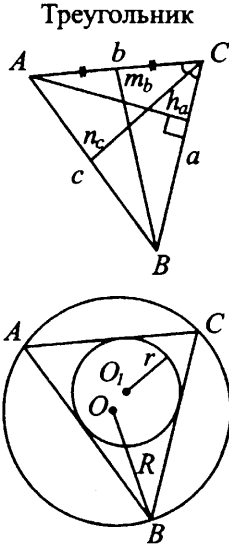
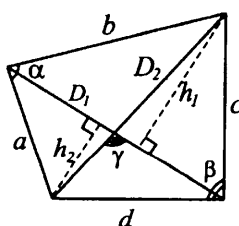
1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

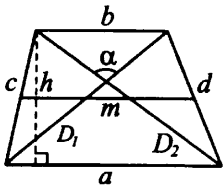
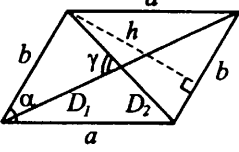
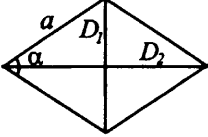
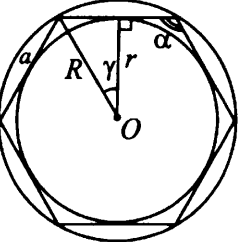
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

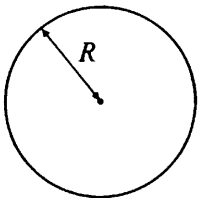
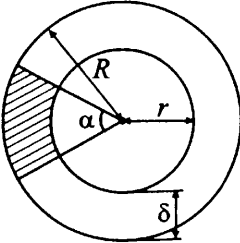
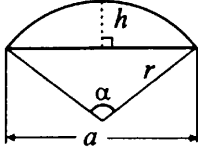
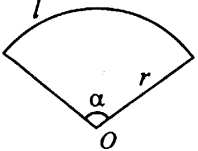
Площадь круга радиуса R равна πR^2 .

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Треугольник</p> 	<p>a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \frac{(m_a + m_b + m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.</p>	<p>$h_b = \frac{2S}{b}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ $n_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_ab_c}$ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C$ $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \frac{4}{3}\sqrt{\mu} \times$ $\times \sqrt{(\mu - m_a)(\mu - m_b)(\mu - m_c)}$</p>
<p>Четырёхугольник</p> 	<p>a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.</p>	<p>$S = \frac{h_1 + h_2}{2} D_1$ $S = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \gamma$ $S = \frac{1}{2} (ab \sin \alpha + cd \sin \beta)$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Трапеция</p> 	<p>a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.</p>	<p>$m = \frac{1}{2}(a + b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a + b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2 \sin \alpha$</p>
<p>Параллелограмм</p> 	<p>a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.</p>	<p>$S = bh$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2 \sin \gamma$</p>
<p>Ромб</p> 	<p>a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.</p>	<p>$S = a^2 \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2$</p>
<p>Правильный многоугольник</p> 	<p>n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180^\circ - 2\gamma$ — угол многоугольника $(\gamma = \frac{180^\circ}{n})$.</p>	<p>$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR \sin \gamma = 2nr \operatorname{tg} \gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \gamma$ $S = nr^2 \operatorname{tg} \gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2 \sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Круг</p> 	<p>R — радиус; l — длина окружности.</p>	<p>$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$</p>
<p>Круговое кольцо</p> 	<p>r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).</p>	<p>$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\varrho\delta$</p> <p>Площадь части кольца:</p> <p>$S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\varrho\delta$</p>
<p>Круговой сегмент</p> 	<p>r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.</p>	<p>$P = l + a$ $S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \frac{r(l-a) + ah}{2}$</p>
<p>Круговой сектор</p> 	<p>r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.</p>	<p>$P = l + 2r$ $S = \frac{lr}{2}$ $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$</p>

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.
2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.
3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α , то прямая a параллельна плоскости α .
2. Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.
3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a , пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b , то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b .
4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .
5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.
6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.
7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ .

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a , то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M .

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обоим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы \vec{a} и \vec{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некопланарным векторам.

5. Если M — середина AB , то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB , а N — середина CD , то $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. Свойства скалярного произведения векторов:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны;

ж) ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. Угол между ненулевыми векторами. Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали),

имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. Уравнения прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. Прямая как пересечение двух плоскостей задаётся системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. Угол между плоскостями. Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. Уравнение плоскости «в отрезках». Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ ($a, b, c \neq 0$), то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. Расстояние от точки до плоскости. Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D , высотой DM и стороной основания a , а A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD .

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P , высотой PM и стороной основания a , а A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон AB , BC , CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP .

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из невписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда

- а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;
- б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1 BD$ и делится ею в отношении $1 : 2$, считая от точки A .

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA , DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1 B_1 C_1 D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc \sin \varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a , то есть $V = \frac{2}{3} \frac{PQ \sin \varphi}{a}$.

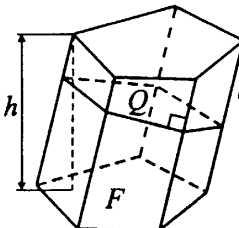
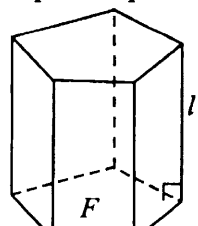
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

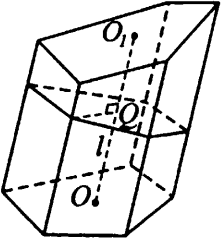
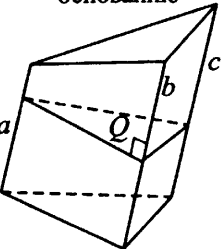
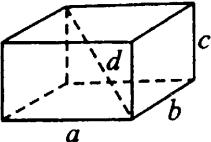
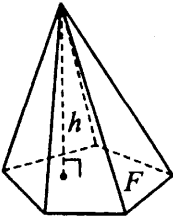
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

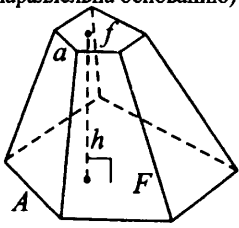
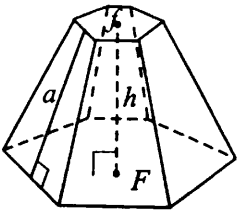
Основные формулы

Далее V — объём тела, S_6 и S — его боковая и полная поверхности.

Многогранники

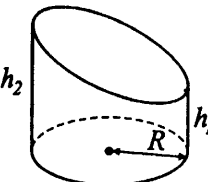
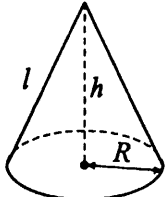
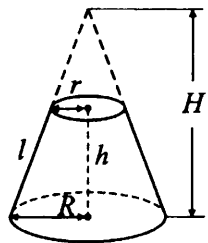
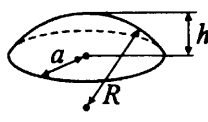
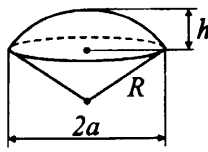
Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Призма</p> 	<p>F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.</p>	<p>$V = Fh = Ql$ $S_6 = Pl$ $S = Pl + 2F$</p>
<p>Прямая призма</p> 	<p>F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.</p>	<p>$V = Fl$ $S_6 = Pl$ $S = Pl + 2F$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Призма, усечённая непараллельно основанию</p> 	<p>l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.</p>	$V = Ql$
<p>Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию</p> 	<p>a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.</p>	$V = \frac{1}{3}(a + b + c)Q$
<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	<p>a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.</p>	<p>$V = abc$ $S = 2(ab + bc + ac)$</p>
<p>Пирамида</p> 	<p>F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).</p>	<p>$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида: $S_6 = \frac{1}{2}Pa$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию)</p> 	<p>F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.</p>	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF \left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A} \right)^2 \right)$
<p>Правильная усечённая пирамида</p> 	<p>F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).</p>	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_6 = \frac{P+p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Сфера</p> 	<p>R — радиус.</p>	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
<p>Цилиндр</p> 	<p>R — радиус основания; h — высота.</p>	$V = \pi R^2 h$ $S_6 = 2\pi R h$ $S = 2\pi R(h + R)$

