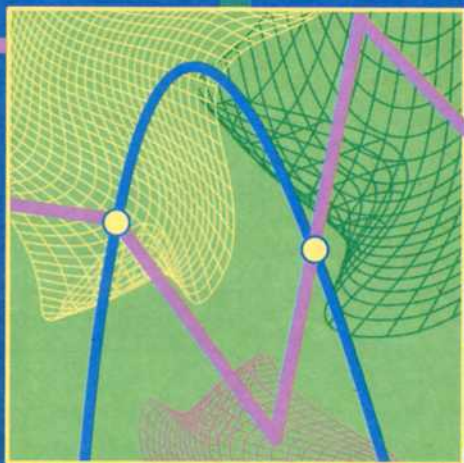


АЛГЕБРА



9

**Самостоятельные
и контрольные
работы**



**вентана
граф**



Алгоритм успеха

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
Е. М. Рабинович
М. С. Якир

АЛГЕБРА

9

класс

**Самостоятельные
и контрольные работы**

Пособие для учащихся
общеобразовательных
организаций



Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2018

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721.6
М52

Мерзляк, А.Г.
М52 Алгебра : 9 класс : самостоятельные и контрольные работы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. — М. : Вентана-Граф, 2018. — 80 с. : ил.

ISBN 978-5-360-08775-5

Пособие содержит упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Используется в комплекте с учебником «Алгебра. 9 класс» (авт. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков) системы учебно-методических комплектов «Алгоритм успеха».

Пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721.6

ISBN 978-5-360-08775-5

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,
Рабинович Е.М., Якир М.С., 2018
© Издательский центр «Вентана-Граф»,
2018

От авторов

Это пособие вместе с учебником для углублённого изучения математики «Алгебра. 9 класс» авторов А. Г. Мерзляка, В. М. Полякова входит в единый учебно-методический комплект.

Первая часть пособия – «Самостоятельные работы» — разделена на четыре однотипных варианта по 35 работ в каждом (самостоятельные работы, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Каждая самостоятельная работа соответствует определённому параграфу учебника, что отражено в названии самостоятельной работы. Наличие аналогичных задач в самостоятельных работах с одинаковыми номерами позволяет использовать этот материал также для отработки навыков решения основных типов задач.

Вторая часть пособия содержит задания для контрольных работ в двух вариантах, а также итоговую работу для повторения и систематизации учебного материала.

Самостоятельные работы

Вариант 1

Самостоятельная работа № 1

Функция

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{2x-1} + \frac{1}{x^2 - 2x - 8}.$$

2. Найдите область значений функции:

1) $y = 3 + \frac{x^5}{x}$; 2) $y = \frac{x+2}{x^2}.$

3. Даны функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^2 - 2$. Задайте формулой функцию: 1) $g(3x)$; 2) $f(g(x))$.

4. Постройте график функции $y = \frac{8-4x}{x^2-2x}.$

5. Известно, что $D(f) = [-3; 2]$. Найдите область определения функции $y = f(x+2)$.

Самостоятельная работа № 2

Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На рисунке 1 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:
- 1) нули функции;

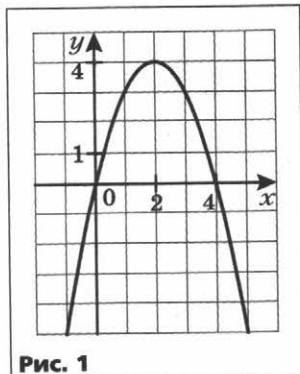


Рис. 1

- 2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
 - 3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - 4) $\min_R f(x)$; $\max_R f(x)$;
 - 5) $\min_{[3;4]} f(x)$; $\max_{[3;4]} f(x)$.
2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{4}{x-1}$ убывает на промежутке $(1; +\infty)$.
 3. Найдите $\min_{D(f)} f(x)$ и $\max_{D(f)} f(x)$, если $f(x) = 3 - \sqrt{1-x^2}$.
 4. Возрастающая функция f определена на множестве \mathbf{R} . Возрастающей или убывающей является функция $f(g(x))$, если $g(x) = 3 - 2x$?
 5. Решите уравнение $x^3 + 2\sqrt{2x+5} = 14$.

Самостоятельная работа № 3

Чётные и нечётные функции

1. Функция f нечётная. Может ли выполняться равенство $f(3) \cdot f(-3) = 4$?
2. Исследуйте на чётность функцию:
 - 1) $y = \frac{x^5 + x^4}{x+1}$;
 - 3) $y = \sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}$.
 - 2) $y = x^7 - 3x^2$;
3. Известно, что $\min_{[-4;-2]} f(x) = -1$, $\max_{[-4;-2]} f(x) = 3$. Найдите $\min_{[2;4]} f(x)$ и $\max_{[2;4]} f(x)$, если:
 - 1) f — чётная функция;
 - 2) f — нечётная функция.
4. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - ax^2 + a^2 - 2a - 3 = 0$ имеет единственный корень?

Самостоятельная работа № 4

Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

1. Известно, что точка $D(2; -7)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a .

2. На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:
- 1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$.

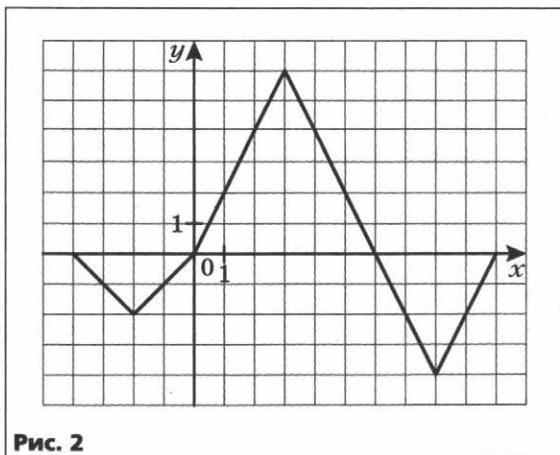


Рис. 2

3. Число 3 является нулём возрастающей функции f . Решите уравнение $f\left(-\frac{1}{2}x\right) = 0$.
4. Постройте график функции: 1) $y = -3x^2$; 2) $y = \sqrt{5x}$.

Самостоятельная работа № 5

**Построение графиков функций $y = f(x) + b$
и $y = f(x + a)$**

1. Каковы координаты вершины параболы:
- 1) $y = x^2 + 7$;
2) $y = (x + 8)^2$;
3) $y = (x - 6)^2 + 9$?
2. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:
- 1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = 3 + \sqrt{x + 1}$.
3. Постройте график функции $y = \frac{2x}{x + 3}$.

4. Сколько корней имеет уравнение $|x + 3| = a - x^2$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 6

Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

- Постройте график функции:
 - $y = |\sqrt{x} - 3|$;
 - $y = \sqrt{|x|} - 3$;
 - $y = \sqrt{|x - 3|}$;
 - $y = \sqrt{|x - 3|} - 3$.
- Функция f такова, что $D(f) = [-2; 3]$ и $E(f) = [-7; 4]$. Найдите область определения и область значений функции $|f(|x|)|$.
- При каких значениях параметра a уравнение $|2|x| - 1| = x - a$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 7

Квадратичная функция, её график и свойства

- Постройте график функции $f(x) = x^2 + 8x + 7$. Используя график, найдите:
 - область значений функции;
 - промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
 - множество решений неравенства: а) $f(x) < 0$; б) $f(x) \geq 0$;
 - наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке: а) $[-5; 6]$; б) $[4; 10]$.
- Пусть D — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$, $D > 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.
- При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 + 2a + 6 = 0$ принимает наименьшее значение?

Самостоятельная работа № 8**Решение квадратных неравенств**

1. Решите неравенство:

1) $x^2 + 5x - 36 < 0$;

2) $2x^2 - 3x + 4 > 0$;

3) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 35} + \frac{3x + 2}{\sqrt{27 - 3x}}.$$

3. Решите неравенство $|x^2 - 3| > x + 3$.

4. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 8x - a + 10 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

Самостоятельная работа № 9**Решение неравенств методом интервалов**

1. Решите неравенство:

1) $(x + 7)(x - 6)(x - 14) < 0$;

2) $(x + 1)(5x - 9)^2(3 - x)^5 > 0$;

3) $\frac{5x}{x^2 - 4x + 3} + \frac{2}{x - 1} \geq \frac{3}{x - 3}$;

4) $(x^2 - 36)\sqrt{x^2 - 16} \geq 0$.

2. Найдите множество решений неравенства $|x - a|(3x^2 - x - 4) \leq 0$ в зависимости от значения параметра a .

Самостоятельная работа № 10**Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки**

1. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$ принадлежат промежутку $(1; 4)$?

2. Найдите все значения параметра a , при которых один из корней квадратного уравнения $ax^2 + x - 3 = 0$ больше 2, а другой меньше 2.

3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - (2a + 6)x + a^2 - 5a + 6 = 0$ являются положительными числами?

Самостоятельная работа № 11

Уравнение с двумя переменными и его график

1. Постройте график уравнения:

1) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;

3) $|y - 2| = \sqrt{x}$;

2) $4x^2 - y^2 = 0$;

4) $\frac{x^2 + y^2 - 16}{x^2 - 9} = 0$.

2. Решите уравнение $(x^2 - 8x + 17)(y^2 + 2y + 4) = 3$.

Самостоятельная работа № 12

Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

1. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = -4. \end{cases}$

2. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} |y| = -x, \\ y = x^2 - 2x - 1. \end{cases}$

3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2x + ay = 8 - a, \\ ax + 8y = 8 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 13

Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y = 3, \\ 3y - x = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy = 2, \\ 4y^2 - 3xy = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 3)(y + 1) = 0, \\ x^2 + 3y^2 - 2xy = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2y^2 - xy^3 = 30, \\ x^3y - x^2y^2 = 180. \end{cases}$

Самостоятельная работа № 14**Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными**

Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{2}, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{y^2 - 2} = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x + y - xy = -2, \\ xy(x + y) = 48. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 15**Неравенства с двумя переменными**

Постройте график неравенства:

1) $y \geq x^2 - 3x + 2;$ 3) $(x + 2y - 1)(x - y + 2) > 0;$

2) $xy < 3;$ 4) $\frac{y + 2x^2}{|y + 2|} > 0.$

Самостоятельная работа № 16**Системы неравенств с двумя переменными**

1. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ xy < 2. \end{cases}$$

2. Изобразите график неравенства:

1) $|x - 2y| < 4;$ 2) $\sqrt{2x + y} < \sqrt{3x - y - 1}.$

3. Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\max\{3x, 2\} = y + 1.$

Самостоятельная работа № 17**Основные методы доказательства неравенств**

1. Докажите неравенство:

1) $9x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0;$

$$2) a^2b^2 + 4a^2 + b^2 + 4 \geq 8ab;$$

$$3) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)} < \frac{1}{3}, \text{ где } n \in \mathbb{N};$$

$$4) a^2 + 4b^2 + 9 \geq 2ab - 6b - 3a.$$

2. Известно, что $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Докажите неравенство $\frac{x}{2+y} + \frac{y}{2+z} + \frac{z}{2+x} \leq 1$.

