

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

С.А. Козлова, А.Г. Рубин

МАТЕМАТИКА

6 класс • Часть 2



Москва

БАЛСС
2015

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я721
К59

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Совет координаторов предметных линий Образовательной системы «Школа 2100» – лауреат премии Правительства РФ в области образования за теоретическую разработку основ образовательной системы нового поколения и её практическую реализацию в учебниках

На учебник получены положительные заключения по результатам научной экспертизы (заключение РАН от 14.10.2011 № 10106-5215/610), педагогической экспертизы (заключение РАН от 24.01.2014 № 000363) и общественной экспертизы (заключение НП «Лига образования» от 30.01.2014 № 170)

Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

К59 Козлова, С.А.
Математика. 6 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. В 2 ч. Ч. 2 / С.А. Козлова, А.Г. Рубин. – Изд. 2-е. – М. : Баласс, 2015. – 208 с. : ил. (Образовательная система «Школа 2100»).

ISBN 978-5-85939-983-3

ISBN 978-5-85939-877-5 (ч. 2)

Учебник «Математика» для 6 класса соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Учебник ориентирован на развитие мышления, творческих способностей ребёнка, его интереса к математике, функциональной грамотности, вычислительных навыков. В нём рассматриваются элементы стохастики и способы решения некоторых занимательных и нестандартных задач.

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.14я721

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть
скопированы без разрешения владельца авторских прав





ISBN 978-5-85939-983-3
ISBN 978-5-85939-877-5 (ч. 2)

© Козлова С.А., Рубин А.Г., 2010, 2012
© ООО «Баласс», 2010, 2012

КАК РАБОТАТЬ С УЧЕБНИКОМ

Вы продолжаете изучать предмет «Математика». Учебник Образовательной системы «Школа 2100» поможет вам в развитии умений (действий), которые необходимы в жизни.

Напоминаем, что эти умения, или действия (они называются универсальными), развиваются через специальные задания, обозначенные в учебнике кружками и фоном условных знаков разного цвета. Каждый цвет соответствует определённой группе умений:

-  организовывать свои действия: ставить цель, планировать работу, действовать по плану, оценивать результат;
-  работать с информацией: самостоятельно находить, осмысливать и использовать её;
-  общаться и взаимодействовать с другими людьми, владеть устной и письменной речью, понимать других, договариваться, сотрудничать.
-  Так обозначены задания, где нужно применить разные группы умений, мы называем их жизненными задачами и проектами.

Как мы будем учиться?

Для успешного изучения математики и овладения универсальными умениями на уроках открытия нового знания используется проблемный диалог (образовательная технология).

Структура параграфа, где вводится новый материал, имеет в учебнике следующий вид.

Вспоминаем то, что знаем

Так обозначены вопросы, задания и упражнения по изученному материалу, который необходим для открытия нового знания.

Открываем новые знания

Ученики, проводя наблюдения, ищут решение и формулируют свои предположения о том, как решается данная задача, формулируют ответы на поставленные в учебнике вопросы.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Ученики читают, анализируют текст учебника, сопоставляют его со своими предположениями, проверяют правильность своих ответов на вопросы и сделанных на их основании выводов.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности.

Н **Необходимый уровень.** Эти задания должны уметь выполнять все учащиеся. Они помогут вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П **Повышенный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Они требуют более глубокого усвоения учебного материала, для их решения, наряду с использованием уже известных вам приёмов и алгоритмов, может понадобиться создание собственных алгоритмов.

М **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом выполнение всех содержащихся в учебнике заданий ни на каком из уровней не является обязательным! Они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

Структура параграфа, где повторяются и обобщаются знания, имеет в учебнике следующий вид:

Повторяем, обобщаем знания

Так обозначены вопросы, задания и тексты по изученному и обобщаемому материалу.

Развиваем умения

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности, о которых сказано выше.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения



Проблемный вопрос.



Это нужно прочитать и использовать полученную информацию в дальнейшей работе.



Работа в группе (паре).



Задания для домашней работы.



Задания с использованием информационных технологий.



Самостоятельная исследовательская работа.

РАЗДЕЛ III ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Входной тест



- 1 На числовом луче отмечены точки $A(2)$; $B\left(\frac{7}{4}\right)$; $C(1,6)$. Выберите верный рисунок.



1 очко

- 2 Расположите числа $x = 2\frac{5}{19}$; $y = 2,25$; $z = \frac{46}{21}$ в порядке возрастания.

Ответы: а) y, z, x ; б) z, x, y ; в) z, y, x .

1 очко

- 3 Найдите сумму чисел $2\frac{5}{12}$ и $3\frac{11}{16}$.

Ответы: а) $6\frac{5}{48}$; б) $5\frac{47}{48}$; в) $5\frac{4}{7}$.

1 очко

- 4 Найдите значение выражения: $3,14 - 1,807 + 0,2$.

Ответы: а) 1,533; б) 1,353; в) 1,553.

1 очко

- 5 Найдите значение выражения: $1,6 \cdot 9,18 : 0,24$.

Ответы: а) 6,12; б) 61,2; в) 0,612.

1 очко

- 6 Найдите значение выражения: $3\frac{1}{3} : 1\frac{19}{21} \cdot 2\frac{3}{14}$. Ответы: а) $4\frac{1}{8}$; б) $4\frac{5}{14}$; в) $3\frac{7}{8}$.

2 очка

- 7 Выберите истинное высказывание (a ; b ; c – любые натуральные числа):

а) $ab + bc = (b + c)a$; б) $ab + bc = b(a + c)$; в) $ab + bc = ac + b$.

2 очка

- 8 Выберите истинное высказывание (a ; b ; c – любые натуральные числа):

а) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$; б) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$; в) $\frac{a-b}{c} = c \cdot (a-b)$.

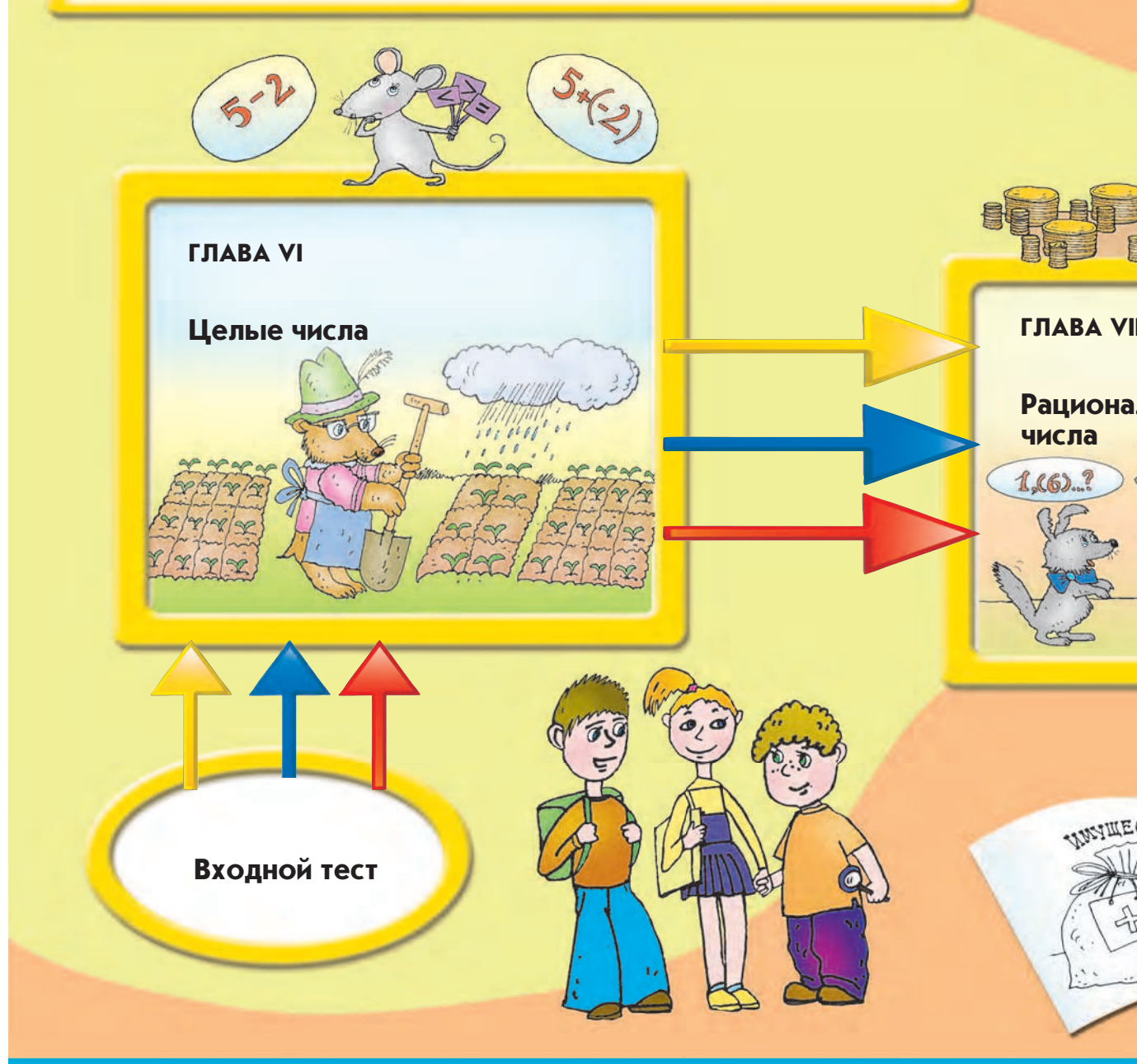
2 очка

- 9 На числовом луче отмечены точки A , B и C , причём точка A – середина отрезка BC . Найдите координату точки A , если $B\left(\frac{4}{3}\right)$, $C\left(4\frac{2}{3}\right)$.

Ответы: а) $A(3)$; б) $A\left(\frac{10}{3}\right)$; в) $A\left(3\frac{1}{6}\right)$.

2 очка

Путеводитель по третьему разделу





Путь 3:

- а) входной тест;
- б) главы;
- в) задачи для любителей математики;
- г) жизненная задача;
- д) итоговый тест.



Вспоминаем то, что знаем

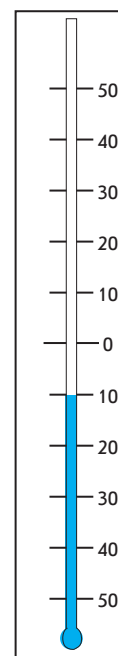
- Запишите число:
 - а) ног у жука;
 - б) ног у паука;
 - в) крыльев у птицы;
 - г) учащихся в вашем классе.
- Как называются записанные вами числа?

Открываем новые знания

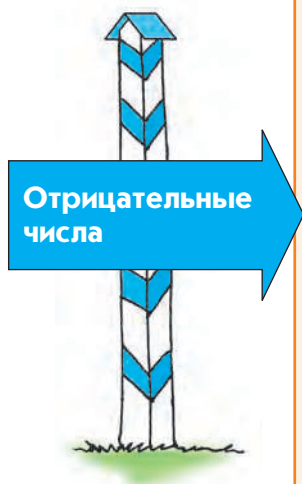
- Рассмотрите рисунок уличного термометра и объясните:
 - а) какая отметка выбрана за начало отсчёта;
 - б) что означают другие записанные здесь числа;
 - в) какую температуру показывает термометр.
- Почему одни и те же числа (10, 20 и т.д.) написаны на шкале уличного термометра по два раза?
- Оцените высказывание «Температура равна 15 градусам» с точки зрения полноты содержащейся в нём информации. Может ли оно быть понято только однозначно или допускает несколько толкований? Если несколько, то сколько именно?



- Как называются числа, выражающие температуру воздуха жарким летним днём? Как записываются такие значения температуры?
- Как называются числа, выражающие температуру воздуха морозным зимним днём? Как записываются такие значения температуры?
- С какими из названных чисел вы уже работали раньше на уроках математики? Какие числа вы будете изучать в этой главе? Что вы о них уже знаете?



Отвечаем, проверяем себя по тексту



Наверняка многие из вас, перед тем как выйти из дома, смотрят за окно на термометр, чтобы узнать температуру воздуха. Вы знаете, что на вопрос «Какая температура?» ответ «Температура равна 5 градусам» не является полным, он содержит не всю информацию. Это может быть 5° тепла или 5° мороза. Говорят также по-другому: 5° выше нуля или 5° ниже нуля. Или так: $+5^{\circ}$ или -5° .

Таким образом, для измерения температуры натуральных чисел и нуля недостаточно; нужны новые числа -1 ; -2 ; -3 и т.д. Такие числа называют **отрицательными**.

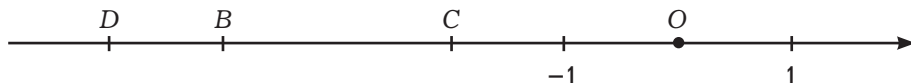
При измерении температуры выбрана нулевая отметка (или начало отсчёта) – температура замерзания воды. Если значение температуры выше этой нулевой отметки, скажем, на 5 градусов, то мы говорим, что это 5 градусов тепла, или $+5^{\circ}$, а если ниже на 5 градусов, то говорим, что это 5 градусов мороза, или -5° .

Вспоминаем то, что знаем

- Начертите числовой луч, выберите единичный отрезок и отметьте на этом луче точки: $A(6)$; $D(2)$; $M(1)$; $G(5)$.

Открываем новые знания

- Рассмотрите рисунок и определите координаты точек C ; B ; D :



- Как бы вы назвали прямую на рисунке?
- Как эту прямую получили из известного вам числового луча?
- Какие числа можно отметить на этой прямой?
- Как определить положение на этой прямой точки $N(-4)$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

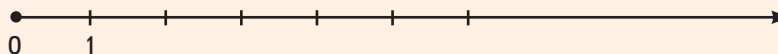
Шкала термометра обычно располагается вертикально, как изображено на рисунке на стр. 8.

В верхней своей части она напоминает числовой луч.

Выпишем ряд натуральных чисел:

1; 2; 3; 4; 5; 6; ...

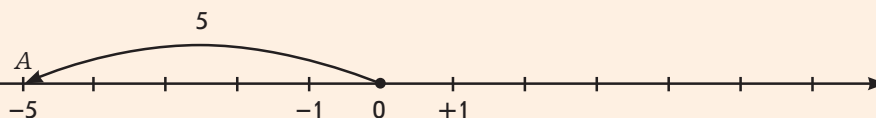
При увеличении числа на единицу мы переходим в этом ряду к следующему числу, которое стоит справа от данного. Вы уже знаете, что натуральные числа и нуль можно изобразить на числовом луче, который обычно изображается, как на рисунке:



Начало числового луча соответствует числу 0. Если отложить от начала числового луча (вправо) единичный отрезок, то получим точку, соответствующую числу 1. Чтобы изобразить на числовом луче точку, соответствующую числу 5, нужно отложить от начала числового луча (вправо) отрезок, длина которого равна 5 единичным отрезкам. Поскольку длины отрезков на числовом луче всегда измеряются в единичных отрезках, принято говорить проще: длина отложенного отрезка равна 5. Принято также говорить и «точка, соответствующая числу 5», и «точка с координатой 5», и совсем кратко «точка 5».

Если теперь рассмотреть дополнительный луч (напомним, что начало у него то же и он дополняет наш луч до прямой) и отложить от начала единичный отрезок на дополнительном луче влево, то получим точку -1 . Чтобы изобразить точку, соответствующую числу -5 (точку -5), нужно отложить на дополнительном луче (влево от начала) отрезок, длина которого равна 5, как на рисунке.

Числовая
прямая



Два взаимно дополнительных луча образуют числовую прямую.

Натуральные числа расположены на числовой прямой справа от нуля; они ещё называются целыми положительными числами. Числа, расположенные слева от нуля, называются целыми отрицательными числами. Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным.

Целые положительные числа, целые отрицательные числа и число нуль образуют **ряд целых чисел**:

...; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...

Ряд целых чисел бесконечен в обе стороны; его можно неограниченно продолжать и вправо, и влево.

Противопо-
ложные числа

Числа 1 и -1 ; 5 и -5 ; n и $-n$ называются **противоположными**. Противоположные числа на числовой прямой симметричны относительно начала (точки нуля). Точка нуля иногда называется также «начало отсчёта».

Иногда целые положительные числа записывают со знаком «+» (впереди числа): например, вместо 5 пишут +5, вместо 100 пишут +100. Это делают, когда хотят подчеркнуть похожесть, равноправность записи положительных и отрицательных чисел: раз мы пишем перед отрицательными числами знак «-», то перед положительными числами естественно писать знак «+». Но в большинстве случаев знак «+» перед положительными числами не пишут. Таким образом, $+5 = 5$; $+100 = 100$ и т.д. Шкала термометра, по сути, представляет собой отрезок числовой прямой. Правда, этот отрезок расположен вертикально, а не горизонтально, и для обозначения отрицательных температур на шкале термометра не используют знак «-».

Развиваем умения

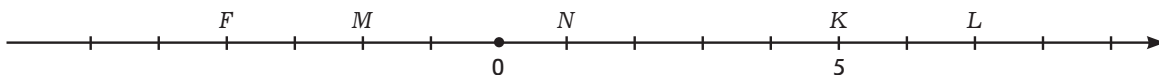


Н

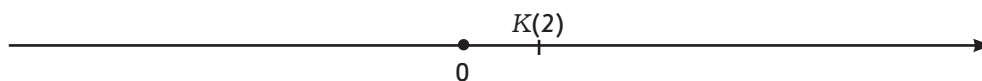
- 1 Как называют числа, расположенные в ряду целых чисел:
а) справа от нуля; б) слева от нуля?
- 2 Является ли число 0:
а) положительным; б) отрицательным?
- 3 Прочитайте числа: $+5$; -5 ; $+9$; -2 .
а) Какие из этих чисел являются положительными, а какие – отрицательными?
б) Какие из этих чисел расположены на числовой прямой справа от нуля, а какие – слева?
- 4 Используя знаки «+» и «-», запишите числа, которые встречаются в этих высказываниях:
а) длина экватора составляет 40 075 704 м;
б) самая низкая температура на территории Европы (55°) была зафиксирована в Усть-Щугоре (Россия);
в) самая высокая температура на территории Европы (50°) была зафиксирована в Севилье (Испания);
г) средняя температура воздуха в июле в Москве составила 18° ;
д) средняя температура воздуха в январе в Москве составила 10° .
- 5 Определите, координата какой из точек на рисунке – положительное число:



- 6 Подпишите координаты точек F , M , N , K , L на рисунке:



- 7 Отметьте на числовой прямой точки: $A(5)$; $B(-4)$; $C(-2)$.

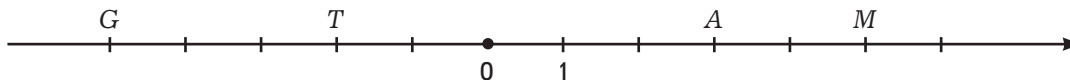


- 8 Выпишите из данных чисел пары противоположных: 2; 4; -4; 6; -5; -2; 7; -9.

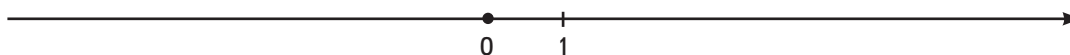
Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Запишите координаты точек A ; M ; T ; G :

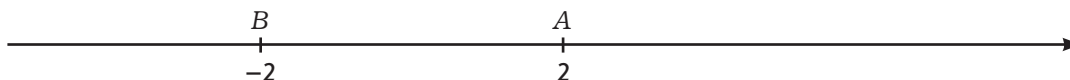


- б) Отметьте на числовой прямой точки: $A(3)$; $B(-3)$; $C(2)$.



П Вариант II.

- а) Определите и отметьте начало отсчёта точкой O , отметьте единичный отрезок.

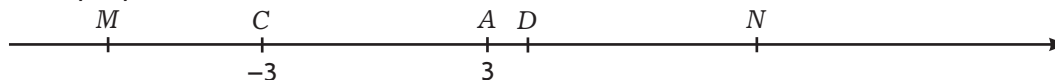


- б) На числовой прямой изображены точки $A(-1)$ и $B(5)$. Выразите в единичных отрезках длину отрезка AB .

Тренировочные упражнения.

Н

- 9 Отметьте и обозначьте начало отсчёта и единичный отрезок. Запишите координаты точек D ; N ; M .



- 10 Назовите какие-нибудь три целых числа, расположенных на числовой прямой:

- а) правее числа 10;
- б) левее числа 10;
- в) правее числа -80;
- г) левее числа -80.

- 11 Отметьте на числовой прямой три любых положительных числа, а затем отметьте противоположные им числа.

П

- 12 Точка числовой прямой $A(6)$ – центр симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:
а) $M(2)$; б) $N(5)$; в) $V(-5)$; г) $K(-2)$; д) $L(15)$.
- 13 Точка числовой прямой A – центр симметрии для пары точек M и N . Укажите координаты точки A , если:
а) $M(8)$ и $N(6)$; б) $M(15)$ и $N(5)$; в) $M(-14)$ и $N(-20)$.
- 14 На соревнованиях по футболу результаты команд иногда сравнивают по разнице забитых и пропущенных мячей.
а) Объясните, что означают следующие данные:

| Команда | Разница забитых и пропущенных мячей |
|-----------|-------------------------------------|
| Динамо | +5 |
| Торпедо | -4 |
| Локомотив | +1 |
| Спартак | -2 |



- б) Запишите с помощью знака «+» или знака «-» разницу забитых и пропущенных мячей:

| Команда | Число забитых мячей | Число пропущенных мячей | Разница забитых и пропущенных мячей |
|------------|---------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| Ястребы | 7 | 3 | |
| Альбатросы | 5 | 4 | |
| Страусы | 3 | 3 | |
| Соколы | 0 | 2 | |
| Коршуны | 2 | 5 | |



М

- 15 а) Валя следит за футбольным первенством школы и вносит в специальные таблицы, где выписаны названия всех команд, различные спортивные показатели. Ваня как-то взглянул на составленную Валею таблицу количества забитых и пропущенных мячей и сказал, что хотя он не знает результата ни одного матча, но может наверняка сказать, что Валя ошибся: такой таблицы не могло быть ни в один из моментов первенства. Прав ли Ваня? Почему он так решил?

| Команда | Число забитых мячей | Число пропущенных мячей | Разница забитых и пропущенных мячей |
|----------|---------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| Метеор | 10 | 4 | +6 |
| Вымпел | 8 | 5 | +3 |
| Авангард | 4 | 9 | -5 |
| Старт | 3 | 8 | -5 |

- б) Могли ли таблицы количества забитых и пропущенных мячей иметь вид, как в заданиях 14а и 14б на предыдущей странице? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, все ли команды, участвующие в соревнованиях, внесены в таблицы или только некоторые?



Н

- 16** Разбейте высказывания на истинные и ложные. Исправьте ложные высказывания так, чтобы они стали истинными:
- а) положительные числа располагаются на числовой прямой справа от нуля;
 - б) отрицательные числа располагаются на числовой прямой слева от положительных чисел;
 - в) число ноль не является ни положительным, ни отрицательным;
 - г) точки $A(8)$ и $B(-8)$ находятся на равном расстоянии от начала координат;
 - д) точка $D(-10)$ ближе к началу координат, чем точка $C(-9)$;
 - е) точка $M(-2)$ симметрична точке $N(6)$ относительно точки $K(2)$.
- 17** Какой станет координата точки $A(2)$, если точка переместится:
- а) на 2 единицы влево;
 - б) на 3 единицы вправо;
 - в) на 5 единиц влево;
 - г) на 10 единиц вправо?
- 18** Какой станет координата точки $A(-2)$, если точка переместится:
- а) на 3 единицы влево;
 - б) на 2 единицы вправо;
 - в) на 5 единиц влево;
 - г) на 10 единиц вправо?



П

- 19** Концы отрезка AB имеют координаты:
- а) $A(-12)$, $B(0)$; б) $A(-12)$, $B(4)$.
- Какую координату имеет точка N этого отрезка такая, что $AN : NB = 3 : 1$?
- 20** На числовой прямой отмечены точки $A(-3)$; $B(-4)$ и $C(-2)$.
Какими станут координаты этих точек, если начало координат перенести:
- а) в точку A ; б) в точку B ; в) в точку C ?



М

- 21** Предприниматель купил четыре шубы и затем продал их. Определите, какой доход или убыток получил он от продажи каждой шубы, и внесите данные в левую таблицу. Заполните правую таблицу, используя, если нужно, знаки «+» и «-».



| | Цена покупки (р.) | Цена продажи (р.) | Доход (р.) | Убыток (р.) |
|---|-------------------|-------------------|------------|-------------|
| 1 | 11 500 | 12 000 | | |
| 2 | 12 200 | 12 000 | | |
| 3 | 50 000 | 48 000 | | |
| 4 | 45 000 | 48 000 | | |

| | Цена покупки (р.) | Цена продажи (р.) | Итог сделки (р.) |
|---|-------------------|-------------------|------------------|
| 1 | 11 500 | 12 000 | |
| 2 | 12 200 | 12 000 | |
| 3 | 50 000 | 48 000 | |
| 4 | 45 000 | 48 000 | |



- 22 Узнав на уроках математики, что в древности положительные числа истолковывались как имущество, а отрицательные как долг, шестиклассница Варя заявила, что такое истолкование только вносит путаницу. Если мы считаем долг отрицательным числом и говорим «долг -500 р.», то нужно учитывать, что само слово «долг» уже значит « $-$ », и тогда «долг -500 р.» надо понимать как $-(-500)$ р., т.е. как имущество 500 р. Долг 500 р. правильно называть «имущество -500 р.». Таким образом, если мы хотим пользоваться в деловых расчётах отрицательными числами, то нужно говорить только «имущество», но со знаком « $+$ » или « $-$ ». Согласны ли вы с Варей?

6.2

Модуль целого числа



Вспоминаем то, что знаем

- Начертите числовую прямую, выберите единичный отрезок и отметьте на этой прямой точки: $A(8)$; $D(-7)$; $O(0)$; $M(-9)$.

Открываем новые знания

- На каком расстоянии от начала отсчёта находится точка 8? Точка -7 ?



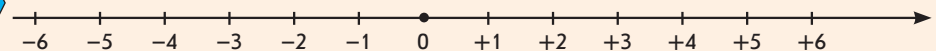
- Следующие высказывания истинны: модуль числа 8 равен 8, модуль числа -7 равен 7, модуль числа 0 равен 0.

- Исходя из приведённой в предыдущем предложении информации, сделайте свои предположения о том, что такое модуль числа.
- Как найти модуль целого числа?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



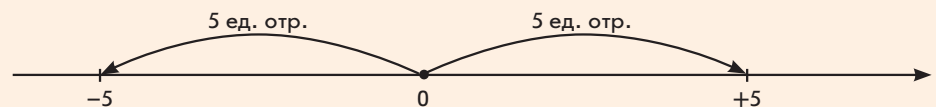
Рассмотрим числовую прямую. Напомним, что так называется прямая, на которой выбрано начало отсчёта (точка, соответствующая числу 0), единичный отрезок и положительное направление. Обычно числовую прямую располагают горизонтально, а положительное направление выбирают вправо от начала:



Когда мы изображаем на числовой прямой точку 5, то откладываем отрезок длиной 5 вправо от начала.

Когда мы изображаем на числовой прямой точку -5 , то откладываем отрезок длиной 5 влево от начала. И в том, и в другом случае расстояние от изображённой точки (и от точки 5, и от точки -5) до начала равно 5.

Модулем целого числа называется расстояние от точки, соответствующей этому числу на числовой прямой, до начала.



Например, модуль числа 5 равен 5 и модуль числа -5 равен 5. Модуль числа обозначается с помощью прямых скобок. Так, модуль числа x обозначается $|x|$. Например, как показано выше, $|5| = 5$, $|-5| = 5$. Ясно, что $|0| = 0$.

Часто вместо «модуль числа» говорят «абсолютная величина числа».

Модули целых чисел можно находить, пользуясь следующим набором правил:

Модуль положительного числа равен самому этому числу.

Модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному числу.

Модуль нуля равен нулю.

Вспоминаем то, что знаем

- Запишите любые два противоположных числа.

Открываем новые знания

- Найдите и сравните модули противоположных чисел.

- Найдите модуль нуля.
- Подберите такое число, модуль которого был бы отрицательным.



- Что можно сказать о модулях противоположных чисел?
- Чему равен модуль нуля?
- Может ли модуль быть отрицательным числом?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Основные свойства модуля

О противоположных числах можно сказать, что у них одинаковые модули, но разные знаки.
Число, противоположное числу x , обозначается $-x$.
Таким образом, число, противоположное числу 5, есть -5 ; число же, противоположное числу -5 , есть 5. Поэтому можно написать, что $-(-5) = 5$.
Числом, противоположным числу 0, является 0. Можно написать, что $0 = -0$.
Основные свойства модуля можно сформулировать так:
Модули противоположных чисел равны, т.е. $|x| = |-x|$.
Модуль любого числа больше нуля или равен нулю (по-другому: модуль никакого числа не может быть отрицательным).
Модуль числа равен нулю лишь в том случае, если это число 0.

Развиваем умения



Н

- а) Найдите для каждого числа противоположное: 125; -125 ; 80; -90 ; -3 .
 - б) Запишите все целые неотрицательные числа, меньшие 5, и противоположные им числа.
 - в) Выпишите сначала пары обратных чисел, а затем пары противоположных: $\frac{1}{25}$; 125; 7; -7 ; $\frac{1}{7}$.
- Найдите значение:

| | |
|---------------------------|----------------------------|
| а) m , если $-m = 9$; | в) k , если $-k = -60$; |
| б) $-n$, если $n = -7$; | г) $-d$, если $d = 10$. |
- Найдите модуль каждого из чисел: 125; -125 ; 80; -90 ; -3 .
- Запишите все числа, имеющие указанный модуль: а) 26; б) 4; в) 0; г) 76 110 154.
- а) Известно, что $|x| = 8$. Чему равен $|-x|$?
 - б) Найдите $|x|$, если $|-x| = 5$.

6 Из двух чисел выберите то, у которого модуль больше:

а) 17 и 8; б) -67 и -98 ; в) -87 и 89; г) 9 и 0.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

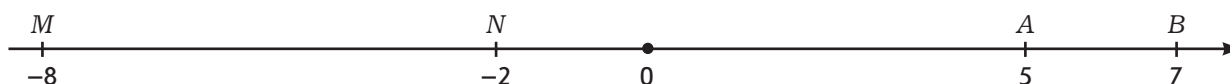
а) Найдите модуль каждого из чисел: 32; -250 ; 100; -930 ; -365 .

б) Запишите все числа, имеющие модуль 154.

П Вариант II.

а) Найдите значение выражения $|x|$, если $x = -10\ 154$.

б) Запишите модули координат точек, отмеченных на числовой прямой:



Тренировочные упражнения.

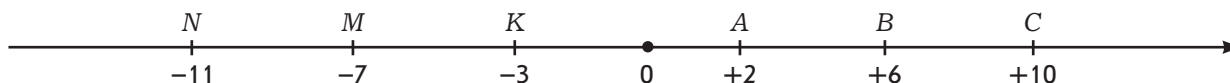
Н

7 Выпишите сначала пары противоположных, а затем пары обратных чисел:

54; $\frac{1}{54}$; -54 ; 89; 90; $\frac{1}{90}$; -89 .

8 Найдите значение выражения $|x|$, если $x = -1\ 054$; 97; 0; -100 .

9 Запишите модули координат точек, отмеченных на числовой прямой:



10 Изобразите точкой на числовой прямой число

а) a , если $-a = -4$;

в) d , если $-d = 6$;

б) $-c$, если $c = -5$;

г) $-m$, если $m = -3$.

П

11 а) Что можно сказать о числе x , если известно, что $|x| = x$?

б) Что можно сказать о числе x , если известно, что $|x| = -x$?

М

12 Валя утверждает, что модуль числа равен большему из двух чисел: самого числа и противоположного ему числа. Прав ли Валя?



Н

13 Найдите x из равенства:

а) $-x = 8$; б) $-x = -9$; в) $-x = 102$.

14 Для каждого из чисел найдите не равное ему число, имеющее тот же модуль:
 -76 ; 89 ; -154 ; 900 ; $-1\ 009$.

15 Назовите такое число a , чтобы число $-a$ было
а) положительным числом; б) отрицательным числом; в) числом нуль.



П

16 Найдите значения x , если: а) $|x| = 9$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -9$.

17 Какое число надо записать в скобках, чтобы получилось верное равенство:
а) $-(\dots) = -11$; б) $-(\dots) = 11$?



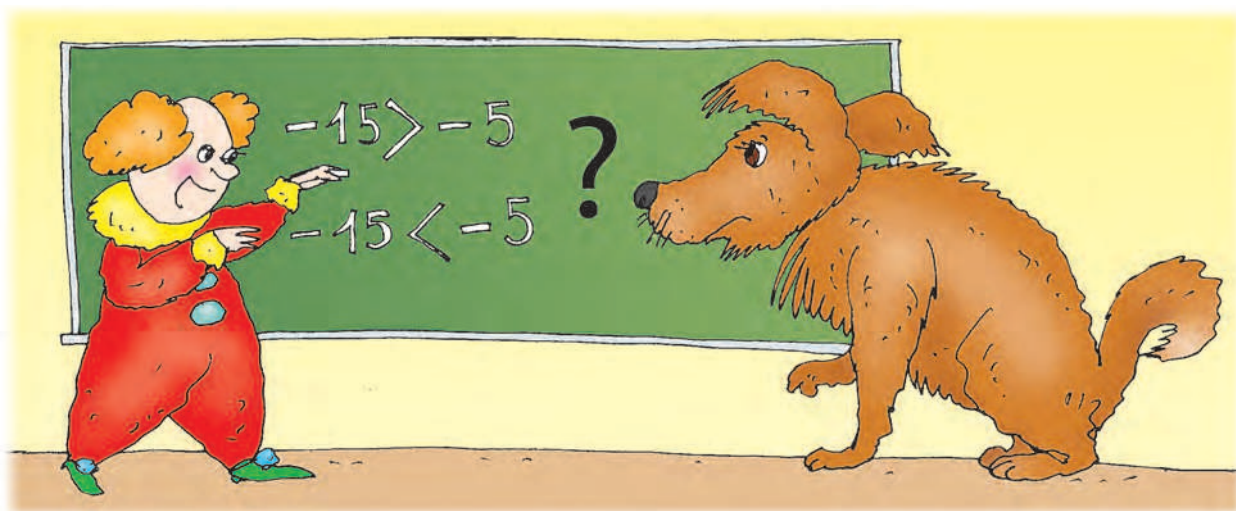
М

18 Запишите число, равное данному, так, чтобы запись не содержала скобок:
а) $-(-(+1))$; б) $-(-(-1))$; в) $-(-(-(-(-1))))$.

19 Решите уравнения:
а) $|x - 5| = 3$; б) $|x + 7| = 11$.

6.3

Сравнение целых чисел



Вспоминаем то, что знаем

Сравните числа:

а) 5 и 15; б) 789 и 7 890.

Какое из двух натуральных чисел больше?

Сравните числа. Скажите, какое из чисел в каждой паре больше:

а) 5 и -15 ; б) -5 и -6 ; в) -789 и $-7\ 890$.



Какое число считается большим в ряду целых чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Выпишем ряд целых чисел:

$\dots; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$

Вы помните, что ряд целых чисел бесконечен в обе стороны; его можно неограниченно продолжать и вправо, и влево.

Большим считается то целое число, которое в ряду целых чисел стоит правее.

Например: $-5 < 5$; $-5 > -15$; $30 > 0$; $-30 < 0$, поэтому точку с запятой в ряду целых чисел можно заменить на знак «меньше»:

$\dots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$

Сравнивать между собой два положительных числа вы уже умеете.

Для сравнения остальных чисел можно применять следующий набор правил:

Любое положительное число больше нуля.

Любое отрицательное число меньше нуля.

Любое положительное число больше любого отрицательного.

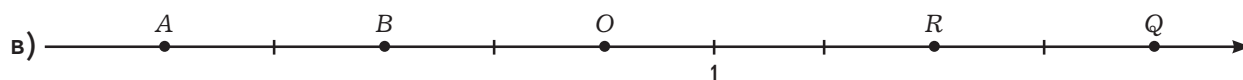
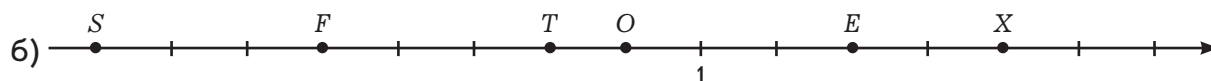
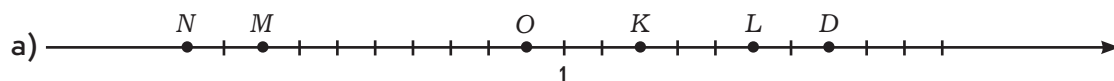
Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Развиваем умения

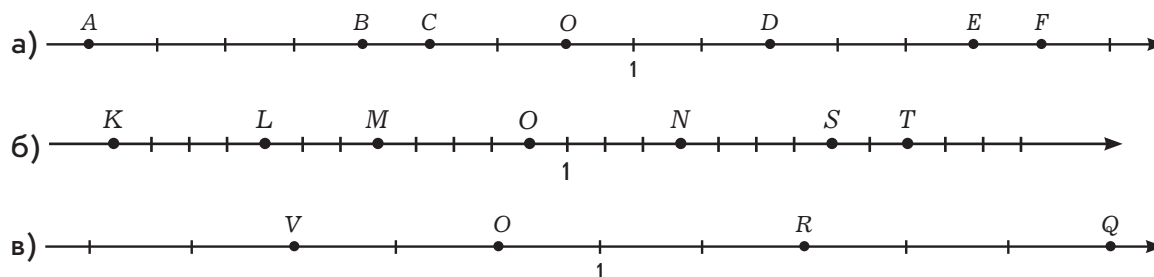


Н

1 Запишите координаты отмеченных точек на числовой прямой:



2 Запишите координаты отмеченных точек на числовой прямой:



- 3** а) Какое из двух целых чисел больше: положительное или отрицательное? Положительное или 0? Отрицательное или 0?
б) Какое из двух целых чисел меньше: положительное или 0? Отрицательное или 0? Положительное или отрицательное?

- 4** Назовите какие-нибудь пять различных целых чисел:
а) меньших 0; б) больших 0; в) меньших -5 ; г) больших -5 .

- 5** Какое из чисел в каждой паре больше:
а) 43 и 56; б) 43 и -1 ; в) 78 и -78 ; г) -300 и -200 ; д) -101 и -102 ?

- 6** Между какими двумя ближайшими целыми числами находится число:
а) 0; б) -1 ; в) 78; г) -300 ; д) -110 ?
Ответ запишите в виде двойного неравенства, например, для числа 3: $2 < 3 < 4$.

- 7** Какие целые числа можно подставить вместо буквы a , чтобы получилось верное неравенство:
а) $-2 < a < 2$; в) $-105 < a < -96$;
б) $-12 < a < -4$; г) $-20 < a < -10$?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Какое из чисел в каждой паре больше:
а) 29 и 30; б) -55 и -54 ; в) 9 и -9 ; г) 59 и -95 ?
б) Какие целые числа можно подставить вместо буквы a , чтобы получилось верное неравенство:
 $-20 < a < -17$?

П Вариант II.

- а) Запишите данные числа в порядке возрастания (от меньшего к большему):
300; -300 ; 0; 146; -54 .
б) Сравните сначала данные числа, а потом числа, им противоположные:
а) 8 и 2; б) -5 и -50 .

Тренировочные упражнения.

Н

8 а) Запишите данные числа в порядке возрастания (от меньшего к большему):
–101; –111; –1 011; –1 009; 10.

б) Запишите данные числа в порядке убывания (от большего к меньшему):
–300; –31; –330; –3 331; 3.

9 Сравните числа:

а) 30 и 31; б) –43 и –44; в) 80 и –80; г) 1 290 и 2 190.

Какое из чисел в каждой паре больше?

10 Сравните сначала данные числа, а потом числа, им противоположные:

а) 10 и 20;

в) 5 и –6;

б) –2 и –4;

г) –200 и 50.

Какое из чисел в каждой паре больше?

11 Как изменится значение координаты точки $A(8)$, если она передвинется:

а) на 5 единичных отрезков вправо;

б) на 5 единичных отрезков влево;

в) на 8 единичных отрезков влево;

г) на 10 единичных отрезков влево?

12 Как изменится значение координаты точки $C(-8)$, если передвинуть её:

а) на 5 единичных отрезков влево;

б) на 8 единичных отрезков вправо;

в) на 10 единичных отрезков вправо?



П

13 Известно, что a и b – положительные целые числа, причём $a < b$. Какое из чисел $-a$ или $-b$ больше?

14 Известно, что a и b – отрицательные целые числа, причём $a < b$. Какое из чисел $-a$ или $-b$ больше?

М

15 Каково расстояние (в единичных отрезках числовой прямой) между точками с координатами:

а) 0 и a ;

б) $-a$ и a ;

в) $-a$ и 0;

г) a и $-3a$?

**Н**

16 Сравните числа:

- а) 729 и 900; в) 0 и -600 ; д) -900 и 1; ж) -856 и -100 ;
б) -999 и 2; г) -51 и -510 ; е) 326 и 32; з) 128 и -300 .

17 Запишите числа в порядке возрастания:

- а) 400; -400 ; 0; 236; -528 ;
б) -250 ; 367; 0; -8 ; 12; -400 .

18 Запишите числа в порядке убывания:

- а) 752; 0; -35 ; -257 ; 432;
б) -790 ; 790; 0; -9 ; -12 ; 425.

**П**

19 Известно, что a и b – целые числа разных знаков, причём $a < b$. Сравните $-a$ и $-b$.

**М**

20 Утром термометр показывал 4° мороза. Днём температура поднялась на 6° , а к вечеру опустилась на 3° . На какой отметке находился вечером столбик термометра? Каким числом выражается значение температуры вечером: положительным или отрицательным? А значение температуры днём?

6.4

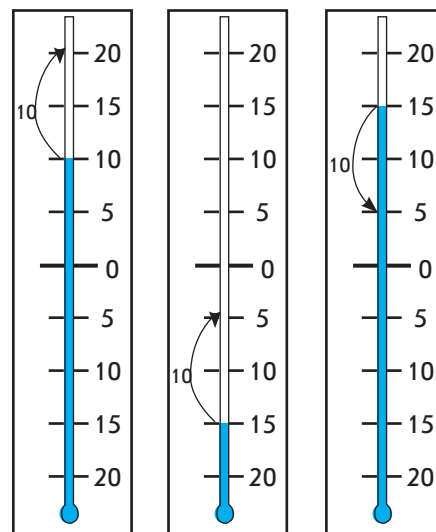
Сложение целых чисел



Вспоминаем то, что знаем

Предположим, температура воздуха утром составляла $+10^\circ$, а в течение дня она повысилась на 5° . Какой стала температура воздуха после повышения?

- Расскажите, что означают изображения на рисунках.
- Можно ли сказать, что температура стала равной сумме первоначального значения и изменения?
- Прибавьте с помощью числовой прямой к числу 9 число 5.
- Предположим, температура воздуха утром составляла 15° , а в течение дня она понизилась на 3° . Какой стала температура воздуха после понижения?
- Запишите понижение температуры как прибавление отрицательного числа к начальной температуре.
- Можно ли сказать, что температура стала равной сумме первоначального значения и изменения?



Открываем новые знания

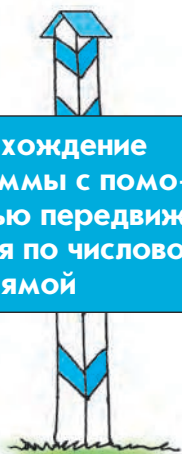
- Прибавьте с помощью числовой прямой к числу 9 число -5 .
- Прибавьте с помощью числовой прямой к числу -9 число -5 .



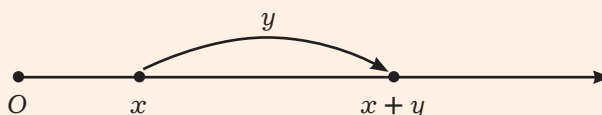
- Как с помощью числовой прямой можно находить сумму целых чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Нахождение
суммы с помо-
щью передвиже-
ния по числовой
прямой



Вспомним, что сумму натуральных чисел можно находить с помощью передвижения по числовому лучу. Сумма натурального числа x и натурального числа y – это натуральное число, находящееся на числовом луче на расстоянии y вправо от числа x .

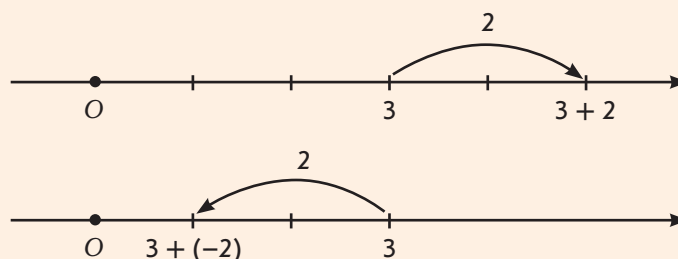


Вспомним также, что суммой натурального числа x и числа 0 является число x .

Сумму целых чисел тоже можно находить с помощью аналогичных правил передвижения по числовой прямой.

Прежде всего, **суммой целого числа x и числа 0 является число x .**

Суммой целого числа x и ненулевого целого числа y называется целое число, находящееся в ряду целых чисел на расстоянии $|y|$ от числа x вправо при положительном y и влево при отрицательном y .



Вспоминаем то, что знаем

- Два предпринимателя-компаньона вносили информацию о приходе и расходе денег на их совместном предприятии каждый в свою таблицу. Изучите фрагменты этих таблиц, относящиеся к одним и тем же датам, и разберитесь, как каждый из предпринимателей заполнял свою таблицу.

| Дата | Движение денежных средств (р.) | | Итого (р.) | |
|---------|--------------------------------|------------------|------------|--------|
| | Доход | Расход | Доход | Расход |
| 2 марта | 12 000 40 000 | – | 52 000 | – |
| 3 марта | – | 11 000 14 000 | – | 25 000 |

| Дата | Движение денежных средств (р.) | Итого (р.) |
|---------|--------------------------------|------------|
| 2 марта | + 12 000 + 40 000 | + 52 000 |
| 3 марта | – 11 000 – 14 000 | – 25 000 |

- Можно ли сказать, что в каждый из дней предприниматели складывали имеющиеся числа? Можно ли сказать, что второй предприниматель складывал модули этих чисел? Какой знак он ставил в каждом из случаев? Почему?

Открываем новые знания

- Изучите фрагменты таблиц тех же двух предпринимателей, относящиеся к другим датам, и разберитесь, как каждый предприниматель заполнял свою таблицу.

| Дата | Движение денежных средств (р.) | | Итого (р.) | |
|--------|--------------------------------|--------|------------|--------|
| | Доход | Расход | Доход | Расход |
| 14 мая | 60 000 | 15 000 | 45 000 | – |
| 15 мая | 38 000 | 50 000 | – | 12 000 |

| Дата | Движение денежных средств (р.) | Итого (р.) |
|--------|--------------------------------|------------|
| 14 мая | + 60 000 – 15 000 | + 45 000 |
| 15 мая | + 38 000 – 50 000 | – 12 000 |

- Можно ли сказать, что в каждый из дней первый предприниматель вычитал имеющиеся числа? ● Из какого числа какое? В какой столбец графы «Итого» он вносил полученную разность? ● Как заполнял свою таблицу второй предприниматель?



- Сформулируйте правила сложения целых чисел.
- Каким числом (положительным или отрицательным) является сумма:
- а) двух положительных чисел;
 - б) двух отрицательных чисел;
 - в) положительного числа и нуля;
 - г) отрицательного числа и нуля;
 - д) положительного и отрицательного числа?
- Проверьте свои ответы с помощью числовой прямой, производя действия с конкретными целыми числами.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Правила сложения целых чисел одного знака

Кроме передвижения по числовой прямой, сумму целых чисел можно находить, пользуясь специальным набором правил. В древности его удачно иллюстрировали денежными примерами.

Рассмотрим и мы эти правила, приводя в качестве иллюстрации действия с деньгами, трактуя положительные числа как доход, а отрицательные числа – как расход («отрицательный доход»). Сначала рассмотрим сложение чисел одного знака.

Предположим, некто *получил* в доход сначала 9 000 рублей, а затем 4 000 рублей. Подсчитаем его *общий доход*: $(+9\ 000) + (+4\ 000) = +13\ 000$ (р.)

Здесь мы складывали натуральные (целые положительные) числа и получили натуральное (целое положительное) число.

Рассмотрим, как складываются отрицательные числа.

Предположим, некто сначала *израсходовал* 9 000 рублей, а затем ещё 4 000 рублей. Ясно, что его *общий расход* составляет 13 000 рублей. Если же трактовать расход как отрицательный доход, то получим следующую запись:

$$(-9\ 000) + (-4\ 000) = -13\ 000 \text{ (р.)}$$

При этом ясно, что считали мы так: $9\ 000 + 4\ 000 = 13\ 000$ (р.), а затем поставили перед найденной суммой знак «-».

Итак, при сложении двух доходов получается доход, размер которого равен сумме *размеров* этих двух доходов; при сложении двух расходов получается расход, размер которого равен сумме *размеров* этих двух расходов.

Обратите внимание, что слова «размер дохода» и «размер расхода» выражают понятия, по сути равносильные нашему понятию модуля.

Правила сложения целых чисел разного знака

Для сложения двух чисел одного знака нужно сложить их модули и поставить перед найденной суммой (общий) знак слагаемых.

При этом:

Сумма положительных чисел является положительным числом.

Сумма отрицательных чисел является отрицательным числом.

Теперь рассмотрим сложение чисел разного знака.

Предположим, некто имеет кредитную карту с нулевым счётом. Если на счёт сначала поступило 9 000 рублей, а затем со счёта было снято 4 000 рублей, то ясно, что на счету осталось 5 000 рублей. Это можно выразить следующей записью: $(+9\ 000) + (-4\ 000) = +5\ 000$ (р.)

Очевидно, что если на счёт поступило денег больше, чем было снято, то результат будет выражаться положительным числом.

Предположим, некто имеет кредитную карту с нулевым счётом. Если сначала на счёт поступило 4 000 рублей, а затем со счёта было снято 9 000 рублей, то ясно, что на счету осталась задолженность 5 000 рублей. Это можно выразить следующей записью: $(+4\ 000) + (-9\ 000) = -5\ 000$ (р.)

Очевидно, что если на счёт поступило денег меньше, чем было снято, то результат будет выражаться отрицательным числом.

Теперь рассмотрим ещё один случай: доход равен расходу.

Очевидно, что если человек получил денег столько же, сколько потратил, то результат будет выражаться нулём.

Для сложения двух чисел разного знака, имеющих разные модули, нужно вычесть из большего модуля меньший и поставить перед найденной разностью знак того слагаемого, чей модуль больше.

При этом:

Сумма положительного и отрицательного чисел может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Точнее: если модули слагаемых различны, то такая сумма имеет знак числа с большим модулем, а если модули слагаемых равны, то сумма равна нулю.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Сумма целого числа x и нуля равна целому числу x .

Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните и запишите с помощью конкретных примеров переместительный и сочетательный законы сложения для натуральных чисел.

Открываем новые знания

- Верно ли равенство: $7 + (-4) = (-4) + 7$? Проверьте с помощью рисунка.
- Придумайте ещё несколько похожих равенств.

- Верно ли равенство: $((+5) + (-7)) + (+1) = (+5) + ((-7) + (+1))$? Проверьте с помощью рисунка.
- Придумайте ещё несколько похожих равенств.



- Сформулируйте законы сложения целых чисел.

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Переместительный и сочетательный законы сложения целых чисел

Действие сложения целых чисел подчиняется переместительному и сочетательному законам.

Сумма двух целых чисел не зависит от порядка слагаемых:

$$x + y = y + x.$$

Например, $(+5) + (-7) = (-7) + (+5)$.

Если сумму двух целых чисел сложить с третьим целым числом, то результат будет такой же, как если первое число сложить с суммой второго и третьего:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Например, $((+3) + (-8)) + (-4) = (+3) + ((-8) + (-4))$.

Сочетательный закон позволяет записывать сумму трёх слагаемых без скобок, поскольку при любой расстановке скобок в сумме $x + y + z$ получится тот же самый результат. Аналогично, без скобок, можно записывать сумму и большего количества слагаемых.

Например, $((+3) + (-8)) + (-4) = (+3) + (-8) + (-4)$.

Переместительный и сочетательный законы используют для упрощения вычислений.

Например, $(-35) + (+30) + (-25) + (+70) = (-35) + (-25) + (+30) + (+70) = (-60) + (+100) = +40$.

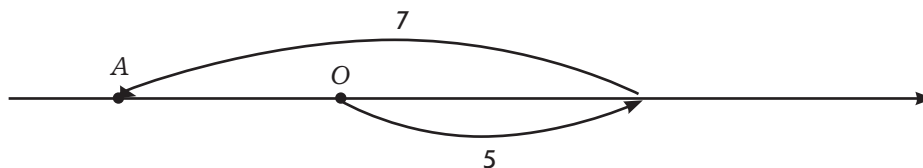
Развиваем умения

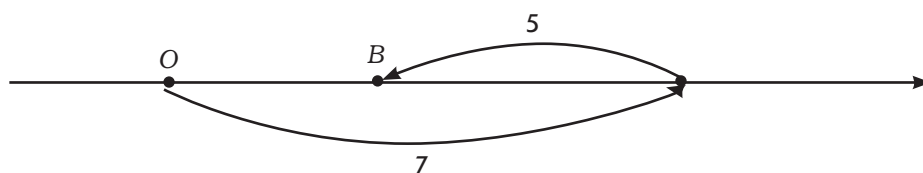


Н

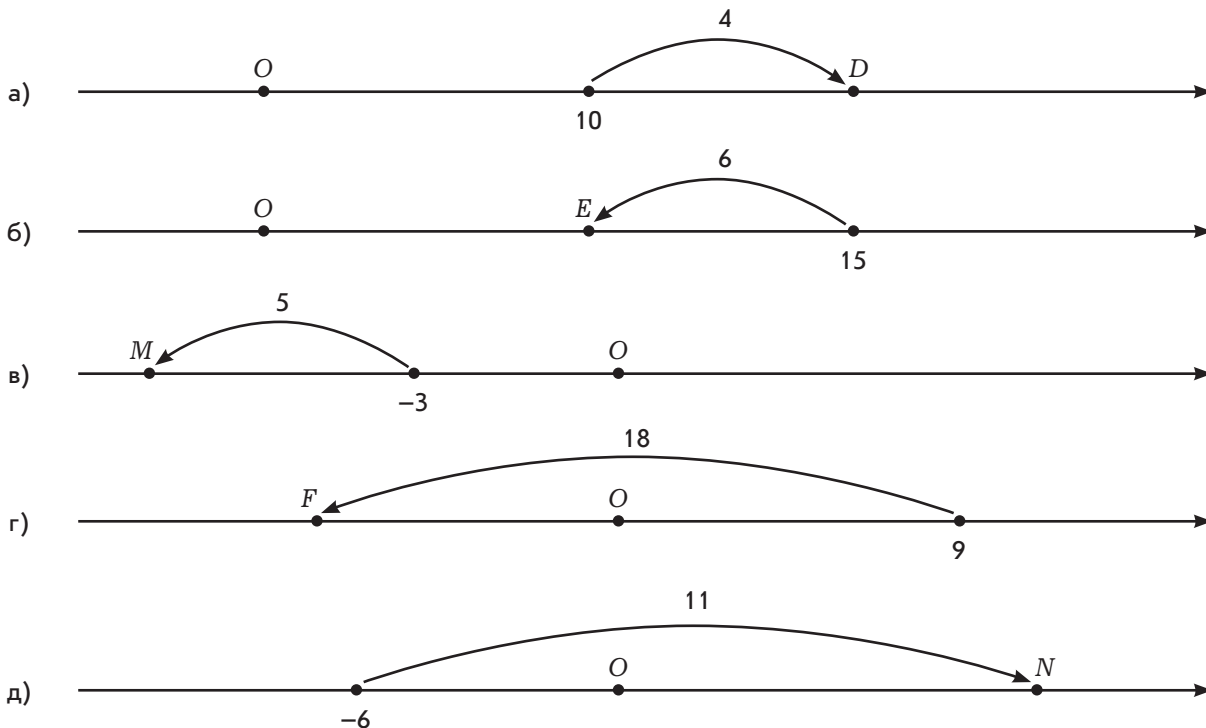
1

- а) Используя рисунок, расскажите, координаты какой из точек (А или В) соответствуют каждому из равенств: $(+5) + (-7) = -2$; $(+7) + (-5) = 2$.





б) Запишите аналогичные равенства для точек D, E, F, M, N :



2 Сделайте рисунок к данному выражению и найдите его значение:

а) $(+4) + 7$; б) $(+6) + (-8)$; в) $(-2) + (-6)$; г) $(+2) + (-7)$.

3 Найдите результат сложения (можете представить, что речь идёт о доходах и расходах):

а) $(+2) + (+3)$; г) $(+4) + (+6)$; ж) $(-2) + (-3)$; к) $(-5) + (-6)$;
 б) $(+3) + (-2)$; д) $(+4) + (-6)$; з) $(-2) + (+3)$; л) $(-5) + (+6)$;
 в) $(+3) + (-3)$; е) $(-4) + (+6)$; и) $(-2) + (0)$; м) $(0) + (+6)$.

4 Назовите слагаемые, определите знак суммы и выполните сложение:

а) $(+12) + (+15)$; в) $(+45) + (+5)$; д) $(-42) + (-34)$; ж) $(-54) + (-36)$;
 б) $(+30) + (-20)$; г) $(+53) + (-6)$; е) $(-27) + (0)$; з) $(50) + (0)$.

5 Запись суммы положительных и отрицательных чисел можно упростить: положительные числа записывают без знака «+», а отрицательное число, которое стоит в начале выражения, записывают без скобок.

Например: $(-20) + (+4) = -20 + 4$; или $(+4) + (-20) = 4 + (-20)$.

Упростите запись и найдите значение выражения:

а) $(+11) + (+17)$; в) $(-37) + (-63)$; д) $(-28) + (+12) + (-15)$;
 б) $(+25) + (-30)$; г) $(-52) + (+32)$; е) $(+16) + (-20) + (+4)$.

- 6** Вычислите:
- | | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| а) $350 + 650$; | г) $350 + (-650)$; | ж) $-350 + (-650)$; | к) $-350 + 650$; |
| б) $560 + 240$; | д) $-560 + (-240)$; | з) $560 + (-240)$; | л) $-560 + 240$; |
| в) $120 + (-280)$; | е) $-120 + 280$; | и) $-120 + (-280)$; | м) $120 + 280$. |
- 7** Разбейте выражения на группы:
- а) $-3 + 5$; б) $(-3 + 5) + 4$; в) $5 + (-3)$; г) $-3 + (5 + 4)$.
- 8** Замените сумму равной ей суммой, поменяв местами слагаемые:
- а) $7 + (-5) = \dots$ в) $-30 + 6 = \dots$
б) $-9 + (-5) = \dots$ г) $-19 + 21 = \dots$
- 9** Назовите слагаемые и, используя законы арифметических действий, вычислите значения выражений:
- а) $71 + 29 - 54 - 6$; г) $-32 + 12 + 20 - 6$;
б) $25 - 91 - 9 + 5$; д) $-18 - 22 + 64 + 36$;
в) $-35 + 30 - 25 + 70$; е) $53 + 18 - 48 - 23$.

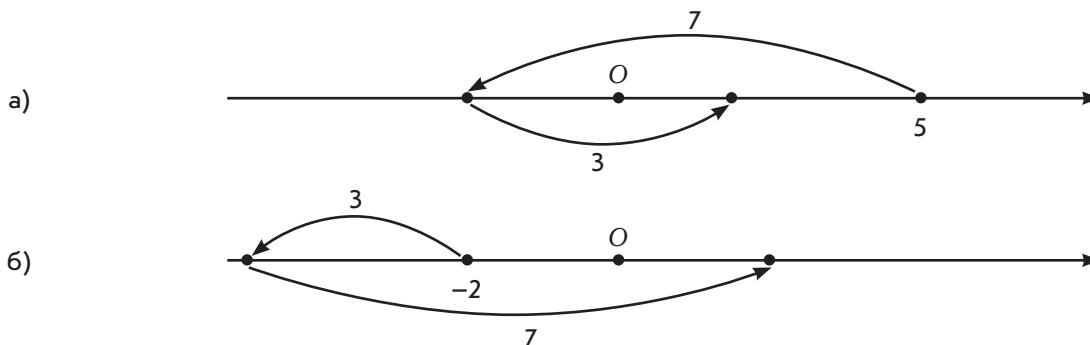
Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Сделайте рисунки к выражениям и найдите их значения: $10 - 11$; $-5 + 4$.
б) Вычислите, используя законы арифметических действий: $-45 - 19 - 15$; $42 - 35 + 18$.

П Вариант II.

- а) Запишите равенства к рисункам:



- б) Вычислите, используя законы арифметических действий:
 $-15 + 20 + (-45) + 80$; $44 + 48 + (-18) + (-14)$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 10** Назовите слагаемые в каждой сумме:
- а) $7 + f + (-k)$; в) $32 + n + (-b)$;
б) $25 + (-c) + 5$; г) $-x + (-r) + (-36)$.