<p>Цилиндр, усечённый непараллельно основанию</p> 	<p>R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образую- щие.</p>	$V = \frac{1}{2}\pi R^2(h_1 + h_2)$ $S_{\text{б}} = \pi R(h_1 + h_2)$ $S = \pi R \left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2} \right)$
<p>Конус</p> 	<p>R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образу- ющая.</p>	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $S_{\text{б}} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$ $S_{\text{б}} = \pi R l$ $S = \pi R(R + l)$
<p>Усечённый конус</p> 	<p>R и r — радиусы основа- ний; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённо- го конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.</p>	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $S_{\text{б}} = \pi l(R + r)$ $S = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$
<p>Шаровой сегмент</p> 	<p>h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сег- мента.</p>	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ $S_{\text{б}} = 2\pi R h$ $S_{\text{б}} = \pi(a^2 + h^2)$ $S = \pi(2a^2 + h^2)$ $S = \pi(a^2 + 2Rh)$
<p>Шаровой сектор</p> 	<p>h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.</p>	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ $S = \pi R(a + 2h)$

Ответы

Ответы к заданиям 1–12

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3600	2000	1,25	0,4	25	114	0,125	132	63	0,5	4	15
2	3200	1000	4	0,025	12	180	-0,25	48	13	0,5	2,2	20
3	66500	2000	-2	0,4	-4	450	0,75	18	16	6	900	125
4	55000	3000	-1	0,93	15	280	-0,2	94	10	9	750	16
5	760	2	16	0,92	9	35	13	32	3	2	63	-10
6	855	6	30	0,91	-20	31	31	108	4	2	52	-3
7	1395	3	16	0,96	-6	47	12	500	5	20	450	-63
8	1116	1	24	0,95	12	56	3	2	2	25	500	54
9	99	-5	8	0,036	-8	7	5	64	1	3	6	12
10	104	-12	15	0,16	-7	16	6	216	1	2,5	4	-100
11	140	2	10	0,09	-35	5	5	16	2	3	16	2027
12	147	14	25	0,18	-23,8	16	7	44	3	1,5	12	-2
13	28	6	5	0,125	1	49	4	1200	0,76	1	64130	-7
14	28	17	5	0,3	-8	21	4	5	0,25	0,75	85470	1
15	29	8	10	0,44	147	36	1	150	0,032	8	111132	-14
16	30	5	10	0,2	18	22	-6	10	0,375	21	85184	19
17	36	44	2,5	0,36	8,2	243	-1	120	4	15	9	54
18	28,8	40	2,5	0,55	4	56,5	-5	92	2	15	10	-70
19	32,4	13400	3	0,96	3,75	57	4	288	0	30	12	700
20	21,6	398	3	0,84	-3,25	51	4	280	0	30	9	30