Самостоятельная работа № 18

Неравенства между средними величинами.

Неравенство Коши — Буняковского

1. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a}{12b} + \frac{27b}{a} \geq 3$.
2. При $x > 2$ докажите неравенство $x + \frac{1}{x-2} \geq 4$.
3. Известно, что $a^2 + b^2 = 12$, $c^2 + d^2 = 3$. Докажите, что $|ac + bd| \leq 6$.
4. Известно, что $x + y = 1$. Докажите, что $\sqrt{x^2 + 9y^2} + \sqrt{y^2 + 9x^2} \geq 2\sqrt{2}$.

Самостоятельная работа № 19

Математическое моделирование

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 300 км, выехали одновременно навстречу друг другу легковой и грузовой автомобили, которые встретились через 2 ч 30 мин. Найдите скорость каждого автомобиля, если грузовик потратил на путь из одного города в другой на 3 ч 45 мин больше, чем легковой автомобиль.
2. Если открыть одновременно две трубы, то бассейн будет наполнен водой за 2 ч 24 мин. Если сначала через первую трубу наполнить $\frac{1}{3}$ бассейна, а потом через вторую трубу — оставшуюся часть бассейна, то весь бассейн будет наполнен за 6 ч. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

3. В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 2 : 3 и 1 : 4 соответственно. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 40 кг нового сплава, в котором массы меди и цинка относятся как 1 : 3?

Самостоятельная работа № 20

Процентные расчёты

1. После двух последовательных снижений цены на 20% футболка стала стоить 256 р. Найдите первоначальную цену футболки.
2. Есть 160 г раствора иода в спирте, содержащего 10% иода. Сколько граммов спирта надо долить в раствор, чтобы полученный раствор содержал 8% иода?
3. Вкладчик положил в банк 60 000 р. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а в следующем году банковская ставка была увеличена на 2%. В конце второго года на счёте оказалось 66 144 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

Самостоятельная работа № 21

Абсолютная и относительная погрешности

1. Запишите в виде двойного неравенства:
1) $x = 12 \pm 0,2$; 3) $x = 16,4 \pm 4$.
2) $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{4}$;
2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{1}{6}$ числом:
1) 0,16; 2) 0,167.
3. В справочнике указано, что плотность кислорода равна $1,429 \cdot 10^{-3}$ г/см³. С какой точностью указано приближённое значение плотности кислорода?
4. В справочнике указано, что масса атома алюминия равна $4,48 \cdot 10^{-26}$ кг. Оцените относительную погрешность этого приближения.

Самостоятельная работа № 22**Метод математической индукции**

1. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n выполняется равенство $1 + 5 + 9 + \dots + 4n - 3 = n(2n - 1)$.
2. Докажите неравенство $4^n > 3n + 2$, где $n \in N$, $n \geq 2$.
3. Докажите, что для любого натурального n значение выражения $(21^n + 50 \cdot 4^n)$ кратно 17.

Самостоятельная работа № 23**Основные правила комбинаторики. Перестановки**

1. Сколькими способами можно распределить 12 карандашей между 12 учениками?
2. Сколько шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?
3. Сколько нечётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?
4. У Саши есть 5 книг по истории, 6 книг по биологии и 3 книги по математике. Сколькими способами он может расставить эти книги на полке так, чтобы книги по одному предмету стояли рядом?

Самостоятельная работа № 24**Размещения**

1. В первенстве города по баскетболу участвуют 11 команд. Сколькими способами могут распределиться первое, второе и третье места?
2. Решите в натуральных числах уравнение:
 - 1) $A_{x+3}^2 = 110$;
 - 2) $\frac{P_{x+4}}{A_{x+1}^3 \cdot P_{x-2}} = 504$.
3. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы цифры не повторялись, а первая и четвёртая цифры были чётными?

Самостоятельная работа № 25

Сочетания

1. Упростите выражение $\frac{14}{n+10} C_{n+10}^{n+8}$.
2. Решите в натуральных числах уравнение $A_{x+2}^2 + C_{x+4}^{x+2} = 78$.
3. В классе есть 14 девочек и 16 мальчиков. Сколькими способами можно сформировать команду из 3 девочек и 4 мальчиков для участия в спортивных соревнованиях?
4. Есть 18 шаров, пронумерованных числами от 1 до 18. Сколькими способами можно составить набор из 7 шаров, если шары с номерами 8 и 12 не могут одновременно входить в набор?

Самостоятельная работа № 26

Частота и вероятность случайного события

1. При подбрасывании монеты вероятность выпадения герба равна 0,5. Может ли быть так, что в серии из 120 подбрасываний герб выпадет 98 раз?
2. По результатам опроса 300 жителей города N выяснилось, что 12 человек не пользуются мобильными телефонами. Оцените вероятность того, что наугад выбранный житель города N не пользуется мобильным телефоном.

Самостоятельная работа № 27

Классическое определение вероятности

1. Из натуральных чисел от 1 до 16 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 16?
2. В коробке лежат 20 жёлтых шаров и несколько красных. Сколько красных шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется красным, равна $\frac{3}{8}$?

3. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер с первой попытки, если абонент помнит только, что одна из двух последних цифр меньше другой на 2?

Самостоятельная работа № 28

Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики

1. В пенале лежат 12 ручек, из которых 5 синих. Какова вероятность того, что выбранные наугад 3 ручки окажутся синими?
2. В коробке лежат 14 синих карточек, 7 зелёных карточек и 9 белых карточек. Наугад выбирают 10 карточек. Какова вероятность того, что среди выбранных карточек будут 5 синих, 2 зелёных и 3 белых?
3. Наугад выбирают 4 буквы из слова «ДОРОГА». Какова вероятность того, что из выбранных четырёх букв можно составить слово «ГОРА»?

Самостоятельная работа № 29

Числовые последовательности

1. Найдите три первых члена последовательности (a_n) , если $a_1 = -3$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$.
2. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = 6n - 1$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 17; 2) 36? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
3. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = n^2 - 4n + 2$. Найдите количество членов этой последовательности, которые меньше числа 14.
4. Найдите все такие значения a , при которых последовательность, заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 7x_n + 7$, является стационарной.

Самостоятельная работа № 30

Арифметическая прогрессия

1. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 5,3; 4,9; 4,5;
2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_4 + a_8 = 35$ и $a_3 + a_{21} = 65$.
3. При каком значении n значения выражений n^2 , $2n + 3$, $3n + 4$ и $n^2 + n + 7$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

Самостоятельная работа № 31

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = 2n - 3$. Найдите сумму тридцати шести первых членов прогрессии.
2. Для любого натурального значения n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 4n^2 - 5n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.
3. Девятнадцатый член арифметической прогрессии равен 16. Найдите сумму тридцати семи первых членов прогрессии.

Самостоятельная работа № 32

Геометрическая прогрессия

1. Между числами 16 и 81 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию. Запишите полученную прогрессию.
2. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_{10} = 9b_8$ и $b_3 + b_6 = 168$.
3. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 90. Если из этих чисел вычесть соответственно 7, 18 и 2, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Самостоятельная работа № 33**Сумма n первых членов геометрической прогрессии**

1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n -го члена $b_n = 3 \cdot 2^{n+1}$. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.
2. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна 2 046. Найдите n , если первый член прогрессии равен 6, а знаменатель прогрессии равен 4.
3. Для любого натурального n сумму n первых членов некоторой последовательности можно вычислить по формуле $S_n = 2(5^n - 1)$. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Самостоятельная работа № 34**Представление о пределе последовательности.****Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы**

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:
1) 36, -12, 4, ... ; 2) 21, $3\sqrt{7}$, 3,
2. Запишите в виде обыкновенной дроби число:
1) 0,777... ; 2) 8,3(18).
3. В бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q , где $|q| < 1$, сумма членов с нечётными номерами равна 24, а сумма членов с чётными номерами равна 4. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Самостоятельная работа № 35**Суммирование**

1. Найдите сумму $\frac{4}{3} + \frac{19}{9} + \frac{82}{27} + \dots + \frac{3^n \cdot n + 1}{3^n}$.
2. Найдите сумму $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \left(2^3 + \frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.
3. Найдите сумму $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)}$.

Вариант 2

Самостоятельная работа № 1

Функция

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{3x - 2} + \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

2. Найдите область значений функции:

1) $y = 5 - \frac{x^7}{x}$; 2) $y = \frac{x - 1}{x^2}.$

3. Даны функции $f(x) = 3x + 1$ и $g(x) = x^2 - 3$. Задайте формулой функцию: 1) $g(2x)$; 2) $f(g(x))$.

4. Постройте график функции $y = \frac{6 - 2x}{x^2 - 3x}.$

5. Известно, что $D(f) = [-1; 6]$. Найдите область определения функции $y = f(x - 5)$.

Самостоятельная работа № 2

Возрастание и убывание функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

- 1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

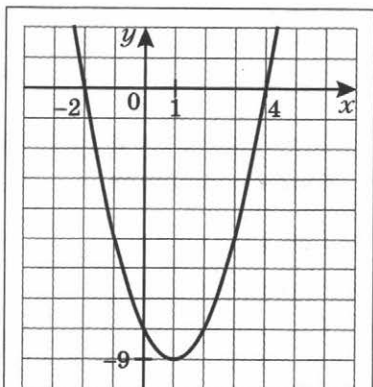


Рис. 3

- 4) $\min_R f(x)$; $\max_R f(x)$;
 5) $\min_{[-2;0]} f(x)$; $\max_{[-2;0]} f(x)$.
2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{5}{x+2}$ убывает на промежутке $(-2; +\infty)$.
3. Найдите $\min_{D(f)} f(x)$ и $\max_{D(f)} f(x)$, если $f(x) = 4 - \sqrt{4 - x^2}$.
4. Убывающая функция f определена на множестве R . Возрастающей или убывающей является функция $f(g(x))$, если $g(x) = 3x - 1$?
5. Решите уравнение $x^3 + 4\sqrt{2x+11} = 11$.

Самостоятельная работа № 3

Чётные и нечётные функции

1. Функция f чётная. Может ли выполняться равенство $f(6) \cdot f(-6) = -1$?
2. Исследуйте на чётность функцию:
- 1) $y = \frac{x^6 + 2x^5}{x+2}$;
 2) $y = x^4 + x$;
 3) $y = \sqrt{7-x} + \sqrt{7+x}$.
3. Известно, что $\min_{[-6;-3]} f(x) = 1$, $\max_{[-6;-3]} f(x) = 4$. Найдите $\min_{[3;6]} f(x)$ и $\max_{[3;6]} f(x)$, если:
- 1) f — чётная функция; 2) f — нечётная функция.
4. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - ax^2 + a^2 - a - 2 = 0$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 4

Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

1. Известно, что точка $E(-3; 12)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a .

2. На рисунке 4 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$.