11 Найдите значение выражения $a + b$ при

а) $a = -19$; $b = 18$;

б) $a = 32$; $b = 30$;

в) $a = -54$; $b = -6$;

г) $a = 54$; $b = -60$.

12 Представьте в виде суммы двух каких-нибудь отрицательных слагаемых число:

а) -8 ; б) -102 ; в) -99 ; г) -18 ; д) $-1\ 000$; е) -2 ; ж) -48 ; з) -3 .

13 Представьте в виде суммы двух каких-нибудь слагаемых разных знаков число:

а) -9 ; б) 9 ; в) -25 ; г) 0 ; д) 100 ; е) -2 ; ж) $-1\ 000$; з) 11 .

14 Вычислите:

а) $250 + 350$;

в) $250 + (-350)$;

д) $-250 + (-350)$;

ж) $-250 + 350$;

б) $530 + 270$;

г) $-530 + (-270)$;

е) $530 + (-270)$;

з) $-530 + 270$.

15 Вычислите:

а) $67 + (33 + (-89))$;

г) $(-45 + (-22)) + (-18)$;

б) $-45 + 10 + (-15) + 90$;

д) $53 + (-14) + (-76) + (-13)$;

в) $45 + 25 + (-15) + (-75)$;

е) $32 + (-12) + 57 + (-17)$.

16 Решите уравнения:

а) $x + 650 = 1\ 000$;

б) $350 - y = 150$;

в) $a - 400 = 700$.

П

17 Сравните значения выражений:

а) $-(4 + 5)$ и $(-4) + (-5)$;

б) $-(8 + 2)$ и $(-8) + (-2)$.

18 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её. Сделайте выводы.

| a | b | $a + b$ | $-(a + b)$ | $-a$ | $-b$ | $(-a) + (-b)$ |
|-----|-----|---------|------------|------|------|---------------|
| 10 | 5 | | | | | |
| -10 | -5 | | | | | |
| -10 | 5 | | | | | |
| 10 | -5 | | | | | |



М

19 а) Сравните модуль суммы двух целых чисел и сумму их модулей. Рассмотрите разные случаи знаков чисел.

б) Возможно ли равенство $|x| + |y| = |x + y|$? Если возможно, то в каких случаях?

в) Возможно ли неравенство $|x| + |y| < |x + y|$? Если возможно, то в каких случаях?

г) Возможно ли неравенство $|x| + |y| > |x + y|$? Если возможно, то в каких случаях?

**Н**

- 20 Сделайте рисунок к данному выражению и найдите его значение:
а) $9 + 3$; б) $5 + (-7)$; в) $-4 + (-6)$; г) $12 + (-9)$.

- 21 Вычислите:
а) $140 + 360$; в) $140 + (-360)$; д) $-140 + (-360)$; ж) $-140 + 360$;
б) $470 + 230$; г) $-470 + (-230)$; е) $470 + (-230)$; з) $-470 + 230$.

- 22 Решите уравнения:
а) $x + 120 = 60$; б) $180 + y = 90$; в) $a - 250 = -400$.

**П**

- 23 Найдите значение выражения $a + b + c$ при
а) $a = 15$; $b = -28$; $c = -9$;
б) $a = -32$; $b = -19$; $c = 6$;
в) $a = 25$; $b = -16$; $c = 50$;
г) $a = -12$; $b = -20$; $c = -19$.

**М**

- 24 а) Можно ли выписать в ряд шесть целых чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительной, а сумма всех чисел была отрицательной?
б) Можно ли выписать в ряд семь целых чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительной, а сумма всех чисел была отрицательной?

**6.5****Вычитание целых чисел****Вспоминаем то, что знаем**

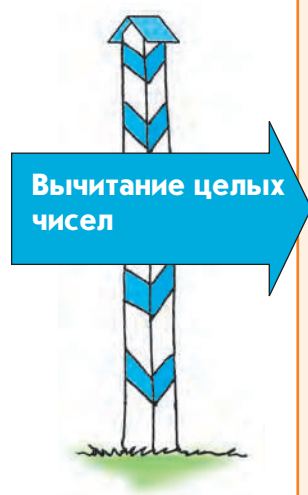
- Найдите значения выражений: $28 - 9$; $70 - 15$; $92 - 9$.
- Какое число называется разностью натуральных чисел a и b ?

- Сравните значения выражений:
 - а) $5 + (-3)$ и $5 - 3$;
 - б) $8 + (-4)$ и $8 - 4$;
 - в) $10 + (-2)$ и $10 - 2$.
- Можно ли прибавление отрицательного числа заменить вычитанием противоположного ему положительного числа?
- Можно ли вычитание положительного числа заменить прибавлением противоположного ему отрицательного числа?
- Найдите значение выражения $11 - 12$.
- Можно ли сказать, что $-1 + 12 = 11$?



- Какое число называется разностью целых чисел a и b ?
- Как найти значение выражения $5 - (-3)$?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Разность целых чисел можно определить аналогично тому, как это делалось для натуральных чисел.

Разностью двух целых чисел называется такое целое число, которое в сумме с вычитаемым даёт уменьшаемое.

Например, $2 - 5 = -3$, так как $(-3) + 5 = 2$.

Точно так же $5 - (-3) = 8$, так как $8 + (-3) = 5$;

$(-11) - (+4) = -15$, так как $(-15) + 4 = -11$;

$0 - (-2) = 2$, так как $-2 + 2 = 0$.

Итак, из определения следует, что разность $2 - 5$ равна -3 .

Сравним значения выражений $2 - 5$ и $2 + (-5)$: они равны.

Точно так же все рассмотренные выше разности можно заменить суммами:

$2 - 5 = 2 + (-5)$; $5 - (-3) = 5 + (+3)$; $(-11) - (+4) = -11 + (-4)$ и т.д.

На практике удобно пользоваться правилом, которое сводит вычитание целых чисел к сложению: **для нахождения разности целых чисел нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:**

$$x - y = x + (-y).$$

Для обоснования этого правила достаточно убедиться, что целое число $x + (-y)$ в сумме с вычитаемым y даст уменьшаемое x . Выполним указанное сложение, сначала воспользовавшись сочетательным законом, а потом тем фактом, что сумма противоположных чисел равна нулю:

$$(x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + 0 = x.$$

**Алгебраическая
сумма**

Действительно, получилось уменьшаемое x .

Пример 1. Найдём разность $-13 - 12$.

$$-13 - 12 = -13 + (-12) = -25.$$

Пример 2. Найдём разность $13 - (-12)$.

$$13 - (-12) = 13 + (+12) = 25.$$

Поскольку вычитание целых чисел можно свести к сложению, то выражение, в котором содержатся лишь действия сложения и вычитания, принято называть **алгебраической суммой**.

Например, алгебраическими суммами являются выражения:

$$x - y - z; a + b - c + d; 17 + (-3) - 21 - 2; m - (n + k) + p.$$

Название «алгебраическая сумма» объясняется тем, что любое такое выражение может быть записано в виде суммы:

$$x - y - z = x + (-y) + (-z);$$

$$17 + (-3) - 21 - 2 = 17 + (-3) + (-21) + (-2);$$

$$a + b - c + d = a + b + (-c) + d;$$

$$m - (n + k) + p = m + (-n) + (-k) + p.$$

Алгебраические суммы можно записывать без скобок. При этом используют следующие правила:

Если в алгебраической сумме перед скобками стоит знак «+», то скобки можно убрать, оставив все знаки внутри без изменения.

Если в алгебраической сумме перед скобками стоит знак «-», то скобки можно убрать, изменив все знаки внутри на противоположные.

Например:

$$17 + (-3) - 21 - 2 = 17 - 3 - 21 - 2;$$

$$m - (n + k) + (p - q) = m - n - k + p - q.$$

Развиваем умения



Н

1 Замените вычитание сложением и вычислите по образцу: $2 - 4 = 2 + (-4) = -2$.

а) $7 - 7$;

в) $3 - 5$;

д) $0 - 11$;

ж) $0 - 3$;

б) $-7 - 7$;

г) $-6 - 5$;

е) $-11 - 15$;

з) $-60 - 50$.

2 Решите уравнения:

а) $0 - x = -5$;

б) $1 - x = -7$;

в) $-7 - x = -7$;

г) $x - 9 = -9$.

3 Замените вычитание сложением и вычислите по образцу: $2 - (-4) = 2 + 4 = 6$.

а) $8 - (-7)$;

в) $19 - (-5)$;

д) $24 - (-4)$;

ж) $800 - (-700)$;

б) $-8 - (-7)$;

г) $-19 - (-5)$;

е) $-24 - (-4)$;

з) $-800 - (-700)$.

4 Найдите верные равенства:

а) $0 - (-4) = 0 + 4$;

б) $-8 - 2 = -8 - (-2)$;

в) $-3 - 2 = -3 + (-2)$;

г) $-14 - (-2) = -14 + (-2)$.

5 Начертите такую же таблицу в тетради и заполните её:

| | | | | | | | | |
|---------|----|----|---|----|-----|----|----|-----|
| a | 11 | 9 | 0 | -4 | -10 | -8 | -2 | 0 |
| b | 18 | 16 | 5 | 2 | 14 | 4 | -7 | -17 |
| $a - b$ | | | | | | | | |



6 Вычислите:

а) $-258 + 192$;

в) $-192 - 57$;

д) $245 - 471$;

ж) $154 - (-138)$;

б) $-800 - 700$;

г) $-320 - (-857)$;

е) $186 + (-467)$;

з) $194 + (-158)$.

7 Вычислите:

а) $(-10) + (-7) + (+40)$;

в) $(-7) + (+12) + (-6)$;

б) $(-18) + (-20) + (+5)$;

г) $(-4) + (-2) + (+8)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Вычислите: а) $-100 + 190$;

в) $-180 - 80$;

д) $395 - 551$;

б) $-300 - 200$;

г) $-350 - (-570)$;

е) $190 + (-400)$.

П Вариант II.

Вычислите: а) $-13 - 17 + 12 + 18$;

в) $19 - 30 - 31 - 22$;

б) $-15 + 50 - 25 - 20$;

г) $-89 - 90 - 91 - 92$.

Тренировочные упражнения.

Н

8 Замените выражение равным, не содержащим скобок. Например:

$6 + (-2) - (-3) = 6 - 2 + 3$. Найдите значения выражений:

а) $(-12) + (-9) + 90$;

в) $(-11) + 8 + (-5)$;

б) $(-7) + (-10) + 2$;

г) $(-14) + (-12) + 18$.

- 9 Замените каждое выражение равным, не содержащим скобок. Например:
 $6 - (2 + 3) + (5 - 2) = 6 - 2 - 3 + 5 - 2$. Найдите значения выражений, сложив отдельно положительные и отдельно отрицательные числа:

а) $18 + (9 - 5) + (10 + 2)$; в) $60 - (10 + 40) - (80 - 30)$;
б) $16 - (12 + 4) + (15 - 7)$; г) $11 + (27 + 33) - (51 - 29)$.

- 10 Перечислите слагаемые, входящие в алгебраическую сумму. Найдите значения выражений, группируя слагаемые удобным способом:

а) $-2 - 18 + 33 + 17$; в) $19 - 30 - 30 - 19$;
б) $-15 + 41 - 25 + 29$; г) $89 - 98 - 12 + 11$.

П

- 11 Раскройте скобки (a ; b ; c ; e ; f – целые числа):

а) $(a - b + c)$; в) $(a + b - c)$; д) $(-a - b - c)$;
б) $-(-a - b - c)$; г) $-(a + b + c)$; е) $(e - f) - (a - b + c)$.

- 12 Заключите слагаемые в скобки таким образом, чтобы перед скобками стоял знак «-» (a ; b ; c ; e ; f – целые числа):

а) $e - f - a - b - c$; в) $a + b + c + e + f$;
б) $e + f - a - b + c$; г) $a - b + c + e - f$.

- 13 Найдите неизвестное число:

а) $-27 - x = -13$; в) $-x - 3 = 9$; д) $-x + 8 = -8$;
б) $-1 - x = 5$; г) $-36 + (-x) = 0$; е) $-12 = x - 12$.



М

- 14 Убедитесь, что разность целых чисел можно находить с помощью правил передвижения по ряду целых чисел, аналогичных правилам для сложения целых чисел.

- а) Разностью целого числа x и числа 0 является число x .
б) Разностью целого числа x и ненулевого целого числа y является целое число, находящееся в ряду целых чисел на расстоянии $|y|$ от числа x влево при положительном y и вправо при отрицательном y .



Н

- 15 Вычислите:

а) $(-8) + (-5) + (-15)$; в) $(-12) + 12 + (-5)$;
б) $(-20) + (25) - (-5)$; г) $(-17) - (-22) + 9$.

16 Решите уравнения:

а) $-20 - x = -5$;

б) $1 + x = -7$;

в) $9 - x = -9$;

г) $x + 10 = 9$.

17 Замените выражение равным, не содержащим скобок. Найдите значения выражения:

а) $(-20) - (-90) + 90$;

в) $(-15) + 6 - (-11)$;

б) $(-70) + (-10) - (+20)$;

г) $(-10) + (-6) + 10$.

18 Замените выражение равным, не содержащим скобок:

а) $(20 - 10 + 5) - (11 - 2)$;

б) $9 - (12 + 18) - (51 - 29)$.



П

19 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её:

| a | b | $a - b$ | $b - a$ |
|-----|-----|---------|---------|
| 10 | 4 | | |
| -10 | 4 | | |
| 10 | -4 | | |
| -10 | -4 | | |



20 Известно, что $a = -90$; $b = 100$; $c = -150$. Найдите:

а) $a - b + c$;

б) $a - b - c$;

в) $a + b + c$;

г) $-a - b + c$.



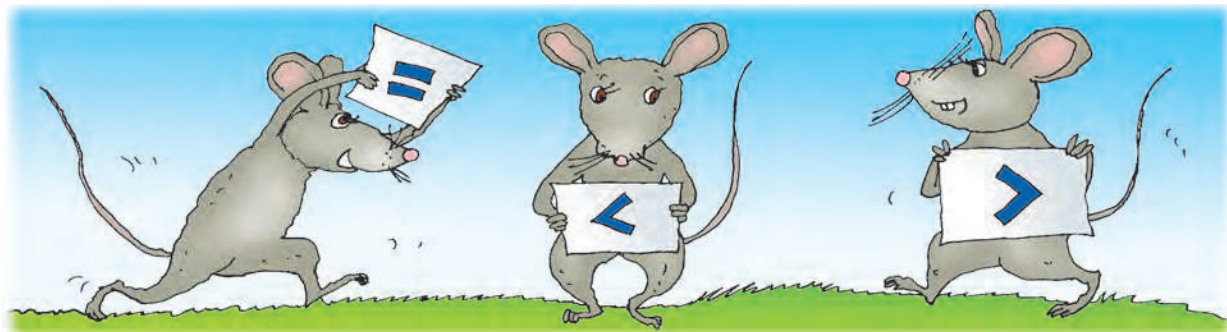
М

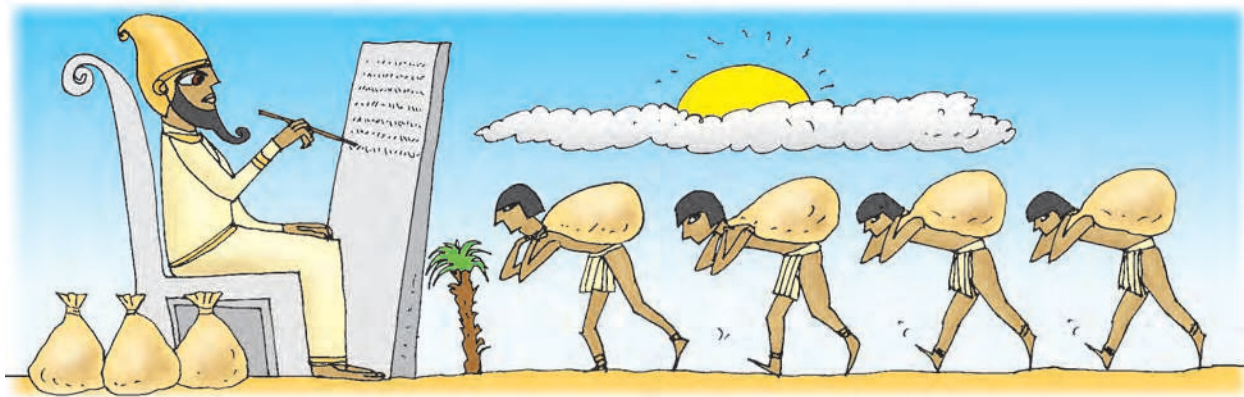
21 а) Сравните модуль разности двух целых чисел и разность их модулей. Рассмотрите разные случаи знаков чисел.

б) Возможно ли равенство $|x| - |y| = |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?

в) Возможно ли неравенство $|x| - |y| < |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?

г) Возможно ли неравенство $|x| - |y| > |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?





Вспоминаем то, что знаем

- Замените умножение сложением: $5 \cdot 4$; $6 \cdot 2$; $7 \cdot 3$.
- Составьте верные равенства, пользуясь переместительным свойством умножения:
 $5 \cdot 4 = \dots$; $6 \cdot 2 = \dots$; $7 \cdot 3 = \dots$.
Запишите переместительное свойство умножения в общем виде.
- Составьте верные равенства, пользуясь сочетательным свойством умножения:
 $5 \cdot 4 \cdot 6 = \dots$; $7 \cdot 3 \cdot 2 = \dots$.
Запишите сочетательное свойство умножения в общем виде.
- Продолжите запись: $1 \cdot a = \dots$; $a \cdot 1 = \dots$.
- Вспомните, как находится произведение натурального числа и нуля.
Запишите соответствующие формулы.

Открываем новые знания

- Найдите произведение $(-5) \cdot 4$, предполагая, что произведение и в данном случае можно заменить сложением. Какой знак у полученного вами числа?
- Какое свойство умножения даёт возможность найти произведение $4 \cdot (-5)$?
Какой знак у полученного вами числа?
- Найдите произведение: $(-1) \cdot 4$; $4 \cdot (-1)$; $(-1) \cdot 3$; $3 \cdot (-1)$.



- Чему равно произведение $(-5) \cdot (-4)$? Какой знак у полученного числа?
- Сформулируйте законы умножения для целых чисел, взяв за основу законы умножения для натуральных чисел.



Произведение любого целого числа и нуля равно нулю.
Произведением двух отличных от нуля целых чисел называется произведение их модулей, взятое со знаком «+», если знаки сомножителей одинаковые, и со знаком «−», если знаки сомножителей разные.

Например: $5 \cdot 3 = +(5 \cdot 3) = +15$;
 $(-5) \cdot (-3) = +(5 \cdot 3) = +15$;
 $5 \cdot (-3) = -(5 \cdot 3) = -15$;
 $(-5) \cdot 3 = -(5 \cdot 3) = -15$.

Коротко правила знаков при умножении формулируют так: *плюс на минус даёт минус, минус на минус даёт плюс.*
 Действие умножения целых чисел подчиняется переместительному и сочетательному законам.

Произведение двух целых чисел не зависит от порядка сомножителей:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Например: $5 \cdot (-7) = -7 \cdot 5$.

Если произведение двух целых чисел перемножить с третьим целым числом, то результат будет такой же, как если первое число перемножить с произведением второго и третьего:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Например: $(3 \cdot (-8)) \cdot (-4) = 3 \cdot (-8 \cdot (-4))$.

Сочетательный закон позволяет записывать произведение трёх сомножителей без скобок, поскольку при любой расстановке скобок в произведении $x \cdot y \cdot z$ получится один и тот же результат. Аналогично, без скобок, можно записывать произведение и большего количества сомножителей.

Произведение целых чисел определено так, чтобы для натуральных чисел оно совпадало с обычным и выполнялись переместительный и сочетательный законы.

Результат умножения целого числа на -1 равен противоположному числу:

$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x.$$

Для любого целого числа имеем: $x \cdot 0 = 0$.

Поскольку степень числа с натуральным показателем, большим 1, выражается через произведение, можно находить степени не только натуральных чисел и нуля, но и любых целых чисел.

Скажем, $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$.

Первая степень любого целого числа равна самому этому числу.

Скажем, $(-19)^1 = -19$.



Н

1 Выполните умножение:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| а) $(-3) \cdot (+5)$; | е) $(+4) \cdot (-3)$; |
| б) $(-1) \cdot (+10)$; | ж) $(-8) \cdot (+1)$; |
| в) $(-9) \cdot (0)$; | з) $(0) \cdot (+7)$; |
| г) $(-13) \cdot (+3)$; | и) $(-10) \cdot (+100)$. |
| д) $(-20) \cdot (+5)$; | к) $(+12) \cdot (-7)$. |

2 Выполните умножение:

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| а) $(-20) \cdot (-5)$; | г) $(-4) \cdot (-25)$; |
| б) $(-1) \cdot (-7)$; | д) $(-9) \cdot (-1)$; |
| в) $(-4) \cdot (-10)$; | е) $(-10) \cdot (-1\ 000)$. |

3 Вычислите:

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| а) $9 \cdot (-4)$; | г) $(-6) \cdot (-15)$; |
| б) $11 \cdot (-7)$; | д) $(-9) \cdot (-1)$; |
| в) $(-4) \cdot 6$; | е) $(-100) \cdot 80$. |

4 Сравните, не вычисляя:

- | | |
|------------------------------|---|
| а) $(-2) \cdot (-5)$ и 0 ; | г) $(-1) \cdot (-7)$ и $1 \cdot 7$; |
| б) $(-4) \cdot (+3)$ и 0 ; | д) $(-9) \cdot (-6)$ и $(-9) \cdot 6$; |
| в) $6 \cdot (-9)$ и 0 ; | е) $(-10) \cdot (-1\ 000)$ и $1\ 000 \cdot (-10)$. |

5 Подберите значение x , при котором верно равенство:

- а) $-1 \cdot x = 45$; б) $x \cdot (-1) = -22$; в) $-1 \cdot x = -42$; г) $x \cdot (-1) = 45$.

6 Начертите такую же таблицу в тетради и заполните её:

| | | | | | | | | |
|-------------|----|-----|-----|----|-----|----|----|----|
| a | 10 | -12 | 10 | -7 | 0 | -6 | 13 | -9 |
| b | 7 | 4 | -10 | -5 | -20 | 1 | -1 | -1 |
| $a \cdot b$ | | | | | | | | |

7 Пусть a и b – целые числа. В каких случаях выполняется неравенство $a \cdot b > 0$ и в каких $a \cdot b < 0$:

- а) $a > 0, b < 0$; б) $a < 0, b < 0$; в) $a > 0, b > 0$; г) $a < 0, b > 0$?

8 Вычислите:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| а) 3^4 ; | г) 2^5 ; | ж) $(-1)^4$; | к) $(-1)^3$; |
| б) $(-2)^5$; | д) $(-4)^3$; | з) $(-4)^4$; | л) $(-5)^2$; |
| в) $(-5)^3$; | е) $(-3)^4$; | и) $(-3)^3$; | м) $(-6)^2$. |

9 Определите знак степени, не производя вычислений:

- | | | | |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| а) $(-15)^4$; | г) $(-15)^3$; | ж) $(-11)^8$; | к) $(-11)^9$; |
| б) $(-20)^5$; | д) $(-42)^{11}$; | з) $(-42)^{10}$; | л) $(-50)^7$; |
| в) $(-50)^8$; | е) $(-30)^9$; | и) $(-30)^{12}$; | м) $(-60)^{22}$. |

10 Найдите произведение, используя свойства умножения:

а) $(-2) \cdot (-7) \cdot 5$;

г) $(-15) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 7$;

б) $(-2) \cdot 3 \cdot 25$;

д) $(-2) \cdot (-8) \cdot 25 \cdot (-15)$;

в) $10 \cdot (-10) \cdot 6$;

е) $(-10) \cdot (-1\,000) \cdot 45 \cdot (-2)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) Сравните с нулём: $6 \cdot (-3)$; $8 \cdot 4$; $(-5) \cdot (-9)$.

б) Сравните с нулём: $(-5)^3$; $(-3)^4$; $(-1)^5$; $(-4)^3$; $(-4)^4$; $(-6)^2$.

в) Найдите произведение, используя свойства умножения:

$(-2) \cdot 4 \cdot 15$; $(-2) \cdot (-5) \cdot 9$.

П Вариант II.

а) Сравните ($>$; $<$; $=$):

$(-1) \cdot (-9)$ и $1 \cdot 9$; $(-5) \cdot (-7)$ и $(-7) \cdot 5$; $10 \cdot (-10)$ и $10 \cdot 10$.

б) Вычислите: $(-5)^3$; $(-4)^2$; $(-1)^5$; $(-2)^4$.

в) Найдите произведение, используя свойства умножения:

$(-10) \cdot (-50) \cdot 10 \cdot (-2)$; $(-9) \cdot (-6) \cdot (-5) \cdot 10$.

Тренировочные упражнения.

Н

11 Определите, положительным или отрицательным числом является значение выражения, и выполните вычисления:

а) $(-3) \cdot (-14) \cdot 5$;

г) $(-30) \cdot (-6) \cdot 1 \cdot 15$;

б) $11 \cdot 12 \cdot (-25)$;

д) $(-1) \cdot 2 \cdot 15 \cdot (-12)$;

в) $9 \cdot (-5) \cdot 18$;

е) $(-10) \cdot (-54) \cdot (-5) \cdot (-10)$.

12 Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $(-1) \cdot (-2) \cdot x = 20$;

в) $3 \cdot x \cdot (-2) = 36$;

б) $(-9) \cdot (-3) \cdot x = -27$;

г) $x \cdot (-5) \cdot 8 = 0$.

13 а) Произведение трёх чисел положительно. Можно ли утверждать, что все три числа положительны? Приведите примеры.

б) Произведение трёх чисел равно нулю. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы один нуль.

14 Вычислите:

а) $(-1)^5$;

г) $(-1)^8$;

ж) $(-2)^3$;

б) $(-2)^4$;

д) $(-4)^2$;

з) $(-4)^3$;

в) $(-5)^2$;

е) $(-5)^3$;

и) $(-3)^4$.

- 15** Определите, положительным или отрицательным является произведение нескольких целых чисел, не равных 0, если среди них
 а) чётное число отрицательных чисел;
 б) нечётное число отрицательных чисел.
- 16** Пусть a и b – некоторые целые числа, причём $a < 0$ и $b < 0$. Сравните с нулём:
 а) $a \cdot b$; б) $(-a) \cdot (-b)$; в) $(-a) \cdot b$; г) $a \cdot (-b)$.

М

- 17** Покажите, что выражения можно упростить следующим образом:
 $(-5) \cdot (-8) \cdot 9 = (-5) \cdot (-2) \cdot 4 \cdot 9 = 10 \cdot 36 = 360$.
 а) $14 \cdot 7 \cdot (-5)$; б) $45 \cdot 4 \cdot 15$; в) $5 \cdot (-5) \cdot 12$.



Н

- 18** Вычислите:
 а) $6 \cdot (-7)$; г) $(-9) \cdot (-12)$;
 б) $15 \cdot (-4)$; д) $(-8) \cdot (-1)$;
 в) $(-8) \cdot 5$; е) $(-1\,000) \cdot 4$.
- 19** Вычислите, используя свойства умножения:
 а) $(-7) \cdot (-13) \cdot 8$; г) $(-20) \cdot (-11) \cdot 1 \cdot 10$;
 б) $14 \cdot 13 \cdot (-5)$; д) $(-1) \cdot 2 \cdot 30 \cdot (-2)$;
 в) $9 \cdot (-5) \cdot 12$; е) $(-10) \cdot (-20) \cdot (-2) \cdot (-100)$.
- 20** Вычислите:
 а) $(-1)^5$; в) $(-1)^6$; д) $(-11)^3$;
 б) $(-12)^2$; г) $(-10)^3$; е) $(-10)^4$.



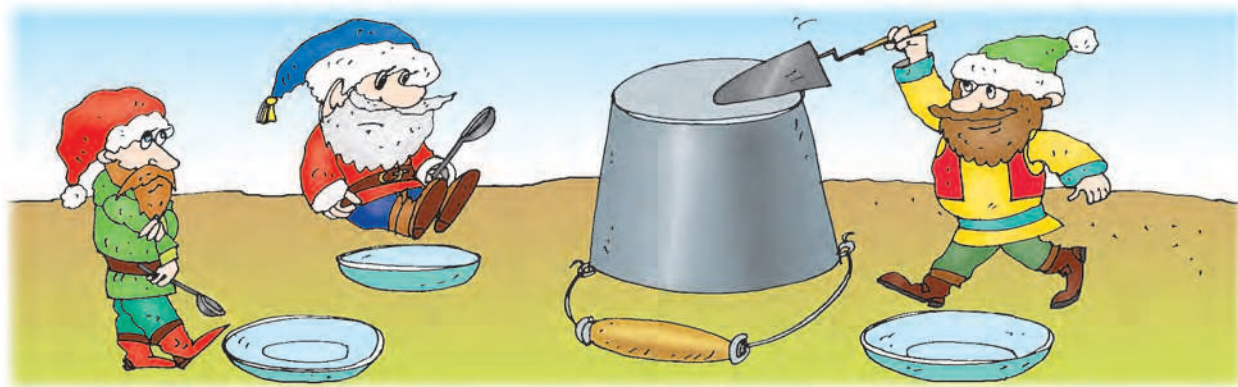
П

- 21** Укажите неверное равенство ($a \neq 0$):
 а) $1 \cdot (-a) = -a$; б) $(-1) \cdot a = -a$; в) $(-1) \cdot (-a) = -a$.
- 22** Представьте число 150 в виде произведения нескольких множителей, среди которых есть отрицательные.



М

- 23** а) Сравните модуль произведения двух целых чисел и произведение модулей. Рассмотрите разные случаи знаков чисел.
 б) Возможно ли равенство $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$? Если возможно, то в каких случаях?
 в) Возможно ли неравенство $|x| \cdot |y| < |x \cdot y|$? Если возможно, то в каких случаях?
 г) Возможно ли неравенство $|x| \cdot |y| > |x \cdot y|$? Если возможно, то в каких случаях?
- 24** Чему равно значение выражения $x \cdot |x|$
 а) при $x > 0$; б) при $x < 0$?



Вспоминаем то, что знаем

- Проверьте деление с помощью умножения:
а) $42 : 2 = 21$; б) $24 : 6 = 4$; в) $0 : 3 = 0$.
- Какое число называется частным двух натуральных чисел?

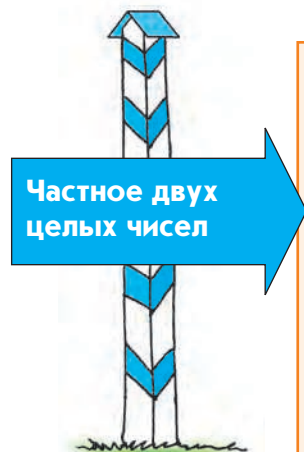
Открываем новые знания

- Проверьте деление с помощью умножения:
а) $(-42) : 2 = -21$; б) $(-24) : 6 = -4$; в) $0 : (-3) = 0$.
- Выполните деление, подбирая частное: $(-24) : (-6)$.



- Какое число называется частным двух целых чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Частным целых чисел a и b называется такое целое число c , что $a = b \cdot c$.

Из этого определения частного следует правило деления целых чисел, напоминающее соответствующее правило для умножения:

Частным двух отличных от нуля целых чисел является частное их модулей, взятое со знаком «+», если знаки чисел одинаковые, и со знаком «-», если знаки чисел разные.

Частное нуля и любого ненулевого целого числа равно нулю. На нуль делить нельзя!

В отличие от трёх предыдущих арифметических действий с целыми числами (сложения, вычитания и умножения), которые выполнимы для любых двух целых чисел, разделить одно целое число на другое можно не всегда. Например, нет такого целого числа, которое являлось бы частным от деления числа (-7) на число 8.

Развиваем умения



Н

1 Проверьте деление с помощью умножения:

а) $(-45) : 5 = -9$;

в) $(-12) : (-2) = 6$;

д) $15 : (-1) = -15$;

б) $80 : (-8) = -10$;

г) $0 : (-11) = 0$;

е) $(-35) : 5 = -7$.

2 Выполните деление:

а) $(-45) : 15$;

г) $(-30) : (-2)$;

ж) $100 : (-20)$;

к) $1 : (-1)$;

б) $(-48) : 12$;

д) $(-60) : (-5)$;

з) $90 : (-30)$;

л) $81 : (-81)$;

в) $(-50) : 1$;

е) $(-99) : (-11)$;

и) $150 : (-30)$;

м) $(-240) : 8$.

3 Решите уравнение, подбирая значение x :

а) $x : 1 = -20$;

в) $(-9) : x = 9$;

д) $x : 2 = -4$;

б) $x : (-27) = 0$;

г) $x \cdot (-1) = -1$;

е) $100 : x = -20$.

4 Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $23 \cdot x = -46$;

б) $x \cdot (-15) = -90$;

в) $-12 \cdot x = 60$;

г) $x \cdot (-17) = -48$.

5 Начертите такую же таблицу в тетради и заполните её:

| | | | | | | | | | | | |
|---------|----|------|------|-----|----|----|----|----|-----|-----|------|
| a | 96 | -121 | -150 | -30 | 78 | 0 | 28 | 56 | -56 | 90 | -180 |
| b | -8 | -11 | 150 | -1 | -3 | -1 | -4 | -8 | -14 | -15 | -36 |
| $a : b$ | | | | | | | | | | | |

6 Пусть a и b – целые числа и a делится на b . В каких случаях выполняется неравенство $a : b > 0$ и в каких $a : b < 0$:

а) $a > 0, b < 0$;

б) $a < 0, b < 0$;

в) $a > 0, b > 0$;

г) $a < 0, b > 0$?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Какое число надо умножить на (-4) , чтобы получилось: 56 ; -168 ; 400 ?
- б) Сравните ($>$; $<$; $=$): $(-30) : 6$ и 0 ; $(-30) : (-6)$ и 0 .

П Вариант II.

- а) Выполните деление: $(-20) : 5$; $45 : (-9)$; $(-60) : (-20)$.
- б) Укажите неверное равенство: $(-a) : 1 = -a$; $0 : a = -a$; $(-a) : (-1) = a$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 7 Выполните деление по образцу:
 $1\ 224 : (-2) = - (1\ 224 : 2)$;
 $(-1\ 224) : (-2) = + (1\ 224 : 2)$

$$\begin{array}{r|l} 1\ 224 & 2 \\ -12 & 612 \\ \hline 2 & \\ -2 & \\ \hline 4 & \\ -4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

- а) $(-43\ 212) : (-78)$; г) $48\ 762 : (-86)$;
б) $(-72\ 675) : 85$; д) $1\ 794 : (-23)$;
в) $(-21\ 333) : (-547)$; е) $9\ 268 : (-331)$.

- 8 Подберите значение x , при котором верно равенство:

- а) $(-12) \cdot x = 36$; д) $(-15) \cdot x = 45$;
б) $x : 8 = -7$; е) $x : (-11) = 44$;
в) $x \cdot (-13) = -69$; ж) $x \cdot 14 = -56$;
г) $x : (-7) = -9$; з) $(-64) : x = 8$.

- 9 Начертите такую же таблицу в тетради и заполните её:

| x | y | $x + y$ | $x - y$ | $x \cdot y$ | $x : y$ |
|------|-----|---------|---------|-------------|---------|
| -54 | -27 | | | | |
| -240 | 8 | | | | |
| 11 | -11 | | | | |
| -10 | -10 | | | | |

П

- 10 Известно, что $a = 60$; $b = 12$; $c = 5$. Найдите значение выражения:
а) $a : b \cdot c$; б) $a : (b \cdot c)$; в) $a \cdot b : c$.

**М**

- 11** а) Сравните модуль частного двух целых чисел и частное модулей (разумеется, при делителе, отличном от нуля!). Рассмотрите разные случаи знаков чисел.

б) Возможно ли равенство $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$? Если возможно, то в каких случаях?

в) Возможно ли неравенство $\left| \frac{x}{y} \right| < \frac{|x|}{|y|}$? Если возможно, то в каких случаях?

г) Возможно ли неравенство $\left| \frac{x}{y} \right| > \frac{|x|}{|y|}$? Если возможно, то в каких случаях?

**Н**

- 12** Выполните деление:

а) $(-40) : 20$; в) $(-12) : (-4)$; д) $100 : (-5)$; ж) $10 : (-10)$;
б) $(-54) : 6$; г) $(-90) : (-3)$; е) $120 : (-30)$; з) $(-70) : (-70)$.

- 13** Выполните деление:

а) $(-7\ 227) : (-9)$; в) $1\ 332 : (-3)$; д) $(-2\ 316) : 12$;
б) $1\ 302 : (-42)$; г) $(-2\ 205) : (-7)$; е) $3\ 208 : (-8)$.

- 14** Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $(-12) : x = 3$; в) $x : (-13) = -5$; д) $-x : 11 = 4$;
б) $(-15) : x = -5$; г) $x : 14 = -3$; е) $125 = -250 : x$.

**П**

- 15** Чему равно значение выражения $\frac{x}{|x|}$

а) при $x > 0$; б) при $x < 0$?

**М**

- 16** Справедлив ли для действия деления сочетательный закон? Сначала запишите, как он должен был бы выглядеть, а затем выясните, всегда ли верно записанное равенство.



Вспоминаем то, что знаем

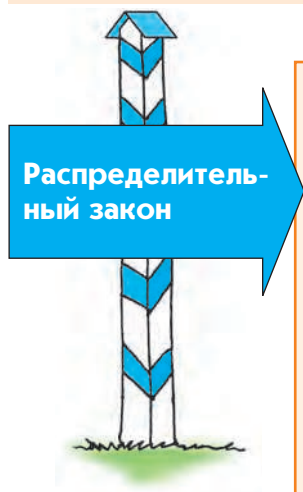
- Верны ли равенства: $7 \cdot (5 + 3) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3$; $7 \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 3$?
- Как называется закон, на основании которого составлены эти равенства?
- Запишите этот закон для натуральных чисел a , b , c .
- Нужно ли для натуральных чисел отдельно формулировать правило умножения разности на число и правило умножения суммы на число?

Открываем новые знания

- Верны ли равенства: $(-7) \cdot (5 + (-3)) = (-7) \cdot 5 + (-7) \cdot (-3)$;
 $(-7) \cdot (5 - 3) = (-7) \cdot 5 + (-7) \cdot (-3)$; $(-7) \cdot (5 + (-3)) = (-7) \cdot (5 - 3)$?
- Выполняется ли распределительный закон для целых чисел a ; b ; c ? Проверьте это, самостоятельно взяв несколько разных значений a , b , c .



- Сформулируйте распределительный закон для целых чисел.



Для целых чисел справедлив распределительный закон:
При умножении суммы двух целых чисел на целое число можно умножить на это число каждое слагаемое в отдельности и сложить полученные произведения:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Полное название этого закона «распределительный закон умножения относительно сложения». Его также называют «правило умножения суммы на число».

Например, $(-7 + 11) \cdot (-4) = (-7) \cdot (-4) + 11 \cdot (-4)$.

Действительно, выражение в левой части равно $4 \cdot (-4) = -16$, а выражение в правой части равно $28 - 44 = -16$.

Распределительный закон остаётся справедливым не только для двух, но и для любого другого количества слагаемых, например:

$$(u + v + x + y) \cdot z = u \cdot z + v \cdot z + x \cdot z + y \cdot z.$$

При работе с натуральными числами вы рассматривали также правило умножения разности на число (или, по-другому, распределительный закон умножения относительно вычитания):

$$(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z.$$

Для целых чисел это правило тоже остаётся верным, но в нём нет необходимости – ведь вычитание целых чисел сводится к сложению, и поэтому правило умножения разности на число можно получить из правила умножения суммы на число:

$$(x - y) \cdot z = (x + (-y)) \cdot z = x \cdot z + (-y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z.$$

Вспоминаем то, что знаем

Верны ли равенства: $7 \cdot (5 + 3) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3$; $7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 7 \cdot (5 + 3)$?

Открываем новые знания

Верны ли равенства:

$$(-7) \cdot ((-5) + (-3)) = (-7) \cdot (-5) + (-7) \cdot (-3);$$

$$(-7) \cdot (-5) + (-7) \cdot (-3) = (-7) \cdot ((-5) + (-3))?$$



Как называется переход от произведения $(a + b) \cdot c$ к сумме $a \cdot c + b \cdot c$?

Как называется переход от суммы $a \cdot c + b \cdot c$ к произведению $(a + b) \cdot c$?

**Раскрытие
скобок и выне-
сение за скобки**

Так же, как и для натуральных чисел, замена выражения $(x + y) \cdot z$ на равное ему выражение $x \cdot z + y \cdot z$ называется раскрытием скобок, а замена выражения $x \cdot z + y \cdot z$ на равное ему выражение $(x + y) \cdot z$ называется вынесением за скобки (общего множителя z).

Оба преобразования можно использовать для упрощения вычислений.

Развиваем умения



Н

1 Запишите без скобок. Работайте по образцу $(-3) \cdot a = -3a$:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| а) $4 \cdot (-a)$; | в) $(-6) \cdot (-a)$; |
| б) $(-1) \cdot (-c)$; | г) $(-16) \cdot y$. |

2 Представьте в виде степени:

- а) $(-a)(-a)(-a)(-a)(-a)$;
 б) $(-2a)(-2a)(-2a)(-2a)(-2a)(-2a)$;
 в) $(-4a)(-4a)(-4a)(-4a)(-4a)$.

3 Упростите выражения:

- а) $2 \cdot (-2a)$; б) $2a \cdot 3$; в) $(-2) \cdot (-2a)$; г) $2a \cdot (-3)$.

4 Упростите выражения:

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| а) $4 \cdot (-2a)$; | г) $(-6x) \cdot (-3)$; | ж) $5 \cdot (-4y)$; | к) $(-7c) \cdot 7$; |
| б) $(-1) \cdot (4a)$; | д) $(-16) \cdot 3y$; | з) $(-5a) \cdot (-5)$; | л) $(-16y) \cdot 3$; |
| в) $4a : 2$; | е) $(-6x) : (-3)$; | и) $(-8y) : (-4)$; | м) $(-15c) : 5$. |

5 Запишите произведение в виде суммы по образцу:

$$(-6) \cdot (9 + (-10)) = (-6) \cdot 9 + (-6) \cdot (-10).$$

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| а) $5 \cdot (6 + (-11))$; | г) $(-7) \cdot ((-4) + (-5))$; | ж) $(-2 - 7) \cdot (-5)$; |
| б) $10 \cdot (8 - 12)$; | д) $(-4) \cdot (-9 - 6)$; | з) $(-8 + 19) \cdot (-10)$; |
| в) $(25 + 15) \cdot (-9)$; | е) $(45 - 25) \cdot (-11)$; | и) $(-9) \cdot (-3 - (-4))$. |

6 Верны ли равенства:

а) $(-5) \cdot (4 + 12) = -20 + 60$;

в) $(-7) \cdot (-3 - 9) = 21 + 27$;

б) $(-9) \cdot (7 - 11) = -63 + 99$;

г) $(-3) \cdot (-10 + 5 - 8) = 30 - 15 + 24$?

7 Раскройте скобки и найдите значение выражения:

а) $(-3) \cdot (15 + 11)$;

г) $(-5) \cdot (-4 - 20)$;

ж) $(7 - 9) \cdot (-8)$;

б) $6 \cdot (7 - 15)$;

д) $(-6) \cdot (-9 + 5)$;

з) $(-7) \cdot (-5 - 6)$;

в) $(-5) \cdot (4 + 12 - 10)$;

е) $(7 - 2 - 10) \cdot (-11)$;

и) $(-9 + 2) \cdot (-6)$.

8 Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $(-8) \cdot (-13) + (-8) \cdot (-37)$;

в) $83 \cdot (-98) + 83 \cdot (-2)$;

б) $(-99) \cdot 25 + (-99) \cdot 15$;

г) $11 \cdot (-7) + 11 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) Раскройте скобки и найдите значение выражения:

$(-4) \cdot (16 + 12)$; $(-7) \cdot (-5 - 17)$.

б) Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

$(-9) \cdot (-24) + (-9) \cdot (-26)$; $99 \cdot (-97) + 99 \cdot (-3)$.

в) Упростите выражения: $2 \cdot (-4a)$; $3a \cdot 3$; $(-5) \cdot (-2a)$.

П Вариант II.

а) Вычислите: $70 \cdot 87 - 70 \cdot 13$; $(-58) \cdot 34 - 58 \cdot 66$.

б) Упростите выражения и найдите их значения:

$(-12) \cdot (8 + 5) - 8 \cdot (-12)$;

$4 \cdot (-48 + 8) + 36 \cdot 4$.

Тренировочные упражнения.

Н

9 Упростите выражения:

а) $3 \cdot (-4a)$;

г) $(-8x) \cdot (-2)$;

ж) $7 \cdot (-2y)$;

к) $(-9c) \cdot 11$;

б) $(-1) \cdot (12c)$;

д) $(-15) \cdot 6y$;

з) $(-4a) \cdot (-4)$;

л) $(-12y) \cdot 3$;

в) $6a : 2$;

е) $(-8x) : (-4)$;

и) $(-9y) : (-3)$;

м) $(-15c) : 5$.

10 Упростите выражения:

а) $(-11) \cdot (-8 + 5) - 5 \cdot (-11)$;

в) $25 \cdot (45 - 100) + 25 \cdot (-100)$;

б) $(-9) \cdot (-48 + 15) + 48 \cdot (-9)$;

г) $5 \cdot (80 - 90) + 5 \cdot (-90)$.

11 Вынесите общий множитель за скобки. Работайте по образцу:

$4 \cdot 37 - 4 \cdot (-13) = 4 \cdot (37 - (-13)) = 4 \cdot (37 + 13)$.

а) $-11 \cdot 8 - 11 \cdot 2$;

б) $-72 \cdot 35 - 48 \cdot 35$;

в) $55 \cdot 19 - 19 \cdot 45$;

г) $-67 \cdot 33 + 49 \cdot 33$.

12 Вынесите общий множитель за скобки со знаком «-». Работайте по образцу:

$4 \cdot 37 - 4 \cdot (-13) = -4 \cdot (-37 - 13)$.

а) $-11 \cdot 8 - 11 \cdot 2$;

б) $-72 \cdot 35 - 48 \cdot 35$;

в) $55 \cdot 19 - 19 \cdot 45$;

г) $-67 \cdot 33 + 49 \cdot 33$.

13 Вычислите:

а) $19 \cdot 64 + 19 \cdot 36$;

б) $43 \cdot 457 - 557 \cdot 43$;

в) $80 \cdot 198 - 80 \cdot 12$;

г) $-67 \cdot 23 - 67 \cdot 77$.



П

14 Покажите, что:

а) $44 \cdot 15 - 55 \cdot 17 + 22 \cdot 25$ делится на 11;

б) $12 \cdot 39 - 26 \cdot 14 + 13 \cdot 15$ делится на 13.



М

15 а) Сформулируйте и запишите правило деления на произведение.

$x : (y \cdot z) = \dots$

б) Сформулируйте и запишите правило деления на частное.

$x : (y : z) = \dots$

**Н**

16 Раскройте скобки и найдите значение выражения:

- а) $(-2) \cdot (12 + 11)$; г) $(-6) \cdot (-15 - 20)$; ж) $(-2 - (-8)) \cdot (-7)$;
б) $8 \cdot (5 - 30)$; д) $(-7) \cdot (-3 + 7)$; з) $(-5) \cdot (-9 + 4)$;
в) $(-15) \cdot (2 + 10 - 4)$; е) $(8 - 3 - 11) \cdot (-9)$; и) $(4 - (-8)) \cdot (-2)$.

17 Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

- а) $(-9) \cdot (-15) + (-9) \cdot (-45)$; в) $87 \cdot (-72) + 87 \cdot (-28)$;
б) $(-18) \cdot 80 + (-18) \cdot 20$; г) $110 \cdot (-6) + 110 \cdot (-2) + 110 \cdot (-2)$.

18 Вычислите:

- а) $21 \cdot 14 + 21 \cdot 6$; в) $-90 \cdot 88 - 90 \cdot 12$;
б) $77 \cdot 1\,298 - 1\,198 \cdot 77$; г) $-777 \cdot 330 - 670 \cdot 777$.

**П**

19 Вычислите:

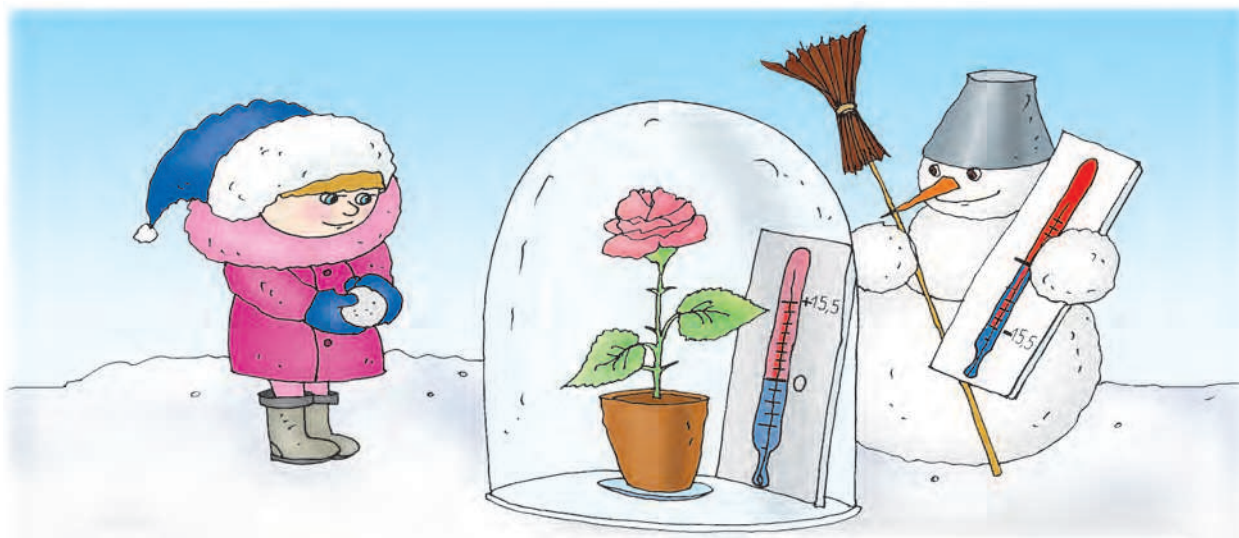
- а) $32 \cdot 43 - 22 \cdot 43 - 52 \cdot 53 + 42 \cdot 53$;
б) $68 \cdot 2 - 68 \cdot 15 + 12 \cdot 2 - 68 \cdot 5$;
в) $88 \cdot 75 - 12 \cdot 45 + 12 \cdot 75 - 88 \cdot 45$.

20 Найдите значение выражения:

- а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ (по очереди идут знаки «+» и «-»);
б) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - \dots - 99 - 100$ (по очереди идут два знака «+», два знака «-» и т.д.).

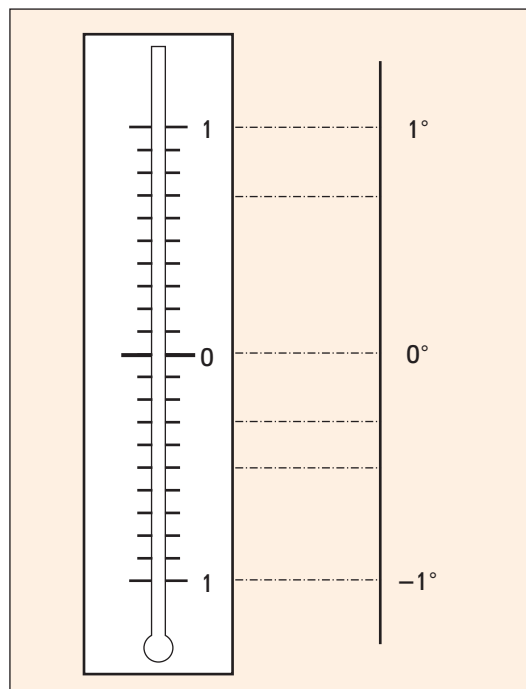
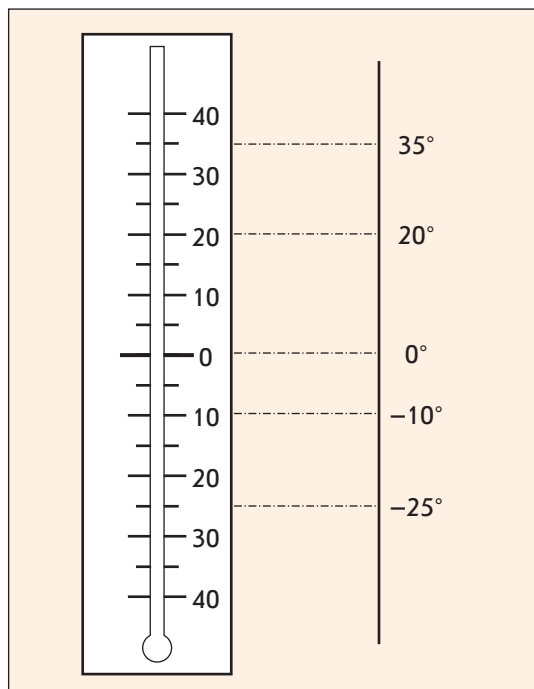
**М**

21 Докажите распределительный закон $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для целых чисел, считая его известным для натуральных чисел и нуля.



Вспоминаем то, что знаем

- Рассмотрите левый рисунок и объясните, какие значения температур на нём отмечены.
- Какие из них положительные? Какие отрицательны?

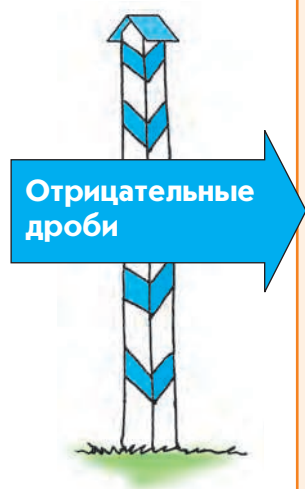


- Запишите значения температур, отмеченных на правом рисунке.
- Начертите в тетради числовую прямую (величину единичного отрезка удобно принять равной 10 клеткам) и отметьте на ней записанные значения температур.



- Могут ли отрицательные числа быть дробными?
- Как отрицательные дробные числа изображаются на числовой прямой?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



В предыдущей главе вы познакомились с целыми отрицательными числами, научились сравнивать их и изображать на числовой прямой. Целые отрицательные числа вместе с целыми положительными числами и числом нуль образуют *множество целых чисел*. Вы научились выполнять над числами из этого множества четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление.

Ещё раньше вы познакомились с дробными числами (как вы уже сейчас понимаете, положительными), причём как обыкновенными, так и десятичными дробями. Вы научились сравнивать дробные числа, по-разному их записывать, изображать их на числовом луче и выполнять действия над ними.

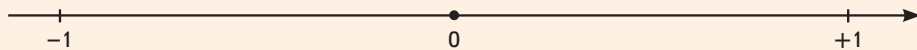
Теперь мы рассмотрим отрицательные дробные числа.

Понятно, что значение температуры может быть не только целым числом, скажем 5° тепла или 5° мороза; значение температуры может выражаться и дробным числом, например $5\frac{1}{2}^\circ$ тепла или $5\frac{1}{2}^\circ$ мороза. И точно так же, как мы делали запись $+5^\circ$ или -5° , можно писать $+5\frac{1}{2}^\circ$ или $-5\frac{1}{2}^\circ$. Так мы приходим к понятию отрицательной дроби.

Дроби, с которыми мы работали ранее, называются положительными дробями. Например, положительными дробями являются $\frac{1}{3}$; 6,35; $\frac{22}{7}$; $32\frac{15}{19}$. Положительные дроби можно записывать в том же виде, что и прежде (так, как они записаны в только что рассмотренном примере), а можно записывать со знаком «+» перед дробью: $+\frac{1}{3}$; $+6,35$; $+\frac{22}{7}$; $+32\frac{15}{19}$.

Отрицательные дроби записываются с помощью знака «–» перед положительными дробями, точно так же, как целые отрицательные числа записывались с помощью знака «–» перед натуральными числами: $-\frac{1}{3}$; $-6,35$; $-\frac{22}{7}$; $-32\frac{15}{19}$.

Отрицательные дроби можно изображать точками числовой прямой. Напомним: это такая прямая, на которой выбраны начало отсчёта (точка, соответствующая числу 0), единичный отрезок и положительное направление. Обычно числовая прямая располагается горизонтально, а положительное направление выбирается вправо от начала отсчёта и отмечается стрелкой:



Когда мы изображаем на числовой прямой точку $5\frac{1}{2}$, то откладываем отрезок длиной $5\frac{1}{2}$ вправо от начала. Точно так же поступают при изображении на числовой прямой и других положительных дробей.

Когда мы изображаем на числовой прямой точку $-5\frac{1}{2}$, то откладываем отрезок длиной $5\frac{1}{2}$ влево от начала. Точно так же поступают при изображении на числовой прямой и других отрицательных дробей.

Вспомним ещё раз, что целые отрицательные числа вместе с целыми положительными числами и числом нуль образуют *множество целых чисел*. Аналогично этому отрицательные дроби вместе с положительными дробями и числом нуль образуют *множество рациональных чисел*. Поскольку, как вы уже знаете, целые числа можно считать дробями со знаменателем 1, **множество целых чисел является подмножеством (частью) множества рациональных чисел.**



Н

- 1 Объясните, как информация перенесена из левой таблицы в правую. Что означают знаки «+» и «-» в правой таблице?

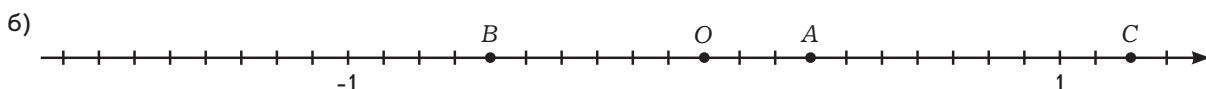
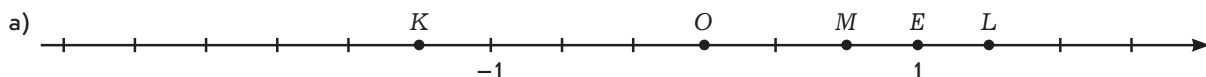
| Дата | Приход (тыс. р.) | Расход (тыс. р.) |
|-----------|---------------------|---------------------|
| 30 января | 3,2 5,5 | 3,8 |
| 31 января | 4,5 | 7,6 |

| Дата | Движение денежных средств (тыс. р.) |
|-----------|---|
| 30 января | +3,2 +5,5 -3,8 |
| 31 января | +4,5 -7,6 |

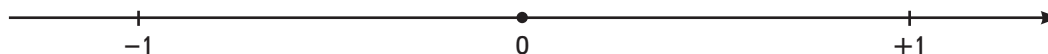
- 2 Прочитайте числа: $\frac{1}{2}$; 6; $-\frac{1}{2}$; $3\frac{3}{4}$; 3,4; -3,4; -100. Укажите среди них:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| а) натуральные числа; | д) дробные положительные числа; |
| б) целые числа; | е) дробные отрицательные числа; |
| в) целые положительные числа; | ж) рациональные числа; |
| г) целые отрицательные числа; | з) отрицательные десятичные дроби. |

- 3 а) Является ли число 0 рациональным?
 б) Назовите несколько положительных рациональных чисел. Где они расположены на числовой прямой: слева или справа от нуля?
 в) Назовите несколько отрицательных рациональных чисел. Где они расположены на числовой прямой: слева или справа от нуля?
- 4 Некоторые точки на числовой прямой обозначены буквами. Запишите их координаты:



- 5 Отметьте на числовой прямой точки: $A\left(\frac{1}{3}\right)$; $B\left(-\frac{3}{4}\right)$; $C\left(-\frac{5}{6}\right)$.



- 6 Запишите какие-нибудь пять чисел, расположенных между -1 и 1 .

- 7 Назовите число, противоположное данному:

а) 12; б) -15 ; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0,001; д) $-2,5$; е) 0; ж) $\frac{4}{11}$; з) $-7,77$.

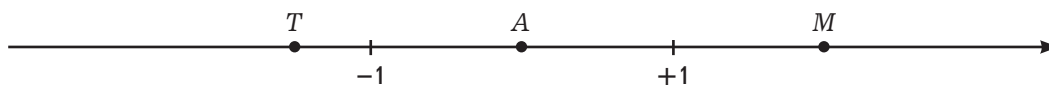
- 8 Начертите числовую прямую, отметьте точками каждое из данных чисел, а также числа, им противоположные:

а) 2; б) -5 ; в) $-1\frac{1}{3}$; г) 0,2; д) $-0,5$; е) -3 ; ж) $\frac{1}{2}$; з) $-2,5$.