Ответы к заданиям 1–12

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
21	15112,5	6	13	0,25	-2	20	4	55	8	151	52	1968
22	12600	10	10	0,12	2	10	6	33	21	190	18	36
23	11	24	3	6	535	90	4	4	2	6860	36	25
24	14	22	4	3	-42,5	3,5	5	162	2	5445	18	64
25	7	18	4,5	0,25	3	-0,8	-1	12	-1,6	0,4	18	7
26	7	16	3,5	0,25	-3	-0,28	-6	96	-1,8	2,5	90	8,5
27	521,5	7	5	0,2	-74	6	1	4	6	1	25	-5
28	507,5	4	10	0,25	-17,96	7,5	1	2	5	2	24	-8
29	21,2	20	18	0,3	-2	20	3	48	140	8	2	25
30	6,2	27	13	0,2	-1,5	17,5	2	10	132	6	5	15
31	123	21	40	0,125	-6	16	4	20	-5	0,018	5	71
32	145	26	24	0,0625	2	24	4	28	-3	0,0012	3	-18
33	64,4	4	3	0,125	-3	60	1	4	1,12	3	10	1
34	64	2	4	0,1	1	50	1	10	-1,96	2	18	-1
35	63	75	4	0,9025	38	63	12	6	-32	0,35	12	-50
36	81	15	5	0,7225	90	80	10,5	0,5	104	1,05	15	56
37	4	12	4	0,015	7,2	100,5	12	5	1	2	3,6	1,25
38	5	8	2	0,005	1,8	94	10	52	1	2	15	0,7
39	4	1,5	80	0,97	5	124	-34	20	1	0,67	27	8
40	4	1	40	0,97	-14	132	-21	40	1	0,67	34	-30

Ответы к заданиям 13 – 19 (начало)

№	13	14	15	16	17	18	19
1	а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ в) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$	$\frac{39\sqrt{3}}{2}$	$[-4; 0) \cup \{1\} \cup$ $\cup (\log_2 3; +\infty)$	4 : 5	14	$(-5; 0) \cup (0; 5]$	а) (4, 7, 10); (5, 8, 11); (6, 9, 12); б) нет; в) 4
2	а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$	$2\sqrt{3}$	$[0; 0,5] \cup (1; +\infty)$	1 : 4	5	$-3; -1; \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}; 2$	а) (1, 5; 9); (2, 6, 10); (3, 7, 11); (4, 8, 12); б) нет; в) 5
3	а) 2; $\log_3 5$; б) 2	99	$(0,75; 1); [\frac{10}{7}; +\infty)$	167°	20 000	$(0; 0,2] \cup \{5\}$	а) да; б) нет; в) 7
4	а) 1; $\log_3 3$; б) 1	$85\sqrt{5}, 5$	$(2,2; 2\frac{1}{3}]; (2,4; +\infty)$	162	200 000	$\{7\} \cup (0; \frac{1}{7}]$	а) да; б) нет; в) 7
5	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ в) $\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}$	$\frac{54}{\sqrt{73}}$	$(-\infty; 0)$	$\frac{5}{2}$	22,5	$[-\frac{8}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}) \cup$ $\cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup$ $\cup (2\sqrt{3}; \frac{8}{\sqrt{3}}]$	а) (27; 1; 2), (20; 4; 5), (7; 8; 13), (6; 9; 12); б) нет; в) 5

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
6	а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$	$\frac{3(12 - \sqrt{21})}{8}$	$(-\infty; \log_2 \frac{\sqrt{73} - 7}{2}]$	$\frac{2}{3}$	7	$[-\frac{7}{\sqrt{3}}; -2\sqrt{3}) \cup$ $\cup (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cup$ $\cup (2\sqrt{3}; \frac{7}{\sqrt{3}}]$	а) (33; 32; 2); (30; 29; 9); (27; 26; 16); (25; 24; 21); (23; 28; 20); б) нет; в) 6
7	а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$	$54\sqrt{3}$	$[\log_3 \frac{3}{16}; \log_3 2) \cup$ $\cup (\log_3 2; +\infty)$	б) $\frac{1}{4}$	158	$[\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$	а) (7, 17, 36); (8, 18, 35); (9, 19, 34); (11, 21, 32); (12, 22, 31); (13, 23, 30); (14, 24, 29); б) нет; в) 10
8	а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}$	20, 16	$(-\infty; 1)$	б) $\frac{3}{4}$	122,75	$(-4; 0) \cup (0; 4]$	а) (2, 9, 20); (8, 11, 19); (7, 12, 18); (3, 15, 17); (4, 13, 16); (1, 6, 21); б) нет; в) 7