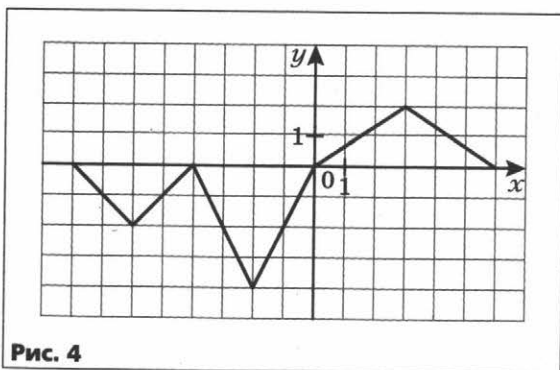


Рис. 4

3. Число -2 является нулём убывающей функции f . Решите уравнение $f(6x) = 0$.
4. Постройте график функции:
- 1) $y = -4x^2$; 2) $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$.

Самостоятельная работа № 5

Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$

1. Каковы координаты вершины параболы:
- 1) $y = x^2 - 10$;
 2) $y = (x - 9)^2$;
 3) $y = (x + 14)^2 - 13$?
2. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, построьте график функции:
- 1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = 2 + \sqrt{x - 1}$.
3. Постройте график функции $y = \frac{3x}{x + 4}$.
4. Сколько корней имеет уравнение $|x - 3| = a - x^2$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 6

Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

1. Постройте график функции:

- 1) $y = |\sqrt{x} - 4|$; 3) $y = \sqrt{|x - 4|}$;
 2) $y = \sqrt{|x| - 4}$; 4) $y = \sqrt{|x - 4|} - 4$.

2. Функция f такова, что $D(f) = [-6; 2)$ и $E(f) = [-5; 3)$.
 Найдите область определения и область значений функции $|f(|x|)|$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x| - 1| = a - x$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 7

Квадратичная функция, её график и свойства

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 6x + 8$. Используя график, найдите:

- 1) область значений функции;
 2) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 3) множество решений неравенства: а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \leq 0$;
 4) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке: а) $[-4; 0]$; б) $[1; 3]$.

2. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a < 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$.

3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$ принимает наименьшее значение?

Самостоятельная работа № 8

Решение квадратных неравенств

1. Решите неравенство:

- 1) $x^2 + 2x - 35 < 0$;
 2) $-5x^2 + 2x - 1 > 0$;
 3) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \frac{4x - 6}{\sqrt{x^2 + 2x - 48}} + \sqrt{20 - 2x}.$$

3. Решите неравенство $|x^2 - 6| > x + 6$.
 4. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 5ax + 4a + 3 < 0$ не имеет решений?

Самостоятельная работа № 9

Решение неравенств методом интервалов

1. Решите неравенство:
 1) $(x + 6)(x - 1)(x - 7) > 0$;
 2) $(x + 4)(6 - x)^8(3x - 1)^5 > 0$;
 3) $\frac{4x}{x^2 - 6x + 5} + \frac{3}{x - 1} \geq \frac{2}{x - 5}$;
 4) $(x^2 - 49)\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$.
 2. Найдите множество решений неравенства $|x - a|(2x^2 - x - 3) \leq 0$ в зависимости от значения параметра a .

Самостоятельная работа № 10

Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки

1. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$ принадлежат промежутку $(-1; 5)$?
 2. Найдите все значения параметра a , при которых один из корней квадратного уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ больше -3 , а другой меньше -3 .
 3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (2a + 8)x + a^2 - 3a - 10 = 0$ являются отрицательными числами?

Самостоятельная работа № 11

Уравнение с двумя переменными и его график

1. Постройте график уравнения:
 1) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$; 2) $x^2 - 9y^2 = 0$;

$$3) |y + 3| = \sqrt{x};$$

$$4) \frac{x^2 + y^2 - 25}{y^2 - 9} = 0.$$

$$2. \text{ Решите уравнение } (x^2 + 4x + 7)(y^2 - 6y + 11) = 6.$$

Самостоятельная работа № 12

Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

$$1. \text{ Решите графически систему уравнений } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$2. \text{ Определите графически количество решений системы уравнений } \begin{cases} |y| = x, \\ y = -x^2 + 2x + 3. \end{cases}$$

$$3. \text{ Сколько решений имеет система уравнений } \begin{cases} ax + 3y = 12 - a, \\ 12x + ay = 12 \end{cases} \text{ в зависимости от значения параметра } a?$$

Самостоятельная работа № 13

Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + xy - 3y = -1, \\ 4x - y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x - 2)(y - 1) = 0, \\ 2x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + 2xy = -1, \\ 4xy + 9y^2 = 5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3y^3 + x^2y^4 = 12, \\ x^4y^2 + x^3y^3 = 24. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 14**Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными**

Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{4}, \\ 2x - 5y = 9; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 10y^2 = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 28; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 + 4} = 6, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x - y + xy = 10, \\ xy(x - y) = 16. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 15**Неравенства с двумя переменными**

Постройте график неравенства:

1) $y \leq -x^2 + 4x - 3;$

2) $xy > 4;$

3) $(x - 3y + 2)(x + y - 3) < 0;$

4) $\frac{y - 2x^2}{|y - 2|} < 0.$

Самостоятельная работа № 16**Системы неравенств с двумя переменными**

1. Изобразите на координатной плоскости xu множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 10, \\ xy \leq 3. \end{cases}$$
2. Изобразите график неравенства:
 - 1) $|2x - y| > 1;$
 - 2) $\sqrt{3x - y + 2} < \sqrt{2x + y}.$
3. Изобразите на координатной плоскости xu множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\min \{2y, 3\} = x - 2.$

Самостоятельная работа № 17

Основные методы доказательства неравенств

1. Докажите неравенство:

1) $16x^2 - 8xy + 3y^2 \geq 0$;

2) $m^2n^2 + m^2 + 4n^2 + 9 \geq 10mn$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+4)} < \frac{1}{4}$, где $n \in \mathbb{N}$;

4) $9c^2 + d^2 + 4 \geq 3cd - 6c - 2d$.

2. Известно, что $a \in [0; 2]$, $b \in [0; 2]$, $c \in [0; 2]$. Докажите неравенство $\frac{a}{4+b} + \frac{b}{4+c} + \frac{c}{4+a} \leq 1$.

Самостоятельная работа № 18

Неравенства между средними величинами.

Неравенство Коши — Буняковского

1. Для положительных чисел x и y докажите неравенство

$$\frac{112x}{y} + \frac{y}{28x} \geq 4.$$

2. При $a > 3$ докажите неравенство $a + \frac{1}{a-3} \geq 5$.

3. Известно, что $a^2 + b^2 = 18$, $c^2 + d^2 = 8$. Докажите, что $|ac - bd| \leq 12$.

4. Известно, что $x + y = 2$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2 + 4y^2} + \sqrt{y^2 + 4x^2} \geq 3\sqrt{2}.$$

Самостоятельная работа № 19

Математическое моделирование

1. Из двух сёл, расстояние между которыми равно 50 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и встретились через 2 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста, если один из них потратил на путь из одного села в другое на 1 ч 40 мин меньше, чем другой.

2. Две бригады, работая одновременно, могут отремонтировать дорогу за 6 ч. Если же сначала первая бригада самостоятельно отремонтирует $\frac{3}{5}$ дороги, а потом вторая — оставшуюся часть дороги, то весь ремонт будет выполнен за 12 ч. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно?
3. В двух сплавах массы меди и олова относятся как 3 : 4 и 1 : 6 соответственно. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 42 кг нового сплава, в котором массы меди и олова относятся как 5 : 16?

Самостоятельная работа № 20

Процентные расчёты

1. После двух последовательных повышений цены на 30% шкаф стал стоить 5 070 р. Найдите первоначальную цену шкафа.
2. Сколько килограммов воды надо добавить к 7,5 кг раствора, содержащего 20% соли, чтобы получить раствор, содержащий 12% соли?
3. Вкладчик положил в банк 40 000 р. За первый год ему был начислен некоторый процент годовых, а во второй год банковская ставка была уменьшена на 6%. В конце второго года на счёте оказалось 45 760 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

Самостоятельная работа № 21

Абсолютная и относительная погрешности

1. Запишите в виде двойного неравенства:
 - 1) $x = 16 \pm 0,4$;
 - 2) $x = \frac{5}{7} \pm \frac{1}{3}$;
 - 3) $x = 10,2 \pm 3$.

2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа

$\frac{1}{7}$ числом:

- 1) 0,14;
- 2) 0,143.

3. В справочнике указано, что плотность аммиака равна $0,771 \cdot 10^{-3}$ г/см³. С какой точностью указано приближённое значение плотности аммиака?
4. В справочнике указано, что масса атома меди равна $1,05 \cdot 10^{-25}$ кг. Оцените относительную погрешность этого приближения.

Самостоятельная работа № 22

Метод математической индукции

1. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n выполняется равенство $1 + 11 + 21 + \dots + 10n - 9 = n(5n - 4)$.
2. Докажите неравенство $5^n > 4n + 3$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
3. Докажите, что для любого натурального n значение выражения $(24^n + 37 \cdot 5^n)$ кратно 19.

Самостоятельная работа № 23

Основные правила комбинаторики.

Перестановки

1. Сколькими способами можно составить расписание 6 уроков из 6 различных учебных предметов?
2. Сколько пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?
3. Сколько чётных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?
4. В гараже есть 7 грузовых машин, 8 легковых машин и 5 мотоциклов. Сколькими способами их можно расставить в ряд так, чтобы все грузовые машины стояли рядом, все легковые машины стояли рядом и все мотоциклы стояли рядом?

Самостоятельная работа № 24

Размещения

1. В девятом классе учится 30 человек. Сколькими способами из них можно выбрать старосту и его заместителя?
2. Решите в натуральных числах уравнение:

$$1) A_{x+5}^2 = 182; \quad 2) \frac{P_{x+6}}{A_{x+3}^4 \cdot P_{x-1}} = 336.$$

3. Сколько четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы цифры не повторялись и последние две цифры были нечётными?

Самостоятельная работа № 25

Сочетания

1. Упростите выражение $\frac{12}{n+5} C_{n+6}^{n+4}$.
2. Решите в натуральных числах уравнение $A_{x+1}^2 + C_{x+5}^{x+3} = 97$.
3. В ремонтной организации работают 15 маляров и 10 штукатуров. Сколькими способами можно составить бригаду из 5 маляров и 3 штукатуров?
4. Есть 16 карандашей разного цвета. Сколькими способами можно составить набор из 5 карандашей, если синий и зелёный карандаши не могут одновременно входить в набор?

Самостоятельная работа № 26

Частота и вероятность случайного события

1. Вероятность купить бракованную электрическую лампочку равна 0,03. Может ли в партии из 150 лампочек оказаться 30 бракованных?
2. По результатам опроса 700 школьников района выяснилось, что 280 из них делают утреннюю зарядку. Оцените вероятность того, что наугад выбранный школьник района делает утреннюю зарядку.

Самостоятельная работа № 27

Классическое определение вероятности

1. Из натуральных чисел от 1 до 20 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 20?
2. В коробке лежат 27 чёрных шаров и несколько белых. Сколько белых шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется белым, равна $\frac{2}{5}$?
3. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер с первой попытки, если абонент помнит только, что одна из двух последних цифр больше другой на 3?