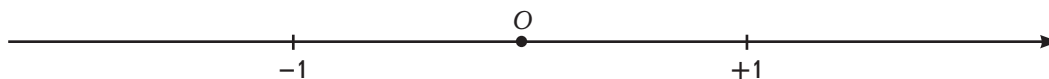
Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Запишите координаты точек A ; M ; T :

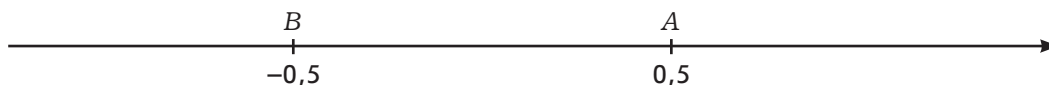


- б) Отметьте на числовой прямой точки: $A\left(\frac{1}{3}\right)$; $B\left(-\frac{1}{3}\right)$; $C\left(2\frac{2}{3}\right)$.



П Вариант II.

- а) Определите и отметьте начало отсчёта точкой O , отметьте единичный отрезок.

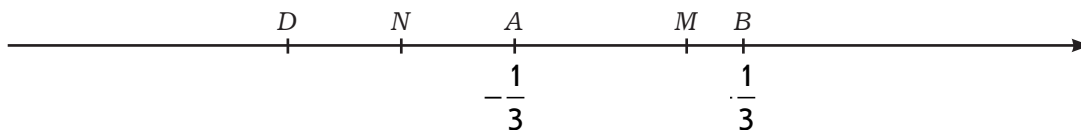


- б) На числовой прямой изображены точки $A(-1,5)$ и $B(4,5)$. Выразите в единичных отрезках длину отрезка AB .

Тренировочные упражнения.

Н

- 9 Отметьте и обозначьте начало отсчёта и единичный отрезок. Запишите координаты точек D ; N ; M .



- 10 Назовите каких-нибудь три рациональных числа, расположенных на числовой прямой:
- а) правее числа 2;
 - б) левее числа 2;
 - в) правее числа -2 ;
 - г) левее числа -2 .
- 11 Отметьте на числовой прямой три любых положительных рациональных числа, а затем найдите и отметьте противоположные им числа.

П

- 12 Точка числовой прямой $A(6)$ – центр симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $M(\frac{1}{3})$; б) $N(2,5)$; в) $V(-0,5)$; г) $K(7,5)$; д) $L(8)$.

- 13 Точки M и N числовой прямой симметричны относительно точки A . Укажите координату точки A для пар точек:

а) $M(-8)$ и $N(6)$; б) $M(-1,5)$ и $N(5,5)$; в) $M(-0,5)$ и $N(-1)$.

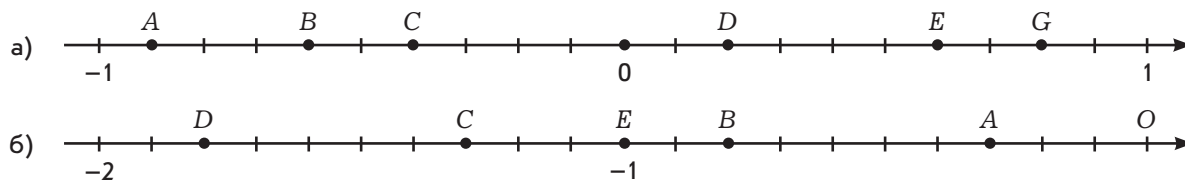


М

- 14 Точки $A(-14)$ и $B(-5)$ симметричны относительно некоторой точки C числовой прямой. Какая точка симметрична точке $D(5\frac{1}{2})$ относительно той же точки C ?

**Н**

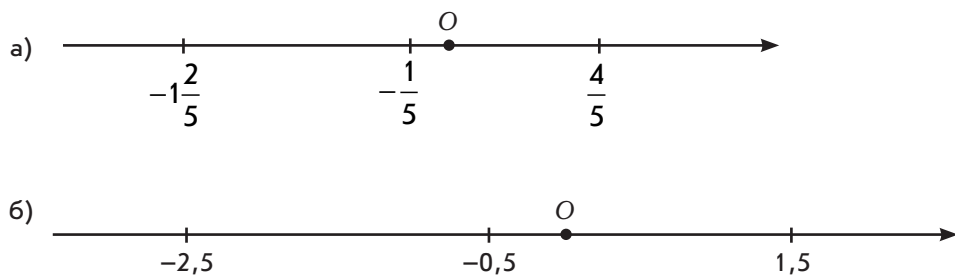
- 15** Некоторые точки на числовой прямой обозначены буквами. Запишите их координаты:



- 16** Начертите такую же таблицу в тетради и заполните её:

| | | | | | | | |
|------|---|----|------------------|---|------|---------------|----------------|
| a | 2 | -2 | $2\frac{13}{27}$ | | | | |
| $-a$ | | | | 9 | -5,4 | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{2}{3}$ |

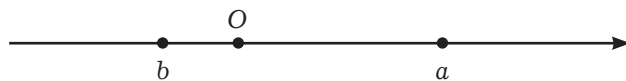
- 17** На числовой прямой отмечены некоторые числа. Отметьте противоположные им числа:

**П**

- 18** На числовой прямой отмечены точки $A\left(-\frac{3}{8}\right)$; $B\left(-\frac{5}{8}\right)$ и $C\left(-\frac{1}{8}\right)$.

Какими станут координаты этих точек, если начало координат перенести:
а) в точку A ; б) в точку B ; в) в точку C ?

- 19** На числовой прямой отмечено начало, а также числа a и b . Отметьте с помощью циркуля числа, противоположные числам a и b .



**М**

20 Концы отрезка AB имеют координаты:

а) $A(-1,2)$, $B(0)$; б) $A(-1,2)$, $B(0,4)$.

Какую координату имеет точка N этого отрезка такая, что $AN : NB = 3 : 1$?

7.2

Модуль рационального числа



Вспоминаем то, что знаем

- Начертите числовую прямую, выберите единичный отрезок и отметьте на этой прямой точки: $A\left(\frac{1}{2}\right)$; $D\left(-\frac{1}{2}\right)$; $O(0)$; $M\left(-1\frac{1}{2}\right)$; $N\left(1\frac{1}{2}\right)$.

Открываем новые знания

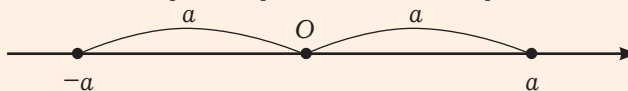
- На каких расстояниях от начала отсчёта находятся точки A и D ; M и N ?



- Как вы думаете, что называется модулем рационального числа? Верны ли для модулей рациональных чисел правила, известные вам для модулей целых чисел?

Аналогично тому, как это было для целых чисел, можно говорить о модулях дробных чисел.

Модулем дробного числа называется расстояние от точки, соответствующей этому числу на числовой прямой, до начала.



Например, модуль числа $5\frac{1}{2}$ равен $5\frac{1}{2}$ и модуль числа $-5\frac{1}{2}$ равен $5\frac{1}{2}$.

Как и ранее, модуль числа обозначается с помощью прямых скобок. Например, $\left|5\frac{1}{2}\right| = 5\frac{1}{2}$; $\left|-5\frac{1}{2}\right| = 5\frac{1}{2}$.

Модули дробных чисел можно находить, пользуясь таким же набором правил, как и для целых чисел, в формулировках этих правил можно писать «рациональное число», или для краткости просто «число»:

Модуль положительного числа равен самому этому числу.

Модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному числу.

Модуль нуля равен нулю.

Дробные числа $\frac{1}{6}$ и $-\frac{1}{6}$; $94,12$ и $-94,12$; $5\frac{1}{2}$ и $-5\frac{1}{2}$, $\frac{m}{n}$ и $-\frac{m}{n}$ называются **противоположными**.

Для противоположных дробных чисел верны те же свойства, что и для противоположных целых чисел, поэтому в формулировках этих свойств можно писать «рациональное число», или для краткости просто «число»:

Противоположные числа на числовой прямой симметричны относительно начала (точки 0).

У противоположных чисел одинаковые модули, но разные знаки.

Модули противоположных чисел равны.

Если перед числом поставить знак «+», то получим то же самое число.

Если перед числом поставить знак «-», то получим противоположное число.

Модуль
рационального
числа



Н

1 Найдите для каждого числа противоположное: $\frac{1}{125}$; 125 ; 7 ; -7 ; $\frac{1}{7}$.

2 Найдите значение:

- а) m , если $-m = \frac{1}{9}$; в) k , если $-k = -6,95$; д) f , если $-f = -\frac{10}{3}$;
б) $-n$, если $n = -\frac{4}{25}$; г) $-d$, если $d = 1,1$; е) $-a$, если $a = -4$.

3 Найдите модуль каждого из чисел: $12,5$; $-12,5$; $0,8$; $-9\frac{15}{17}$; -6 .

4 Запишите все числа, имеющие указанный модуль:

- а) $2,6$; б) $0,4$; в) 0 ; г) 154 .

5 а) Известно, что $|x| = 1,8$. Чему равен $|-x|$?

- б) Найдите $|x|$, если $|-x| = 5,4$.

6 Из двух чисел выберите то, у которого модуль больше:

- а) $1,7$ и $1,8$; б) $-6,7$ и $-9,8$; в) -89 и 87 ; г) $-0,99$ и 0 ; д) $0,0001$ и 0 .

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

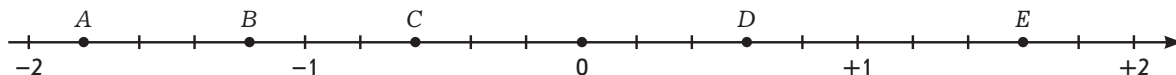
а) Найдите модуль каждого из чисел: $0,2$; $-25,04$; 100 ; $-9,3$; $-36,5$.

б) Напишите все числа, имеющие модуль $1,54$.

П Вариант II.

а) Найдите значение выражения $|x|$, если $x = -10,154$.

б) Некоторые точки числовой прямой обозначены буквами. Запишите модули координат этих точек.



Тренировочные упражнения.

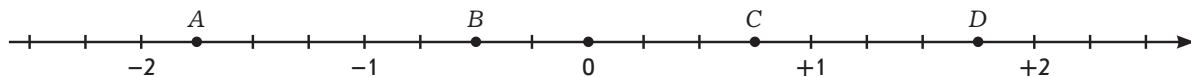
Н

7 Выпишите сначала пары противоположных, а затем пары обратных чисел:

$0,54$; $\frac{1}{54}$; $-0,54$; $8,9$; 60 ; $\frac{1}{60}$; $-8,9$; -60 .

8 Найдите значение выражения $|x|$, если $x = -761,0154$; $\frac{9}{97}$; 0 ; $-0,01$.

- 9 Некоторые точки числовой прямой обозначены буквами. Запишите модули координат этих точек.



- 10 Изобразите точкой на числовой прямой число
а) a , если $-a = -6$; б) $-c$, если $c = 5$; в) d , если $-d = 4$; г) $-m$, если $m = -2$.
- 11 Используя знак модуля, запишите, на каком расстоянии от начала отсчёта находятся точки:
а) $M(0)$; б) $C(0,007)$; в) $L\left(-2\frac{1}{150}\right)$; г) $T(-18)$; д) $K\left(\frac{8}{3}\right)$; е) $P(-7,77)$.

Например: $AO = |1,05| = 1,05$.

П

- 12 Верно ли утверждение:
а) если $a = b$, то $|a| = |b|$;
б) если $|a| = |b|$, то $a = b$?



М

- 13 Какие из этих равенств верны для всех рациональных чисел x :
а) $||x|| = |x|$; б) $|-|x|| = |x|$; в) $|-|x|| = |-x|$; г) $|-|-x|| = |-x|$?

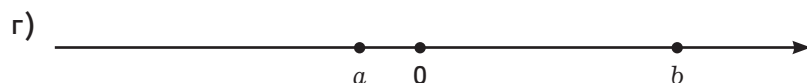
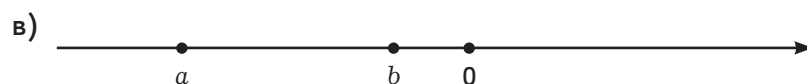
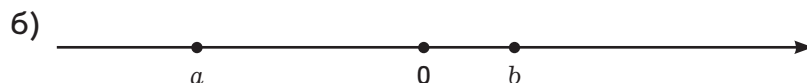
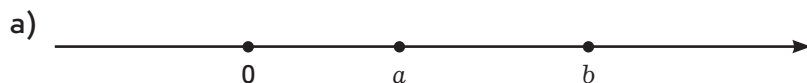


Н

- 14 Найдите:
а) $|5|$; в) $\left|\frac{1}{6}\right|$; д) $|-11|$; ж) $|-105|$; и) $|154|$; л) $\left|\frac{9}{16}\right|$;
б) $|3,5|$; г) $|-10,5|$; е) $\left|1\frac{9}{15}\right|$; з) $|105|$; к) $|-154|$; м) $\left|-\frac{9}{16}\right|$.
- 15 Для каждого из чисел укажите не равное ему число, имеющее тот же модуль:
 $-7,06$; $0,89$; $-0,154$; $9\frac{7}{13}$; $-10,01$; $\frac{5}{6}$; $-44,4$; 333 ; $-50,001$.
- 16 Назовите такое число a , чтобы число $-a$ было
а) положительным; б) отрицательным; в) равным нулю.

**П**

17 На числовой прямой изображены числа a и b . Сравните их модули:



18 Какое число надо записать в скобках, чтобы получилось верное равенство:

а) $-(...) = -0,1$; б) $-(...) = 0,1$.

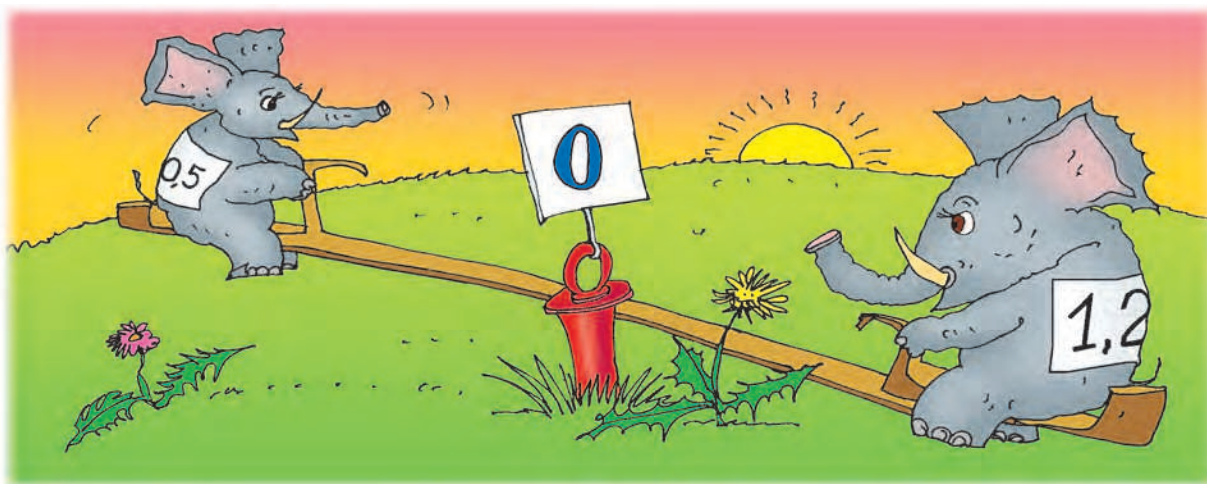
**М**

19 Закончите предложение.

- а) Модуль числа, противоположного модулю противоположного числа, равен ...
б) Число, модуль которого противоположен модулю противоположного числа, равно ...

7.3

Сравнение рациональных чисел



Вспоминаем то, что знаем

● Сравните числа:

а) 0 и 5; б) 0 и -5; в) 5 и -15; г) -789 и -7 890.

- Как сравнить два целых числа?
- Как сравнить две положительные обыкновенные дроби?
- Как сравнить две положительные десятичные дроби?

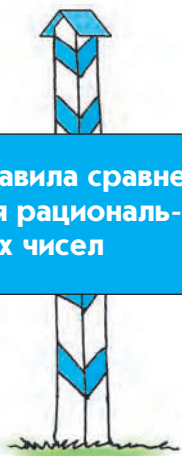
Открываем новые знания

- Сравните числа:
а) $-0,9$ и $-0,009$; б) $-\frac{1}{9}$ и $-\frac{3}{9}$.

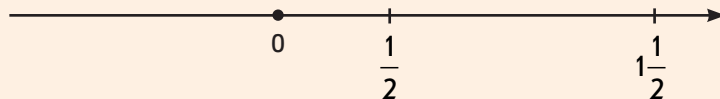


- Как сравнить два рациональных числа?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Правила сравнения рациональных чисел



В пятом классе вы научились сравнивать между собой положительные дроби (два положительных рациональных числа).

При сравнении остальных рациональных чисел применяется тот же набор правил, что и при сравнении целых чисел:

Любое положительное число больше нуля.

Любое отрицательное число меньше нуля.

Любое положительное число больше любого отрицательного.

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Например: $\frac{7}{9} > 0$; $-3,8 < 0$; $0,007 > -4$; $-10\frac{1}{6} < -9\frac{15}{16}$.

Можно сформулировать ещё одно правило сравнения рациональных чисел:

Большим является то рациональное число, которое при изображении на числовой прямой стоит правее (в предположении, что числовая прямая горизонтальна и положительным является направление слева направо).

Например : $-5 < 5$; $-0,5 > -15$; $30 > 0$; $-30 < 0$.



Развиваем умения

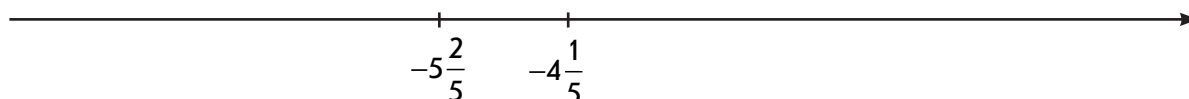


Н

1 Сравните с нулём:

а) $\frac{7}{13}$; б) $-0,001$; в) $-4\frac{1}{5}$; г) $3,7$.

2 На рисунке схематически показано положение на числовой прямой чисел $-4\frac{1}{5}$ и $-5\frac{2}{5}$.



Покажите схематически, как расположены на числовой прямой относительно друг друга числа:

а) 4 и -4 ; б) 6 и -1 ; в) -6 и 1; г) -12 и -13 ; д) $-7,2$ и $-7,5$; е) $-0,1$ и 10.

Сравните числа в каждой из этих пар.

3 Сравните числа:

а) $\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{5}$ и $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{3}{5}$; г) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{5}$.

4 Какое из чисел расположено на числовой прямой правее?

Какое из чисел больше:

а) -5 или -4 ; в) $-5,1$ или $-5,3$; д) $-\frac{10}{3}$ или $-3,3$;

б) $-5\frac{1}{9}$ или $-4\frac{1}{9}$; г) $-1,5$ или $-1,05$; е) $-\frac{8}{13}$ или $-\frac{2}{3}$?

5 Сравните ($>$; $<$; $=$):

а) $|-16|$ и $|-18|$;

в) $|-1,6|$ и $|-1,8|$;

д) $\left|-\frac{1}{7}\right|$ и $\left|-\frac{1}{11}\right|$;

б) $\left|-\frac{3}{4}\right|$ и $\left|-\frac{1}{5}\right|$;

г) $|-4,3|$ и $|-4,8|$;

е) $|-0,16|$ и $|-0,18|$.

6 Сравните ($>$; $<$; $=$):

- а) -16 и -18 ; в) $-1,6$ и $-1,8$; д) $-\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{11}$;
б) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{5}$; г) $-4,3$ и $-4,8$; е) $-0,16$ и $-0,18$.



7 Сравните ($>$; $<$; $=$):

- а) $1,1$ и $-1,8$; в) $-1,09$ и $-1,08$; д) $-2\frac{1}{7}$ и $2\frac{1}{7}$;
б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{5}$; г) $-0,44$ и $-0,8$; е) $0,761$ и $0,754$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

1) Сравните числа:

- а) $2,9$ и $3,0$; б) $-0,55$ и $-0,54$; в) 10 и -10 ; г) $5,9$ и $-5,9$.

2) Какие целые числа можно подставить вместо буквы a , чтобы получилось верное неравенство:

$$-2 < a < 1,7?$$

П Вариант II.

1) Запишите данные числа в порядке возрастания (от меньшего к большему):

$$3; -3; 0; 1,46; -5,4.$$

2) Сравните сначала данные числа, а потом числа, им противоположные:

- а) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$; б) $-0,5$ и $-0,05$.

Тренировочные упражнения.

Н

8 а) Запишите данные числа в порядке возрастания (от меньшего к большему):

$$-2\frac{1}{2}; -7; 0; 1\frac{1}{4}; 1.$$

б) Запишите данные числа в порядке убывания (от большего к меньшему):

$$-3\frac{1}{4}; -3; 6; 0; 2\frac{1}{2}; -7.$$

9 Сравните числа:

а) 20 и 21; б) -73 и -74 ; в) $8,3$ и -10 ; г) $0,129$ и $0,219$.

10 Сравните сначала данные числа, а потом числа, им противоположные:

а) $3,04$ и $4,03$; б) $-\frac{9}{17}$ и $-\frac{11}{17}$; в) $\frac{3}{158}$ и $-\frac{4}{179}$; г) $-1,10022$ и $5,22001$.

11 Расположите десятичные дроби в порядке:

а) возрастания: $-0,1022$; $-0,1202$; $-0,0102$; $-0,01202$;
б) убывания: $-0,5004$; $-0,54$; $-0,5404$; $-0,0154$.

П

12 Существуют ли такие значения x , при которых выполняется данное равенство? Если существуют, то назовите их. Если не существуют, то объясните, почему.

а) $|x| = 7,1$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -\frac{6}{7}$.

М

13 Сравните числа:

а) x и $|x|$; б) $-x$ и $|x|$; в) $|x|$ и $||x||$.



Н

14 Сравните числа:

а) $72,9$ и $71,9$; б) 0 и $-0,678$; в) $-1\,000$ и 1 ; г) $-0,856$ и -1 ;
д) $-0,999$ и $0,2$; е) -54 и -154 ; ж) 54 и 154 ; з) $12,8$ и $1,28$.

15 Запишите числа в порядке возрастания:

а) $-0,1022$; $-0,1023$; $-0,0102$; $-0,0120$; б) $5\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{2}$; 0 ; $-\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{2}$; $-3\frac{1}{4}$.

16 Запишите числа в порядке убывания:

а) 700 ; 0 ; -698 ; -700 ; 698 ;
б) -90 ; 90 ; 0 ; -9 ; 9 ; $0,5$.

**П**

- 17 Покажите, где на числовой прямой расположены точки, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x| = 1$; б) $|x| < 1$; в) $|x| > 1$.

**М**

- 18 Целой частью числа x называется либо само число x , если оно целое, либо ближайшее к числу x целое число, расположенное слева от числа x на числовой прямой, если число x не целое. Целая часть числа x обозначается $[x]$.

Например, $[4] = 4$; $[-17] = -17$; $[9,91] = 9$; $[-6,4] = -7$.

а) Найдите: $[3]$; $[5,98]$; $[-9]$; $\left[-4\frac{5}{12}\right]$.

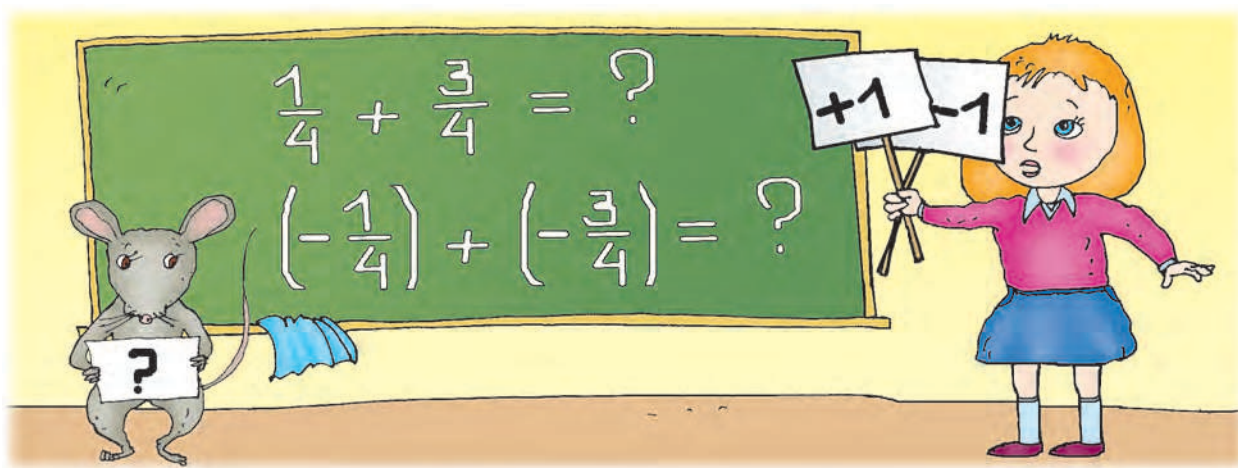
б) Верно ли, что $[-x] = -[x]$?

в) Верно ли, что если $x > y$, то $[x] > [y]$?

г) Верно ли, что если $[x] > [y]$, то $x > y$?

7.4

Сложение рациональных чисел



Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните правила сложения положительных дробей.
- Что вы можете сказать о сумме двух целых чисел, одно из которых равно нулю?
- Что вы можете сказать о сумме двух противоположных целых чисел?

- Что вы можете сказать о модуле и о знаке суммы двух целых чисел одного знака? Разных знаков?
- Что вы можете сказать о модуле и о знаке суммы двух целых чисел разного знака и с разными модулями?

Открываем новые знания

- Расскажите с помощью каждой из таблиц, как можно выразить количество денег, имеющихся в итоге в каждый из указанных дней:

| Дата | Движение денежных средств (тыс. р.) | | Итого (тыс. р.) | |
|--------|-------------------------------------|--------|-----------------|--------|
| | Приход | Расход | Приход | Расход |
| 5 июня | 2,9 | 3,8 | | |
| 6 июня | 3,8 | 3,8 | | |
| 7 июня | 4,5 | 3,8 | | |

| Дата | Движение денежных средств (тыс. р.) | | Итого (тыс. р.) |
|--------|-------------------------------------|------|-----------------|
| 5 июня | +2,9 | −3,8 | |
| 6 июня | +3,8 | −3,8 | |
| 7 июня | +4,5 | −3,8 | |

- Найдите значения выражений:

а) $0 + \left(-\frac{3}{4}\right)$;

г) $0 + (-3,4)$;

б) $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$;

д) $3,4 + (-3,4)$;

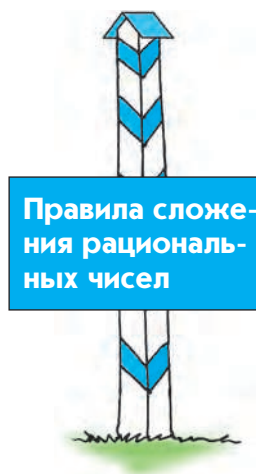
в) $\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$;

е) $1,4 + (-3,4)$.



- Какие правила используют для нахождения суммы рациональных чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Правила сложения рациональных чисел

Для нахождения суммы рациональных чисел используют тот же набор правил, что и для нахождения суммы целых чисел:

Для сложения двух чисел одного знака нужно сложить их модули и поставить перед найденной суммой (общий) знак слагаемых.

Для сложения двух чисел разного знака, имеющих разные модули, нужно вычесть из большего модуля меньший и поставить перед найденной разностью знак того слагаемого, чей модуль больше.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Сумма рационального числа x и нуля равна x .

Пример 1. Найдём сумму $\frac{34}{65} + \left(-\frac{5}{65}\right) = \frac{34}{65} - \frac{5}{65} = \frac{29}{65}$.

Пример 2. Найдём сумму $12 + (-13) = 12 - 13 = -1$.

Пример 3. Найдём сумму $1,2 + (-1,3) = 1,2 - 1,3 = -0,1$.

Для рациональных чисел остаются в силе известные вам правила, касающиеся знака суммы двух чисел:

Сумма положительных чисел является положительным числом.

Сумма отрицательных чисел является отрицательным числом. Сумма положительного и отрицательного чисел может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Точнее: если модули слагаемых различны, то такая сумма имеет знак числа с большим модулем, а если модули слагаемых равны, то сумма равна нулю.

Действие сложения рациональных чисел подчиняется переместительному и сочетательному законам.

Сумма двух рациональных чисел не зависит от порядка слагаемых:

$$x + y = y + x.$$

Например, $\frac{1}{6} + \left(-\frac{7}{15}\right) = -\frac{7}{15} + \frac{1}{6}$.

Если сумму двух рациональных чисел сложить с третьим рациональным числом, то результат будет такой же, как если первое число сложить с суммой второго и третьего:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Например,

$$\left(\frac{32}{23} + \left(-\frac{3}{7}\right)\right) + \left(-\frac{9}{10}\right) = \frac{32}{23} + \left(\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{9}{10}\right)\right).$$

Так же как и в случае целых чисел, сочетательный закон позволяет записывать сумму трёх слагаемых без скобок, поскольку при любой расстановке скобок в сумме $x + y + z$ получится тот же самый результат. Аналогично, без скобок, можно записывать сумму и большего количества слагаемых.

Переместительный и сочетательный законы используются для упрощения вычислений.

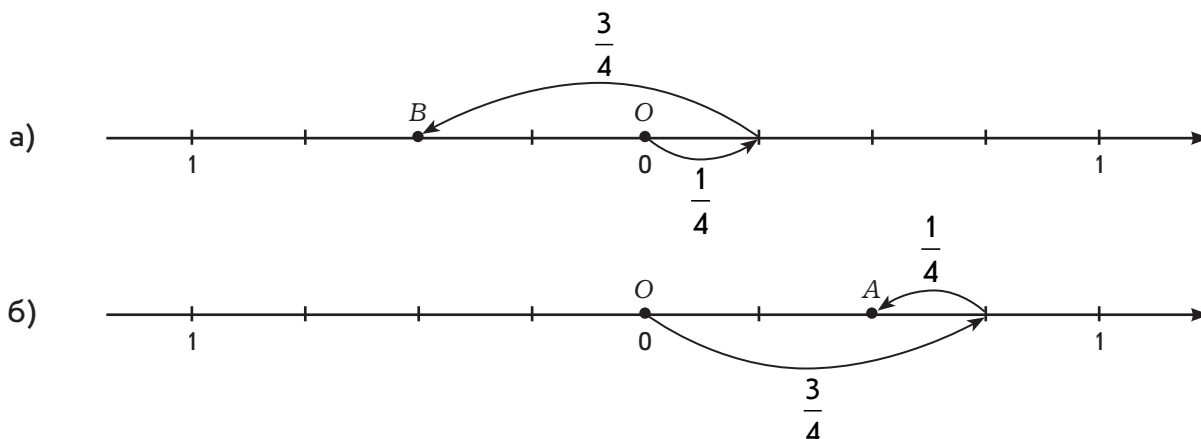
Например,

$$\begin{aligned} \left(-1\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{7}\right) &= \left(-1\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) = \\ &= \left(\left(-1\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right) + \left(\left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right)\right) = -1 + (-1) = -2. \end{aligned}$$

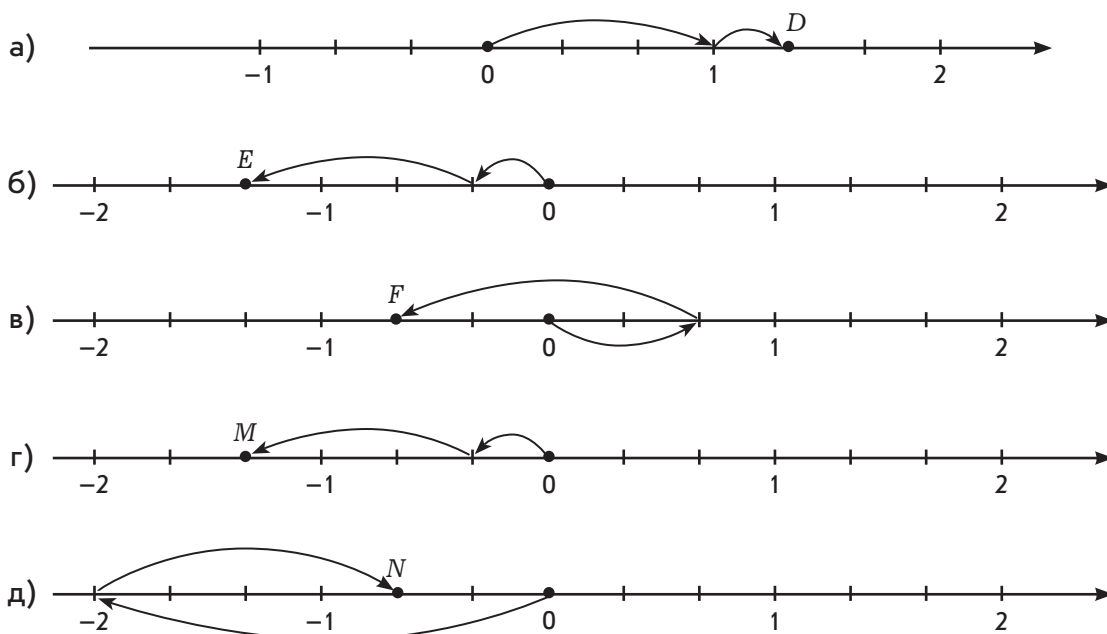


Н

- 1** а) Используя рисунок, расскажите, координаты какой из точек (A или B) соответствуют каждому из равенств: $\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.



б) Запишите аналогичные равенства для точек D, E, F, M, N :



- 2** Сделайте рисунок к данному выражению и найдите его значение:

а) $(+1,4) + 1,7$; б) $(+6,5) + (-8,8)$; в) $(-2,5) + (-6,4)$; г) $(+2,3) + (-7,9)$.

3 Найдите значение выражения:

а) $\left| \frac{3}{8} \right|$; б) $\left| -\frac{9}{16} \right|$; в) $|0,01|$; г) $|-0,05|$; д) $|-7,07|$; е) $\left| \frac{4}{101} \right|$; ж) $\left| -\frac{1}{9} \right|$; з) $|0|$.

4 Назовите слагаемые, определите знак суммы и выполните сложение:

а) $-7,1 + 7,1$; г) $0 - 9,12$; ж) $-8,151 + 11,4$; к) $-2,2 - 2,2$;

б) $-3\frac{7}{15} + 3\frac{7}{15}$; д) $4\frac{5}{12} + 6\frac{7}{12}$; з) $-\frac{9}{20} - \frac{3}{20}$; л) $-\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$;

в) $-3,1 + 3,1$; е) $-4,5 + 6$; и) $-2,4 + 0$; м) $7,8 - 8,7$.

5 а) Чему равна сумма двух рациональных чисел, одно из которых равно нулю?

б) Чему равна сумма двух противоположных рациональных чисел?

в) Что вы можете сказать о модуле и о знаке суммы двух рациональных чисел одного знака? Разных знаков?

г) Что вы можете сказать о модуле и о знаке суммы двух рациональных чисел разного знака и с разными модулями?

6 Вычислите:

а) $25\frac{11}{15} + 54\frac{4}{15}$; г) $25\frac{4}{15} - 54\frac{11}{15}$; ж) $-25\frac{11}{15} - 54\frac{4}{15}$; к) $-25\frac{4}{15} + 54\frac{11}{15}$;

б) $5,4 + 2,4$; д) $-5,4 - 2,4$; з) $5,4 - 2,4$; л) $-5,4 + 2,4$;

в) $154 - 254$; е) $-154 + 254$; и) $-154 - 254$; м) $154 + 254$.

7 Значения каких выражений одинаковы?

а) $-\frac{11}{21} + \frac{4}{21}$; в) $\left(-\frac{11}{21} + \frac{4}{21}\right) + \frac{5}{21}$; д) $\frac{4}{21} - \frac{11}{21}$;

б) $-\frac{11}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21}$; г) $\frac{4}{21} - \frac{11}{21} + \frac{5}{21}$; е) $-\frac{11}{21} + \left(\frac{4}{21} + \frac{5}{21}\right)$.

8 Назовите слагаемые и, используя законы арифметических действий, вычислите значения выражений:

а) $7,01 + 2,99 - 1,54 - 0,46$;

г) $-0,34 + 0,2 + 0,4 - 0,06$;

б) $2,5 - 9,1 - 0,9 + 0,5$;

д) $-1,8 - 2,2 + 6,4 + 3,6$;

в) $-3,7 + 1,3 - 2,3 + 1,7$;

е) $5,4 + 1,4 - 0,4 - 1,4$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

а) Вычислите: $-11,7 + 11,3 - 29,3 + 29,7$; $0,154 + 0,004 - 0,1 - 0,004$.

б) Представьте в виде суммы двух отрицательных слагаемых число: $-\frac{4}{21}$; $-\frac{11}{12}$.

П Вариант II.

а) Вычислите: $-4,05 + 2,01 - 1,05 + 3,09$; $53,9 - 13 - 77 - 13,9$.

б) Представьте в виде суммы двух слагаемых разных знаков число: $-1,54$; $1,54$; 0 .

Тренировочные упражнения.

Н

9 Найдите значение выражения $a + b$ при

а) $a = -0,19$; $b = 0,18$;

в) $a = -5,4$; $b = -0,6$;

б) $a = 3,2$; $b = 30$;

г) $a = 54$; $b = -0,6$.

10 Представьте в виде суммы двух отрицательных слагаемых число:

а) -80 ; б) -12 ; в) $-0,99$; г) $-4,3$; д) -1 ; е) $-0,001$; ж) -2 ; з) -10 .

11 Представьте в виде суммы двух слагаемых разных знаков число:

а) $-0,9$; б) $0,9$; в) $-2,5$; г) 0 ; д) -100 ; е) 1 ; ж) $-0,001$; з) $0,2$.

12 Вычислите:

а) $0,77 + 0,23 - 9$;

е) $43 - 2,2 - 1,8$;

б) $-45 + 0,1 - 15 + 0,9$;

ж) $100 - 14 - 70 - 16$;

в) $5,5 - 25 - 15 - 75$;

з) $3,2 - 14 + 5,7 - 1,7$;

г) $6,7 + 3,3 - 99$;

и) $-5 - 0,23 - 0,17$;

д) $-2 + 10 - 8 + 0,000015$;

к) $3 - 14 - 6 - 3$.

13 Решите уравнения:

а) $x + 650 = -100$;

б) $150 - y = 350$;

в) $a - 700 = 400$.

П

14 Упростите выражения:

а) $-2a - 2a$; б) $2a - 3a$; в) $2a + 2a + 2a + 2a + 2a + 2a$; г) $2a - 3a - 3a - 3a - 3a - 3a$.

15 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её.

| a | b | $a + b$ | $a - b$ |
|-----------------|----------------|---------|---------|
| $\frac{21}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | | |
| $-\frac{21}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | | |
| $-\frac{21}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | | |
| $\frac{21}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | | |



**М**

- 16 а) Можно ли записать в ряд шесть чисел так, чтобы сумма любых трёх идущих подряд чисел была положительной, а сумма всех чисел была отрицательной?
- б) Можно ли записать в ряд семь чисел так, чтобы сумма любых трёх идущих подряд чисел была положительной, а сумма всех чисел была отрицательной?

**Н**

- 17 Вычислите:

- а) $13,79 + 7,21 - 9$; г) $3 - 1,3 - 1,7$;
б) $-33 + 3,21 - 27 + 6,69$; д) $400 - 114 - 170 - 116$;
в) $5,5 - 30 + 7 + 7,5$; е) $0,08 - 11,9 + 4,7 - 1,08$.

- 18 Решите уравнения:

а) $x - 5,603 = -1,21$; б) $y - \frac{13}{51} = -\frac{9}{34}$; в) $\frac{2}{3} - z = 0,4$; г) $\frac{4}{7} + t = 0,7$.

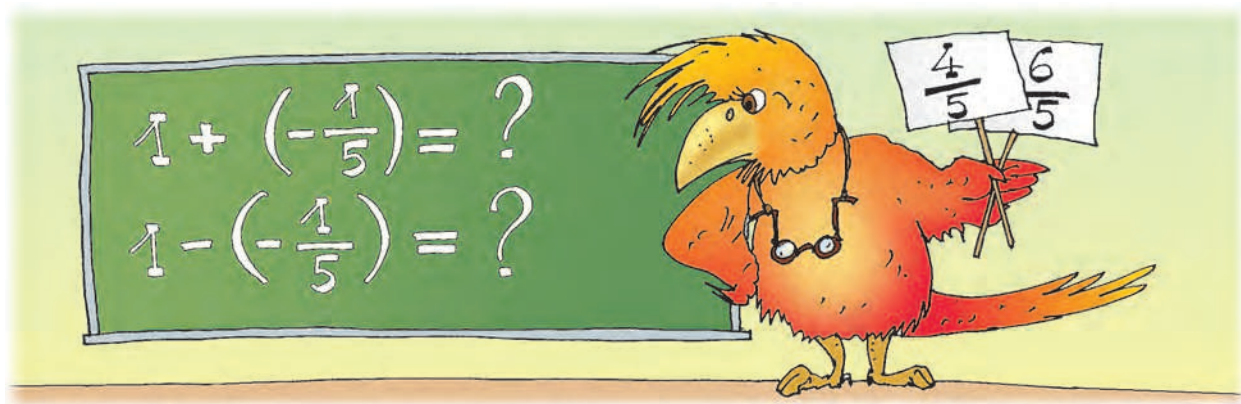
**П**

- 19 Найдите значение выражения $a + b + c$ при

- а) $a = 0,5$; $b = -2,8$; $c = -10$;
б) $a = -3,2$; $b = -0,19$; $c = 6$;
в) $a = 2,5$; $b = -1,6$; $c = 5$;
г) $a = -0,12$; $b = -2$; $c = -0,19$.

**М**

- 20 Сумма нескольких чисел равна нулю. Некоторые из слагаемых подчеркнули, причём оказалось, что сумма всех подчёркнутых чисел равна a . Чему равна сумма всех неподчёркнутых чисел?
- 21 Можно ли записать в ряд n чисел так, чтобы сумма любых двух идущих подряд чисел была положительной, а сумма любых трёх идущих подряд чисел была отрицательной? Ответьте на поставленный вопрос при
- а) $n = 6$; б) $n = 7$; в) $n = 3$; г) $n = 4$; д) $n = 5$.



Вспоминаем то, что знаем

- Найдите значения выражений: $28 - 9$; $-70 - 15$; $92 - 97$; $14 - (-9)$.
- Какое число называется разностью целых чисел a и b ?
- Можно ли прибавление отрицательного числа заменить вычитанием противоположного ему положительного числа?
- Можно ли вычитание положительного числа заменить прибавлением противоположного ему отрицательного числа?

Открываем новые знания

- Найдите значение выражения $\frac{1}{6} - \frac{1}{5}$.
- Можно ли сказать, что $\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{5}\right)$? $\frac{8}{13} - \left(-\frac{11}{20}\right) = \frac{8}{13} + \frac{11}{20}$?



- Как найти разность двух рациональных чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Разность рациональных чисел можно определить аналогично тому, как это делалось ранее для натуральных чисел, положительных дробных чисел и целых чисел.

Разностью $a - b$ двух рациональных чисел a и b называется рациональное число c , такое, что $b + c = a$.

Например, $\frac{3}{17} - \frac{12}{17} = -\frac{9}{17}$, так как $-\frac{9}{17} + \frac{12}{17} = \frac{3}{17}$.

Таким образом, из определения действия вычитания рациональных чисел следует, что разность $\frac{3}{17} - \frac{12}{17}$ равна $-\frac{9}{17}$. Точно так же

$$\frac{18}{31} - \left(-\frac{5}{31}\right) = \frac{23}{31}, \text{ так как } \frac{23}{31} + \left(-\frac{5}{31}\right) = \frac{18}{31},$$

$$\left(-\frac{45}{89}\right) - \frac{12}{89} = -\frac{57}{89}, \text{ так как } -\frac{57}{89} + \frac{12}{89} = -\frac{45}{89},$$

$$0 - \left(-\frac{46}{25}\right) = \frac{46}{25}, \text{ так как } \frac{46}{25} + \left(-\frac{46}{25}\right) = 0.$$

Сравним значения выражений $\frac{3}{17} - \frac{12}{17}$ и $\frac{3}{17} + \left(-\frac{12}{17}\right)$. Оказывается, они равны.

Точно так же все рассмотренные выше разности можно заметить суммами:

$$\frac{18}{31} - \left(-\frac{5}{31}\right) = \frac{18}{31} + \frac{5}{31}, \quad \left(-\frac{45}{89}\right) - \frac{12}{89} = \left(-\frac{45}{89}\right) + \left(-\frac{12}{89}\right),$$

$$0 - \left(-\frac{46}{25}\right) = 0 + \frac{46}{25}.$$

Именно таким образом очень удобно находить разность рациональных чисел: заменять вычитание сложением.

Для нахождения разности рациональных чисел нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$x - y = x + (-y).$$

Обоснование этого правила такое же, как и для целых чисел: достаточно убедиться, что рациональное число $x + (-y)$ в сумме с вычитаемым y даст уменьшаемое x . Выполним указанное сложение, сначала воспользовавшись сочетательным законом сложения рациональных чисел, а потом тем фактом, что сумма противоположных рациональных чисел равна нулю:

$$(x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + 0 = x.$$

Действительно, получилось уменьшаемое x .

Пример 1. Найдём разность

$$\frac{34}{65} - \left(-\frac{5}{65}\right) = \frac{34}{65} + \frac{5}{65} = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}.$$

Пример 2.

$$\text{Найдём разность } 13 - (-12): 13 - (-12) = 13 + (+12) = 25.$$

Пример 3.

$$\text{Найдём разность } 1,3 - (-1,2) = 1,3 + (+1,2) = 2,5.$$

Правило вычитания рациональных чисел

Раскрытие скобок, перед которыми стоят знаки «+» или «-»

Аналогично тому, как это было для целых чисел, выражение с рациональными числами, в котором содержатся лишь действия сложения и вычитания, принято называть **алгебраической суммой**.

Например, алгебраическими суммами являются выражения:

$$\frac{32}{17} - \left(-4\frac{5}{51}\right) + \frac{34}{65} + \left(-\frac{11}{12}\right); 1,7 + (-3,9) - 2,1 - 1,3.$$

Алгебраические суммы рациональных чисел можно записывать без скобок. При этом используются следующие правила, знакомые вам из предыдущей главы:

Если в алгебраической сумме перед скобками стоит знак «+», то скобки можно убрать, оставив все знаки внутри без изменения.

Если в алгебраической сумме перед скобками стоит знак «-», то скобки можно убрать, изменив все знаки внутри на противоположные.

Например: $\frac{32}{17} - \left(-4\frac{5}{51}\right) + \frac{34}{65} + \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{32}{17} + 4\frac{5}{51} + \frac{34}{65} - \frac{11}{12};$
 $1,7 + (-3,9) - 2,1 - 1,3 = -5,6.$

Развиваем умения



Н

1 Найдите значение выражения с объяснением того, как вы это делали:

а) $\frac{1}{6} - \frac{5}{6};$ б) $\frac{5}{16} - \frac{9}{16};$ в) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8};$ г) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}.$

2 Раскройте скобки ($a; b; c; d; e; f$ – рациональные числа):

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| а) $(a + b - c);$ | г) $(a - b - c);$ |
| б) $-(-a - b - c - d);$ | д) $-(a + b + c + d);$ |
| в) $(e - f) - (a - b + c);$ | е) $(a - b + c) - (e + f).$ |

3 Заключите слагаемые в скобки, перед которыми стоит знак «-» ($a; b; c; d; e; f$ – рациональные числа):

| | |
|-----------------------------|-------------------------|
| а) $e - f - a - b - c - d;$ | в) $a + b + c + e + f;$ |
| б) $e + f - a - b + c;$ | г) $a - b + d + e - f.$ |

4 Раскройте скобки и вычислите:

| | |
|--------------------------|--------------------------------|
| а) $(490 - 500) + 500;$ | в) $-(154 - 1\,300) - 1\,300;$ |
| б) $(-761 - 0,1) + 761;$ | г) $-(-72 - 8,62) - 72.$ |

- 5 Вычислите, раскрывая скобки только в тех случаях, когда это облегчает вычисления:

| | |
|-----------------------------|----------------------------|
| а) $7,7 - (6,3 + 0,7)$; | д) $7,7 - (6,3 - 7,7)$; |
| б) $9,01 - (9,01 + 0,09)$; | е) $10 - (-9,01 - 0,09)$; |
| в) $100 - (54 + 46)$; | ж) $100 - (100 + 54)$; |
| г) $-272 - (-272 + 862)$; | з) $-272 - (272 + 28)$. |

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Раскройте скобки и вычислите:

| | |
|-------------------------|-------------------------|
| а) $108 - (108 - 5)$; | в) $-49 - (49 + 2)$; |
| б) $-56 + (-98 + 56)$; | г) $100 - (-5 + 100)$. |

П Вариант II.

Вычислите, раскрывая скобки только в тех случаях, когда это облегчает вычисления:

| | |
|--------------------------|--------------------------|
| а) $84 - (44 + 28)$; | в) $94 - (44 + 26)$; |
| б) $862 - (231 + 269)$; | г) $728 - (328 - 100)$. |

Тренировочные упражнения.

Н

- 6 Заключите два последних слагаемых в скобки двумя способами (со знаком «+» и знаком «-» перед скобками):

| | |
|------------------------|-----------------------|
| а) $-5,4 + 4,4 + 1$; | в) $45 - 1,5 - 3,5$; |
| б) $0,6 - 2,8 + 2,2$; | г) $78 + 108 - 30$. |

- 7 Вычислите двумя способами (применяя и не применяя правила раскрытия скобок и заключения в скобки):

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| а) $67 - 16 - 1$; | в) $93 - 17 - 13$; |
| б) $58 - (18 - 22)$; | г) $68 - (13 - 35)$. |

- 8 Вычислите, выбирая удобный способ:

| | |
|---------------------------|--------------------------|
| а) $6,4 - (4,4 - 2,8)$; | д) $17 - (4,4 + 2,6)$; |
| б) $25 - (2,31 + 2,69)$; | е) $7,28 - (3,28 + 9)$; |
| в) $8,3 - 2,3 + 5$; | ж) $85 - 2,1 - 2,9$; |
| г) $23,6 - 13,6 - 9$; | з) $2 - 0,8 - 0,92$. |

- 9 Вычислите:

| | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| а) $-(9,8 + 4,9) - (10,2 - 4,9)$; | д) $(12,3 - 254) - (2,3 - 254)$; |
| б) $(1,49 + 2,37) - (1,37 + 0,49)$; | е) $-(9,5 + 10,5) - (3,98 - 0,98)$; |
| в) $(4,9 + 3,5) - (4,9 - 3,5)$; | ж) $(48 + 15) - (48 - 15)$; |
| г) $(0,75 + 2,5) - (-0,75 - 2,5)$; | з) $(1,2 + 2,5) - (-1,2 - 2,5)$. |

П

- 10** а) Как изменится разность двух чисел, если к уменьшаемому и вычитаемому прибавить одно и то же число?
б) Как изменится разность двух чисел, если из уменьшаемого и вычитаемого вычесть одно и то же число?



М

- 11** Убедитесь в верности следующих утверждений:
а) если $x > y$, то разность $x - y$ положительна;
б) если разность $x - y$ положительна, то $x > y$;
в) если $x < y$, то разность $x - y$ отрицательна;
г) если разность $x - y$ отрицательна, то $x < y$.



Н

- 12** Раскройте скобки и вычислите:
а) $(200 - 300) + 300$; в) $-(0,154 - 0,3) - 0,3$;
б) $(-90,1 - 0,01) + 90,1$; г) $-(-5,48 - 2,72) - 5,48$.
- 13** Вычислите, выбирая удобный способ:
а) $62 - (42 - 28)$; д) $70 - (54 + 16)$;
б) $350 - (131 + 169)$; е) $720 - (320 + 80)$;
в) $830 - 30 - 50$; ж) $830 - 12 - 18$;
г) $36 - 16 - 2$; з) $36 - 18 - 2$.
- 14** Решите уравнения:
а) $x + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{15} - y = \frac{13}{15}$; в) $a - \frac{38}{105} = \frac{41}{105}$.



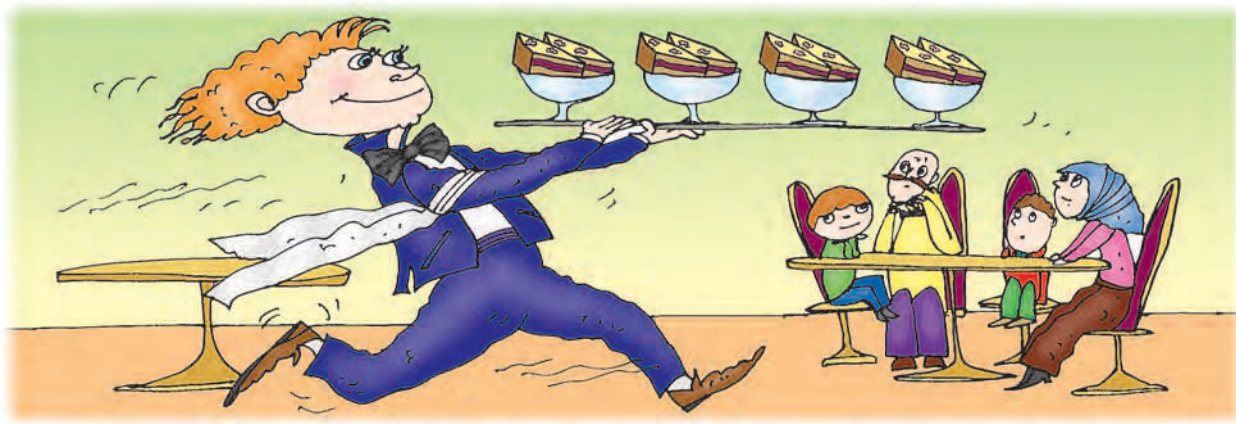
П

- 15** а) Поставьте на место звёздочек нужные знаки, чтобы равенство было верным:
 $x - (y + z) = (x * y) * z$.
б) Сформулируйте правило вычитания суммы.
- 16** а) Поставьте на место звёздочек нужные знаки, чтобы равенство было верным:
 $x - (y - z) = (x * y) * z$.
б) Сформулируйте правило вычитания разности.
- 17** Справедлив ли для действия вычитания сочетательный закон? Сначала запишите, как он должен был бы выглядеть, а затем выясните, всегда ли верно записанное равенство.

- 18 а) Возможно ли равенство $||x| - |y|| = |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?
- б) Возможно ли неравенство $||x| - |y|| < |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?
- в) Возможно ли неравенство $||x| - |y|| > |x - y|$? Если возможно, то в каких случаях?

7.6

Умножение рациональных чисел



Вспоминаем то, что знаем

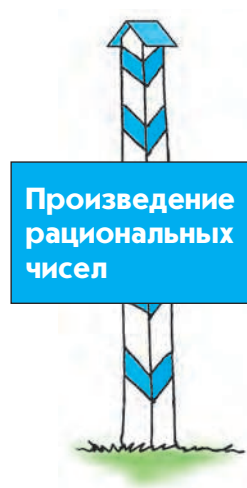
- Найдите произведение: $-5 \cdot 4$; $-6 \cdot 2$; $-7 \cdot 3$.
- Составьте верные равенства, пользуясь переместительным свойством умножения: $5 \cdot (-4) = \dots$; $6 \cdot (-2) = \dots$; $7 \cdot (-3) = \dots$. Запишите переместительное свойство умножения в общем виде.
- Составьте верные равенства, пользуясь сочетательным свойством умножения: $(3 \cdot (-8)) \cdot (-4) = \dots$; $7 \cdot (-3 \cdot (-2)) = \dots$. Запишите сочетательное свойство умножения в общем виде.
- Составьте верные равенства, пользуясь распределительным свойством умножения: $5 \cdot (4 - 6) = \dots$; $7 \cdot (3 - 2) = \dots$. Запишите распределительное свойство умножения в общем виде.
- Продолжите запись: $1 \cdot a = \dots$; $a \cdot 1 = \dots$.
- Вспомните правила умножения целых чисел с нулём. Запишите соответствующие формулы.

- Найдите произведение $(-5,4) \cdot 4$, предполагая, что произведение и в данном случае можно заменить сложением. Какой знак у полученного вами числа?
- Какое свойство умножения даёт возможность найти произведение $4 \cdot (-5,4)$? Какой знак у полученного вами числа?
- Найдите произведения: $(-1) \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \cdot (-1)$; $(-1) \cdot 0,01$; $0,01 \cdot (-1)$.



- Чему равно произведение $(-5,4) \cdot (-4)$? Какой знак у полученного числа?
- Сформулируйте законы умножения для рациональных чисел, взяв за основу законы умножения для натуральных и целых чисел.

Отвечаем, проверяем себя по тексту



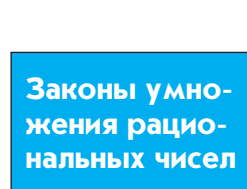
Произведение любого рационального числа и нуля равно нулю.

Произведением двух отличных от нуля рациональных чисел называется произведение их модулей, взятое со знаком «+», если знаки сомножителей одинаковые, и со знаком «-», если знаки сомножителей разные.

Например:

$$\begin{aligned} 1,54 \cdot 3 &= +(1,54 \cdot 3) = +4,62; \\ (-1,54) \cdot (-3) &= +(1,54 \cdot 3) = +4,62; \\ 1,54 \cdot (-3) &= -(1,54 \cdot 3) = -4,62; \\ (-1,54) \cdot 3 &= -(1,54 \cdot 3) = -4,62. \end{aligned}$$

Коротко правила знаков при умножении формулируют так: *плюс на минус даёт минус, минус на минус даёт плюс.*



Умножение рациональных чисел подчиняется переместительному, сочетательному и распределительному законам.

Для любых рациональных чисел x ; y ; z выполняются равенства:

$$x \cdot y = y \cdot x; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z); (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Сочетательный закон позволяет записывать произведение трёх сомножителей без скобок, поскольку при любой расстановке скобок в произведении $x \cdot y \cdot z$ получится тот же самый результат. Аналогично, без скобок, можно записывать произведение и большего количества сомножителей.

Распределительный закон остаётся справедливым не только для двух, но и для любого другого количества слагаемых, например:

$$(u + v + x + y) \cdot z = u \cdot z + v \cdot z + x \cdot z + y \cdot z.$$

Произведение любого рационального числа на -1 равно противоположному числу:

$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x.$$

Произведение любого рационального числа и нуля равно нулю:

$$x \cdot 0 = 0.$$

Развиваем умения



Н

- 1** Сформулируйте переместительное свойство умножения и найдите с его помощью значения выражений:

а) $4 \cdot (-0,3)$;

б) $3 \cdot \left(-2\frac{5}{6}\right)$.

- 2** Выполните умножение:

а) $11\frac{7}{9} \cdot (-1)$;

б) $(-1) \cdot 3\frac{1}{5}$;

в) $0 \cdot \left(-2\frac{5}{6}\right)$;

г) $1\frac{1}{7} \cdot 0$.

- 3** Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $4 \cdot (x - 5) = 0$;

б) $x \cdot (-1) = -2,2$;

в) $(3x - 6) \cdot (-4,2) = 0$;

г) $x \cdot (-1) = 4,5$.

- 4** Пусть a и b – рациональные числа. В каких случаях выполняется неравенство $a \cdot b > 0$; в каких $a \cdot b < 0$; в каких $a \cdot b = 0$:

а) $a > 0, b < 0$;

г) $a < 0, b < 0$;

б) $a > 0, b > 0$;

д) $a = 0, b = 0$;

в) $a > 0, b = 0$;

е) $a < 0, b > 0$?

- 5** Определите знак произведения, не вычисляя:

а) $0,09 \cdot (-0,45) \cdot (-0,1) \cdot (-12) \cdot (-0,124) \cdot (-0,05) \cdot 1,2 \cdot (-1,2) \cdot 14$;

б) $0,09 \cdot (-0,45) \cdot 11 \cdot (-0,07) \cdot (-1,25) \cdot 15 \cdot (-5,4) \cdot (-0,45) \cdot 0,7$.

- 6** Вычислите:

а) $0,9 \cdot (-4,5)$;

д) $-6,1 \cdot (-1,5)$;

б) $1,1 \cdot (-0,07)$;

е) $(-9,4) \cdot (-1)$;

в) $-3\frac{2}{3} \cdot 6$;

ж) $(-100) \cdot \left(-2\frac{6}{7}\right)$;

г) $-3\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7}$;

з) $-\frac{1}{9} \cdot \left(-2\frac{6}{7}\right)$.



- 7  Сформулируйте сочетательное свойство умножения и найдите с его помощью значения выражений:

а) $4 \cdot (5 \cdot (-0,3))$; б) $0,2 \cdot \left(5 \cdot \left(-2\frac{5}{6}\right)\right)$.

- 8 Найдите произведение, используя свойства умножения:

а) $(-2) \cdot (-6) \cdot 50 \cdot 12$; г) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{10}$;

б) $11 \cdot (-4) \cdot 3 \cdot 25$; д) $\left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-8\frac{2}{7}\right) \cdot 3 \cdot (-7)$;

в) $-0,2 \cdot 0,8 \cdot (-5) \cdot 1,25$; е) $(-0,2) \cdot (-0,5) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$.