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
9	а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$	92, 16	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup \left(\log_5 \frac{3}{2}; \log_5 \frac{5}{2} \right)$ $\cup \left(\log_5 \frac{7}{2}; \log_5 4 \right)$	$\frac{3}{13}$	5	$-\frac{21}{16}; 0; \frac{19}{16}; \frac{25}{4}$	а) (1, 2, 5, 9, 23); б) да; в) 14
10	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	64	$(-\infty; +\infty)$	$\frac{4}{17}$	12, 9	$-\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0; \frac{7}{4}$	а) (2, 7, 11, 14, 16); б) да; в) 16
11	а) $\frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{23\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}$	$\frac{4\sqrt{33}}{5}$	$\left[\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; -1 \right) \cup$ $\cup \left(0; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right]$	$3\sqrt{7}$	17	0; 1	а) 128; б) 32; в) 4^n ; г) 5
12	а) $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{3} + s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$	$\frac{9\sqrt{13}}{5}$	$\left[-1; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup$ $\cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0 \right) \cup$ $\cup \left(1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cup$ $\cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2 \right]$	$\frac{3\sqrt{39}}{2}$	23, 8	-1 : 0	а) 2048; б) 8; в) 4^{n-1} ; г) 6.

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
13	а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$	60°	$(-2; -1) \cup [2; 6)$	$\frac{3\sqrt{10}}{4}$	15	$\left(0; \frac{1}{4}\right]$	а) нет; б) да; в) 3879
14	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$	45°	$[0; 2]$	$\sqrt{7}$	45	$\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right); 0$	а) нет; б) да; в) 687
15	а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$	60°	$[0; 1) \cup \left(3; \frac{11}{3}\right]$	$2\sqrt{3}$	27	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$	а) нет; б) да; в) 513
16	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$	30°	$\left[-\sqrt{17}; 1\right) \cup$ $\cup \left[\sqrt{17}; 5\right) \cup (5; 6).$	5	30	$\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{2}\right]; 0$	а) нет; б) да; в) 243

Ответы к заданиям 13 — 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
17	а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{75\sqrt{2}}{4}$	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$	$36\sqrt{3}$	3	2	а) да; б) нет; в) 198
18	а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$	12,25	$[-1; +\infty)$	$4\sqrt{3}$	6	3,5	а) да; б) нет; в) 1
19	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$	30	$\left[\frac{1}{2(1 - \log_3 2)}; +\infty \right)$	8	432 000 рублей	-10	а) да; б) нет; в) 405
20	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $-4\pi, -3\pi, -2\pi$	45	$(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$	5,4	665 500 рублей	-5,5	а) да; б) нет; в) 144
21	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{25\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}, \frac{29\pi}{6}$	$\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$	$[-2; 3] \cup \{7\}$	17	13	$[-\sqrt{15}; -\sqrt{14}] \cup$ $\cup [\sqrt{14}; \sqrt{15}]$	а) нет, б) да, в) 1, если n делится на 4; 9, если n не делится на 4