Самостоятельная работа № 28

Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики

1. В корзинке лежат 16 яблок, из которых 6 красные. Какова вероятность того, что выбранные наугад 4 яблока окажутся красными?
2. В вазе стоят 9 красных, 6 розовых и 4 белых гвоздики. Наугад выбирают 9 гвоздик. Какова вероятность того, что среди выбранных гвоздик будут 4 красных, 3 розовых и 2 белых гвоздики?
3. Наугад выбирают 4 буквы из слова «СЕРЕДИНА». Какова вероятность того, что из выбранных четырёх букв можно составить слово «СЕРА»?

Самостоятельная работа № 29

Числовые последовательности

1. Найдите три первых члена последовательности (a_n) , если $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

2. Последовательность (y_n) задана формулой n -го члена $y_n = 3 - 5n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 23; 2) -247? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
3. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = -n^2 + 5n - 5$. Найдите количество членов этой последовательности, которые больше числа -19.
4. Найдите все такие значения a , при которых последовательность, заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 6x_n + 6$, является стационарной.

Самостоятельная работа № 30

Арифметическая прогрессия

1. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии -3,6; -3,3; -3; ...
2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_5 + a_{13} = 38$ и $a_4 + a_8 = 29$.
3. При каком значении b значения выражений $3b + 1$, $4b - 1$, $b^2 + b$ и $b^2 + b + 1$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

Самостоятельная работа № 31

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = -2n + 1$. Найдите сумму тридцати восьми первых членов прогрессии.
2. Для любого натурального значения n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 + 7n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.
3. Семнадцатый член арифметической прогрессии равен 14. Найдите сумму тридцати трёх первых членов прогрессии.

Самостоятельная работа № 32**Геометрическая прогрессия**

1. Между числами 625 и 16 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию. Запишите полученную прогрессию.
2. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_8 = 25b_6$ и $b_4 + b_7 = -375$.
3. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Если первое число оставить без изменений, а из второго и третьего чисел вычесть соответственно 4 и 5, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Самостоятельная работа № 33**Сумма n первых членов геометрической прогрессии**

1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n -го члена $b_n = 18 \cdot 3^{n-3}$. Найдите сумму восьми первых членов прогрессии.
2. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна 2 912. Найдите n , если первый член прогрессии равен 8, а знаменатель прогрессии равен 3.
3. Для любого натурального n сумму n первых членов некоторой последовательности можно вычислить по формуле $S_n = 6(2^n - 1)$. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Самостоятельная работа № 34**Представление о пределе последовательности.****Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы**

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:
1) 100; -20; 4; ... ; 2) 20, $4\sqrt{5}$, 4,
2. Запишите в виде обыкновенной дроби число:
1) 0,888... ; 2) 5,1(26).

3. В бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q , где $|q| < 1$, сумма членов с нечётными номерами равна -32 , а сумма членов с чётными номерами равна 8 . Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Самостоятельная работа № 35

Суммирование

1. Найдите сумму $\frac{3}{4} + \frac{31}{16} + \frac{191}{64} + \dots + \frac{4^n \cdot n - 1}{4^n}$.

2. Найдите сумму

$$\left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 - \frac{1}{3^2}\right)^2 + \left(3^3 - \frac{1}{3^3}\right)^2 + \dots + \left(3^n - \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

3. Найдите сумму $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)}$.

Вариант 3

Самостоятельная работа № 1

Функция

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + \frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

2. Найдите область значений функции:

$$1) y = 2 + \frac{x^3}{x}; \quad 2) y = \frac{x-3}{x^2}.$$

3. Даны функции $f(x) = 3x - 2$ и $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулой функцию: 1) $g(5x)$; 2) $f(g(x))$.

4. Постройте график функции $y = \frac{12-3x}{x^2-4x}$.

5. Известно, что $D(f) = [-2; 4]$. Найдите область определения функции $y = f(x-1)$.

Самостоятельная работа № 2

Возрастание и убывание функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На рисунке 5 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

- 1) нули функции;
- 2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
- 3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- 4) $\min_R f(x)$; $\max_R f(x)$;
- 5) $\min_{[-1;0]} f(x)$; $\max_{[-1;0]} f(x)$.

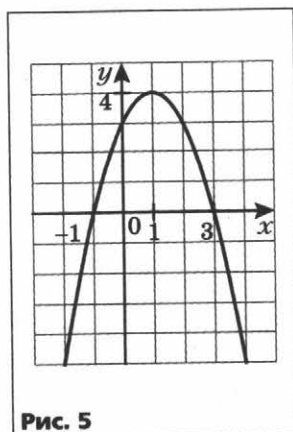


Рис. 5

- Докажите, что функция $f(x) = \frac{7}{x-5}$ убывает на промежутке $(5; +\infty)$.
- Найдите $\min_{D(f)} f(x)$ и $\max_{D(f)} f(x)$, если $f(x) = 7 - \sqrt{9 - x^2}$.
- Возрастающая функция f определена на множестве R . Возрастающей или убывающей является функция $f(g(x))$, если $g(x) = 2 - 5x$?
- Решите уравнение $x^3 + 3\sqrt{5x+4} = 10$.

Самостоятельная работа № 3

Чётные и нечётные функции

- Функция f нечётная. Может ли выполняться равенство $f(2) \cdot f(-2) = 1$?
- Исследуйте на чётность функцию:
 - $y = \frac{x^4 - x^3}{x - 1}$;
 - $y = x^6 - 2x$;
 - $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}$.
- Известно, что $\min_{[-5; -1]} f(x) = -3$, $\max_{[-5; -1]} f(x) = 2$. Найдите $\min_{[1; 5]} f(x)$ и $\max_{[1; 5]} f(x)$, если:
 - f — чётная функция;
 - f — нечётная функция.
- При каких значениях параметра a уравнение $x^4 + ax^2 + a^2 + 4a - 5 = 0$ имеет единственный корень?

Самостоятельная работа № 4

Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

- Известно, что точка $F(-5; -15)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a .
- На рисунке 6 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:
 - $y = -f(x)$;
 - $y = f(-x)$.

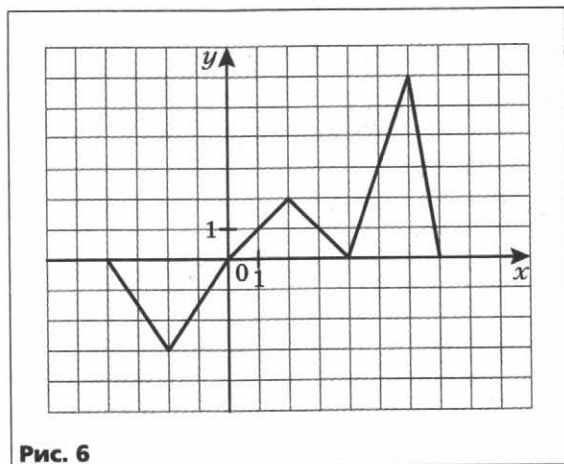


Рис. 6

3. Число 4 является нулём возрастающей функции f . Решите уравнение $f\left(-\frac{1}{3}x\right) = 0$.
4. Постройте график функции: 1) $y = \frac{1}{3}x^2$; 2) $y = \sqrt{-2x}$.

Самостоятельная работа № 5

**Построение графиков функций $y = f(x) + b$
и $y = f(x + a)$**

- Каковы координаты вершины параболы:
 - $y = x^2 + 12$;
 - $y = (x - 7)^2$;
 - $y = (x + 20)^2 + 1$?
- Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, построьте график функции:
 - $y = \sqrt{x + 1}$;
 - $y = 1 + \sqrt{x + 2}$.
- Постройте график функции $y = \frac{3x}{x + 2}$.
- Сколько корней имеет уравнение $|x + 2| = a - x^2$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 6

Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

1. Постройте график функции:

1) $y = |\sqrt{x} - 5|$;

2) $y = \sqrt{|x| - 5}$;

3) $y = \sqrt{|x - 5|}$;

4) $y = \sqrt{|x - 5| - 5}$.

2. Функция f такова, что $D(f) = [-1; 5)$ и $E(f) = [-8; 6)$. Найдите область определения и область значений функции $|f(|x|)|$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x| - 3| = x - a$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 7

Квадратичная функция, её график и свойства

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

3) множество решений неравенства: а) $f(x) \geq 0$; б) $f(x) < 0$;

4) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке: а) $[-3; 4]$; б) $[1; 4]$.

2. Пусть D — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a < 0$, $D > 0$, $c < 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.

3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 4a + 12 = 0$ принимает наименьшее значение?

Самостоятельная работа № 8

Решение квадратных неравенств

1. Решите неравенство:

1) $-x^2 - x + 30 < 0$;

2) $3x^2 + 2x + 4 > 0$;

3) $16x^2 + 24x + 9 \leq 0$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 30} + \frac{2x - 1}{\sqrt{36 - 4x}}.$$

3. Решите неравенство $|x^2 - 15| > x + 15$.

4. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 4x + a + 3 < 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

Самостоятельная работа № 9

Решение неравенств методом интервалов

1. Решите неравенство:

1) $(x + 4)(x - 9)(x - 17) < 0$;

2) $(x - 8)^8(5x + 1)^5(11 - x) > 0$;

3) $\frac{3x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{x - 1} \geq \frac{4}{x - 2}$;

4) $(x^2 - 25)\sqrt{x^2 - 9} \geq 0$.

2. Найдите множество решений неравенства $|x - a|(3x^2 - 2x - 1) \leq 0$ в зависимости от значения параметра a .

Самостоятельная работа № 10

Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки

1. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 + (5a + 2)x + 10a = 0$ принадлежат промежутку $(-3; 1)$?
2. Найдите все значения параметра a , при которых один из корней квадратного уравнения $ax^2 + x + 4 = 0$ больше 3, а другой меньше 3.

3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (2a - 14)x + a^2 - a - 12 = 0$ являются положительными числами?

Самостоятельная работа № 11

Уравнение с двумя переменными и его график

1. Постройте график уравнения:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;

3) $|y - 3| = \sqrt{x}$;

2) $16x^2 - y^2 = 0$;

4) $\frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 - 1} = 0$.

2. Решите уравнение $(x^2 - 6x + 12)(y^2 - 10y + 28) = 9$.