- 9 Упростите выражения:

а) $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)$; в) $(-6x) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; д) $5 \cdot \left(-\frac{9}{15}y\right)$; ж) $(-7c) \cdot \frac{4}{21}$;

б) $(-1) \cdot \left(\frac{1}{4}c\right)$; г) $(-16) \cdot \frac{5}{4}y$; е) $(-5a) \cdot \left(-\frac{2}{25}\right)$; з) $(-16y) \cdot \frac{1}{16}$.

- 10  Сформулируйте распределительное свойство умножения и найдите с его помощью значения выражений:

а) $6 \cdot \left(2 + \frac{2}{3}\right)$; б) $6 \cdot 2\frac{2}{3}$; в) $17 \cdot \left(3 - \frac{2}{17}\right)$; г) $17 \cdot 2\frac{15}{17}$.

- 11 Раскройте скобки и найдите значения каждого выражений:

а) $(-2) \cdot (0,5 + 0,25)$; в) $(-5) \cdot (-1,2 - 2)$;
б) $0,6 \cdot (50 - 1,5)$; г) $(-0,7) \cdot (-3 + 7)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Вычислите:

а) $0,01 \cdot (-2,3)$; в) $-2,02 \cdot (-0,5)$; д) $1,1 \cdot (-1,1)$; ж) $(-95) \cdot (-1)$;
б) $-2\frac{3}{4} \cdot 8$; г) $(-1\,000) \cdot \left(-2\frac{15}{50}\right)$; е) $-4\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$; з) $\left(-\frac{9}{16}\right) \cdot \left(-\frac{6}{81}\right)$.

П Вариант II.

Найдите значения выражений, используя свойства умножения:

а) $(-4) \cdot (-4) \cdot 25 \cdot 15$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{6}{21}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{7}{18}$;
б) $(-10) \cdot (-0,4) - (-10) \cdot 0,25$; г) $(-2) \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 12 Определите, положительным или отрицательным числом является значение выражения, и выполните вычисления:

а) $(-0,5) \cdot (-1,4) \cdot 2$;

г) $(-30,25) \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 100$;

б) $0,8 \cdot 5 \cdot (-25)$;

д) $(-1) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot (-1,25)$;

в) $9 \cdot (-5) \cdot 0,2$;

е) $(-0,1) \cdot (-154) \cdot (-0,5) \cdot (-100)$.

- 13 Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $(-1) \cdot (-5) \cdot x = 25$;

в) $3 \cdot x \cdot (-4) = 48$;

б) $(-9) \cdot (-9) \cdot x = -81$;

г) $x \cdot (-5) \cdot 8 = 0$.

- 14 Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $(-6) \cdot (-1,5) + (-6) \cdot (-4,5)$;

в) $888 \cdot (-0,72) + 888 \cdot (-0,28)$;

б) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 80 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 20$;

г) $\frac{1}{5} \cdot (-60) + \frac{1}{5} \cdot (-15) + \frac{1}{5} \cdot (-25)$.

- 15 Найдите значение выражения:

а) $0,5 \cdot 14 + 0,5 \cdot 6$;

б) $0,7 \cdot 1\,550 - 1\,540 \cdot 0,7$;

в) $-0,9 \cdot 76 - 0,9 \cdot 24$.

- 16 Найдите значение выражения, выбирая удобный способ:

а) $0,2 \cdot (-6) + (0,8) \cdot (-6)$;

в) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 5 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $(-11) \cdot (-0,4) - (-11) \cdot 0,5$;

г) $(-7) \cdot \left(-8\frac{2}{7}\right) - 7 \cdot \left(-8\frac{2}{7}\right)$.

П

- 17 Решите уравнение:

а) $\left(x - \frac{7}{24}\right) \cdot \left(x + \frac{24}{7}\right) = 0$;

б) $(x + 3,2375) \cdot (x + 2) = 0$.

М

- 18 Какое число больше: а) a или $2a$; б) a или $-5a$; в) $2a$ или $-5a$?



Н

- 19 Вычислите, используя свойства умножения:

а) $(-0,5) \cdot (-0,8) \cdot 5$;

в) $(-20) \cdot (-1,1) \cdot 5 \cdot 10$;

б) $15 \cdot 0,2 \cdot (-4)$;

г) $(-0,01) \cdot 2 \cdot 50 \cdot (-7\,610\,154)$.

20 Вычислите:

а) $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)$; в) $-9\frac{1}{3} \cdot (-12)$; д) $15 \cdot \left(-4\frac{7}{25}\right)$;
б) $(-8) \cdot \left(-\frac{7}{24}\right)$; г) $\left(-\frac{3}{75}\right) \cdot \frac{5}{9}$; е) $(-1\,000) \cdot \frac{11}{1\,500}$.

21 Упростите выражения:

а) $3 \cdot (-4a)$; в) $(-8x) \cdot (-2)$; д) $7 \cdot (-2y)$; ж) $(-9c) \cdot 11$;
б) $(-1) \cdot (12c)$; г) $(-15) \cdot 6y$; е) $(-4a) \cdot (-4)$; з) $(-12y) \cdot 3$.

22 Вычислите:

а) $(-1)^5$; в) $(-1)^6$; д) $(-1,1)^3$; ж) $(-2)^5$;
б) $(-1,2)^2$; г) $(-0,5)^3$; е) $(-0,2)^4$; з) $(-0,03)^4$.



П

23 Придумайте такие значения x и y , при которых верно соотношение:

а) $\frac{x}{y} = 1$; б) $\frac{x}{y} = -1$; в) $\frac{x}{y} = 0$; г) $\frac{x}{y} > 0$; д) $\frac{x}{y} < 0$.

24 Вычислите:

а) $3,2 \cdot 4,3 - 2,2 \cdot 4,3 - 5,2 \cdot 5,3 + 4,2 \cdot 5,3$;
б) $0,68 \cdot 2 - 0,68 \cdot 15 + 0,12 \cdot 2 - 0,68 \cdot 5$;
в) $8,8 \cdot 0,75 - 1,2 \cdot 0,45 + 1,2 \cdot 0,75 - 8,8 \cdot 0,45$.



М

25 Убедитесь в истинности следующих утверждений:

- а) если $x > y$ и $a > 0$, то $ax > ay$;
б) если $x < y$ и $a > 0$, то $ax < ay$;
в) если умножить левую и правую части верного неравенства на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.

26 Убедитесь в верности следующих утверждений:

- а) если $x > y$ и $a < 0$, то $ax < ay$;
б) если $x < y$ и $a < 0$, то $ax > ay$;
в) если умножить левую и правую части верного неравенства на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.





Вспоминаем то, что знаем

- Какое число называется частным двух целых чисел?

Открываем новые знания

- Выполните деление, подбирая частное:

а) $(-42) : 2$; б) $(-24) : 6$; в) $0 : (-3)$; г) $(-24) : (-6)$.

- Проверьте верность выполнения деления с помощью умножения.



- Какое число называется частным двух рациональных чисел?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Правила деления рациональных чисел

Частным двух рациональных чисел называется такое рациональное число, произведение которого на делитель равно делимому.

Из этого определения частного следует правило деления рациональных чисел, напоминающее соответствующее правило для умножения:

Частным двух отличных от нуля рациональных чисел является частное их модулей, взятое со знаком «+», если знаки чисел одинаковые, и со знаком «-», если знаки чисел разные.

Частное нуля и любого ненулевого рационального числа равно нулю.

На ноль делить нельзя!

В отличие от действия деления с целыми числами, разделить одно рациональное число на другое возможно всегда, кроме случая, когда делитель равен нулю.

Вспоминаем то, что знаем

Вспомните правила действий с обыкновенными дробями.

Открываем новые знания

Найдите значение выражения: $-4\frac{6}{35} : \left(-3\frac{9}{35}\right)$.



Как выполняются действия с отрицательными дробями?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Деление отрицательных дробей

Отрицательные дроби, с которыми мы выполняем действия, работая с множеством рациональных чисел, можно записывать по-разному. Например, рассмотрим частные $(-4) : 7$ и $4 : (-7)$. Очевидно, что $(-4) : 7 = 4 : (-7)$, а также, что

$$-4 : 7 = \frac{-4}{7}; \quad 4 : (-7) = \frac{4}{-7}. \quad \text{При этом} \quad \frac{-4}{7} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}.$$

Таким образом, рациональное число является частным целых чисел, при этом знак « $-$ » можно свободно перемещать по дроби (вносить в числитель или знаменатель, а также записывать перед дробью).

Деление дробей произвольного знака выполняется по тем же правилам, что и положительных дробей.

Например:

$$\frac{1}{6} : \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{1 \cdot (-12)}{6 \cdot 5} = \frac{1 \cdot (-2)}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Развиваем умения



Н

1 Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $x \cdot (-8) = -0,8$;

в) $(-9,1) \cdot x = 9,1$;

б) $x \cdot (2,7) = 5,4$;

г) $x \cdot (1,2) = -4,8$.

2 Выполните деление:

- а) $(-45) : 15$; г) $(-30) : (-2)$; ж) $100 : (-20)$; к) $1 : (-1)$;
б) $(-48) : 12$; д) $(-60) : (-5)$; з) $90 : (-30)$; л) $81 : (-81)$;
в) $(-50) : 1$; е) $(-99) : (-11)$; и) $150 : (-30)$; м) $(-240) : 8$.

3 Найдите число, обратное данному: -7 ; -25 ; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{15}$.

4 Вычислите:

- а) $-\frac{2}{3} : 4$; в) $-\frac{5}{9} : (-5)$; д) $-\frac{2}{7} : (-1)$; ж) $1 : \left(-\frac{2}{5}\right)$;
б) $-1 : \frac{3}{11}$; г) $-\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; е) $\frac{4}{15} : \left(-\frac{2}{5}\right)$; з) $-2\frac{11}{5} : \frac{1}{5}$.

5 Вычислите:

- а) $(-4,5) : 5$; в) $(-3) : (-1,5)$; д) $1 : (-2,5)$; ж) $-14,4 : 1,2$;
б) $(-0,48) : (-12)$; г) $(-66,5) : (-6,65)$; е) $0,9 : (-0,3)$; з) $8,1 : (-0,81)$.

6 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её:

| | | | | | | | | | |
|---------|-----|-------|------|------|------|------|-------|--------|------|
| a | 9,6 | -1,21 | -5,4 | -7,5 | 6,12 | 0 | -3,9 | -75 | 3,7 |
| b | -8 | -1,1 | 0,2 | 0,15 | 0,4 | -1,5 | -0,13 | -0,375 | 1,28 |
| $a : b$ | | | | | | | | | |

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Вычислите: а) $-\frac{2}{9} : 6$; б) $-\frac{15}{11} : (-25)$; в) $-\frac{13}{17} : (-1)$; г) $1 : -\frac{9}{101}$.

П Вариант II.

Вычислите: а) $-\frac{5}{6} : \frac{2}{15}$; б) $\frac{7}{9} : \left(-\frac{18}{21}\right)$; в) $-2\frac{13}{3} : \frac{1}{9}$.

Тренировочные упражнения.

Н

7 Запишите частное в виде дроби и, если возможно, сократите её:

- а) $-4 : 5$; в) $-3 : (-15)$; д) $11 : (-22)$; ж) $-14 : 12$;
б) $(-60) : (-12)$; г) $(-66) : (-11)$; е) $3 : (-9)$; з) $8 : (-24)$.

8 Выполните деление по образцу:

$$(0,54 + 0,02) : 2 = 0,54 : 2 + 0,02 : 2 = 0,27 + 0,01 = 0,28;$$

$$(0,54 - 0,02) : 2 = 0,54 : 2 - 0,02 : 2 = 0,27 - 0,01 = 0,26.$$

а) $(-0,42 - 0,18) : (-6);$

в) $(7,2 + 1,6) : (-0,8);$

б) $(-0,81 + 2,7) : 9;$

г) $(4,6 - 0,69) : (-23).$

Сформулируйте свойство деления, которое позволяет действовать подобным образом.

9 Вынесите общий делитель за скобки. Работайте по образцу:

$$0,54 : 2 + 0,02 : 2 = (0,54 + 0,02) : 2 = 0,56 : 2 = 0,28;$$

$$0,54 : 2 - 0,02 : 2 = (0,54 - 0,02) : 2 = 0,52 : 2 = 0,26.$$

а) $2,48 : 2 + 1,52 : 2;$

в) $0,94 : 0,5 - 0,44 : 0,5;$

б) $5,4 : 2 + 2,6 : 2;$

г) $1,05 : 5 - 0,05 : 5.$

10 Подберите значение x , при котором верно равенство:

а) $(-1,2) \cdot x = 0,36;$

в) $x \cdot (-13) = -3,9;$

д) $(-3,2) \cdot x = 48;$

б) $(-1,5) \cdot x = 4,5;$

г) $x \cdot 0,14 = -0,56;$

е) $x \cdot 0,98 = 4,9.$

11 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её:

| x | y | $x + y$ | $x - y$ | $x \cdot y$ | $x : y$ |
|-----------------|-----------------|---------|---------|-------------|---------|
| $-\frac{5}{16}$ | $-2\frac{5}{4}$ | | | | |
| $-1\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | | | | |
| $3\frac{2}{15}$ | $-\frac{3}{5}$ | | | | |

П

12 Проверьте свойство деления $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a$, найдите значение каждого выражения тремя способами:

а) $(0,42 \cdot 0,54) : 0,06;$

б) $(2,1 \cdot 4,9) : 0,7;$

в) $(0,05 \cdot 3,5) : 5.$

М

13 Вычислите:

а) $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}};$

б) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}};$

в) $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}.$

**Н****14** Выполните деление:

- а) $(-4,8) : 2$; в) $(-1,2) : (-0,4)$; д) $1 : (-5)$; ж) $10,5 : (-5)$;
б) $(-0,52) : 0,6$; г) $(-9) : (-30)$; е) $1,2 : (-3)$; з) $(-0,7) : (-70)$.

15 Вычислите:

- а) $-\frac{2}{5} : 8$; в) $-\frac{5}{8} : (-10)$; д) $-\frac{2}{9} : (-4)$; ж) $1 : \left(-\frac{2}{7}\right)$;
б) $-1 : \frac{3}{12}$; г) $-\frac{2}{7} : \frac{7}{8}$; е) $\frac{1}{30} : \left(-\frac{2}{15}\right)$; з) $-2\frac{4}{9} : \frac{1}{9}$.

16 Подберите значение x , при котором верно равенство:

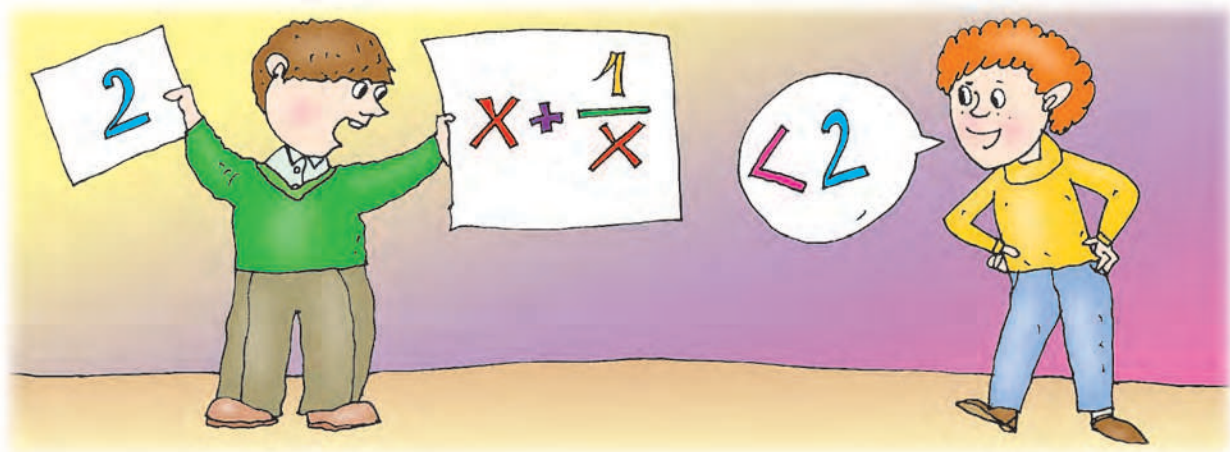
- а) $(-1,2) : x = 3$; в) $x : (-0,013) = -5$; д) $(-5,2) : x = 1\,300$;
б) $(-0,15) : x = -5$; г) $x : 14 = -0,3$; е) $x : (-2,01) = 4,02$.

**П****17** Проверьте свойство деления $a : (c \cdot b) = (a : c) : b = (a : b) : c$. Найдите значение каждого выражения тремя способами:

- а) $0,42 : (0,06 \cdot 0,7)$; б) $7 : (0,5 \cdot 0,07)$; в) $5 : (0,05 \cdot 0,2)$.

**М**

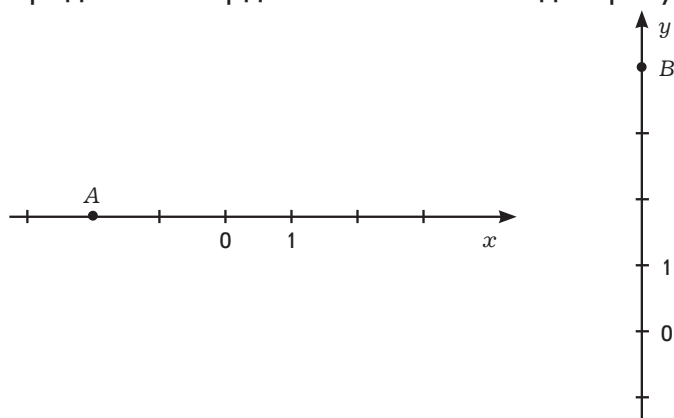
18 Рассмотрим сумму $x + \frac{1}{x}$ положительного рационального числа x с обратным ему числом. Ясно, что при $x = 1$ эта сумма равна 2. Докажите, что при всех остальных положительных значениях x эта сумма больше 2.





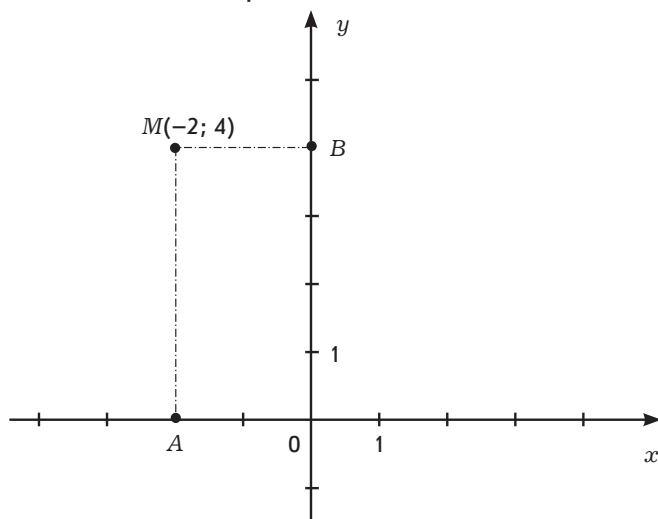
Вспоминаем то, что знаем

● Определите координаты точки на каждом рисунке:



Открываем новые знания

● Сопоставьте изображение точки на плоскости и запись её координат.



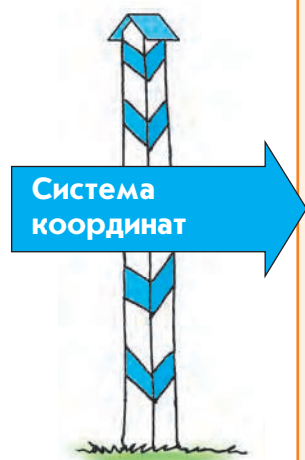
Объясните, что означает каждое число в записи.



Как найти координаты точки на плоскости?

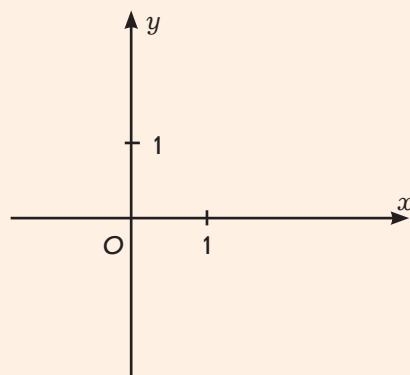
Как изобразить на плоскости точку с заданными координатами?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Рассмотрим две перпендикулярные числовые прямые, причём точку пересечения прямых возьмём в качестве начальной точки на каждой из них. Единичные отрезки выберем на каждой прямой одинаковыми. Одну из числовых прямых расположим горизонтально с положительным направлением на ней вправо от начала, а другую – вертикально с положительным направлением вверх от начала. Положительные направления изобразим стрелками.

Общее начало числовых прямых называется **началом координат** и обозначается большой латинской буквой O (именно с этой буквы начинается слово «начало» на латыни – *origo*, *origin*). Такое обозначение удобно ещё и тем, что этим же символом изображается число нуль – координата начала на каждой из числовых прямых.

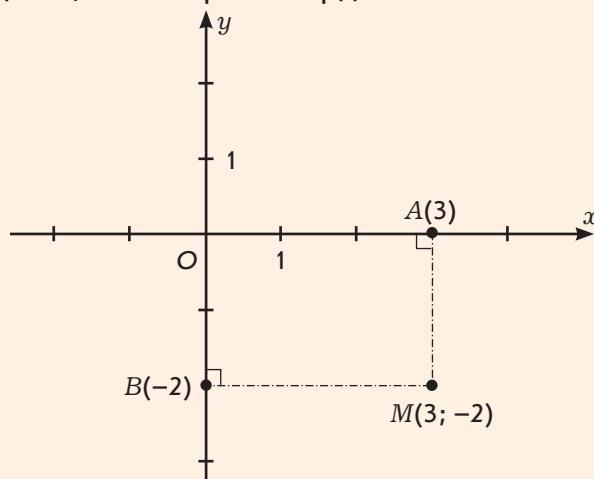


Числовые прямые, расположенные описанным образом, называются **осями координат** и имеют общепринятые названия и обозначения. Горизонтальная ось называется **осью абсцисс**, или осью x , а вертикальная – **осью ординат**, или осью y . Вся описанная конструкция вместе называется **декартовой прямоугольной системой координат** (или просто **системой координат**).

Плоскость, на которой задана система координат, называется **координатной плоскостью**.

Рассмотрим произвольную точку M на координатной плоскости. Проведём перпендикуляр из этой точки к оси абсцисс. Основание этого перпендикуляра является точкой числовой прямой (оси x) и имеет на этой прямой какую-то координату. Она называется **абсциссой** точки M . Точно так же проведём перпендикуляр из точки M к оси ординат (оси y) и получим на оси ординат некоторую точку – основание этого перпендикуляра. Координата этой точки на оси y называется **ординатой** точки M .

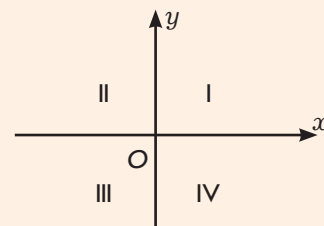
Абсцисса и ордината точки M называются **координатами** этой точки. Их принято записывать рядом с буквой, обозначающей точку, в круглых скобках, причём на первом месте всегда пишется абсцисса, а на втором – ордината.



Говорят, что координаты точки на координатной плоскости – это упорядоченная пара чисел. Слово «упорядоченная» значит, что важно не только, *какие* числа образуют эту пару, но и *в каком порядке* они взяты. Понятно, что точки $A(2; 3)$ и $B(3; 2)$ – это разные точки.

Для построения точки M с заданными координатами поступают так: сначала на оси x отмечают точку, координата которой на этой оси равна абсциссе точки M , и через отмеченную точку проводят прямую, перпендикулярную оси x ; затем на оси y отмечают точку, координата которой на этой оси равна ординате точки M , и через отмеченную точку проводят прямую, перпендикулярную оси y . Точка пересечения проведённых прямых и есть точка M .

Оси координат делят координатную плоскость на четыре части, называемые **четвертями**. У четвертей есть общепринятые обозначения (указанные на рисунке справа). Говорят «первая четверть», «вторая четверть» и т.д.



Четверти

Развиваем умения



Н

1

Продолжите предложения:

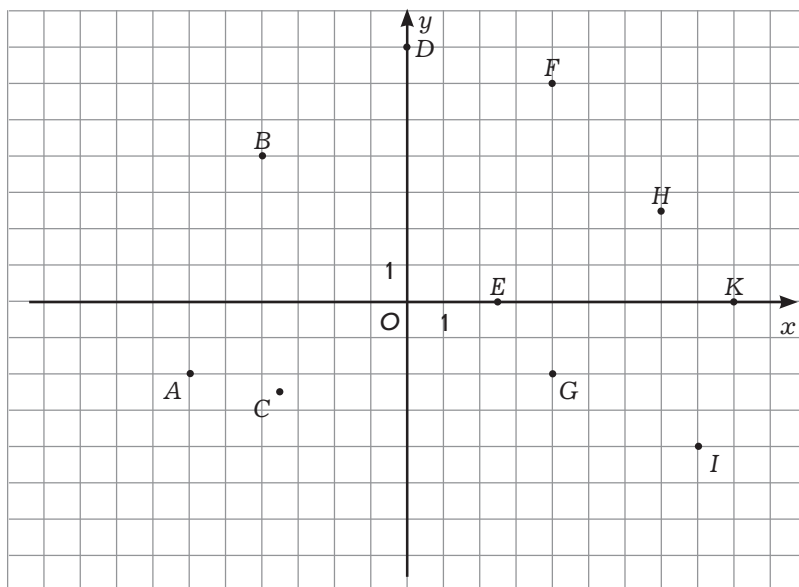
- При записи координат точки на плоскости первой указывается ...
- При записи координат точки на плоскости второй указывается ...

- в) Угол между координатными осями равен ...
 г) Четвертями координатной плоскости называются ...

2 Постройте систему координат и отметьте точки, у которых:

- а) абсцисса равна 7, а ордината равна 3;
 б) абсцисса равна $-5,5$, а ордината равна 0;
 в) ордината равна -2 , а абсцисса равна -6 .

3 Назовите и запишите координаты отмеченных точек.



4 Отметьте на координатной плоскости точки $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(0; -4)$, $D(1; 6)$, $E(7; -4)$, $F(-1; 4)$, $G(-5; 8)$, $H(1,5; 4,5)$.

5 а) Отметьте на координатной плоскости несколько точек с абсциссой, равной 0, и разными ординатами. Где находятся все точки координатной плоскости с абсциссой, равной 0?

б) Отметьте на координатной плоскости несколько точек с ординатой, равной 0, и разными абсциссами. Где находятся все точки координатной плоскости с ординатой, равной 0?

6 Постройте на координатной плоскости треугольник с вершинами:

- а) $A(-1; 6)$, $B(2; 7)$, $C(6; 4)$; б) $M(-4; -2)$, $N(-6; 2)$, $O(0; 0)$.

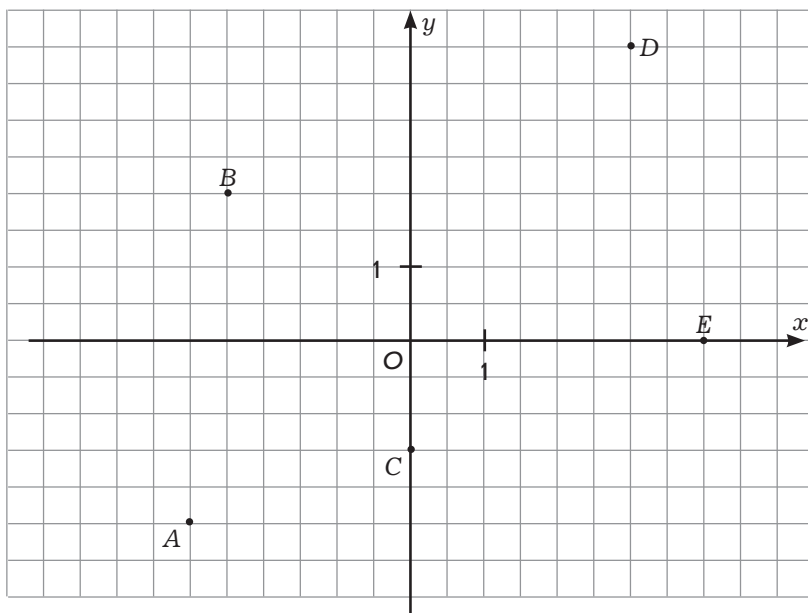
7 Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, затем построьте указанные фигуры и найдите их площади:

- а) прямоугольник $PQRS$ с вершинами $P(2; 3)$, $Q(8; 3)$, $R(8; 7)$, $S(2; 7)$;
 б) треугольник MNK с вершинами $M(-6; 2)$, $N(2; 2)$, $K(-6; 7)$;
 в) пятиугольник $ABCDE$ с вершинами $A(0; -2)$, $B(3; 0)$, $C(6; 9)$, $D(6; -4)$, $E(0; -4)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Определите координаты отмеченных точек:



П Вариант II.

Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, затем отметьте точки: $A(-2; 5)$, $B\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$, $C(-3,6; -5,2)$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 8 Отметьте на координатной плоскости точки $A(-3; -2)$, $B(2; 3)$, $C(1; 3)$, $D(5; 5)$, $E(3; 1)$, $F(3; 2)$, $G(-2; -3)$, а затем соедините их последовательно отрезками. Какая фигура у вас получилась?
- 9 а) Отметьте на координатной плоскости несколько точек с абсциссой 2 и разными ординатами. Где находятся все точки координатной плоскости с абсциссой 2?
б) Отметьте на координатной плоскости несколько точек с ординатой -5 и разными абсциссами. Где находятся все точки координатной плоскости с ординатой -5 ?
- 10 а) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых и абсцисса, и ордината положительны?
б) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых и абсцисса, и ордината отрицательны?

- в) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых абсцисса положительна, а ордината отрицательна?
г) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых абсцисса отрицательна, а ордината положительна?

- 11 Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, затем постройте указанные треугольники и найдите их площади:
а) $\triangle PQR$ с вершинами $P(1; 0)$, $Q(5; 4)$, $R(7; 0)$;
б) $\triangle MNK$ с вершинами $M(-2; -3)$, $N(1; 3)$, $K(-2; 9)$.

П

- 12 Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, затем постройте указанные треугольники и найдите их площади:
а) $\triangle ABC$ с вершинами $A(-2; 2)$, $B(7; 6)$, $C(3; 2)$;
б) $\triangle DEF$ с вершинами $D(-5; 0)$, $E(-3; -8)$, $F(2; -4)$.
- 13 а) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых абсцисса и ордината имеют одинаковые знаки?
б) Где на координатной плоскости находятся точки, у которых абсцисса и ордината имеют разные знаки?

М

- 14 а) Отметьте на координатной плоскости точки $A(-5; 8)$ и $B(1; 4)$. Отметьте точку C – середину отрезка AB и найдите её координаты.
б) Решите предыдущую задачу для точек $A(-3; 7)$ и $B(1; -5)$.
в) Как найти координаты середины отрезка AB , где $A(m; n)$ и $B(p; q)$?



Н

- 15 Постройте на координатной плоскости четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(4; -2)$, $B(-1; -5)$, $C(-2; 7)$, $D(5; 7)$ и проведите его диагонали. Какие координаты имеет точка пересечения диагоналей?
- 16 Отметьте на координатной плоскости точки $A(-2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(3; 6)$, $D(6; 9)$, $E(-2; 9)$, $F(-2; 10)$, $G(-3; 10)$, $H(-3; -8)$, $K(-2; -8)$, а затем соедините их последовательно отрезками. Какая фигура у вас получилась?
- 17 Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, и отметьте точки $A(-5; 7)$, $B(3; 7)$, $C(3; 2)$. Где должна лежать точка D , чтобы четырёхугольник $ABCD$ был прямоугольником? Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$.



П

- 18 а) Отметьте на координатной плоскости несколько точек. Постройте точки, симметричные отмеченным относительно начала координат. Как связаны между собой координаты симметричных друг другу точек?

б) Точка B симметрична точке $A(m; n)$ относительно начала координат. Найдите координаты точки B .

- 19 Проведите на координатной плоскости прямую через точки $O(0; 0)$ и $M(2; 4)$. Отметьте на этой прямой несколько точек. Как связаны между собой абсцисса и ордината каждой из точек?

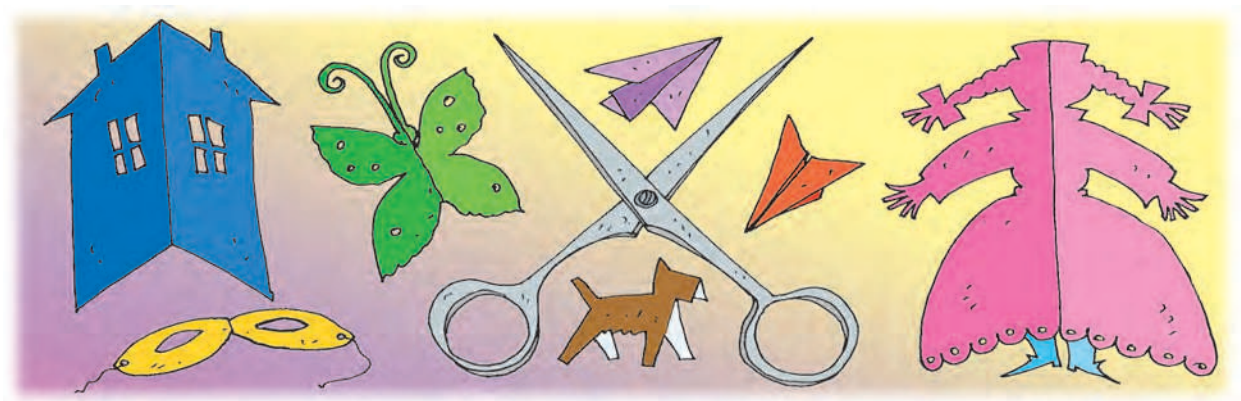


М

- 20 а) Отметьте на координатной плоскости несколько точек, у которых абсцисса равна ординате. Где находятся все точки координатной плоскости, у которых абсцисса равна ординате?
б) Отметьте на координатной плоскости несколько точек, у которых абсцисса и ордината – противоположные числа. Где находятся все точки координатной плоскости, у которых абсцисса и ордината – противоположные числа?
- 21 Заштрихуйте на координатной плоскости множество точек, у которых:
а) абсцисса положительна; б) абсцисса больше 5; в) ордината отрицательна;
г) абсцисса больше 5, а ордината отрицательна; д) абсцисса больше 5, но меньше 8.

7.9

Симметрия относительно прямой



Вспоминаем то, что знаем

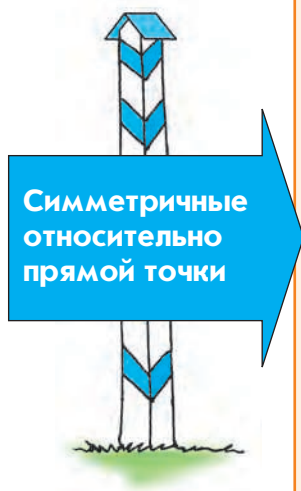
- Возьмите лист бумаги, начертите произвольную прямую m и отметьте лежащую вне неё точку A . Перегните лист по прямой m . Проколите его в точке A . Разверните лист. Вы видите, что он проколот в двух точках: в точке A и некоторой другой точке. Назовём её точкой B . Проведите отрезок AB . Обозначьте точку пересечения отрезка AB с прямой m точкой C .

- Чему равна величина угла между отрезком AB и прямой m ?
- Как связаны между собой длины отрезков AC и CB ?



- Точки A и B в рассмотренном примере называются симметричными относительно прямой m . Как построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой, без перегибания листа бумаги?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Возьмём на плоскости произвольную прямую m . Точки A и B называются **симметричными относительно прямой m** , если отрезок AB перпендикулярен прямой m и делится ею пополам. Прямая m , относительно которой рассматривались симметричные точки, называется **осью симметрии**. Считается, что любая точка, лежащая на оси симметрии, симметрична самой себе. Для построения точки, симметричной данной точке A относительно прямой m :

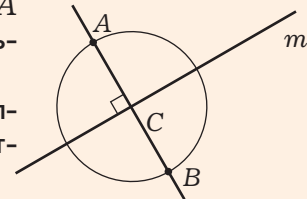
1) проводим перпендикуляр AC из точки A к прямой m (например, с помощью угольника);

2) откладываем от точки C на луче, дополнительном к лучу CA , отрезок, равный отрезку CA .

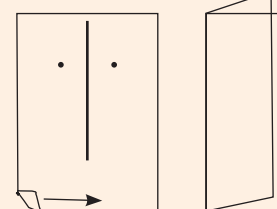
Второй пункт можно выполнить, например, так:

2а) проводим окружность с центром C и радиусом CA . Берём точку пересечения окружности с прямой AC , отличную от точки A .

Осевую симметрию можно наглядно представить себе следующим образом.



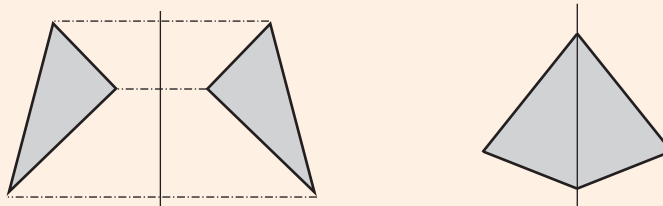
Если начертить на листе бумаги ось симметрии и изобразить две симметричные друг другу точки, то при перегибании листа бумаги по оси симметрии точки совпадут.



Точно так же две геометрические фигуры будут симметричными относительно прямой, если при перегибании листа бумаги по этой прямой (оси симметрии) они совпадут.

Равенство
симметричных
фигур

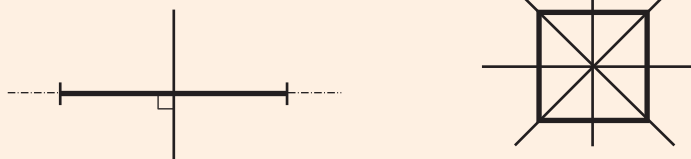
Это позволяет сформулировать важнейшее свойство:
Фигуры, симметричные относительно прямой, равны.



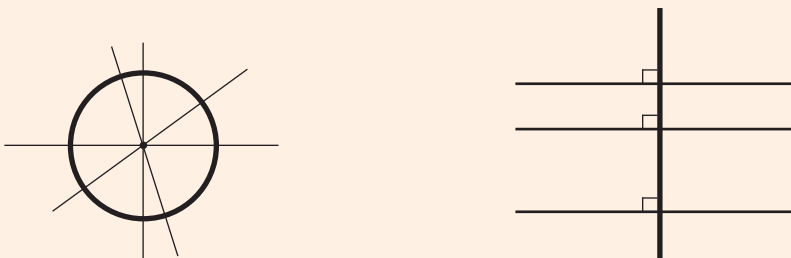
Можно сказать и так: две фигуры симметричны относительно прямой, если для каждой точки первой фигуры симметричная ей точка принадлежит второй фигуре, и наоборот, для каждой точки второй фигуры симметричная ей точка принадлежит первой фигуре.

Возможен случай, когда фигура, симметричная данной фигуре относительно некоторой прямой, совпадает с ней же самой (правый чертёж). Говорят, что такие фигуры имеют ось симметрии или что такие фигуры осесимметричны.

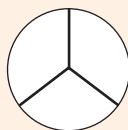
Фигура может иметь несколько осей симметрии. Например, отрезок симметричен себе относительно прямой, на которой он лежит, и относительно прямой, проходящей через его середину и перпендикулярной ему (такая прямая называется *серединным перпендикуляром* к отрезку); квадрат симметричен себе относительно своих диагоналей и прямых, проходящих через середины противоположных сторон.



Фигура может иметь даже бесконечное множество осей симметрии. Например, окружность симметрична самой себе относительно любой прямой, проходящей через центр (иногда говорят для краткости «относительно своего диаметра»); прямая симметрична себе относительно себя самой и любой перпендикулярной ей прямой.



Осесимметричные фигуры часто встречаются в природе: снежинки, листья деревьев, насекомые. Такие фигуры часто используются в узорах, эмблемах, товарных знаках.



Развиваем умения



Н

1 Продолжите предложения.

- а) Точки K и L называются симметричными относительно прямой, если...
- б) Две фигуры называются симметричными относительно прямой, если...
- в) Фигуры, симметричные относительно прямой, ...
- г) Фигура называется осесимметричной, если ...
- д) Осью симметрии отрезка является ...
- е) Осью симметрии окружности является ...
- ж) Осью симметрии прямоугольника является ...
- з) Осью симметрии ромба является ...

- 2** а) Что можно сказать о прямой, относительно которой симметричны две данные точки?
- б) Что можно сказать о точке, симметричной самой себе относительно некоторой прямой?

3 Начертите произвольную прямую l и отметьте произвольную точку A , не лежащую на прямой l .

- а) Постройте точку B , симметричную точке A относительно прямой l .
- б) Постройте точку C , симметричную точке B относительно прямой l .

4 а) Верно ли, что круг – осесимметричная фигура? Если да, то сколько у него осей симметрии?

а) Верно ли, что квадрат – осесимметричная фигура? Если да, то сколько у него осей симметрии?

5 Какие из заглавных букв русского алфавита имеют ось симметрии? Какие из них имеют несколько осей симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

- 6 Может ли фигура иметь параллельные оси симметрии?
- 7 Верно ли, что если треугольник имеет ось симметрии, то она обязательно проходит через одну из его вершин?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB , если ось симметрии проходит через точку A (но не проходит через точку B).
- б) На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$ взяты соответственно такие точки E и F , что прямая EF является его осью симметрии. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если площадь четырёхугольника $Aefd$ равна 34 дм^2 .

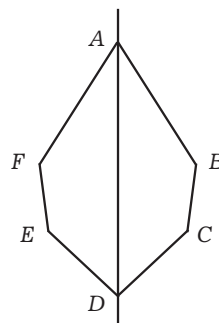
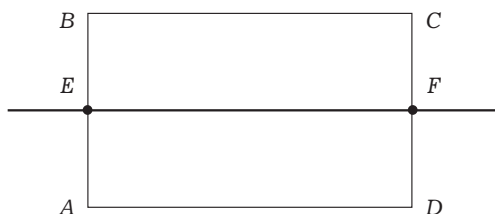
П Вариант II.

- а) Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB , если ось симметрии пересекает отрезок AB (но не перпендикулярна ему).
- б) На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$ взяты соответственно такие точки E и F , что прямая EF является его осью симметрии. Обязательно ли точка пересечения диагоналей AC и BD лежит на оси симметрии?

Тренировочные упражнения.

Н

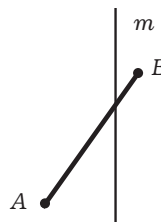
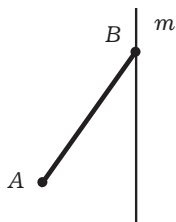
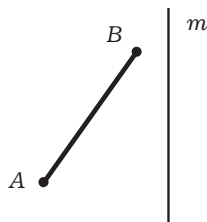
- 8 На левом чертеже изображён прямоугольник $ABCD$. Точки E и F – середины сторон AB и CD . Назовите фигуры, симметричные относительно прямой EF : а) точке A ; б) отрезку AB ; в) отрезку AC ; г) $\triangle ABC$; д) $\triangle BED$; е) четырёхугольнику $AECD$; ж) четырёхугольнику $BFDE$.



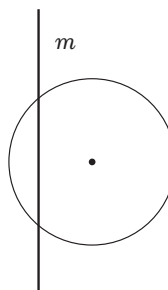
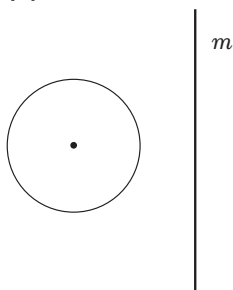
- 9 На правом чертеже изображён шестиугольник $ABCDEF$, о котором известно, что прямая AD является его осью симметрии.
- а) Докажите, что $AB = FA$; $BC = EF$; $CD = DE$.
- б) Докажите, что $\angle B = \angle F$; $\angle C = \angle E$. Можно ли утверждать, что $\angle A = \angle D$?

П

- 10 Постройте отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно прямой m .



- 11 Постройте окружность, симметричную данной окружности относительно прямой m .



- 12 Прочитав в учебнике, что две фигуры симметричны относительно прямой, если для каждой точки первой фигуры симметричная ей точка принадлежит второй фигуре, и наоборот, для каждой точки второй фигуры симметричная ей точка принадлежит первой фигуре, Вася решил, что часть текста, начиная со слова «наоборот», лишняя, её можно отбросить, потому что она следует из первой части текста. Прав ли Вася?
- 13 Верно ли, что треугольник, имеющий ось симметрии, обязательно является равнобедренным?

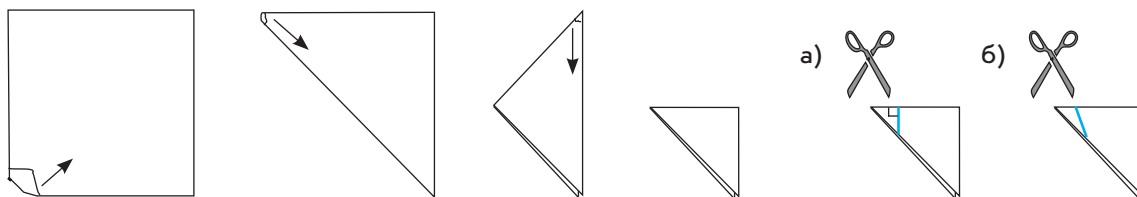
**М**

- 14 Какое количество осей симметрии может иметь четырёхугольник?
- 15 Начертите произвольную прямую l и отметьте произвольные точки A и B , лежащие по одну сторону от неё. Найдите на прямой l такую точку C , чтобы сумма длин отрезков AC и BC была наименьшей.

**Н**

- 16 Какие из заглавных букв латинского алфавита имеют ось симметрии? Какие из них имеют несколько осей симметрии?
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
- 17 Какие из заглавных букв латинского алфавита симметричны заглавным буквам русского алфавита относительно некоторой прямой?
Имеются в виду буквы латинского алфавита, не совпадающие ни с одной буквой русского алфавита, и буквы русского алфавита, не совпадающие ни с одной буквой латинского алфавита.

- 18** Сложите квадратный лист бумаги, как показано на рисунке, и сделайте указанные разрезы.

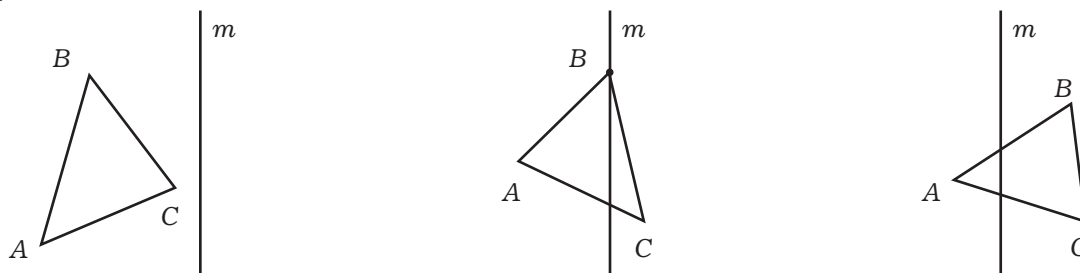


Какие фигуры у вас получились? Имеют ли они оси симметрии? Сколько?



П

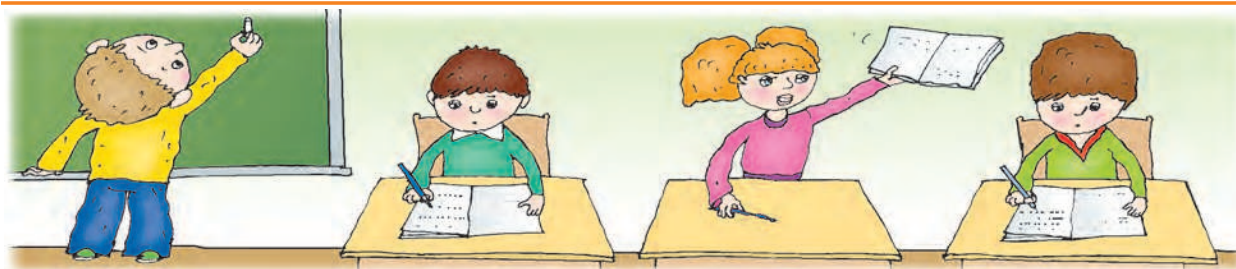
- 19** Имеет ли ось симметрии пара параллельных прямых? Если да, то сколько?
- 20** Имеет ли ось симметрии пара пересекающихся прямых? Если да, то сколько?
- 21** Начертите произвольные прямые l и m .
 а) Постройте прямую, симметричную прямой m относительно прямой l .
 б) Постройте прямую, симметричную прямой l относительно прямой m .
 Рассмотрите различные случаи взаимного расположения прямых l и m .
- 22** Постройте треугольник, симметричный данному треугольнику ABC относительно прямой m .



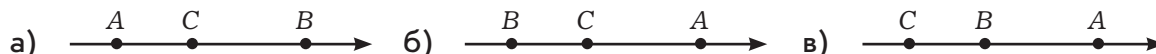
М

- 23** а) На координатной плоскости взята произвольная точка $M(a; b)$. Какие координаты имеет точка, симметричная точке M относительно оси абсцисс? Относительно оси ординат? Относительно начала координат?
 б) Докажите, что если геометрическая фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет и центр симметрии.
- 24** а) Начертите перпендикулярные прямые l и m и отметьте произвольные точки A и B так, чтобы отрезок AB не имел общих точек ни с одной из прямых. Найдите на прямой l такую точку C , а на прямой m такую точку D , чтобы сумма длин отрезков AC , CD и DB была наименьшей.
 б) Решите задачу а), если прямые пересекаются под произвольным углом или являются параллельными.
 в) Решите задачи а) и б) без требования, чтобы отрезок AB не имел общих точек ни с одной из прямых.

Итоговый тест



- 1 На числовой прямой отмечены точки $A(3)$; $B\left(-\frac{5}{4}\right)$; $C(-1,2)$. Выберите верный рисунок.



1 очко

- 2 Числа $x = -0,7355$; $y = -\frac{3}{4}$; $z = -\frac{5}{7}$ расположили в порядке возрастания. Выберите правильный ответ.

Ответы: а) x ; y ; z ; б) z ; x ; y ; в) y ; x ; z .

1 очко

- 3 Найдите значение выражения: $-4\frac{6}{35} - \left(-3\frac{9}{28}\right)$.

Ответы: а) $-\frac{17}{20}$; б) $-\frac{109}{140}$; в) $-\frac{57}{70}$.

2 очка

- 4 Найдите значение выражения: $5,004 - 6,07 + (-0,299)$.

Ответы: а) $-1,365$; б) $-1,355$; в) $-1,445$.

1 очко

- 5 Найдите значение выражения: $1,6 \cdot 9,18 : 0,24$.

Ответы: а) 612; б) 61,2; в) 6,12.

1 очко

- 6 Найдите значение выражения: $3\frac{1}{3} : 1\frac{19}{21} \cdot 2\frac{3}{14}$.

Ответы: а) $2\frac{242}{279}$; б) $\frac{147}{186}$; в) $3\frac{7}{8}$.

2 очка

- 7 Выберите истинное высказывание (a ; b ; c ; d – любые рациональные числа):

а) $-(a - b + c - d) = -(a - b) + (c - d)$; б) $-(a - b + c - d) = -a - (b + c) + d$;
в) $-(a - b + c - d) = -(a - b) - (c - d)$.

2 очка

- 8 Известны координаты трёх вершин прямоугольника $ABCD$: $A(-5; 7)$, $B(3; 7)$, $D(-5; 2)$. Найдите координаты вершины C .

Ответы: а) $C(3; 2)$; б) $C(7; 2)$; в) $C(-5; 3)$.

3 очка

- 9 Какое количество осей симметрии не может иметь треугольник?

Ответы: а) 1; б) 2; в) 3.

3 очка

Исторические страницы



Впервые регулярное использование отрицательных чисел началось в Древнем Китае. В уже известном вам сочинении «Математика в девяти книгах» (III в. до н.э.), в книге 8 «Фан-чен», излагался общий метод решения большого количества задач с помощью счётной доски («фан-чен» буквально означает «выстраивание чисел по клеткам»). В этом методе при выполнении промежуточных вычислений очень часто производится вычитание чисел. И иногда встречается ситуация, когда из меньшего числа нужно вычесть большее. Сначала китайские математики в такой ситуации выкладывали счётные палочки другого цвета или другой формы, не особо задумываясь о смысле возникающих чисел, а стремясь закончить вычисления, как того требовал метод фан-чен, тем более что в большинстве случаев эти числа появлялись лишь временно, а окончательный ответ в задаче оказывался положительным. Тем не менее правила сложения и вычитания были разработаны со всей полнотой. Постепенно китайские математики пришли к истолкованию отрицательных чисел как долга, недостачи и уже стали включать их в условия задач. Действия умножения и деления с отрицательными числами не выполнялись.

Индийские математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н. э.), систематически пользовались отрицательными числами, трактуя положительное число как имущество, а отрицательное как долг. В сочинениях Брахмагупты подробно описаны все правила арифметических действий с отрицательными числами, включая умножение и деление.

Современное геометрическое истолкование отрицательных чисел на основе откладывания отрезков на числовой прямой влево от начала появилось лишь в начале XVII в. н. э.

Название «рациональные числа» происходит от латинского слова «рацио», имеющего много разных смыслов. Один из них – отношение, и действительно, рациональное число может быть записано как отношение двух целых чисел. Но возможно, был использован другой смысл слова «рацио» – разумный. В пользу такого предположения говорит тот факт, что, кроме рациональных чисел, существуют ещё числа, называемые иррациональными (вы познакомитесь с ними в следующем разделе учебника), название которых трактуется как «не поддающиеся разумному объяснению», «неразумные».

Систему координат на плоскости впервые стал широко использовать французский математик и философ Рене Декарт (первая половина XVII в.), в честь которого она называется декартовой.



Любителям математики



1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трёх человек. Стиральная машина очень тяжёлая, потому погрузить её в катер или выгрузить из катера можно только втроем. Смогут ли они переправиться?

2. Валя задумал три натуральных числа. Для каждой пары чисел он нашёл разность между их произведением и суммой. Оказалось, что одна из этих разностей положительна, а другая отрицательна. Какой знак третьей разности?

3. Расставьте в записи

$$* 1 * 2 * 4 * 8 * 16 * 32 * 64 = 27$$

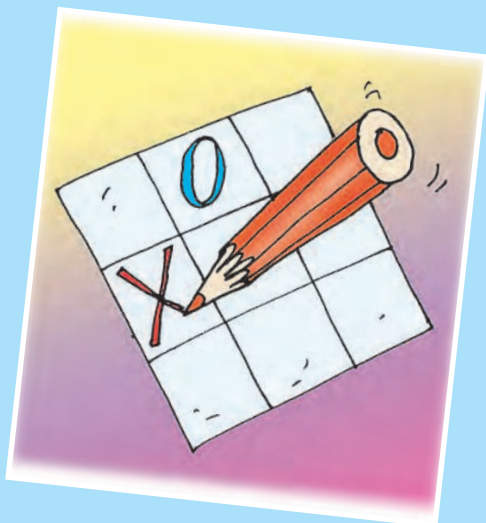
вместо звёздочек знаки «+» или «-» так, чтобы получилось верное равенство.

4. Расставьте числа от 1 до 9 в клетки так, чтобы равенство было верным.

$$\begin{array}{r} \square\square \\ \hline \square\square\square \end{array} + \begin{array}{r} \square\square \\ \hline \square\square \end{array} = 7$$

5. Можно ли записать в ряд семь чисел так, чтобы сумма любых трёх подряд идущих чисел была положительна, а сумма любых пяти подряд идущих чисел отрицательна? А шестнадцать чисел?

6. Можно ли записать в каждую клетку квадратной таблицы 6×6 по числу так, чтобы сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 была отрицательна, а в любом квадрате 5×5 положительна? А таблицы 7×7 ?





Жизненная задача



СИТУАЦИЯ. Сопровождение группы американских школьников по России.

ВАША РОЛЬ. Синхронный переводчик.

ОПИСАНИЕ. Во время поездки с американскими школьниками вы понимаете, что они оценивают температуру воздуха как положительную, в то время как вы точно знаете, что она отрицательна. В процессе беседы выясняется, что все вы правы, но при этом пользуетесь разными термометрами.

ЗАДАНИЕ. Как называется единица измерения температуры, применяемая в США?

Как связаны показания термометра, которым пользовались американские школьники, и привычного нам термометра?

Какую температуру покажет наш термометр, если на термометре американских школьников будет $+14^{\circ}$?

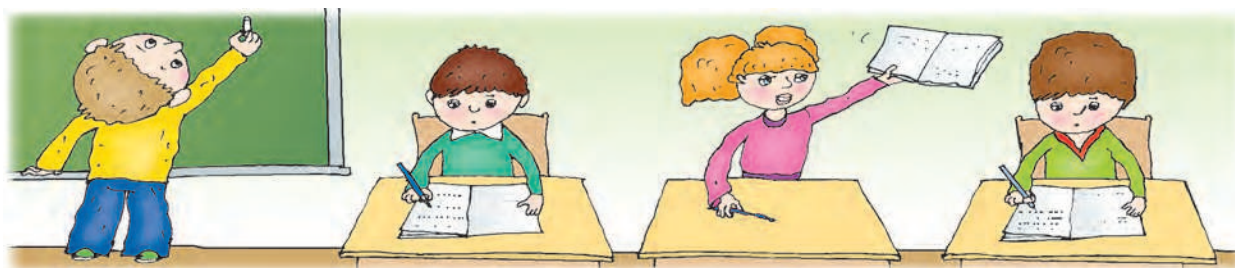
Какую температуру покажет термометр американских школьников, если на нашем термометре будет $+20^{\circ}$?



РАЗДЕЛ IV

ПОНЯТИЕ О ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Входной тест



- 1 Числа $x = -1,668$; $y = -\frac{5}{3}$; $z = -1\frac{8}{11}$ расположили в порядке возрастания. Выберите правильный ответ.
 Ответы: а) $x; y; z$; б) $z; x; y$; в) $y; x; z$.

1 очко

- 2 После округления числа до второго знака после запятой получили 12,56. Какое число из записанных ниже округляли?
 Ответы: а) 12,5454; б) 12,5555; в) 12,5656.

1 очко

- 3 Округлите число 0,092343 до третьей значащей цифры.
 Ответы: а) 0,09; б) 0,092; в) 0,0923.

1 очко

- 4 Найдите значение выражения: $-7\frac{7}{24} - \left(-8\frac{11}{30}\right)$.

Ответы: а) $\frac{43}{40}$; б) $-1\frac{7}{120}$; в) $1\frac{7}{120}$.

1 очко

- 5 Найдите значение выражения: $-13,984 + 11,11 + (-1,876)$.
 Ответы: а) -5,05; б) -4,75; в) -4,715.

1 очко

- 6 Найдите значение выражения: $0,144 : 0,045 \cdot 0,75$.
 Ответы: а) 0,024; б) 0,24; в) 2,4.

1 очко

- 7 Найдите значение выражения: $1\frac{7}{18} : 2\frac{2}{9} \cdot 4\frac{4}{15}$.

Ответы: а) $2\frac{2}{3}$; б) $2\frac{14}{15}$; в) $3\frac{7}{15}$.




2 очка

- 8 Выберите истинное высказывание (x, y, z – любые рациональные числа, причём y и z не равны нулю):

а) $x : (y : z) = (x : y) : z$; б) $x : (y : z) = (x : y) \cdot z$; в) $x : (y : z) = (x \cdot y) : z$.

2 очка

- 9 На какие фигуры нельзя разрезать квадрат 4×4 ?

Ответы: а) ; б) ; в) .