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
22	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{9\pi}{2}, \frac{31\pi}{6}, \frac{35\pi}{6}$	$\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$	$[2; 3] \cup \{-5\}$	29	18	$[-2\sqrt{2}; -\sqrt{7}] \cup$ $\cup [\sqrt{7}; 2\sqrt{2}]$	а) нет, б) да, в) 1, если n делится на 5; 16, если n не делится на 5
23	а) $\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 6) \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$	$[\log_3 5; 0] \cup$ $\cup (2; +\infty)$	$4\sqrt{3}$	880 000	$[2 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$	а) 0; б) 2; в) 1
24	а) $\sqrt[4]{5}; 5; 6) 5$	$\arcsin \frac{2}{\sqrt{30}}$	$(-\infty; 0] \cup$ $\cup (\log_7 8; 2]$	$\frac{7 - \sqrt{7}}{3}$	1 300 000	$[3; 3\sqrt{19} - 9)$	а) 0; б) 1; в) 1
25	а) $\frac{1}{4} + m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{4}$	б) $\frac{25\sqrt{2}}{4}$	$(-4; 1]$	б) $\frac{8\sqrt{6}}{5}$	2 кг, 2 кг	$-\frac{\sqrt{15}}{4};$ $\frac{\sqrt{15}}{4}; -1; 1$	а) 1993; 2011; б) нет решений; в) 1991
26	а) $-\frac{2}{3} + m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}$	б) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$(-10; 2]$	б) $\frac{338\sqrt{3}}{45}$	3500; 2500	$(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$	а) 1994; 2012; б) нет решений; в) 1978

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
27	<p>а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) π; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$.</p>	<p>б) $\frac{11\sqrt{97}}{2}$</p>	<p>$[1; \log_2 7)$</p>	<p>4 : 1</p>	<p>21</p>	<p>$[1; 2]$</p>	<p>а) 25; б) отрицательных; в) 11</p>
28	<p>а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{13\pi}{18} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{17\pi}{18} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{7\pi}{18} + 2\pi q, q \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{18}$; $\frac{17\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{29\pi}{18}$</p>	<p>б) $48\sqrt{11}$</p>	<p>$[0; \log_3 5)$</p>	<p>1 : 2</p>	<p>17</p>	<p>$[1; 4]$</p>	<p>а) 36; б) положительных; в) 8</p>
29	<p>а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$</p>	<p>б) $6\sqrt{3}$</p>	<p>$[\frac{3}{4}; 1) \cup (\frac{7}{4}; 2]$</p>	<p>6) 21 : 5</p>	<p>3</p>	<p>$\{-\frac{1}{4}\} \cup (0; +\infty)$</p>	<p>а) да; б) да; в) нет</p>

Ответы к заданиям 13 — 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
30	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$	б) $2\sqrt{11}$	$(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}) \cup$ $\cup [\frac{1}{2}; 2)$	б) 1 : 5	10	$(-\infty; 0) \cup \{\frac{1}{4}\}$	а) да; б) нет; в) 401
31	а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{6}$	а) 1 : 5; б) $\arctg \frac{\sqrt{5}}{4}$	$(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}] \cup$ $\cup (1; 2]$	36	500-й день, 250 000 руб.	$5 < a < 9$ или $11 < a < 15$	а) да; б) да; в) нет
32	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{3}$	а) 1 : 9; б) 72	$(0; \frac{1}{3}) \cup$ $\cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1) \cup$ $\cup [9; +\infty)$	81	166 650 руб	$5 < a < 7$	а) да; б) да; в) нет

Ответы к заданиям 13 — 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19
33	$a) -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi m;$ $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, m, n, k \in \mathbb{Z};$ $b) -\frac{7\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{3}$	$(1, \frac{10}{9}), 4$	13	284 000 руб.	$a = 3^9 - 1,$ $a > 3^{12,5} - 1$	$a) \text{ да;}$ $b) \text{ нет;}$ $в) 17$
34	$a) \frac{\pi}{3} + 2\pi m;$ $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$ $\pi + 2\pi k;$ $m, n, k \in \mathbb{Z}; b) -\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{3}$	$(0; \frac{1}{4}), 4$	10	915 937,5	257, $(1025, +\infty)$	$a) \text{ да;}$ $b) \text{ нет;}$ $в) 67$
35	$a) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ $b) \frac{\pi}{2}$	$6) 45^\circ$	$[\frac{1}{16}; 2) \cup$ $\cup [16; +\infty)$	51,2	7	$1; 3\sqrt{5} + 2$	$a) \text{ нет; } b) \text{ да; } в) 11$