Самостоятельная работа № 12

Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

1. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = -6. \end{cases}$
2. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} |y| = x, \\ y = -x^2 + 5x + 1. \end{cases}$
3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 4x + ay = 16 - a, \\ ax + 16y = 16 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 13

Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y^2 - xy + x = 2, \\ 5y + x = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 5xy = -4, \\ 3xy + 16y^2 = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 1)(y + 2) = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 4xy = 17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2y^2 + xy^3 = 192, \\ x^3y + x^2y^2 = 96. \end{cases}$

Самостоятельная работа № 14**Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными**

Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{16}{15}, \\ 4y - 5x = 15; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 + xy - 12y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 90; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} \sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{y^2 + 5} = 7, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases} & 4) \begin{cases} x + y + xy = -19, \\ xy(x + y) = -20. \end{cases}
 \end{array}$$

Самостоятельная работа № 15**Неравенства с двумя переменными**

Постройте график неравенства:

$$\begin{array}{l}
 1) y \geq x^2 + x - 2; \\
 2) xy < 6; \\
 3) (2x + y + 1)(x - y + 3) > 0; \\
 4) \frac{y + \frac{1}{2}x^2}{|y + 2|} > 0.
 \end{array}$$

Самостоятельная работа № 16**Системы неравенств с двумя переменными**

- Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5, \\ xy > -2. \end{cases}$
- Изобразите график неравенства:
 - $|x + 3y| < 2;$
 - $\sqrt{x + 3y} < \sqrt{x - 2y + 2}.$
- Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\max \{-2x, 1\} = y + 3.$

Самостоятельная работа № 17**Основные методы доказательства неравенств**

1. Докажите неравенство:

1) $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$;

2) $x^2y^2 + x^2 + 9y^2 + 1 \geq 8xy$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+5)} < \frac{1}{5}$, где $n \in \mathbb{N}$;

4) $16a^2 + 9b^2 + 1 \geq 12ab - 3b - 4a$.

2. Известно, что $x \in [0; 3]$, $y \in [0; 3]$, $z \in [0; 3]$. Докажите неравенство $\frac{x}{6+y} + \frac{y}{6+z} + \frac{z}{6+x} \leq 1$.

Самостоятельная работа № 18**Неравенства между средними величинами.****Неравенство Коши — Буняковского**

1. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a}{20b} + \frac{125b}{a} \geq 5$.

2. При $y > 7$ докажите неравенство $y + \frac{1}{y-7} \geq 9$.

3. Известно, что $a^2 + b^2 = 5$, $c^2 + d^2 = 20$. Докажите, что $|ac + bd| \leq 10$.

4. Известно, что $x + y = 2$. Докажите, что $\sqrt{x^2 + 16y^2} + \sqrt{y^2 + 16x^2} \geq 5\sqrt{2}$.

Самостоятельная работа № 19**Математическое моделирование**

1. От двух станций, расстояние между которыми равно 450 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 5 ч. Найдите скорость каждого поезда, если один из них потратил на путь между станциями на 2 ч 15 мин больше, чем другой.
2. Два экскаватора, работая одновременно, могут вырыть котлован за 4 ч 48 мин. Если же сначала первый экска-

ватор выроет самостоятельно $\frac{1}{4}$ котлована, а затем второй — оставшуюся часть котлована, то вся работа будет выполнена за 9 ч. За сколько часов может вырыть котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?

3. В двух сплавах массы золота и меди относятся как 7 : 1 и 5 : 3 соответственно. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 32 кг нового сплава, в котором массы золота и меди относятся как 11 : 5?

Самостоятельная работа № 20

Процентные расчёты

1. После двух последовательных снижений цены на 30% комнатные тапочки стали стоить 784 р. Найдите первоначальную цену тапочек.
2. Морская вода содержит 8% соли. Сколько пресной воды надо добавить к 60 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 5%?
3. Банк выдал предпринимателю кредит в сумме 500 000 р. на 2 года под некоторый процент годовых. Через год банковская ставка была уменьшена на 2%. В конце второго года предприниматель вернул банку 708 000 р. Под какой процент был выдан кредит в первый год?

Самостоятельная работа № 21

Абсолютная и относительная погрешности

1. Запишите в виде двойного неравенства:
 - 1) $x = 18 \pm 0,5$;
 - 2) $x = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{6}$;
 - 3) $x = 20,6 \pm 5$.
2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{1}{9}$ числом:
 - 1) 0,11;
 - 2) 0,111.

3. В справочнике указано, что плотность хлора равна $3,124 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$. С какой точностью указано приближённое значение плотности хлора?
4. В справочнике указано, что масса атома серебра равна $1,79 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$. Оцените относительную погрешность этого приближения.

Самостоятельная работа № 22

Метод математической индукции

1. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n выполняется равенство $1 + 7 + 13 + \dots + 6n - 5 = n(3n - 2)$.
2. Докажите неравенство $6^n > 5n + 4$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
3. Докажите, что для любого натурального n значение выражения $(29^n + 68 \cdot 6^n)$ кратно 23.

Самостоятельная работа № 23

Основные правила комбинаторики. Перестановки

1. Сколькими способами можно рассадить 15 человек в ряду, содержащем 15 мест?
2. Сколько восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
3. Сколько чётных семизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?
4. В школьных соревнованиях по лёгкой атлетике участвуют 7 девятиклассников, 6 десятиклассников и 9 одиннадцатиклассников. Сколькими способами можно построить в шеренгу участников соревнований так, чтобы все девятиклассники стояли рядом, все десятиклассники стояли рядом и все одиннадцатиклассники стояли рядом?

Самостоятельная работа № 24

Размещения

1. В легкоатлетическом кроссе участвует 10 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться первое, второе, третье и четвёртое места?
2. Решите в натуральных числах уравнение:

$$1) A_{x+4}^2 = 132; \quad 2) \frac{P_{x+5}}{A_{x+2}^2 \cdot P_x} = 720.$$

3. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы цифры не повторялись, а вторая и третья цифры были нечётными?

Самостоятельная работа № 25

Сочетания

1. Упростите выражение $\frac{10}{n+7} C_{n+7}^{n+5}$.
2. Решите в натуральных числах уравнение $A_{x+3}^2 + C_{x+6}^{x+4} = 48$.
3. У Саши есть 12 различных фломастеров и 9 различных карандашей. Сколькими способами он может сформировать набор, состоящий из 4 фломастеров и 2 карандашей?
4. В цехе работает 19 человек. Сколькими способами можно сформировать бригаду из 8 человек, если Иван Николаевич и Николай Иванович не могут входить в бригаду одновременно?

Самостоятельная работа № 26

Частота и вероятность случайного события

1. При бросании игрального кубика вероятность выпадения шестерки равна $\frac{1}{6}$. Может ли быть так, что в серии из 140 бросаний кубика шестёрка выпадет 50 раз?

- По результатам опроса 600 жителей города N выяснилось, что 120 человек не пользуются компьютерами. Оцените вероятность того, что наугад выбранный житель города N не пользуется компьютером.

Самостоятельная работа № 27

Классическое определение вероятности

- Из натуральных чисел от 1 до 24 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 24?
- В коробке лежат 40 зелёных шаров и несколько синих. Сколько синих шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется синим, равна $\frac{2}{7}$?
- Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер с первой попытки, если абонент помнит только, что одна из двух последних цифр меньше другой на 4?

Самостоятельная работа № 28

Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики

- В классе учится 28 человек, из которых 6 — отличники. Какова вероятность того, что выбранные наугад 3 ученика класса окажутся отличниками?
- На полке стоят 10 книг по математике, 8 книг по физике и 5 книг по биологии. Наугад выбирают 11 книг. Какова вероятность того, что среди выбранных книг окажутся 6 книг по математике, 3 книги по физике и 2 книги по биологии?
- Наугад выбирают 4 буквы из слова «СТЕКЛО». Какова вероятность того, что из выбранных четырёх букв можно составить слово «СЕЛО»?

Самостоятельная работа № 29

Числовые последовательности

1. Найдите три первых члена последовательности (a_n) , если $a_1 = 5$, $a_{n+1} = -3a_n + 2$.
2. Последовательность (b_n) задана формулой n -го члена $b_n = 7n + 1$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 36; 2) 41? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
3. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = n^2 - 6n + 2$. Найдите количество членов этой последовательности, которые меньше числа 18.
4. Найдите все такие значения a , при которых последовательность, заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 5$, является стационарной.

Самостоятельная работа № 30

Арифметическая прогрессия

1. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 2; 1,8; 1,6; ...
2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_3 + a_5 = -2$ и $a_7 + a_{10} = 4$.
3. При каком значении y значения выражений $y^2 + 2$, $4y + 2$, $3y + 6$ и $y^2 - 4y + 18$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

Самостоятельная работа № 31

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = 3n - 1$. Найдите сумму сорока семи первых членов прогрессии.
2. Для любого натурального значения n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 5n^2 - 3n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

3. Пятнадцатый член арифметической прогрессии равен 21. Найдите сумму двадцати девяти первых членов прогрессии.

Самостоятельная работа № 32

Геометрическая прогрессия

1. Между числами 81 и 256 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию. Запишите полученную прогрессию.
2. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_6 = 4b_4$ и $b_2 + b_5 = 108$.
3. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 1 и 4, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Самостоятельная работа № 33

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n -го члена $b_n = 5 \cdot 2^{n+1}$. Найдите сумму семи первых членов прогрессии.
2. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна 1 248. Найдите n , если первый член прогрессии равен 8, а знаменатель прогрессии равен 5.
3. Для любого натурального n сумму n первых членов некоторой последовательности можно вычислить по формуле $S_n = 3(4^n - 1)$. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Самостоятельная работа № 34

Представление о пределе последовательности.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:
 - 1) $-96, 24, -6, \dots$;
 - 2) $15, 5\sqrt{3}, 5, \dots$.

2. Запишите в виде обыкновенной дроби число:

1) $0,444\dots$; 2) $3,7(32)$.

3. В бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q , где $|q| < 1$, сумма членов с нечётными номерами равна 45, а сумма членов с чётными номерами равна 9. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Самостоятельная работа № 35

Суммирование

1. Найдите сумму $\frac{6}{5} + \frac{51}{25} + \frac{376}{125} + \dots + \frac{5^n \cdot n + 1}{5^n}$.

- ## 2. Найдите сумму

$$\left(5 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(5^2 + \frac{1}{5^2}\right)^2 + \left(5^3 + \frac{1}{5^3}\right)^2 + \dots + \left(5^n + \frac{1}{5^n}\right)^2.$$

3. Найдите сумму

$$\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 23} + \dots + \frac{1}{(6n-1) \cdot (6n+5)}.$$

Самостоятельная работа № 1**Функция**

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{x^2 - x - 12}.$$

2. Найдите область значений функции:

1) $y = 1 - \frac{x^9}{x}$; 2) $y = \frac{x-6}{x^2}.$

3. Даны функции $f(x) = 2x + 3$ и $g(x) = x^2 - 4$. Задайте формулой функцию: 1) $g(3x)$; 2) $f(g(x))$.

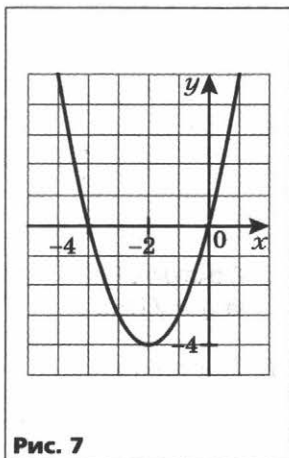
4. Постройте график функции $y = \frac{15-3x}{x^2-5x}.$

5. Известно, что $D(f) = [-5; 2]$. Найдите область определения функции $y = f(x-3)$.