3 очка

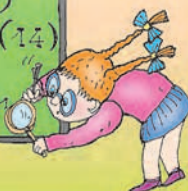
Путеводитель по четвёртому разделу



ГЛАВА VIII

Понятие о действительных числах

$$\begin{aligned} 3,5555\dots &= 3,(5) \\ 3,5141414\dots &= 3,5(14) \\ 3,512768996432141\dots & \end{aligned}$$



Входной тест



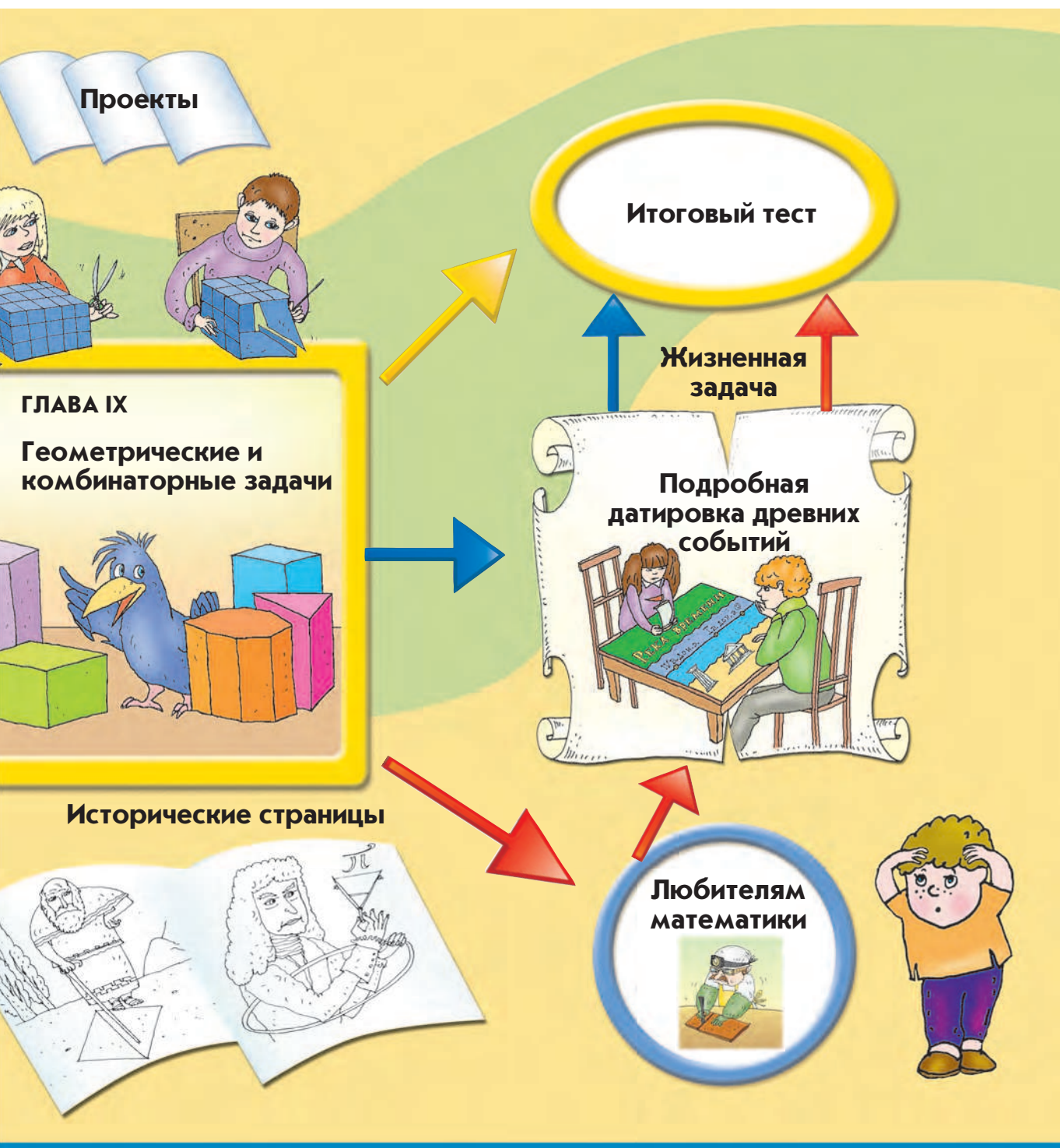
Путь 1:

- а) входной тест;
- б) главы;
- в) итоговый тест.



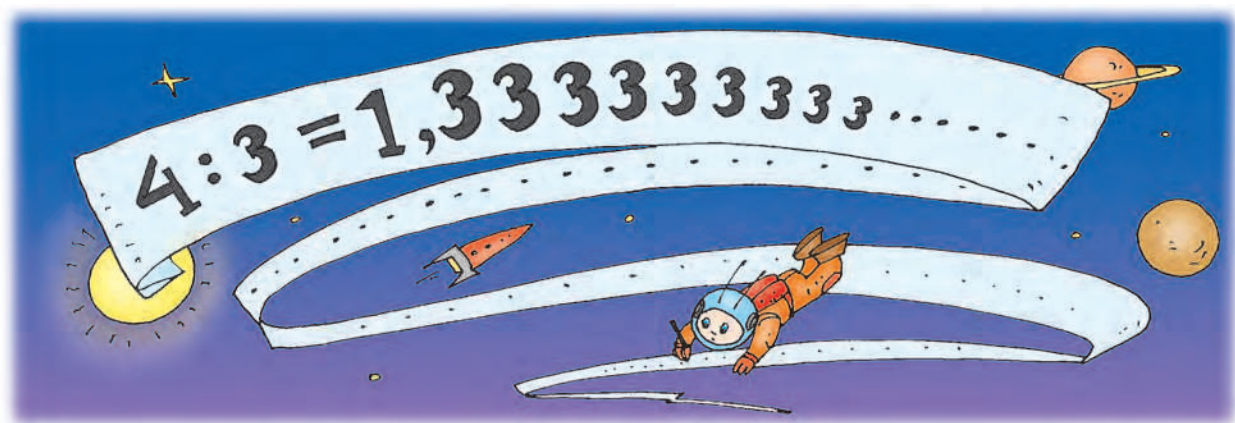
Путь 2:

- а) входной тест;
- б) главы;
- в) жизненная задача;
- г) итоговый тест.



Путь 3:

- а) входной тест;
- б) главы;
- в) задачи для любителей математики;
- г) жизненная задача;
- д) итоговый тест.



Вспоминаем то, что знаем

- Укажите, какие из обыкновенных дробей можно представить в виде конечных десятичных, а какие нельзя:
а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$.
- Запишите дроби в виде несократимых и расскажите, можно ли их представить в виде конечных десятичных:
а) $\frac{6}{24}$; б) $\frac{7}{21}$; в) $\frac{33}{44}$.
- Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби числа:
а) 0,4; б) 0,12; в) 0,45.
- Какие два способа преобразования обыкновенных дробей в десятичные вы знаете?
- Представьте обыкновенные дроби в виде конечных десятичных каждым из двух способов:
а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{11}{25}$; в) $\frac{1}{20}$.

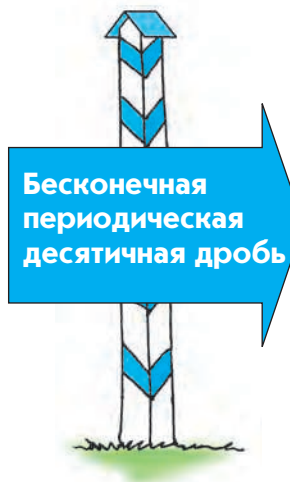
Открываем новые знания

- Представьте число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби. Что вы можете рассказать о полученном результате?
- Представьте в виде десятичной дроби числа $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{14}$; $\frac{2}{21}$. Что общего у всех этих десятичных дробей?



● Как бы вы назвали полученные вами десятичные дроби?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Вы уже знаете, что если знаменатель несократимой обыкновенной дроби имеет какие-нибудь простые делители, кроме 2 и 5, то эту дробь нельзя представить в виде *конечной* десятичной.

В этом случае частным от деления числителя обыкновенной дроби на её знаменатель будет **бесконечная десятичная дробь**.

Например, рассмотрим обыкновенную дробь $\frac{2}{3}$. Это несократимая дробь, знаменатель которой является простым числом 3, следовательно, она не может быть представлена в виде *конечной* десятичной дроби. Частное от деления 2 на 3 равно *бесконечной* десятичной дроби 0,6666...

Выражение 0,6666... называют **бесконечной периодической десятичной дробью**, или просто периодической дробью, её записывают так: 0,(6) и читают: «ноль целых шесть в периоде». Цифру 6 называют периодом дроби 0,(6).

Итак, число $\frac{2}{3}$ может быть представлено в виде периодической дроби 0,(6). Говорят, что периодическая дробь 0,(6) есть *десятичное разложение* числа $\frac{2}{3}$.

Таким образом, $\frac{2}{3}$ и 0,(6) – разные обозначения одного и того же числа.

Рассмотрим ещё один пример подобных дробей: результатом разложения в десятичную дробь числа $\frac{51}{22}$ является периодическая дробь 2,3181818... Она записывается так: 2,3(18); читается так: «две целых три десятых и восемнадцать в периоде».

Рассмотрим отрицательное число $-\frac{2}{3}$: оно может быть представлено в виде периодической дроби $-0,(6)$, то есть периодическая дробь $-0,(6)$ есть десятичное разложение числа $-\frac{2}{3}$.

Рациональные
числа как перио-
дические деся-
тичные дроби

Преобразование
периодической
десятичной
дроби в обыкно-
венную

Приписывая к целому числу (после запятой) или к конечной десятичной дроби бесконечное количество нулей, мы получаем бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0, равную начальному целому числу или начальной конечной десятичной дроби.

Следовательно, **любое рациональное число $\frac{x}{y}$ разлагается в периодическую дробь.** Справедливо и обратное утверждение: **любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.**

Выясним, например, десятичным разложением какого рационального числа является периодическая дробь $0,(7)$.

Можно сказать по-другому: преобразуем периодическую дробь $0,(7)$ в обыкновенную. Для этого применяется очень простой и легко запоминаемый приём, строгое обоснование которого мы не рассматриваем.

Обозначим

$$x = 0,777\ldots \text{ . Тогда } 10x = 7,777\ldots = 7 + 0,777\ldots = 7 + x.$$

$$\text{Итак, } 10x = 7 + x; 9x = 7; x = \frac{7}{9}.$$

Убедиться в верности полученного результата можно, выполнив обратное преобразование с помощью деления 7 на 9. Получим: $\frac{7}{9} = 0,777\ldots$

Похожим образом можно преобразовать в обыкновенные дроби и другие периодические дроби, с более длинными периодами.

Развиваем умения



Н

- 1 Укажите, какие из обыкновенных дробей можно представить в виде конечных десятичных, а какие нельзя. Обоснуйте свой ответ.

а) $-\frac{1}{27}$; б) $\frac{1}{50}$; в) $-\frac{1}{40}$; г) $\frac{1}{35}$; д) $-\frac{3}{20}$; е) $\frac{4}{55}$.

- 2 Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби:

а) 0,8; б) -0,6; в) 0,25; г) -0,125; д) 0,02; е) 0,72; ж) -0,005; з) -0,256.

- 3 Представьте обыкновенные дроби в виде конечных десятичных двумя способами:

а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{4}{25}$; в) $-\frac{3}{20}$; г) $-\frac{11}{50}$; д) $\frac{8}{125}$.

4 Запишите число в виде периодической дроби, назовите её период:

- а) $-\frac{1}{7}$; в) $\frac{3}{11}$; д) $-\frac{2}{9}$; ж) $-\frac{6}{5}$; и) $-\frac{20}{41}$;
б) -7 ; г) $\frac{3}{20}$; е) $-\frac{32}{48}$; з) $-\frac{2}{6}$; к) $\frac{15}{37}$.

5 Запишите частное в виде обыкновенной дроби и преобразуйте в десятичную:

- а) $-11 : 2$; г) $9 : (-8)$; ж) $-9 : 35$;
б) $-23 : (-5)$; д) $-7 : 9$; з) $-15 : (-24)$;
в) $13 : (-25)$; е) $(-5) : 12$; и) $12 : 6$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Запишите число в виде периодической дроби, обозначьте её период:

- а) $-\frac{5}{7}$; б) $\frac{4}{13}$; в) $-\frac{1}{9}$; г) $-\frac{2}{11}$.

П Вариант II.

Запишите число в виде периодической дроби, обозначьте её период:

- а) -10 ; б) $\frac{5}{27}$; в) $-\frac{2}{40}$; г) $-\frac{5}{12}$.

Тренировочные упражнения.

Н

6 Запишите число в виде периодической дроби:

- а) $-\frac{3}{14}$; в) $\frac{5}{22}$; д) $-\frac{7}{18}$; ж) $-\frac{8}{9}$; и) $-\frac{5}{27}$;
б) $-\frac{6}{21}$; г) $\frac{3}{49}$; е) $-\frac{11}{42}$; з) $-\frac{11}{18}$; к) $\frac{13}{30}$.

7 Запишите число в виде периодической дроби, назовите её период.

- а) -6 ; в) $\frac{3}{25}$; д) $-\frac{1}{20}$; ж) $-\frac{9}{5}$; и) $-\frac{4}{21}$;
б) 70 ; г) $\frac{3}{40}$; е) $-\frac{22}{45}$; з) $-\frac{19}{80}$; к) $-\frac{5}{6}$.

8 Запишите частное в виде обыкновенной дроби и переведите в десятичную:

- а) $-1 : 2$; в) $3 : (-20)$; д) $-6 : 45$;
б) $-21 : (-18)$; г) $-4 : 27$; е) $-5 : (-12)$.

П

- 9 Какое число получится, если периодическую дробь $0,(7)$ умножить на 10? на 100? на 1 000?
- 10 Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной:
а) $0,(1)$; б) $0,(3)$; в) $2,(5)$; г) $0,(27)$; д) $5,(05)$.

**М**

- 11 Докажите, что если при делении одного натурального числа на другое получается бесконечная десятичная дробь, то она обязательно периодическая.

**Н**

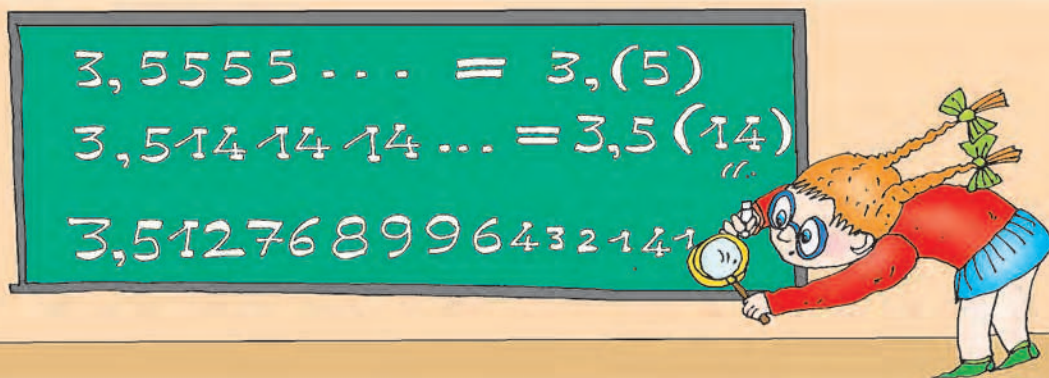
- 12 Запишите частное в виде обыкновенной дроби и в виде десятичной:
а) $-2 : 1$; б) $-21 : (-6)$; в) $9 : (-3)$; г) $-26 : 8$; д) $-80 : 20$; е) $-15 : (-2)$.
- 13 Запишите число в виде периодической дроби:
а) $-\frac{7}{18}$; б) $-\frac{7}{21}$; в) $\frac{3}{22}$; г) $\frac{3}{7}$; д) $-\frac{2}{27}$; е) $-\frac{32}{13}$; ж) $-\frac{6}{15}$; з) $-\frac{2}{11}$; и) $\frac{4}{15}$; к) $-\frac{16}{17}$.
- 14 Запишите число в виде периодической дроби:
а) -6 ; б) 80 ; в) $\frac{1}{50}$; г) $\frac{7}{20}$; д) $-\frac{11}{25}$; е) $-\frac{21}{100}$; ж) $-\frac{9}{75}$; з) $-\frac{19}{125}$; и) $\frac{5}{12}$; к) $-\frac{17}{14}$.

**П**

- 15 Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной:
а) $1,0(1)$; б) $1,5(4)$; в) $8,7(5)$; г) $-3,(31)$; д) $2,2(02)$; е) $0,(123)$.

**М**

- 16 Докажите, что если десятичным разложением несократимой дроби со знаменателем n является периодическая дробь, то её период содержит меньше, чем n цифр.
- 17 Какую наибольшую длину периода может иметь десятичное разложение несократимой обыкновенной дроби со знаменателем: а) 7; б) 11; в) 6; г) 12?



Вспоминаем то, что знаем

- Выберите среди данных чисел только бесконечные периодические десятичные дроби и назовите их период: а) $3,5$; б) $-0,5555\dots$; в) $4,5131313\dots$; г) $0,513$.

Открываем новые знания

- Рассмотрите бесконечные десятичные дроби:
- $0,51551555155551\dots$ (каждая следующая группа пятёрок содержит на одну цифру больше, чем предыдущая);
 - $37,001110001111\dots$ (после запятой идут два нуля, три единицы, три нуля, четыре единицы и т.д., т.е. группа нулей и группа единиц каждый раз удлиняется на одну цифру).
- Являются ли эти дроби периодическими?



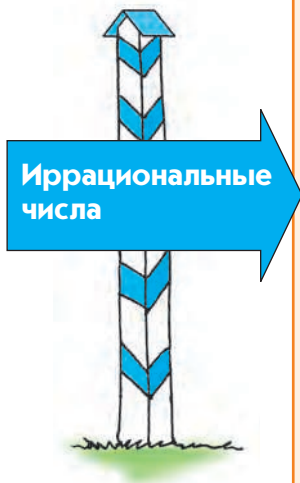
- Как бы вы назвали такие дроби?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

**Бесконечные
непериодические
десятичные
дроби**

Бесконечные десятичные дроби могут быть непериодическими. Убедимся, что дробь $0,51551555155551\dots$ из примера а) – непериодическая. Предположим, что она периодическая и её период содержит n цифр. Поскольку в дроби подряд может идти любое количество пятёрок, понятно, что все эти n цифр периода должны быть пятёрками*.

* Чтобы убедиться в этом, например при $n = 3$, нужно рассмотреть 6 идущих подряд пятёрок: $\dots 555555\dots$. Видно, что при любом положении периода из 3 цифр он состоит из одних пятёрок. Но тогда в дроби, начиная с некоторого места, шли бы одни пятёрки, что невозможно – ведь дробь строилась так, что справа от любой цифры в ней содержатся единицы.



Так как эти дроби *непериодические*, они не могут быть десятичным разложением какого-нибудь *рационального* числа.

Бесконечная непериодическая десятичная дробь называется иррациональным (нерациональным) числом.

Если взять иррациональное число $x = 0,515515551\dots$, то говорят, что бесконечная непериодическая десятичная дробь $0,515515551\dots$ является *десятичным разложением* иррационального числа x .

Множество рациональных и множество иррациональных чисел образуют множество действительных чисел.

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то оно представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если иррациональное, то в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Число до запятой у бесконечной десятичной дроби называют **целой частью** этой дроби.

Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют цифрой первого разряда после запятой, вторую цифру – цифрой второго разряда после запятой, третью – цифрой третьего разряда после запятой и т.д.

Числа, отличающиеся только знаком, называют противоположными числами.

Например, числа $0,101234076\dots$ и $-0,101234076\dots$ противоположные.

Если x – положительное число, то $(-x)$ – отрицательное число; если x – отрицательное число, то $(-x)$ – положительное число; если x – нуль, то $(-x)$ – нуль.

Модули действительных чисел определяются точно так же, как ранее определялись модули целых и рациональных чисел:

$|x| = x$, если x положительно; $|x| = 0$, если $x = 0$; $|x| = -x$, если x отрицательно.

Развиваем умения



Н

1 Каким (рациональным или иррациональным) является число:

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| а) $-0,7610154$; | г) $1,76101545454\dots$; |
| б) $3,541541154111541111\dots$; | д) $-8,14587$; |
| в) 761 ; | е) $-0,23233233323333\dots$? |

2 Придумайте каких-нибудь пять: а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел.

3 а) Существует ли такое рациональное число, которое можно представить в виде непериодической бесконечной десятичной дроби?

б) Любое ли действительное число является иррациональным?

4 Запишите каких-нибудь пять:

- а) натуральных чисел; в) целых неотрицательных чисел;
б) целых отрицательных чисел; г) дробных отрицательных чисел.
Какие из этих чисел являются рациональными?

5 Представьте число в виде периодической десятичной дроби:

- а) -45 ; б) $5\frac{11}{20}$; в) $\frac{78}{9}$; г) $-\frac{11}{19}$; д) $\frac{19}{7}$; е) $\frac{32}{48}$.

6 а) Как обозначают число, противоположное числу a ?

- б) Верно ли, что число, противоположное рациональному, тоже рационально?
в) Верно ли, что число, противоположное иррациональному, тоже иррационально?
Приведите примеры противоположных иррациональных чисел.

7 Найдите число, противоположное числу:

- а) $1,0(3)$; б) $-0,0443444344443\dots$; в) $2,05$; г) $-5,0(15)$.

8 Найдите модуль числа:

- а) $-2,1(5)$; б) $-0,345345534555\dots$; в) $12,567000\dots$

9 Запишите несколько действительных чисел и назовите их модули.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Запишите каких-нибудь пять рациональных чисел.
б) Запишите каких-нибудь пять иррациональных чисел.
в) Запишите число, противоположное числу $12, (3); -7, 2(1)$.

П Вариант II.

- а) Запишите каких-нибудь пять отрицательных рациональных чисел.
б) Запишите каких-нибудь пять положительных иррациональных чисел.
в) Найдите модуль числа $-2,1(5)$; $11,3(6)$.

Тренировочные упражнения.

H

10 Разбейте данные числа на две группы несколькими способами:

- а) $-0,545$; г) $100,0(14)$;
б) $30,123012300123000\dots$; д) $-800,0007$;
в) $1\,000$; е) $-10,771777717777771\dots$

11 Запишите несколько рациональных:

- а) положительных чисел; б) отрицательных чисел.

12 Найдите модуль числа:

- а) $-13,0(45)$; б) 0 ; в) $0,0(5)$; г) $-4,(533)$; д) $-7,0(7)$.

П

13 Известно, что $|a| < |b|$. Обязательно ли верно неравенство $a < b$?

14 Известно, что $|a| = |b|$. Могут ли при этом быть верными равенства $a = b$; $a = -b$? В каком случае?

15 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её:

| | | | | | |
|---------|----|----|----|----|---|
| x | 10 | -5 | -7 | -2 | 0 |
| y | 8 | 9 | 11 | 7 | 4 |
| $x - y$ | | | | | |
| $y - x$ | | | | | |

Какую закономерность вы заметили?



М

16 Докажите, что число $0,1234567891011121314\dots$ (после запятой выписаны подряд натуральные числа) иррационально.



Н

17 Запишите несколько иррациональных чисел.

18 Представьте число в виде периодической десятичной дроби:

- а) -45 ; б) $5\frac{11}{20}$; в) $\frac{78}{9}$; г) 105 ; д) $2\frac{9}{50}$; е) $\frac{7}{27}$.

19 Запишите несколько чисел:

- а) чётных положительных; г) нечётных и кратных 7;
б) чётных и кратных пяти; д) простых и меньших 30;
в) нечётных отрицательных; е) составных и чётных.



П

20 Определите, положительным или отрицательным является число $-\frac{x}{y}$, если:
а) $x < 0$; $y < 0$; б) $x > 0$; $y < 0$; в) $x < 0$; $y > 0$; г) $x > 0$; $y > 0$.

21 Имеется число $-a$. Верно ли, что это отрицательное число? Обоснуйте свой ответ с помощью конкретных примеров.

22 Запишите выражение, значение которого противоположно значению данного выражения. Проверьте себя, выполнив вычисления:

- а) $-20 + 5$; б) $-100 - 1\,000$; в) $17 - 35$; г) $13 + 27$.

- 23 Ваня и Валя играют в такую игру. Они записали 0, (т.е. ноль целых и поставили запятую), после чего по очереди пишут по одной цифре. Ваня стремится к тому, чтобы получилась бесконечная периодическая дробь, а Валя – непериодическая. Кто победит в этой игре, если игроки не ошибаются и начинает: а) Ваня; б) Валя?

8.3

Сравнение действительных чисел. Приближённые вычисления с действительными числами



Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните правила сравнения десятичных дробей.
- Сравните приближённые значения чисел 1,54 и 1,56, округлив их до десятых.

Открываем новые знания

- Сравните числа 23,154... и 15,672....
- Сравните числа $-23,154...$ и $-15,672...$.



- Как сравнить две бесконечные десятичные дроби одного знака?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

Сравнение
бесконечных
десятичных
дробей

Бесконечные десятичные дроби (не имеющие периода 9) сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.
Например: сравним числа $-4,5$ и $-4,(5)$. Найдём модуль каждого из этих чисел: $|-4,5| = 4,5 = 4,5000...$; $|-4,(5)| = 4,(5) = 4,5555...$. Сравним модули. Вы видите, что $|-4,5| < |-4,(5)|$. Значит, по правилу сравнения отрицательных чисел $-4,5 > -4,(5)$.

Вспоминаем то, что знаем

- Вспомните, как выполнялись приближённые вычисления с конечными десятичными дробями.
- Выполните сложение чисел 23,154 и 15,672, округлив слагаемые до указанного разряда: а) до единиц (до целых); б) до десятых; в) до сотых.

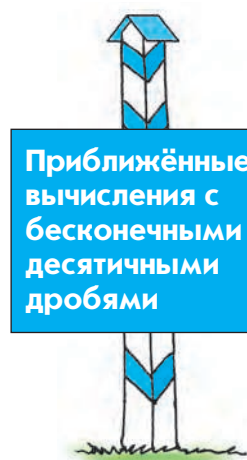
Открываем новые знания

- Выполните сложение чисел 23,154... и 15,672... .
- Выполните сложение чисел 23,15(4) и 15,67(2).



- Как приближённо вычислить сумму положительных бесконечных периодических и непериодических десятичных дробей? Каким правилом можно воспользоваться?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Вам уже известны правила сложения, вычитания, умножения и деления конечных десятичных дробей. Можно сформулировать правила арифметических действий и для бесконечных десятичных дробей, но они достаточно сложные, и вы познакомитесь с ними в старших классах. При этом для действительных чисел справедливы те же законы арифметических действий, что и для рациональных чисел. На практике бесконечные десятичные дроби (действительные числа) складывают, вычитают, умножают и делят приближённо, округляя их нужным образом.

Пример 1. Найдём приближённо сумму и разность чисел a и b , если $a = 4,5(9)$ и $b = 11,2(4)$, округлив их с точностью до одной десятой.

Сначала округлим числа с точностью до одной десятой, найдём, что

$a \approx 4,6$; $b \approx 11,2$. Получаем ответ: $a + b \approx 15,8$; $a - b \approx -6,6$.

Пример 2. Вычислим произведение чисел $x = 31,81(2)$ и $y = 0,05612112112...$, округлив их до третьей значащей цифры.

Сначала выполним округление до указанной значащей цифры: $x \approx 31,8$; $y \approx 0,0561$, затем перемножим и округлим произведение до третьей значащей цифры: $x \cdot y \approx 1,78$. Таким образом, $x \cdot y \approx 1,78$.

Пример 3. Вычислим частное чисел $x = 0,080(75)$ и $y = 0,37(7)$, округлив их до второй значащей цифры.

Сначала выполним округление до указанной значащей цифры: $x \approx 0,081$; $y \approx 0,38$, затем разделим и округлим частное до второй значащей цифры: $x : y \approx 0,21$.

Таким образом, $x : y \approx 0,21$.

**Н**

- 1** Назовите цифры пятого, шестого, седьмого разрядов после запятой у дроби:
а) 0,045600342... ; б) 12,(15); в) 1,0000(12).
- 2** Найдите модуль числа:
а) $-1,5444$; б) 12,0(12); в) $-1,5400(1)$; г) 0; д) $-2,44044044440...$.
- 3** Найдите число, противоположное числу:
а) $-3,5(3)$; б) $-1,(68)$; в) $-4,00(14)$; г) 2,010010001... ; д) $-0,989989998...$.
- 4** Сравните числа:
а) 2,3 и 2,(3); в) $-5,4$ и $-5,(4)$; д) $-8,0(1)$ и $-8,011011101111...$;
б) $-2,3$ и 2,(3); г) 5,4 и $-5,(4)$; е) 0,(101) и 0,(10).
- 5** Найдите приближённо сумму чисел, округляя слагаемые до сотых:
а) $2,6 + 2,(6)$; б) $11,452 + 0,(83)$; в) $10,361 + 0,(5)$; г) $9,(11) + 4,(26)$.
- 6** Найдите приближённо разность чисел, округляя уменьшаемое и вычитаемое до десятых:
а) $15,(4) - 1,(54)$; б) $10,(15) - 3,9254$; в) $4,(94) - 2,(39)$; г) $6,87 - 7,(61)$.
- 7** Найдите приближённо произведение чисел, беря множители с точностью до третьей значащей цифры:
а) $1,(4) \cdot 12,(5)$; б) $0,(65) \cdot 0,(2)$; в) $8,(1) \cdot 6,(3)$; г) $12,(45) \cdot 1,(1)$.
- 8** Найдите приближённо частное чисел, беря делимое и делитель с точностью до второй значащей цифры:
а) $0,1(4) : 0,01(2)$; б) $0,9(8) : 0,(3)$; в) $0,08(8) : 0,00(8)$; г) $0,6(87) : 0,233$.

Задания для самостоятельной работы.**Н****Вариант I.**

- а) Найдите модуль числа: $-0,05(4)$; 11,0(15); 0.
б) Сравните числа: 0,4 и 0,(4); 3,4 и $-5,(4)$.
в) Вычислите, округляя числа до десятых:
 $1,75 + 0,(6)$; $0,(09) - 1,0299$.

П Вариант II.

- а) Найдите модуль числа: $-6,27(2)$; $1,0(154)$; 0 .
б) Сравните числа: $-1,(5)$ и $0,5$; $1,54$ и $1,5(4)$.
в) Вычислите, округляя числа до второй значащей цифры:
 $1,(4) \cdot 12,(5)$; $0,74(5) : 0,254$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 9 Найдите приближённо значения выражений $a + b$; $a - b$, округляя числа a и b до десятых:
а) $a = 11,32$; $b = 0,1$; в) $a = 0,(3)$; $b = -2,323$; д) $a = 0,(17)$; $b = 0,(81)$;
б) $a = 4,2$; $b = 1,(1)$; г) $a = 0,(6)$; $b = 0,(2)$; е) $a = 0,(08)$; $b = 0,(04)$.
- 10 Найдите приближённо значения выражений $a : b$; $a \cdot b$, беря числа a и b с точностью до второй значащей цифры:
а) $a = 3,2$; $b = 0,(2)$; б) $a = 3,(82)$; $b = 2,3$; в) $a = 35,0(8)$; $b = 4,(02)$.

П

- 11 Расскажите, какими свойствами арифметических действий нужно воспользоваться, чтобы найти значения следующих выражений:
а) $1,01(54) - 1,01(54)$; в) $6,2(72) \cdot 0$;
б) $4,5(1) : 1$; г) $0 : 0,0(654)$.



М

- 12 Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Обоснуйте свой ответ.



Н

- 13 Найдите приближённо значения выражений $a + b$; $a - b$, округляя числа a и b до тысячных:
а) $a = 11,323323332\dots$; $b = 0,(7)$; в) $a = 1,(5)$; $b = \frac{2}{7}$;
б) $a = 3,979979997\dots$; $b = 29,(29)$; г) $a = \frac{9}{11}$; $b = 0,(81)$.

- 14 Найдите приближённо значения выражений $a : b$; $a \cdot b$, беря числа a и b с точностью до третьей значащей цифры:

а) $a = 0,0(95)$; $b = 0,0393993999\dots$;

б) $a = 0,0(002)$; $b = 0,00002000002\dots$.



П

- 15 Расскажите, какими свойствами арифметических действий нужно воспользоваться, чтобы найти значения следующих выражений:

а) $1,010010001\dots - 1,010010001\dots$;

в) $6,273227322273 \cdot 0$;

б) $4,511551155511\dots : 1$;

г) $0 : 0,065400654000654\dots$.



М

- 16 Может ли сумма иррационального числа и рационального числа быть:

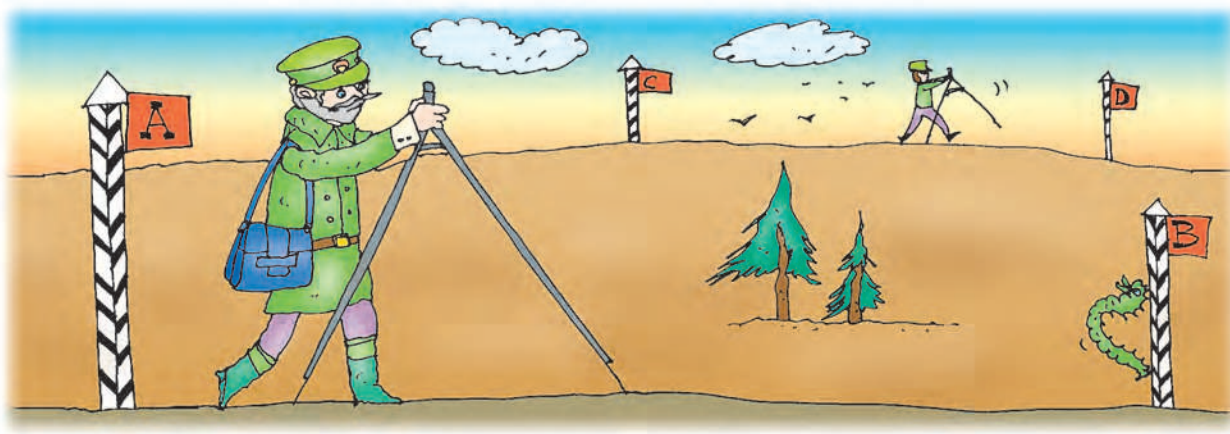
а) иррациональным числом;

б) рациональным числом?

Обоснуйте свой ответ.

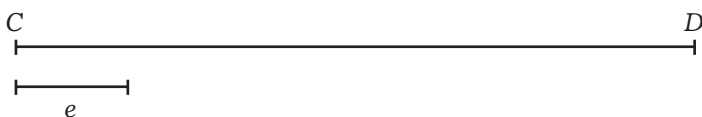
8.4

Длина отрезка



Вспоминаем то, что знаем

Выразите длину отрезка CD в заданных единичных отрезках.

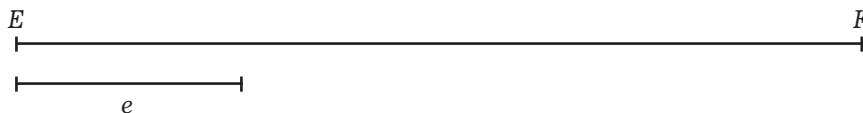


- Выразите длину отрезка KL приближённо с недостатком с точностью:
а) до 1 дм; б) до 1 см; в) до 1 мм.



- С помощью заданного единичного отрезка выразите длину отрезка EF приближённо с недостатком с точностью:

- а) до целых; б) до десятых.

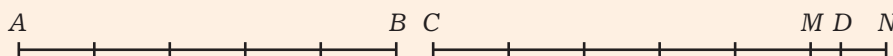


- Как можно выполнять дальнейшие измерения отрезка, если единичный отрезок не отложился в нём целое количество раз?

Отвечаем, проверяем себя по тексту

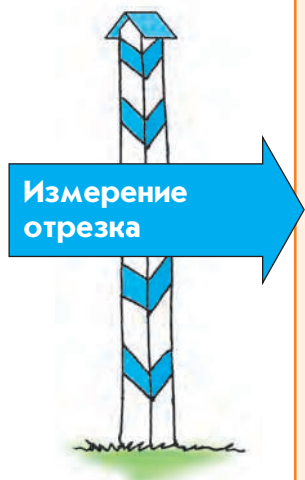
Измерение отрезка с помощью выбранной единицы длины можно производить следующим образом:

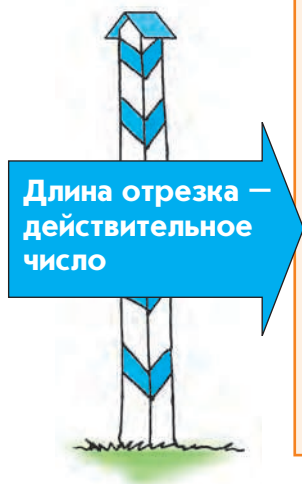
Будем откладывать единичный отрезок в измеряемом отрезке. Если единичный отрезок удастся отложить целое количество раз, то это целое число и будет являться длиной измеряемого отрезка.



Например, если за единичный отрезок взять 1 см, то длина отрезка AB на левом чертеже равна 5 см, так как единичный отрезок был отложен в отрезке AB ровно 5 раз. При измерении длины отрезка CD (правый чертёж) единичный отрезок можно отложить в отрезке CD 5 раз, но нельзя отложить 6 раз: $CM = 5$ см, $CN = 6$ см. Можно сказать, что с точностью до целых длина отрезка CD приближённо равна 5 см с недостатком и при этом остаётся неизмеренный остаток MD , длина которого меньше 1 см.

Если мы хотим измерить длину отрезка CD с большей точностью, то можно измерять отрезок MD с помощью отрезка, равного 0,1 единичного (в случае, когда за единичный отрезок взят 1 см, то 0,1 см = 1 мм). Если отрезок 0,1 см отложится в отрезке MD целое число раз, скажем, ровно 3 раза, то длина отрезка MD будет равна $3 \cdot 0,1$ см = 0,3 см и длина отрезка CD будет равна 5 см + 0,3 см = 5,3 см.





Если отрезок $0,1$ см можно отложить в отрезке MD , скажем, 3 раза, но нельзя отложить 4 раза, то с точностью до $0,1$ см длина отрезка CD приближённо равна $5,3$ см с недостатком; при этом остаётся неизмеренный остаток, длина которого меньше $0,1$ см. Этот остаток можно, в свою очередь, измерять с помощью отрезка, равного $0,01$ единичного, и т.д.

При описанном способе измерения отрезка — сначала с помощью единичного отрезка, затем (если возникнет остаток) с помощью десятой доли единичного отрезка, и т.д. — возможны два варианта развития событий:

1) На каком-то шаге остатка не возникнет, т.е. очередная доля единичного отрезка будет отложена в предыдущем остатке целое количество раз. В этом варианте длина отрезка выражается либо целым числом, либо конечной десятичной дробью.

2) Остатки будут возникать на каждом следующем шаге. В этом варианте принято считать, что длина отрезка выражается бесконечной десятичной дробью. Эта дробь может оказаться как периодической, так и непериодической.

Поскольку конечные и бесконечные десятичные дроби образуют множество действительных чисел, то можно сказать так: у каждого отрезка есть длина, которая является положительным действительным числом.

Можно доказать и обратное утверждение: какое бы положительное действительное число мы ни взяли, имеется отрезок, длина которого выражена этим числом.

Развиваем умения



- 1 На рисунке изображены отрезки. Выразите их длину в сантиметрах.



- 2 Выразите приближённо длину отрезка AB с недостатком сначала с точностью до 1, затем с точностью до $0,1$, приняв отрезок CD за единичный.



- 3 Длина отрезка AB выражена числом $7,6101154$. Запишите приближённо его длину с точностью до 1; до $0,1$; до $0,01$; до $0,001$; до $0,0001$ с недостатком.

- 4 Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до $0,1$; до $0,01$; до $0,001$ с недостатком, если $AB = \frac{7}{12}$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Длина отрезка AB выражена числом 9,015486272. Запишите приближённо его длину с точностью до 1; до 0,1; до 0,01; до 0,001; до 0,0001; до 0,00001 с недостатком.
- б) Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до 0,1; до 0,01; до 0,001 с недостатком, если $AB = \frac{5}{27}$.

П Вариант II.

- а) Длина отрезка AB выражена числом 8,86272154. Запишите приближённо его длину с точностью до 1; до 0,1; до 0,01; до 0,001; до 0,0001; до 0,00001; с недостатком.
- б) Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до 0,1; до 0,01; до 0,001 с недостатком, если $AB = \frac{11}{36}$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 5 Длина отрезка AB выражена числом 9,154841. Запишите приближённо его длину с точностью до 1; до 0,1; до 0,01; до 0,001; до 0,0001; до 0,00001; до 0,000001 с недостатком.
- 6 Выразите длину отрезка десятичной дробью с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком, если она равна: а) $5\frac{7}{9}$; б) $4\frac{1}{19}$; в) $2\frac{73}{99}$.

П

- 7 Постройте на глаз отрезок длиной 11 см. Измерьте его при помощи линейки и выразите его длину десятичной дробью с точностью до 0,1.



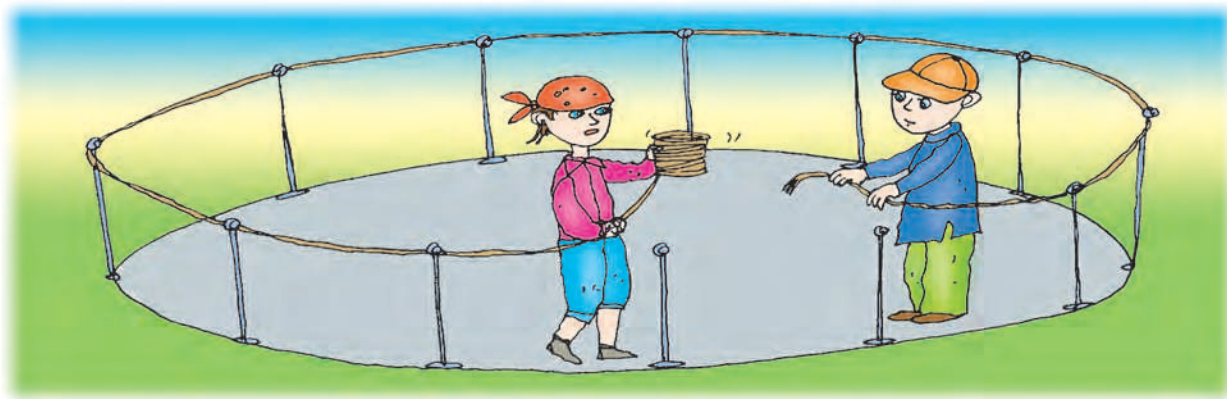
Н

- 8 Выразите длину отрезка десятичной дробью с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком, если она равна: а) $2\frac{1}{7}$; б) $3\frac{1}{9}$; в) $1\frac{1}{8}$.



П

- 9 Изобразите на числовой оси число 1,(19) с точностью до 0,01, взяв за единичный отрезок 1 дм.



Повторяем, обобщаем знания

Вспомните, что такое окружность и круг.

Число π

Ещё в глубокой древности было замечено, что отношение длины окружности к длине её диаметра выражается одним и тем же числом для всех окружностей.

Это число принято обозначать греческой буквой π (пи).

Если длину окружности обозначить C , её диаметр – d , а радиус – R , то

$$\pi = \frac{C}{d} \text{ или } \pi = \frac{C}{2R}.$$

Число π – иррациональное, оно выражается бесконечной непериодической дробью: $\pi = 3,14159265358979323846\dots$ (мы выписали 20 знаков после запятой).

Обычно используют приближённое значение числа π с точностью до одной сотой: $\pi \approx 3,14$.

При помощи числа π можно записать формулу для длины окружности:

$$C = \pi d \quad \text{или} \quad C = 2\pi R.$$

При помощи числа π можно также записать формулу площади круга, если известен его радиус:

$$S = \pi R^2.$$

Например: радиус окружности равен 10 см. Вычислим длину окружности:

$$C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 20\pi \approx 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ (см)}.$$

Вычислим площадь круга, ограниченного этой окружностью:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \approx 100 \cdot 3,14 = 314 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Длина
окружности

Площадь круга



- 1 а) Расскажите, чему равно отношение длины окружности к длине её диаметра.
б) Напишите формулы для вычисления длины окружности и площади круга.

- 2 Вычислите длину окружности, диаметр которой равен:
а) 4 м ($\pi \approx 3,14$); б) 2,5 м ($\pi \approx 3$); в) 5 м ($\pi \approx 3,142$); г) 7 м ($\pi \approx 3,1$).

- 3 В таблице даны диаметры различных клумб, имеющих форму круга. Определите длину ограждения этой клумбы (длину окружности). Возьмите $\pi \approx 3$. Ответ выразите целым числом метров (с избытком).

| | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|----|----|
| d (м) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| C (м) | | | | | | |

- 4 Вычислите площадь круга, радиус которого равен 100 см; 20 см. Возьмите $\pi \approx 3,14$.

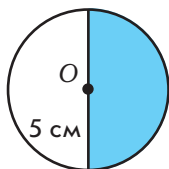
Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Вычислите длину окружности, диаметр которой равен 1,5 м ($\pi \approx 3$).
б) Вычислите площадь круга, радиус которого равен 2 м. Возьмите $\pi \approx 3,14$.

П Вариант II.

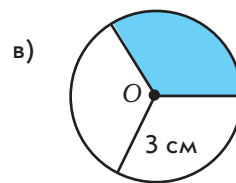
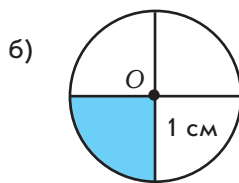
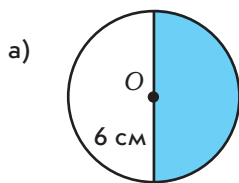
- а) Вычислите длину окружности, диаметр которой равен 2,5 м ($\pi \approx 3,14$).
б) Найдите площадь закрашенной части круга:



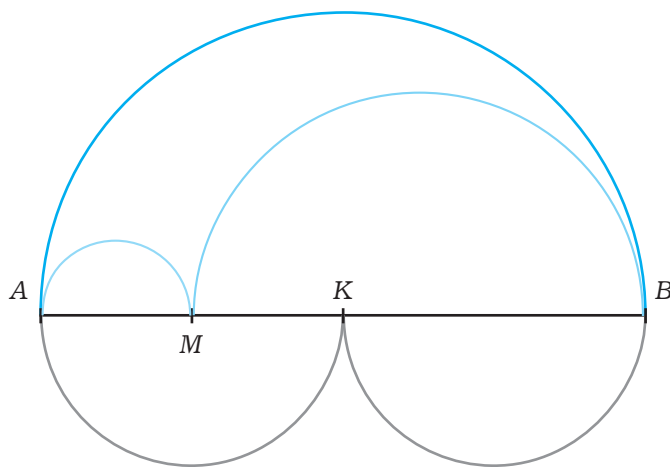
Тренировочные упражнения.

Н

- 5 Найдите площадь закрашенной части круга:



- 6 Сравните длины синей, серой и красной линий (синяя линия является половиной окружности, а серая и голубая состоят из двух половин окружностей каждая; при этом точка K – середина отрезка AB , а точка M взята внутри отрезка AB произвольным образом).



П

- 7 Как изменится длина окружности, если её радиус увеличится на 3 см?



Н

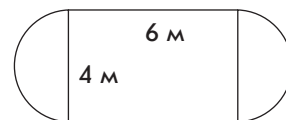
- 8 Вычислите длину окружности, диаметр которой равен:
а) 3 м ($\pi \approx 3,14$); б) 1,5 м ($\pi \approx 3$); в) 7 м ($\pi \approx 3,1$).

- 9 Вычислите площадь круга, радиус которого равен 4 м; 2 м. Возьмите $\pi \approx 3,14$.



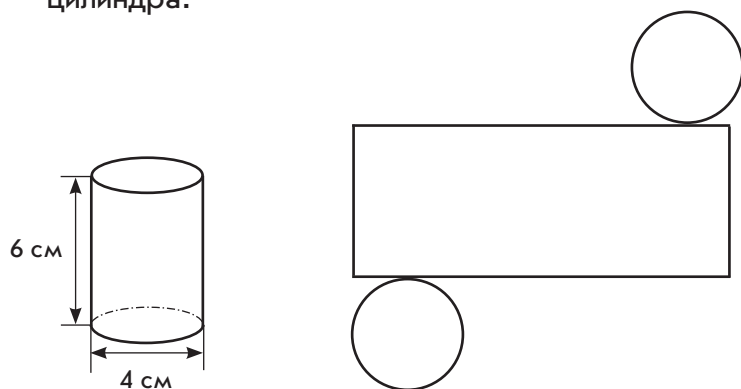
П

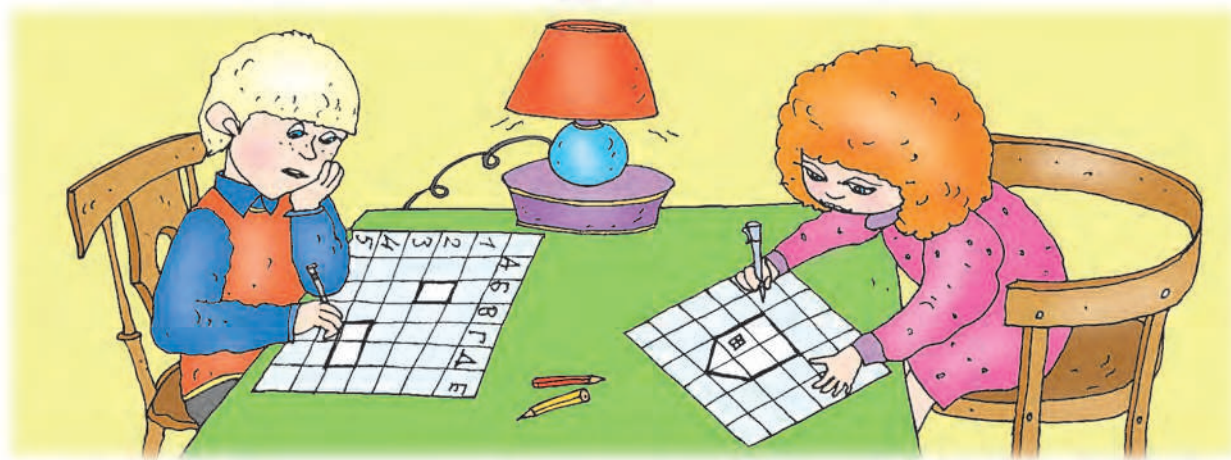
- 10 На рисунке изображена клумба. Найдите длину ограждения клумбы и её площадь. Найдите также приближённые значения длины ограждения и площади, взяв $\pi \approx 3,14$.



М

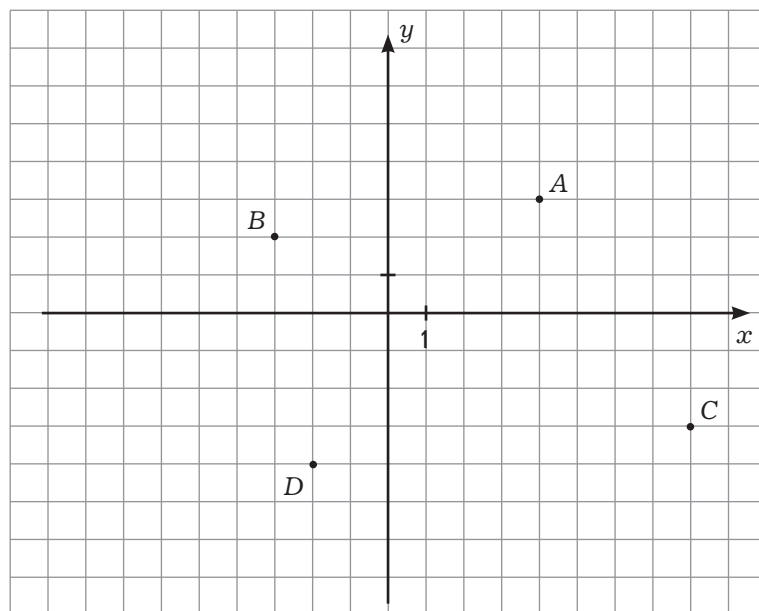
- 11 На рисунке изображены цилиндр и его развёртка. Найдите площадь поверхности цилиндра.





Вспоминаем то, что знаем

● Найдите координаты точек на плоскости, пользуясь клетчатой бумагой.



● Изобразите на листе клетчатой бумаги точки: $E(-2; 5)$; $F(6; 5)$; $N(5; 9)$.

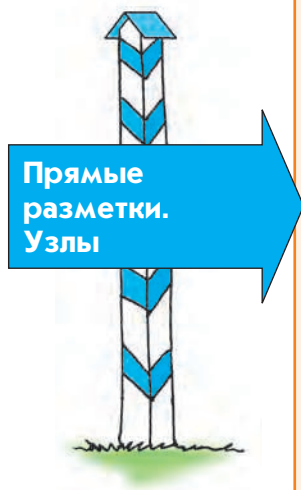
● Изобразите на листе клетчатой бумаги точки: $K(-3; -2)$; $L(5; 3)$; $M(2; -6)$.

- Найдите площадь треугольника EFN .
- Найдите площадь треугольника KLM .

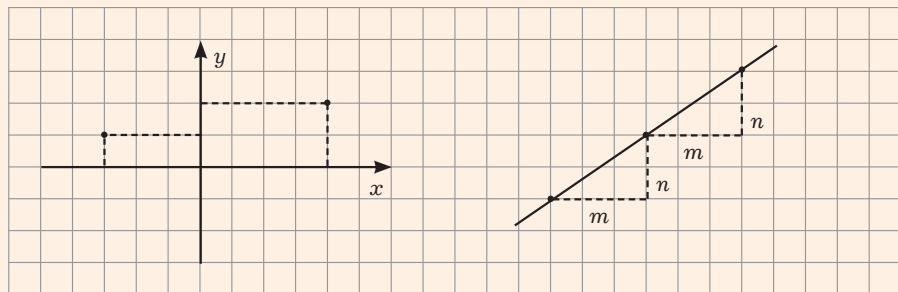


- Как найти площадь треугольника, координаты вершин которого – целые числа, если у треугольника есть сторона, параллельная одной из координатных осей?
- Как найти площадь треугольника, координаты вершин которого – целые числа, если у треугольника нет сторон, параллельных координатным осям?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



С клетчатой бумагой вы знакомы уже давно, ведь тетради, в которых вы занимаетесь математикой, разграфлены в клеточку. Лист клетчатой бумаги удобно располагать так, чтобы прямые, образующие клетки, были горизонтальными и вертикальными. Для краткости будем называть эти прямые **прямыми разметки**. Они разбивают плоскость на равные квадраты. Сторону такого квадрата удобно принять за единицу. Вершины этих квадратов, т.е. точки, в которых пересекаются прямые разметки, называются **узлами**. Если выбрать систему координат так, чтобы оси шли по двум из прямых разметки (ясное дело, перпендикулярных друг другу), то обе координаты любого узла – целые числа (левый чертёж).



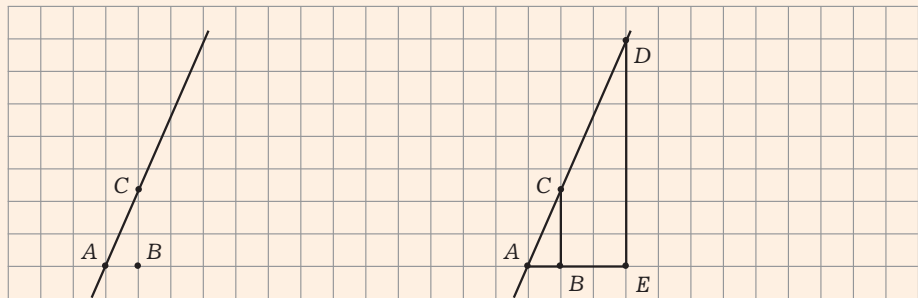
Проведём прямую через один из узлов. Если эта прямая проходит ещё через один узел, то она проходит через бесконечное количество узлов. Действительно, если второй из узлов, лежащих на проведённой прямой, расположен, скажем, на m клеток правее и на n клеток выше, чем первый, то узел, который расположен на m клеток правее и на n клеток выше, чем второй, тоже лежит на проведённой прямой, и т.д. (правый чертёж).

Прямая
на клетчатой
бумаге

Задача 1. Может ли быть так, что прямая проходит только через единственный узел?

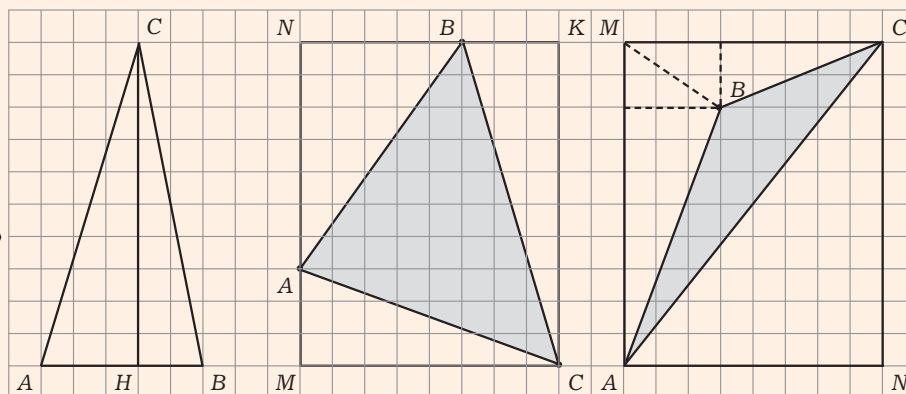
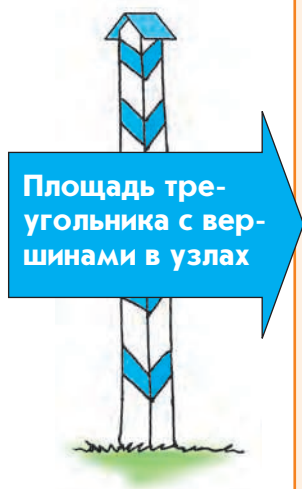
Ответ на этот вопрос положительный.

Отметим любой узел A . Отложим от этого узла вправо единичный отрезок, а от полученной точки B вверх любой отрезок, длина которого – иррациональное число. Отметим полученную точку и обозначим её C . Проведём через отмеченный узел и отмеченную точку прямую AC (левый чертёж). Убедимся, что на этой прямой нет ни одного узла, кроме отмеченного. Действительно, если бы прямая AC проходила бы ещё через узел D , лежащий по ту же сторону от точки A , что и точка C , скажем, на m клеток правее и на n клеток выше, чем узел A (правый чертёж), то прямоугольные треугольники ABC и AED были бы подобны по двум углам ($\angle ABC = \angle AED$ как прямые, $\angle DAE$ – общий), и тогда $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AE}$ или $BC = \frac{m}{n}$, что невозможно, т.к. длина отрезка BC – иррациональное число, а $\frac{m}{n}$ – рациональное число.



Задача 2. Найти площадь треугольника с вершинами в узлах. Рассмотрим три случая.

1) Две вершины треугольника лежат на одной прямой разметки (левый чертёж). Длина стороны AB определяется легко, а высота CH , проведённая из вершины C к стороне AB , лежит на прямой разметки, поэтому её длина тоже определяется легко. На левом чертеже $AB = 5$, $CH = 10$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$ (кв. ед.).



2) Ни одна из сторон треугольника не лежит на прямой разметки, но его можно заключить в прямоугольник со сторонами, лежащими на прямых разметки, так, чтобы вершины треугольника лежали на сторонах прямоугольника или в вершинах прямоугольника. На среднем чертеже треугольник ABC заключён таким образом в прямоугольник $MNKC$. Для нахождения площади треугольника ABC нужно из площади прямоугольника $MNKC$ вычесть площади прямоугольных треугольников ANB , BKC и AMC :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{MNKC} - S_{ANB} - S_{BKC} - S_{AMC} = \\ &= 8 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = \\ &= 80 - 17,5 - 15 - 12 = 45,5 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

3) Ни одна из сторон треугольника не лежит на прямой разметки, но его можно заключить в прямоугольник со сторонами, лежащими на прямых разметки, так, чтобы одна из сторон треугольника совпадала с диагональю этого прямоугольника, а третья вершина лежала внутри прямоугольника. На правом чертеже треугольник ABC заключён таким образом в прямоугольник $AMCN$. Для нахождения площади треугольника ABC нужно из площади прямоугольного треугольника AMC вычесть площади треугольников ABM и BCM , у которых имеется по одной стороне, лежащей на прямой разметки:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AMC} - S_{ABM} - S_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = \\ &= 40 - 15 - 8 = 17 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

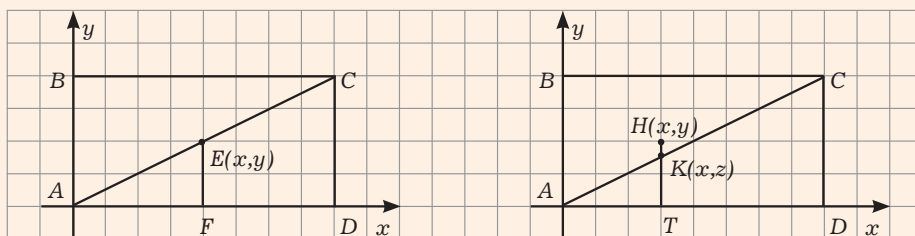
Задача 3*. Рассмотрим прямоугольник с вершинами в узлах и со сторонами, лежащими на прямых разметки. Пусть длины сторон прямоугольника равны m и n . Сколько узлов лежит на диагонали этого прямоугольника?

Количество
узлов на диаго-
нали прямо-
угольника

Это непростая задача, для полного решения которой нужно доказать несколько утверждений. Ниже будут доказаны два основных утверждения. Окончательный ответ вы получите, решая тренировочные упражнения 13 и 14 на стр. 138.

Понятно, что как минимум два узла лежат на диагонали – это концы этой диагонали. Сначала убедимся, что если числа m и n – взаимно простые (т.е. не имеют общих делителей, кроме единицы), то никаких других узлов, кроме концов диагонали, на диагонали нет.