Ответы к заданиям 13 – 19 (продолжение)

№	13	14	15	16	17	18	19																					
	$\begin{aligned} &\text{a) } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ &x = \pi n, k, n \in \mathbb{Z}; \\ &\text{б) } -\frac{4\pi}{3}, -\pi; \\ &\quad -\frac{2\pi}{3}, 0 \end{aligned}$	$\text{б) } 60^\circ$	$\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \cup \left(\frac{1}{27}; 81\right]$	$3\sqrt{3}$	6	$\begin{aligned} &(1; 4\sqrt{5} - 3) \cup \\ &\cup (7; 4\sqrt{5} + 3) \end{aligned}$	$\text{a) да; б) нет; в) 91}$																					
36																												
	$\begin{aligned} &\text{a) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ &\text{б) } \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$	$2\sqrt{5}$	$\begin{aligned} &(0; 1) \cup \\ &\cup (1; 2) \end{aligned}$	3	8	$\begin{aligned} &a \in (-12; -5) \cup \\ &\cup \left\{ \pm 4 \frac{8}{13} \right\} \cup \\ &\cup (5; 12) \end{aligned}$	$\text{a) } -5, 3 \text{ и } 9; \text{ б) нет; в) } 3$																					
37																												
	$\begin{aligned} &\text{a) } (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ &\text{б) } -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \end{aligned}$	$\frac{12\sqrt{5}}{5}$	$\begin{aligned} &\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \\ &\cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$	$\frac{\sqrt{30}}{10}$	18	$\begin{aligned} &a \in (-7, 5; -4) \cup \\ &\cup \left\{ \pm 3 \frac{9}{17} \right\} \cup \\ &\cup (4; 7, 5) \end{aligned}$	$\text{a) } -9, -2 \text{ и } 4; \text{ б) нет; в) } 2$																					
38																												
	$\begin{aligned} &\text{a) } \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} + 2k\pi \\ &\quad (k \in \mathbb{Z}); \\ &\text{б) } -\frac{7}{4}\pi \pm \arccos \frac{3\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$	$\text{б) } \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$	3	$\text{б) } \frac{2}{\sqrt{7}}$	13	$1, 8$	$\begin{aligned} &\text{a) } 1; \text{ б) } 6; \\ &\text{в) } 1) 2^M - 1; \\ &\text{2) } \end{aligned}$ <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0																						
1	1	0	0	1	1	0																						
1	0	1	0	1	0	1																						
39																												

Отвѣты к заданиям 13 — 19 (окончание)

№	13	14	15	16	17	18	19												
40	а) $\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2k\pi$; $(k \in Z)$;	б) $\frac{32\pi\sqrt{3}}{27}$	2	б) $\frac{250}{39}$	7	$\frac{4}{3}, \frac{512}{27}$	а) 2; б) 24; в) 1) наименьшее $x \in N$, удовлетворяющее неравенству $N \leq 2^x - 1$; 2) <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
	1	1	1	0															
1	1	0	1																
1	0	1	1																
	б) $-\frac{7}{4}\pi \pm \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$																		

Учебное издание

**Авилов Николай Иванович, Айвазян Анна Жулверовна,
Войта Елена Александровна, Дерезин Святослав Викторович,
Иванов Сергей Олегович, Коннова Елена Генриевна,
Корянов Анатолий Георгиевич, Кривенко Виктор Михайлович,
Кулабухов Сергей Юрьевич, Мельников Борис Феликсович,
Морох Елизавета Александровна, Нужа Галина Леонтьевна,
Ольховая Людмила Сергеевна, Резникова Нина Михайловна,
Фридман Елена Михайловна, Ханнин Дмитрий Игоревич**

**МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2017.
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ.**

40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года

Под редакцией **Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *Н. Раевская*

Компьютерная вёрстка *О. Сапожников*

Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 23.09.2016.

Формат 60x84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,32.

Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 54

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»

347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.