Самостоятельная работа № 2**Возрастание и убывание функции.****Наибольшее и наименьшее значения функции**

1. На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

- 1) нули функции;
- 2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
- 3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- 4) $\min_R f(x)$; $\max_R f(x)$;
- 5) $\min_{[-4;-3]} f(x)$; $\max_{[-4;-3]} f(x)$.

**Рис. 7**

2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{5}{x+3}$ убывает на промежутке $(-\infty; -3)$.
3. Найдите $\min_{D(f)} f(x)$ и $\max_{D(f)} f(x)$, если $f(x) = 5 - \sqrt{16 - x^2}$.
4. Убывающая функция f определена на множестве \mathbf{R} . Возрастающей или убывающей является функция $f(g(x))$, если $g(x) = 2x - 5$?
5. Решите уравнение $x^3 + 5\sqrt{3x+10} = 2$.

Самостоятельная работа № 3

Чётные и нечётные функции

1. Функция f чётная. Может ли выполняться равенство $f(1) \cdot f(-1) = -1$?
2. Исследуйте на чётность функцию:

$$1) y = \frac{x^7 - 2x^6}{x - 2};$$

$$2) y = x^5 + 3x^2;$$

$$3) y = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}.$$

3. Известно, что $\min_{[-6;-4]} f(x) = 2$, $\max_{[-6;-4]} f(x) = 7$. Найдите

$\min_{[4;6]} f(x)$ и $\max_{[4;6]} f(x)$, если:

1) f — чётная функция;

2) f — нечётная функция.

4. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - ax^2 + a^2 - 2a - 8 = 0$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 4

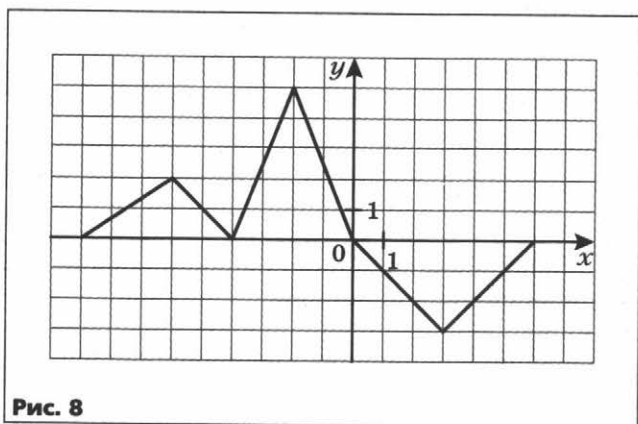
Построение графиков функций $y = kf(x)$

и $y = f(kx)$

1. Известно, что точка $F(4; 2)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a .

2. На рисунке 8 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$.



3. Число -6 является нулём убывающей функции f . Решите уравнение $f(2x) = 0$.
4. Постройте график функции: 1) $y = \frac{1}{4}x^2$; 2) $y = \sqrt{-5x}$.

Самостоятельная работа № 5

**Построение графиков функций $y = f(x) + b$
и $y = f(x + a)$**

1. Каковы координаты вершины параболы:
- 1) $y = x^2 - 9$;
 - 2) $y = (x + 6)^2$;
 - 3) $y = (x - 5)^2 - 7$?
2. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, построьте график функции:
- 1) $y = \sqrt{x} - 3$;
 - 2) $y = 4 + \sqrt{x - 2}$.
3. Постройте график функции $y = \frac{4x}{x + 3}$.
4. Сколько корней имеет уравнение $|x - 2| = a - x^2$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 6**Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$**

1. Постройте график функции:

- 1) $y = |\sqrt{x} - 6|$; 3) $y = \sqrt{|x - 6|}$;
 2) $y = \sqrt{|x| - 6}$; 4) $y = \sqrt{|x - 6| - 6}$.

2. Функция f такова, что $D(f) = [-4; 2)$ и $E(f) = [-8; 2)$.
 Найдите область определения и область значений функции $|f(|x|)|$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x| - 2| = a - x$ имеет три корня?

Самостоятельная работа № 7**Квадратичная функция, её график и свойства**

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Используя график, найдите:
- 1) область значений функции;
 - 2) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - 3) множество решений неравенства: а) $f(x) \geq 0$; б) $f(x) < 0$;
 - 4) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке: а) $[-5; 2]$; б) $[3; 5]$.
2. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$, $c < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$.
3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + 2ax + a^2 + 4a + 16 = 0$ принимает наименьшее значение?

Самостоятельная работа № 8**Решение квадратных неравенств**

1. Решите неравенство:

- 1) $x^2 - 4x - 96 > 0$;
 2) $-4x^2 + 3x - 5 > 0$;
 3) $49x^2 + 14x + 1 > 0$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 + x - 42}} + \sqrt{40 - 5x}.$$

3. Решите неравенство $|x^2 - 10| > x + 10$.

4. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 2ax + a - 9 > 0$ не имеет решений?

Самостоятельная работа № 9

Решение неравенств методом интервалов

1. Решите неравенство:

1) $(x + 12)(x - 4)(x - 20) > 0$;

2) $(4x - 5)^9(x + 1)(11 - x)^6 > 0$;

3) $\frac{8x}{x^2 - 6x + 5} + \frac{2}{x - 1} \geq \frac{4}{x - 5}$;

4) $(x^2 - 81)\sqrt{x^2 - 49} \geq 0$.

2. Найдите множество решений неравенства $|x - a|(2x^2 + x - 3) \leq 0$ в зависимости от значения параметра a .

Самостоятельная работа № 10

Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки

1. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 - (6a - 5)x - 30a = 0$ принадлежат промежутку $(-6; 1)$?

2. Найдите все значения параметра a , при которых один из корней квадратного уравнения $ax^2 - x + 5 = 0$ больше -2 , а другой меньше -2 .

3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (2a + 6)x + a^2 - 6a + 8 = 0$ являются отрицательными числами?

Самостоятельная работа № 11

Уравнение с двумя переменными и его график

1. Постройте график уравнения:

1) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$;

2) $x^2 - 16y^2 = 0$;

$$3) |y + 2| = \sqrt{x};$$

$$4) \frac{x^2 + y^2 - 9}{y^2 - 4} = 0.$$

2. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 5)(y^2 + 6y + 11) = 8$.

Самостоятельная работа № 12

Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

1. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$

2. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} |y| = -x, \\ y = x^2 + 4x - 1. \end{cases}$

3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} ax + 5y = 20 - a, \\ 20x + ay = 20 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a ?

Самостоятельная работа № 13

Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y + 4x = 6, \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 2)(y - 4) = 0, \\ x^2 + y^2 - xy = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 7xy = -6, \\ 9y^2 - xy = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3y^3 - x^2y^4 = -54, \\ x^4y^2 - x^3y^3 = -18. \end{cases}$

Самостоятельная работа № 14**Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными**

Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ 3x - 2y = 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 32; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{y^2 - 8} = 6, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - y - xy = 17, \\ xy(x - y) = -70. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 15**Неравенства с двумя переменными**

Постройте график неравенства:

$$1) y \leq -x^2 + x + 6;$$

$$2) xy > 8;$$

$$3) (3x - y - 2)(x + y - 4) < 0;$$

$$4) \frac{y - \frac{1}{2}x^2}{|y - 2|} < 0.$$

Самостоятельная работа № 16**Системы неравенств с двумя переменными**

- Изобразите на координатной плоскости xu множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 > 13, \\ xy \leq 6. \end{cases}$
- Изобразите график неравенства:
 - $|x + 3y| > 3;$
 - $\sqrt{x - 2y + 3} < \sqrt{x + 3y}.$
- Изобразите на координатной плоскости xu множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $\min \{-3y, 2\} = x - 4.$

Самостоятельная работа № 17

Основные методы доказательства неравенств

1. Докажите неравенство:
 - 1) $25x^2 - 10xy + 2y^2 \geq 0$;
 - 2) $c^2d^2 + c^2 + 4d^2 + 16 \geq 12cd$;
 - 3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} < \frac{1}{2}$, где $n \in N$;
 - 4) $9c^2 + 4d^2 + 1 \geq 6cd - 3c - 2d$.
2. Известно, что $a \in [0; 4]$, $b \in [0; 4]$, $c \in [0; 4]$. Докажите неравенство $\frac{a}{8+b} + \frac{b}{8+c} + \frac{c}{8+a} \leq 1$.

Самостоятельная работа № 18

Неравенства между средними величинами.

Неравенство Коши—Буняковского

1. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $\frac{18x}{y} + \frac{y}{8x} \geq 3$.
2. При $b > 5$ докажите неравенство $b + \frac{1}{b-5} \geq 7$.
3. Известно, что $a^2 + b^2 = 28$, $c^2 + d^2 = 7$. Докажите, что $|ac - bd| \leq 14$.
4. Известно, что $x + y = 1$. Докажите, что $\sqrt{x^2 + 25y^2} + \sqrt{y^2 + 25x^2} \geq 3\sqrt{2}$.

Самостоятельная работа № 19

Математическое моделирование

1. Из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 21 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились через 3 ч. Найдите скорость каждого туриста, если один из них потратил на весь путь на 1 ч 45 мин меньше, чем другой.
2. Два маляра, работая одновременно, могут покрасить фасад здания за 3 ч 36 мин. Если же сначала первый маляр

покрасит самостоятельно $\frac{2}{3}$ фасада, а затем второй — оставшуюся часть фасада, то весь фасад будет покрашен за 7 ч. За сколько часов может покрасить фасад здания каждый маляр, работая самостоятельно?

3. В двух сплавах массы меди и никеля относятся как 2 : 7 и 5 : 4 соответственно. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 54 кг нового сплава, в котором массы меди и никеля относятся как 4 : 5?

Самостоятельная работа № 20

Процентные расчёты

1. После двух последовательных повышений цены на 20% стол стал стоить 2160 р. Найдите первоначальную цену стола.
2. Сплав меди и олова массой 60 кг содержит 35% олова. Сколько олова надо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40% олова?
3. Вкладчик положил в банк 50 000 р. За первый год ему был начислен некоторый процент годовых, а во второй год банковская ставка была увеличена на 3%. В конце второго года на счёте оказалось 67 850 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

Самостоятельная работа № 21

Абсолютная и относительная погрешности

1. Запишите в виде двойного неравенства:
 - 1) $x = 11 \pm 0,1$;
 - 2) $x = \frac{5}{7} \pm \frac{1}{8}$;
 - 3) $x = 26,1 \pm 6$.
2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{1}{11}$ числом:
 - 1) 0,09;
 - 2) 0,091.

- В справочнике указано, что плотность газообразного гелия при комнатной температуре равна $0,178 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$. С какой точностью указано приближённое значение плотности гелия?
- В справочнике указано, что масса атома фосфора равна $5,14 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$. Оцените относительную погрешность этого приближения.

Самостоятельная работа № 22

Метод математической индукции

- Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n выполняется равенство $1 + 9 + 17 + \dots + 8n - 7 = n(4n - 3)$.
- Докажите неравенство $7^n > 6n + 5$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- Докажите, что для любого натурального n значение выражения $(24^n + 25 \cdot 11^n)$ кратно 13.