Возьмём систему координат и расположим прямоугольник $ABCD$ как на левом чертеже. Если бы на диагонали AC лежал бы ещё узел $E(x; y)$, то треугольники AEF и ACD были бы подобны и тогда $\frac{EF}{AF} = \frac{CD}{AD}$ или $\frac{y}{x} = \frac{n}{m}$, т.е. имеется равная дроби $\frac{n}{m}$ дробь $\frac{y}{x}$ с меньшими числителем и знаменателем, т.е. дробь $\frac{n}{m}$ можно сократить. Но дробь $\frac{n}{m}$ несократима, т.к. числа m и n не имеют общих делителей, кроме единицы. Полученное противоречие доказывает, что на диагонали AC нет никаких других узлов, кроме концов A и C .



Если числа m и n – не взаимно простые, то обозначим их наибольший общий делитель через d , рассмотрим числа $x = \frac{m}{d}$ и $y = \frac{n}{d}$ и убедимся, что узел $H(x; y)$ лежит на диагонали AC .

Если это не так и на диагонали AK лежит точка $K(x; z)$, то треугольники AKT и ACD подобны, и тогда $\frac{KT}{AT} = \frac{CD}{AD}$ или $\frac{z}{x} = \frac{n}{m}$. Но $\frac{n}{m} = \frac{yd}{xd} = \frac{y}{x}$, поэтому $\frac{z}{x} = \frac{y}{x}$ и $z = y$, т.е. точка K и является узлом $H(x; y)$.

Как уже говорилось выше, окончательное решение рассматриваемой задачи 3 вы можете получить, решая тренировочные упражнения 13 и 14 (стр. 138).



Н

- 1 Продолжите предложения.
 - а) Прямыми разметки называются ...
 - б) Две различные прямые разметки либо ... , либо ...
 - в) Узлами называются ...
 - г) Если оси системы координат идут по двум перпендикулярным прямым разметки, то координаты узлов ...
- 2 а) Докажите, что если на прямой лежат два узла, то на ней лежит бесконечное количество узлов.
 б) Докажите, что существует прямая, проходящая через единственный узел.
- 3 Верны ли высказывания?
 - а) Если прямая проходит через два узла, то она проходит ещё через один узел.
 - б) Если прямая проходит через два узла, то она проходит ещё через бесконечное количество узлов.
 - в) На прямой может лежать единственный узел.
 - г) На прямой может лежать только два узла.
- 4 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами
 - а) $A(2; 3)$, $B(2; -6)$, $C(-3; -1)$;
 - б) $A(4; 1)$, $B(1; -4)$, $C(7; 1)$.
- 5 Может ли прямая, проведённая на клетчатой бумаге, не проходить ни через один узел?
- 6 Проведите прямую через точки $A(5; 6)$ и $B(-3; 2)$. Назовите несколько узлов на этой прямой.
- 7 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами
 - а) $A(5; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; -4)$;
 - б) $A(-6; 4)$, $B(4; -8)$, $C(5; 3)$.

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Найдите площадь треугольника ABC с вершинами $A(-2; 0)$, $B(5; 4)$, $C(2; -5)$.

П Вариант II.

Найдите площадь треугольника ABC с вершинами $A(-4; 0)$, $B(3; 8)$, $C(2; 2)$.

Тренировочные упражнения.

Н

- 8 Начертите прямоугольник с вершинами $A(6; 8)$, $B(-2; 8)$, $C(-2; 2)$, $D(6; 2)$. Сколько узлов лежит на его диагонали?

9 Не изображая прямоугольника с вершинами $A(6; 7)$, $B(-2; 7)$, $C(-2; 2)$, $D(6; 2)$, определите, сколько узлов лежит на его диагонали.

10 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами

а) $A(11; 5)$, $B(3; 8)$, $C(6; -7)$;

б) $A(5; -4)$, $B(0; -10)$, $C(-5; 9)$.

П

11 Отметьте на клетчатой бумаге точки $A(-4; 5)$, $B(-3; -3)$, $C(6; 3)$ и проведите прямую BC . Проведите через точку A прямую:

а) параллельную прямой BC ;

б) перпендикулярную прямой BC .

12 Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$ с вершинами $A(-2; 3)$, $B(3; 8)$, $C(7; 2)$, $D(-1; -2)$.



М

13 Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ с вершинами в узлах и со сторонами, лежащими на прямых разметки, причём длины сторон равны m и n . Пусть $A(0; 0)$, $B(0; n)$, $C(m; n)$, $D(m; 0)$. Докажите следующие утверждения:

а) Если числа m и n – не взаимно простые, d – их наибольший общий делитель,

$x = \frac{m}{d}$, $y = \frac{n}{d}$, то узлы $H(x; y)$, $K(2x; 2y)$, $L(3x; 3y)$, ..., $M((d-1)x; (d-1)y)$ лежат на диагонали AC .

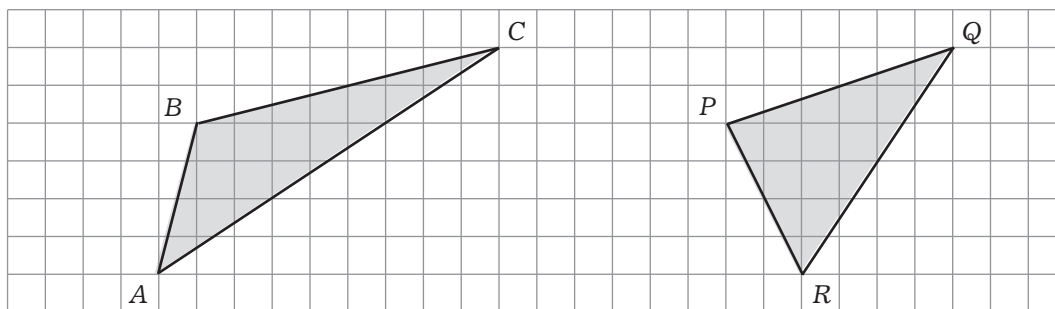
б) В условиях пункта а) никакие другие узлы, кроме перечисленных, а также точек A и C , на диагонали AC не лежат.

14 Докажите, что на диагонали прямоугольника с вершинами в узлах и со сторонами, лежащими на прямых разметки, расположено $\text{НОД}(m, n) + 1$ узлов, где m и n – длины сторон прямоугольника.



Н

15 Найдите площадь треугольников ABC и PQR , изображённых на чертеже.



- 16 Начертите треугольник с вершинами в узлах, стороны которого в три раза длиннее сторон треугольника ABC из задания 15.
- 17 Начертите треугольник с вершинами в узлах, стороны которого в два раза короче сторон треугольника PQR из задания 15.
- 18 Изобразите на клетчатой бумаге треугольник с вершинами $A(0; 4)$, $B(8; -1)$, $C(-4; -4)$. Подсчитайте, сколько узлов находится внутри этого треугольника и сколько – на его границе.




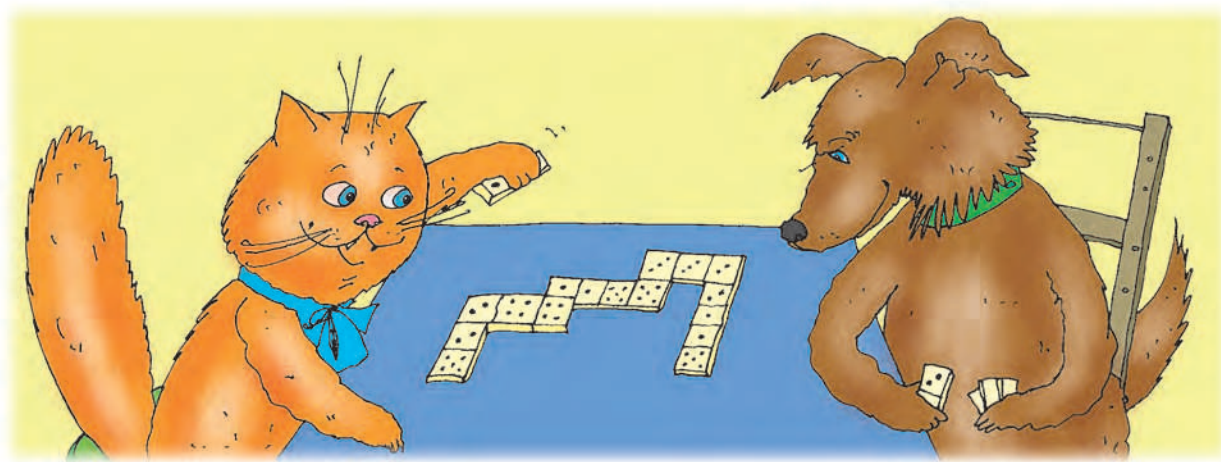
П

- 19 Изобразите на клетчатой бумаге несколько треугольников с вершинами в узлах, внутри которых нет ни одного узла и на сторонах которых нет ни одного узла, кроме вершин.
- а) Чему равны площади этих треугольников?
- б) Чему равна площадь любого такого треугольника?
- 20 Для многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги обозначим через m количество узлов, лежащих внутри многоугольника, а через n – количество узлов, лежащих на границе многоугольника (включая его вершины). Оказывается, что площадь многоугольника равна $m + \frac{n}{2} - 1$ (формула Пика).
- а) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых разметки.
- б) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, лежащими на прямых разметки.



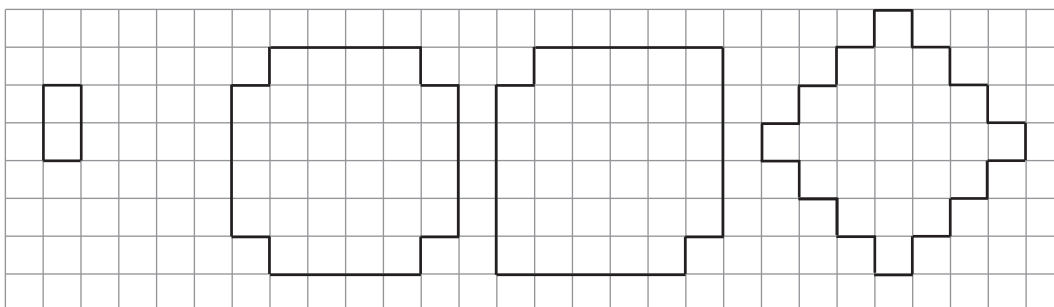
М

- 21  а) Докажите, что если многоугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги разрезан на два многоугольника с вершинами в узлах и формула Пика (из задания 20) верна для каждого из полученных многоугольников, то она верна и для исходного многоугольника.
- б) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах.
- в) Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника с вершинами в узлах.



Вспоминаем то, что знаем

- Попробуйте составить из нескольких фигур, равных фигуре на левом рисунке, фигуры, равные фигурам на следующих трёх рисунках.



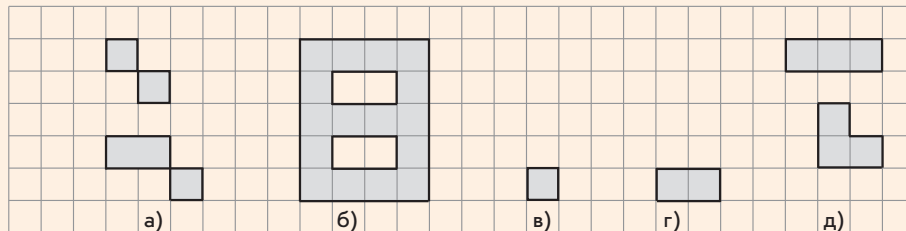
Открываем новые знания

- Удалось ли вам выполнить задание полностью?



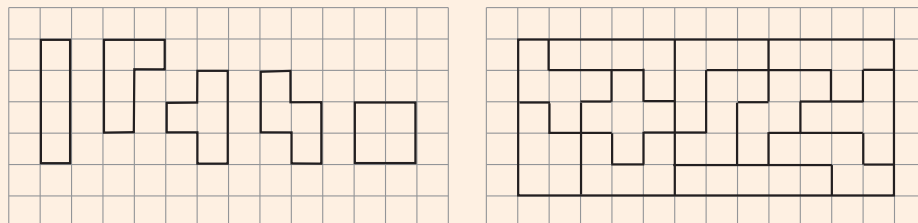
- Как составить некоторую фигуру из данных фигур?
- Как можно доказать, что некоторую фигуру нельзя составить из данных фигур?

Мы рассмотрим специальный класс задач на разрезание. Фигуры будут рассматриваться нарисованные на листе клетчатой бумаги и составленные из клеток. Границы фигур будут полностью лежать на прямых разметки. При этом требуется, чтобы любая клетка фигуры имела общую сторону с какой-то другой клеткой. Другими словами, фигуры, как на чертеже а), недопустимы. В то же время фигуры могут иметь внутренние вырезы, как на чертеже б). При разрезании фигур разрезы будем проводить только по прямым разметки.



Рассмотрим, какие фигуры можно составить из небольшого количества клеток. Из одной клетки можно составить только одну фигуру – саму эту клетку (в). Из двух клеток можно составить только одну фигуру (г), по понятным причинам называемую **домино**. Из трёх клеток можно составить две фигуры (д), называемые **тримино**. Для краткости удобно дать название каждой из фигур тримино. Верхнюю фигуру будем называть *ряд*, а нижнюю – *угол*. Фигуры, составленные из четырёх клеток, называются **тетрамино**, а из пяти – **пентамино** (названия происходят от греческих числительных тетра – четыре и пента – пять).

Различных фигур тетрамино имеется пять (левый чертёж). Будем называть их (слева направо): *ряд*, *угол*, *шип*, *зигзаг*, *квадрат*.



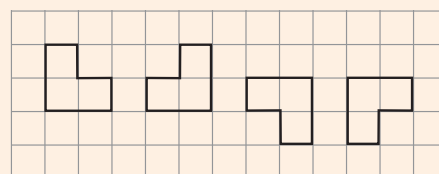
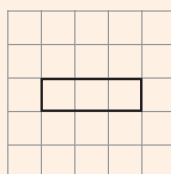
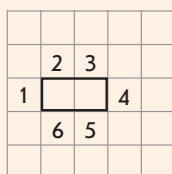
Различных фигур пентамино имеется двенадцать. На правом чертеже из фигур пентамино выложен прямоугольник 5×12 , причём каждая фигура взята только один раз. Названия фигур пентамино нам не понадобятся. Можно также рассматривать фигуры из большего количества клеток: шести, семи и т.д.

Домино
Тримино
Тетрамино
Пентамино

Количество
фигур тримино

Сначала выясним, каково количество различных фигур тримино, тетрамино, пентамино и т.д. Скажем, как доказать, что различных фигур тримино действительно две, различных фигур тетрамино действительно пять и т.д.? Ясно, что это задача знакомого вам типа: на перебор всех возможных вариантов. Вопрос лишь в том, как организовать этот перебор, чтобы были учтены действительно *все* возможные варианты. Один из подходов к решению – идти от фигур из меньшего количества клеток к фигурам из большего количества клеток, добавляя последовательно по одной клетке.

Докажем, например, что различных фигур тримино две. Поскольку от фигуры тримино можно так отрезать одну клетку, что получится фигура домино (см. задание 24 на стр. 147), то ясно, что все возможные фигуры тримино будут получаться добавлением к единственно возможной фигуре домино одной клетки. Для этого имеется шесть возможностей (левый чертёж). При добавлении клетки в позиции 1 и 4 получится фигура тримино «ряд» (средний чертёж), а в остальных позициях (2, 3, 5, 6) – фигура тримино «угол» (правый чертёж).

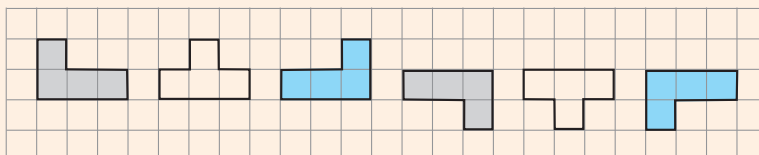


Фигуры тетрамино можно получить добавлением к двум возможным фигурам тримино одной клетки. Перебор всех возможных вариантов можно организовать аналогично рассмотренному выше. Понятно, что при таком подходе к решению количество рассматриваемых вариантов перебора резко увеличивается при увеличении количества клеток, из которых состоит фигура.

Рассмотрим второй подход к решению рассматриваемой задачи. Скажем, определим количество всевозможных фигур тетрамино. Перебор будем проводить по максимальному количеству идущих в ряд клеток. Если их четыре, то получаем фигуру «ряд». Если их три, то имеется шесть возможностей для добавления четвёртой клетки (левый чертёж на следующей странице): позиции 2, 3, 4, 6, 7, 8 (ясно, что позиции 1 и 5 не годятся, т.к. появится ряд из четырёх клеток, а у нас максимальное количество идущих в ряд клеток – три). Возможные фигуры изображены на правом чертеже.

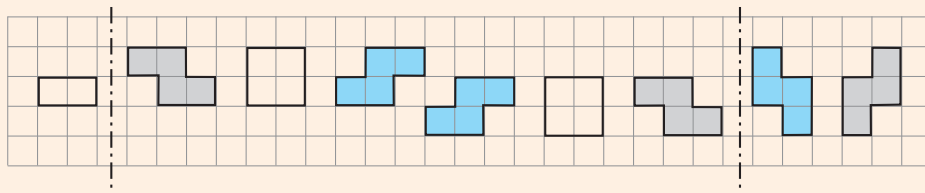
Количество
фигур тетрамино

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | | | | 5 |
| | 8 | 7 | 6 | |



Здесь возникает ещё один важный вопрос: какие фигуры считать одинаковыми (и тем самым, какие различными)? Если считать одинаковыми равные друг другу фигуры, то на чертеже все углы одинаковы между собой и все шипы одинаковы между собой. Если же считать одинаковыми такие фигуры, которые можно совместить между собой, только двигая их по плоскости, но не переворачивая, то оба шипа одинаковы между собой, а что касается углов, то серые углы одинаковы между собой, синие углы тоже одинаковы между собой, но ни один из серых углов не одинаков ни с одним из синих углов. При этом может использоваться каждая из двух названных точек зрения на одинаковость фигур – в зависимости от условий задачи. Мы будем считать, если специально не оговорено, что одинаковыми являются равные друг другу фигуры, т.е. переворачивание фигур допускается.

Наконец, если в фигуре тетрамино максимальное количество идущих в ряд клеток равно двум, то расположим эти две клетки горизонтально (левый чертёж) и заметим, что добавить ещё две клетки можно либо с одной стороны (обе выше или обе ниже), либо с разных (одну выше и одну ниже). В первом случае эти две клетки должны идти в ряд по горизонтали (иначе появятся идущие в ряд по вертикали три клетки), что даст фигуры «квадрат» и «зигзаг», изображённые на среднем чертеже.



Во втором случае новая клетка выше и новая клетка ниже не должны присоединяться к одной и той же из начальных клеток (иначе появятся идущие в ряд по вертикали три клетки), что приводит к двум возможным фигурам «зигзаг», изображённым на правом чертеже. Заметим, что любые две фигуры тетрамино «квадрат» можно совместить друг с другом без переворачивания, а что касается фигур «зигзаг», то любые два серых зигзага можно совместить между собой без переворачивания, любые два синих зигзага тоже можно совместить между собой без переворачивания, но никакой из серых зигзагов нельзя совместить ни с каким из синих зигзагов без переворачивания, но можно совместить с переворачиванием.

Задачи на разрезание данной фигуры на указанные фигуры (или, что равносильно, на составление данной фигуры из указанных фигур) очень увлекательны, причём для большинства из этих задач нужно не столько использовать специальные знания, сколько придумывать свой индивидуальный подход, проявлять изобретательность и смекалку. При решении таких задач школьники зачастую не только не уступают профессиональным математикам, но могут и превосходить их.

Для установления возможности выполнить требуемое разрезание не нужно ничего доказывать – достаточно предъявить чертёж. А вот невозможность требуемого разрезания зачастую доказывается с помощью хитрых рассуждений.

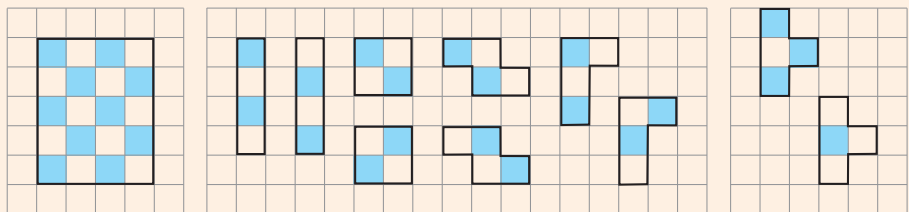
Рассмотрим похожие задачи для тримино, тетрамино и пентамино. Поскольку различных фигур из 3 клеток имеется 2, различных фигур из 4 клеток имеется 5, а различных фигур из 5 клеток имеется 12, то рассмотрим соответственно прямоугольники 3×2 , 4×5 , 5×12 . Требуется составить эти прямоугольники, используя каждую фигуру соответственно тримино, тетрамино или пентамино ровно один раз.

Решение рассматриваемой задачи для пентамино вы уже видели выше на чертеже, где впервые говорилось о фигурах пентамино (стр. 141).

Невозможность решения рассматриваемой задачи для тримино очевидна: если отрезать от прямоугольника 3×2 фигуру тримино «ряд», то получится ещё одна фигура «ряд», но никак не фигура «угол».

Невозможность решения рассматриваемой задачи для тетрамино требует специальных рассуждений, использующих идею раскраски прямоугольника в шахматном порядке. Если выполнить такую раскраску (левый чертёж), то видно, что закрашенных и незакрашенных клеток поровну – по 10.

Шахматная
раскраска



При любом положении фигур тетрамино «ряд», «угол», «зигзаг», «квадрат» в каждой из них будет по две закрашенных и две незакрашенных клетки (чертежи в середине). Таким образом, в оставшейся фигуре «шип» тоже должно содержаться две закрашенных и две незакрашенных клетки. Но это невозможно, т.к. в этой фигуре из четырёх клеток либо три закрашенных и одна незакрашенная, либо, наоборот, три незакрашенных и одна закрашенная (чертежи справа).

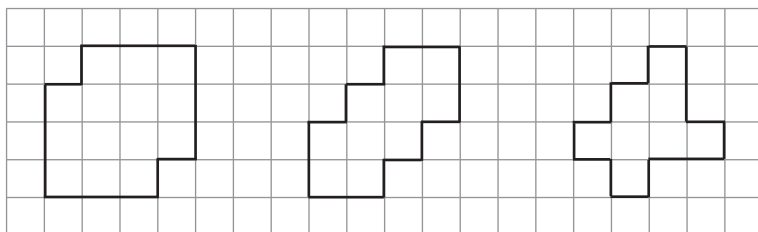
Заметим, что идея раскраски клетчатой бумаги в шахматном порядке оказывается очень плодотворной и используется при решении многих задач.

Развиваем умения



Н

- 1 Сколько различных фигур тримино вы знаете? Изобразите все эти фигуры.
- 2 а) Какие из фигур тримино имеют центр симметрии?
б) Какие из фигур тримино имеют оси симметрии? Сколько?
- 3 а) Изобразите на клетчатой бумаге прямоугольник 2×3 со сторонами, лежащими на прямых разметки. Разрежьте его на две равные части, проводя разрезы по прямым разметки. Сколько различных способов у вас получилось?
б) Выполните задание а) для прямоугольника 3×4 .
- 4 Сколько различных фигур тетрамино вы знаете? Изобразите все эти фигуры.
- 5 Докажите, используя шахматную раскраску, что ни одну из изображённых фигур нельзя разрезать на фигуры домино.



- 6 а) Можно ли разрезать на какие-нибудь фигуры тримино квадрат 3×3 ? Можно ли разрезать его на одинаковые фигуры тримино?
б) Можно ли разрезать на какие-нибудь фигуры тримино квадрат 4×4 ?
- 7 Докажите, что имеется ровно две различные фигуры тримино.

Задания для самостоятельной работы.

Н

Вариант I.

- а) Составьте из фигур тримино прямоугольник 3×4 . Постарайтесь найти как можно больше способов.
- б) Можно ли выполнить задание а), если требуется, чтобы все фигуры тримино были различными?

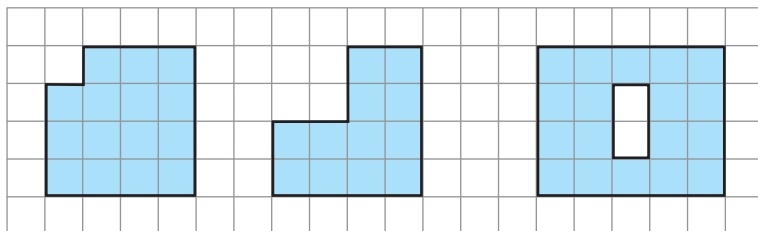
П Вариант II.

- а) Составьте из фигур тетрамино прямоугольник 3×4 . Постарайтесь найти как можно больше способов.
- б) Можно ли выполнить задание а), если требуется, чтобы все фигуры тетрамино были различными?

Тренировочные упражнения.

Н

- 8 Разрежьте левую фигуру на три равные части, среднюю – на четыре, а правую – на шесть равных частей.



- 9 а) Какие из фигур тетрамино имеют центр симметрии?
б) Какие из фигур тетрамино имеют оси симметрии? Сколько?
- 10 Разрежьте квадрат 6×6 с удалёнными четырьмя центральными клетками (центральным квадратом 2×2) на четыре равные части. Постарайтесь найти несколько различных решений.

П

- 11 На какие одинаковые фигуры тетрамино можно разрезать квадрат 4×4 ?
- 12 а) Докажите, что различных фигур пентамино имеется ровно 12.
б) Какие из фигур пентамино можно перевернуть таким образом, что начальную и перевёрнутую фигуры нельзя совместить между собой, двигая их по плоскости?
в) Какие из фигур пентамино имеют центр симметрии?
г) Какие из фигур пентамино имеют оси симметрии? Сколько?



М

- 13 а) Можно ли разрезать прямоугольник 15×22 на прямоугольники 3×5 ?
б) Можно ли разрезать прямоугольник 23×35 на прямоугольники 5×7 ?
- 14 Имеется два квадрата 6×6 и 8×8 . Как разрезать каждый из квадратов на две части, а затем сложить из этих четырёх частей квадрат 10×10 ?



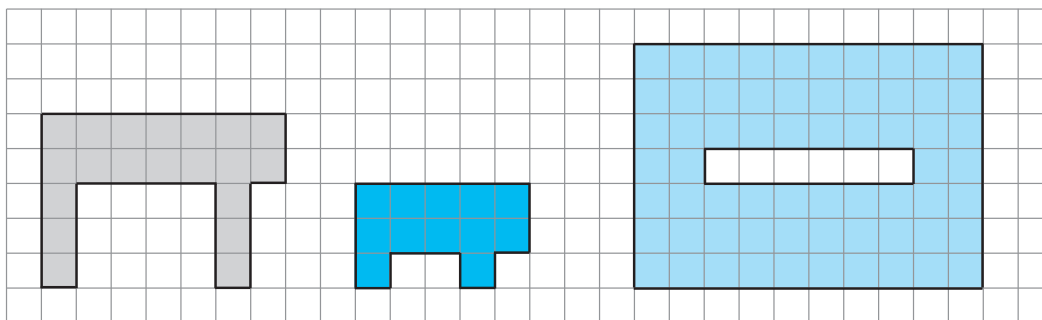
H

- 15** Разрежьте прямоугольник 4×9 на две равные части, а затем сложите из них квадрат.
- 16** Можно ли разрезать прямоугольник 4×10 на две части, а затем сложить из них квадрат?
- 17** Сложите из нескольких фигур пентамино прямоугольник
а) 2×5 ; б) 3×5 ; в) 4×5 .
- Постарайтесь найти несколько различных решений. Можно ли решить каждую из задач, используя только различные фигуры пентамино?



□

- 18** Имеется четыре квадрата 1×1 , восемь квадратов 2×2 и двенадцать квадратов 3×3 . Можно ли из них сложить один большой квадрат?
- 19** На какие одинаковые фигуры тетрамино можно разрезать квадрат 6×6 ?
- 20** Разрежьте каждую из фигур на две равные части, причём правую фигуру таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.



M

- 21** ● а) Можно ли в клетках квадрата 4×4 расставить числа от 1 до 16 так, чтобы в любой фигуре тетрамино «шип» сумма чисел делилась на 5?
б) Ответьте на вопрос задания а) для всех остальных фигур тетрамино.
- 22** ● Ответьте на вопросы, как в задании 21, для квадрата 5×5 , в клетках которого расставляются числа от 1 до 25.
- 23** а) Составьте из 12 различных фигур пентамино прямоугольник 6×10 . Постарайтесь найти несколько решений.
б) Попробуйте найти такое решение задания а), чтобы каждая фигура пентамино имела общую часть границы с границей прямоугольника.
- 24** Докажите, что от любой фигуры из n клеток (n -мино) можно так отрезать одну клетку, что получится нераспавшаяся фигура из $n - 1$ клетки ($(n - 1)$ -мино).



В пятом классе вы уже решали задачи на подсчёт количества возможных вариантов* и связанные с ними задачи на нахождение вероятностей случайных событий.

В этом параграфе мы вспомним уже известные вам приёмы решения таких задач, а также рассмотрим некоторые новые приёмы.

Вспоминаем то, что знаем

● Как подсчитать число вариантов в задаче:

Задача 1. Удочка состоит из удилища, лески и крючка. У мальчиков есть три удилища: бамбуковое, орешниковое и пластиковое, две лески: жёлтая и зелёная, а также два крючка: большой и маленький. Сколькими различными способами мальчики могут сделать удочку?

● Можно ли подсчитать число способов с помощью дерева выбора?

Открываем новые знания

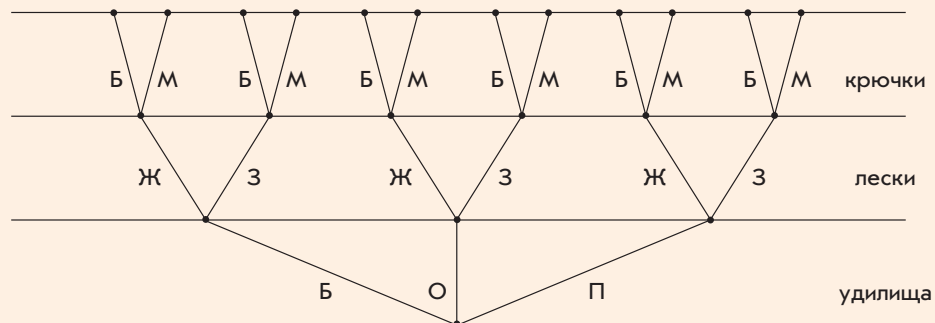
- Если бы в рассмотренной задаче речь шла о 8 различных удилищах, 20 различных лесках и 17 различных крючках, то удобно ли было бы рисовать дерево выбора?
- Можете ли вы подсчитать число способов сделать удочку, не рисуя дерево выбора?
- Верно ли, что удилище можно выбрать 8 разными способами?
- Верно ли, что к уже выбранному удилищу леску можно выбрать 20 разными способами?
- Верно ли, что набор из удилища и лески можно выбрать $8 \cdot 20$ разными способами?
- Верно ли, что к любому уже выбранному набору из удилища и лески крючок можно выбрать 17 разными способами?
- Закончите рассмотренные выше рассуждения и сформулируйте, как можно найти число способов сделать удочку, не рисуя дерево выбора.



● Как найти число вариантов в задачах, аналогичных рассмотренным?

* Говорят и «количество вариантов», и «число вариантов».

Рассмотрим решение задачи 1 с помощью дерева выбора:



Для нахождения количества вариантов нужно пройти по дереву, начиная с корня, всеми возможными способами. На изображённом дереве из конца каждой веточки предыдущего уровня выходит одно и то же количество веточек следующего уровня, поэтому количество вариантов равно $3 \cdot 2 \cdot 2$, т.е. 12.

При решении вариации задачи 1, где имеется 8 различных удильщ, 20 различных лесок и 17 различных крючков, нет необходимости рисовать дерево выбора, понятно, что оно имеет аналогичную структуру: из корня выходит 8 веточек первого уровня, из конца каждой из них выходит 20 веточек второго уровня и, наконец, из конца каждой из веточек второго уровня выходит 17 веточек третьего уровня, поэтому количество вариантов равно $8 \cdot 20 \cdot 17$, т.е. 2 720.

В общем виде рассматриваемая задача может быть сформулирована так:

Сколько имеется способов составить набор, где первый элемент выбирается из одного множества, второй элемент — из второго множества, а третий элемент — из третьего множества?

Если первый элемент можно выбрать t способами, для каждого из этих способов можно n способами выбрать второй элемент и для каждой пары из первого и второго элементов k способами можно выбрать третий элемент, то общее количество способов равно произведению $t \cdot n \cdot k$.

Сформулированное правило называется *правилом умножения*.

Если назвать выбор каждого отдельного элемента простым выбором, а выбор набора их трёх элементов — сложным выбором, то правило умножения можно сформулировать так: количество способов осуществить сложный выбор равно произведению количеств способов осуществить простые выборы, образующие этот сложный выбор.

Правило
умножения



Сложный выбор
для элементов
одного
множества

Понятно, что правило умножения справедливо не только в случае трёх, но и любого другого количества множеств.

Сложный выбор предполагает, что выбираемые элементы *упорядочены*: имеется первый, второй и т.д.

В некоторых задачах сложный выбор можно осуществлять, не только выбирая элементы из разных множеств, но и выбирая последовательно элементы из одного и того же множества. При этом нужно учитывать, что после выбора каждого очередного элемента количество оставшихся в множестве элементов уменьшается на единицу.

Задача 2. В чемпионате участвуют 8 команд. Сколькими различными способами могут быть разыграны золотая, серебряная и бронзовая медали?

Решение. Золотую медаль может завоевать любая из 8 команд. После этого серебряная медаль может достаться любой из оставшихся 7 команд, а бронзовая – любой из оставшихся 6. Таким образом, количество способов разыграть медали равно $8 \cdot 7 \cdot 6$, т.е. 336.

Задача 3. Сколькими способами можно построить в ряд 5 человек?

Решение. Первым в ряду можно поставить любого из 5 человек, т.е. первого человека можно выбрать 5 различными способами. После того как первый человек в ряду выбран, второго можно выбрать 4 способами – взять любого из четырёх оставшихся. Рассуждая аналогично, устанавливаем, что третьего в ряду можно выбрать 3 способами, четвёртого – 2 способами и, наконец, последнего, пятого, – единственным способом. Применяя правило умножения, подсчитаем количество способов: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. 120.

Полученное произведение можно переписать в обратном порядке: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Здесь выписано произведение всех натуральных чисел, начиная с 1 и заканчивая 5. Для таких произведений имеется специальное название и специальное обозначение. Произведение всех натуральных чисел, начиная с единицы и заканчивая натуральным числом n , обозначается $n!$ (читается «эн факториал»), т.е.:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Считается, что $1! = 1$.

Проводя такие же рассуждения, как при решении задачи 3, можно установить следующий важнейший результат:

Множество, состоящее из n элементов, можно упорядочить $n!$ способами.

Факториал

Вспоминаем то, что знаем

🌐 Как подсчитать число всех возможных пар, составленных из участников похода?

Задача 4. Аня, Боря, Витя, Гуля и Дима пошли в поход. Им нужно назначить двух дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Можно ли подсчитать количество способов выбора пары дежурных с помощью графа?

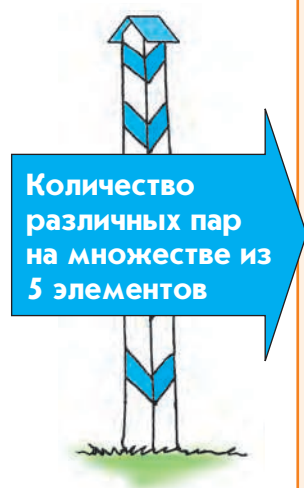
Открываем новые знания

- Если бы в рассмотренной задаче речь шла не о пяти ребятах, а о двадцати пяти, то удобно ли было бы рисовать граф?
- Можно ли подсчитать количество способов выбрать пару дежурных, не рисуя граф?
- Верно ли, что каждой паре дежурных на графе соответствует отрезок, соединяющий две вершины?
- Верно ли, что из каждой вершины графа выходит 24 отрезка?
- Верно ли, что, умножая 25 (количество вершин) на 24 (количество отрезков, выходящих из каждой вершины), мы получим общее количество отрезков?
- Если мы умножаем количество вершин на количество отрезков, выходящих из каждой вершины, то сколько раз в полученном выражении учтён каждый отрезок?
- Закончите рассмотренные выше рассуждения и сформулируйте, как можно найти количество отрезков в рассматриваемом графе.

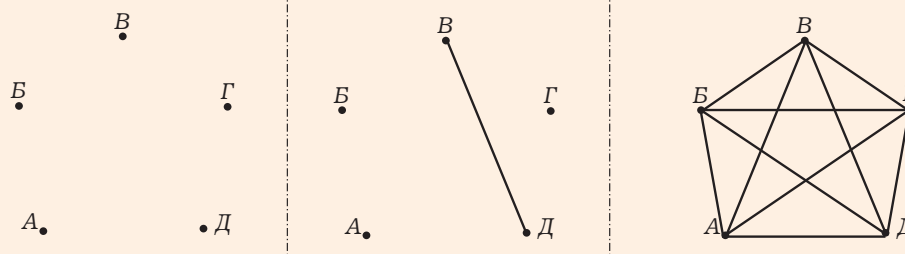


- Как найти количество отрезков в графе, где каждая из n вершин соединена со всеми остальными?
- Равносильна ли задача нахождения числа отрезков в таком графе задаче нахождения количества всех возможных пар на множестве из n элементов?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



При решении задачи 4 не играет никакой роли порядок, в котором названы ребята в выбираемой паре дежурных. Дерево выбора для решения этой задачи не годится. Рассмотрим решение задачи 4 с помощью графа. Изобразим каждого из ребят точкой с первой буквой его имени (левый рисунок). Тогда каждой паре дежурных будет соответствовать отрезок, соединяющий соответственные точки – вершины графа. Скажем, если дежурят Витя с Димой, то это будет отрезок $ВД$ (средний рисунок).



Количество
различных пар
на множестве из
 n элементов

Теперь для решения задачи с помощью рассматриваемой модели нужно соединить отрезком каждую пару точек и подсчитать количество получившихся отрезков (правый рисунок на предыдущей странице). Таких отрезков 10.

Если нужно найти количество всех возможных пар на множестве из 25 элементов, то рисовать граф с 25 вершинами, соединять каждые две вершины отрезком, а затем непосредственно (т.е. карандашом, ручкой, пальцем или взглядом) подсчитывать количество получившихся отрезков весьма затруднительно.

Поступим по-другому. Представив мысленно описанный граф, причём не с 25, а с n вершинами, попробуем произвести подсчёт следующим образом. Из каждой из n вершин выходит по $(n - 1)$ отрезков. Если перемножить эти два числа, т.е. вычислить произведение $n(n - 1)$, то получится удвоенное количество отрезков, ведь при описанном методе подсчёта каждый отрезок был учтён ровно два раза. Таким образом, количество отрезков равно $\frac{n(n - 1)}{2}$.

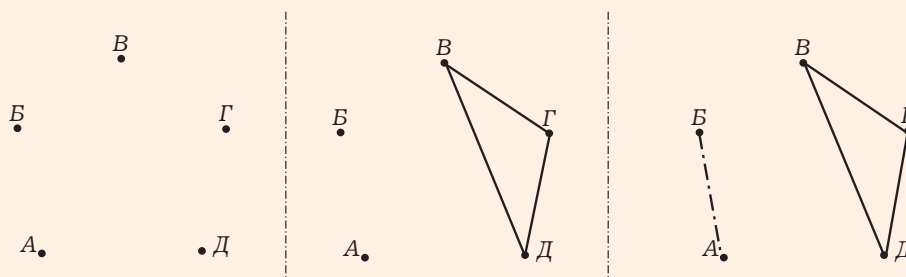
Мы установили следующий важный результат:

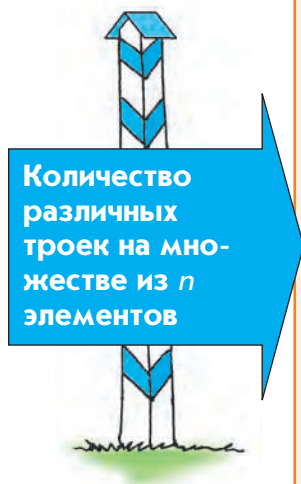
Количество различных пар на множестве из n элементов равно $\frac{n(n - 1)}{2}$.

Предположим, что наши участники похода решили, что дежурных нужно назначить не двоих, а троих. Возникает более сложная

Задача 5. Сколько различных троек можно выбрать из пяти человек?

Если использовать ту же математическую модель, с помощью которой мы находили количество пар, то, изобразив ребят точками (левый рисунок), нужно установить, сколько имеется различных треугольников с вершинами в этих пяти точках. Один из таких треугольников, соответствующий дежурству Вити, Гули и Димы, изображён на среднем рисунке. В данной конкретной задаче можно применить следующий «обходной манёвр»: если мы выберем тройку ребят, то тем самым автоматически окажется выбранной пара «невыбранных» ребят (правый рисунок).





Это значит, что количество троек на множестве из 5 элементов равно количеству пар на множестве из 5 элементов! А его мы уже умеем находить: $\frac{5 \cdot 4}{2}$, т.е. 10.

Однако на множестве, скажем, из 6 или 7 элементов никакие аналогичные соображения уже не сработают. Сформулируем и решим задачу в общем виде.

Задача 6. Сколько различных троек можно выбрать из множества, содержащего n элементов?

Сначала ещё раз отметим, что имеются в виду *неупорядоченные* тройки. Если дежурят, скажем, Витя, Гуля и Дима, то неважно, в каком порядке они будут записаны в списке дежурных, важно только, какие именно ребята входят в эту тройку. А записать в некотором порядке эту тройку дежурных можно шестью способами (по первым буквам имён): ВГД, ВДГ, ГВД, ГДВ, ДВГ, ДГВ. Точно так же, шестью способами, можно подписать треугольник, соответствующий этой тройке дежурных на графе. Таким образом, одной неупорядоченной тройке соответствует шесть упорядоченных. Кстати, этот результат вам уже известен из рассмотренной выше в этом параграфе задачи 3: множество из трёх элементов можно упорядочить $3!$, т.е. 6 способами.

Для решения задачи 6 поступим следующим образом. Мы умеем находить количество *упорядоченных* троек на множестве из n элементов. По правилу умножения это количество равно $n(n-1)(n-2)$. Но поскольку каждую тройку элементов можно упорядочить $3!$ способами, то количество неупорядоченных троек в $3!$ раз меньше, чем упорядоченных. Таким образом, мы установили следующий важный результат:

Количество различных неупорядоченных троек на множестве из n элементов равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

В частности, применяя эту формулу при $n = 5$, получим, что количество различных троек на множестве из 5 элементов равно $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, т.е. 10, что мы уже определили выше другим способом.

Вспоминаем то, что знаем

🌟 Как вычислить вероятности следующих событий:

Задача 7. Аня, Боря, Витя, Гуля и Дима пошли в поход. Им нужно назначить двух дежурных. Они написали свои имена на одинаковых бумажках, сложили их в пустой рюкзак и вынули наугад две бумажки. Какова вероятность того, что дежурить будут два мальчика? Две девочки? Мальчик и девочка?

- Можно ли при решении этой задачи использовать граф, аналогичный графу из задачи 4, где вершины, соответствующие мальчикам, одного цвета (например, чёрного), а вершины, соответствующие девочкам, — другого цвета (например, белого)?

Открываем новые знания

- Если бы в рассмотренной задаче речь шла не о пяти ребятах (трёх мальчиках и двух девочках), а о двадцати пяти (скажем, пятнадцати мальчиках и десяти девочках), то удобно ли было бы рисовать граф?
- Верно ли, что каждой паре дежурных на графе соответствует отрезок, соединяющий две вершины?
- Верно ли, что случаю дежурства двух мальчиков соответствует отрезок, соединяющий две вершины чёрного цвета?
- Верно ли, что случаю дежурства двух девочек соответствует отрезок, соединяющий две вершины белого цвета?
- Верно ли, что случаю дежурства мальчика и девочки соответствует отрезок, соединяющий две вершины разного цвета?
- Закончите рассмотренные выше рассуждения и найдите в рассматриваемом графе количество отрезков каждого из трёх видов.



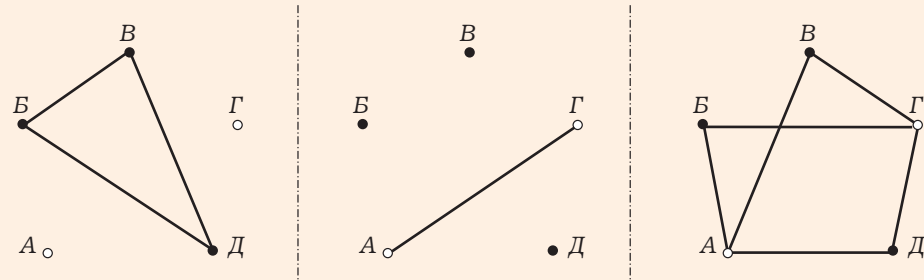
- Если каждая вершина графа покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, то как найти количество отрезков, соединяющих две вершины: а) чёрного цвета; б) белого цвета; в) разного цвета?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Если все результаты случайного эксперимента равновозможны, то вероятность случайного события равна отношению количества благоприятных этому событию результатов к общему количеству результатов. В нашей задаче случайный эксперимент заключается в выборе наугад двух бумажек из пяти одинаковых. Условия проведения эксперимента таковы, что никакая пара бумажек не имеет никаких преимуществ по отношению к другим парам, следовательно, все результаты такого случайного эксперимента можно считать равновозможными. Изобразим мальчиков чёрными кружочками, а девочек — белыми. Мы уже знаем из решения задачи 4, что каждой паре дежурных соответствует отрезок, соединяющий две вершины графа, и что таких отрезков 10. Случаю дежурства двух мальчиков соответствует отрезок, соединяющий две вершины чёрного цвета, и таких отрезков 3 (левый рисунок на следующей странице).

Случаю дежурства двух девочек соответствует отрезок, соединяющий две вершины белого цвета, и такой отрезок 1 (средний рисунок). Наконец, случаю дежурства мальчика и девочки соответствует отрезок, соединяющий две вершины разного цвета, и таких отрезков 6 (правый рисунок на следующей странице).



Таким образом, два мальчика будут дежурить с вероятностью $\frac{3}{10}$, две девочки – с вероятностью $\frac{1}{10}$, а мальчик и девочка – с вероятностью $\frac{6}{10}$, или $\frac{3}{5}$.

В случае, когда количество участников похода равно 25 (15 мальчиков и 10 девочек), рассуждения можно проводить, представляя граф, аналогичный рассмотренному выше, мысленно или же вообще обойтись без графа. Общее количество пар на множестве из 25 элементов находится по выведенной выше формуле $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Количество пар, где оба дежурные – мальчики, т.е. количество отрезков, соединяющих две вершины чёрного цвета, найдём по той же формуле, мысленно удалив из графа все вершины белого цвета: $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$.

Точно так же найдём количество пар, где обе дежурные – девочки: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Количество пар, где дежурные мальчик с девочкой, можно найти, вычитая из 300 сумму чисел 105 и 45, и получить $300 - (105 + 45) = 150$. Но это количество пар можно найти и непосредственно, как количество отрезков, соединяющих вершины разного цвета. Поскольку количество чёрных вершин 15, а белых – 10, то по правилу умножения количество таких отрезков $15 \cdot 10 = 150$.

Таким образом, два мальчика будут дежурить с вероятностью $\frac{105}{300}$, т.е. 0,35, две девочки – с вероятностью $\frac{45}{300}$, т.е. 0,15, а мальчик и девочка – с вероятностью $\frac{150}{300}$, т.е. 0,5.

Развиваем умения



- 1 Продолжите предложения.
 - а) Факториалом натурального числа, большего единицы, называется ...
 - б) Количество способов, которыми можно упорядочить множество из n элементов, равно...
 - в) Количество различных неупорядоченных пар на множестве из n элементов равно...
 - г) Количество различных неупорядоченных троек на множестве из n элементов равно...
- 2 Сформулируйте правило умножения. Приведите примеры его использования.
- 3 Найдите количество пар на множестве из n элементов, если:
 - а) порядок элементов в паре несуществен (пары неупорядоченные);
 - б) порядок элементов в паре существен (пары упорядоченные)?
 Приведите несколько примеров конкретных ситуаций в пунктах а) и б).
- 4 Найдите значения выражений: а) $4!$; б) $6!$; в) $7!$.
- 5
 - а) Сколькими способами можно упорядочить множество из 6 элементов?
 - б) На тренировку пришли 6 шестиклассников. Сколькими способами их можно построить в ряд?
 - в) Сколько различных шестизначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1; 2; 3; 4; 5 и 6?
- 6 Обед в столовой состоит из первого блюда, второго блюда и напитка. В меню стоит 5 различных первых блюд, 7 различных вторых блюд и 6 различных напитков. Сколько различных вариантов обеда имеется в этой столовой?
- 7 В 6-м классе Зеленодольской средней школы учится 18 ребят. Им нужно выбрать старосту класса и его заместителя. Сколькими различными способами они могут это сделать?



Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

В непрозрачной коробке лежит 10 шариков: 6 чёрных и 4 белых. Наугад вынимается два шарика. Какова вероятность того, что оба вынутых шарика белые?

П Вариант II.

В непрозрачной коробке лежит 10 шариков: 6 чёрных и 4 белых. Наугад вынимается три шарика. Какова вероятность того, что все вынутые шарики белые?

Тренировочные упражнения.

Н

8 Найдите количество троек на множестве из n элементов, если:

- а) порядок элементов в тройке несуществен (тройки неупорядоченные);
 - б) порядок элементов в тройке существен (тройки упорядоченные).
- Приведите несколько примеров конкретных ситуаций в пунктах а) и б).

9 Найдите значения выражений: а) $\frac{7!}{6!}$; б) $\frac{9!}{7!}$; в) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

10 Из 20 разноцветных шариков (5 красных, 7 синих, 8 зелёных) наугад выбрали два шарика. Найдите вероятности событий:

- К) оба шарика красные; С) оба шарика синие; З) оба шарика зелёные; А) один шарик красный и один синий; Б) один шарик красный и один зелёный; В) один шарик синий и один зелёный.

П

11 Имеется четыре карточки, на двух из которых написана буква *А*, а на двух других – буква *М*. Карточки положили буквами вниз, затем выложили в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что после переворачивания карточек получится слово *МАМА*?

12 Какова вероятность того, что взятое наугад двузначное число делится на 5? А трёхзначное?

М

13 На окружности отметили 10 точек. Сколько имеется различных четырёхугольников с вершинами в этих точках?

14 Из 24 разноцветных шариков (4 жёлтых, 5 красных, 7 синих, 8 зелёных) наугад выбрали два шарика. Найдите вероятности событий:

- О) шарик одинакового цвета; Р) шарик разного цвета.

**Н**

- 15** Имеется 20 карточек разного цвета: 5 жёлтых, 5 красных, 5 синих и 5 зелёных. На карточках каждого цвета написаны буквы *А, Б, В, Г, Д* – по одной букве на карточке. Наугад выбраны две карточки. Найдите вероятности следующих событий:
- А) Обе карточки синие.
 - Б) На обеих карточках написана буква *А*.
 - В) Одна карточка синяя и одна жёлтая.
 - Г) На одной карточке написана буква *А* и на одной буква *Б*.
- 16** В автохозяйстве 15 различных грузовиков.
- а) Сколькими способами можно выбрать три грузовика для работы летом в спортивном лагере?
 - б) Сколькими способами можно выбрать три грузовика для работы летом в трёх спортивных лагерях – по одному грузовику в каждом лагере?
- 17** В коробке лежит 6 карточек, на которых написаны цифры 1; 2; 3; 4; 5; 6. Из коробки вынимается по очереди три карточки и из них составляется трёхзначное число. Сколько различных чисел может получиться?
- 18** В российском автомобильном номере идут буква, затем три цифры, затем две буквы, причём используются только буквы *А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х**. Сколько различных автомобильных номеров может быть**?

**П**

- 19** Какова вероятность того, что во взятом наугад автомобильном номере***
- а) нет нулей, б) имеется три семёрки?
- 20** а) Валя, Ваня, Варя и Вася случайным образом расселись в кружок. С какой вероятностью Варя и Вася окажутся рядом?
- б) Валя, Ваня, Варя и Вася случайным образом расселись в ряд на скамейке. С какой вероятностью Варя и Вася окажутся рядом?

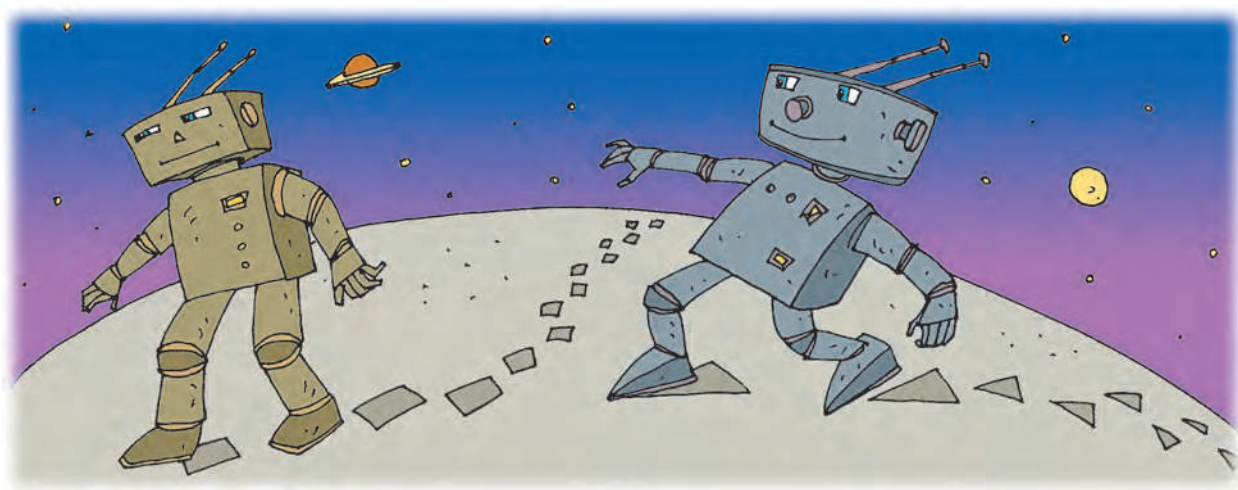
**М**

- 21** В непрозрачной коробке лежат 9 одинаковых на ощупь шариков: 5 синих и 4 красных. Наугад вынимается 3 шарика. Найдите вероятности следующих событий:
- А) Все вынутые шарики синие;
 - Б) Все вынутые шарики красные;
 - В) Среди вынутых шариков один синий и два красных;
 - Г) Среди вынутых шариков один красный и два синих.

* Как вы думаете, почему используются именно эти буквы?

** Полный автомобильный номер включает в себя ещё и вторую часть – номер региона, но в этом и следующем заданиях номер региона не учитывается.

*** Смотрите условие предыдущего задания.

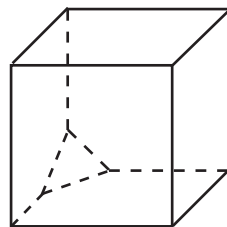
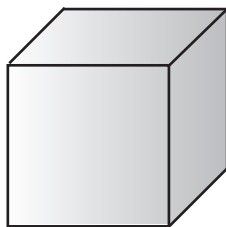
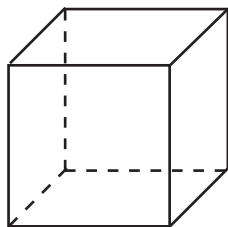


Вспоминаем то, что знаем

- Какая фигура изображена на левом рисунке?
- Можно ли с уверенностью утверждать, что это куб?

Открываем новые знания

- Какая фигура изображена на среднем рисунке?
- Можно ли с уверенностью утверждать, что это куб?
- Может ли это быть фигура, изображённая на правом рисунке?

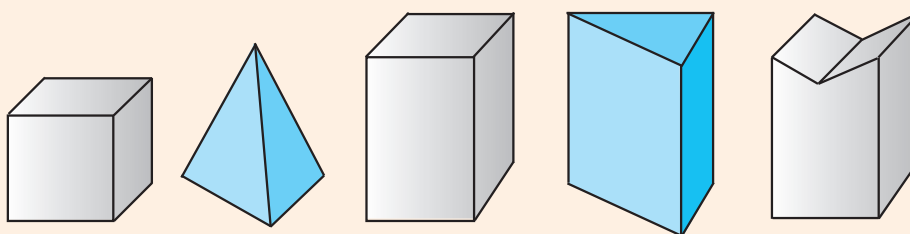


- Как принято выполнять чертёж многогранника? Почему?



Ещё из начальной школы вы знаете, что геометрические фигуры подразделяются на плоские и объёмные. Вы знакомы с такими объёмными фигурами, как куб, прямоугольный параллелепипед, пирамида, цилиндр, конус, шар. Для каждой из объёмных геометрических фигур имеются как внутренние точки, так и точки, лежащие снаружи. Разделяет внутренние и наружные точки *граница* геометрической фигуры, или её *поверхность*.

У многих объёмных геометрических фигур (на чертеже вы, безусловно, узнаете куб, параллелепипед, пирамиду, а также увидите незнакомые фигуры) граница состоит из плоских фигур – многоугольников.

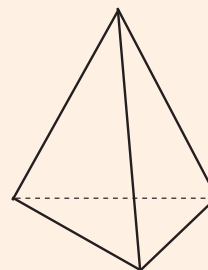
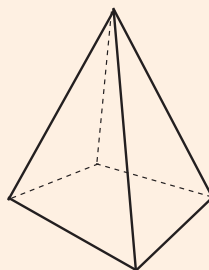
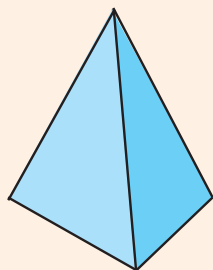


Если поверхность объёмной геометрической фигуры состоит из многоугольников, то эти многоугольники называются *гранями* объёмной геометрической фигуры, а сама такая объёмная геометрическая фигура называется *многогранником*. Стороны граней называются *рёбрами* многогранника, а вершины граней – *вершинами* многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если при проведении плоскости через любую его грань он весь оказывается расположен по одну сторону от этой плоскости. Все многогранники на чертеже выше, кроме самого правого, выпуклы. Мы будем рассматривать в основном выпуклые многогранники.

Иногда говорят об *отпечатках* многогранника на плоскости. При этом имеют в виду те геометрические фигуры, которые могут появиться, если выкрашенный многогранник плотно прижать к плоскости, скажем, листу белой бумаги, лежащей на поверхности стола. Отпечатком выпуклого многогранника может быть или точка (если прижать многогранник к плоскости его вершиной), или отрезок (если прижать многогранник к плоскости его ребром), или многоугольник (если прижать многогранник к плоскости его гранью). У невыпуклых многогранников отпечатки могут быть устроены гораздо более сложно. Например, одним из отпечатков самого правого многогранника на рисунке является пара параллельных отрезков.

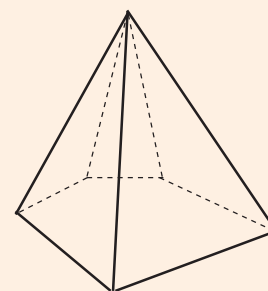
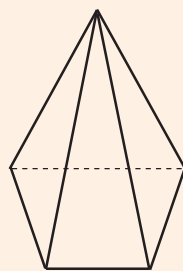
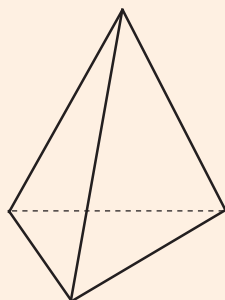
Очень важно научиться правильно выполнять чертежи многогранников. Если рассмотреть фотографию многогранника или его рисунок, выполненный с натуры (чертёж внизу слева), то невозможно представить, как выглядит невидимая нам часть многогранника. По общепринятой договорённости невидимые рёбра многогранника изображают пунктиром (чертёж внизу в центре).



Теперь видно, что от нашего взгляда были скрыты три грани – два треугольника и один четырёхугольник. Кстати, многогранник, изображённый на чертеже слева, мог быть устроен и по-другому (чертёж справа).

Два самых распространённых вида многогранников – *пирамиды* и *призмы*.

У пирамиды одна грань (называемая *основанием*) может быть произвольным многоугольником, все остальные грани (называемые *боковыми гранями*) – треугольники с общей вершиной, причём у каждого такого треугольника сторона, противолежащая этой общей вершине, является стороной основания. Называют пирамиду по количеству сторон основания: треугольная пирамида, четырёхугольная пирамида и т.д. Треугольная пирамида является простейшим из всех возможных многогранников: у неё четыре грани (являющиеся треугольниками), шесть рёбер и четыре вершины – минимально возможное количество из всех многогранников.