Самостоятельная работа № 23

Основные правила комбинаторики. Перестановки

- Сколькими способами можно распределить 11 водителей по 11 автомобилям?
- Сколько семизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
- Сколько нечётных семизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?
- В магазине есть 9 различных фарфоровых ваз, 5 различных хрустальных ваз и 7 различных керамических ваз. Сколькими способами их можно расставить на полке так, чтобы все фарфоровые вазы стояли рядом, все хрустальные вазы стояли рядом и все керамические вазы стояли рядом?

Самостоятельная работа № 24**Размещения**

1. В соревнованиях по толканию ядра участвует 7 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться первое, второе, третье, четвёртое и пятое места?
2. Решите в натуральных числах уравнение:

$$1) A_{x+6}^2 = 210; \quad 2) \frac{P_{x+7}}{A_{x+4}^8 \cdot P_{x-4}} = 990.$$

3. Сколько различных семизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы цифры не повторялись, а вторая и пятая цифры были чётными?

Самостоятельная работа № 25**Сочетания**

1. Упростите выражение $\frac{16}{n+8} C_{n+9}^{n+7}$.
2. Решите в натуральных числах уравнение $A_{x+4}^2 + C_{x+7}^{x+5} = 111$.
3. Оркестру требуются скрипачи и флейтисты. На место скрипача претендуют 9 кандидатов, на место флейтиста — 7 кандидатов. Сколько существует вариантов приема в оркестр 4 скрипачей и 3 флейтистов?
4. В шахматном кружке занимается 15 человек. Из них нужно сформировать команду из 6 человек, причём Саша и Вова не могут входить в команду одновременно. Сколькими способами это можно сделать?

Самостоятельная работа № 26**Частота и вероятность случайного события**

1. При подбрасывании монеты вероятность выпадения числа равна 0,5. Может ли быть так, что в серии из 190 подбрасываний число выпадет 40 раз?

2. По результатам опроса 800 жителей города N выяснилось, что 500 человек являются футбольными болельщиками. Оцените вероятность того, что наугад выбранный житель города N является футбольным болельщиком.

Самостоятельная работа № 27

Классическое определение вероятности

1. Из натуральных чисел от 1 до 28 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 28?
2. В коробке лежат 36 белых шаров и несколько красных. Сколько красных шаров в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется красным, равна $\frac{5}{11}$?
3. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наугад. Какова вероятность правильно набрать номер с первой попытки, если абонент помнит только, что одна из двух последних цифр больше другой на 5?

Самостоятельная работа № 28

Вычисление вероятностей с помощью правил комбинаторики

1. В классе учится 30 человек, из которых 14 — девочки. Какова вероятность того, что выбранные наугад 4 ученика класса окажутся девочками?
2. Для ремонта купили 12 банок белой краски, 7 банок голубой краски и 4 банки коричневой краски. Наугад выбирают 12 банок краски. Какова вероятность того, что среди выбранных банок будут 5 банок белой краски, 4 банки голубой краски и 3 банки коричневой краски?
3. Наугад выбирают 4 буквы из слова «ПЕРЕВОЗЧИК». Какова вероятность того, что из выбранных четырёх букв можно составить слово «ПЕРО»?

Самостоятельная работа № 29

Числовые последовательности

1. Найдите три первых члена последовательности (a_n) , если $a_1 = 4$, $a_{n+1} = -2a_n + 4$.
2. Последовательность (c_n) задана формулой n -го члена $c_n = 3 - 8n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 53; 2) 75? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.
3. Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = -n^2 + 3n - 4$. Найдите количество членов этой последовательности, которые больше числа -22 .
4. Найдите все такие значения a , при которых последовательность, заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 4$, является стационарной.

Самостоятельная работа № 30

Арифметическая прогрессия

1. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $-4, 8; -4, 4; -4; \dots$.
2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_5 + a_8 = 29$ и $a_7 + a_{11} = 44$.
3. При каком значении a значения выражений $a^2 + 1$, $2a + 3$, $3a - 1$ и $a^2 - 2a + 4$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите эти члены прогрессии.

Самостоятельная работа № 31

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = -4n + 2$. Найдите сумму двадцати пяти первых членов прогрессии.
2. Для любого натурального значения n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно

вычислить по формуле $S_n = 2n^2 + 3n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

3. Четырнадцатый член арифметической прогрессии равен 18. Найдите сумму двадцати семи первых членов прогрессии.

Самостоятельная работа № 32

Геометрическая прогрессия

1. Между числами 625 и 81 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию. Запишите полученную прогрессию.
2. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_{12} = 36b_{10}$ и $b_3 + b_6 = -252$.
3. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 24. Если первое число оставить без изменений, а из второго и третьего чисел вычесть соответственно 2 и 3, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Самостоятельная работа № 33

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n -го члена $b_n = 18 \cdot 3^{n-3}$. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.
2. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна -99 . Найдите n , если первый член прогрессии равен -9 , а знаменатель прогрессии равен -2 .
3. Для любого натурального n сумму n первых членов некоторой последовательности можно вычислить по формуле $S_n = 2(6^n - 1)$. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией.

Самостоятельная работа № 34

**Представление о пределе последовательности.
Сумма бесконечной геометрической прогрессии,
у которой модуль знаменателя меньше единицы**

- Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:
1) $-72, 24, -8, \dots$;
2) $12, 6\sqrt{2}, 2, \dots$.
- Запишите в виде обыкновенной дроби число:
1) $0,333\dots$; 2) $4,2(41)$.
- В бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q , где $|q| < 1$, сумма членов с нечётными номерами равна 24, а сумма членов с чётными номерами равна -8 . Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Самостоятельная работа № 35

Суммирование

- Найдите сумму $\frac{5}{6} + \frac{71}{36} + \frac{647}{216} + \dots + \frac{6^n \cdot n - 1}{6^n}$.
- Найдите сумму $\left(4 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(4^2 - \frac{1}{4^2}\right)^2 + \left(4^3 - \frac{1}{4^3}\right)^2 + \dots + \left(4^n - \frac{1}{4^n}\right)^2$.
- Найдите сумму $\frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)}$.

Контрольные работы

Вариант 1

Контрольная работа № 1

Квадратичная функция

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{3}{x^2 - x - 12}.$$

2. Найдите область значений функции $y = \frac{2x-10}{x^2}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = 2x - x^5$;

2) $y = \frac{x^6 - 2x^5}{2 - x}$;

3) $y = \frac{|x-1|}{(2x+3)^2} + \frac{|x+1|}{(2x-3)^2}$.

4. Постройте график функции $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток убывания функции;

3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

5. Постройте график функции:

1) $y = |2 - \sqrt{x}|$;

2) $y = \sqrt{2-x}$;

3) $y = \sqrt{2-3x}$.

6. Решите уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} = \frac{12}{x}$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (x^2 + 2x)^2 + 4(x^2 + 2x) + 5.$$

Контрольная работа № 2**Решение квадратных неравенств.****Решение неравенств методом интервалов.****Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки****1. Решите неравенство:**

1) $9x^2 - 10x + 1 \geq 0;$

2) $16x^2 - 8x + 1 \leq 0;$

3) $-3x^2 + 2x - 7 < 0.$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{14 + 5x - x^2}}{x^2 + x - 6}.$$

3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 > 0, \\ |x - 1| \leq 4. \end{cases}$$
4. Решите неравенство:

1) $(x + 11)(x - 3)(x + 4) < 0;$

2) $(x + 1)(5 - x)(x + 4)^2 \geq 0;$

3) $\frac{x}{x+1} - \frac{3}{x-3} + \frac{6x-1}{x^2-2x-3} \geq 0.$

5. Решите неравенство:

1) $|x^2 + 3x + 1| < 2x + 3;$

2) $|x^2 + 2x - 10| > 4 - 3x.$

6. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 - 4ax + 4a^2 - a - 10 = 0$ меньше 1?

Контрольная работа № 3**Уравнения с двумя переменными и их системы**

1. Решите уравнение $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$.

2. Постройте график уравнения $|y - x^2| = |x^2 - 2|$.

3. Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 3x^2 + 5xy = -2; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3xy - 2 = \frac{x^3}{y}, \\ 2xy - 1 = \frac{y^3}{x}; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3, \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = 1. \end{cases}$$

4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 16, \\ y - 2|x| + 3 = 0 \end{cases} \text{ имеет три решения?}$$

Контрольная работа № 4

Неравенства с двумя переменными и их системы.
Доказательство неравенств

1. Изобразите график неравенства:

1) $x - 4y \geq 8$;

2) $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$.

2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |x| < 2, \\ y > 3. \end{cases}$$

3. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 9.

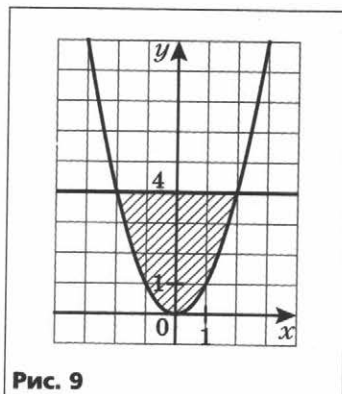


Рис. 9

4. Докажите неравенство $x^2 + 9y^4 + 1 \geq -3xy^2 - x + 3y^2$.
5. Известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $2a + 3b = 12$. Найдите наибольшее значение выражения ab .
6. При каких значениях параметра a система неравенств
- $$\begin{cases} x^2 - 2x - a + 3 \leq 0, \\ a - x \leq 3 \end{cases}$$
- имеет решение?
7. Докажите неравенство $\sqrt{1 + 3x} + \sqrt{6 - 2x} + \sqrt{5 - x} \leq 6$.

Контрольная работа № 5**Элементы прикладной математики**

1. Вкладчик положил в банк 40 000 р. под 7% годовых. Сколько денег будет на его счёте через 2 года?
2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{3}{7}$ числом 0,43.
3. Цену товара сначала повысили на 20%, а затем снизили на 40%. Как и на сколько процентов изменилась первоначальная цена вследствие этих двух переоценок?
4. Из двух сёл, расстояние между которыми равно 16 км, отправились одновременно навстречу друг другу пешеход и велосипедист и встретились через 1 ч. Найдите скорость каждого из них, если велосипедист потратил на весь путь на 2 ч 40 мин меньше, чем пешеход.
5. Два экскаватора, работая вместе, могут вырыть котлован за 12 ч. Если сначала первый экскаватор выполнит $\frac{1}{3}$ всей работы, а потом второй экскаватор — оставшуюся часть работы, то котлован будет вырыт за 30 ч. За сколько часов может вырыть котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?
6. Группа из 32 туристов расположилась на стоянке в двухместных, трёхместных и шестиместных палатках. Известно, что трёхместных палаток было меньше, чем шестиместных, а шестиместных палаток меньше, чем двухместных. Сколько было палаток каждого вида?