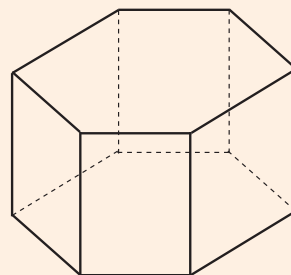
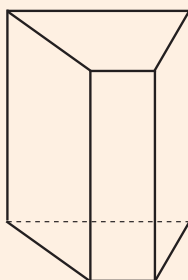
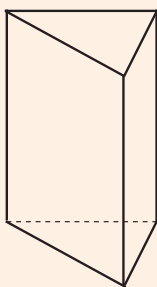


Любая грань треугольной пирамиды может быть взята в качестве основания. Иногда треугольную пирамиду называют *тетраэдром* (в переводе с греческого – четырёхгранник).

Пирамида

Призма

У призмы имеются два основания. Они являются равными между собой многоугольниками с соответственно параллельными сторонами. Соответственные вершины этих многоугольников соединены *боковыми рёбрами*. *Боковые грани* призмы являются прямоугольниками*. Называют призму по количеству сторон основания: треугольная призма, четырёхугольная призма и т.д. На чертеже, приведённом на следующей странице, изображены (слева направо) треугольная, четырёхугольная и шестиугольная призмы.



Хорошо известный вам параллелепипед является четырёхугольной призмой, основания которой – прямоугольники. Любые две противоположные грани параллелепипеда могут быть взяты в качестве его оснований.

Развиваем умения



Н

- 1 Продолжите предложения.
 - а) Многогранником называется...
 - б) Гранью многогранника называется...
 - в) Ребром многогранника называется...
 - г) Вершиной многогранника называется...
 - д) Отпечатком многогранника называется...
- 2 а) Расскажите, какой многогранник называется пирамидой. Как называются грани пирамиды?
 б) Расскажите, какой многогранник называется призмой. Как называются грани призмы?
- 3 а) Расскажите, какой многогранник называется тетраэдром. Какими особенностями обладают грани тетраэдра?
 б) Расскажите, какой многогранник называется параллелепипедом. Какими особенностями обладают грани параллелепипеда?

* Полное название такого многогранника – «прямая призма». Мы будем говорить просто «призма», опуская слово «прямая».

- 4 Что можно сказать о многограннике, если известно, что у него 4 вершины?
- 5 Может ли у многогранника быть ровно 5 рёбер?
- 6 Может ли многогранник быть расположен так, что у него больше невидимых граней, чем видимых? А вершин? А рёбер?
- 7 Сколько у пятиугольной призмы:
а) вершин; б) рёбер; в) граней?
-

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

- а) Начертите треугольную призму. Сколько у неё вершин, сколько рёбер и сколько граней? Сколько из них видимых на чертеже и сколько невидимых?
- б) У пирамиды 17 граней. Сколько у неё вершин и сколько рёбер?

П Вариант II.

- а) Начертите пятиугольную пирамиду. Сколько у неё вершин, сколько рёбер и сколько граней? Сколько из них видимых на чертеже и сколько невидимых?
- б) У призмы 38 граней. Сколько у неё вершин и сколько рёбер?

Тренировочные упражнения.

Н

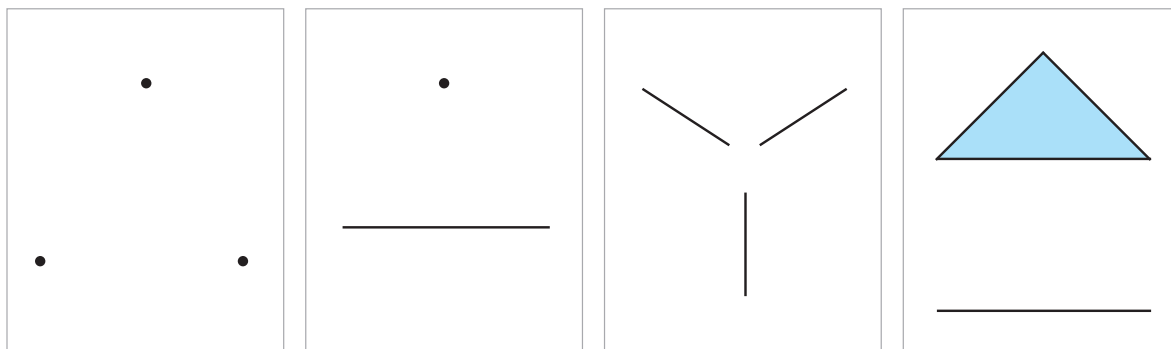
- 8 Сколько у пятиугольной пирамиды:
а) вершин; б) рёбер; в) граней?
- 9 Сколько у n -угольной пирамиды:
а) вершин; б) рёбер; в) граней?
- 10 Может ли какая-нибудь пирамида иметь 2 011 рёбер?
-

П

- 11 а) Всякая ли призма является выпуклым многогранником?
б) Всякая ли пирамида является выпуклым многогранником?
в) Всякий ли параллелепипед является выпуклым многогранником?
г) Всякий ли тетраэдр является выпуклым многогранником?
- 12 Может ли у многогранника быть больше граней, чем вершин?

М

- 13 Для каждого из чертежей придумайте невыпуклый многогранник, один из отпечатков которого имеет вид, изображённый на этом чертеже.



- 14 Сколько существует различных видов выпуклых многогранников с пятью вершинами?

**Н**

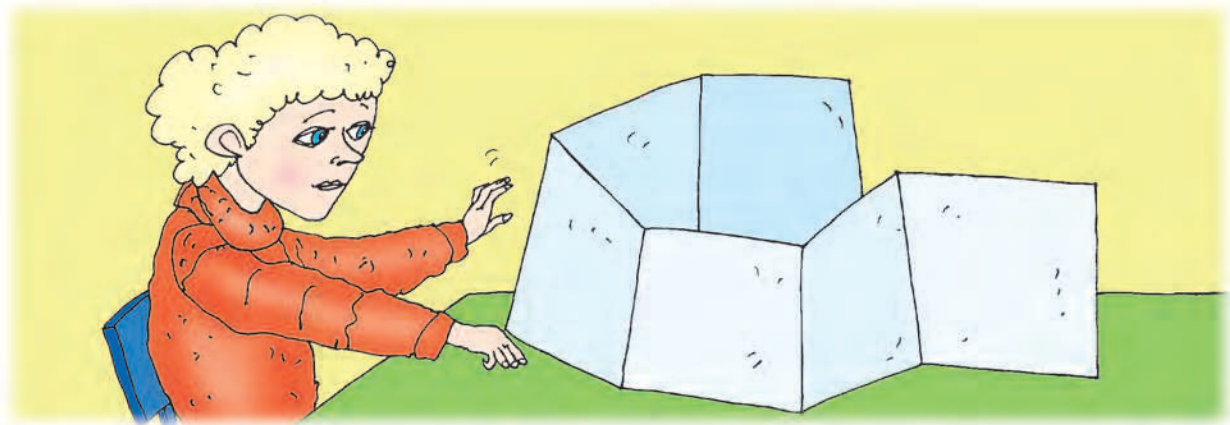
- 15 Сколько у n -угольной призмы:
а) вершин; б) рёбер; в) граней?
- 16 Может ли какая-нибудь призма иметь 2 011 рёбер?
- 17 а) У призмы 38 граней. Сколько вершин имеет основание этой призмы?
б) У пирамиды 38 граней. Сколько вершин имеет основание этой пирамиды?

**П**

- 18 Начертите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы треугольника $AB_1 C$.
- 19 Могут ли у многогранника быть видимыми:
а) все вершины; б) все рёбра; в) все грани?

**М**

- 20 а) Возьмите несколько призм и пирамид, подсчитайте в каждой из них количество вершин B , количество рёбер P и количество граней Γ . Найдите для каждой призмы и каждой пирамиды значение выражения $B - P + \Gamma$. Какие значения у вас получились?
- б) Возьмите несколько произвольных выпуклых многогранников и выполните для них подсчёты, указанные в задании а). Какие значения у вас получились?
- в) Какое предположение можно высказать о связи чисел B , P и Γ ? Выписанная вами формула называется формулой Эйлера для многогранника. Попробуйте доказать её.
- г) Приведите пример невыпуклого многогранника, для которого формула Эйлера верна, а также пример невыпуклого многогранника, для которого формула Эйлера неверна.



Вспоминаем то, что знаем

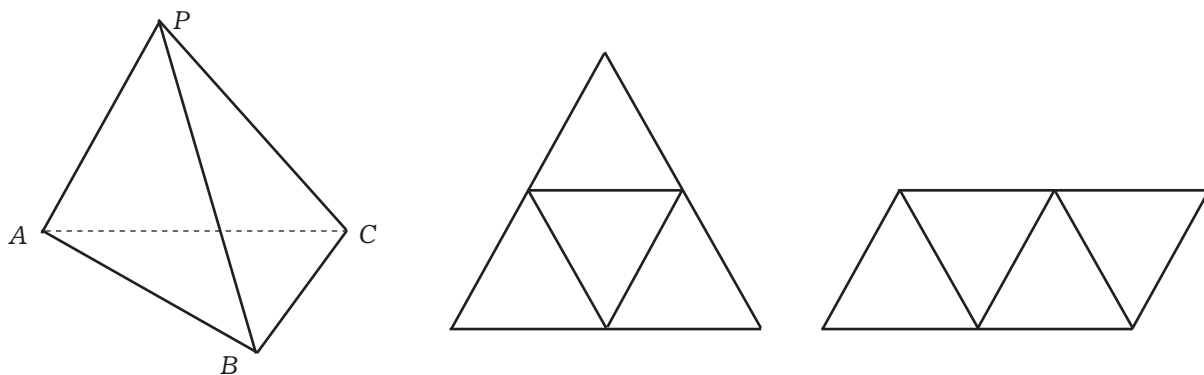
- Разбейтесь на небольшие группы (например, на пары, где каждую пару могут образовывать ребята, сидящие за одной партой). Пусть каждая группа возьмёт у учителя две одинаковые сделанные из бумаги треугольные пирамиды (или, по-другому, два тетраэдра). Такая пирамида изображена на левом чертеже внизу страницы.

Разрежьте одну из двух пирамид по отрезкам PA , PB , PC и отогните треугольники PAB , PBC и PCA . Разверните полученную геометрическую фигуру на поверхности парты или стола.

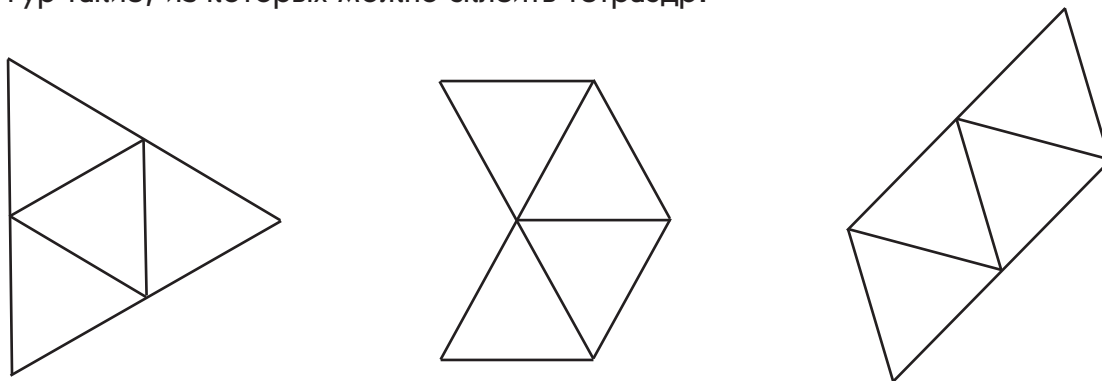
- Возьмите вторую пирамиду и проделайте с ней то же, что и с первой, только разрезав её по отрезкам PA , PB и BC , отогнув некоторые треугольники и развернув полученную геометрическую фигуру на поверхности парты или стола.

Открываем новые знания

- Одинаковые ли геометрические фигуры у вас получились?
- Имеются ли эти фигуры среди изображённых на чертеже? Если да, то какие именно?



- Как бы вы назвали эти фигуры? Считаете ли вы слово «развёртка» удачным названием?
- Верно ли, что при склеивании некоторых отрезков полученных вами плоских фигур можно получить начальный тетраэдр?
- Верно ли, что развёртка состоит из взятых по одному разу отпечатков всех граней так, что каждый из них имеет хотя бы одну общую сторону с каким-то другим?
- Фигуры, изображённые на чертеже ниже, составлены из взятых по одному разу отпечатков всех граней тетраэдра, с которым вы работали. Укажите среди этих фигур такие, из которых можно склеить тетраэдр.



- Из всякой ли плоской фигуры, составленной из взятых по одному разу отпечатков граней многогранника так, что каждый из них имеет хотя бы одну общую сторону с каким-то другим, можно склеить этот многогранник?

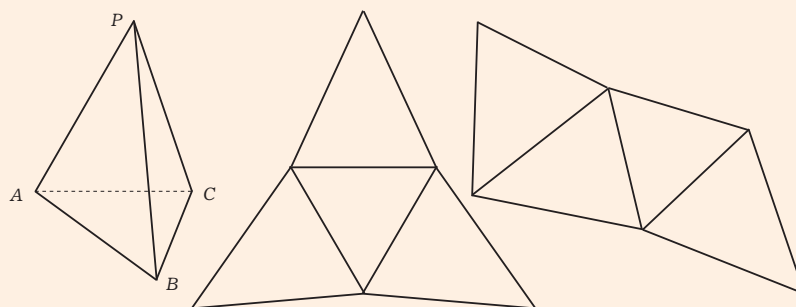
Отвечаем, проверяем себя по тексту

**Развёртка
многогранника**

Если разрезать поверхность многогранника по некоторым рёбрам, то иногда её удаётся развернуть в некоторую плоскую фигуру. Эта плоская фигура называется **развёрткой** многогранника.

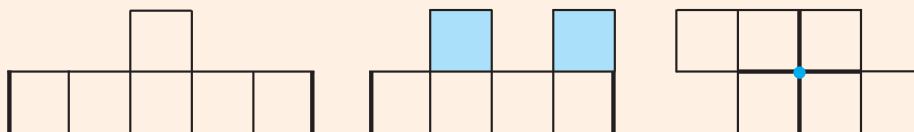
На левом чертеже на следующей странице изображён тетраэдр $PABC$, у которого $AB = BC = AC$ и $PA = PB = PC$. Разрежем его по рёбрам PA , PB и BC и развернём. Получится развёртка тетраэдра, изображённая на среднем чертеже. Если разрезать тетраэдр по рёбрам PA , PB и BC , то получится другая развёртка – изображённая на правом чертеже на следующей странице.

Взяв развёртку многогранника, можно склеить многогранник. Для этого можно воспользоваться клейкой лентой или оставить для склеивания возле некоторых сторон развёртки узкие полоски бумаги.



Понятно, что в развёртке выпуклого многогранника по одному разу встретятся отпечатки всех его граней. Но не всякая плоская фигура, составленная из взятых по одному разу отпечатков граней, является развёрткой!

Например, каждая из изображённых на чертежах ниже фигур состоит из шести равных квадратов, но ни одна из них не является развёрткой куба.



Если попытаться склеить куб из левой фигуры, то придётся склеивать между собой отмеченные отрезки. При этом возникнут возможные грани – пятиугольники, которые нечем заклеить. Если попытаться склеить куб из средней фигуры, то придётся склеивать между собой отмеченные отрезки. При этом возникнут две незаклеенные грани – квадраты.

На заклейку одного из них претендуют два закрашенных квадрата (и тем самым, один остаётся лишним), а заклеивать второй нечем.

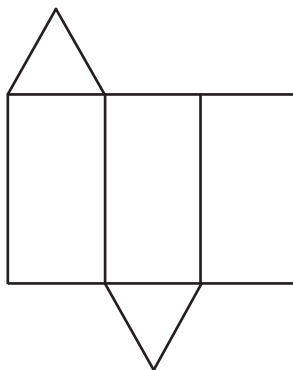
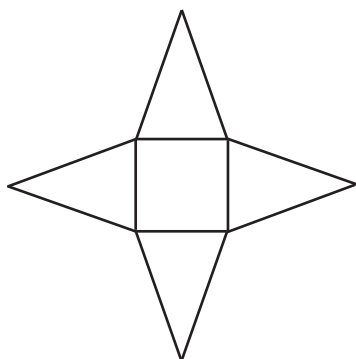
Если попытаться склеить куб из правой фигуры, то придётся перегибать её по прямым, проходящим через отмеченные отрезки. Но после любого перегиба по одной из таких прямых осуществить перегиб по второй прямой уже будет невозможно. Таким образом, если фигура имеет внутреннюю вершину, аналогичную отмеченной вершине на правом чертеже, то такая фигура не может быть развёрткой многогранника.

При рассмотрении фигуры на правом чертеже предполагается, что развёртку можно только перегибать по изображённым на ней отрезкам. Если же разрешить проводить по некоторым из них разрезы, то из некоторых фигур с внутренними вершинами можно склеить невыпуклый многогранник. Об этом будет идти речь ниже в задании 20 на стр. 171.



Н

- 1 🌍 Расскажите, что называется развёрткой многогранника.
- 2 🌍 Может ли один и тот же многогранник иметь несколько различных развёрток?
- 3 Всякая ли плоская фигура, составленная из взятых по одному разу отпечатков граней многогранника так, что каждый из них имеет хотя бы одну общую сторону с каким-то другим, является развёрткой этого многогранника?
- 4 Развёртки каких многогранников изображены на чертеже?

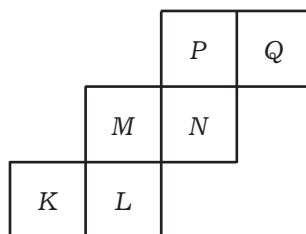
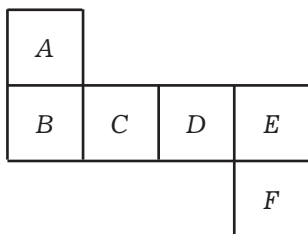


- 5 🌍 Может ли плоская фигура, состоящая из пяти треугольников, быть развёрткой какой-нибудь пирамиды?
- 6 🌍 Может ли плоская фигура, состоящая из семи прямоугольников, быть развёрткой какой-нибудь призмы?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

На развёртке куба, изображённой слева, стоят буквы A, B, C, D, E, F . Запишите пары букв, соответствующих противоположным граням куба.



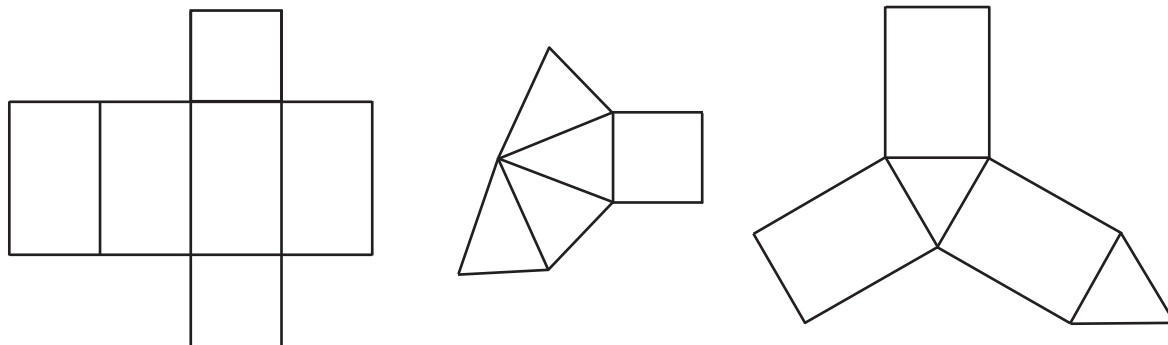
П Вариант II.

На развёртке куба, изображённой справа, стоят буквы K, L, M, N, P, Q . Запишите пары букв, соответствующих противоположным граням куба.

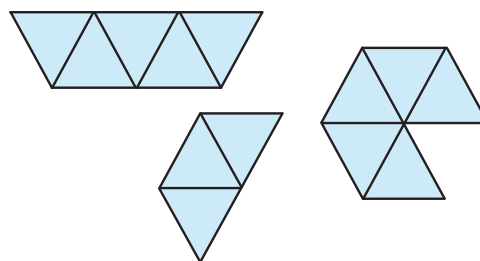
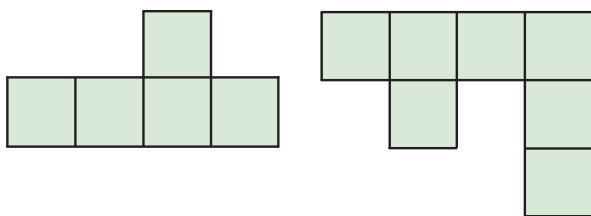
Тренировочные упражнения.

Н

7 Назовите многогранники, развёртки которых изображены на чертеже.



8 а) Объясните, почему ни одна из изображённых левее пунктирной линии фигур не может быть развёрткой куба.

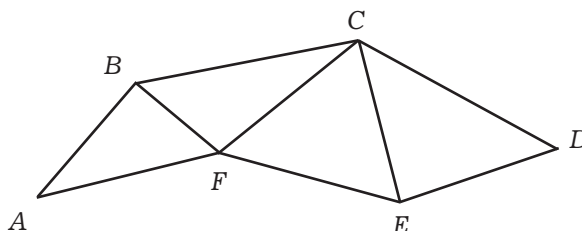
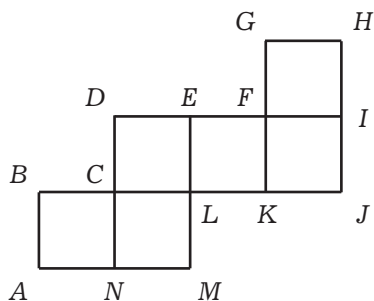


б) Объясните, почему ни одна из изображённых правее пунктирной линии фигур не может быть развёрткой тетраэдра.

9 Начертите несколько различных развёрток параллелепипеда, измерения которого равны 3 см, 4 см и 5 см.

П

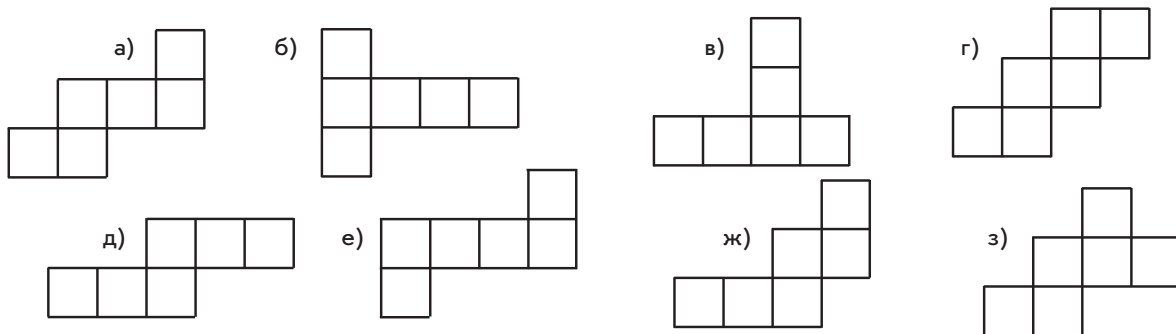
10 На левом чертеже изображена развёртка куба. Какие точки совместятся при склеивании куба из этой развёртки?



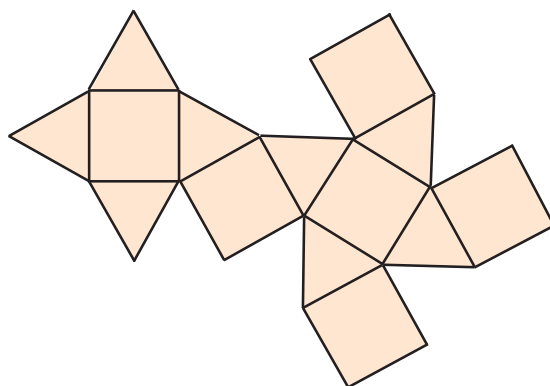
11 Фигура, изображённая на правом чертеже, является развёрткой некоторого тетраэдра. Укажите все пары равных отрезков.

М

- 12 Какие из составленных из шести равных квадратов фигур, изображённых на чертеже, являются развёртками куба?

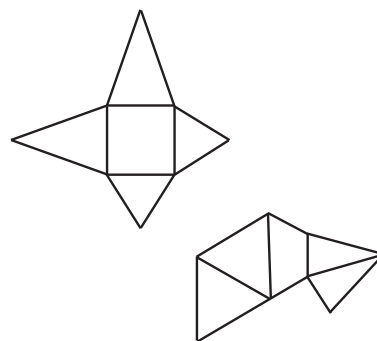
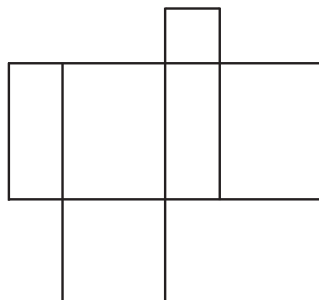
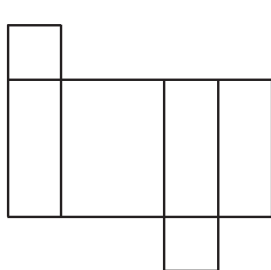


- 13 Сколько рёбер и сколько вершин имеет многогранник, развёртка которого изображена на чертеже?



Н

- 14 а) Объясните, почему ни одна из изображённых левее пунктирной линии фигур не может быть развёрткой параллелепипеда.



- б) Объясните, почему ни одна из изображённых правее пунктирной линии фигур не может быть развёрткой четырёхугольной пирамиды.

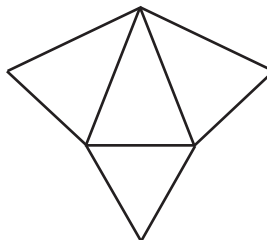
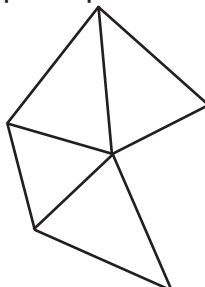
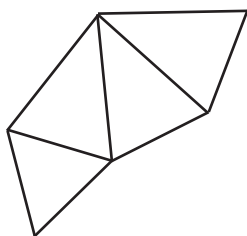
- 15 Начертите развёртку четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой имеют одинаковую длину, и склейте из этой развёртки пирамиду.

- 16 Начертите развёртку тетраэдра, все рёбра которого имеют различную длину, и склейте из этой развёртки тетраэдр.



П

- 17 Какие из фигур являются развёртками треугольных пирамид?



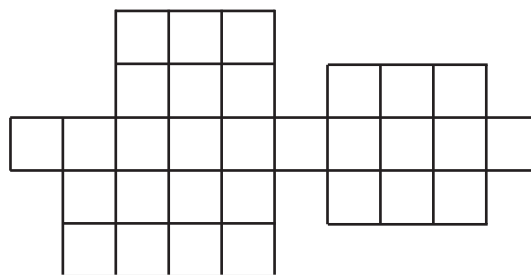
- 18 Сколько различных развёрток имеет тетраэдр, все шесть рёбер которого равны?



М

- 19 Докажите, что количество различных развёрток куба равно 11.

- 20 Изображённая на чертеже фигура состоит из квадратов.



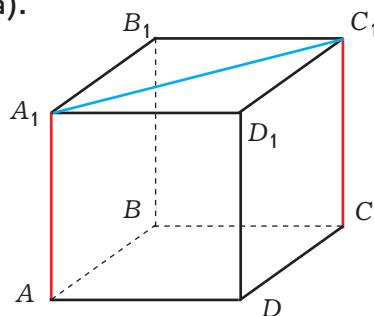
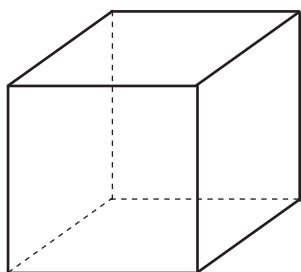
Проведите разрезы по некоторым сторонам некоторых из квадратов, после чего склейте из фигуры многогранник.





Вспоминаем то, что знаем

- Представьте, что у вас имеется куб (чертёж слева), изготовленный из легко режущегося материала. Представьте, что вы приложили острый нож к отрезку A_1C_1 – диагонали верхней грани и разрежали куб так, что разрез прошёл по отрезкам AA_1 и CC_1 (как на чертеже справа).



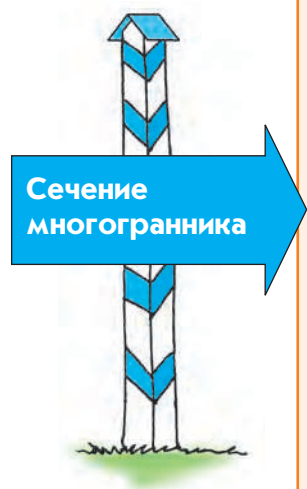
Открываем новые знания

- Верно ли, что куб распался на два новых многогранника?
- Есть ли у этих многогранников такие грани, которые не являлись гранями куба и не являлись частями граней куба? Найдите такие грани.
- Верно ли, что такая грань есть ровно одна у каждого нового многогранника?
- Верно ли, что эти грани одинаковы у каждого из двух новых многогранников?
- Верно ли, что если склеить по этим граням два новых многогранника, то получится начальный куб?
- Верно ли, что именно по этим граням шёл разрез (или, по-другому, *сечение*) куба?
- Как бы вы назвали каждую из этих граней? Считаете ли вы название «сечение многогранника» удачным?

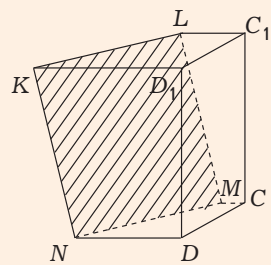
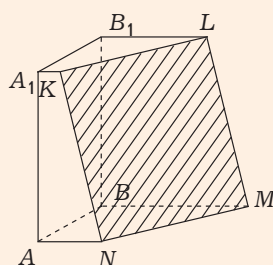
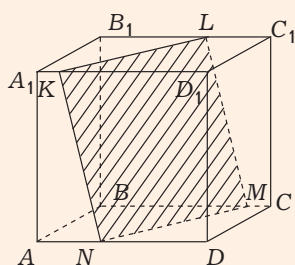


Что называется сечением многогранника плоскостью?

Отвечаем, проверяем себя по тексту



Если взять куб, изготовленный из твёрдого материала, и разрезать его плоскостью на две части, то получатся два новых многогранника. Большинство их граней являются гранями куба или частями граней куба. Но у каждого из полученных многогранников также имеется одна новая грань, причём эти грани одинаковые. Именно по этой грани проходил разрез. Эта грань – многоугольник, называемый *сечением* куба. Обычно на чертеже сечение заштриховывают или изображают его стороны более жирными линиями.

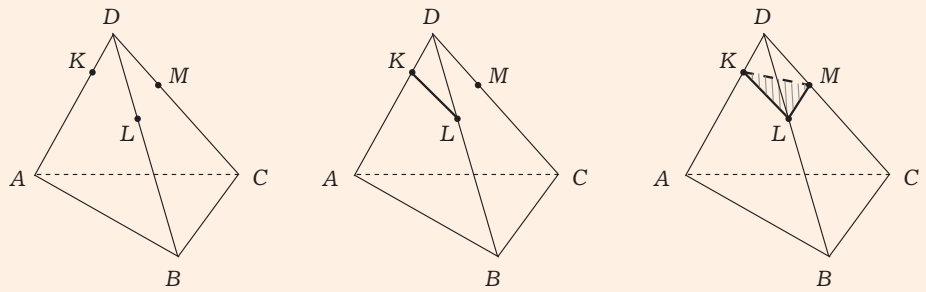


Если рассмотреть какую-нибудь грань выпуклого многогранника, то любая секущая плоскость либо вообще не пересекает эту грань, либо проходит только через вершину, либо только через ребро этой грани, либо пересекает грань по отрезку.

При построении сечения многогранника нужно выяснить, каким образом секущая плоскость пересекает каждую из его граней (и пересекает ли вообще). При этом важную роль играет тот факт, что **если две плоскости пересекаются, то они пересекаются по прямой**. Отсюда следует, что если мы знаем в некоторой грани две точки, через которые проходит сечение, то, проведя прямую через эти две точки, можно выяснить, как секущая плоскость пересекается с этой гранью.

Например, при построении сечения тетраэдра $ABCD$, проходящего через точки K, L, M (левый чертёж на стр. 174), мы знаем в грани DAB две точки, через которые проходит сечение (K и L), значит, секущая плоскость пересекает грань DAB по отрезку KL (средний чертёж на стр. 174).

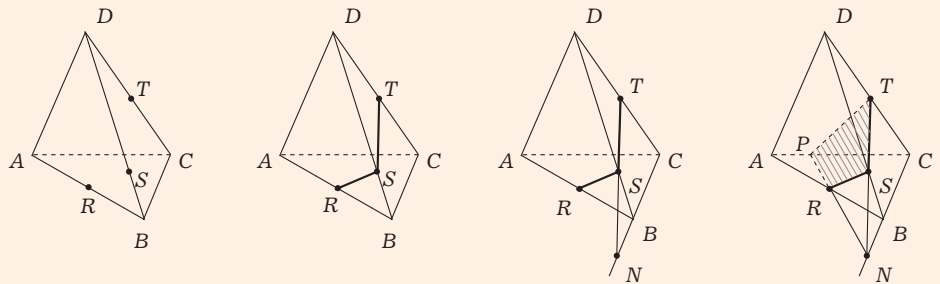
Построение сечений



Рассуждая аналогично, устанавливаем, что секущая плоскость пересекает грань DBC по отрезку LM , а грань DCA – по отрезку MK . Таким образом, сечением является треугольник LMK (правый чертёж сверху).

Часто при построении сечения удобно продолжить некоторые рёбра. Например, при построении сечения тетраэдра $ABCD$, проходящего через точки R, S, T (левый чертёж внизу), мы знаем в грани DAB две точки, через которые проходит сечение (R и S), значит, секущая плоскость пересекает грань DAB по отрезку RS . Аналогично, мы знаем в грани DBC две точки, через которые проходит сечение (S и T), значит, секущая плоскость пересекает грань DBC по отрезку ST (второй слева чертёж внизу).

Теперь, чтобы понять, как секущая плоскость пересечётся с гранью ABC , нам нужно знать в этой грани ещё какую-нибудь точку, кроме точки R . Её можно получить следующим образом. Проведём прямую, на которой лежит ребро BC , т.е. продолжим ребро BC . В плоскости грани DBC найдём точку пересечения прямых BC и ST – точку N (третий слева чертёж). Но поскольку прямая BC лежит также в плоскости грани ABC , то и точка N лежит в плоскости грани ABC . Вот у нас и есть две точки в плоскости грани ABC – R и N !



Проведём прямую RN ; обозначим через P её точку пересечения с отрезком AC (правый чертёж). Секущая плоскость пересекает грань ABC по отрезку RP . Наконец, ясно, что секущая плоскость пересекает грань DAC по отрезку PT . Таким образом, сечением является четырёхугольник $PRST$ (правый чертёж).

Мы рассмотрели лишь простейшие случаи сечений. Более полно вы познакомитесь с сечениями в старших классах.



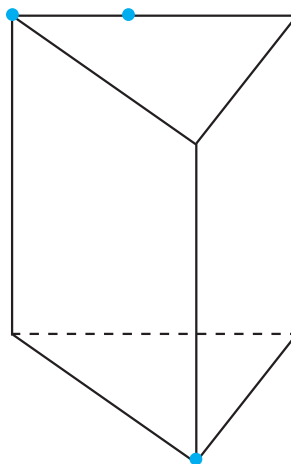
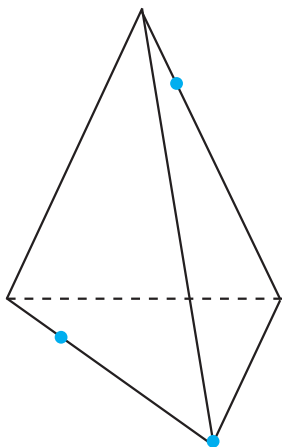
Н

- 1 Расскажите, что называется сечением многогранника.
- 2 Опишите все случаи пересечения секущей плоскости с гранью многогранника.
- 3 а) Можно ли разрезать тетраэдр на два тетраэдра?
б) Можно ли разрезать куб на два куба?
в) Можно ли разрезать параллелепипед на два параллелепипеда?
- 4 Можно ли разрезать пятиугольную призму на
а) две пятиугольные призмы;
б) две четырёхугольные призмы;
в) одну пятиугольную и одну четырёхугольную призмы?
- 5 Какие многоугольники могут получиться в сечении:
а) тетраэдра; б) треугольной призмы?
Начертите соответствующие чертежи.
- 6 Куб рассечён плоскостью на два многогранника. Может ли у каждого из них быть вершин меньше, чем у куба? А рёбер? А граней?

Задания для самостоятельной работы.

Н Вариант I.

Перечертите левый чертёж в тетрадь и постройте на нём сечение тетраэдра, проходящее через три отмеченные точки.



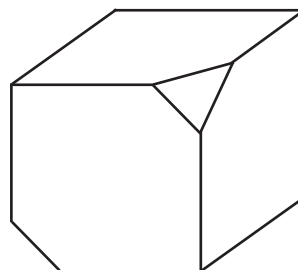
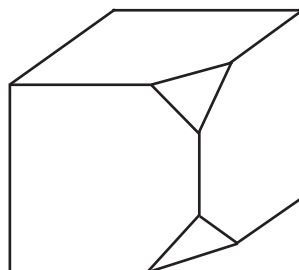
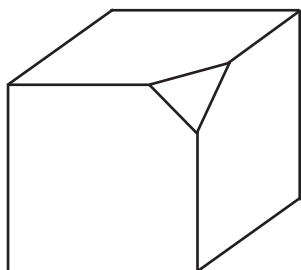
П Вариант II.

Перечертите правый чертёж в тетрадь и постройте на нём сечение треугольной призмы, проходящее через три отмеченные точки.

Тренировочные упражнения.

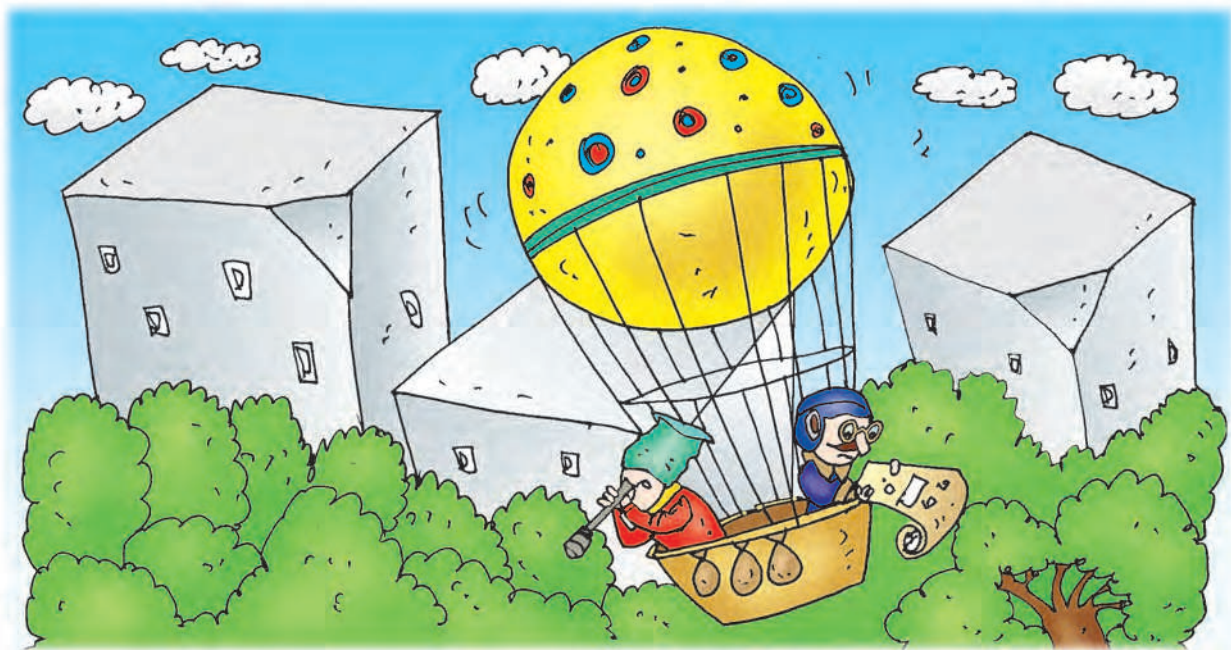
Н

- 7 У параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с длинами рёбер $AB = 8$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 4$ см на ребре AB взята точка E так, что $AE = 3$ см. Через точку E проведена такая плоскость, что параллелепипед разбился на два параллелепипеда. Найдите: а) объёмы полученных параллелепипедов; б) площадь полученного сечения.
- 8 а) У куба отпилили угол как на левом рисунке.

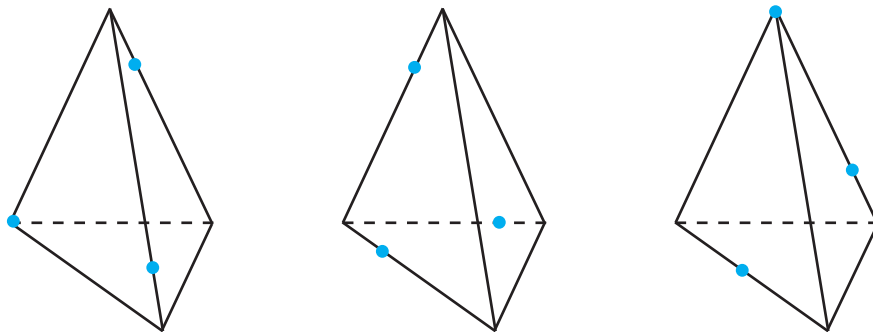


Сколько у полученного многогранника граней, вершин, рёбер?

- б) Ответьте на те же вопросы для куба, у которого отпилили два угла как на среднем рисунке.
- в) Ответьте на те же вопросы для куба, у которого отпилили другие два угла как на правом рисунке.



- 9 Постройте сечения тетраэдра, проходящие через отмеченные точки.



П

- 10 Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, полученный в сечении параллелепипеда плоскостью?

- 11 Деревянный куб выкрашен снаружи зелёной краской. Каждое его ребро разделили на четыре равные части и провели через отмеченные точки сечения так, что куб оказался разрезанным на маленькие кубики с ребром, в 4 раза меньшим, чем у начального куба.

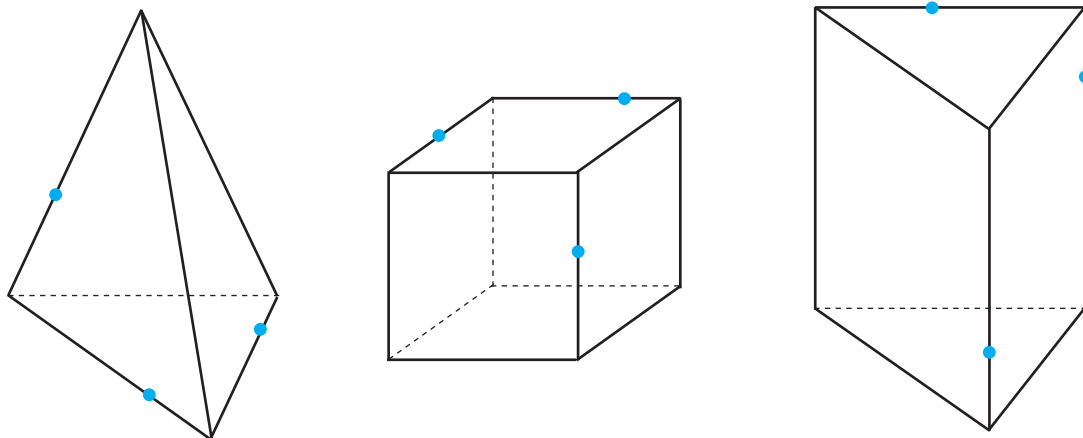
- а) Сколько маленьких кубиков получилось?
- б) Скольких маленьких кубиков имеют по три выкрашенные грани?
- в) Сколько маленьких кубиков имеют по две выкрашенные грани?
- г) Сколько маленьких кубиков имеют по одной выкрашенной грани?
- д) Сколько маленьких кубиков не имеют ни одной выкрашенной грани?



М

- 12 а) Можно ли треугольную призму разрезать на две пирамиды?
б) Можно ли треугольную призму разрезать на три тетраэдра?

- 13 Постройте сечения тетраэдра, куба и треугольной призмы, проходящие через отмеченные точки на рёбрах.



**Н**

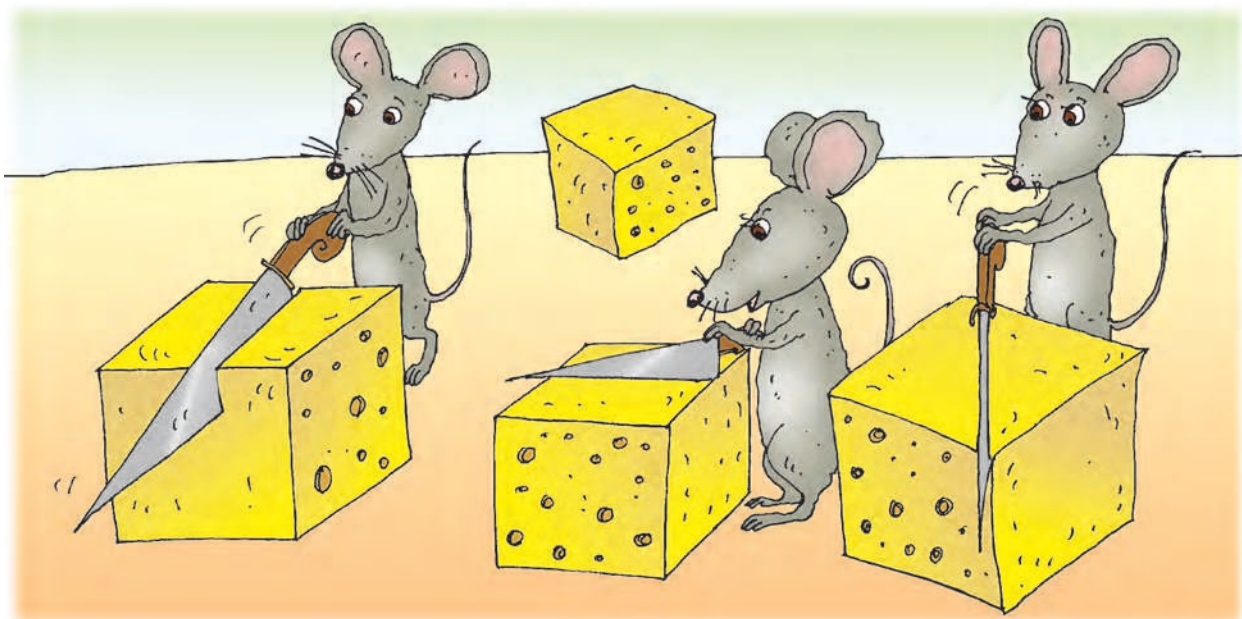
- 14 Постройте какое-нибудь сечение куба, являющееся
а) треугольником; б) четырёхугольником; в) пятиугольником.
- 15 У параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре AB взята такая точка F , что $AF = 3$ см, $FB = 4$ см. Через точку F проведена такая плоскость, что параллелепипед разбился на два параллелепипеда. Найдите отношение объёмов полученных параллелепипедов.

**П**

- 16 Можно ли, проведя сечение куба и склеив два полученных многогранника по равным граням – сечениям куба, получить многогранник, не являющийся кубом?
- 17 Как может выглядеть пересечение секущей плоскости с гранью невыпуклого многогранника?
- 18 Параллелепипед с длинами рёбер 5 см, 7 см и 9 см составлен из кубиков с длиной ребра 1 см. Сколько удалили кубиков, убрав весь внешний слой толщиной в один кубик?
- 19 Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, полученный в сечении четырёхугольной пирамиды плоскостью?

**М**

- 20 Три различные плоскости пересекают куб. Какое количество многогранников может при этом получиться?
- 21 Какое наибольшее количество рёбер куба может пересечь плоскость, не проходящая ни через одну из его вершин?



Итоговый тест



- 1 Какую дробь нельзя представить в виде конечной десятичной дроби?
а) $-\frac{17}{20}$; б) $\frac{109}{140}$; в) $\frac{57}{64}$. 1 очко
- 2 Дробь $\frac{17}{66}$ записали в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какой период имеет эта дробь?
Ответы: а) 57; б) 75; в) 2 575. 1 очко
- 3 Числа $x = 0,472323223$; $y = 0,47(23)$; $z = 0,4723223222322223\dots$ (каждый раз количество двоек между соседними тройками увеличивается на одну) расположили в порядке возрастания. Выберите правильный ответ:
Ответы: а) $x; y; z$; б) $z; x; y$; в) $y; x; z$. 1 очко
- 4 Найдите длину окружности радиуса 10 см.
Ответы: а) 31,4 см; б) 20π см; в) 62,8 см. 1 очко
- 5 У пирамиды 18 рёбер. Сколько у неё вершин?
Ответы: а) 9; б) 10; в) 18. 1 очко
- 6 Если на окружности отметить 10 точек, то количество всевозможных отрезков с концами в этих точках равно:
а) 45; б) 90; в) 100. 2 очка
- 7 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами $A(3; 4)$, $B(5; -3)$, $C(-3; -2)$.
Ответы: а) 27; б) 40; в) 41. 2 очка
- 8 Из 7 разноцветных шариков (4 красных и 3 синих) наугад выбрали два шарика. Какова вероятность того, что оба они красные?
Ответы: а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{7}$. 2 очка
- 9 Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, полученный в сечении треугольной призмы плоскостью?
Ответы: а) 4; б) 5; в) 6. 3 очка

Исторические страницы



Считается, что открытие иррациональных чисел произошло в VI в. до н.э. в Древней Греции в школе Пифагора. Было обнаружено, что диагональ квадрата со стороной, равной 1, не является рациональным числом. Этот факт получил громкую известность среди широких кругов образованных людей того времени. Более того, незнание этого факта и его доказательства считалось признаком невежественности.

Факт иррациональности диагонали квадрата с единичной стороной много и горячо обсуждался и глубоко осмысливался, поскольку задевал самые основы древнегреческой математики: до его открытия считалось, что любое число является отношением двух натуральных чисел (отрицательных чисел древние греки не знали); другими словами, все числа рациональны или же любые два отрезка соизмеримы – обязательно найдётся такой отрезок, который целое количество раз поместится в каждом из них. Вскоре было обнаружено много других иррациональных чисел. Первое глубокое исследование на эту тему провёл Теэтет (IV в. до н.э.).

Термин «иррациональное число» ввёл немецкий математик Михель Штифель в 1544 году, а полную теорию действительных чисел как десятичных дробей, где иррациональные числа выражаются в виде бесконечных непериодических дробей, разработал другой немецкий математик Карл Вейерштрасс (вторая половина XIX в.).

Постепенно обнаружилось, что очень много чисел, широко распространённых не только в математике, но и в окружающей нас действительности, являются иррациональными.

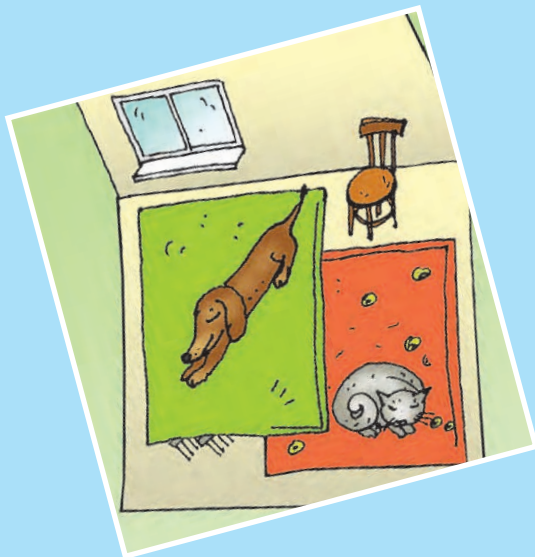
Иррациональным является известное вам число π – отношение длины окружности к её диаметру. Это число известно с древних времён; впрочем, обозначение с помощью буквы π – первой буквы слова «окружность» по-гречески* – ввёл англичанин Уильям Джонс в 1706 г., а общеупотребимым оно стало после того, как его использовал петербургский академик Леонард Эйлер в своей известной работе 1736 г. Иррациональность числа π была доказана весьма поздно – лишь в 1766 г. немецким математиком Иоганном Ламбертом.

К иррациональному числу приводит знаменитая задача о золотом сечении: «Разделить данный отрезок на две части так, чтобы отношение меньшей части к большей равнялось отношению большей части ко всему отрезку». Оказывается, что указанные отношения выражаются иррациональным числом. Золотое сечение играет важную роль в живописи, архитектуре, а также широко встречается в объектах живой природы. Впервые оно встречается ещё в «Началах» Евклида. Термин «золотое сечение» ввёл Леонардо да Винчи (конец XV в.).

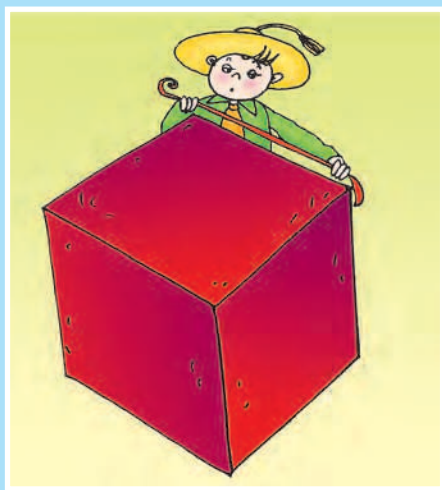
* Звучание этого слова вам знакомо: периферия.



Любителям математики



1. В противоположных углах квадратной комнаты положили два одинаковых прямоугольных ковра, каждый из которых примыкает двумя своими сторонами к сторонам комнаты. Площадь их общей части оказалась равной 3 м^2 . Когда один из ковров положили в своём углу по-другому так, что он по-прежнему примыкает двумя своими сторонами к сторонам комнаты, площадь общей части стала равна 2 м^2 . На сколько метров длина ковра больше его ширины?



2. На бесконечном листе клетчатой бумаги несколько клеток покрашено в красный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число квадратов, стороны которых лежат на прямых, образующих клетки, таким образом, что все красные клетки лежат в вырезанных квадратах, и в любом вырезанном квадрате площадь красных клеток составляет не менее 20%, но не более 80% площади этого квадрата.

3. Некоторые рёбра куба покрашены в красный цвет, а остальные – в синий. Какое наибольшее количество синих рёбер может быть, если известно, что количество синих рёбер, выходящих из каждой вершины:

- а) не более двух; б) не более одного?

4. Разрежьте квадрат на остроугольные треугольники. Какое наименьшее количество остроугольных треугольников может быть при таком разрезании?

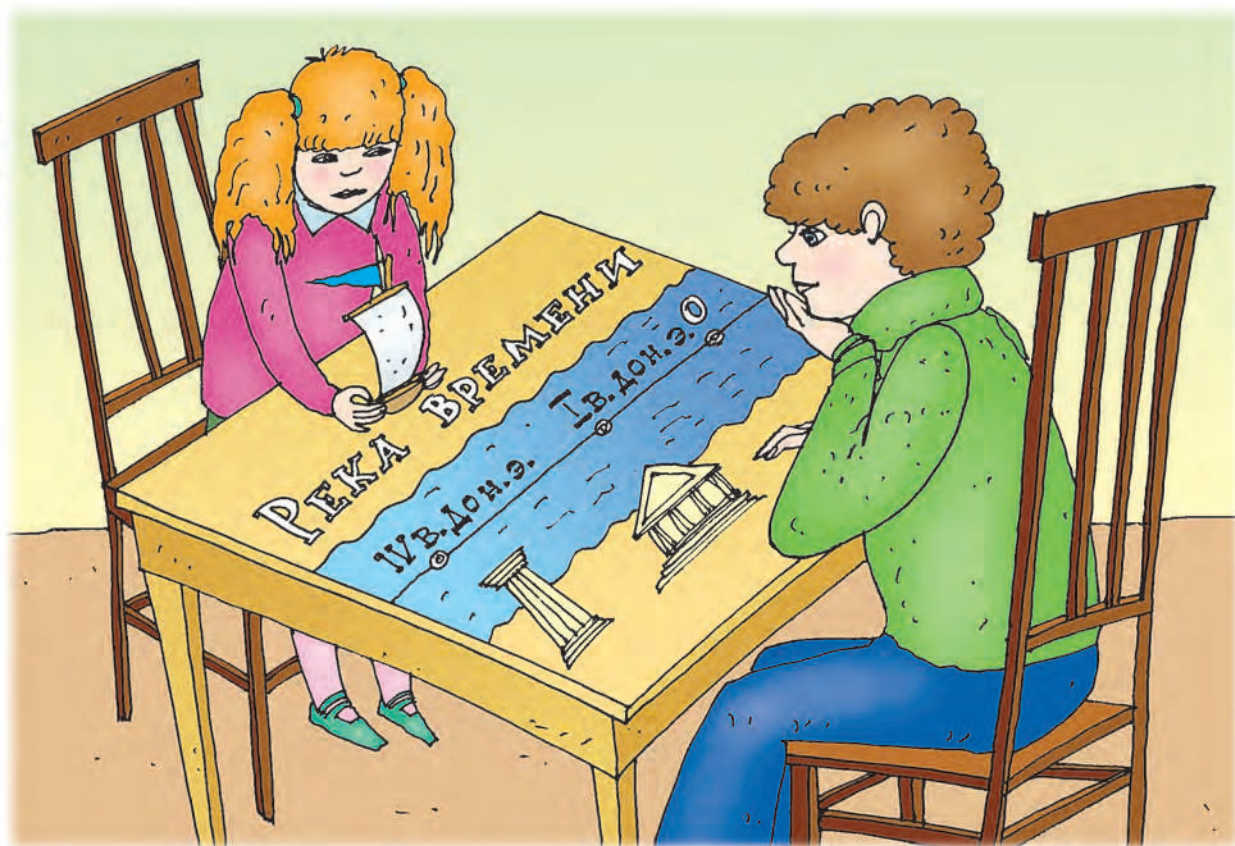
5. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно такие точки D , E и F , что $\angle BDE = \angle DFA$, а $\angle BED = \angle ECF$. Докажите, что если треугольник DEF – равносторонний, то треугольник ABC тоже равносторонний. Верно ли обратное утверждение?



6. Стекольщику заказали изготовить 85 квадратных пластинок $10 \times 10 \text{ см}$ из особого стекла. Он взялся выполнить заказ, зная, что у него есть такое стекло размером $1 \times 1 \text{ м}$, и поэтому он может вырезать даже 100 таких пластинок. Но, перемерив в мастерской своё стекло, стекольщик обнаружил, что оно имеет размер $99 \times 99 \text{ см}$. Сможет ли он вырезать из него хотя бы 85 пластинок?



Жизненная задача



СИТУАЦИЯ. Подробная датировка древних событий.

ВАША РОЛЬ. Участник исторического кружка.

ОПИСАНИЕ. Во время работы исторического кружка возникла необходимость отметить на оси времени несколько дат, относящихся к III в. до н.э.

ЗАДАНИЕ.

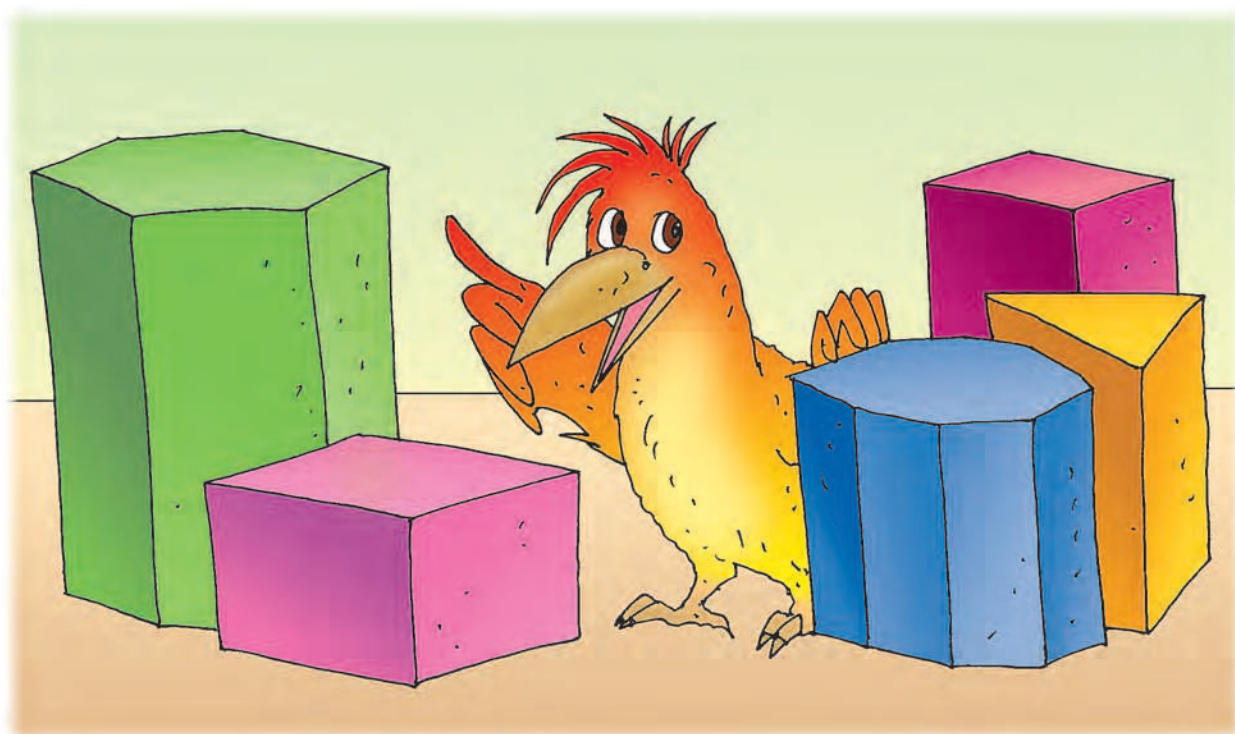
- 1) Отметьте на оси времени отрезками разного цвета I, II, III и IV века до н.э.
- 2) Отметьте на отрезке, соответствующем III в. до н.э., маленькие отрезки, приблизительно соответствующие 205 г. до н.э. и 295 г. до н.э.
- 3) Определите, какой из этих двух годов относится к началу, а какой – к концу III в. до н.э.
- 4) Изобразите 205 год до н.э. отрезком длиной 12 см, где каждому месяцу соответствует один сантиметр. Отметьте каждый месяц (например, так: I – январь, II – февраль, III – март и т.д.).
- 5) Изобразите апрель 205 года до н.э. отрезком длиной 150 мм, где каждому дню соответствует пять миллиметров. Закрасьте разным цветом пятимиллиметровые отрезки, соответствующие 4 апреля, 5 апреля, 6 апреля и 28 апреля.
- 6) Одинаково ли устроены числовая ось (числовая прямая) и ось времени? В чём их устройство похоже, а в чём отличается?