Контрольная работа № 6**Элементы комбинаторики и теории вероятностей**

1. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{3P_{12} - P_{11}}{7P_{10}}; \quad 2) \frac{A_5^2}{C_6^3}.$$

2. В коробке лежат шары, из которых девять — синие, а остальные — зелёные. Сколько в коробке зелёных шаров, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется зелёным, равна $\frac{4}{7}$?
3. Сколько чётных четырёхзначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 7 и 9?
4. Найдите все натуральные значения n , при которых выполняется неравенство $2^n \geq 3n - 1$.
5. В 9«А» классе учится 25 человек, а в 9«Б» — 28 человек. Сколько существует способов сформировать команду из 10 человек для участия в соревнованиях по лёгкой атлетике, если из каждого класса нужно выбрать по 5 человек?
6. Из натуральных чисел от 1 до 32 включительно наугад выбирают шесть чисел. Какова вероятность того, что среди выбранных чисел не более двух окажутся кратными числу 3?

Контрольная работа № 7**Числовые последовательности**

1. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 6,3; 5,9; 5,5;
2. Первый и четвёртый члены геометрической прогрессии соответственно равны 2,5 и 20. Найдите сумму восьми первых членов этой прогрессии.
3. При каком значении x значения выражений $2x + 6$, $x + 7$ и $x + 4$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 27, а сумма трёх её первых членов равна 35. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.
5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6, которые больше 100 и меньше 200.
6. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_2 = 10$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$. Докажите, что $a_n = 3^n + 1$.
7. Найдите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{16}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{116} + \sqrt{121}}.$$

Контрольная работа № 8**Итоговая**

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 6x$. Используя график, найдите:
 - 1) область значений функции;
 - 2) промежутки убывания функции;
 - 3) множество решений неравенства $f(x) > -8$.
2. Решите неравенство $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - xy = -8, \\ y^2 - xy = 24. \end{cases}$$
4. Двое трактористов, работая вместе, могут вспахать поле за 4 дня. Если первый тракторист вспашет $\frac{1}{3}$ поля, а затем его заменит второй, то всё поле будет вспахано за 10 дней. За сколько дней может вспахать поле каждый тракторист, работая самостоятельно?
5. Постройте график неравенства $|y|(x - 5) \leq 0$.
6. На четырёх карточках записаны числа 5, 6, 7 и 8. Какова вероятность того, что сумма чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, будет нечётным числом?
7. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то
$$\left(9 + \frac{1}{a}\right)\left(25 + \frac{1}{b}\right)(1 + 4ab) \geq 240.$$
8. При каких значениях параметра a неравенство $(a - 4)x^2 + (8 - 2a)x + 5 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

Вариант 2**Контрольная работа № 1****Квадратичная функция**

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{3-7x} + \frac{1}{x^2 - 2x - 15}.$$

2. Найдите область значений функции $y = \frac{4x-12}{x^2}$.

3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = 3x^2 - x^4$;

2) $y = \frac{x^7 - 3x^6}{3-x}$;

3) $y = \frac{|x+2|}{(4x-1)^2} - \frac{|x-2|}{(4x+1)^2}$.

4. Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 2x + 8$. Используя график, найдите:

1) область значений функции;

2) промежутки возрастания функции;

3) множество решений неравенства $f(x) < 0$.

5. Постройте график функции:

1) $y = |3 - \sqrt{x}|$;

2) $y = \sqrt{3-x}$;

3) $y = \sqrt{3-2x}$.

6. Решите уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = \frac{16}{x}$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x) + 10.$$

Контрольная работа № 2**Решение квадратных неравенств.****Решение неравенств методом интервалов.****Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки****1. Решите неравенство:**

1) $8x^2 - 9x + 1 \leq 0$;

2) $25x^2 + 10x + 1 > 0$;

3) $-5x^2 + 4x - 9 < 0$.

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{15 + 2x - x^2}}{x^2 + 3x - 4}.$$

3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0, \\ |x - 2| \leq 5. \end{cases}$$
4. Решите неравенство:

1) $(x + 9)(x - 2)(x + 1) < 0$;

2) $(x + 3)(1 - x)(x + 6)^2 \geq 0$;

3) $\frac{x}{x+2} - \frac{4}{x-5} + \frac{9x-1}{x^2-3x-10} \leq 0$.

5. Решите неравенство:

1) $|x^2 - 12x + 25| < 3x - 11$;

2) $|x^2 + 5x + 1| > 2x + 5$.

6. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a - 10 = 0$ больше 2?

Контрольная работа № 3**Уравнения с двумя переменными и их системы**

1. Решите уравнение $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 34 = 0$.

2. Постройте график уравнения $|y + x^2| = |x^2 - 4|$.

3. Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2xy - y^2 = -8; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3xy + 2 = \frac{y^3}{x}, \\ 2xy + 1 = \frac{x^3}{y}; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 4, \\ x^2 + 3xy + 3y^2 = 1. \end{cases}$$

4. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 9, \\ y + 3|x| - 2 = 0 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

Контрольная работа № 4

Неравенства с двумя переменными и их системы.
Доказательство неравенств

1. Изобразите график неравенства:

1) $y - 3x \geq 6$;

2) $x^2 + (y + 1)^2 \leq 9$.

2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |y| < 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

3. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 10.

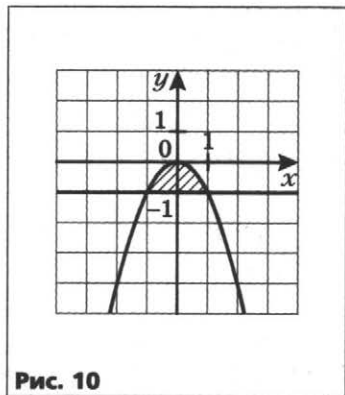


Рис. 10

4. Докажите неравенство $x^4 + 4y^2 + 9 \geq -2x^2y + 3x^2 - 6y$.
5. Известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $3a + 5b = 30$. Найдите наибольшее значение выражения ab .
6. При каких значениях параметра a система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 4x - a + 5 \leq 0, \\ a - x \leq 5 \end{cases}$$
 имеет решение?
7. Докажите неравенство $\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{6 + 2x} + \sqrt{5 + x} \leq 6$.

Контрольная работа № 5

Элементы прикладной математики

1. Вкладчик положил в банк 60 000 р. под 8% годовых. Сколько денег будет на его счёте через 2 года?
2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ числом 0,67.
3. Цену товара сначала снизили на 20%, а затем повысили на 30%. Как и на сколько процентов изменилась первоначальная цена вследствие этих двух переоценок?
4. От станции *A* в направлении станции *B*, расстояние между которыми равно 240 км, отправились одновременно два поезда. Первый поезд прибыл на станцию *B* на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого поезда, если второй за 2 ч проходит на 40 км больше, чем первый — за 1 ч.
5. Две строительные бригады, работая одновременно, могут заасфальтировать дорогу за 24 ч. Если первая бригада заасфальтирует самостоятельно $\frac{1}{4}$ часть дороги, а затем вторая — оставшуюся часть дороги, то вся работа будет выполнена за 45 ч. За сколько часов может заасфальтировать эту дорогу каждая бригада, работая самостоятельно?
6. В магазин завезли 54 кг муки, расфасованные в пакеты по 4 кг, 5 кг и 8 кг. Известно, что пятикилограммовых пакетов было меньше, чем восьмикилограммовых, а восьмикилограммовых пакетов меньше, чем четырёхкилограммовых. Сколько пакетов каждого вида завезли в магазин?

Контрольная работа № 6**Элементы комбинаторики и теории вероятностей**

1. Найдите значение выражения:

1) $\frac{6P_{11} - P_{10}}{13P_9}$; 2) $\frac{C_7^4}{A_6^3}$.

2. В коробке лежат шары, из которых шестнадцать — белые, а остальные — красные. Сколько в коробке красных шаров, если вероятность того, что выбранный наугад шар окажется красным, равна $\frac{5}{9}$?
3. Сколько нечётных четырёхзначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 5 и 6?
4. Найдите все натуральные значения n , при которых выполняется неравенство $3^n \geq 12n - 9$.
5. В классе учится 14 девочек и 13 мальчиков. Сколько существует способов сформировать команду из 6 человек для участия в спортивной эстафете, если в команде должно быть 3 девочки и 3 мальчика?
6. Из натуральных чисел от 1 до 37 включительно наугад выбирают семь чисел. Какова вероятность того, что среди выбранных чисел не менее двух окажутся кратными числу 4?

Контрольная работа № 7

Числовые последовательности

1. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $-8,1; -7,9; -7,7; \dots$.
2. Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 2 и -64 . Найдите сумму десяти первых членов этой прогрессии.
3. При каком значении x значения выражений $x + 1$, $x + 5$ и $2x + 4$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.
4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 162, а сумма трёх её первых членов равна 156. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.
5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 8, которые больше 50 и меньше 180.
6. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Докажите, что $a_n = 2^n + 1$.
7. Найдите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{22}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{162} + \sqrt{169}}.$$

Контрольная работа № 8**Итоговая**

1. Постройте график функции $f(x) = -x^2 + 6x$. Используя график, найдите:
 - 1) область значений функции;
 - 2) промежуток убывания функции;
 - 3) множество решений неравенства $f(x) < 5$.
2. Решите неравенство $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ xy + y^2 = 3. \end{cases}$$
4. Две строительные бригады, работая вместе, могут заасфальтировать участок трассы за 20 дней. Если первая бригада заасфальтирует $\frac{1}{6}$ часть участка трассы, а затем её заменит вторая, то весь участок трассы будет заасфальтирован за 35 дней. За сколько дней каждая из бригад может заасфальтировать этот участок трассы, работая самостоятельно?
5. Постройте график неравенства $|x|(y - 2) \geq 0$.
6. На четырёх карточках записаны числа 3, 4, 5 и 6. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на двух наугад выбранных карточках, будет кратным числу 3?
7. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то
$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(4 + \frac{1}{b}\right)(1 + 16ab) \geq 64.$$
8. При каких значениях параметра a неравенство $(a - 6)x^2 + (12 - 2a)x + 7 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x ?

Содержание

От авторов	3
Самостоятельные работы	4
Вариант 1	4
Вариант 2	18
Вариант 3	33
Вариант 4	48
Контрольные работы	63
Вариант 1	63
Вариант 2	71

Учебное издание

**Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Рабинович Ефим Михайлович
Якир Михаил Семёнович**

Алгебра

9 класс

Самостоятельные и контрольные работы

**Пособие для учащихся
общеобразовательных организаций**

**Редактор И.В. Савельева
Художественный редактор Н.А. Морозова
Художник Ю.А. Белобородова
Внешнее оформление М.П. Кононова
Вёрстка О.В. Поповой**

**Подписано в печать 04.07.17. Формат 60×84/16
Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная
Печ. л. 6,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 533.**

**ООО Издательский центр «Вентана-Граф»
123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5
Сайт: drofa-ventana.ru**



**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
можно отправлять по электронному адресу: expert@drofa-ventana.ru**

**По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь:
тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@vgf.ru; сайт: drofa-ventana.ru/buy/**

**Отпечатано в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.**