Проекты

1. Вы уже знаете, что многогранники можно склеивать из бумаги, предварительно вырезав их развёртки. Изготовьте из плотного картона несколько многогранников. Развёртки можно придумать самостоятельно, взять из учебника или из других источников. Особенно рекомендуем замечательную книгу М. Веннинджера «Модели многогранников». Организуйте выставку изготовленных вами моделей. Определите наиболее интересные работы и наградите их авторов. Оценивать можно как качество выполнения модели, так и её красоту или необычность.

2. В исторических страницах к разделу IV упоминалось золотое сечение и говорилось о том, что оно широко применяется в живописи, скульптуре, архитектуре, а также распространено в живой природе. Приготовьте доклад, реферат или компьютерную презентацию на эту тему, собрав информацию в различных доступных вам источниках.



Десятичные дроби

- 1 Запишите обыкновенные и смешанные дроби десятичной дробью и назовите число единиц каждого разряда слева направо:
а) $5\frac{4}{10}$; б) $\frac{25}{100}$; в) $7\frac{2}{100}$; г) $\frac{154}{1\,000}$; д) $2\frac{62}{1\,000}$; е) $\frac{761}{1\,000}$; ж) $\frac{6\,272}{10\,000}$; з) $10\frac{15}{1\,000\,000}$.
- 2 Запишите в виде обыкновенной или смешанной дроби:
а) 0,34; 0,05; 0,106;
б) 1,3; 8,09; 5,72;
в) 0,009; 0,0025; 0,0008;
г) 54,0761; 761,0054.
- 3 Начертите числовую прямую (примите за единичный отрезок 10 клеток) и отметьте на ней числа: 0,1; 0,5; 1,2; 0,25.
- 4 Выразите:
а) в метрах и сантиметрах: 3,48 м; 1,54 м; 7,61 м;
б) в рублях и копейках: 2,72 р.; 8,62 р.; 9,01 р.;
в) в килограммах и граммах: 6,272 кг; 9,015 кг; 90,154 кг;
г) в тоннах и килограммах: 0,54 т; 8,901 т; 5,4 т.
- 5 Запишите величину, используя десятичные дроби:
а) 5 км 4 м; б) 1 м 5 мм; д) 2 м 15 см;
е) 101 ц 54 кг; г) 5 т 4 ц; е) 15 кг 15 г.
- 6 Сравните числа ($>$; $<$; $=$):
а) $1,54 * 0,154$; г) $3,1234 * 3,1231$; ж) $17,109 * 17,09$;
б) $2,48 * 2,5$; д) $0,48 * 0,5$; з) $2,15 * 2,154$;
в) $12,39 * 1,2399$; е) $10,002 * 10,02$; и) $0,00051 * 0,0005$;
к) $5 * 4,9999$.
- 7 Запишите цифры, которые можно поставить вместо «*», чтобы получилось верное неравенство:
а) $11,*5 < 11,25$; б) $9,31* > 9,317$; в) $0,385 < 0,3*1$.
- 8 Замените десятичную дробь равной, содержащей меньше знаков после запятой:
а) 0,1000; б) 9,0600; в) 1,2050; г) 0,0040.
- 9 Вычислите, применяя законы сложения и правила раскрытия скобок:
а) $2,47 + 0,18 + 0,13 + 5,82$; г) $1,75 + 5,41 + 0,05 + 0,09$;
б) $0,154 + 0,9 - 0,054$; д) $1,16 - 0,158 - 0,002$;
в) $2,235 + (1,665 - 1,6)$; е) $3,836 - (2,8 + 1,036)$.

10 Вычислите:

- а) $11,12 - 0,57 + 0,08 - 5,53$; в) $1,2 + 7,49 + 0,8 + 1,51$;
б) $16,28 + 5,8 - 1,08$; г) $7,358 + 8,042 - 6,458 - 2,542$.

11 Вычислите:

- а) $47 \text{ см} + 2,53 \text{ дм}$; г) $6,2 \text{ м} + 8 \text{ дм}$;
б) $2 \text{ м} - 2 \text{ дм}$; д) $6,2 \text{ м} - 2 \text{ дм}$;
в) $1,3 \text{ дм} \cdot 3$; е) $6,9 \text{ м} : 3$.

12 Выразите в килограммах:

- а) $2,720 \text{ ц}$; $27,20 \text{ ц}$; $627,2 \text{ ц}$;
б) $627,2 \text{ т}$; $27,20 \text{ т}$; $2,720 \text{ т}$;
в) 6272 г ; $272,0 \text{ г}$; $27,2 \text{ г}$.

13 Вычислите:

- а) $0,05 \cdot 100 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 1,5$;
б) $(0,48 + 1,52) \cdot 2,35 - 1,07$;
в) $(5,004 + 4,996) \cdot (9 - 3,2)$;
г) $(9,9 \cdot 0,5 - 2,05) \cdot 0,1$.

14 Вычислите:

- а) $1,1^2$; $1,7^2$; $1,09^2$;
б) $0,12^2$; $0,15^2$; $0,11^3$.

15 Найдите значение выражения:

- а) $5,16 : 10 + 32,9 : 100 - 0,0011$;
б) $72,492 : 12 + 78,156 : 36 - 123,03 : 15$;
в) $(0,05 + 3,95) \cdot (1,35 + 3,65) : 100$.

16 Решите уравнение:

- а) $11x - 0,1 = 11,01$; г) $1,2x + 5,6 + 4,8x = 17,06$;
б) $2,27 - 2x = 0,73$; д) $3x + 1,3x + 6,7x = 122$;
в) $6,08 + 12x = 30,74$; е) $6,7x + 9x + 3,3x = 57$.

17 Выразите:

- а) в метрах: 235 см ; $1,5 \text{ см}$; $0,05 \text{ см}$;
б) в сантиметрах: $11,6 \text{ мм}$; 9 мм ; $0,05 \text{ мм}$;
в) в литрах: 3 105 мл ; $11,5 \text{ мл}$; $0,105 \text{ мл}$.

18 Выразите:

- а) в квадратных километрах: 154 га ; 154 а ;
б) в квадратных сантиметрах: $0,154 \text{ дм}^2$; 54 мм^2 .

19 Найдите приближение с избытком до первого знака после запятой:

- а) $105,1909$; б) $0,9003$; в) $0,999$; г) $0,003$; д) $651,011$.

- 20** Округлите до третьей значащей цифры:
а) 761,0154; б) 154,86272; в) 0,88889; г) 0,0090909; д) 54,072062; е) 1009,0019.
- 21** Округлив числа x и y до второго знака после запятой, вычислите приближённо их сумму и разность:
а) $x = 61,8054$, $y = 9,0997$; б) $x = 20,16747$, $y = 9,8939$.
- 22** Округлив числа x и y до третьей значащей цифры, вычислите приближённо значения выражений xy и $x:y$:
а) $x = 16,8934$, $y = 0,01304$; б) $x = 1680,43367$, $y = 0,002317$.
- 23** Определите, можно ли записать данную дробь в виде конечной десятичной (если да, то запишите):
а) $\frac{3}{15}$; б) $\frac{21}{30}$; в) $\frac{36}{240}$; г) $\frac{15}{50}$.
- 24** Решите задачи:
а) На участке, засеянном пшеницей, получили с 1 га по 32,5 ц пшеницы. Сколько пшеницы можно получить с 2 га, с 5 га, с 0,9 га, с 0,2 га этого участка?
б) Один килограмм крупы стоит 16 р. 60 к. Сколько надо заплатить за 1,5 кг, 0,5 кг, 0,75 кг, 900 г, 250 г такой крупы?
в) Участок поля площадью 10,5 га был засеян рожью по 2,2 ц на 1 га, а участок площадью 5,4 га был засеян по 2,5 ц на 1 га. Сколько осталось ржи, если на посев было закуплено 11 т?
г) Вычислите площадь и периметр прямоугольника, если одна сторона его – 1,9 м, а другая – в 4 раза длиннее.
д) Даша купила 2 пирожка по 12 р., йогурт за 15 р. 50 к., 3 упаковки печенья по 18 р. 20 к. и 4 шоколадки по 11 р. 50 к. В кассу она отдала 200 р. Какую сдачу она должна получить?
е) На 66,50 р. купили 4 пачки печенья и 3 коробки конфет. Каждая коробка конфет стоила в 5 раз дороже пачки печенья. Сколько стоила коробка конфет?
ж) В кассе была некоторая сумма денег. Поступило в кассу 480,50 р., выдано из кассы 538,10 р., после чего в кассе стало 11 330 р. Сколько денег было в кассе первоначально?
з) В дно траншеи с водой забили 10-метровые сваи так, что на 3,4 м они погружены в грунт и на 1,2 м возвышаются над водой. Какова глубина траншеи в этом месте?
и) Скорость автомобиля 65 км/ч. Какое расстояние пройдёт автомобиль за 1,2 ч, за 0,8 ч?
к) Первый пешеход за 2,4 ч прошёл 10,8 км, а второй пешеход за 1,8 ч прошёл 9,9 км. Найдите скорость движения каждого пешехода.
л) Расстояние между двумя пунктами равно 14,4 км. Пешеход прошёл в два раза больше, чем ему осталось пройти. Сколько километров прошёл пешеход?
м) Скорость катера в стоячей воде 23,5 км/ч, скорость течения реки – 2,3 км/ч. Катер отошёл от пристани и пошёл по течению реки. Через 1,25 ч он повернул обратно, прошёл против течения 1 ч и остановился. На каком расстоянии от пристани он остановился?

- н) Скорость катера по течению реки 21,5 км/ч, а против течения – 16,5 км/ч.
Какова собственная скорость катера?

Отношения и пропорции

- 1 Запишите отношение в виде дроби, упростив её, если это возможно:
а) $2 : 5$; в) $49 : 70$; д) $400 : 800$;
б) $45 : 900$; г) $520 : 1\ 560$; е) $54 : 162$.
- 2 Замените отношение дробных чисел равным ему отношением натуральных чисел:
а) $\frac{1}{7} : \frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$; д) $1\frac{5}{12} : \frac{12}{5}$;
б) $\frac{11}{12} : 1\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4} : 2\frac{1}{4}$; е) $\frac{7}{8} : \frac{21}{32}$.
- 3 Выразите величины в одинаковых единицах измерения и упростите отношение:
а) $\frac{6\text{ м}}{9\text{ дм}}$; б) $\frac{9\text{ кг}}{540\text{ г}}$; в) $\frac{500\text{ кг}}{1\text{ т}}$; г) $\frac{500\text{ см}^3}{4\text{ дм}^3}$.
- 4 Найдите отношение:
а) $100 : 25$; в) $25 : 100$; д) $\frac{5}{7} : \frac{1}{14}$;
б) $18 : 0,2$; г) $0,2 : 18$; е) $2\frac{4}{7} : 1\frac{15}{21}$.
- 5 Используя основное свойство пропорции, проверьте, являются ли пропорциями следующие равенства:
а) $6 : 1,2 = 10 : 2$; в) $5 : 2\frac{2}{3} = 3 : 1\frac{3}{5}$;
б) $1 : 0,25 = 0,6 : 0,15$; г) $0,1 : 0,01 = 0,2 : 0,02$.
- 6 Используя основное свойство пропорции, проверьте, можно ли составить пропорцию из данных чисел:
а) 5; 6; 10; 12; в) 2; 6; 4; 12;
б) 9; 1; 9; 81; г) 12; 22; 30; 65.
- 7 Замените каждое равенство несколькими пропорциями:
а) $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$; б) $24 \cdot 10 = 2 \cdot 120$; в) $15 \cdot 6 = 9 \cdot 10$.
- 8 Решите пропорцию:
а) $\frac{x}{15} = \frac{1}{3}$; в) $\frac{0,7}{3,5} = \frac{x}{4,02}$; д) $\frac{x}{12} = \frac{7}{10}$; ж) $\frac{x}{16} = \frac{9}{32}$;
б) $\frac{16}{x} = \frac{4}{5}$; г) $\frac{2,5}{0,38} = \frac{6,5}{x}$; е) $\frac{12}{21} = \frac{x}{14}$; з) $\frac{8}{7} = \frac{15}{x}$.

- 9** Выберите из перечисленных пар величин прямо пропорциональные величины. Обоснуйте свой ответ. Какие из перечисленных пар величин являются обратно пропорциональными? Не являются пропорциональными?
- Скорость движения и путь при постоянном времени.
 - Скорость движения и время при постоянном расстоянии.
 - Производительность труда и время при постоянном объеме работы.
 - Количество товара и стоимость покупки при постоянной цене.
 - Длина и ширина прямоугольника данной площади.
 - Длина стороны квадрата и его площадь.
 - Длина стороны квадрата и его периметр.
 - Объем куба и длина его ребра.
- 10** Решите задачи, основываясь на своих знаниях о прямой и обратной пропорциональных зависимостях.
- В четырёх коробках 60 карандашей. Найдите число карандашей в 12 таких коробках.
 - Расстояние между городами *A* и *B* автомобиль проехал за 4 ч, двигаясь со средней скоростью 80 км/ч. За сколько часов проедет это же расстояние автобус, средняя скорость которого составляет 40 км/ч?
 - Есть два прямоугольника равной площади. Длина первого равна 15 см, а ширина – 6 см. Чему равна ширина второго прямоугольника, если его длина равна 30 см?
 - Туристы планировали пройти маршрут за 6 дней, но вместо 52 км они проходили в день 26 км. За сколько дней был пройден туристами этот маршрут?
- 11** Определите, прямо пропорциональны или обратно пропорциональны величины, о которых идёт речь в задаче. Составьте пропорцию и решите задачу.
- Для окраски в один слой 12 м² забора потребовалось 2,5 кг краски. Сколько краски потребуется для окраски в один слой забора площадью 18 м²?
 - Бригада из 4 человек может выполнить задание за 5 дней. За сколько дней выполнит такое же задание другая бригада из 10 человек, если все члены бригад работают с одинаковой производительностью?
 - В упаковке – 4 стаканчика йогурта. Масса йогурта в такой упаковке составляет 1 кг 200 г. Найдите массу 7 таких стаканчиков йогурта.
 - Для варки варенья из вишни на 12 кг ягод берут 8 кг сахарного песка. Сколько килограммов ягод нужно на 10 кг сахара?
 - За одно и то же время токарь делает 12 деталей, а его ученик – 8 деталей. Сколько деталей сделает ученик токаря за то же время, за которое токарь сделает 54 детали?
Сколько времени потратит ученик токаря на задание, которое токарь выполняет за 1 ч?
- 12** Разделите число:
- | | |
|--------------------------|---|
| а) 16 в отношении 1 : 3; | г) 50 в отношении $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; |
| б) 20 в отношении 2 : 3; | д) 48 в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$; |
| в) 24 в отношении 3 : 5; | е) 45 в отношении $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$. |

13 Решите задачи:

- а) Ремонтные работы стоили 4 200 р. Мастер и его помощник разделили эти деньги в отношении 2 : 1. Сколько получил каждый?
- б) Две девочки разделили между собой 16 открыток в отношении 3 : 5. Сколько открыток досталось каждой?
- в) На пробежку по аллеям парка Егору понадобилось полчаса. Время, которое он затратил на пробежку по боковой аллее, относится ко времени, затраченному на пробежку по главной аллее, как 2 : 3. Сколько времени затрачено на пробежку по каждой из этих аллей?
- г) Сплав состоит из меди и цинка, массы которых относятся как 5 : 3. Масса сплава составляет 2 кг. Сколько в этом сплаве цинка?
- д) Саша и Рустам сложили свои деньги для покупки плеера. Саша внёс 360 р., а Рустам – 240 р. Через некоторое время они продали этот плеер за 450 р. Сколько денег следует получить каждому из них?

14 а) Разделите число 120 пропорционально числам 2 и 4.

б) Разделите число 100 обратно пропорционально числам 2 и 3.

15 а) Скорость велосипедиста в 3 раза больше скорости пешехода. Они одновременно направились навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 12 км. Сколько километров преодолел каждый из них до встречи?

б) Из двух городов, расстояние между которыми равно 120 км, одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль и автобус. Автомобиль прибыл в другой город через 2 ч после выезда, а автобус – через 6 часов после выезда. Сколько километров проехал каждый из них до встречи? (Решите задачу двумя способами.)

в) Один рабочий, работая один, прорывает канаву длиной 27 м за 5 ч, а второй – за 10 ч. Они прорыли эту канаву, работая вместе. Сколько метров канавы прорыл каждый из рабочих?

16 Длина комнаты на плане составляет 3 см, а ширина – 2 см. Какие размеры имеет в реальности эта комната, если масштаб плана 1 : 200? Выразите размеры комнаты в метрах.

17 Определите размеры вашей комнаты на плане с масштабом:

а) 1 : 100;

б) 1 : 5.

Какой из этих планов можно начертить в тетради?

18 а) Площадь квартиры на плане равна 140 см^2 . Чему равна площадь этой квартиры в реальности, если масштаб плана 1 : 100?

б) Площадь этажа составляет 240 м^2 . Чему равна площадь этого этажа на плане с масштабом 1 : 1 000?

в) Площадь двора равна в реальности 960 м^2 , а на плане – 15 см^2 . Какой масштаб этого плана?

- 19 а) Стороны треугольника ABC равны 2 см, 4 см и 5 см. Найдите стороны подобного ему треугольника KMN , если наименьшая сторона этого треугольника равна 0,5 см.
 б) Стороны треугольника ABC равны 2 см, 4 см и 5 см. Найдите стороны подобного ему треугольника LFG , если наибольшая сторона этого треугольника равна 20 см.
 в) Найдите коэффициент подобия треугольников KMN и LFG из заданий а) и б).
- 20 Прямоугольник со сторонами 24 м и 30 м подобен прямоугольнику, одна из сторон которого равна 18 м. Чему может быть равна вторая сторона этого прямоугольника?

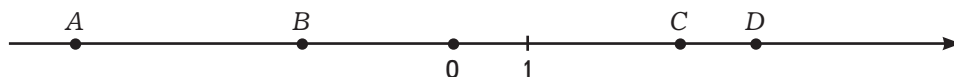
Проценты

- 1 Выразите в процентах:
 а) $\frac{4}{100}$; б) $\frac{27}{100}$; в) $\frac{78}{100}$; г) $\frac{39}{100}$; д) $\frac{115}{100}$; е) $\frac{113}{100}$; ж) $\frac{497}{100}$.
- 2 Выразите процент обыкновенной дробью и, если можно, сократите её:
 а) 12%; б) 20%; в) 35%; г) 45%; д) 70%; е) 90%; ж) 65%; з) 79%.
- 3 Найдите:
 а) 1% от 500; г) 1% от 50; ж) 1% от 5;
 б) 2% от 500; д) 10% от 50; з) 50% от 5;
 в) 1,5% от 500; е) 0,5% от 500; и) $30\frac{2}{7}\%$ от 350.
- 4 Найдите число, если:
 а) 1% от него равен 20; б) 1% от него равен 2; в) 1% от него равен 0,02; г) 2% от него равны 20; д) 10% от него равны 20; е) 50% от него равны 20; ж) 1,5% от него равны 0,6; з) 0,5% от него равны 1,5; и) $35\frac{1}{3}\%$ от него равны 53.
- 5 а) Даша прочитала книгу в 250 страниц за 3 дня. В первый день она прочитала 20% всей книги, во второй день – 50% всей книги, а остальную часть – в третий день. Сколько страниц прочитывала Даша в каждый из трёх дней?
 б) Алёша прочитал книгу за 4 дня. В первый день он прочитал 80 страниц, что составило 20% всей книги, во второй день – 25% всей книги, а в третий и четвёртый дни – оставшуюся часть. Сколько страниц прочитал Алёша за третий и четвёртый дни?
- 6 Во сколько раз увеличится стоимость товара, если она вырастет на
 а) 20%; б) 50%; в) 100%; г) 150%?
- 7 Во сколько раз уменьшится стоимость товара, если его уценят на
 а) 20%; б) 50%; в) 64%; г) 80%?

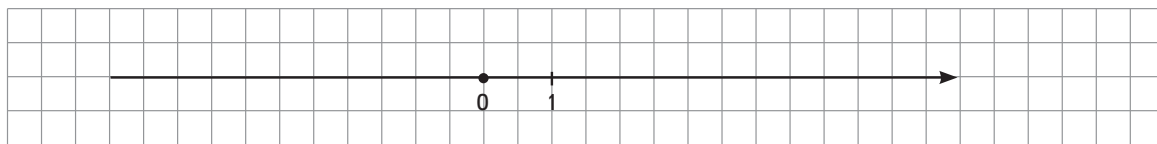
- 8 Участницам конкурса задали 10 заданий. Определите, какую часть составляет число заданий, выполненных участницами, от числа всех заданий, и выразите эту часть в процентах:
- а) Алла выполнила 2 задания;
 - б) Ольга выполнила 4 задания;
 - в) Рита выполнила 9 заданий.
- 9 а) Из 1 000 участников радиовикторины на заданный вопрос верно ответили 250 человек. Каков процент верно ответивших на вопрос викторины? Неверно ответивших?
- б) В доме 1 100 жильцов, из них 825 человек младше пятнадцати лет. Сколько процентов жителей этого дома младше пятнадцати лет, а сколько – старше?
- в) Посадили 100 семян редиса, 75 из них проросло. Каков процент проросших семян?
- 10 а) В прошлом году художественную школу посещали 2 000 человек. В этом году это количество увеличилось на 15%. Найдите число людей, посещающих художественную школу в этом году.
- б) Производство каждого наименования продукции швейной фабрики по сравнению с прошлым годом увеличилось на 20%. Сколько детских курток произвела фабрика в прошлом году, если в этом году их было выпущено 3 600?
- в) Количество врачебных кабинетов в поликлинике после её реконструкции увеличилось в два раза. На сколько процентов увеличилось количество врачебных кабинетов?
- г) После строительства нового корпуса школы площадь пришкольного двора уменьшилась в 1,25 раза. На сколько процентов уменьшилась площадь двора?
- 11 В феврале прибыль составляла 150 000 р., в марте прибыль уменьшилась на 5%, а в апреле увеличилась на 2% по сравнению с мартом. Какова прибыль в марте и какова в апреле?

Целые числа

- 1 Запишите координаты точек на рисунке:



- 2 Начертите в тетради такую же числовую прямую. Отметьте на этой числовой прямой точки: $A(6)$; $B(-5)$; $C(-3)$.



- 3 Выпишите из данных чисел пары противоположных: -6 ; 4 ; -4 ; 6 ; -9 .

- 4 Какой станет координата точки $A(-4)$, если точка переместится:
 а) на 3 единицы влево;
 б) на 2 единицы вправо;
 в) на 7 единиц влево;
 г) на 8 единиц вправо?
- 5 Найдите модуль каждого из чисел: 154; -761 ; 54; -72 ; -3 .
- 6 Найдите значение выражения $|x|$, если $x = -10$ 154; 62; 0; -90 .
- 7 Из двух чисел выберите то, у которого модуль больше:
 а) 19 и -90 ; в) -107 и 109;
 б) -63 и -93 ; г) 9 и 0.
- 8 Укажите значения x , если
 а) $|x| = 8$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -8$.
- 9 Сравните числа:
 а) 45 и 55; б) 45 и -100 ; в) 78 и -78 ; г) -400 и -300 ; д) -105 и -106 .
- 10 Сравните сначала данные числа, а потом числа, им противоположные:
 а) 20 и 50; в) 4 и -5 ;
 б) -5 и -4 ; г) -100 и 50.
- 11 Какие целые числа можно подставить вместо буквы a , чтобы получилось верное неравенство:
 а) $-1 < a < 1$; в) $-3 < a < -2$;
 б) $-2 < a < 2$; г) $-19 < a < -17$?
- 12 Вычислите:
 а) $20 \cdot 64 + 20 \cdot 36$; в) $50 \cdot 198 - 50 \cdot 12$;
 б) $13 \cdot 457 - 557 \cdot 13$; г) $-17 \cdot 23 - 17 \cdot 77$.
- 13 Упростите выражения:
 а) $3 \cdot (-2a)$; д) $(-4x) \cdot (-2)$; и) $7 \cdot (-3y)$;
 б) $(-1) \cdot (6c)$; е) $(-12) \cdot 6y$; к) $(-4a) \cdot (-8)$;
 в) $8a : 2$; ж) $(-12x) : (-4)$; л) $(-15y) : (-3)$;
 г) $(-8c) \cdot 11$; з) $(-2y) \cdot 3$; м) $(-25c) : 5$.
- 14 Вычислите, вынося общий множитель за скобки со знаком «+».
 а) $-21 \cdot 8 - 21 \cdot 2$; в) $55 \cdot 12 - 12 \cdot 45$;
 б) $-72 \cdot 15 - 28 \cdot 15$; г) $-67 \cdot 143 + 27 \cdot 143$.
- 15 Вычислите, вынося общий множитель за скобки со знаком «-».
 а) $-15 \cdot 7 - 15 \cdot 3$; в) $65 \cdot 9 - 9 \cdot 55$;
 б) $-72 \cdot 3 - 28 \cdot 3$; г) $-52 \cdot 33 + 42 \cdot 33$.

16 Найдите значение выражения:

а) $(-2) \cdot (12 + 11)$;

б) $8 \cdot (5 - 30)$;

в) $(-15) \cdot (2 + 10 - 4)$;

г) $(-6) \cdot (-15 - 20)$;

д) $(-7) \cdot (-3 + 7)$;

е) $(8 - 3 - 11) \cdot (-9)$.

17 Вынесите общий множитель за скобки и найдите значение выражения:

а) $(-8) \cdot (-25) + (-8) \cdot (-45)$;

в) $(-11) \cdot 70 + (-11) \cdot 30$;

б) $17 \cdot (-62) + 17 \cdot (-38)$;

г) $19 \cdot (-5) + 19 \cdot (-3) + 19 \cdot (-2)$.

18 Вычислите:

а) $11 \cdot 23 + 11 \cdot 7$;

б) $97 \cdot 298 - 198 \cdot 97$;

в) $-900 \cdot 78 - 900 \cdot 22$;

г) $-999 \cdot 430 - 570 \cdot 999$.

19 Вычислите:

а) $22 \cdot 13 - 12 \cdot 13 - 42 \cdot 154 + 32 \cdot 154$;

б) $38 \cdot 2 - 38 \cdot 25 + 12 \cdot 2 - 38 \cdot 15$;

в) $88 \cdot 75 - 12 \cdot 35 + 12 \cdot 75 - 88 \cdot 25$.

Рациональные числа

1 Прочитайте числа: $\frac{1}{6}$; 6; -6; $-\frac{1}{6}$; $6\frac{3}{4}$; 3,4; -3,4; -90. Укажите:

а) натуральные числа;

б) целые числа;

в) целые положительные числа;

г) целые отрицательные числа;

д) дробные положительные числа;

е) дробные отрицательные числа;

ж) рациональные числа.

2 Отметьте на числовой прямой три любых положительных рациональных числа, а затем найдите и отметьте противоположные им числа.

3 Точка числовой прямой $A(5)$ – центр симметрии. Укажите точку, симметричную относительно этого центра точке:

а) $M\left(\frac{1}{3}\right)$; б) $N(1,5)$; в) $V(-0,2)$; г) $K(-5)$; д) $L(9)$.

4 Точка числовой прямой A – центр симметрии для пары точек M и N . Укажите координаты точки A , если:

а) $M(-6)$ и $N(8)$; б) $M(-0,5)$ и $N(4,5)$; в) $M(-2)$ и $N(-1)$.

5 а) Известно, что $|x| = 2,8$. Чему равен $|-x|$?

б) Укажите $|x|$, если $|-x| = 1,54$.

6 Из двух чисел выберите то, у которого модуль больше:

- а) 0,9 и 0,8;
- б) -3,7 и -6,8;
- в) -99 и 97;
- г) -0,109 и 0;
- д) 0,0009 и 0.

7 Сравните ($>$; $<$; $=$):

а) $|-17|$ и $|-19|$;

б) $|-1,9|$ и $|-1,8|$;

в) $\left|-\frac{1}{8}\right|$ и $\left|-\frac{1}{12}\right|$;

г) $\left|-\frac{3}{4}\right|$ и $\left|-\frac{1}{2}\right|$;

д) $|-4,2|$ и $|-4,7|$;

е) $|-0,15|$ и $|-0,12|$.

8 Сравните ($>$; $<$; $=$):

а) -17 и -19;

б) -1,7 и -1,9;

в) $-\frac{1}{8}$ и $-\frac{1}{12}$;

г) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{2}$;

д) -4,2 и -4,7;

е) -0,15 и -0,12.

9 Сравните ($>$; $<$; $=$):

а) 1,1 и -2;

в) -1,9 и -1,8;

д) $-3\frac{1}{7}$ и $3\frac{1}{7}$;

б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{5}$;

г) -0,45 и -0,9;

е) 0,761 и 0,754.

10 Расположите десятичные дроби в порядке

- а) возрастания: -0,01072; -0,12072; -0,01072; -0,012072;
- б) убывания: -0,15004; -0,154; -0,15404; -0,10154.

11 Вычислите:

а) $9 - 9$;

г) $0 - 8$;

ж) $-10 + 12$;

к) $-7 + 8$;

б) $-5\frac{7}{12} + 5\frac{7}{15}$;

д) $3\frac{4}{9} + 7\frac{8}{9}$;

з) $-\frac{9}{20} - \frac{11}{20}$;

л) $-\frac{10}{11} + 0$;

в) $-2,1 + 2,1$;

е) $-4,5 + 9$;

и) $-1,4 + 0$;

м) $2,2 - 4,2$.

12 Вычислите:

а) $0,67 + 0,33 - 9$;

е) $44 - 1,2 - 2,8$;

б) $-25 + 0,2 - 15 + 0,8$;

ж) $100 - 4 - 80 - 16$;

в) $5,5 - 15 - 15,5 - 85$;

з) $4,3 - 14 + 5,7 + 4$;

г) $6,7 + 3,3 - 999$;

и) $-6 - 0,83 - 0,17$;

д) $-3 + 11 - 8 + 0,000015$;

к) $2 - 15 - 5 - 2$.

13 Вычислите:

а) $-(9,8 + 6,9) - (10,2 - 6,9)$;

б) $(1,59 + 3,47) - (2,47 + 0,59)$;

в) $(1,9 + 2,5) - (5,9 - 2,5)$;

г) $(0,85 + 1,5) - (-0,65 - 3,5)$;

д) $(15,4 - 154) - (5,4 - 154)$;

е) $-(9,5 + 10,5) - (3,98 - 0,98)$;

ж) $(48 + 15) - (48 - 15)$;

з) $(1,2 + 4,5) - (1,2 - 4,5)$.

14 Найдите произведение, используя свойства умножения:

а) $(-2) \cdot (-6) \cdot 5 \cdot 15$;

б) $15 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot 25$;

в) $-0,25 \cdot 0,8 \cdot (-4) \cdot 1,25$;

г) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{15}$;

д) $\left(-2\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-8\frac{2}{9}\right) \cdot 4 \cdot (-9)$;

е) $(-0,02) \cdot (-0,5) \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$.

15 Упростите выражения:

а) $6 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)$;

в) $(-9x) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

д) $3 \cdot \left(-\frac{9}{12}y\right)$;

ж) $(-8c) \cdot \frac{3}{32}$;

б) $(-1) \cdot \left(\frac{1}{11}c\right)$;

г) $(-12) \cdot \frac{5}{4}y$;

е) $(-5a) \cdot \left(-\frac{2}{45}\right)$;

з) $(-17y) \cdot \frac{1}{17}$.

16 Вычислите:

а) $32 \cdot 33 - 22 \cdot 33 - 52 \cdot 43 + 42 \cdot 43$;

б) $38 \cdot 2 - 38 \cdot 15 + 12 \cdot 2 - 38 \cdot 5$;

в) $88 \cdot 25 - 12 \cdot 25 + 12 \cdot 25 - 88 \cdot 25$.

17 Вычислите:

а) $-\frac{2}{5} : 6$;

в) $-\frac{5}{8} : (-15)$;

д) $-\frac{2}{9} : (-8)$;

ж) $2 : \left(-\frac{2}{7}\right)$;

б) $-6 : \frac{3}{12}$;

г) $-\frac{2}{7} : \frac{8}{7}$;

е) $\frac{1}{45} : \left(-\frac{2}{15}\right)$;

з) $-5\frac{4}{9} : \frac{1}{9}$.

18 Вынесите общий делитель за скобки и вычислите:

а) $0,48 : 20 + 1,52 : 20$;

в) $0,84 : 0,05 - 0,34 : 0,05$;

б) $5,4 : 2 + 4,6 : 2$;

г) $101,5 : 50 - 1,5 : 50$.

19 Постройте систему координат с единичным отрезком на каждой оси, равным 1 см, затем построьте указанные фигуры и найдите их площади:

а) квадрат $PQRS$ с вершинами $P(2; 3)$, $Q(6; 3)$, $R(6; 7)$, $S(2; 7)$;

б) четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(0; -1)$, $B(6; 0)$, $C(7; 5)$, $D(3; 3)$.

20 Постройте на координатной плоскости четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(-4; 0)$, $B(2; 4)$, $C(5; 3)$, $D(2; 0)$. Какие координаты имеет точка пересечения его диагоналей?

Действительные числа

- 1 Укажите, какие из обыкновенных дробей можно представить в виде конечных десятичных, а какие нельзя. Обоснуйте свой ответ.
а) $-\frac{1}{15}$; б) $\frac{1}{20}$; в) $-\frac{1}{45}$; г) $\frac{1}{25}$.
- 2 Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби:
а) 0,6; б) -0,8; в) 0,2; г) -0,025; д) 0,5.
- 3 Представьте обыкновенные дроби в виде конечных десятичных:
а) $-\frac{1}{8}$; б) $\frac{12}{75}$; в) $-\frac{3}{40}$; г) $-\frac{3}{50}$; д) $\frac{2}{25}$.
- 4 Запишите число в виде периодической дроби, назовите её период:
а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{11}$; в) $-\frac{1}{9}$; г) $-\frac{2}{13}$.
- 5 Запишите каких-нибудь пять:
а) рациональных чисел;
б) иррациональных чисел.
- 6 а) Существует ли такое рациональное число, которое можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби?
б) Любое ли действительное число является иррациональным?
- 7 Запишите каких-нибудь пять:
а) натуральных чисел;
б) целых отрицательных чисел;
в) целых неотрицательных чисел;
г) дробных отрицательных чисел.
Какие из этих чисел являются рациональными?
- 8 Найдите приближённо сумму чисел, округляя слагаемые до сотых:
а) $1,7 + 1,(7)$; б) $10,162 + 0,(84)$; в) $10,769 + 0,(3)$; г) $9,(18) + 4,(81)$.
- 9 Найдите приближённо разность чисел, округляя уменьшаемое и вычитаемое до десятых:
а) $9,(4) - 1,(54)$; б) $100,(19) - 99,9954$; в) $4,(94) - 1,(49)$; г) $6,07 - 7,(01)$.
- 10 Найдите приближённо произведение чисел, беря множители с точностью до третьей значащей цифры:
а) $5,(4) \cdot 11,(5)$; б) $0,(25) \cdot 0,(5)$; в) $7,(1) \cdot 9,(3)$; г) $10,(65) \cdot 1,(2)$.

- 11 Найдите приближённо частное чисел, беря делимое и делитель с точностью до второй значащей цифры:
а) $0,1(4) : 0,01(2)$; б) $0,9(8) : 0,(3)$; в) $0,08(8) : 0,00(8)$; г) $0,6(87) : 0,233$.

Элементы геометрии

- 1 Один из смежных углов равен:
а) 20° ; б) 35° ; в) 65° ; г) 100° ; д) 110° ; е) 130° ; ж) 170° .
Найдите другой угол.
- 2 Один из смежных углов на 20° больше другого. Найдите эти углы.
- 3 Один из смежных углов в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.
- 4 Известен один из углов, образованных при пересечении двух прямых:
а) 25° ; б) 80° ; в) 45° ; г) 120° .
Найдите остальные углы.
- 5 Какую часть прямого угла составляет угол:
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ?
А какую часть развёрнутого угла?
- 6 Проведите в тетради две параллельные прямые. Выполняя необходимые построения и измерения, найдите расстояние между этими прямыми.
- 7 С помощью линейки и угольника проведите через точку вне данной прямой прямую, параллельную данной.
- 8 Верно ли, что противоположные стороны прямоугольника параллельны?
- 9 Докажите, что параллельные прямые являются равноотстоящими.
- 10 Верно ли, что две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой?
- 11 а) Найдите периметр параллелограмма со сторонами 6 см и 9 см.
б) Периметр параллелограмма равен 20 м, а одна из его сторон равна 4,5 м.
Найдите другую сторону.
- 12 Один из углов параллелограмма равен 60° . Найдите все остальные углы.
- 13 Начертите в тетради произвольный параллелограмм. Проведя необходимые измерения и вычисления, найдите его периметр и площадь.
- 14 Периметр параллелограмма равен 70 дм. Найдите его стороны, если известно, что одна из них в 1,5 раза длиннее другой.

- 15) Периметр параллелограмма равен 144 см. Найдите его стороны, если известно, что одна из них на 3 дм длиннее другой.
- 16) а) Верно ли высказывание «Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равных треугольника»?
б) Верно ли высказывание «Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре треугольника с равными площадями»?
- 17) Верно ли высказывание «Если диагонали разбивают четырёхугольник на четыре равных треугольника, то этот четырёхугольник – ромб»?
- 18) Постройте квадрат с диагональю 8 см.
- 19) а) Постройте прямоугольник с диагональю 10 см и стороной 6 см.
б) Постройте ромб с диагональю 10 см и стороной 6 см.
- 20) Проведите прямую l и отметьте произвольную точку A вне этой прямой.
а) Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой l .
б) Постройте прямую, симметричную прямой l относительно точки A .
- 21) Существует ли четырёхугольник, имеющий центр симметрии и не являющийся параллелограммом?
- 22) Начертите произвольный треугольник ABC . Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC , если центр симметрии:
а) совпадает с вершиной A ;
б) совпадает с серединой отрезка AB ;
в) лежит внутри отрезка AB и не совпадает с его серединой;
г) лежит вне треугольника ABC ;
д) лежит внутри треугольника ABC .
- 23) Начертите произвольный треугольник ABC . Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC , если ось симметрии:
а) проходит через вершину A и не имеет с треугольником ABC других общих точек;
б) проходит через вершину A и пересекает сторону BC ;
в) пересекает стороны AB и AC ;
г) не имеет с треугольником ABC общих точек.
- 24) Начертите произвольный угол ABC . Постройте фигуру, симметричную углу ABC , если центр симметрии:
а) совпадает с вершиной угла;
б) лежит на одной из сторон угла;
в) лежит вне угла;
г) лежит внутри угла.

- 25 Начертите произвольный угол ABC . Постройте фигуру, симметричную углу ABC , если ось симметрии:
- а) проходит через одну из сторон угла;
 - б) пересекает обе стороны угла;
 - в) пересекает только одну сторону угла;
 - г) не пересекает ни одну из сторон угла.

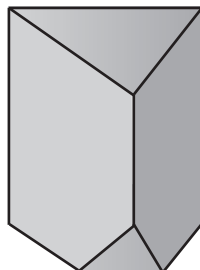
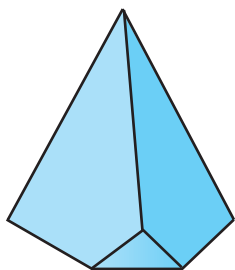
Геометрические и комбинаторные задачи

- 1 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами:
- а) $A(7; 2)$, $B(2; 7)$, $C(-3; -3)$;
 - б) $A(-2; 4)$, $B(4; 9)$, $C(5; -6)$;
 - в) $A(9; 6)$, $B(1; 9)$, $C(4; 8)$;
 - г) $A(3; -1)$, $B(-2; -7)$, $C(-7; 12)$;
 - д) $A(-4; 3)$, $B(6; -9)$, $C(7; 2)$.
- 2 Можно ли разрезать прямоугольник 8×12 на две части, а затем сложить из них квадрат?
- 3 Разрежьте прямоугольник 9×16 на две равные части, а затем сложите из них квадрат.
- 4 На какие одинаковые фигуры тетрамино можно разрезать прямоугольник 6×4 ?
- 5 Разрежьте квадрат 4×4 на две равные фигуры. Сколько различных способов вам удалось найти?
- 6
- а) Сколькими способами можно упорядочить множество из 7 элементов?
 - б) На тренировку пришли семеро семиклассников. Сколькими способами их можно построить в ряд?
 - в) Сколько различных семизначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1; 2; 3; 4; 5; 6 и 7?
- 7 Футбольная форма состоит из футболки, трусов и гетр. Команда «Метеор» имеет 3 различных комплекта футболок, 4 различных комплекта трусов и 2 различных комплекта гетр. Сколько различных вариантов футбольной формы имеет команда «Метеор»?
- 8 В футбольной команде «Метеор» 25 спортсменов. Им нужно выбрать капитана и двух равноправных вице-капитанов. Сколькими различными способами они могут это сделать?
- 9 В непрозрачной коробке лежит 8 шариков: 3 чёрных и 5 белых. Наугад вынимается два шарика. Какова вероятность того, что оба вынутых шарика белые?
- 10 В непрозрачной коробке лежит 8 шариков: 3 чёрных и 5 белых. Наугад вынимается три шарика. Какова вероятность того, что все вынутые шарики белые?

- 11** Как найти количество троек на множестве из 10 элементов, если:
 а) порядок элементов в тройке несуществен (тройки неупорядоченные);
 б) порядок элементов в тройке существен (тройки упорядоченные)?
- 12** Найдите значения выражений: а) $\frac{5!}{6!}$; б) $\frac{10!}{8!}$; в) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.
- 13** Из 14 разноцветных шариков (4 красных, 7 синих, 3 зелёных) наугад выбрали два шарика. Найдите вероятности событий:
 К) оба шарика красные; С) оба шарика синие; З) оба шарика зелёные; А) один шарик красный и один синий; Б) один шарик красный и один зелёный; В) один шарик синий и один зелёный.
- 14** Имеется пять карточек, на двух из которых написана буква «А», на двух других – буква «Н» и на одной – буква «Б». Карточки положили буквами вниз, затем выложили в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что после переворачивания карточек получится слово БАНАН?
- 15** а) В ряд случайным образом выложены четыре кубика: синий, жёлтый, красный и оранжевый. Какова вероятность того, что жёлтый и оранжевый кубики окажутся рядом?
 б) В кружок случайным образом выложены четыре кубика: синий, жёлтый, красный и оранжевый. Какова вероятность того, что жёлтый и оранжевый кубики окажутся рядом?
- 16** Сколько у семиугольной призмы:
 а) вершин; б) рёбер; в) граней?
- 17** Сколько у семиугольной пирамиды:
 а) вершин; б) рёбер; в) граней?
- 18** а) У призмы 26 граней. Какая это призма?
 б) У пирамиды 26 граней. Какая это пирамида?
- 19** а) У призмы 36 рёбер. Сколько у неё граней и сколько вершин?
 б) У пирамиды 36 рёбер. Сколько у неё граней и сколько вершин?
- 20** Можно ли разрезать треугольную призму на
 а) две треугольные призмы;
 б) две четырёхугольные призмы;
 в) одну треугольную и одну четырёхугольную призмы?
- 21** Можно ли разрезать треугольную пирамиду на
 а) две треугольные пирамиды;
 б) две четырёхугольные пирамиды;
 в) одну треугольную и одну четырёхугольную пирамиды?

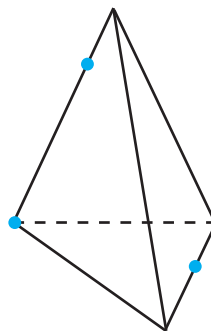
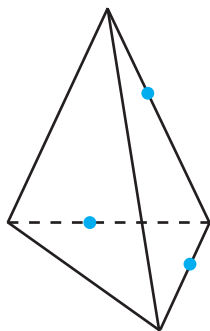
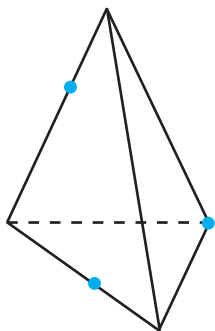
- 22 а) Параллелепипед рассечён плоскостью на два многогранника. Может ли у каждого из них быть вершин меньше, чем у параллелепипеда? А рёбер? А граней?
- б) Тетраэдр рассечён плоскостью на два многогранника. Может ли у каждого из них быть вершин меньше, чем у тетраэдра? А рёбер? А граней?

- 23 а) У тетраэдра отпилили угол как на левом рисунке. Сколько у полученного многогранника граней, вершин, рёбер?



- б) У треугольной призмы отпилили угол как на правом рисунке. Сколько у полученного многогранника граней, вершин, рёбер?

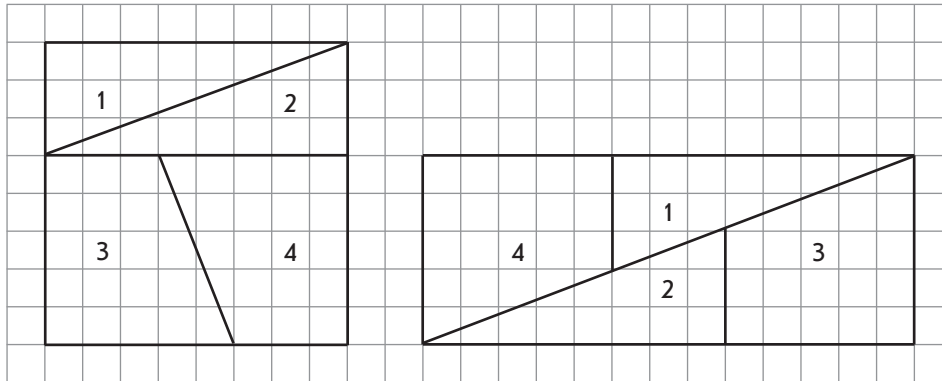
- 24 Постройте сечения тетраэдра, проходящие через отмеченные точки.



- 25 Параллелепипед с длинами рёбер 6 м, 8 м и 11 м составлен из кубиков с длиной ребра 1 м. Сколько удалили кубиков, убрав весь внешний слой толщиной в один кубик?

- 26 а) Через каждую грань параллелепипеда провели плоскость (так, что эта грань лежит в проведённой плоскости). На сколько частей разбилось пространство?
- б) Ответьте на такой же вопрос для тетраэдра.

- 27 Квадрат 8×8 разрезали на четыре части (левый чертёж) и сложили из них прямоугольник 13×5 (правый чертёж). Но площадь квадрата равна 64, а прямоугольника – 65. Получается, что $64 = 65$?



ОТВЕТЫ

6.1. № 18. а) -5 ; б) 0 ; в) -7 ; г) 8 . № 19. а) -3 ; б) 0 . № 20. а) $A(0)$; $B(-1)$; $C(1)$; б) $A(1)$; $B(0)$; $C(2)$; в) $A(-1)$; $B(-2)$; $C(0)$.

6.2. № 12. Прав. № 18. а) 1 ; б) -1 ; в) 1 . № 19. а) 2 ; 8 ; б) -18 ; 4 .

6.3. № 13. $-a > -b$. № 14. $-a > -b$. № 15. а) $|a|$; б) $2|a|$; в) $|a|$; г) $4|a|$. № 19. $-a > -b$.

6.4. № 19. б) да; в) нет; г) да. № 22. а) -60 ; б) -90 ; в) -150 . № 24. а) нет; б) да.

6.5. № 13. а) -14 ; б) -6 ; в) -12 ; г) -36 . № 16. а) -15 ; б) -8 ; в) 18 ; г) -1 . № 17. а) 160 ; б) -100 ; в) 2 ; г) -6 . № 20. а) -340 ; б) -40 ; в) -140 ; г) -160 . № 21. б) да; в) да; г) нет.

6.6. № 19. а) 728 ; б) -910 ; в) -540 ; г) $2\ 200$; д) 120 ; е) $40\ 000$. № 21. в). № 23. б) да; в) нет; г) нет. № 24. а) x^2 ; г) $-x^2$.

6.7. № 11. б) да; в) нет; г) нет. № 14. а) -4 ; б) 3 ; в) 65 ; г) -42 . № 15. а) 1 ; б) -1 . № 16. Нет.

6.8. № 15. а) $(x : y) : z$; б) $(x : y) \cdot z$. № 19. а) -100 ; б) $-1\ 200$; в) $3\ 000$. № 20. а) -50 ; б) -100 .

7.1. № 13. а) -1 ; б) 2 ; в) $-0,75$. № 14. $E\left(-24\frac{1}{2}\right)$. № 18. а) $A(0)$; $B\left(-\frac{1}{4}\right)$; $C\left(\frac{1}{4}\right)$; б) $A\left(\frac{1}{4}\right)$; $B(0)$; $C\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $A\left(-\frac{1}{4}\right)$; $B\left(-\frac{1}{2}\right)$; $C(0)$. № 20. а) $-0,3$; б) 0 .

7.2. № 12. а) да; б) нет. № 13. а); б); в); г). № 17. а) $|a| < |b|$; б) $|a| > |b|$; в) $|a| > |b|$; г) $|a| < |b|$. № 19. а) модулю самого числа; б) нулю.

7.3. № 12. а) $-7,1$; $7,1$; б) 0 ; в) не существуют. № 13. а) либо равны, либо второе больше; б) либо равны, либо второе больше; в) равны. № 18. а) 3 ; 5 ; -9 ; -5 ; б) нет; в) нет; г) да.

7.4. № 13. а) -750 ; б) -200 ; в) $1\ 100$. № 14. а) $-4a$; б) $-a$; в) $12a$; г) $-13a$. № 16. а) нет; б) да. № 17. а) 12 ; б) $-50,1$; в) -10 ; г) 0 ; д) 0 ; е) $-8,2$. № 18. а) $4,393$; б) $-\frac{1}{102}$. № 20. $-a$.

7.5. № 9. а) -20 ; б) 2 ; в) 7 ; г) $6,5$; д) 10 ; е) -23 ; ж) 30 ; з) $7,4$. № 14. а) $-\frac{3}{5}$; б) $-\frac{11}{15}$; в) $\frac{79}{105}$. № 15. а) $(x - y) - z$. № 16. а) $(x - y) + z$. № 18. а) да; б) да; в) нет.

7.6. № 17. а) $\frac{7}{24}$; $-3\frac{3}{7}$; б) $-3,2375$; -2 . № 21. а) $-12a$; б) $-12c$; в) $16x$; г) $-90y$; д) $-14y$; е) $16a$; ж) $-99c$; з) $-36y$. № 24. а) -1 ; б) -12 ; в) 3 .

7.7. № 10. а) $-0,3$; б) -3 ; в) $0,3$; г) -4 . № 12. а) $3,78$; б) $14,7$; в) $0,035$. № 13. а) $3\frac{16}{113}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{5}{12}$. № 16. а) $-0,4$; б) $0,03$; в) $0,065$; г) $-4,2$.

7.8. № 12. а) 10 см^2 ; б) 24 см^2 . № 14. а) $(-2; 6)$; б) $(-1, 1; -0,5)$; в) $\left(\frac{m+p}{2}; \frac{n+q}{2}\right)$. № 15. $(2; 1)$.

7.9. № 12. Нет. № 13. Да. № 14. Ни одной, одну, две, четыре. № 16. А, В, С, D, Е, К, М, Т, U, V, W, Y – по одной; Н, I, О, X – по две. № 17. Л и Г; Н и И; Р и Я. № 19. Да. Бесконечное множество. № 20. Да. Если прямые не перпендикулярные, то две, а если перпендикулярные, то четыре. № 23. а) $(a; -b)$; $(-a; b)$; $(-a; -b)$.

8.1. № 10. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $2\frac{5}{9}$; г) $\frac{3}{11}$; д) $5\frac{5}{99}$. № 15. а) $1\frac{1}{90}$; б) $1\frac{49}{90}$; в) $8\frac{34}{45}$. № 17. а) 6 ; б) 2 ; в) 1 ; г) 1 .

8.2. № 13. Нет. № 21. Нет. № 23. а) Валя; б) Валя.

8.3. № 9. а) $11,4$; $11,2$; б) $5,3$; $3,1$; в) $-2,0$; $2,6$; г) $0,9$; $0,5$. № 10. а) 15 ; $0,70$; б) $1,7$; $8,7$; в) $8,8$; 140 . № 12. Да. № 14. а) $2,44$; $0,00378$; б) $10,0$; $0,00000000400$. № 16. а) да; б) нет.

8.4. № 6. а) 5 ; $5,7$; $5,77$; б) 4 ; $4,0$; $4,05$; в) 2 ; $2,7$; $2,73$. № 8. а) 2 ; $2,1$; $2,14$; б) 3 ; $3,1$; $3,11$; в) 1 ; $1,1$; $1,12$.

8.5. № 5. а) $18\pi \text{ см}^2$; б) $0,25\pi \text{ см}^2$; в) $3\pi \text{ см}^2$. № 6. Равны. № 7. Увеличится на $6\pi \text{ см}$. № 8. а) $9,42 \text{ м}$; б) $4,5 \text{ м}$; в) $21,7 \text{ м}$. № 9. $50,24 \text{ м}^2$; $12,56 \text{ м}^2$. № 10. $24,56 \text{ м}$; $36,56 \text{ м}^2$. № 11. $32\pi \text{ см}^2$.

9.1. № 10. а) $55,5$; б) $62,5$. № 12. 47 . № 15. 15 ; 14 . № 18. 39 внутри, 8 на границе. № 19. б) $0,5$.

9.2. № 9. а) ряд, квадрат, зигзаг; б) квадрат – 4 , ряд – 2 , шип – 1 . № 11. На любые, кроме зигзага. № 13. а) да; б) нет. № 16. Нет. № 18. Да. № 19. Ряд, квадрат. № 21. а) нет; б) нет.

9.3. № 9. а) 7 ; б) 72 ; в) n . № 10. К) $\frac{1}{19}$; С) $\frac{21}{190}$; З) $\frac{14}{95}$; А) $\frac{7}{38}$; Б) $\frac{4}{19}$; В) $\frac{28}{95}$. № 11. $\frac{1}{6}$.

№ 12. а) $0,2$; б) $0,2$. № 13. 210 . № 14. О) $\frac{65}{276}$; Р) $\frac{211}{276}$. № 15. А) $\frac{1}{19}$; Б) $\frac{3}{95}$; В) $\frac{5}{38}$; Г) $\frac{8}{95}$.

№ 16. а) 455; б) 2 730. № 17. 120. № 18. 1 728 000. № 19. а) 0,729; б) 0,001. № 20. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$.
№ 21. А) $\frac{5}{42}$; Б) $\frac{1}{21}$; В) $\frac{5}{14}$; Г) $\frac{10}{21}$.

9.4. № 5. Нет. № 6. Да; да; да. № 9. а) $n + 1$; б) $2n$; в) $n + 1$. № 10. Нет. № 11. а) нет; б) нет;
в) да; г) да. № 12. Да. № 14. 2. № 15. а) $2n$; б) $3n$; в) $n + 2$. № 16. Нет. № 17. а) 36; б) 37.
№ 18. По 60° . № 19. а) да; б) да; в) нет.

9.5. № 7. Параллелепипед, четырёхугольная пирамида, треугольная призма. № 10. B , D и
 H ; E и G ; J и N ; A и I ; K и M . № 11. $AF = FE$, $AB = ED$, $BC = CD$. № 12. а); б); г); д); е); з).
№ 13. 24 ребра, 12 вершин. № 17. Крайние. № 18. 2.

9.6. № 8. а) 7; 10; 15; б) 8; 12; 18; в) 8; 12; 18. № 10. 6. № 11. а) 64; б) 8; в) 24; г) 24; д) 8.
№ 12. а) да; б) да. № 15. 3 : 4. № 16. Да. № 18. 210. № 19. 5 для выпуклой и 6 для невыпуклой.
№ 20. 4; 5; 6; 7; 8. № 21. 6.

Содержание

РАЗДЕЛ III. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

| | |
|--------------------|---|
| Входной тест | 5 |
|--------------------|---|

| | |
|--|---|
| Путеводитель по третьему разделу | 6 |
|--|---|

Глава VI. Целые числа

| | |
|--|----|
| 6.1. Целые отрицательные числа | 8 |
| 6.2. Модуль целого числа | 15 |
| 6.3. Сравнение целых чисел | 19 |
| 6.4. Сложение целых чисел | 23 |
| 6.5. Вычитание целых чисел | 32 |
| 6.6. Умножение целых чисел | 38 |
| 6.7. Деление целых чисел | 43 |
| 6.8. Вычисления с целыми числами | 47 |

Глава VII. Рациональные числа

| | |
|--|----|
| 7.1. Отрицательные дроби. Рациональные числа | 53 |
| 7.2. Модуль рационального числа | 60 |
| 7.3. Сравнение рациональных чисел | 64 |
| 7.4. Сложение рациональных чисел | 69 |
| 7.5. Вычитание рациональных чисел | 76 |
| 7.6. Умножение рациональных чисел | 81 |
| 7.7. Деление рациональных чисел | 87 |
| 7.8. Координатная плоскость | 92 |
| 7.9. Симметрия относительно прямой | 98 |

| | |
|---------------------|-----|
| Итоговый тест | 105 |
|---------------------|-----|

| | |
|-----------------------------|-----|
| Исторические страницы | 106 |
|-----------------------------|-----|

| | |
|----------------------------|-----|
| Любителям математики | 107 |
|----------------------------|-----|

| | |
|------------------------|-----|
| Жизненная задача | 108 |
|------------------------|-----|

РАЗДЕЛ IV. ПОНЯТИЕ О ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

| | |
|--------------------|-----|
| Входной тест | 109 |
|--------------------|-----|

| | |
|--|-----|
| Путеводитель по четвёртому разделу | 110 |
|--|-----|

Глава VIII. Понятие о действительных числах

| | |
|--|-----|
| 8.1. Бесконечные периодические десятичные дроби | 112 |
| 8.2. Бесконечные непериодические десятичные дроби. Действительные числа | 117 |
| 8.3. Сравнение действительных чисел. Приближённые вычисления с действительными числами | 121 |
| 8.4. Длина отрезка | 125 |
| 8.5. Длина окружности. Площадь круга | 129 |

Глава IX. Геометрические и комбинаторные задачи

| | |
|---|-----|
| 9.1. Геометрия на клетчатой бумаге | 132 |
| 9.2. Задачи на разрезание и составление фигур | 140 |

| | | |
|-------------------------------|--|-----|
| 9.3. | Решение задач на перебор вариантов и вычисление вероятностей | 148 |
| 9.4. | Многогранники. Отпечатки многогранников | 159 |
| 9.5. | Развёртки многогранников | 165 |
| 9.6. | Понятие о сечении многогранника | 172 |
| Итоговый тест | | 179 |
| | Исторические страницы | 180 |
| | Любителям математики | 181 |
| | Жизненная задача | 182 |
| | Проекты | 183 |
| Задания для повторения | | 184 |
| Ответы | | 203 |

Козлова Светлана Александровна, **Рубин** Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

6 класс

В 2 частях. Часть 2

Концепция оформления и художественное редактирование – *Е.Д. Ковалевская*

Подписано в печать 17.05.15. Формат 84x108/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Гарнитура Журнальная. Объём 13 п.л. Тираж 4 000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс». 109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1

Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»

Телефоны для справок: (495) 368-70-54, 672-23-34, 672-23-12

<http://www.school2100.ru>

E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»

ОАО «Издательство «Высшая школа»»

214020 Смоленск, ул. Смольянинова, 1